CONTEXTOS PONDERADOS.

Ana Burusco
Dpto. de Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
31006 Pamplona, Spain
e-mail: burusco@si.upna.es

Ramón Fuentes González
Dpto. de Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
31006 Pamplona, Spain
e-mail: rfuentes@si.upna.es

Resumen

Se proponen varios métodos basados en la teoría de conceptos L-Fuzzy para el estudio de contextos que recogen la opinión de varios expertos sobre la relación existente entre dos conjuntos, a los que llamaremos de objetos y de atributos, partiendo de la premisa de que la opinión de cada experto tiene un peso o credibilidad distinto.

Palabras clave: Conceptos L-Fuzzy, Conceptos L-Fuzzy k-valuados ponderados, Métodos de análisis de datos, Procesamiento de la Información.

1 INTRODUCCION

En [3] definimos contextos M(L)-Fuzzy k-valuados como sistemas relacionales $(M_k(L), X, Y, \widetilde{\widetilde{R}})$ donde X e Y eran los conjuntos de objetos y atributos, L la cadena $\{0, 0.1, 0.2\ldots, 1\}$ y $\widetilde{\widetilde{R}} : X \times Y \longrightarrow M_k(L)$, siendo $M_k(L)$ el conjunto de multiconjuntos de L con cardinalidad k.

Estos contextos representaban la opinión de k expertos sobre la relación existente entre los objetos X y los atributos Y. En aquella ocasión, dábamos la misma credibilidad a todos los expertos, de ahí que la imagen de nuestros conjuntos y relaciones M(L)-Fuzzy k-valuados fuesen multiconjuntos de cardinalidad k, no teniendo importancia el orden de las observaciones.

Una vez definido el contexto en el que se iba a trabajar, se daban las definiciones de operadores derivación que permitían construir el retículo de los conceptos M(L)-Fuzzy k-valuados a partir de los cuales se extraía la información del contexto correspondiente manteniendo la diferencia de opiniones mostrada por los expertos.

La situación que planteamos en este trabajo cambia en cuanto que asociamos a los k expertos unos pesos $P = (p_1, p_2, \ldots p_k)$ que representan su grado de credibilidad, así p_l representa el grado de credibilidad del experto $l-$ésimo.

Este problema no podría resolverse mediante el planteamiento propuesto en [3] ya que, en aquel caso, se trabajaba con multiconjuntos cuyas observaciones aparecían ordenadas. Si utilizásemos ahora multiconjuntos, tendríamos dificultades para saber a qué experto corresponde cada observación y cuál es por tanto su peso. En realidad, estaríamos mezclando opiniones de distintos expertos sin tener en cuenta sus pesos.

En el siguiente apartado plantearemos de forma explícita cuáles son las claves del problema a modelizar.

2 CONTEXTOS L-FUZZY K-VALUADOS PONDERADOS

Sea L una cadena completa en [0,1] y $X = \{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2 \ldots y_m\}$ conjuntos no vacíos a los que llamaremos conjuntos de objetos y de atributos respectivamente. Supongamos también que k expertos opinan sobre la relación existente entre cada uno de los objetos de X y cada uno de los atributos de Y, siendo $\overset{\frown}{R} : X \times Y \longrightarrow L \times \overset{k}{\ldots} \times L$ la tabla que recoge dichas opiniones y tomando $P = (p_1, p_2, \ldots p_k)$ como pesos de los expertos, con $p_l \in L, \forall l = 1 \ldots k$, tales que $\sum p_l = 1$. Así, por ejemplo, $\overset{\frown}{R}(x_i, y_j) \in L^k$ representará la opinión de los expertos sobre la relación existente entre el objeto x_i y el atributo y_j y $\overset{\frown}{R}_l(x_i, y_j)$, la opinión del experto $l-$ésimo sobre la relación existente entre dicho objeto y dicho atributo siendo su grado de credibilidad p_l.

Habitualmente, la cadena L con la que trabajaremos en nuestros ejemplos será $L = \{0, 0.1, \ldots, 1\}$.

