Inmersión de W-particiones en un espacio producto

Jordi Recasens
Secció Matemàtiques i Informática
E.T.S.A.V.
Universidad Politécnica de Cataluña
jordi.recasens@ea.upc.es

Adolfo R. De Soto
Area de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Facultad de Económicas y Empresariales
Universidad de León
ddears@unileon.es

Resumen

Se muestra un método para realizar una inmersión de una W-partición cualquiera en una clase de particiones producto que son generadas por familias de particiones en cada factor. Estas familias admiten una interpretación sencilla como variables lingüísticas.

Palabras clave: Particiones borrosas, indistinguibilidades, variables lingüísticas, sistemas de reglas borrosos.

1 Introducción

El desarrollo actual de los sistemas de información provoca que toda organización disponga de una cantidad ingente de datos, tanto estructurados como no estructurados, y que considere esta información como un elemento estratégico. Pero un almacén de datos no es en sí mismo un almacén de conocimiento; el conocimiento es fundamentalmente sintético. Así a medida que se recogen más datos, más necesario se hace el disponer de métodos automáticos de extracción de información relevante y resumida para poder obtener algún provecho real de los mismos.

Los sistemas basados en reglas borrosas tienen varias propiedades que les hacen especialmente adecuados para esta tarea. En primer lugar son aproximadores universales por lo que pueden realizar aproximaciones a cualquier función con una precisión arbitraría. En segundo lugar son sistemas con una interpretación sencilla y fácilmente implementables. Esto se corroborá en la facilidad con la que un experto puede declarar su conocimiento mediante un sistema de este tipo.

Extraer conocimiento de una fuente de datos es el proceso inverso al que se realiza cuando se diseña un sistema de reglas borrosas con la ayuda de un experto: de un conjunto de datos debemos extraer información para el experto. La realidad nos muestra que los métodos automáticos de extracción de reglas llevan a sistemas donde los conjuntos borrosos obtenidos son "extraños", siendo en muchas ocasiones simples funciones de un universo en $[0,1]$ más que funciones de pertenencia de algún predicado borroso conocido o interpretable. Esto no supone ningún problema si lo que se desea es extraer reglas para ser usadas posteriormente en sistemas de control automático, la información la obtiene la máquina y la usa la máquina; pero cuando estos métodos están orientados a ofrecer información al experto humano la importancia de poder realizar un interpretación sencilla de las reglas es vital.

El gran logro de los sistemas basados en reglas borrosos es contar con un medio que traduce información en lenguaje humano a información en el lenguaje de una máquina. Si se desean conseguir métodos que infieran conocimiento útil para el hombre a partir de datos, debe ser la máquina, es decir los mecanismos utilizados, la que se acerque al lenguaje del hombre. Por eso consideramos que estos métodos deben tener como principal objetivo obtener información interpretable. La pregunta es evidentemente si esto se puede conseguir manteniendo el carácter de aproximadores universales de estos sistemas.

En el trabajo [1] se introdujo una familia de W-particiones sobre $[0,1]$, $P = \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde cada partición, $P_n = \{\mu_{r:n}\}_{r\in 0\ldots n}$, está formada por los conjuntos borrosos $\mu_{r:n}(x) = \max(0, 1 - n\left|x - \frac{r}{n}\right|)$. Cada partición P_n es la única partición compatible, en el sentido dado posteriormente, con la potencia n-ésima de la indistinguibilidad de Lukasiewicz definida como $E^n_W(x,y) = \max(0, 1 - n\,|x-y|)$. La importancia de esta asociación es que la indistinguibilidad es una medida de la granularidad, entendida como capacidad de distinción, de la partición P_n : a medida que n crece cada partición P_n está formada por más conjuntos borrosos y la indistinguibilidad da valores menores para cada par de puntos x, y. Además la familia P admite una interpretación como variable lingüística, presentando una relación de antonimia entre los conjuntos borrosos de cada partición P_n y disponiendo de un conjunto de modificadores lingüísticos que permiten pasar de una partición a otra. El uso de modificadores en el lenguaje permite precisamente una mayor capacidad de distinción mediante el aumento del número de etiquetas lingüísticas.

En este trabajo se continua investigando las propiedades de las W-particiones iniciado en [1] y de las W-particiones P_n como ejemplos especialmente interesantes. En concreto se prueba que a toda W-partición se le puede asociar una W-indistinguibilidad de tal forma que la partición es compatible con ella. De este modo se relacionan dos mundos, el de relaciones de indistinguibilidad y de particiones hasta ahora separados. Además se estudia el paso de las particiones P_n al universo producto.

