RESOLUCIÓN DE UN PROGRAMA LINEAL POSIBILÍSTICO MEDIANTE PROGRAMACIÓN COMPROMISO

Mariano Jiménez
Dpto. Economía Aplicada I
Universidad del País Vasco
e-mail:eupjilom@se.ehu.es

Mar Arenas, Amelia Bilbao, M. Victoria Rodríguez
Dpto. Economía Cuantitativa
Universidad de Oviedo
e-mail: mariamar@sci.cpd.uniovi.es

Resumen

En este trabajo nos planteamos la resolución de un programa lineal con coeficientes imprecisos cuya distribución de posibilidad está definida por números difusos. Para comparar números difusos utilizamos una relación de preferencia difusa lo que nos permitirá hablar de soluciones factibles en grado α. Cuanto mayor grado de factibilidad exijamos más restringido es el conjunto de soluciones factibles, por lo que peor será el valor objetivo. Así el decisor se encuentra con dos objetivos en conflicto. Surge de esta forma un programa biobjetivo que resolveremos utilizando la programación compromiso. Para trabajar con distancias entre números difusos utilizamos un reciente resultado obtenido por Heilpern [3]. Finalmente resolvemos un ejemplo numérico para ilustrar el procedimiento propuesto.

Palabras Clave: Programación lineal, Distribución de posibilidad, Número difuso, Intervalo esperado, Valor esperado, Ordenación de números difusos, Programación compromiso.

1 PROGRAMACIÓN LINEAL POSIBILÍSTICA

En [1] hemos planteado y resuelto el siguiente problema de programación lineal con parámetros difusos:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \tilde{z} = \tilde{c}^t x \\ \text{sujeto a} & x \in \mathcal{X}(\tilde{A}, \tilde{b}) = \left\{ x \in I\!R^n \;/\; \tilde{A}x \geq \tilde{b}, x \geq 0 \right\} \end{array} \tag{1}$$

Donde $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n)$, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{mxn}$, $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m)$, representan los parámetros, definidos por números difusos. El concepto de solución que definimos en nuestro trabajo anterior nos permitió disponer de un número difuso, $\tilde{z}^*$, que constituía la solución del problema en el espacio objetivo.

Aquí nos proponemos asociar al problema (1) un vector de decisión que represente una solución del mismo en el espacio de las variables instrumentales, este objetivo nos lleva a plantearnos dos cuestiones [6]:

– *Factibilidad* de un vector de decisión cuando los elementos de la matriz tecnológica y los del vector de disponibilidad de recursos son números difusos , y
– *Optimalidad* de un vector para una función objetivo con coeficientes difusos.

Se han desarrollado en la literatura diferentes enfoques, basados en la comparación de números difusos, para resolver este problema y responder a estas preguntas. En este trabajo hemos utilizado el método de comparación de números difusos desarrollado por Jiménez [4]. Dicha elección se justifica por las "buenas" propiedades que verifica dicho método: expresión difusa de la relación de preferencia, poder de discriminación, racionalidad y robustez [8]. Además es computacionalmente eficiente ya que conserva la linealidad de las restricciones.

Definición 1. Dados dos números difusos $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$, definimos la relación difusa de preferencia $M(\tilde{a}, \tilde{b})$ mediante la siguiente función de pertenencia [4]:

$$\mu_M = \begin{cases} 0 & \text{si } E_2^a - E_1^b < 0 \\ \frac{E_2^a - E_1^b}{E_2^a - E_1^b - (E_1^a - E_2^b)} & \text{si } 0 \in \left[E_1^a - E_2^b, E_2^a - E_1^b\right] \\ 1 & \text{si } E_2^a - E_1^b > 0 \end{cases} \tag{2}$$

siendo $[E_1^a, E_2^a]$ y $\left[E_1^b, E_2^b\right]$ los intervalos esperados [2] de $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ respectivamente. $\mu_M\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right)$ es el grado en que $\tilde{a}$ es mayor que $\tilde{b}$. Si $\mu_M\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right) \geq \alpha$, lo representaremos por $\tilde{a} \geq_\alpha \tilde{b}$ y diremos que $\tilde{a}$ es mayor que $\tilde{b}$ por lo menos en un grado igual a α. Cuando $\mu_M\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right) = \frac{1}{2}$ diremos que $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ son indiferentes.