2.1 Definición Llamaremos a $\overset{\frown}{R}$ relación L-Fuzzy k-valuada ponderada y a la tupla $(L^k, X, Y, P, \overset{\frown}{R})$ contexto L-Fuzzy k-valuado ponderado.□

La imagen de la aplicación $\overset{\frown}{R}$, tal y como ha sido definida, es un elemento de L^k, que es un retículo completo con el orden usual:

$$(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k) \leq (\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k) \Longleftrightarrow \alpha_l \leq \beta_l, \forall l = 1 \ldots k$$

A continuación presentamos tres posibles formas de analizar y extraer información de este tipo de contextos: La primera consiste en obtener, mediante agregaciones, un contexto L-Fuzzy $(L, X, Y, \overset{\frown}{R}_{agre})$ y aplicar las técnicas descritas en [1,2] para obtener los conceptos correspondientes.

La segunda forma de abordar el problema será interpretar el contexto $(L^k, X, Y, P, \breve{R})$ como k contextos L-Fuzzy independientes, obtener sus conceptos L-Fuzzy y a partir de ellos aplicar el peso correspondiente a cada uno de los expertos. Finalmente, indicamos cómo se pueden adaptar las definiciones de los operadores derivación a este nuevo supuesto, incluyendo en las mismas los pesos que corresponden a los distintos expertos.

3 AGREGACION DE RELACIONES EN CONTEXTOS L-FUZZY K-VALUADOS PONDERADOS

Dado un contexto L-Fuzzy k-valuado ponderado $(L^k, X, Y, P, \breve{R})$, con L cadena completa en [0,1], X e Y conjuntos de objetos y atributos, $P = (p_1, p_2 \ldots, p_k)$ pesos de los expertos y $\breve{R} : X \times Y \longrightarrow L^k$, podemos considerar la familia de contextos L-Fuzzy $(L, X, Y, \breve{R}_l)$, donde $\breve{R}_l$ es la proyección l-ésima de $\breve{R}$ $(l = 1 \ldots k)$.

Una forma de consensuar la opinión de estos k expertos, teniendo en cuenta su grado de credibilidad o peso, consistirá en agregar las relaciones L-Fuzzy $\breve{R}_l$, eliminando así la subjetividad de los expertos, y obteniendo valores más democráticos y realistas.

En el marco en el que estamos trabajando proponemos que la agregación a utilizar verifique las propiedades: Simetría, unanimidad, monotonía y que los valores resultantes de la agregación se encuentren entre el mínimo y el máximo.

En esta linea, tal y como indican algunos autores que han estudiado agregaciones en entornos aplicados (Montero y Ramakrishnan&Rao [5]), hemos escogido la media ponderada, cuya trascripción al entorno en el que trabajamos permite obtener una relación agregada:

$$\breve{R}_{agre}(x_i, y_j) = \sum_l p_l \breve{R}_l(x_i, y_j) \qquad (1)$$

Si los valores resultantes de la agregación no pertenecen a la cadena L, aproximaremos al valor más cercano en L.

Una vez aplicada la agregación, $(L, X, Y, \breve{R}_{agre})$ será un contexto L-Fuzzy sobre el que podremos construir los conceptos L-Fuzzy tal y como se estudió en [1,2].

De entre todos los métodos propuestos, éste es el más sencillo de aplicar si lo que se quiere es obtener una información resumida y veraz que se derive de la tabla inicial, sin embargo, tiene el inconveniente de que se pierde la visión particular de cada uno de los expertos.

3.1 Ejemplo Supongamos que dos médicos opinan sobre la influencia de los factores $X = \{x_1, x_2\}$ en la evolución de dos enfermedades $Y = \{y_1, y_2\}$:

Tabla 1

$\breve{R}$	y_1	y_2
x_1	0.3 0.5	0.5 0.5
x_2	0.2 0.6	1 0.8

y que la credibilidad del primero de ellos es mayor que la del segundo: $p_1 = 0.7, p_2 = 0.3$.

Esta tabla representará un contexto L-Fuzzy k-valuado ponderado $(L^k, X, Y, P, \breve{R})$ con $k = 2$ y $L = \{0, 0.1, \ldots, 1\}$.

