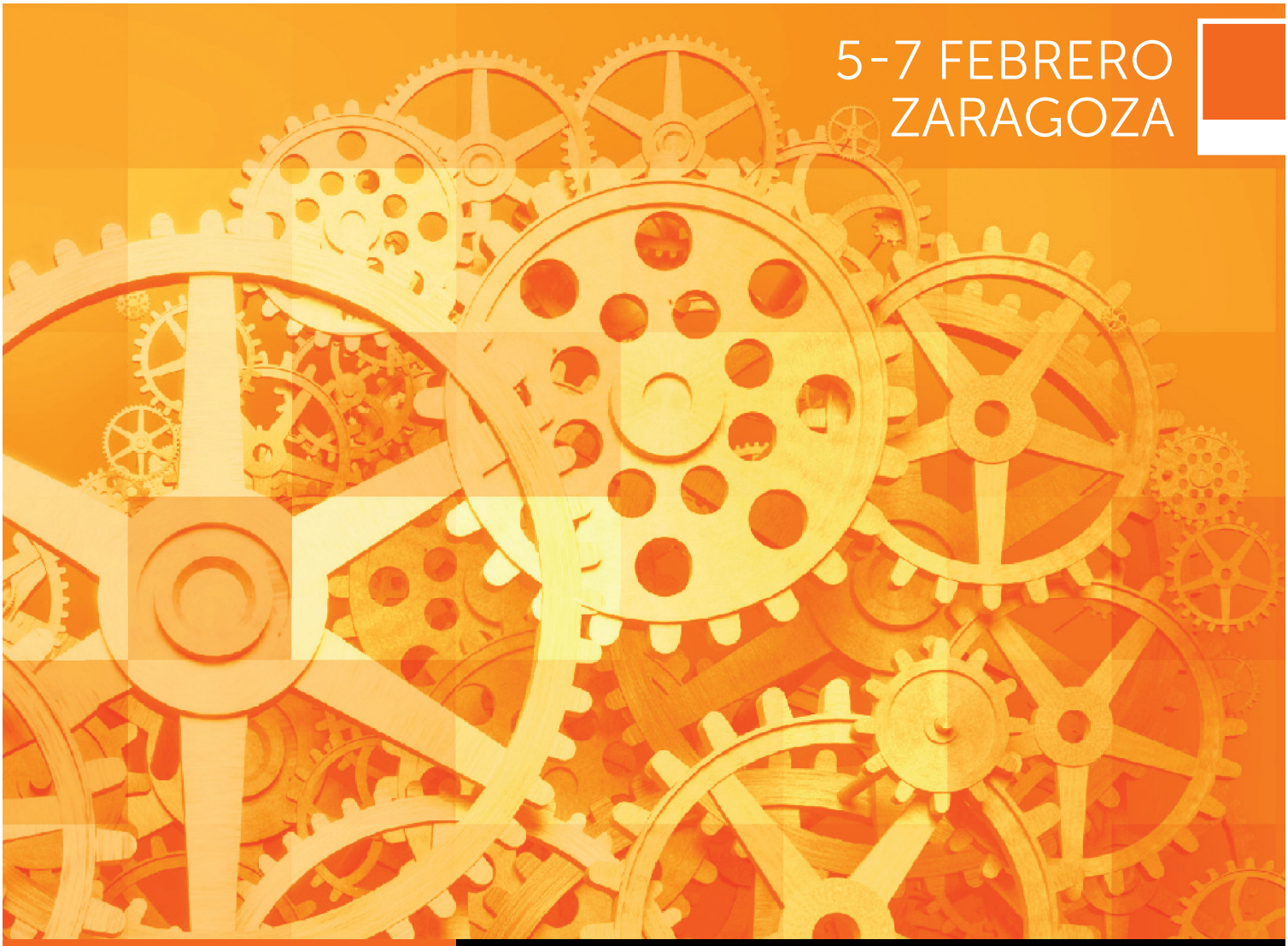
ESTYLF2014

XVII CONGRESO ESPAÑOL SOBRE TECNOLOGÍAS Y LÓGICA FUZZY



LIBRO DE ACTAS

ESTYLF2014

XVII CONGRESO ESPAÑOL SOBRE
TECNOLOGÍAS Y LÓGICA FUZZY

ORGANIZADORES:

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas, Universidad de Zaragoza

EDITORES:

Fernando Bobillo
Humberto Bustince
Francisco Javier Fernández
Enrique Herrera-Viedma

ENTIDADES PATROCINADORAS:

European Society for Fuzzy Logic and Technology
Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Granada Excellence Network of Innovation Laboratories
Instituto Universitario de Investigación de Ingeniería de Aragón
Universidad de Zaragoza

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad Zaragoza

Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza

Instituto Universitario de Investigación de Ingeniería de Aragón
Universidad Zaragoza

Depósito Legal: Z-151-2014

ISBN: 978-84-15688-76-1

Diseño de portada e impresión.- stylo DIGITAL [stylo@stylodigital.com]

impreso en España / printed in Spain

Presentación

Nos complace presentar este volumen donde se compilan los 109 trabajos aceptados para su presentación en la XVII Edición del Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2014), celebrado en Zaragoza entre los días 5 y 7 de Febrero de 2014. Todos los artículos han superado un riguroso proceso de selección y han sido evaluados positivamente por al menos 2 evaluadores expertos.

El número y la calidad de las contribuciones recibidas en estos tiempos de dificultades económicas no hace sino confirmar la vitalidad de la comunidad española dedicada a la investigación y el desarrollo de la lógica difusa y sus aplicaciones.

La organización ha tenido la austeridad como uno de sus principales objetivos, pero estamos convencidos en que se mantendrá el nivel de excelencia de las anteriores ediciones a pesar de la reducción del presupuesto.

Esperamos que durante las sesiones se produzca el habitual y deseable intercambio de ideas, comentarios y sugerencias que den lugar a la mejora y profundización de los trabajos presentados para que permitan continuar desarrollando las líneas de investigación. También esperamos que de la actividad desarrollada se estrechen y renueven los vínculos existentes entre los participantes.

Durante el congreso se concederá el Premio GENIL al mejor trabajo de un joven investigador, cuyo autor principal se encuentre en fase de realización de la tesis o la haya defendido no antes de 2013. También se concederá un reconocimiento a los investigadores que cumplan 25 años de investigación en el campo de la lógica difusa.

Nos gustaría agradecer de corazón a todos los que han hecho posible que este congreso se haya celebrado, incluyendo a autores, miembros de los comités organizador y de programa, organizadores de sesiones especiales, evaluadores, patrocinadores y en general a todas aquellas personas que de alguna u otra manera han contribuido al éxito de este congreso.

Esperamos que todos los participantes aprovechen su estancia en Zaragoza desde un punto de vista profesional pero también desde un punto de vista personal y disfruten de la hospitalidad aragonesa, de su arte y su gastronomía.

Febrero de 2014

Fernando Bobillo
Humberto Bustince
Enrique Herrera-Viedma

Organización

Presidente Honorífico

Enric Trillas (European Centre for Soft Computing)

Presidentes del Comité Organizador

Fernando Bobillo (Universidad de Zaragoza)

Comité Organizador

Carlos Bobed (Universidad de Zaragoza)
Sergio Ilarri (Universidad de Zaragoza)
Eduardo Mena (Universidad de Zaragoza)
Raquel Trillo (Universidad de Zaragoza)
Roberto Yus (Universidad de Zaragoza)

Presidentes del Comité de Programa

Humberto Bustince (Universidad Pública de Navarra)
Enrique Herrera-Viedma (Universidad de Granada)

Comité de Programa

Jesús Alcalá-Fdez (Universidad de Granada)
Rafael Alcalá (Universidad de Granada)
Cristina Alcalde (Universidad del País Vasco)
José María Alonso (European Centre for Soft Computing)
Sergio Alonso (Universidad de Granada)
Edurne Barrenechea (Universidad Pública de Navarra)
Ángel Barriga Barros (Instituto de Microelectrónica de Sevilla, IMSE-CNM)
Senén Barro (Universidade de Santiago de Compostela)
José Manuel Benítez (Universidad de Granada)
Fernando Bobillo (Universidad de Zaragoza)
Alberto Bugarín (Universidade de Santiago de Compostela)
Pedro Burillo (Universidad Pública de Navarra)
Ana Burusco (Universidad Pública de Navarra)
Francisco Javier Cabrerizo (Universidad Nacional de Educación a Distancia)
José Manuel Cadenas (Universidad de Murcia)
Tomasa Calvo (Universidad de Alcalá de Henares)
Pablo Carmona (Universidad de Extremadura)
Jorge Casillas (Universidad de Granada)
Elena Castiñeira (Universidad Politécnica de Madrid)
Juan Luis Castro (Universidad de Granada)
José Jesús Castro-Sánchez (Universidad de Castilla-La Mancha)
Óscar Cordón (Universidad de Granada)

Chris Cornelis (Universidad de Granada)
Ulises Cortés (Universitat Politècnica de Catalunya)
Inés Couso (Universidad de Oviedo)
Susana Cubillo (Universidad Politécnica de Madrid)
María Jesús De la Fuente (Universidad de Valladolid)
María José Del Jesús (Universidad de Jaén)
Miguel Delgado (Universidad de Granada)
Susana Díaz (Universidad de Oviedo)
Jorge Elorza (Universidad de Navarra)
Juan Manuel Escaño (Universidad de Sevilla)
Macarena Espinilla (Universidad de Jaén)
Francesc Esteva (Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial, IIIA-CSIC)
Francisco Javier Fernández (Universidad Pública de Navarra)
Ramón Fuentes-González (Universidad Pública de Navarra)
Mikel Galar (Universidad Pública de Navarra)
Pere García (Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial, IIIA-CSIC)
Itziar García-Honrado (Universidad de Oviedo)
José Luis García-Lapresta (Universidad de Valladolid)
Luis Garmendia (Universidad Complutense de Madrid)
María Angeles Gil (Universidad de Oviedo)
Lluís Godo (Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial, IIIA-CSIC)
Daniel Gómez (Universidad Complutense de Madrid)
Antonio González (Universidad de Granada)
Francisco Herrera (Universidad de Granada)
Óscar Ibáñez (European Centre for Soft Computing)
Joan Jacas (Universitat Politècnica de Catalunya)
Luis Jiménez (Universidad de Castilla-La Mancha)
Aránzazu Jurío (Universidad Pública de Navarra)
María Teresa Lamata (Universidad de Granada)
Vicente Liern (Universitat de València)
Bonifacio Llamazares (Universidad de Valladolid)
Carlos López-Molina (Universidad Pública de Navarra)
Luis Magdalena (European Centre for Soft Computing)
Roque Marín (Universidad de Murcia)
María José Martín-Bautista (Universidad de Granada)
Luis Martínez (Universidad de Jaén)
Sebastià Massanet (Universitat de les Illes Balears)
Francisco Mata (Universidad de Jaén)
Gaspar Mayor (Universitat de les Illes Balears)
José María Merigó (Universitat de Barcelona)
José Manuel Molina-López (Universidad Carlos III de Madrid)
Javier Montero (Universidad Complutense de Madrid)
Susana Montes (Universidad de Oviedo)
Eduard Montseny (Universitat Politècnica de Catalunya)
Claudio Moraga (European Centre for Soft Computing)
Francisco José Moreno-Velo (Universidad de Huelva)
Manuel Mucientes (Universidade de Santiago de Compostela)
Manuel Ojeda-Aciego (Universidad de Málaga)
José Ángel Olivas (Universidad de Castilla-La Mancha)
Miguel Pagola (Universidad Pública de Navarra)
Daniel Paternain (Universidad Pública de Navarra)
José Ignacio Peláez (Universidad de Málaga)
Antonio Peregrín (Universidad de Huelva)
Raúl Pérez (Universidad de Granada)
Hector Pomares (Universidad de Granada)
Carlos Porcel (Universidad de Jaén)
Ana Pradera (Universidad Rey Juan Carlos)
Adolfo R. de Soto (Universidad de León)
Jordi Recasens (Universitat Politècnica de Catalunya)
Ignacio Requena (Universidad de Granada)
Juan Vicente Riera (Universitat de les Illes Balears)

J. Tinguaro Rodríguez (Universidad Complutense de Madrid)
Rosa María Rodríguez (Universidad de Jaén)
Ignacio Rojas (Universidad de Granada)
Francisco Pascual Romero (Universidad de Castilla-La Mancha)
Gregorio Sainz (Universidad de Valladolid)
Daniel Sánchez (Universidad de Granada)
Luciano Sánchez (Universidad de Oviedo)
Santiago Sánchez-Solano (Instituto de Microelectrónica de Sevilla, IMSE-CNM)
José Antonio Sanz (Universidad Pública de Navarra)
Rudolf Seising (European Centre for Soft Computing)
Jesús Serrano-Guerrero (Universidad de Castilla-La Mancha)
Miguel Ángel Sicilia (Universidad de Alcalá de Henares)
Pilar Sobrevilla (Universitat Politècnica de Catalunya)
Alejandro Sobrino (Universidade de Santiago de Compostela)
Vicenç Torra (Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial, IIIA-CSIC)
Joan Torrens (Universitat de les Illes Balears)
Enric Trillas (European Centre for Soft Computing)
Gracián Triviño (European Centre for Soft Computing)
Aida Valls (Universitat Rovira i Virgili)
José Luis Verdegay (Universidad de Granada)
Amparo Vila (Universidad de Granada)
Pedro Villar (Universidad de Granada)

