UNA ESTRUCTURA ORDENADA EN OPERADORES DE LA MORFOLOGÍA MATEMATICA

P. Burillo
Dpto de Automática y Computación. Universidad Pública de Navarra Campus de Arrosadía 31006. Pamplona. Navarra. E-mail: pburillo @upna.es

N. Frago
Dpto de Matemática e Informática. Universidad Pública de Navarra Campus de Arrosadía 31006. Pamplona. Navarra. E-mail: noe.frago @upna.es,

R. Fuentes
Dpto de Automática y Computación. Universidad Pública de Navarra Campus de Arrosadía 31006. Pamplona. Navarra. E-mail: rfuentes@upna.es

Resumen

En esta comunicación se introducen estructuras de orden en familias de operadores básicos de la Morfología Matemática borrosa y se estudia su estructura.

Palabras claves: Grado de Inclusión, Operador Implicación, Erosión, Morfología Matemática borrosa.

INTRODUCCIÓN

En la Morfología Matemática ordinaria, se distinguen dos tipos de imágenes: las binarias, representadas por subconjuntos A del plano, y las imágenes en tonos de gris, representadas como funciones f definidas en el plano y con valores en R. En ambos casos, el tratamiento para la transformación de las imágenes se modeliza utilizando otras fijas, (los elementos estructurantes), ciertos operadores en el conjunto de imágenes y la composición de ellos. Aparecen como operadores básicos de este tipo: la erosión, dilatación, apertura y cierre. Se demuestra que basta considerar uno de los dos primeros para obtener todos los demás utilizando operaciones conjuntistas en el caso de imágenes binarias y operaciones reticulares en el caso de imágenes con tonos de gris.

La Morfología Matemática Borrosa (MMB) extiende y comprende a la ordinaria al considerar subconjuntos borrosos del plano, (que pueden interpretarse tanto como imágenes vagas o como imágenes en tonos de gris), en lugar de subconjuntos ordinarios o funciones f con valores en R. Como extensión coherente de la ordinaria, el tratamiento de los subconjuntos borrosos en MMB se realiza también por medio de operadores entre ellos,. Aunque en este caso, en lugar de un único operador erosión, dilatación, etc., aparecen en la literatura distintos operadores erosión borrosa, dilatación borrosa, etc.

Con el propósito de construir operadores erosión borrosa de forma similar a la erosión de la Morfología Matemática binaria, Divyendu y Dougherty [1-4] definen los operadores grado de inclusión para subconjuntos borrosos como relaciones difusas, aplicaciones de F(U) x F(U) en [0, 1], siendo F(U) el conjunto de todos los subconjuntos borrosos de U, verificando condiciones que, para dos subconjuntos difusos A y B de F(U) y una relación difusa R: F(U) x F(U) $\rightarrow$ [0, 1], permitan considerar a R(A, B) como una medida del grado de inclusión de A respecto de B.

En esta línea, Divyendu y Dougherty [1-4] proponen una colección de axiomas para definir el grado de inclusión. Frago [6] prueba que dichos axiomas no son independientes, dándose la siguiente definición que modifica la propuesta de los autores citados.

Definición 1: Diremos que R: F(U) x F(U) $\rightarrow$ [0, 1], es un grado de inclusión entre subconjuntos difusos si satisface el siguiente conjunto de axiomas:

IG. 1.- $R(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$

IG. 2.- $R(A, B)=0 \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\in N} \subseteq U$ tal que $\{A(x_n)\}_{n\in N}$ y $\{1-B(x_n)\}_{n\in N}$ convergen a 1

IG. 3.- R es no decreciente en la segunda variable ($B\subseteq C \Rightarrow R(A, B) \le R(A, C)$)

IG. 4.- R es no creciente en la primera variable ($B\subseteq C \Rightarrow R(C, A) \le R(B, A)$)

IG. 5.- $R(A, B) = R(B^C, A^C)$

IG. 6.- $R(A\cup B, C) \ge \min(R(A, C), R(B, C))$

IG. 7.- $R(A, B\cap C) \ge \min (R(A, B), R(A, C))$

En [6] se prueba que para λ :[0, 1] $\rightarrow$[0, 1] la relación borrosa definida para cada (A, B)$\in$ F(U)xF(U) por

$$R(A, B)= \inf_{x\in U}\{\min(1, \lambda(A(x))+\lambda(1-B(x)))\},$$

satisface las propiedades de la Definición 1 si y sólo si λ verifica las siguientes condiciones:

Tabla 1

1. - $\lambda(1) = 0$ y $\lambda(0) = 1$,
2.- $p \le q \Leftrightarrow \lambda(p)+\lambda(1-q) \ge 1$,
3.- λ es decreciente,
4.- λ es continua a la derecha en 0 y a la izquierda en1.