Definición 2. Un vector de decisión $x \in I\!R^n$, diremos que es factible en grado α para (1), si:

$$\min_{j=1,\ldots,m} \{\mu_M(a_j x, b_j)\} = \alpha \tag{3}$$

es decir, si:

$$\tilde{a}_j x \geq_\alpha \tilde{b}_j, \ \forall j = 1, \ldots, m \tag{4}$$

lo que teniendo en cuenta (2) es equivalente a:

$$\left[(1-\alpha)E_2^{a_j} + \alpha E_1^{a_j}\right] x \geq \alpha E_2^{b_j} + (1-\alpha)E_1^{b_j} \tag{5}$$

Denotaremos por $\mathcal{X}(\alpha)$, al conjunto formado por todos los vectores de decisión que sean α-factibles. Es evidente que:

$$\alpha_1 < \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}(\alpha_1) \supset \mathcal{X}(\alpha_2) \tag{6}$$

La optimalidad de un vector de decisión para una función objetivo con coeficientes difusos, se define a través del siguiente problema:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\, \tilde{z} = \tilde{c}x \\ \text{s.a}: \ x \in \mathcal{X}(A,b) = \{x \in I\!R^n \,/\, Ax \geq b, x \geq 0\} \end{array} \tag{7}$$

donde no hay difusidad en el conjunto factible del problema. Apoyándonos en el método de ordenación que hemos introducido en la definición 1, podemos definir una solución de (7) como:

Definición 3. Un vector $x^o \in \mathcal{X}(A,b)$ es una solución aceptablemente óptima de (7) si verifica que:

$$\tilde{c}x \geq_{1/2} \tilde{c}x^o, \ \forall x \in \mathcal{X}(A,b) \tag{8}$$

La definición 1 y la de valor esperado de un número difuso [2] nos permiten establecer la siguiente proposición:

Proposición 1. Un vector $x^o \in I\!R^n$ es una solución aceptablemente óptima de (7) si es una solución del siguiente programa lineal ordinario:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\, EV(\tilde{c})x \\ \text{s.a}: \ x \in \mathcal{X}(A,b) \end{array} \tag{9}$$

donde $EV(\tilde{c})x$ representa el valor esperado de $\tilde{c}$. Teniendo en cuenta estos resultados establecemos la siguiente definición para el problema inicial (1).

Definición 4. Un vector $x^o \in I\!R^n$ es una solución α-óptima del problema (1) si es solución óptima del siguiente problema:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\, EV(\tilde{c})x \\ \text{s.a}: \ x \in \mathcal{X}(\alpha) \end{array} \tag{10}$$

Con este problema hemos conseguido sustituir el problema (1) por un programa lineal α-paramétrico ordinario. Surge aquí la cuestión de eliminar el parámetro a través del planteamiento de un problema biobjetivo que será resuelto aplicando programación compromiso.

La consecución de un valor mejor para la función objetivo del problema (1) será a costa de un menor grado de cumplimiento de las restricciones. Así el decisor se encuentra con dos objetivos en conflicto: minimizar la función objetivo y maximizar el grado de cumplimiento.

2 PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA BIOBJETIVO

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente podemos replantear el problema (1) a través del siguiente problema biobjetivo no lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\, \tilde{z}(x) = \tilde{c}x \\ \text{Max}\, \alpha \\ \text{s.a}: \\ \left[(1-\alpha)E_2^{a_j} + \alpha E_1^{a_j}\right] x \geq \alpha E_2^{b_j} + (1-\alpha)E_1^{b_j}, \ \forall j \\ x \geq 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \tag{11}$$

Al conjunto de soluciones factibles del programa (11) lo denotamos por $\mathcal{X}$.

Definición 5. Un vector $(x^*, \alpha^*) \in \mathcal{X}$ es una solución eficiente del problema (11) si no existe otro $(x, \alpha) \in \mathcal{X}$ tal que $\tilde{c}x^* \geq_{1/2} \tilde{c}x$ y $\alpha^* \geq \alpha$, verificándose al menos una de las dos desigualdades en forma estricta.