Presidente de Sesiones Especiales

Francisco Javier Fernández (Universidad Pública de Navarra)

Organización de Sesiones Especiales

Extensiones difusas del análisis formal de conceptos y temas afines

Ana Burusco (Universidad Pública de Navarra)
Manuel Ojeda (Universidad de Málaga)

Toma de decisión y computación con palabras

Macarena Espinilla (Universidad de Jaén)
Iván Palomares (Universidad de Jaén)
Rosa María Rodríguez (Universidad de Jaén)

Funciones de implicación borrosas: Teoría y aplicaciones

Sebastià Massanet (Universitat de les Illes Balears)
Juan Vicente Riera (Universitat de les Illes Balears)
Daniel Ruiz-Aguilera (Universitat de les Illes Balears)

Modelos de optimización y Soft Computing

David Pelta (Universidad de Granada)
José Luis Verdegay (Universidad de Granada)

Funciones de agregación

Tomasa Calvo (Universidad de Alcalá de Henares)
Javier Montero (Universidad Complutense de Madrid)
Joan Torrens (Universitat de les Illes Balears)

Soft Computing en visión artificial

Edurne Barrenechea (Universidad Pública de Navarra)
Manuel González (Universitat de les Illes Balears)
Miguel Pagola (Universidad Pública de Navarra)

Aplicaciones industriales y empresariales del Soft Computing

Andrés Bustillo-Iglesias (Universidad de Burgos)
César García-Osorio (Universidad de Burgos)
Juan José Rodríguez-Díez (Universidad de Burgos)

Descripciones lingüísticas de fenómenos complejos: modelos, técnicas y aplicaciones

Senén Barro (Universidade de Santiago de Compostela)
Alberto J. Bugarín (Universidade de Santiago de Compostela)
Gracián Triviño (European Centre for Soft Computing)

Lógicas fuzzy: aspectos formales y temas relacionados

Francesc Esteva (Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial, IIIA-CSIC)
Lluís Godo (Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial, IIIA-CSIC)

III Seminario Alfredo Deaño sobre razonamiento ordinario

María G. Navarro (Instituto de Filosofía IFS-CSIC)
Martín Pereira-Fariña (Universidade de Santiago de Compostela)
Alejandro Sobrino (Universidade de Santiago de Compostela)

Visiones externas del concepto de subconjunto fuzzy

María Jesús Campión (Universidad Pública de Navarra)
Esteban Induráin (Universidad Pública de Navarra)

Soft Computing y recuperación de información en Internet

Enrique Herrera-Viedma (Universidad de Granada)
María José Martín-Bautista (Universidad de Granada)
José Ángel Olivas (Universidad de Castilla-La Mancha)
Alejandro Sobrino (Universidade de Santiago de Compostela)

Fusión de información

Jesús García-Herrero (Universidad Carlos III de Madrid)
Juan Gómez-Romero (Universidad de Granada)
José Manuel Molina-López (Universidad Carlos III de Madrid)

Lógica borrosa y didáctica

Itziar García-Honrado (Universidad de Oviedo)

Soft Computing en aprendizaje

Mikel Galar (Universidad Pública de Navarra)
José Antonio Sanz (Universidad Pública de Navarra)

Minería de datos, texto y web

María José Martín-Bautista (Universidad de Granada)
María Dolores Ruiz (Universidad de Granada)
Daniel Sánchez (Universidad de Granada)

Revisores Externos

José C. R. Alcantud (Universidad de Salamanca)
Ángela Blanco-Fernández (Universidad de Oviedo)
María Jesús Campión (Universidad Pública de Navarra)
Jesús Ariel Carrasco-Ochoa (Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla, México)
Rita Castillo-Ortega (Universidad de Granada)
Jorge Castro (Universidad de Jaén)
Marco Cerami (Univerzita Palackého v Olomouci, República Checa)
Gonzalo Cerruela-García (Universidad de Córdoba)
Ricardo Coelho (Universidade Federal de São Paulo, Brasil)
Patricia Conde-Clemente (European Centre for Soft Computing)
Pablo Cordero (Universidad de Málaga)
Maritza Correa-Valencia (Universidad Autónoma de Occidente, Cali, Colombia)
Rocío de Andrés (Universidad de Salamanca)
Lynn D'Eer (Universiteit Gent, Bélgica)
Juan Carlos Díaz (Universidad de Cádiz)
Félix Díaz-Hermida (Universidade de Santiago de Compostela)
Irene Díaz-Valenzuela (Universidad de Granada)
Santiago Fernández-Lanza (Universidade de Vigo)
Miquel Ferrer (Universitat Autònoma de Barcelona)
Tommaso Flaminio (Univesità dell'Insubria, Varese, Italia)
Enrique Frías-Martínez (Telefónica I+D)
Colin Fyfe (University of the West of Scotland, Paisley, Reino Unido)
Jesús García (Universidad Carlos III de Madrid)
Socorro García-Cascales (Universidad Politécnica de Cartagena)
Àngel García-Cerdaña (Universitat Pompeu-Fabra)
Nicolás García-Pedrajas (Universidad de Córdoba)
Juan Gómez-Romero (Universidad de Granada)
Manuel González-Hidalgo (Universitat de les Illes Balears)
Sergio Gramajo (Universidad Tecnológica Nacional, Resistencia, Argentina)
Pablo Hernández (Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Venezuela)
Esteban Induráin (Universidad Pública de Navarra)
Orestes Llanes (Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cuba)
Julián Luengo (Universidad de Burgos)
Enrico Marchioni (Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Francia)
Nicolás Marín (Universidad de Granada)
Enrique Martí (Universidad Carlos III de Madrid)
David Martín (Universidad Carlos III de Madrid)
Javier Martín (Universitat de les Illes Balears)
Carlos Menéndez-González (HC Energía)
Arnau Mir (Universitat de les Illes Balears)
Carlos Molina (Universidad de Jaén)
Miguel Molina-Solana (Universidad de Granada)
Ángel Mora (Universidad de Málaga)
Juan Antonio Morente-Molinera (Universidad de Granada)
Rafael Muñoz-Mas (Universitat Politècnica de València)
María G. Navarro (Instituto de Filosofía IFS-CSIC)
Carles Noguera (Ústav teorie informace a automatizace UTIA - AVČR, Praga, República Checa)
Pavel Novoa (Universidad de Holguín, Cuba)
Éldman O. Nunes (Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil)
Iván Palomares (Universidad de Jaén)
David P. Pancho (European Centre for Soft Computing)
David A. Pelta (Universidad de Granada)
Martín Pereira-Fariña (Universidade de Santiago de Compostela)
Ignacio J. Pérez (Universidad de Cádiz)
Cristina Puente (Universidad Pontificia de Comillas)
Arnaud Quirin (Centro Tecnolóxico de Telecomunicacions de Galicia)
Ana Belén Ramos-Guajardo (Universidad de Oviedo)
Alejandro Ramos-Soto (Universidade de Santiago de Compostela)

Daniel Rodríguez-Aguilera (Universitat de les Illes Balears)
Francisco P. Romero (Universidad de Castilla-La Mancha)
María Ros (Universidad de Granada)
Clemente Rubio-Manzano (Universidad del Bío-Bío, Chile)
María Dolores Ruiz (Universidad de Granada)
José Antonio Sáez (Universidad de Granada)
Rodrigo Salas (Universidad de Valparaíso, Chile)
Ángel Sánchez (Universidad Rey Juan Carlos)
Pedro J. Sánchez (Universidad de Jaén)
Gloria Sánchez-Torrubia (Universidad Politécnica de Madrid)
Andrés Soto (Bityvip)
Jaume Suñer (Universitat de les Illes Balears)
Carmen Torres-Blanc (Universidad Politécnica de Madrid)
Krzysztof Trawinski (European Centre for Soft Computing)
Francisco José Valverde-Albacete (Universidad Española de Educación a Distancia)
Edmundo Vergara Moreno (Universidad Nacional de Trujillo, Perú)
Yeleny Zulueta (Universidad de las Ciencias Informáticas, La Habana, Cuba)

Tabla de contenidos

Sesión regular

¿Puede la lógica fuzzy ayudar a formalizar las situaciones imponderables? (A través de Smith, Schlaudt y Fraasen) 1-8
Carlos Ortiz de Landázuri

Operadores de T-indistinguibilidad respecto a sumas ordinales 9-14
Dionis Boixader y Jordi Recasens

Programación lógica lingüística 15-20
Clemente Rubio-Manzano y Pascual Julián-Iranzo

Multi-criteria decision making with linguistic labels: a comparison of two methodologies applied to energy planning 21-26
Arayeh Afsordegan, Mónica Sánchez, Nuria Agell, Lázaro Cremades y Siamak Zahedi

Modelos de conjuntos difusos rugosos tolerantes al ruido: definiciones y propiedades 27-32
Lynn D'Eer, Nele Verbiest, Chris Cornelis y Lluís Godo

Elicitación de probabilidades difusas 33-38
Eloy Vicente Cestero, Alfonso Mateos Caballero y Antonio Jiménez Martín

¿Cuántos clústers hay? El algoritmo WAT 39-44
Gabriel Mattioli

Some illustrative examples of permutability of fuzzy operators y fuzzy relations 45-50
Neus Carmona Cervelló, Jorge Elorza, Jordi Recasens y Jean Bragard

Software para ejecutar diversos tipos de división relacional difusa 51-56
David E. Casas Del Rosal y José Galindo Gómez

Contractible and recursively reductible measures of specificity 57-60
Luis Garmendia, Ramón González y Ronald R. Yager

Aplicación de la lógica fuzzy a la creación áreas cortafuegos compatibles con la extracción de biomasa con fines energéticos 61-66
Irma Fernández Migueláñez, Javier Madrigal Olmo, Luis Garmendia, Carmen Hernando Lara y Mercedes Guijarro Guzmán

Estudio preliminar sobre el uso de operadores de agregación uninorma en el modelado difuso lingüístico 67-72
Francisco Alfredo Márquez, Sebastià Massanet y Antonio Peregrín

Modeling y control of medicine production areas 73-80
Daniel Fernández y Adolfo R. De Soto

OWA operators in multi-criteria decision analysis 81-86
José M. Merigó, Jian-Bo Yang y Yu-Wang Chen

José Carlos R. Alcantud y Rocío De Andrés 87-92
A fuzzy viewpoint of consensus measures in social choice

Extensiones difusas del análisis formal de conceptos y temas afines

Towards the algebraization of Formal Concept Analysis over complete dioids 93-98
Francisco J. Valverde-Albacete y Carmen Peláez-Moreno

On the construction of fuzzy Galois connections 99-102
Francisca García-Pardo, Inma P. Cabrera, Pablo Cordero y Manuel Ojeda-Aciego

Algunos elementos de morfología matemática en el análisis de conceptos L-difusos 103-108
Cristina Alcalde, Ana Burusco y Ramón Fuentes-González

Prefiltrado para sistemas de recomendación basado en lógica difusa 109-114
Pablo Cordero, Manuel Enciso, José Luis Leiva, Ángel Mora y Carlos Rossi

A survey of general operators useful for fuzzy FCA 115-120
María Eugenia Cornejo, Jesús Medina y Eloísa Ramírez-Poussa

Applying multi-adjoint relation equations to fuzzy logic programming 121-126
Juan Carlos Díaz y Jesús Medina

Toma de decisión y computación con palabras. Aplicaciones

Una propuesta para medir el consenso entre agentes que valoran las alternativas mediante expresiones lingüísticas imprecisas 127-132
José Luis García Lapresta

Plataforma Web 2.0 para la gestión de toma de decisiones en centros educativos 133-138
Juan Antonio Morente-Molinera, Raquel Ureña-Pérez, Enrique Herrera-Viedma y Antonio Gabriel López-Herrera

Gestión de expertos con comportamientos no cooperativos en procesos de consenso en grandes grupos 139-144
Francisco José Quesada, Iván Palomares y Luis Martínez

Modelo lingüístico de toma de decisiones dinámicas muticriterio con información heterogénea 145- 150
Santiago Zapata, Macarena Espinilla y Luis Martínez

A new linguistic consensus model based on a fuzzy ontology as weapon of influence 151-156
Ignacio J. Pérez, Juan Antonio Morente-Molinera, Robin Wikström, József Mezei, Christer Carlsson y Enrique Herrera-Viedma

Dynamic CWW engine to support decisions re-evaluation 157-162
Romina Torres, Rodrigo Salas y Hernán Astudillo

Algunas interpretaciones del modelo lingüístico computacional basado en números borrosos discretos 163-168
Sebastià Massanet, Juan Vicente Riera y Joan Torrens

Modelo de consenso basado en estructuras de decisión dinámicas 169-174
Luis Escobar-Ramírez, Pedro J. Sánchez y Luis Martínez

S-PISNA: una herramienta de análisis para grafos difusos basada en computación con palabras para la mejora de recomendación a grupos 175-180
Jorge Castro, Salud Jiménez, Manuel J. Barranco y Luis Martínez