2 Definiciones previas

Se define una T-partición, con T una t-norma, como una familia de conjuntos borrosos $H = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ sobre un universo X que verifica las dos condiciones siguientes:

1. $T(\mu_i(x), \mu_j(x)) = 0$ para todo par $i, j \in 1, \ldots, n$ con $i \neq j$;
2. $T^*(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)) = 1$ para todo $x \in X$, siendo T^* la t-conorma dual de T respecto a una negación fuerte.

Las hard-particiones definidas por Bezdek [4] y que se obtienen al utilizar el algoritmo de las c-medias son un caso particular de las W-particiones, con $W(x, y) = \max(0, x + y - 1)$ la t-norma de Lukasiewicz.

Dada una T-indistinguibilidad $E : X \times X \to [0, 1]$, se dice que una T-partición H es compatible con ella si

1. $T(\mu_i(x), \mu_i(y)) \leq E(x, y)$,
2. existe un $a_i \in X$ con $E(x, a_i) \leq \mu_i(x)$,

para todo $x, y \in X$ e $i \in 1 \ldots n$.

En [1] se probó que los subconjuntos borrosos $\mu_{r:n}(x) = \max(0, 1 - n\left|x - \frac{r}{n}\right|)$ para $r = 0, \ldots, n$ forman una W-partición sobre $[0, 1]$ que denotaremos por $P_n = \{\mu_{r:n}\}_{r=0,\ldots,n}$. De hecho P_n es la única W-partición compatible con la indistinguibilidad E_W^n obtenida al operar n veces la indisitnguibilidad de Lukasiewicz consigo misma.

El siguiente resultado muestra que puede realizarse la operación inversa.

Teorema 1 *Dada una hard-partición $H = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ sobre un universo X es posible construir una W-indistinguibilidad compatible con H.*

Demostración. Consideramos el universo $\overline{X} = X \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ y extendemos los conjuntos borrosos de la partición mediante la expresión $\mu_i(a_j) = \delta_{ij}$. Cada μ_i define una indistinguibilidad E_{μ_j} en $\overline{X}$ y el mínimo de todas $E = \min(E_{\mu_1}, \ldots, E_{\mu_m})$ es una W-indistinguibilidad compatible con H. Para ver esto último sólo hay que comprobar que los μ_i son columnas de E y lo son ya que

$$\begin{aligned} E(a_i, x) &= \min_{j=1,\ldots,m} E_{\mu_j}(a_i, x) \\ &= \min_{j=1,\ldots,m} 1 - |\mu_j(a_i) - \mu_j(x)| \\ &= \mu_i(x) \\ &= E_{\mu_i}(a_i, x). \end{aligned}$$

De todas las igualdades la única que no es por definición es la tercera y se prueba teniendo en cuenta que si $j = i$ entonces $E_{\mu_j}(a_i, x) = 1 - |\mu_i(a_i) - \mu_i(x)| = \mu_i(x)$ y si $j \neq i$ entonces $E_{\mu j}(a_i, x) = 1 - |\mu_j(a_i) - \mu_j(x)| = 1 - \mu_j(x)$ y dado que $\sum_{k=1}^{m} \mu_k(x) = 1$, se tiene que $\mu_i(x) \leq 1 - \mu_j(x)$. ■

El teorema anterior requiere la introducción artificial de prototipos para cada clase de la partición. Si las clases son conjuntos borrosos normalizados esta operación no es necesaria.

3 Particiones producto cartesiano

Dadas dos T-indistinguibilidades E, F sobre universos X, Y respectivamente, se define la T-indistinguibilidad producto cartesiano como

$$(E \times F)(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \min(E(x_1, x_2), E(y_1, y_2))$$

siendo $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{z}_2 = (x_2, y_2)$ puntos pertenecientes al universo producto $X \times Y$. La definición puede ser ampliada a cualquier dimensión finita.

De una forma similar, podemos construir una T-partición producto a partir de un número finito de T-particiones. Para el caso de dos, sean $H_X = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$, $H_Y = \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ dos T-particiones de los universos X eY respectivamente. Se define la partición producto $H_X \times H_Y$ como la clase formada por los conjuntos borrosos:

$$\rho_{ij}(\mathbf{z}) = \min(\mu_i(x), \nu_j(y))$$

con $\mathbf{z} = (x, y) \in X \times Y$.