Resulta inmediato comprobar que de las condiciones de la tabla 1, λ resulta ser inyectiva y por lo tanto es estrictamente decreciente.

En [6] se prueba que si g: [0, 0.5] $\longrightarrow$[0.5, 1] es una función estrictamente decreciente, continua a trozos y continua en el punto 0 y tal que g(0)=1, entonces la función λ asociada a g definida por:

$$\lambda(p) = \begin{cases} g(p) & \text{si} \quad p \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - g(1-p) & \text{si} \quad p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

satisface las cuatro condiciones exigidas en la Tabla 1.

Las imágenes que se consideran son subconjuntos borrosos de un universo **U**, (funciones de **U** en [0, 1]) donde U = R^2 o U = Z^2 o un subconjunto de estos, (U será Z^2 o un subconjunto de Z^2 en el caso de imágenes digitales). Los elementos de la imagen están caracterizados por las coordenadas espaciales x e y, y un valor numérico comprendido entre el cero y el uno, que nos indica el nivel de gris de la imagen en el punto (x, y). En el caso de imágenes digitales se representan mediante una matriz cuyos índices de filas *i* y columnas *j* representarán las coordenadas espaciales de un punto *(i, j)* de la imagen y el correspondiente valor de dicho elemento de la matriz (número comprendido entre cero y uno) indica el color en dicho punto. Los elementos de la matriz son llamados elementos de la imagen o pixeles.

Con esto, se pueden definir las operaciones de erosión, dilatación, apertura y cierre. Para ello es conocido que si A es un subconjunto borroso, se denota por –A (opuesto de A) al subconjunto borroso definido por (-A)(x) =A(-x) $\forall x \in U$ y se denota por A_z (trasladado de A por $z \in U$) al subconjunto borroso definido por $A_z(x)=A(x-z)$ $\forall x \in U$

Definición 2 : [1-4] La erosión (dilatación) de una imagen A por otra B, ambos subconjuntos borrosos pertenecientes a F(U), es otro subconjunto borroso denotado por ξ(A, B) ($\mathcal{D}$(A, B)(z)), y definido por

$$\xi(A, B)(z) = R(B_z, A)$$
$$(\mathcal{D}(A, B)(z) = 1\text{-}R((-B)_z, A^c)) \ \forall z \in \mathbf{U}.$$

Definición 3: [1-4] La apertura (cierre) de un subconjunto borroso A perteneciente a F(U) por otro B, es un subconjunto borroso denotado por @(A, B) (ζ(A, B)), y definido por

$$@(A, B) = \mathcal{D}(\xi(A, B), B).$$
$$(\zeta(A, B)= \xi(\mathcal{D}(A, \text{-}B), \text{-}B)).$$

UN ORDEN PARCIAL ⊴ EN LA CLASE E DE EROSIONES ASOCIADAS A LAS FUNCIONES λ

Consideramos la familia de operadores erosión E=(ξ_λ) siendo λ una función que satisface las condiciones de la Tabla 1. Esas erosiones son operadores

$$\xi_\lambda: F(U)xF(U) \longrightarrow F(U)$$
$$(A, B) \longrightarrow \xi_\lambda(A, B)$$

definidos por: $\forall x \in \mathbf{U}$ $\xi_\lambda(A, B)(z) = R(B_z, A) =$

$$\inf_{x \in \mathbf{U}} \{ \min(1, \lambda(B(x-z)) + \lambda(1-A(x))) \}$$

o por la expresión equivalente,

$$\xi_\lambda(A, B)(z)=$$
$$\inf_{x \in \mathbf{U}} \{ \min(1, \lambda(B(x)) + \lambda(1-A(x+z))) \}.$$

Dicha familia queda descrita de modo unívoco por las funciones g mencionadas en la introducción