Aplicación del uso de valoraciones hesitant lingüísticos para una consultora de inmuebles 181-186
Rosana Montes, Ana María Sanchez, Pedro Villar y Francisco Herrera

Flintstones: una suite para la toma de decisiones lingüísticas basada en 2-tupla lingüísticas y extensiones 187-192
Francisco Javier Estrella, Macarena Espinilla y Luis Martínez

Funciones de implicación borrosas: Teoría y aplicaciones

Implicaciones residuadas definidas a partir de uninormas discretas 193-198
Margarita Mas, Miquel Monserrat y Joan Torrens

Nuevas contrapositivaciones de implicaciones borrosas respecto de negaciones fuertes 199-204
Isabel Aguiló, Jaume Suñer y Joan Torrens

Sobre implicaciones polinómicas 205-210
Sebastià Massanet, Juan Vicente Riera y Daniel Ruiz-Aguilera

El problema del orden en las implicaciones intervalo-valoradas 211-216
María José Asiain, Humberto Bustince, Laura De Miguel, Francisco Javier Fernández y Ana Pradera

Modelos de optimización y Soft Computing

A note on generalized convexity and fuzzy optimization 217-222
Antonio Rufián-Lizana, Rafaela Osuna-Gómez y Yurilev Chalco-Cano

Planificación de rutas orientada a la calidad del servicio con tiempos difusos 223-228
Julio Brito, Airam Expósito, José Andrés Moreno y José Luis Verdegay

Modelos fuzzy para la selección de carteras socialmente responsables 229-234
Clara Calvo, Carlos Ivorra y Vicente Liern

Bagim-ofp. Particionamiento fuzzy de atributos desde datos imperfectos en datasets con pocos ejemplos 235-240
José Manuel Cadenas, María del Carmen Garrido, Raquel Martínez y Antonio Muñoz-Ledesma

Problemas logísticos del lado del mar con datos imprecisos 241-246
Christopher Expósito, Eduardo Lalla, María Teresa Lamata, Belén Melián y Marcos Moreno

Programación por metas borrosas: un nuevo enfoque mediante programación por metas estándar 247-252
Mariano Jiménez, Amelia Bilbao y Mar Arenas

Fortalezas de los momentos posibilísticos 253-258
José D. Bermúdez y Enriqueta Vercher

La ordenación de unidades productivas en análisis de datos envolvente difuso 259-264
María Teresa León e Inmaculada Sirvent

Manejo de incertidumbre en el problema de localización de cobertura máxima: una revisión con énfasis en el enfoque difuso 265-270
Virgilio Cruz, Antonio Masegosa, David Pelta y José Luis Verdegay

Price analysis for prefabricated houses with imprecise data 271-276
Ricardo Coelho y Carlos Cruz

Funciones de agregación

Hacia una caracterización de las uninormas discretas con operadores subyacentes suaves 277-282
Daniel Ruiz-Aguilera y Joan Torrens

When is the aggregation of weightable metrics a weightable metric? 283-288
Sebastià Massanet y Óscar Valero

Consistencia y estabilidad en operadores de agregación: una aplicación al problema de datos perdidos 289-296
Daniel Gómez, Karina Rojas, Javier Montero, J. Tinguaro Rodríguez y Gleb Beliakov

On weak monotonicity of some mixture functions 297-302
Tomasa Calvo, Gleb Beliakov y Tim Wilkin

Aggregation systems in complex environments with distance measures 303- 308
José M. Merigó

Distancias y multidistancias derivadas de operadores de diferencia simétrica 309-314
Isabel Aguiló, Javier Martín, Gaspar Mayor y Jaume Suñer

Soft computing en visión artificial

Caracterización difusa del desplazamiento de un vehículo mediante el análisis de la codificación del movimiento en H264/AVC 315- 320
Juan Giralt, Juan Moreno-García, Ester del Castillo, Luis Jiménez y Luis Rodríguez-Benítez

Análisis de riesgos en carretera basado en técnicas de visión artificial y lógica difusa 321-326
Juan Giralt, Juan Moreno-García, Ester del Castillo, Luis Jiménez y Luis Rodríguez-Benítez

Generalización de los operadores morfológicos en la detección de contornos 327-332
Manuel González-Hidalgo, Arnau Mir, Sebastià Massanet y Daniel Ruiz-Aguilera

Fusión de gradientes multiespectral basada en operadores ponderados 333-338
Carlos López-Molina, Edurne Barrenechea, Humberto Bustince y Bernard De Baets

Aplicaciones industriales y empresariales del Soft Computing

Modelado de un vehículo aéreo no tripulado mediante combinación de técnicas paramétricas y neurodifusas 339-344
Jesús Enrique Sierra y Matilde Santos

Segmentación de defectos en piezas de fundido usando umbrales adaptativos y ensembles 345-350
José Francisco Díez-Pastor, Álvar Arnaiz-González, César García-Osorio y Juan José Rodríguez

Selección de instancias en regresión mediante discretización 351-356
Álvar Arnaiz-González, José Francisco Díez-Pastor, Juan José Rodríguez y César García-Osorio

Mantenimiento predictivo de máquinas de pasteurización hiperbárica con técnicas de minería de datos 357-362
Pedro Santos González, Jesús Maudes Raedo, Andrés Bustillo Iglesias, Julio Garrido Sánchez y Jaime Martínez García

Effects of molecular representation in predicting the biological activity using SVM and PLS approachess 363-368
Gonzalo Cerruela-García, Irene Luque-Ruiz, Nicolás García-Pedrajas y Miguel Ángel Gómez-Nieto

Equilibrio entre prioridades del cliente y reducción de costes 369-374
Joaquín Pacheco y Amaya Martínez-Puras

Inteligencia Artificial para determinar la calidad en láminas metálicas texturizada por EDT 375-380
Maritza Correa-Valencia y Jorge Pamies-Teixeira

Descripciones lingüísticas de fenómenos complejos: modelos, técnicas y aplicaciones

Finding suitable time partitions for the linguistic summarization of time series 381-386
Rita Castillo-Ortega, Nicolás Marín y Daniel Sánchez

Extensión del concepto de percepción computacional utilizando Z-numbers 387-392
Patricia Conde-Clemente, José M. Alonso y Gracián Triviño

Antecedentes, lagunas y nuevos resultados en conjuntos tipo 2 393-398
Pablo Hernández, Susana Cubillo y Carmen Torres-Blanc

Descripción lingüística sobre evolución de la desforestación 399-404
Éldman O. Nunes, Ángel Sánchez y Gracián Triviño

Generación automática de predicciones meteorológicas a corto plazo: metodología y validación 405-410
Alejandro Ramos-Soto, Alberto Bugarín y Senén Barro

Variables lingüísticas y codificación dispersa 411-416
Adolfo R. de Soto

Modelo lingüístico del aprendizaje para la evaluación automática basada en criterios 417-422
Gloria Sánchez-Torrubia, Carmen Torres-Blanc y Gracián Triviño

Lógicas fuzzy: aspectos formales y temas relacionados

About standard completeness of Product logic 423-428
Amanda Vidal, Francesc Esteva y Lluís Godo

Completeness of a PSPACE algorithm for concept satisfiability in finite-valued Fuzzy Description Logics 429-434
Marco Cerami, Francesc Esteva

On conjectures in t-norm based fuzzy logics 435-440
Francesc Esteva, Itziar García-Honrado y Lluís Godo

III Seminario Alfredo Deaño sobre razonamiento ordinario

Percepción y ¿justificación, legitimación o sustento? 441-446
José L. Falguera y Santiago Peleteiro

Razonando con palabras: una primera aproximación 447-452
Clemente Rubio-Manzano y Pascual Julián-Iranzo

Bivalent and trivalent logics in the analysis of borderline cases 453-456
Pablo Cobreros y Laura Bujalance

Alfredo Deaño y el razonamiento ordinario 457- 462
María G. Navarro

Recursos lingüístico-formales para el silogismo aproximado 463-468
Martín Pereira-Fariña y Alejandro Sobrino

Visiones externas del concepto de subconjunto fuzzy

Fuzzy sets from the ethics of social preferences 469-474
José Carlos R. Alcantud

Fuzzy automata as group representations 475-478
Inmaculada Lizasoain y Marisol Gómez

Conjuntos fuzzy desde familias anidadas 479-484
Edurne Barrenechea, Humberto Bustince, María Jesús Campión, Esteban Induráin y Vicki Knoblauch

Subconjuntos fuzzy y ecuaciones funcionales 485-488
María Jesús Campión, Raquel G. Catalán, Esteban Induráin y Gustavo Ochoa

Subconjuntos fuzzy a través del espectro de Uryshon 489-492
Francisco Javier Abrísqueta, María Jesús Campión, Asier Estevan y Esteban Induráin

Soft Computing y recuperación de información en Internet

Aplicación de un sistema de recomendaciones que combina relevancia y calidad en una biblioteca digital universitaria 493-498
Álvaro Tejeda-Lorente, Carlos Porcel, Juan Bernabé-Moreno, María Ángeles Martínez y Enrique Herrera-Viedma

Un modelo para evaluar la calidad de las bibliotecas 2.0 usando computación con palabras 499-504
Francisco Javier Cabrerizo, Rubén Heradio, David Fernández-Amorós, Manuel Herrera, Raquel Ureña y Enrique Herrera-Viedma

Combinando variables lingüísticas y ontologías para la consulta flexible de base de datos 505-510
Clemente Rubio-Manzano, Pascual Julián-Iranzo y Esteban Salazar-Santis

Un método de agrupamiento semisupervisado difuso: aplicación en el ámbito de la clasificación de publicaciones científicas 511-516
Irene Díaz-Valenzuela, María José Martin-Bautista y Amparo Vila

Estudio comparativo sobre el empleo de diccionarios en el análisis de sentimientos en textos cortos 517-522
Andrés Soto, Carlos Cabrero, Antonio Menta, David Corbatón, Pedro Martín y Asier Ruiz de Alegría

Aplicación de la lógica borrosa para la calificación de información clínica bajo criterios de calidad de datos 523-528
Francisco P. Romero, José Ángel Olivas, Jesús Serrano-Guerrero, Ismael Caballero, Mauro J. Oruezábal, Israel Alonso y David Contreras

Identifying citation classics in fuzzy set field using the concept of h-classics 529-534
Manuel Jesús Cobo, María Ángeles Martínez, Antonio Gabriel López-Herrera y Enrique Herrera-Viedma

Búsqueda conceptual en la Web basada en imágenes y su contexto 535-540
Abril Ayala-Sánchez y José Ángel Olivas

Fusión de información

Modelos de representación de imprecisión e incertidumbre en fusión de alto nivel 541-546
Juan Gómez-Romero, Jesús García y José M. Molina

In-vehicle sensor fusion methodology for pedestrian detection with danger estimation 547-552
David Martín, Fernando García, Arturo de la Escalera y José María Armingol

Sistema de localización en interiores basado en la fusión de información 553-558
Gabriel Villarrubia, Juan F. de Paz, Javier Bajo y Juan M. Corchado

Sentencias cuantificadas difusas: aplicaciones a la fusión de información 559-564
María Dolores Ruiz, Juan Gómez-Romero, Daniel Sánchez y María José Martín-Bautista

Lógica borrosa y didáctica

Scientific progress and cognitive development and fuzzy concepts - Historical-philosophical remarks 565-572
Rudolf Seising

Reflexiones sobre el tratamiento de lo incierto en Educación Primaria en España 573-578
Ángela Blanco-Fernández, Itziar García-Honrado, Ana Belén Ramos-Guajardo y Luis J. Rodríguez

Ejemplificación del uso de conjuntos borrosos en la valoración de la calidad de la enseñanza 579-584
Miquel Ferrer y Itziar García-Honrado

Una experiencia docente sobre el uso cotidiano de las diferentes lógicas 585-590
J. Tinguaro Rodríguez, Carely Guada y Javier Montero

Soft Computing en aprendizaje

Diseño de métodos de combinación de clasificadores difusos para problemas de alta dimensionalidad mediante random oracles 591- 596
Krzysztof Trawinski, Arnaud Quirin y Óscar Cordón

Analyzing fuzzy rule-based systems with fingrams in Knime 597-602
David P. Pancho, Jose M. Alonso, Tobias Kötter, Michael R. Berthold, Luis Magdalena

Mejorando la clasificación multi-clase en FARC-HD mediante el uso de la estrategia uno-contra-uno: adaptando el sistema de inferencia 603-608
Mikel Elkano, Mikel Galar, José Antonio Sanz, Edurne Barrenechea, Francisco Herrera y Humberto Bustince

Multilayer perceptron ensembles (MLP ensembles) in modelling microhabitat suitability for freshwater fish 609-614
Rafael Muñoz-Mas, Juan Diego Alcaraz-Hernández y Francisco Martínez-Capel

Un estudio preliminar sobre clasificación de huellas dactilares con sistemas de clasificación basados en reglas difusas 615-620
Mikel Galar, José Antonio Sanz, Miguel Pagola, Humberto Bustince y Francisco Herrera

Diseño de un sistema de clasificación basado en reglas difusas para one-class mediante el aprendizaje genético de la base de datos 621-626
Pedro Villar, Ana María Sánchez, Rosana Montes y Francisco Herrera

Minería de datos, texto y web

Minería de datos y gestión energética: tendencias actuales 627-632
Miguel Molina-Solana, María Ros, María José Martín-Bautista y Amparo Vila

Reglas de asociación difusas para la detección de anomalías 633-638
María Dolores Ruiz, Daniel Sánchez, María José Martín-Bautista, Amparo Vila y Miguel Delgado

Complexity reduction in classification based on associations over datacubes 639-644
Carlos Molina, Belén Prados-Suárez, Daniel Sánchez y Amparo Vila

Clustering with fuzzy coverings 645-650
Daniel Sánchez y José María Serrano

¿PUEDE LA LÓGICA FUZZY AYUDAR A FORMALIZAR LAS SITUACIONES IMPONDERABLES? (A TRAVÉS DE SMITH, SCHLAUDT Y FRAASEN)

Carlos Ortiz de Landázuri [1]

[1] *Universidad de Navarra,* cortiz@unav.es

Resumen

Se analiza la posibilidad de que la lógica fuzzy ayude a resolver algunas lagunas de formalización del cálculo de imponderables, como sucede con la lógica de la vaguedad, las escalas multifactoriales de medida, o las representaciones científicas pretendidamente pictóricas, como respectivamente proponen Schmidt, Schlaudt y C. van Fraassen. Veamos cada una de estas propuestas por separado.