De las definiciones 4 y 5 se deduce que:

Proposición 2. Toda solución eficiente (x^*, α^*) del problema (11) es una solución α^*-óptima del problema (1) y recíprocamente.

Si denotamos por α_0 el mínimo grado de cumplimiento de las restricciones que el decisor está dispuesto a admitir, el intervalo de factibilidad para α en (11) se reduce a: $\alpha_0 \leq \alpha \leq 1$. Nos referiremos a este nuevo problema como (11-bis).

Para la aplicación de la programación por compromiso al problema (11-bis) es necesario obtener la matriz de pagos de dicho problema. Para ello debemos optimizar cada objetivo separadamente, calculando a continuación el valor alcanzado por el otro objetivo en dicha solución óptima. Esta matriz nos permitirá cuantificar el nivel de conflicto existente entre los dos objetivos del problema. En nuestro caso las dos filas de dicha matriz pueden obtenerse a partir del menor y mayor grado de factibilidad, $\alpha = \alpha_0$ y $\alpha = 1$, respectivamente. De acuerdo con la definición 4 esto consistirá en resolver los dos siguientes programas ordinarios mono-objetivo siguientes:

a) El problema (10) con $\alpha = \alpha_0$, cuya solución $x^*(\alpha_0)$ proporciona el número difuso $\tilde{z}^*(\alpha_0) = \tilde{c}x^*(\alpha_0)$ como distribución de posibilidad de la función objetivo.

b) El problema (10) con $\alpha = 1$ cuya solución $x^*(1)$ proporciona el número difuso $\tilde{z}^*(1) = \tilde{c}x^*(1)$ como distribución de posibilidad de la función objetivo para $\alpha = 1$.

Así pues la matriz de pagos será la siguiente:

	F.Objetivo	G.Factibilidad
F.Objetivo	$\tilde{z}^*(\alpha_0)$	α_0
G.Factivilidad	$\tilde{z}^*(1)$	1

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de pagos: $(\tilde{z}^*(\alpha_0), 1)$ constituyen el punto ideal, el cual expresa el mejor valor de la función objetivo y el grado de cumplimiento máximo de las restricciones. Por el contrario los elementos de la otra diagonal constituyen el punto anti-ideal, $(\tilde{z}^*(1), \alpha_0)$.

3 SOLUCIONES COMPROMISO

Dado un programa multiobjetivo, la programación compromiso se basa en la idea de que un comportamiento racional del decisor será elegir el punto eficiente, o zona del conjunto eficiente, que esté más próximo al punto ideal. A los puntos eficientes que tienen esta propiedad se les llama soluciones compromiso. En nuestro caso (problema 11-bis) los puntos eficientes en el espacio de los objetivos son de la forma $(\tilde{z}(x), \alpha)$, con $\tilde{z}(x) = \tilde{c}x$, es decir, la primera componente es un número difuso, por eso diremos que son puntos difusos.

Para encontrar las soluciones compromiso hay que definir el grado de proximidad, d_j, entre el valor objetivo j-ésimo f_j y su valor ideal f_j^*. Cuando se trabaja en ambiente de certidumbre, es decir con valores ordinarios, dicho grado de proximidad se mide mediante el valor absoluto de la diferencia entre ambos valores: $d_j = |f_j - f_j^*|$.

Por ser $\tilde{z}^*(\alpha_0)$ una componente del punto ideal, cualquier solución factible (x, α) verificará que el correspondiente valor objetivo será fuertemente mayor [3] que $\tilde{z}^*(\alpha_0)$. Así mismo $\tilde{z}^*(1)$ será también fuertemente mayor que $\tilde{z}^*(\alpha_0)$. Entonces de acuerdo con Heilpern [3] podemos escribir:

$$\begin{array}{l} d\left[\tilde{z}(x), \tilde{z}^*(\alpha_0)\right] = |EV(\tilde{z}(x)) - EV(\tilde{z}^*(\alpha_0))| \\ d\left[\tilde{z}^*(1), \tilde{z}^*(\alpha_0)\right] = |EV(\tilde{z}^*(1)) - EV(\tilde{z}^*(\alpha_0))| \end{array} \tag{12}$$