Teorema 2 *La partición producto $H_X \times H_Y$ es una W-partición compatible, con la W-indistinguibilidad* *producto, sobre $X \times Y$ si H_X y H_y lo son sobre X e Y respectivamente.*

Considerando el producto cartesiano $[0,1]^n$ y en cada factor una indistinguibilidad del tipo $E_W^n(x,y) = \max(0, 1 - n\,|x-y|)$ con $n \in \mathbb{N}$., la indistinguibilidad producto cartesiano tiene asociada una partición producto compatible. Esta partición proviene en cada factor de particiones que tienen una fácil interpretación como variables lingüísticas y que además, en caso necesario, pueden ser refinadas utilizando modificadores lingüísticos. Por tanto, en cada factor tenemos una variable lingüística generada por dos predicados contrarios, con lo que el esquema de conocimiento que inducen sobre la variable es similar al que utiliza el hombre para clasificar muchas variables.

4 Inmersión de W-particiones

Definición 3 *Dados un conjunto X con una particiones $H_1 = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ y otro conjunto Y con partición $H_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$, se dice que ambas particiones son homométricas si existe una aplicación $f : X \to Y$ tal que a todo $\mu_i \in H_1$ se le asocia un conjunto borroso $f_*(\mu_i) \in H_2$ tal que*

$$\mu_i(x) = (f_*(\mu_i))(f(x)).$$

El siguiente teorema prueba que toda W-partición sobre un universo finito es homométrica a una partición producto generada por particiones P_n en cada factor, de tal forma que se obtiene un marco unificado para su estudio.

Teorema 4 *Sea X un conjunto y H una W-partición de X en c clases. X es homométrico a algún $[0,1]^n$ con la partición generada por el producto cartesiano de las indistinguibilidades $E_W^{p_i}$ en cada factor. Se puede tomar $n \leq c$*

Demostración. Sea $H = \{\mu_1, \ldots, \mu_c\}$ la partición y consideremos la aplicación

$$f : X \to [0,1] \times \ldots \times [0,1]$$

definida como

$$f(x) = (\mu_1(x), \ldots, \mu_c(x)).$$

Sobre cada factor $[0,1]$ sea E_W la indistinguibilidad de Lukasiewicz y $E_W \times \overset{c}{\ldots} \times E_W$ la indistinguibilidad producto. Definiendo

$$f_*(\mu_i) = \min(1 - Id, \ldots, Id, \ldots, 1 - Id)$$

siendo Id la aplicación identidad, tenemos una homometría puesto que

$$\begin{aligned} f_*(\mu_i)(f(x)) &= \min(1-\mu_1(x), \ldots, \mu_i(x), \ldots, 1-\mu_c(x)) \\ &= \mu_i(x) \end{aligned}$$

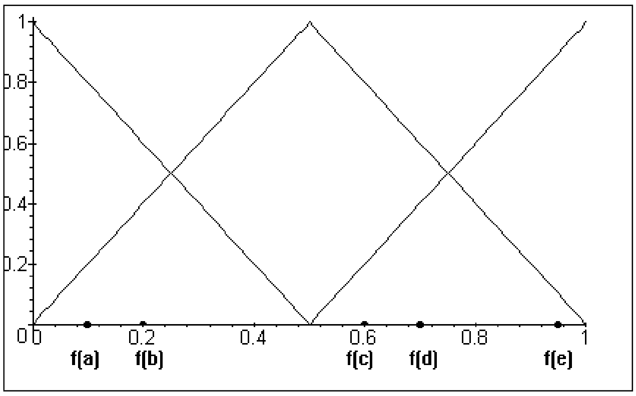

Figura 1: Inmersión por una homometría

ya que para todo $j \neq i$ se tiene que $\mu_i(x) \leq 1 - \mu_j(x)$. ■

El siguiente ejemplo muestra que puede que el número de factores de la inmersión sea menor que el número de clases de la partición.

Ejemplo 5 *Consideremos $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $H = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ con*

$$\mu_1 = 0,8/a + 0,6/b + 0/c + 0/d + 0/e$$
$$\mu_2 = 0,2/a + 0,4/b + 0,8/c + 0,4/d + 0,1/e$$
$$\mu_3 = 0/a + 0/b + 0,2/c + 0,6/d + 0,9/e$$

Tomemos la partición asociada a E_W^2 que estará formada por tres clases $P_2 = \{\mu_{0:2}, \mu_{1:2}, \mu_{2:2}\}$. Definiendo la función f como

$$\begin{aligned} f(a) &= 0,1 \quad f(b) = 0,2 \quad f(c) = 0,6 \\ f(d) &= 0,7 \quad f(e) = 0,95 \end{aligned}$$

y $f_*(\mu_i) = \mu_{i-1:3}$ tenemos una homometría, con lo que hemos conseguido una inmersión en un producto cartesiano de dimensión $n = 1$. (Veáse la figura 1)

Este ejemplo sugiere el concepto de dimensión de una W-partición como el mínimo número de factores para el que existe una homometría.