Palabras Clave: vaguedad, evaluacionismo, imponderables, ciencia.

1 SCHMIDT, 2008: LA VAGUEDAD EN LOS CÁLCULOS DE IMPONDERABLES

Nicholas Smith es un conocido especialista en *lógica de la vaguedad* en la forma como hoy día ha sido cultivada por Williamson, Sorensen, Keefe o Shapiro, siguiendo a su vez la lógica de conjuntos borrosa de Lofti A. Zadeh (1975). En estos casos la lógica de la vaguedad terminó convirtiéndose así en una lógica alternativa a la lógica clásica, llegándose a constituirse en una especie de lógica primera o propedéutica básica para todo tipo de ciencias, incluidas las ciencias formales o las propias matemáticas (Ortiz, 1999). Por su parte *"Vaguedad y grados de verdad"* (Smith, 2008), contrapone tres grandes corrientes o estilos de pensamiento a la hora de valorar las *relaciones* de los conjuntos mantienen entre sí y con sus elementos, con propuestas en gran parte antitéticas (Halbach, 2010): a) el *logicismo* de Frege y Taski justificó la verdad y la falsedad de un conjunto en virtud de un concepto semántico de verdad ("la nieve es blanca, solo y solo si la nieve es blanca"), propugnando una aplicación muy estricta del principio de bivalencia al núcleo duro esencial de la lógica, sin admitir tampoco una posible situación intermedia de vaguedad (Sider, 2010); b) el *intuicionismo* de Michael Dummett concibió la noción de verdad y de vaguedad de los conjuntos como una simple consecuencia de un uso meramente convencional y decisionista del axioma de elección, sin que la formulación del principio de bivalencia llegara a formar parte en ningún caso del núcleo duro o esencial de la lógica formal (Gupta, 1988); c) El *evaluacionismo* de Timoty Williamson tiene en cuenta desde un principio la posibilidad de distintos grados de verdad y vaguedad, con tres alternativas (Brown, 2011): a) El *multi- o plurivaluacionismo* estricto de Williamson que admite diversos valores intermedios entre lo verdadero y lo falso, con sus correspondientes grados de vaguedad, aunque sin acabar de revisar el papel desempeñado por el principio de bivalencia en la configuración del núcleo duro esencial de la lógica, como hubiera sido de esperar (Willliamson, 1994); b) El *supervaluacionismo epistemológico* de Roy Sorensen que mantuvo los anteriores criterios de bivalencia vigentes a la hora de formalizar el núcleo duro esencial de la lógica clásica, otorgando a estos otros criterios multi o plurivaluacionistas de la lógica de la vaguedad de Williamson un valor exclusivamente práctico o pragmático (AA.VV., 1998); finalmente, c) el *multivaluacionismo contextual* de Keefe, Shapiro o Smith que reconoció que la formulación del principio de bivalencia, o más bien multivalencia, pueden acabar condicionando la valoración metateórica otorgada a los correspondientes grados de verdad y de vaguedad, sin que el núcleo duro esencial de la lógica pueda permanecer indiferente (Sorensen, 2001).

Smith comparte que la lógica de la vaguedad sustituya los anteriores criterios de bivalencia clásicos por otros de tipo multi o plurivaluacionista, al modo de Williamson, aunque reconociendo que eso incrementa su vulnerabilidad, como también denunció Arturo Sangalli (1998), o la propia Susan Haack

(1974) respecto de la *lógica fuzzy* de Lofti A. Zadeh. Sin embargo objeta a las propuestas de Rossana Keefe (2000) y Steward Shapiro (2006). Que no llevaran a cabo una reformulación del principio de bivalencia, sino que recurrieran a distintos criterios interescalares meramente cualitativos, más o menos verdaderos, o más o menos falsos, y similares, sin recurrir a procedimientos aritméticos más drásticos, como podía ser elaborar un cálculo numérico no-bivalente o simplemente multivaluacionistas. En este sentido se reprocha a Rosana Keefe y Steward Shapiro que en ambos casos se siguiera presuponiendo la indemostrable existencia de una versión única o de una super-verdad, capaz de conmensurar las diversas escalas recíprocamente entre sí, cuando se trataba de un presupuesto en sí mismo indemostrable en una situación de carencia absoluta de un cálculo numérico capaz de cuantificarlo (Keefe, 1997). De todos modos Smith propone subsanar esta laguna o defecto meramente procedimental mediante una estrategia bastante expeditiva (Andresku, 2009), a saber: reforzar los anteriores planteamientos multivaluacionistas mediante la elaboración de un previo cálculo numérico capaz de cuantificar de un modo multi o pluri-valuacionista la noción de vaguedad y de los correspondientes grados de verdad, o más bien de semiverdad, de un modo efectivamente cuantificado, sin necesidad de englobarlas en una noción de super-verdad aún más alta (McNeil, 1993).

Smith propone así una cuantificación de la denominada por Keefe y Shapiro *vaguedad mundana* o absolutamente indeterminada respecto de aquellos conceptos en sí mismos imprecisos que, como ocurre con las nociones de “alto”, “pesado”, “grueso” y similares, generan a su vez la así llamada paradoja del sorites, del “montón” o del “calvo”, sin llegar a establecer un cálculo numérico capaz de cuantificarlas (Christofides, 2009). En efecto, en estos casos en la medida que se van quitando elementos a un determinado conjunto, se puede hacer peligrar la masa crítica mínima necesaria exigida para poder afirmar la subsistencia de dicho conjunto, como de un modo paradigmático sucede en la paradoja del “montón” o del “calvo”(Diaconis, 2011). Sin embargo Keefe y Shapiro se conforman con evitar que esta caída en cascada que se vuelva cada vez más paradójica, pero sin proponer un cálculo numérico concreto capaz de detectarla y de contrarrestarla (Grant, 2011). Pero a su vez Smith también la necesidad de tener en cuenta desde un principio el distinto campo semántico, pragmático, conceptual o metateórico al que posteriormente se aplican este tipo de criterios multivaluacionistas (Kahlert, 1994), con la dificultad añadida de que en ese supuesto se podrían generar distintos tipo de situaciones límite de vaguedad, sin que sea lo mismo determinar el grado de calvicie que el de sobrepeso (Kaufmann, 1991). De ahí que Smith defienda la necesidad de completar el tratamiento multi o pluri-valuacionista en sí mismo abstracto de la vaguedad mundana propuesto por Keefe y Shapiro, con dos complementos o añadidos (Mosterin, 2001), a saber:

a) La lógica de la vaguedad debe admitir el *complemento* de una *lógica fuzzy* capaz de cuantificar las líneas de corte interescalar o puntos de corte entre los diversos grados de verdad o vaguedad, en razón de su posterior campo de aplicación heurística, como a este respecto ya hizo notar Susan Haack (Kaufmann, 1985). De este modo la anterior noción de vaguedad mundana podría dar paso a una segunda noción mejor cuantificada y ajustada de indeterminación semántica o heurística, respecto del correspondiente contexto pragmático (Zadeh, 1965).

b) La lógica de la vaguedad debe poder formular una valoración *reduplicativa* o *triplicada* de estos mismos criterios y puntos de corte fuzzy, según el campo heurístico y los objetivos que en cada caso se persiguen, sin que necesariamente tenga que haber una versión única o super-verdad, capaz de conmensurarlos recíprocamente entre sí (Nauck, 1994).

A este respecto ahora se localizan tres condiciones que permitirían llevar a cabo estos sucesivos reajustes diferenciados en el uso que ahora la lógica de la vaguedad hace de los puntos de corte fuzzy o de los correspondientes grados de verdad (Conradie, 2010).1) La lógica fuzzy debe tener en cuenta *tres factores* que a su vez condicionan poder asignar el correspondiente grado teórico de verdad, o más bien semiverdad, por parte de la lógica de la vaguedad, a saber: el campo de aplicación, el contexto pragmático y el nivel de vaguedad, según sea semántica o heurística, a nivel conceptual o metateórico (Maddy, 2011); 2) El cálculo fuzzy y el principio de buena consecuencia lógica deben poder llevar a cabo un proceso de ajuste y corrección de los puntos de corte usados por la lógica de la vaguedad a *tres niveles* (Höhle, 1999), a saber: los grados de verdad, los grados de creencias y el cálculo de probabilidades

subjetivas (Smithson, 1987). 3) Finalmente, el cálculo fuzzy permitirá que la lógica de la vaguedad pueda justificar unas condiciones de asertabilidad y unos niveles de veracidad teorética cada vez más diversificada, en razón de su contexto pragmático y de sus distintos campos de aplicación, sin pretender subsumirlos bajo una interpretación metateórica o super-verdad única (Garcíadiego, 1992).

Para concluir una reflexión crítica (Greco, 2010). Smith no se resigna a justificar la lógica de la vaguedad en virtud exclusivamente de las innumerables aplicaciones prácticas que de hecho ha tenido en el ámbito de la tecnología informática y otros campos afines (Jeshion, 2010). En su opinión, la lógica de la vaguedad, no sólo ha permitido detectar las paradojas inherentes a la formulación de un principio de bivalencia, sino que también debe concebirse como un instrumento heurístico metateórico apropiado para llevar a cabo un análisis de presupuestos, al modo como ahora se ha mostrado (Forge, 1999). Y a este respecto cabe cuestionar: Realmente la generalización metateórica de estos niveles o grados de verdad fundamentalmente prácticos al núcleo duro esencial de la lógica, ¿no presupone una previa toma de postura a favor de una extrapolación de estos criterios cuantitativos aotros ámbitos de articulación teórico-práctica de la metodología científica? Spangler,1993). Ahora no se analiza este problema pero otros lo han hecho.

2 SCHLAUDT, 2009: LA IMPONDERABILIDAD DE LAS MEDICIONES

Oliver Schlaudt en *Mensuración como acción concreta* (Schlaudt, 2009), ha reconstruido el impacto que la peculiar *forma cuantitativa* de los diversos *conceptos científico-experimentales* ejerce en los sistemas de medición de la respectiva *ciencia natural* (Hempel, 2001). En este sentido, siguiendo el *constructivismo dialógico* de la Escuela de Erlangen, ha separando dos tipos de mediciones (Dräxler, 1999), a saber: a) por un lado, las *mediaciones lingüísticas* de tipo *convencional* generadas por la propia cultura, al modo señalado por Hegel y otros representantes de las ciencia humanas, considerando que el *método científico* tiene suficientes elementos *heurísticos* para superarlas (Kosko,, 1993); b) por otro lado, las *mediaciones procedimentales, protocientíficas* o *preconvencionales*, *de tipo "constructivista-dialógico"* o *teórico-práctico*, como ahora sucede con los procedimientos de medida, los procesos de formalización *lógico-matemática* o los respectivos programas de investigación científica, al modo ya señalado por Fries, Nelson, Klein, Dingler, Lorenzen o Janich, así como en general por los representantes de la Escuela de Erlangen (Johnstone, 1992).