Consideramos en E el orden parcial ⊴ dado por

$$\xi_{\lambda_1} \trianglelefteq \xi_{\lambda_2} \Leftrightarrow g_1(x) \le g_2(x) \ \ \forall x \in [0, 0.5],$$

en donde g_1 y g_2 generan respectivamente λ_1 y λ_2

Nótese que por las condiciones de construcción de las funciones λ a partir de las funciones g, la condición $g_1(x) \le g_2(x)$ $\forall x \in [0, 0.5]$es equivalente a la verificación de

$$\lambda_1(x) \le \lambda_2(x) \quad \forall x \in [0, 0.5]$$

y

$$\lambda_1(x) \ge \lambda_2(x) \ \forall x \in (0.5, 1].$$

Los siguientes resultados reflejan algún comportamiento de la aplicación de las erosiones a imágenes.

Teorema 1: Sean dos erosiones borrosas ξ_{λ_1} y $\xi_{\lambda_2} \in E$, tales que $\xi_{\lambda_1} \trianglelefteq \xi_{\lambda_2}$ y A, B∈F(U) dos imágenes cualesquiera. Entonces, si $\xi_{\lambda_1}(A, B)(z) < 0.5$, $z \in U$ se tiene $\xi_{\lambda_1}(A, B)(z) \ge \xi_{\lambda_2}(A, B)(z)$.

Demostración: Sea $\xi_{\lambda_1}(A, B)(z) < 0.5$, $z \in U$, por tanto $\inf_{x \in U} \{\min(1, \lambda_1(B(x))+\lambda_1(1\text{-}A(x+z)))\}<0.5$. Esto implica que el subconjunto $D \subseteq U$ tal que

$$D=\{x/ \ \lambda_1(B(h))+\lambda_1(1\text{-}A(h+z)) <0.5\} \text{ es } \neq \varnothing$$

En consecuencia, (por la hipótesis $\xi_{\lambda_1}(A, B)(z) < 0.5$),

$$\xi_{\lambda_1}(A, B)(z) = \inf_{x \in \mathbf{U}} \{\min(1, \lambda_1 (B(x))+ \lambda_1 (1\text{-}A(x+z)))\}=$$

$$=\inf\{ \min(1, \lambda_1 (B(x))+ \lambda_1 (1\text{-}A(x+z)))/ \ x \in D\}$$

Además, de $\lambda_1(B(x))+\lambda_1(1\text{-}A(x+z)) <0.5$ para todo $x \in D$ deducimos que $\lambda_1(B(x)) <0.5$ y $\lambda_1(1\text{-}A(x+z)) <0.5$ y, (puesto que para cualquier λ se verifica la equivalencia $p<0,5 \Leftrightarrow \lambda(p) \ge 0.5$), en consecuencia

$$B(x) \ge 0.5 \text{ y } 1\text{-}A(x+z) \ge 0.5 \text{ para todo } x \in D.$$

Se concluye de estas últimas desigualdades que

$\lambda_1(B(x)) \ge \lambda_2(B(x))$ y $\lambda_1(1\text{-}A(x+z)) \ge \lambda_2(1\text{-}A(x+z))$ $\forall x \in D$ y de las desigualdades del mismo sentido obtenidas a partir de la suma de las anteriores, junto a las hipótesis exigidas deducimos finalmente que

$$\xi_{\lambda_1}(A, B)(z)=\inf\{\min(1, \lambda_1(B(x))+ \lambda_1(1\text{-}A(x+z)))/ \ x \in D\} \ge$$

$$\inf\{\min(1, \lambda_2(B(x))+ \lambda_2(1\text{-}A(x+z)))/ \ x \in D\} \ge$$

$$\inf_{x \in \mathbf{U}}\{\min(1, \lambda_2 (B(x))+ \lambda_2 (1\text{-}A(x+z)))\}= \xi_{\lambda_2}(A, B)(z). \ .$$

Teorema 2: Dados ξ_{λ_1} y $\xi_{\lambda_2} \in E$ tal que $\xi_{\lambda_1} \trianglelefteq \xi_{\lambda_2}$,

A, B$\in$ F(U) verificando $\forall y\in \mathbf{U}$:

$$\lambda_2(1-A(x))\geq\lambda_1(1-A(y))+ \sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))-\lambda_2(B(h))\}$$

Entonces se tiene $\xi_{\lambda_1}(A, B)(x) \leq \xi_{\lambda_2}(A, B)(x) \quad \forall x\in \mathbf{U}$.