Si agregamos este contexto L-Fuzzy k-valuado ponderado según (1) (redondeando los valores para que pertenezcan a la cadena L), obtendremos la siguiente tabla:

Tabla 2

$\breve{R}agre$	y_1	y_2
x_1	0.4	0.5
x_2	0.3	0.9

de forma que al tomar el conjunto L-Fuzzy de factores (objetos):

$$\breve{A} = \{x_1/0, x_2/1\}$$

obtenemos el concepto L-Fuzzy

$$(\{x_1/0.5, x_2/0.7\}, \{y_1/0.3, y_2/0.5\})$$

de donde se desprende que *el segundo (x_2) es el factor que más influye y lo hace sobretodo en la segunda enfermedad (y_2).*

4 AGREGACION DE CONCEPTOS L-FUZZY

Tomemos ahora para cada experto las relaciones $\breve{R}_l$, con $l = 1 \ldots k$ definidas en el apartado anterior y construyamos los contextos L-Fuzzy $(L, X, Y, \breve{R}_l)$. Según la teoría desarrollada en [1,2], podemos construir para cada contexto $(L, X, Y, \breve{R}_l)$ el retículo de conceptos L-Fuzzy $\breve{\mathcal{L}}_l$ que se deriva de él.

Tal y como se detalla en [2], para construir dichos conceptos utilizaremos los operadores φ_l y ψ_l definidos para cada uno de los k contextos L-Fuzzy $(L, X, Y, \breve{R}_l)$.

Una vez construidos estos retículos de conceptos, es posible agregar conceptos de distintos retículos teniendo en cuenta sus pesos. Lo más interesante será agregar conceptos que provengan de un mismo conjunto L-Fuzzy de partida. En este sentido, para cada conjunto L-Fuzzy $\breve{A}$ podemos obtener los k puntos fijos que de este conjunto se derivan sin mas que aplicar cada uno de los operadores de P. y R. Cousot ([4]), $luis(\varphi_l) \circ llis(f_{l,2})$ siendo $luis(\varphi_l)(\breve{A}) = \limsup(\breve{A}, \varphi_l(\breve{A}), \varphi_l^2(\breve{A}) \dots)$ y $llis(f_{l,2})(\breve{A}) = \liminf(\breve{A}, \breve{A} \wedge \varphi_l(\breve{A}), \breve{A} \wedge \varphi_l(\breve{A}) \wedge \varphi_l(\breve{A} \wedge \varphi_l(\breve{A})) \dots)$. Los denotaremos $\breve{A}_1, \breve{A}_2, \dots \breve{A}_k$.

Para cada uno de éstos puntos fijos, construiremos su concepto L-Fuzzy correspondiente: $(\breve{A}_1, \breve{B}_1)$, $(\breve{A}_2, \breve{B}_2), \dots$ $(\breve{A}_k, \breve{B}_k)$ siguiendo la teoría dada en [2].

Definamos ahora

$$\mu : L^X \longrightarrow L^X \times L^Y$$
$$\breve{A} \hookrightarrow (\breve{M}, \breve{N})$$

donde $\breve{M}(x) = \sum_l p_l \breve{A}_l(x)$, y $\breve{N}(y) = \sum_l p_l \breve{B}_l(y)$, asociando a cada conjunto L-Fuzzy la agregación ponderada de los conceptos que se obtienen a partir de él.

Siguiendo este proceso, más laborioso que el del apartado anterior, se mantienen hasta el final las apreciaciones de los distintos expertos; sin embargo, no tenemos la seguridad de que el resultado final sea un concepto. (La agregación de conceptos no tiene por qué ser un concepto, de hecho, en el siguiente ejemplo tendremos que proceder a un redondeo obteniéndose finalmente un concepto L-Fuzzy.)

4.1 Ejemplo Si partimos del mismo contexto L-Fuzzy k-valuado ponderado que utilizamos en el apartado anterior, podemos construir las relaciones siguientes:

Tabla 3

$\breve{R}_1$	y_1	y_2
x_1	0.3	0.5
x_2	0.2	1

Tabla 4

$\breve{R}_2$	y_1	y_2
x_1	0.5	0.5
x_2	0.6	0.8

de forma que para el mismo conjunto de partida:

$$\breve{A} = \{x_1/0, x_2/1\}$$

obtenemos el concepto L-Fuzzy:

$$(\{x_1/0.5, x_2/0.8\}, \{y_1/0.2, y_2/0.5\})$$

mediante el primer contexto y el concepto L-Fuzzy

$$(\{x_1/0.5, x_2/0.6\}, \{y_1/0.5, y_2/0.5\})$$

del segundo, de donde se desprende que *de la opinión del primer experto se deriva una mayor influencia del segundo factor (x_2), principalmente en la última de las enfermedades (y_2); mientras que según el segundo, dicho factor influye por igual en ambas enfermedades.*

Podemos ahora asociar al conjunto de partida $\breve{A}$ el resultado de agregar ponderadamente ambos conceptos (p_1=0.7,p_2=0.3) tal y como aparece definido en la aplicación μ :

$$(\breve{M}, \breve{N}) = (\{x_1/0.5, x_2/0.7\}, \{y_1/0.3, y_2/0.5\})$$

(Hemos redondeado los resultados para que los grados de pertenencia sean valores de la cadena L.)