Se justifica así la necesidad de elaborar una *lógica propedéutica* o *protociencia,* que tiene por objeto verificar de un modo *naturalista* la peculiar *forma (cuantitativa)* "a priori" atribuida a *los conceptos* en la experiencia una doble pretensión (Farb, 2011): por un lado, concebir a los conceptos *científico-experimentales* como el resultado *dialéctico* o *dialógico* de una elaboración *abstracta* o *construida* de un modo "a priori" por el propio pensamiento, con anterioridad incluso a su posterior aplicación a la experiencia; y por otro, atribuirles un carácter "a posteriori" o *empíricamente dado* en la propia experiencia sensible, por el mero hecho de llevar a cabo la *acción concreta* de *mensuración* de un determinado fenómeno natural, evitando así que estos mismos conceptos se queden vacíos de contenido*,* al modo como también habría sido indicado por Böhme, Couturat, Holzkamp o Heinzmann (Ferreirós, 1999). Para justificar estas conclusiones se dan tres pasos, a saber:

a) *El problema de la cuantificación*, analiza las peculiares *escalas de medida* que el *constructivismo dialógico* de P. Lorenzen o P. Janich volvió a introducir la misma *circularidad viciosa* que también se acabó haciendo presente en los planteamientos *empírio-criticistas* de Mach o en el *positivismo lógico* de Russell, Carnap o Hempel (Haack, 2009) a la hora de justificar la validez de las correspondientes *escalas de medición* (Sigmund, 2010). No pudieron evitar los planteamientos meramente *circulares* y *viciosos* de los *operacionistas* a la hora de justificar las correspondientes *escalas de mensuración*, proponiendo en su lugar unos criterios de cuantificación estrictamente *realistas* (Chowm, 1996).

b) La *conmensuración directa* analiza específicamente los requisitos que impone el *axioma de la cantidad* a la elaboración de todo *concepto científico-experimental* de tipo *naturalista*, aportando una determinada *escala de medición* (Gasarch, 1999). Sólo así podrán ser comprobadas en la experiencia,

si efectivamente son *independientes* entre sí, a fin de poderlas *conmensurar*, sin dar lugar a su vez a *circularidades cuantitativas* en sí mismas viciosas, como con frecuencia ocurrió en las interpretaciones *empírio-criticistas* y *posivistas lógicas* de la *física cuántica* y de la *teoría de la relatividad* (Draine, 2011). Se reconstruye así la existencia de cuatro tipos de *escalas cuantitativas de mensuración tres propiedades* básicas, como ahora sucede con la simultaneidad, la propiedad conmutativa y asociativa. Pero a la vez también se les asigna un determinado *orden reglado*, así como un correspondiente *grupo de transformación*, así como un posible *rendimiento heurístico*; es decir, un *número* o *magnitud*, en razón de la *acción concreta mensurativa* que en cada caso se trata de justificar (Ortiz de Landázuri, 2002).

c) *La génesis de los grandes conceptos* analiza los complejos procesos de *abstracción* mediante los que se lleva a cabo la *adición* de propiedades *simples* para dar lugar a su vez a otras más *complejas* (Immerman, 1997). Evidentemente en estos casos se genera una *circularidad manifiesta* entre los diversos procesos de *idealización*, como de un modo paradigmático se comprueba con la noción de *masa* y de *magnitud,* aunque ahora se tratan de contrarrestar en virtud de las relaciones internas y externas que conlleva la realización de una *acción concreta* de *mensuración* (Booth, 1996).

Para concluir una reflexión crítica (Josephson, 1994). Schauldt enmarca la crisis de las escalas de medida en el marco del proceso *dialéctico* de rehabilitación del *silogismo práctico* aristotélico y de su noción de *abstracción*, dentro de un proyecto programático *"constructivista"* más cercano al constructivismo de Lorenzen que a Hegel. De todos modos su propuesta *constructivista dialógica* depende de la aceptación de *tres presupuestos* implícitos, que tampoco se acaban de justificar (Bynum, 1998), a saber: a) Las *propiedades naturales* se reducen a simples *relaciones cuantitativas*, concibiéndolas como meras relaciones *abstractas* dentro de un *gran concepto,* sin valorar la obligada referencia por parte de una teoría relativista o cuántica a un sistema en movimiento o a un mínimo escalar, que ya no puede ser objeto de una cuantificación ulterior (Skorupski, 2010); b) La *acción concreta* de *mensuración,* ya sea de tipo *directa* o *indirecta* (cf. p. 207) se legitima en virtud de una *teoría representacionista de la medida*, a pesar de que la *escala de medida* en cada caso aplicada depende a su vez del *gran concepto* o *conjunto* en el que se integra, y no a viceversa, como ahora exigiría un planteamiento verdaderamente *representacionista* (Abramsky, 2010); c) Finalmente, se presupone la *independencia recíproca* de estas *cuatro escalas de medida* mediante las que se lleva a cabo la *acción concreta de conmensuración* (p. 207), aunque su articulación interna acabaría siendo muy distinta, según se siga a Lorenzen o a Hegel (Gabbay, 1996). Se trata en cualquier caso de tres postulados que Schlaudt no llega a analizar, pero que otros lo han hecho (Baquendi, 1999). Veámoslo.

3 FRAASSEN, BAS C. VAN, 2009: LAS REPRESENTACIONES CIENTÍFICAS IMPONDERABLES

Bas C. van Fraassen, en *Representaciones científicas* (2009), defiende una teoría *pictórica*, según la cual las teorías y conceptos científicos tratan de asemejarse lo más posible a los objetos a los que se remiten, a pesar de que nunca se podrá garantizar una semejanza absoluta (Broecker, 2010). Se concibe así toda forma de representación científica como un epifenómeno condicionado por dos factores (Smith, 2011), a saber: una infraestructura experimental en sí misma ampliable y una superestructura teórica en sí misma mejorable, no tanto mediante un método de *falsación* o *refutación*, sino a través de una aplicación aún más exhaustiva del método *inductivo*, a pesar de no poder ser nunca suficientemente exhaustivo (Heinrich, 2011). A este respecto se considera que la *teoría de la figura* (Bildtheorie), ya demostró a principios del siglo pasado el tipo de mediación necesaria que ejerce a la hora de aplicar los conceptos a la experiencia, sin poder garantizar un total *isomorfismo total* entre la mente y la realidad (Kough, 2009). En este sentido la *teoría de la figuración* concibió la mente al modo de una *ventana* leibiniziana orientada hacia un mundo invisible, que a su vez dispondría de un *instrumental de medida* adecuado, que en ningún caso se reduciría a simple sistema numérico (Tucsnak, 2009), al modo de Galileo, sino que también exigiría el hallazgo de un sistema de figuras y representaciones adecuadas al tipo de objetos que se tratan de medir (Michelucci, 2011). Para justificar estas conclusiones la monografía se divide en cuatro partes (Hida, 2011):

a) *Representación*, analiza la función *figurativa* o *fotográfica* desempeñada por toda representación respecto de una *infraestructura experimental* previa, mediante un *triple instrumento heurístico*, como es la abstracción teórica, la figuración pictórica o fenoménica, y la medición escalar (Eliason, 1993).

b) *Ventanas, ingenios y medidas*, justifica la necesidad de *coordinar* esta *triple función* teórica, fenoménica y escalar-correlativa de las representaciones mediante una *medición cuantitativa* de su respectiva *infraestructura observacional* o fenoménica (Scott, 2011).

c) *La estructura y la perspectiva* reconstruye las numerosas *paradojas* a las que dio lugar la *teoría de la imagen* (Bildtheorie) en el empirismo lógico o positivismo, así como la *larga marcha* o *giro* de Bertrand Russell y Carnap o Putnam desde un empirismo dogmático hasta un *empirismo estructuralista* cada vez más autocrítico (Tucker, 2011);

d) *Apariencia y realidad*, justifica la estricta separación que la ciencia moderna impuso entre la dimensión teórica, fenoménica y meramente escalar o cuantitativa de las representaciones científicas, manteniéndose siempre en el ámbito de la *apariencia*, salvo que se pretenda reducir la *realidad* a una propiedad *sobrevenida* puesta por nosotros mismos (Peliti, 2011).

Para concluir una reflexión crítica. Fraasen demuestra con profusión la importancia que los sistemas escalares de medición tienen en el modo de formalizar las representaciones científicas (Maddala, 1997). Sin embargo no acaba de advertir la importancia que las herramientas de la *lógica fuzzy* podría tener a este respecto (Burgess, 2011). Y en este sentido podríamos concluir (Morrison, 200):

4 CONCLUSIÓN: ¿PUEDEN LAS FORMALIZACIONES FUZZY COMPLETAR LAS LAGUNAS DEL CÁLCULO DE IMPONDERABLES?

Evidentemente los cálculos de imponderables generan paradojas inevitables, así como un cierto relativismo epistemológico (Khoussainov, 2001). Especialmente en una situación de *crisis de los sistemas escalares de medida,* como con tanta frecuencia ocurrió en las nuevas formulaciones de la teoría relativista y cuántica (Ibarra, 2000). Sin embargo a lo largo de la comunicación se ha podido comprobar como los cálculos de la vaguedad, al igual que los diversos procedimientos heurísticos usados en las mediciones humanas o por la propia metodología científica habrían tratado de desactivar este tipo de dificultades, transformando en ventaja y virtud, lo que inicialmente se presentaba como un defecto vicioso en sí mismo insubsanable (Dewdney, 2000). Evidentemente eso no quiere decir que en un futuro no se puedan generar un número aún mayor de paradojas y de crisis de los sistemas escalares de medida, dada la creciente relatividad que parecen fomentar los cálculos de imponderables ahora analizados (Weirich, 1998). Sin embargo hoy día se dispone de medios heurísticos abundantes capaces de neutralizar este tipo de situaciones de incertidumbre que posiblemente a su tiempo se podrían haber controlado (Frantz, 2011). En cualquier caso todavía no se ha acertado a encontrar el instrumento de cálculo apropiado para contrarrestar la aparición de una situación de *crisis heurística* provocada por el recurso a un sistema de medición escalar verdaderamente imponderable, pero posiblemente las tres propuestas ahora formuladas podrían ayudar a resolverla (Hale, 2001).

Referencias

[1] AA. VV.; Fuzzy Sets and Systems. International Journal of Soft Computing and Intelligence. Vol 94, Nº 1, 1998.

[2] Abramsky, S.; Gabbay. D. M.; Maibaum, T. S. E. (eds); Handbook of Logic in Computer Science. Volume 5: Logic and Algebraic Methods, Oxford University, 2000.

[3] Andreescu, T.; Andrica, D.; Number Theory. Structures, Examples, and Problems, Birkhäuser, 2009.

[4] Baquendi, M. S.; Ebenfelt, P.; Rothschild, L. P.; Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings, Princeton U., 1999.

[5] Blackwell, London, 1998.Skorupski, J.; The Domain of Reasons, Oxford University Press, 2010.

[6] Booth, D.; Ziegler, R. (ed); Finsler Set Theory: Platonism and Circularity, Birkhauser, 1996.

[7] Broecker, W.; The Great Ocean Conveyor. Discovering the Trigger for Abrupt Climate Change, Princeton University Press, 2010.

[8] Brown, J.; Cappelen, H. (Eds.); Assertion. New Philosophical Essays, Oxford University Press, 2011.

[9] Burgess, A. G.; Burgess, J. P.; Truth, Princeton University Press, 2011.

[10] Bynum, T. W.; Moor, J. H. (ed); The Digital Phoenix: How Computer are Changing Philosophy.

[11] Chowm S. N.; Methods of Bifurcation Theory, Springer, 1996.

[12] Christofides, P. D.; Armaou, A.; Lou, Y.; Varshney, A.; Control and Optimation of Multiscale Process Systems, Birkhäuser, 2009.

[13] Conradie, J.; Johl, R.; Beukes, M.; Fischer, O.; Ljunberg, C. (eds.); Sinergy, John Benjamins, 2010.

[14] Dewdney, A. K.; Reise in das Innere der Mathematik, Birkhäuser, 2000.

[15] Diaconis, P.; Graham, R.; Magical Mathematics. The Mathematical Ideas that Animate Great Magic Tricks, Princeton University Press, 2011.

[16] Draine, B. T.; Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium, Princeton University Press, 2011.

[17] Dräxler, P.; et alia (eds); Computational methods for Representations of Groups and Algebras, Birkhauser, 1999.

[18] Eliason, S. R.; Maximun Likelihood Stimation: Logic and Pactice, Sage, Newbury, 1993.

[19] Farb, B.; Margalit, D.; A Primer on Mapping Class Groups, Princeton University Press, 2011.

[20] Ferreirós, J.; Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics, Birkhauser, 1999.

[21] Forge, J.; Explanation, Quantity and Law, Ashgate, 1999.

[22] Fraassen, Bas C. van; Scientific Representation, Oxford University, 2009.

[23] Frantz, M.; Crannell, A.; Viewpoints. Mathematical Perspective and Fractal Geometry in Art, Princeton University Press, 2011.

[24] Gabbay, D.; Labelled Deductive System. Vol. I. Clarendon, 1996.

[25] Garcíadiego Dantan, A. R.; Bertrand Russell and the Origins of the Set-theoretic 'paradoxes', Birkhauser, 1992.

[26] Gasarch, W. I.; Martin, G. A.; Bounded Queries in Recursion Theory, Birkhäuser, 1999.

[27] Grant, P. R.; Grant, B. R. (eds.); In search of the Causes of Evolution. From Field observations to Mechanisms, Princeton University Press, 2011.

[28] Greco, J.; Achieving Knowledge. A Virtue-Theoretic Account of Epistemic Normativity, Cambridge University Press, 2010.

[29] Gupta, M. M.; Yamakawa, T. (ed); Fuzzy computing: theory, hardware and applications, North Holland, 1988.

[30] Haack, S.; Deviant Logic, Fuzzy Logic. Beyond the Formalism, The University of Chicago Press, 1974, 1996. cf. AF, XXXI/3, l998, p. 882.

[31] Haack, Susan; Evidence and Inquiry. A Pragmatist Reconstruction of Epistemology, Prometheus Books, 2009.

[32] Halbach, V.; The Logic Manual, Oxford University Press, 2010.

[33] Hale, B.; Wright, C.; The Reason's Proper Study. Essays Towards a Neo-fregean Philosophy of Mathematics, Clarendon, 2001.