Demostración: Vamos a probar primero que

$$\lambda_1(B(p))\leq\lambda_2(B(p))+ \sup_{x\in\mathbf{U}}\{\lambda_1(B(x))-\lambda_2(B(x))\} \quad \forall p\in \mathbf{U}:$$

- Si $B(p) \leq 0.5$ $\forall p\in \mathbf{U}$, entonces $\sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))-\lambda_2(B(h))\}\leq 0$, y resulta que

$$\lambda_1(B(p))\leq\lambda_2(B(p))+ \sup_{x\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(x))-\lambda_2(B(x))\} \quad \forall p\in \mathbf{U}$$

- Si $\exists$ $k\in \mathbf{U}$ tal que $B(k) > 0.5 \Rightarrow$ $\lambda_1(B(k)) \geq \lambda_2(B(k)) \Rightarrow \lambda_1(B(k))-\lambda_2(B(k)) \leq$
- $\sup_{x\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(x))-\lambda_2(B(x))\} \Rightarrow \lambda_1(B(k)) \leq$ $\lambda_2(B(k)) + \sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))- \lambda_2(B(h))\}$.

Al ser

$$\lambda_2(1-A(y)) \geq \lambda_1(1-A(y)) + \sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))-\lambda_2(B(h))\}$$

$\forall y\in \mathbf{U}$, para cualquier x perteneciente a **U** podemos escribir

$$\lambda_2(1-A(z+x)) \geq$$
$$\lambda_1(1-A(z+x))+ \sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))-\lambda_2(B(h))\} \quad \forall z\in \mathbf{U},$$

y por tanto $\lambda_2(1-A(z+x))+\lambda_2(B(z)) \geq$

$$\lambda_1(1-A(z+x))+\lambda_2(B(z))+ \sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))-\lambda_2(B(h))\} \quad \forall z\in \mathbf{U},$$

y puesto que

$$\lambda_2(B(z))+ \sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))-\lambda_2(B(h))\} \geq \lambda_1(B(z)),$$ resulta que

$$\lambda_2(1-A(z+x))+\lambda_2(B(z)) \geq \lambda_1(1-A(z+x))+\lambda_1(B(z)) \quad \forall z\in \mathbf{U},$$

y esto implica que $\xi_{\lambda_2}(A, B)(x) \geq \xi_{\lambda_1}(A, B)(x)$ $\forall x\in \mathbf{U}$ tal que $\lambda_2(1-A(y))\geq\lambda_1(1-A(y))+ \sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))-\lambda_2(B(h))\}$

$\forall y\in \mathbf{U}$.

Corolario 3: Dadas dos erosiones borrosas ξ_{λ_1} y ξ_{λ_2} tal que $\xi_{\lambda_1} \trianglelefteq \xi_{\lambda_2}$, entonces $0.5 \leq \xi_{\lambda_1}(A, B)(x) \leq \xi_{\lambda_2}(A, B)(x)$, para todo $x\in \mathbf{U}$ tal que

$$\lambda_2(1-A(y)) \geq \lambda_1(1-A(y))+ \sup_{h\in \mathbf{U}} \{\lambda_1(B(h))-\lambda_2(B(h))\} \text{ y}$$
$$A(y)>0.5 \quad \forall y\in \mathbf{U}.$$

Demostración: Es una consecuencia del teorema 3.

Estamos interesados en señalar la relación que existe entre el conjunto (F_g $\prec$) de las funciones g mencionadas en la introducción con el orden inducido puntualmente, el conjunto ordenado (F_λ $\prec$) de las funciones λ obtenido a partir del anterior y finalmente, el conjunto ordenado (E $\trianglelefteq$) de las erosiones definidas con estas λ.

Sea F_g el conjunto de las funciones

$$g: [0, 0.5] \longrightarrow [0.5, 1]$$

tales que: g(0) = 1, g estrictamente decreciente y g continua en el punto 0.