Según esto podemos establecer la siguiente proposición:

Proposición 3. Toda solución compromiso del siguiente programa ordinario:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\, EV\left[\tilde{z}(x)\right] = EV(\tilde{c})x \\ \text{Max}\, \alpha \\ \text{s.a :} \\ \left[(1-\alpha)E_2^{a_j} + \alpha E_1^{a_j}\right] x \geq \alpha E_2^{b_j} + (1-\alpha)E_1^{b_j},\ \forall j \\ x \geq 0,\ \alpha_0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \tag{13}$$

es también una solución compromiso del programa posibilístico (11-bis) y recíprocamente.

Como los objetivos están medidos en unidades distintas es conveniente homogeneizar las distancias definidas en (12):

$$d_1 = \frac{EV(\tilde{c})x - EV(\tilde{z}^*(\alpha_0))}{EV(\tilde{z}^*(1)) - EV(\tilde{z}^*(\alpha_0))};\ d_2 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha_0} \tag{14}$$

Para construir la función objetivo de la programación compromiso usaremos la distancia L_p ponderada.

$$L_p = \begin{cases} \left[(W_1 d_1)^p + (W_2 d_2)^p\right]^{1/p} & \text{para } 1 \leq p < \infty \\ \max\left(W_1 d_1,\, W_2 d_2\right) & \text{para } p = \infty \end{cases} \tag{15}$$

Donde W_1 y W_2 representan, repectivamente, las preferencias del decisor respecto a la divergencia existente entre cada valor objetivo y su ideal.

Para obtener los puntos eficientes que están más próximos al punto ideal, *soluciones compromiso*, resolvemos el siguiente programa ordinario mono-objetivo:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\, L_p \\ \text{s.a :} \\ \left[(1-\alpha)E_2^{a_j} + \alpha E_1^{a_j}\right] x \geq \alpha E_2^{b_j} + (1-\alpha)E_1^{b_j},\ \forall j \\ x \geq 0,\ \alpha_0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \tag{16}$$

es evidente que dependiendo de la métrica que se utiliza la solución será distinta. Sin embargo el teorema de Yu [7] de la programación compromiso demuestra que en el espacio de los objetivos el conjunto compromiso está constituido por el segmento delimitado por las soluciones obtenidas para las métricas $p = 1$ y $p = \infty$. Del teorema de Yu y de la proposición 3 se deduce la siguiente proposición:

Proposición 4. El conjunto compromiso del programa difuso (11-bis) está constituido por puntos difusos $(\tilde{z}, \alpha)$ cuyo valor esperado $(EV(\tilde{z}), \alpha)$ pertenece al segmento delimitado por las soluciones obtenidas para L_1 y para L_∞ en el problema ordinario (16).

4 EJEMPLO NUMÉRICO

Consideremos el siguiente programa lineal posibilístico:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\, (19, 20, 21)x_1 + (29, 30, 31)x_2 \\ \text{s.a :} \\ (4.5, 5, 5.5)x_1 + (2.5, 3, 4)x_2 \geq (194, 200, 206) \\ (3, 4, 5)x_1 + (6.5, 7, 7.5)x_2 \geq (230, 240, 250) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \tag{17}$$

Supongamos que el mínimo grado de cumplimiento de las restricciones que el decisor está dispuesto a admitir es $\alpha_0 = 0.4$. De acuerdo con el problema (11-bis) resolveremos el problema:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\,(19,20,21)x_1 + (29,30,31)x_2 \\ \text{Max}\,\alpha \\ \text{s.a}:\ x \in \mathcal{X}(\alpha),\ 0.4 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \tag{18}$$

Para obtener la matriz de pagos resolvemos este programa para $\alpha = 0.4$ y para $\alpha = 1$, lo que de acuerdo con lo dicho en la sección 2 se hace resolviendo el programa (10) para $\alpha = 0.4$ y para $\alpha = 1$:

	F.O.	G.F.
F.O.	$\tilde{z}^*(0.4) = (1043.2, 1089, 1134.8)$	0.4
G.F.	$\tilde{z}^*(1) = (1174.8, 1226, 1277.2)$	1