[34] Heinrich, R.; Nemeth, E.; Pichler, W.; Wagner, D.; Image and Imaging in Philosophy, Science and the Arts. Volume 1 y 2, Proceedings of the 33rd International Ludwig Wittgenstein Symposium in Kischberg, Ontos, 2011.

[35] Hempel, C. G.; Fetzer, J. H. (ed); The Philosophy of Carl G. Hempel. Studies in Science, Explanations, and Rationality, Oxford University Press, 2001.

[36] Hida, T.; et alia (eds); Stochastics in Finite and Infinite Dimensions, Birkhauser, 2001.

[37] Höhle, U.; Mathematics of Fuzzy Sets, Kluwer, Dordrecht, 1999.

[38] Ibarra, A.; Mormann, T. (eds); Variedades de la representación en la ciencia y la filosofía, Ariel, 2000.

[39] Immerman, N.; Kolaitis, P. G.(eds); Descriptive Complexity and Finite Models, American Mathematical Society, 1997.

[40] Jeshion, R. (ed.); New Essay on Singular Thought, Oxford University Press, 2010.

[41] Johnstone, P. T.; Notes on Logic and Set Theory, Cambridge University, 1992.

[42] Josephson, J.R. / Josephson, S.G. (eds.): Abductive inference: computation philosophy, technology, Cambridge University Library, 1994.

[43] Kahlert, J.; Frank, H.; Fuzzy-Logik und Fuzzy-control. Eine anwendungsorientierte Einbführung mit Begleitsoftware, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1994.

[44] Kaufmann, A.; Gupta, M. M. (ed); Fuzzy mathematical models in engineering and management science, North Holland, Amsterdam, 1991.

[45] Kaufmann, A.; Introduction to fuzzy theory and applications. Van Nostrand Reinhold, 1985.

[46] Keefe, R.; "Theories of Vagueness", Cambridge University Press, 2000; cf. AF, XXXV/1, 2002, 255-257.

[47] Keefe, R; Smith, P; "Vagueness. A Reader, MIT, Cambridge (MA), 1997; AF, XXXIII/3, 2000, 930-931.

[48] Khoussainov, B.; Nerode, A.; Automata Theory and its Applications, Birkhauser, 2001.

[49] Kosko, B.; Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic, Hyperion,1993.

[50] Kough, S.; Predicting the Unpredictable. The Tumultuous Science of Earthquake Prediction, Princeton University Press, 2009.

[51] Maddala, G.S.; Robust Inference, Elsevier, 1997.

[52] Maddy, P.; Defending the Axiomas. On the philosophical Foundations of Set Theory, Oxford University Press, 2011.

[53] McNeil, D.; Freiberger, P.; Fuzzy Logic, Simon & Schuster, New York, 1993; Fuzzy Logic. Die 'unscharfe' Logik erobert die Technik, Droemer Knaur, 1994.

[54] Michelucci, P.; Fischer, O.; Ljungberg, C. (ed.); Semblance and Signification, John Benjamins, 2011.

[55] Morrison, M.; Unifying Scientific Theories. Physical Concepts and Mathematical Structures, Cambridge University, 2000.

[56] Mosterin, J.; Torreti, R.; Diccionario de la lógica y la filosofía de la ciencia, Alianza, 2001 (1ª), 2010 (2ª).

[57] Nauck, D.; Klawon, F.; Kruser. R. (ed); Neuronale Netze und Fuzzy Systeme: Grundlagen des Konnektionismus, Neuronaler Fuzzy Systeme und koplung mitwissensbasierte Methoden, Vieweg,, 1994.

[58] Ortiz de Landázuri, C.; Lógica fuzzy y automoción: ¿Perversión lógica o revolución informática? (A través de McNeil-Freiberger, Kahlert-Frank, Haack y Sangali), 1999 Eusflat-Estylf Joint Conference. Procedings, Servicio de Publicaciones, Universitat de les Illes Balears, 1999, p. 311-315.

[59] Ortiz de Landázuri, C.; ¿Vaguedad, verdad, lógica fuzzy'. ¿Es compatible el supervaluacionismo con el naturalismo epistemológico?, Eusflat 2002, Universidad de León.

[60] Peliti, L.; Statistical Mechanics in a Nutshell, Princeton University Press, 2011.

[61] Sangalli, A.; The Importance of Being Fuzzy, And other Insights from the border between Math and Computers, Princeton University, New Jersey, 1998. cf. AF, XXXIII/1, 2000, p. 309.

[62] Schlaudt, Oliver; Messung als konkrete Handlung. Eine kritische untersuchung über die Grundlagen der Bildung quantitativer Begriffe in den Naturwissenschaften, Königshausen und Neumann, 2009.

[63] Scott, L. R.; Numerical Analysis, Princeton University Press, 2011.

[64] Shapiro, S.; "Vagueness in Context", Oxford University Press, 2006; cf. AF, XXXIX/2, 2006, 548-9 pp. Hart, W. D.; The Evolution of Logic, Cambridge University Press, 2010.

[65] Sider, T.; Logic for Philosophy, Oxford University Press, 2010.

[66] Sigmund, K.; The Calculus of Selfishness, Princeton University Press, 2010.

[67] Smith, L.; Caos: una breve introducción, Alianza, 2011.

[68] Smith, Nicholas J. J.; Vagueness and Degrees of Truth, Oxford University Press, 2008.

[69] Smithson, M.; Fuzzy set analysis for behavioral and social sciences, Springer, 1987.

[70] Sorensen, R.; "Vagueness and Contradiction", Oxford University, 2001; cf. Anuario Filosófico, XXXVI/1-2, 2003, p. 534-536.

[71] Spangler, M.M. / Conway, P. (y otros): Logic: an Aristotelian approach, University Press of America, 1993.

[72] Tucker, W.; Validated Numerics. A Short Introduction to Rigorous Computations, Princeton University Press, 2011.

[73] Tucsnak, M.; Weiss, G.; Observation and Control for Operator Semigroups, Birkhäuser,, 2009.

[74] Weirich, P.; Equilibrium and Rationality: Game Theory revisited by Decision Rules, Cambridge University, 1998.

[75] Willianson, T.; "Vagueness", Routledge, 1994.

[76] Zadeh, L.; 'Fuzzy Sets'. Information and Control 8: 338-53, 1965; 'Fuzzy Logic and Approximate Reasoning', Synthese 30: 407-25, 1975.

[77] Zadeh, L.; 'Fuzzy Sets'. Information and Control 8: 338-53, 1965; 'Fuzzy Logic and Approximate Reasoning', Synthese 30: 407-25, 1975.

OPERADORES DE T-INDISTINGUIBILIDAD RESPECTO A SUMAS ORDINALES

D. Boixader[1], **J. Recasens**[1]

[1]*Sec. Matemàtiques i Informàtica*
ETS Arquitectura del Vallès
Universitat Politècnica de Catalunya UPC
Sant Cugat del Vallès,
{dionis.boixader,j.recasens}@upc.edu

Resumen

En este trabajo se estudia la clase de operadores de T-indistinguibilidad con T una suma ordinal. Mostramos que estos operadores de T-indistinguibilidad pueden pensarse como familias de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas. Se propone una interpretación en términos de clustering jerárquico.

Palabras Clave: Relación borrosa, Operador de T-indistinguibilidad, t-norma, t-norma arquimediana, suma ordinal, clustering, clustering jerárquico, agregación jerárquica.

1 INTRODUCCIÓN

Las *relaciones de equivalencia* son relaciones reflexivas, simétricas y transitivas. En 1971 Zadeh publicó sus puntos de vista sobre cómo deberían fuzzificarse y a esta nueva clase de relaciones borrosas las llamó *relaciones de similitud* [11].

La definición original de Zadeh es

Definición 1.1. *Una relación de similitud E en un conjunto X es una aplicación $E : X \times X \to [0,1]$ tal que para todo $x,y \in X$*

1. $E(x,x) = 1$ *(Reflexividad)*
2. $E(x,y) = E(y,x)$ *(Simetría)*
3. $\min(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$ *(Transitividad)*

Zadeh abrió la puerta al uso de otras t-normas aparte de la t-norma mínimo, idea que fue desarrollada por otros investigadores.

Ruspini [6] consideró la t-norma de Łukasiewicz y a las correspondientes relaciones las llamó *likeness* o relaciones de semejanza. Ovchinnikov [4] usó la t-norma producto siguiendo los pasos de Menger [3] trabajando con las llamadas *relaciones probabilísticas*. Trillas [8, 9] estudió la transitividad respecto a una t-norma arbitraria y propuso el término unificador de *indistinguibilidad* que ha sido usado desde entonces por diversos autores (véase por ejemplo Valverde [10], Jacas [1] y Recasens [5]). Otros términos son *igualdad borrosa* (algo más restrictivo) y *relación de equivalencia borrosa*.

La definición de operador de indistinguibilidad es la siguiente.

Definición 1.2. *Un operador de indistinguibilidad respecto a una t-norma T en un conjunto X es una aplicación $E : X \times X \to [0,1]$ reflexiva y simétrica y tal que*

$$T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z) (T\text{-}Transitividad)$$

Todas las t-normas que consideraremos en este trabajo serán continuas. Estas t-normas son la t-norma mínimo, t-normas arquimedianas y *sumas ordinales*.

Hasta la actualidad, los autores no conocen un estudio específico de los operadores de T-indistinguibilidad cuando la t-norma usada para modelizar la transitividad es una suma ordinal. Este trabajo es un primer intento de atacar la situación. Este estudio es interesante porque pretende completar el estudio de los operadores de indistinguibilidad para t-normas continuas y por las consecuencias semánticas y prácticas, la más importante de las cuales es que los operadores de indistinguibilidad asociados pueden ser útiles en problemas de clustering en los cuales los atributos de los objetos están estructurados de forma jerárquica (véase Sección 3).

Para un estudio exhaustivo de las t-normas y sus propiedades, recomendamos los libros [2, 7]. En el próximo teorema recordamos la caracterización de t-normas continuas como sumas ordinales.

Teorema 1.3. *T es una t-norma continua si, y sólo si, existe una familia numerable de funciones continuas decrecientes $(t_i)_{i\in I}$ tal que $t_i : [a_i,b_i] \to [0,\infty]$ con $(a_i,b_i) \subseteq [0,1]$ y $t_i(b_i) = 0$ que satisface*

$$T(x,y) = \begin{cases} t_i^{[-1]}(t_i(x)+t_i(y)) & \text{si } x,y \in (a_i,b_i) \\ \min(x,y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Nótese que si la familia es vacía, entonces $T = \min$ y que si se reduce a un único elemento, entonces T es arquimediana.

Definición 1.4. *En las condiciones del teorema anterior, $(t_i,(a_i,b_i))_{i\in I}$ se llama una suma ordinal.*

Intuitivamente, las sumas ordinales se pueden pensar como combinaciones de t-normas. Esto se consigue considerando una familia $(\varphi_i)_{i\in I}$ de funciones crecientes $\varphi_i : [0,1] \to [a_i,b_i]$ y las t-normas arquimedianas T_i asociadas que se inducen en el intervalo unidad por los generadores aditivos $t_i \circ \varphi_i$.

La elección standard de las funciones φ_i es $\varphi_i(x) = a_i + (b_i - a_i)x$ [2], si bien se pueden considerar otras alternativas. Así una suma ordinal se puede denotar por $T = \oplus_{i\in I} T_i$ y nos referiremos a T como la suma ordinal de las t-normas T_i. Cuando sea posible omitiremos referirnos a los intervalos (a_i,b_i) y a las funciones generadoras t_i.

Por cuestiones de simplicidad, nos restringiremos al caso especial de sumas ordinales en que $a_0 = 0$, $b_0 = a_1, \ldots, b_i = a_{i+1}, \ldots, b_n = 1$. Es decir, una suma ordinal de un número finito de intervalos sin huecos entre ellos.

En la siguiente sección presentamos una caracterización de relaciones de indistinguibilidad respecto a una suma ordinal como una familia de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas. Esta caracterización será usada en la Sección 3 para generar operadores de indistinguibilidad a partir de diferentes atributos de modo jerárquico; es decir, de modo que se tenga en cuenta la importancia u orden de éstos.

2 UN TEOREMA DE CARACTERIZACION

La idea principal de esta sección es que los operadores de T-indistinguibidad con T una suma ordinal como las descritas al final de la sección anterior no son más que familias estratificadas de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas, todos definidos en el mismo conjunto X.

Teorema 2.1. *Una relación E en un conjunto X es un operador de indistinguibilidad respecto a una suma ordinal $T = \oplus_{i\in I} T_i$ si, y sólo si, existe una familia $(E_i)_{i\in I}$ de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas T_i y una familia de funciones $\varphi_i : [0,1] \to [a_i,b_i]$ tal que $E = \inf_{i\in I} e_i$ con*

$$e_i(x,y) = \begin{cases} \varphi_i \circ E_i(x,y) & \text{si } E_i(x,y) < 1 \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Antes de proceder a la demostración del teorema, merece la pena comentar algunos puntos.

Primero, las funciones φ_i del Teorema 2.1 son las mismas que aparecen en la definición de $\oplus_{i\in I} T_i$.