5 OPERADORES DERIVACION PARA CONTEXTOS L-FUZZY K-VALUADOS PONDERADOS.

Partamos ahora de un contexto L-Fuzzy k-valuado ponderado $(L^k, X, Y, P, \breve{R})$ y tratemos de definir los operadores derivación que se adapten a esta nueva situación:

Para cada $\breve{A} \in (L^k)^X$ y $\breve{B} \in (L^k)^Y$ vamos a definir los conjuntos $\breve{A}_1 \in (L^k)^Y$ y $\breve{B}_2 \in (L^k)^X$ de la siguiente forma:

$$\breve{A}_1(y) = \bigwedge_{x \in X} \left(\breve{A}'(x) \bigvee (P \star \breve{R}(x, y)) \right)$$
$$\breve{B}_2(x) = \bigwedge_{y \in Y} \left(\breve{B}'(y) \bigvee (P \star \breve{R}(x, y)) \right)$$

donde los operadores $\bigvee$ y $\bigwedge$ son el supremo y el ínfimo definidos en L^k, $'$ el operador complementario usual y $P \star \breve{R}(x, y) = (p_1 \breve{R}_1(x, y), p_2 \breve{R}_2(x, y), \dots, p_k \breve{R}_k(x, y))$.

5.1 Definición Llamaremos a los operadores 1 y 2 operadores derivación.□

5.2 Proposición Los operadores 1 y 2 son antítonos.

$$\breve{A} \leq \breve{C} \Longrightarrow \breve{A}_1 \geq \breve{C}_1, \ \forall \breve{A}, \breve{C} \in (L^k)^X$$

$$\breve{B} \leq \breve{D} \Longrightarrow \breve{B}_2 \geq \breve{D}_2, \ \forall \breve{B}, \breve{D} \in (L^k)^Y. \square$$

Podemos ahora definir los operadores φ y ψ combinando los operadores anteriores: $\varphi(\overset{\smile}{A}) = \overset{\smile}{A}_{12}$ and $\psi(\overset{\smile}{B}) = \overset{\smile}{B}_{21}$.

5.3 Proposición Los operadores φ y ψ preservan el orden.$\square$

Como L^k es un retículo completo, podemos probar, al igual que hicimos en [1] los siguientes resultados:

Sea $\varphi : (L^k)^X \longrightarrow (L^k)^X$ $t.q.$ $\varphi(\overset{\smile}{A}) = \overset{\smile}{A}_{12}$ y $fix(\varphi) = \{\overset{\smile}{A} \in (L^k)^X \,/\, \overset{\smile}{A} = \varphi(\overset{\smile}{A})\}$, el conjunto de puntos fijos de φ.

Utilizando el teorema de puntos fijos de Tarski([6]), como $(L^k)^X$ y $(L^k)^Y$ son retículos completos y φ y ψ preservan el orden, podemos concluir que $\Omega = (fix(\varphi), \leq)$ y $\Sigma = (fix(\psi), \geq)$ son retículos completos, donde $\leq$ es la relación de orden en L^k y $\geq$ su opuesta.

5.4 Definición Si $\overset{\smile}{M} \in fix(\varphi)$, entonces llamaremos al par $(\overset{\smile}{M}, \overset{\smile}{M}_1)$, concepto L-Fuzzy k-valuado ponderado del contexto $(L^k, X, Y, P, \overset{\smile}{R})$.$\square$

Es sencillo probar que los conjuntos $\overset{\smile}{\mathcal{L}}_1 = \{(\overset{\smile}{M}, \overset{\smile}{M}_1) \,/\, \overset{\smile}{M} \in fix(\varphi)\}$ y $\overset{\smile}{\mathcal{L}}_2 = \{(\overset{\smile}{N}_2, \overset{\smile}{N}) \,/\, \overset{\smile}{N} \in fix(\psi)\}$ son iguales, por tanto, utilizaremos $\overset{\smile}{\mathcal{L}}$ para denotar a estos conjuntos. Además, el orden en el conjunto de los conceptos será el siguiente:

$\forall (\overset{\smile}{A}, \overset{\smile}{B}), (\overset{\smile}{C}, \overset{\smile}{D}) \in \overset{\smile}{\mathcal{L}}$

$(\overset{\smile}{A}, \overset{\smile}{B}) \preceq (\overset{\smile}{C}, \overset{\smile}{D}) \Longleftrightarrow \overset{\smile}{A} \leq \overset{\smile}{C}$ (o equiv.$\overset{\smile}{B} \geq \overset{\smile}{D}$)

5.5 Teorema El conjunto $\overset{\smile}{\mathcal{L}}(L^k, X, Y, P, \overset{\smile}{R})$ con la relación de orden $\preceq$ es un retículo completo. Lo llamaremos retículo de conceptos L-Fuzzy k-valuado ponderado.$\square$

La teoría de P. y R. Cousot ([4]) nos permite también obtener los conceptos que se derivan de un determinado conjunto de partida. En este sentido, para cada $\overset{\smile}{A} \in (L^k)^X$, podemos aplicar el operador $luis(\varphi) \circ llis(f_2)$ definido en el apartado anterior y obtener de esta manera el punto fijo $\overset{\smile}{A}^*$ que de él se deriva. A continuación, construiremos el concepto L-Fuzzy k-valuado ponderado correspondiente $(\overset{\smile}{A}^*, \overset{\smile}{A}_1^*)$.

Éste es el único método que permite obtener conceptos L-Fuzzy ponderados pero no agregados, de forma que siempre se mantiene la información de todos los expertos. El inconveniente que tiene es que al aplicar los pesos se deforman los datos iniciales (disminuyen proporcionalmente al peso).

5.6 Ejemplo En este caso podemos partir del conjunto L-Fuzzy k-valuado

$$\overset{\smile}{A} = \{x_1/(0,0), x_2/(1,1)\}$$

obteniéndose el concepto:

$$(\{x_1/(0.4, 0.8), x_2/(0.7, 0.8)\},$$
$$\{y_1/(0.3, 0.2), y_2/(0.6, 0.2)\})$$

Aquí vemos que *teniendo en cuenta ambos expertos y sus pesos, éstos difieren básicamente en su apreciación sobre el primer factor (x_1) y la segunda enfermedad (y_2).*

6 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado tres posibles formas de analizar los contextos L-Fuzzy provenientes de los opiniones ponderadas de varios expertos. La elección de cada uno de estos métodos dependerá de la situación concreta que queramos estudiar.

En este sentido, si lo que interesa es obtener una información resumida que tenga en cuenta los distintos pesos de los expertos, aconsejaremos agregar ponderadamente primero, y construir los conceptos después (apartado 3). Si, por el contrario, interesa mantener la información de cada uno de los expertos de forma independiente hasta el final utilizaremos el método descrito en el apartado 4. (Considerar contextos L-Fuzzy independientes y agregar y ponderar los conceptos que se obtienen al final). Finalmente, cuando únicamente interese ponderar pero no agregar, trabajaremos con los conceptos L-Fuzzy ponderados (apartado 5).

REFERENCIAS

[1] A. Burusco, R. Fuentes-González, The Study of the L-Fuzzy Concept Lattice, Mathware and Soft Computing 1, No 3 (1994) 209-218.

[2] A. Burusco, R. Fuentes-González, Construction of the L-Fuzzy Concept lattice, Fuzzy Sets and Systems 97, No. 1 (1998) 109-114.

[3] A. Burusco, R. Fuentes-González, Contexts obtained from several expert opinions, Sixth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Barcelona, (1997), 339-342.

[4] P. Cousot, R. Cousot, Constructive versions of Tarski's fixed point theorems, Pacific Journal of Mathematics 82 (1979) 43-57.

[5] J. Fodor, M. Roubens, Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support, Kluwer Academic Publishers, (1994).

[6] A. Tarski, A Lattice Theoretical Fixpoint Theorem and its Applications, Pathific J.Math. 5 (1955) 285-310.