La diagonal principal es el punto ideal: $(\tilde{z}^*(0.4), 1)$. El conjunto compromiso se obtiene resolviendo los siguientes programas compromiso para las métricas L_1 y L_∞ (ver (16)). (Supondremos que $W_1 = 0.5$ y $W_2 = 0.5$):

a) Para la métrica L_1:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\,L_1 = 0.5\left(\frac{20x_1+30x_2-1093.5}{1226-1093.5}\right) + 0.5\left(\frac{1-\alpha}{0.6}\right) \\ \text{sujeto a}: \\ [(1-\alpha)5.25 + \alpha\,4.75)]\,x_1 + [(1-\alpha)3.5 + \alpha\,2.75)]\,x_2 \geq \\ \qquad \geq \alpha 203 + (1-\alpha)197 \\ [(1-\alpha)4.5 + \alpha\,3.5)]\,x_1 + [(1-\alpha)7.25 + \alpha\,6.75)]\,x_2 \geq \\ \qquad \geq \alpha 245 + (1-\alpha)235 \\ 0.4 \leq \alpha \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \tag{19}$$

Cuya solución es: $\alpha = 0.58$, $x_1^1 = 29.3$, $x_2^1 = 18.2$,$\tilde{z}^1 = (1082.27, 1129.67, 1177.06)$. El valor esperado de $\tilde{z}^1$ es 1129.67.

b) Para la métrica L_∞:

$$\begin{array}{l} \text{Min}\,L_\infty = d \\ \text{sujeto a}: \\ \text{conjunto de restricciones de (19)} \\ 0.5\left(\frac{20x_1+30x_2-1093.5}{1226-1093.5}\right) \leq d \\ 0.5\left(\frac{1-\alpha}{0.6}\right) \leq d \end{array} \tag{20}$$

Cuya solución es: $\alpha = 0.71$, $x_1^\infty = 29.73$, $x_2^\infty = 18.76$,$\tilde{z}^\infty = (1109.14, 1157.64, 1206.14)$. El valor esperado de $\tilde{z}^\infty$ es 1157.64. Si comparamos estas soluciones con el punto ideal observamos que la L_∞ es más equilibrada y podría ser ofrecida al centro decisor como solución. Si no es aceptada puede servir como punto de partida para un método interactivo.

5 CONCLUSIONES

Nos hemos planteado en este trabajo la resolución de un programa lineal con coeficientes difusos. Basándonos en una relación difusa de preferencia hemos introducido el concepto de solución factible en grado a y el de solución aceptablemente óptima. Puesto que la consecución del óptimo entra en conflicto con un mayor grado de cumplimiento de las restricciones, hemos replanteado el problema por medio de un programa biobjetivo en el que el grado de cumplimiento de las restricciones deja de ser un parámetro para pasar a ser una variable de decisión. Hemos mostrado cómo puede obtenerse fácilmente el punto ideal de este programa biobjetivo. Utilizando un resultado de Heilpern [3], sobre distancia entre números borrosos, hemos visto como pueden extenderse sin dificultad a la programación posibilística los principales resultados de la programación compromiso.

Referencias

[1] M. Arenas, A. Bilbao, M. V. Rodríguez and M.Jiménez. A fuzzy solution approach to a fuzzy linear goal programming problem, in *Multiple Criteria Decision Making.* Eds. G. Fandel and T. Gal. Espringer, New York, Pág.255-264, 1995.

[2] S. Heilpern. The expected value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems 47*, Pág.81-86, 1992.

[3] S. Heilpern. Representation and application of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems 91*, Pág.259-268, 1997.

[4] M. Jiménez. Ranking fuzzy numbers through the comparison of its expected intervals. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* Vol.4, No.4, Pág.379-388, 1996.

[5] C. Romero. *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1993.

[6] M. Sakawa. *Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization.* Plenun Press, New York-London, 1993.

[7] P. L. Yu. A class of solutions for group decision problems. *Management Science*, Vol.19, Pág.936-946, 1973.

[8] Y. Yuan. Criteria for evaluating fuzzy ranking methods. *Fuzzy Sets and Systems 44*, Pág.139-157, 1991.