Segundo, los bloques e_i a partir de los cuales se construye E son generados comprimiendo el rango de cada E_i (generalmente $[0,1]$) en secciones más estrechas $[a_i,b_i]$ que se van apilando una encima de la otra con la única excepción de los pares $E_i(x,y) = 1$ que se mantienen sin cambio. Así definidos, cada bloque e_i es un operador de indistinguibilidad respecto a una t-norma que es suma ordinal de sólo una t-norma T_i.

Finalmente, el Teorema 2.1 justifica la expresión *suma ordinal de operadores de indistinguibilidad* así como la notación $E = \oplus_{i\in I} E_i$.

Proof.

$\Rightarrow$)

Las relaciones borrosas E_i están definidas por

$$E_i(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } E_i(x,y) \le a_i \\ \varphi \circ E(x,y) & \text{si } a_i < E(x,y) < b_i \\ 1 & \text{si } E(x,y) \ge b_i. \end{cases}$$

Demostremos primero que estas relaciones borrosas son operadores de indistinguibilidad respecto a la t-norma arquimediana T_i con generador aditivo $t_i \circ \varphi_i$.

Reflexividad y simetría son inmediatas. Para demostrar la transitividad respecto a T_i, dados tres elementos $x,y,z \in X$ sólo hay tres casos distintos a considerar:

1. Si $E_i(x,y) = 0$, entonces $T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \le E_i(x,z)$.

2. Si $0 < E_i(x,y) \le 1$ y $E_i(y,z) = 1$, entonces $a_i \le E(x,y) \le b_i$ pero $E(y,z) \ge b_i$ y la suma ordinal T se reduce a min en este caso particular, lo que significa que

$$\begin{aligned} T(E(x,y),E(y,z)) &= \min(E(x,y),E(y,z)) \\ &= E(x,y) \le E(x,z) \end{aligned}$$

(la última desigualdad gracias a la T-transitividad de E).

Como consecuencia, $E_i(x,y) \le E_i(x,z)$ y

$$\begin{aligned} T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) &= T_i(E_i(x,y),1) \\ &= E_i(x,y) \le E_i(x,z). \end{aligned}$$

3. Si $0 < E(x,y), E(y,z) < 1$, entonces

$$\begin{aligned} &T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \\ &\quad = T_i(\varphi_i^{[-1]} \circ E_i(x,y), \varphi_i^{[-1]} \circ E_i(y,z)) \\ &\quad = \varphi_i^{[-1]} \circ t_i^{[-1]}(t_i \circ \varphi \circ \varphi_i^{[-1]} \circ E_i(x,y) \\ &\qquad + t_i \circ \varphi \circ \varphi_i^{[-1]} \circ E_i(y,z)) \\ &\quad = \varphi_i^{[-1]} \circ t_i^{[-1]}(t_i \circ E_i(x,y) + t_i \circ E_i(y,z)) \\ &\quad = \varphi_i^{[-1]} \circ T(E_i(x,y),E_i(y,z)) \\ &\quad \leq \varphi_i^{[-1]} \circ E_i(x,z) = E_i(x,z). \end{aligned}$$

Para terminar la demostración en esta dirección, tenemos que ver que $E = \inf_{i\in I} e_i$. Con este fin, expresemos e_i en términos de E en lugar de E_i.

Si $a_i < E(x,y) < b_i$, entonces $E_i(x,y) = \varphi_i^{[-1]} \circ E(x,y) < 1$ y $e_i(x,y) = \varphi_i \circ E_i(x,y) = E(x,y)$.

Si $E(x,y) \leq a_i$, entonces $E_i(x,y) = 0$ y $e_i(x,y) = a_i$.

Si $E(x,y) \geq b_i$, then $E_i(x,y) = 1$ and $e_i(x,y) = 1$.

Supongamos ahora $a_i \leq E_i(x,y) \leq b_i$ para un cierto par $E(x,y)$. Para cualquier j y k tales que $j < i < k$, se tendrá que $e_j(x,y) = 1$, $e_i(x,y) = E(x,y)$ y $e_k(x,y) = a_k$ y, por consiguiente, $E = \inf_{i\in I} e_i$.

Nótese que nada varía si i corresponde al primer o último intervalo. También nótese que las condiciones $a_i \leq E(x,y) \leq b_i$ valen para todos los posibles valores de $E(x,y)$ excepto $E(x,y) = 1$ porque estamos asumiendo que $b_i = a_{i+1}$ en cuyo caso $e_i(x,y) = 1$.

$\Leftarrow$)

Consideremos la t-norma T suma ordinal de las t-normas arquimedianas T_i con el sistema de intervalos (a_i, b_i). Hay que demostrar que $E = \inf_{i\in I} e_i$ es un operador de indistinguibilidad respecto a $T = \oplus_{i\in I} T_i$. La reflexividad y simetría de E es obvia. Hay que ver que E también es T-transitiva.

Antes de proceder a la demostración, fijémonos en los siguientes resultados útiles.

Primero, es obvio que $e_i(x,y) \leq e_j(z,t)$ si $i < j$, excepto cuando $e_i(x,y) = 1$.

Segundo, $E(x,y) = 1$ si, y sólo si, $E_i(x,y) = 1$.

Tercero, si $E(x,y) < 1$, entonces $E(x,y) = e_i(x,y)$ si, y sólo si, $E(x,y) < 1$ y $E_j(x,y) = 1$ para todo $j < i$.

Finalmente, para todo $x,y,z \in X$, si $E(x,y) = e_i(x,y)$, $E(y,z) = e_j(y,z)$ y $E(x,z) = e_k(x,z)$, entonces $k \geq \min(i,j)$.

Para comprobar esta última afirmación, si se tuviera $k < \min(i,j)$, entonces $E_k(x,y) = E_k(y,z) = 1$. Pero E_k es T_k-transitiva y por tanto $E_k(x,z) = 1$, lo que contradice $E(x,z) = e_k(x,z)$.

Vamos a proceder a demostrar la T-transitividad de E; es decir, $T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$.

Supongamos que $E(x,y) = e_i(x,y)$, $E(y,z) = e_j(y,z)$ y $E(x,z) = e_k(x,z)$. De los comentarios anteriores, se sigue que sólo hay cinco casos que merecen nuestra atención, que son $i < j < k$, $i < j = k$, $i < k < j$, $i = k < j$ e $i = j = k$. El primero y tercero son inmediatos. Veamos los otros tres.

- $i < j = k$

$$\begin{aligned} &T(E(x,y),E(y,z)) \\ &\quad = \min(E(x,y),E(y,z)) \\ &\quad = \min((e_i(x,y),e_k(y,z)) \\ &\quad = e_i(x,y) \leq e_k(x,y) = E(x,z). \end{aligned}$$

- $i = k < j$

$$\begin{aligned} &T(E(x,y),E(y,z)) \\ &\quad = \min(E(x,y),E(y,z)) \\ &\quad = \min((e_i(x,y),e_j(y,z)) = e_i(x,z). \end{aligned}$$

  Por otro lado, de $T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \leq E_i(x,z)$ y $E_i(y,z) = 1$ se sigue que $E(x,y) \leq E(x,z)$ y por tanto $T(E(x,y),E(y,z)) \leq E(x,z)$.

- $i = j = k$

$$\begin{aligned} &T(E(x,y),E(y,z)) \\ &\quad = T(e_i(x,y),e_i(y,z)) \\ &\quad = t_i^{[-1]}(t_i \circ e_i(x,y) + t_i \circ e_i(y,z)) \\ &\quad = t_i^{[-1]}(t_i \circ \varphi_i \circ e_i(x,y) + t_i \circ \varphi_i \circ e_i(y,z)) \\ &\quad = \varphi_i \circ T_i(E_i(x,y),E_i(y,z)) \leq \varphi \circ E_i(x,z) \\ &\quad = e_i(x,z) = E(x,z). \end{aligned}$$

□

3 UNA INTERPRETACIÓN DE LAS SUMAS ORDINALES EN TÉRMINOS DE CLUSTERING JERÁRQUICO

Es bien conocido que el ínfimo de cualquier familia de operadores de T-indistinguibilidad es también un operador de T-indistinguibilidad [10].

Cuando clasificamos elementos de un conjunto de patrones X según dos criterios distintos, por ejemplo color y tamaño, podemos romper X en clusters menores combinando las dos clasificaciones independientes vía el ínfimo. Es decir, si E_c y E_t simbolizan las indistinguibilidades provenientes de color y tamaño respectivamente, entonces dos elementos son indistinguibles por $E_c \wedge E_t$ si lo son por E_c y por E_t. Pensándolo al revés, dos elementos son diferentes si pueden ser discriminados por al menos una de los dos criterios.

Con esta aproximación, ambas clasificaciones son exactamente igual de relevantes. Tamaño y color son considerados iguales como criterios válidos para discriminar los elementos de X. Sin embargo, puede darse el caso en que se desee que un criterio juegue un papel más importante que el otro. Por ejemplo, si las diferencias en tamaño entre dos objetos son suficientemente grandes, no hace falta considerar el color para separarlos. En este caso, el color será considerado sólo cuando el tamaño no discrimine.

Vale la pena tener en cuenta la importancia en considerar las palabras *coincidente, discriminar* de forma crisp o borrosa. En el primer caso, las dos aproximaciones en la clasificación coinciden, mientras que en el segundo el orden o jerarquía de los criterios es relevante.

Para ilustrar las diferencias en el caso borroso, continuemos con el ejemplo de tamaño y color.

Ejemplo 3.1. Sean $c : X \to [0,1]$ y $t : X \to [0,1]$ las funciones color y tamaño respectivamente, que son subconjuntos borrosos de X. Considerando la t-norma de Łukasiewicz, estos subconjuntos borrosos generan los operadores de indistinguibilidad $E_c(x,y) = 1 - |c(x) - c(y)|$ y $E_t(x,y) = 1 - |t(x) - t(y)|$ y el operador de indistinguibilidad generado por los dos es

$$\begin{aligned} E(x,y) &= E_c(x,y) \wedge E_t(x,y) \\ &= \min(1 - |c(x) - c(y)|, 1 - |t(x) - t(y)|). \end{aligned}$$

E es un operador de indistinguibilidad respecto a la misma t-norma que E_c y E_t (en este caso la t-norma de Łukasiewicz). Esta construcción de un operador de indistinguibilidad a partir de criterios borrosos (color, tamaño, etc.) es standard y constituye el núcleo del Teorema de Representación [10].

También es standard una representación geométrica del operador de indistinguibilidad E donde c y t son los ejes y $x, \ldots$ los puntos de coordenadas $x = (x_t, x_c) = (t(x), c(x)), \ldots$ [10, 5].

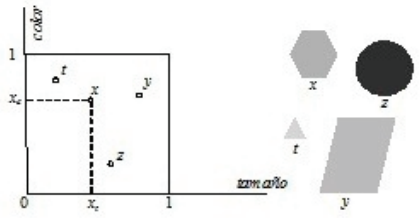


Figura 1:

Dicha representación implícitamente asume que los objetos $x, y, \ldots$ son parte de un universo mayor que X que en nuestro caso es $X' = [0,1]^2$. Por tanto, el grado de indistinguibilidad entre objetos está heredado por el grado en (X', E') y la responsabilidad última de percibir pares de objetos en X como indistinguibles recae en las bolas métricas o α-cortes de E'.

El α-corte centrado en x es el conjunto de puntos y en X' cuyo grado de indistinguibilidad con x es mayor o igual que α. En nuestro caso, $E = E_c \wedge E_t$ y tienen forma cuadrada.

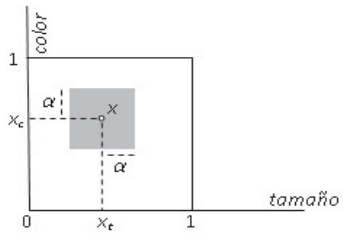


Figura 2:

¿Cómo serían las bolas en el caso jerárquico? Si damos prioridad al tamaño respecto del color, entonces las diferencias en tamaño determinan el grado de indistinguibilidad entre pares, y el color sólo es determinante cuando los tamaños son totalmente idénticos. Las bolas se verán como bandas verticales de ciertos radios (cercanos a cero), y como segmentos verticales para otros (cercanos a uno). Véanse las figuras 3 y 4.