Definición 6 *Con las notaciones del Teorema 4, diremos que (X, H), o más brevemente H, tiene dimensión n si, y sólo si, X es homométrico a algún $[0,1]^n$ pero no a $[0,1]^{n-1}$.*

Esta dimensión está acotada por el número de clases de la partición y puede considerarse como una medida del solapamiento que presentan las clases sobre el universo X. Parece difícil hallar algoritmos eficaces para calcular la dimensión de una W-partición dada. Las siguientes ideas proporcionan cotas razonables. Por ejemplo, para que sea unidimensional, es necesario que cada elemento pertenezca a lo sumo a dos clases, pero esto no es suficiente, porque podría haber particiones " "cerradas" o "cíclicas": x_1 es de las clases c_1 y c_2, x_2 de las c_2 y c_3, y x_3 de las c_3 y c_1, por ejemplo. De hecho, si consideramos un grafo en el que los vértices se correspondan con las clases y dos vértices estén unidos si y sólo si existe algún elemento que pertenezca a ambas clases, entonces la partición es unidimensional si y sólo si el grafo es un subgrafo de una cadena no cerrada. Más general, para que una partición sea n-dimensional, es necesario que cada elemento pertenezca a lo sumo a $2n$ clases, lo que se traduce en que de cada vértice salgan a lo sumo $2n-1$ aristas. Una vez más, esto no es suficiente, porque las clases que quedaran a los lados no pueden conectarse entre sí.

Definición 7 *Diremos que un grafo es una malla si, y sólo si, es isomorfo al siguiente grafo. Tomamos como vértices los puntos* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *con coordenadas enteras y tales que para todo* i *existe* c_i *con* $0 \leq x_i \leq c_i$*. Dos vértices estarán unidos por una arista si, y sólo si, cada coordenada se diferencia en a lo sumo en una unidad.*

En el caso bidimensional, los vértices de una malla formarán cuadrados y las aristas serán sus lados y diagonales. Con esta definición se tienen los siguientes resultados.

Teorema 8 *Una* W*-partition es* n*-dimensional si, y sólo si, es isomorfa a un subgrafo de una malla de* R^n*, pero no de* R^{n-1}*.*

Corolario 9 *Si cada elemento pertenece a lo sumo a* $2n$ *clases, la* W*-partition es a lo sumo* n*-dimensional.*

Demostración. $2n-1$ es el número de aristas que salen de los vértices situados en las esquinas de una malla.

5 Conclusiones

Estos resultados pueden verse como los primeros estudios destinados a conocer en que circunstancias una partición puede aproximarse como un producto cartesiano de particiones del tipo P_n. El lograr esta aproximación permitiría un medio para lograr una interpretación sencilla de las condiciones que deben cumplirse en cada factor para que un elemento forme parte de una clase de la partición. Estas condiciones pueden escribirse en forma de reglas por lo que se podrían tener métodos automáticos de extracción de reglas usando conjuntos borrosos que admiten una interpretación como etiquetas lingüísticas de una variable lingüística. Además puede demostrarse fácilmente, basándose en el trabajo[3], que el uso de las particiones P_n en cada variable de entrada conducen a sistemas de reglas que son aproximadores universales.

Referencias

[1] De Soto, A.R.; Recasens, J. "Particiones, Indistinguibilidades y variables lingüísticas". VIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, pp. 245–250, Pamplona, 1998.

[2] De Soto, A.R.; Trillas, E. "Second Thoughts on Linguistic Variables". Proc. of 18th Inter. Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society – NAFIPS'99, pp. 37–41, New York.

[3] Castro, J.L. "Fuzzy Logic Controllers are Universal Approximators" IEEE Trans. on Syst., Man and Cyber., 25–4, pp. 629–635, 1995.

[4] Klir, G.J.; Yuan, B. "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications" Prentice Hall, New Yersey, 1995.

[5] Zadeh, L.A. (1976) "The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Aproximate Reasoning. I, II and III" en *Fuzzy Sets and Aplications. Selected Papers by L.A. Zadeh* editado por Yager, R.R. et al. pp. 219–366, John Wiley and Sons, New York.