Teorema 4: F_g es un retículo con el orden inducido $\prec$ a partir del orden en [0, 0.5]:

$$g_1 \prec g_2 \text{ si y sólo si } g_1(x) \leq g_2(x) \ \forall x\in [0, 0.5].$$

- Demostración:

Sean g_1, g_2 y g_3 funciones pertenecientes a Fg, entonces:

- $(g_1\wedge g_2)(0) =1$ y $g_1\vee g_2 (0) =1$
- $(g_1\wedge g_2)(x)$ y $(g_1\vee g_2)(x)$ son continuas en el punto x=0 ya que g_1, g_2 ,son continuas en 0 y las funciones max y min are continuos.
- $(g_1\wedge g_2)(x)$ y $(g_1\vee g_2)(x)$ son estrictamente decrecientes puesto que g_1 y g_2 son estrictamente decrecientes.

Por tanto $g_1\wedge g_2$ y $g_1\vee g_2$ son funciones pertenecientes a Fg y (Fg, $\prec$) es un retículo. .

Nótese que este retículo no es completo, pues si se considera la familia de funciones $\{g_n \mid g_n(p)=1-\frac{1}{n}p+1,$ $\forall p\in [0, 0.5], n\in N\}$ es claro que su supremo es g(p) = 1 que no es estrictamente decreciente.

Sea F_λ el conjunto de las funciones λ de [0, 1] en [0, 1] tal que $\lambda(p) = \begin{cases} g(p) & \text{si } p\in[0, 0.5] \\ 1-g(1-p) & \text{si } p\in(0.5, 1] \end{cases}$, $g\in F_g$, Se verifica:

Corolario 5: F_λ es un retículo con la relación de orden $\lambda_1 \prec \lambda_2$ si y sólo si $\lambda_1(p) \leq \lambda_2(p)$ $\forall p\in [0, 0.5]$.

Demostración: Prueba análoga a la del Teorema 4. .

Análogamente se puede ver que el retículo (F_λ, $\prec$) no es completo.

Teorema 6.- Los retículos (F_λ, $\prec$) y (F_g, $\prec$) son retículos isomorfos.

Demostración:

- Hemos visto que F_g˝y F_λ son˝conjuntos ordenados y Es inmediato que˝existe a aplicación biyectiva entre F_g y F_λ por construcción de la función λ.

- Es isomorfismo de retículos ya que para $g_1 \leq g_2$ por construcción de las respectivas˝λ_1 y λ_2 tenemos que $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y recíprocamente. .

Teorema 7: El conjunto de las erosiones borrosas E con la relación de orden $\trianglelefteq$ es un retículo.

Demostración: Dadas las erosiones ξ_{λ_1} y ξ_{λ_2} asociadas respectivamente a g_1 y a g_2, las erosiones asociadas a $g_1 \vee g_2$ y a $g_1 \wedge g_2$ son respectivamente el supremo y el ínfimo de las iniciales.

REFERENCIAS

[1] S. Divyendu y E. R. Dougherty, Characterization of Fuzzy Minkowski Algebra, SPIE Vol. 1769 Image Algebra and Morphological Image Processing III (1992) 59-69.

[2] S. Divyendu y E. R. Dougherty,˝Fuzzification˝of Set inclusion, SPIE Vol. 1708 Applications of Artificial Intelligence X: Machine Vision and Robotics (1992) 440-449.

[3]˝S. Divyendu y˝E. R. Dougherty, Fuzzification˝of set inclusion: Theory y applications, Fuzzy Sets and˝Systems 55 (1993) 15-42.

[4] S. Divyendu y E. R. Dougherty, Fuzzy Mathematical Morphology,˝ Journal of Visual Communication˝and Image Representation,˝Vol. 3, No. 3, September 1992, 286-302.

[5] D. Dubois y H. Prade, Fuzzy Sets y Systems: Theory and Applications, Mathematics in Science y˝ Engineering, (Academic Press, New˝York 1980).

[6] N. Frago, Morfología Matemática Borrosa basada en operadores generalizados de Lukasiewicz: Procesamiento de imagenes. Ph.D Thesis, Universidad Pública de Navarra, Spain 1996.

[7] P, Burillo,.˝N. Frago, R. Fuentes, Generación de Morfologías Matematicas Borrosas, Actas del VIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica˝Fuzzy, Pamplona 1998.

[8] J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. 1 y 2, Academic Press, London 1982.