El resto de esta sección está dedicada a justificar las figuras 3 y 4. El operador de indistinguibilidad $E = E_s \oplus E_t$ es T-transitiva respecto a la t-norma $T = T_Ł \oplus T_Ł$ ($T_Ł$ la t-norma de Łukasiewicz) con intervalos $a_0 = 0$, $b_0 = a_1 = 0.5$ y $b_1 = 1$. Los dos operadores de indistinguibilidad básicos E_s y E_t a partir de los cuales se calcula E han sido definidos previamente. Las aplicaciones φ_i son $\varphi_t : [0,1] \to [0,0.5]$ definida por $\varphi_t(x) = \frac{x}{2}$ y $\varphi_c : [0,1] \to [0.5,1]$ definida por $\varphi_c(x) = \frac{1+x}{2}$. Entonces E se obtiene como $E = e_t \wedge e_c$ donde

$$e_t(x,y) = \begin{cases} \varphi_t \circ E_t(x,y) & \text{si } E_t(x,y) < 1 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$e_c(x,y) = \begin{cases} \varphi_c \circ E_c(x,y) & \text{si } E_c(x,y) < 1 \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La bola o α-corte centrado en x es

$$\begin{aligned} &B(x,a) \\ &\quad = \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } E(x,y) \geq \alpha\} \\ &\quad = \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } e_t(x,y) \wedge e_c(x,y) \geq \alpha\} \\ &\quad = \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } \varphi_t \circ E_t(x,y) \geq \alpha \text{ o } E_t(x,y) = 1\} \\ &\quad \cap \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } \varphi_c \circ E_c(x,y) \geq \alpha \text{ o } E_c(x,y) = 1\} \\ &\quad = \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } E_t(x,y) \geq 2\alpha \text{ o } E_t(x,y) = 1\} \\ &\quad \cap \{y \in [0,1]^2 \text{ tal que } E_c(x,y) \geq 2\alpha - 1 \text{ o } E_c(x,y) = 1\} \\ &\quad = B_1 \cap B_2. \end{aligned}$$

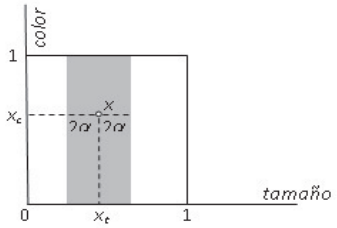


Figura 3:

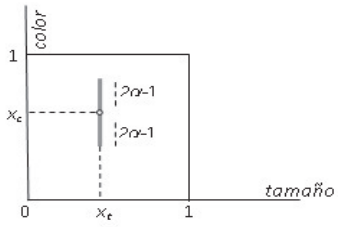


Figura 4:

Si $0 \leq \alpha \leq 0.5$, entonces $B_1 = \{y \in [0,1]^2$ tal que $E_t(x,y) \geq 2\alpha\}$ y $B_2 = [0,1]^2$, así que $B(x,\alpha) = B_1 \cap B_2 = B_1$.

Si $0.5 < \alpha \leq 1$, entonces $B_2 = \{y \in [0,1]^2$ tal que $E_c(x,y) \geq 2\alpha - 1\}$, así que $B(x,\alpha) = B_1 \cap B_2$ es simplemente un segmento (figura 4).

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha iniciado el estudio de los operadores de indistinguibilidad respecto de t-normas sumas ordinales.

Se ha obtenido una caracterización de dichos operadores a partir de familias de operadores de indistinguibilidad respecto a t-normas arquimedianas.

El resultado anterior se ha explotado para generar operadores de indistinguibuilidad a partir de subconjuntos borrosos (que pueden interpretarse como adecuación o valor de los objetos a determinados atributos) teniendo en cuenta un orden jerárquico en ellos que se considera su mayor a menor importancia o relevancia.

Referencias

[1] J. Jacas: On the generators of T-indistinguishability operators. Stochastica 12 pp. 49-63, 1988.

[2] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap: Triangular norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[3] K. Menger: Probabilistic theory of relations. Proc. Nat. Acad. Sci USA 37, pp. 178-180, 1951.

[4] S. Ovchinnikov: Representations of transitive fuzzy relations. In Skala, H.J. , Termini, S. and Trillas E. (eds.) Aspects of Vagueness, 1984, D. Reidel, Dordrecht, pp. 105-118.

[5] J. Recasens: Indistinguishability Operators. Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 260. 2011. Springer Verlag.

[6] E. Ruspini: A new approach to clustering. Information and Control 15 pp. 22-32, 1969.

[7] B. Schweizer, A. Sklar: Probabilistic Metric Spaces North Holland, Amsterdam, 1983.

[8] E. Trillas: Assaig sobre les relacions d'indistingibilitat. Proc. Primer Congrés Català de Lògica Matemàtica, Barcelona, 1982, pp.51-59.

[9] E. Trillas, L. Valverde: An inquiry into indistinguishability operators. Theory Decis. Lib. Reidel, Dordrecht,1984, pp.231-256.

[10] L. Valverde: On the Structure of F-indistinguishability Operators. Fuzzy Sets and Systems 17 pp. 313-328, 1985.

[11] L.A. Zadeh: Similarity relations and fuzzy orderings. Information Sciences 3 pp. 177-200, 1971.

PROGRAMACIÓN LÓGICA LINGÜÍSTICA

Clemente Rubio Manzano[1], **Pascual Julián Iranzo**[2]

[1]*Dept. de Sistemas de Información, U. del Bío-Bío, Chile*, clrubio@ubiobio.cl
[2]*Dept. de Tecnologías y Sistemas de Información, U. de Castilla-La Mancha*, Pascual.Julian@uclm.es

Resumen

En este trabajo se propone un marco de programación lógica lingüística que permite el tratamiento de la vaguedad y la imprecisión mediante recursos lingüísticos (crisp o fuzzy). Este marco, que es una evolución natural de las propuestas de programación lógica basadas en similitud, hace una clara separación entre el conocimiento preciso (representado por los hechos y reglas de un programa) y el conocimiento vago (representado por relaciones borrosas o variables lingüísticas). Justificamos que esta separación es más declarativa que las propuestas basadas en anotaciones, y mostramos sus beneficios. Creemos que este nuevo marco está bien situado para conducir a la programación lógica hacia el paradigma de la computación con palabras.

Palabras Clave: Programación Lógica Borrosa, Unificación Borrosa, Unificación Semántica, Prolog Borroso.

1 Introducción y Motivación

La Computación con Palabras (CW, para abreviar) consiste en emplear las palabras, en lugar de los números, como unidad de computo. Siguiendo a [16], un sistema CW es aquel que permite razonar y computar con palabras y proposiciones precisadas y extraídas del lenguaje natural. Un modelo CW tiene tres componentes principales: (a) Una cuestión Q de la forma: ¿Cuál es el valor de una variable Y?; (b) un conjunto de información $I = (p_1, \ldots, p_n)$ donde los p_i con $i = (1, \ldots, n)$ son proposiciones que poseen información del valor de Y. Una o más de los p_i pueden extraerse del lenguaje natural. Una proposición p_i puede ser incondicional o condicional, expresado con reglas if-then, por tanto puede contener palabras o términos lingüísticos; (c) una función de agregación, f, que relaciona Y a los p_i.

A este respecto, la Programación Lógica (LP, para abreviar) se adapta bien a este modelo CW ya que posee algunas de las componentes requeridas: (a) Una cuestión Q de la forma: *¿Cuáles son los valores de las variables,* $Y_1, \ldots, Y_m$*?*; (b) un conjunto de información $I = (C_1, \ldots, C_n)$, donde cada C_i con $i = (1, \ldots, n)$, son cláusulas de Horn con información sobre los valores de $Y_1, \ldots, Y_m$. Una o más de las C_i podrían extraerse del lenguaje natural. Una cláusula C_i puede ser condicional o incondicional y se puede expresar como reglas if-then de la forma habitual $(A \leftarrow B_1, \ldots, B_n)$. Sin embargo, la LP no cuenta con la habilidad de razonar o computar con palabras o cláusulas extraídas del lenguaje natural debido, principalmente, a un mecanismo de inferencia rígido que no permite trabajar de forma eficaz con información vaga o imprecisa. Para resolver esta limitación, se propuso ampliar la LP con lógica borrosa. Pero, como veremos a lo largo del trabajo, la mayoría de las propuestas no se adaptan bien al requisito de que el conjunto de información ha de ser extraído del lenguaje natural al incorporar pesos, grados o intervalos de verdad en la descripción de dicho conjunto. Creemos que esta característica no es adecuada para la representación del conocimiento en un paradigma declarativo y lingüístico porque rompe la conexión directa entre el nivel de conocimiento y el nivel simbólico y, por tanto, el conjunto de información extraído del conocimiento humano no puede describirse de forma lingüística.

Una posible solución es emplear herramientas lingüísticas (crisp o fuzzy), es decir, en lugar del tipo habitual de programación lógica borrosa donde los pesos se emplean de forma explícita para manejar la vaguedad y la imprecisión, podríamos imaginar algún tipo de Programación Lógica Lingüística donde los símbolos sean términos lingüísticos o palabras y los pesos se traten a nivel subyacente. La principal diferencia entre ambos enfoques es que un marco lingüístico permite la inclusión en el conjunto de información de expresiones extraídas del lenguaje natural, es decir, palabras o términos lingüísticos y no es necesario emplear pesos en el conjunto de información para tratar la vaguedad y la imprecisión. Esto sitúa a este marco en una posición

privilegiada de cara a conducir a la Programación Lógica hacia el paradigma de la Computación con Palabras en donde los recursos lingüísticos pueden ser de gran utilidad [12].

El objetivo de este trabajo es presentar la **Programación Lógica Lingüística** como un nuevo marco lógico borroso para el tratamiento de la imprecisión y la vaguedad destacando sus principales características y capacidades. A fin de mostrar esto y proporcionar una justificación adecuada, la Sección 2 describe las principales características de las dos líneas de trabajo actuales de la programación lógica borrosa con el objetivo de clarificar por qué las propuestas basadas en unificación borrosa son más adecuadas para el paradigma CW. A continuación, la Sección 3 proporciona detalles sobre la diferencia entre ambos marcos en cuanto a la representación del conocimiento. En la Sección 4 se presenta un lenguaje de programación lógica lingüística. A continuación, los trabajos relacionados son expuestos en la Sección 5 y, finalmente, en la Sección 6 damos las conclusiones.

2 Programación Lógica Borrosa

La programación lógica cuenta con limitaciones a la hora de tratar problemas del mundo real donde está presente la vaguedad y la imprecisión. Esto es debido principalmente a la rigidez de su mecanismo de inferencia. La consolidación de la lógica borrosa impulsó su incorporación a la programación lógica para el tratamiento de la vaguedad y la imprecisión con técnicas declarativas, lo que se conoce como **Programación Lógica Borrosa**. Las propuestas se pueden agrupar en dos grandes grupos:

- **Extensión de la resolución y nuevos mecanismos de inferencia.** Cuando se desea representar la vaguedad en este marco se asocia a cada hecho, regla y objetivo un grado o intervalo de verdad. Por simplicidad, aquí explicamos un marco reducido que extiende el procedimiento de resolución. Para mayor información ver los trabajos [15], [9]. Con más precisión, un programa lógico tendría tres partes: Un *hecho borroso* de la forma $p(t_1,\ldots,t_n) \leftarrow [f]$. [1], donde p es un símbolo de predicado, cada t_i es un término y f es un valor de verdad asociado a $p(t_1,\ldots,t_n)$; una *regla borrosa* de la forma $A \leftarrow [\alpha]\langle B_1,\alpha_1\rangle,\ldots,\langle B_n,\alpha_n\rangle$ donde los grados de verdad de cada (sub)objetivo B_i es α_i y donde los valores de todas las condiciones es $\triangle(\alpha,\beta)$, siendo $\triangle$ una *t_norma* o una *conectiva borrosa* y $\beta = \triangle_{i=1}^{n}(\alpha_i)$; un objetivo de la forma $\leftarrow [f]B_1,\ldots,B_n$, siendo f una constante que indica el grado máximo de verdad que se puede alcanzar en la inferencia; o de la forma, $\leftarrow [F]B_1,\ldots,B_n$, siendo F una variable que almacenará el grado final de la computación. El mecanismo de unificación permanece intacto y se extiende el procedimiento de resolución permitiendo que los grados asociados a cada átomo pasen desde los antecedentes a los consecuentes hasta alcanzar éxito o fallo. Por tanto, suponiendo un conjunto de cláusulas borrosas $C_1,\ldots,C_n$:

$$C_1 \equiv A \leftarrow [\alpha_0]\langle B_1,\alpha_1\rangle,\ldots,\langle B_n,\alpha_n\rangle$$
$$C_2 \equiv B'_1 \leftarrow [\alpha_1]$$
$$\ldots$$
$$C_n \equiv B'_n \leftarrow [\alpha_n]$$

donde hay un hecho borroso $B'_i \leftarrow [\alpha_i]$ para cada antecedente en C_1, i.e., $B'_i = B_i$. Entonces podemos inferir el hecho borroso $A \leftarrow [\triangle_{i=0}^{n}\alpha_i]$. Ahora, cuando se alcanza el éxito, además de la salida, se proporciona un grado final asociado a él.

En estos marcos también se ha estudiado la incorporación de los subconjuntos borrosos. La solución más común ha sido usar la idea de predicado borroso que actúa como una función de pertenencia. Esta idea ha sido adquirida por sistemas actuales, como el módulo borroso de Ciao-Prolog [3] o la extensión borrosa de la lógica descriptiva [13]. Este mecanismo no resulta natural para manejar los conjuntos borrosos en un marco de programación lógica ya que, por ejemplo, el símbolo "joven" no es ni un término lingüístico ni una palabra, es una función de pertenencia. Esto tiene como consecuencia que no se pueda establecer una relación directa entre el significado de dos símbolos, por ejemplo, "joven" y "muy joven".

- **Extensión de la Unificación.** El objetivo de este marco es obtener mecanismos de unificación más flexibles. Hay al menos dos métodos principales: la *Unificación Semántica* donde un significado (por ejemplo, un subconjunto borroso) se asocia a cada constante y su unificación se realiza en base a este significado (por ejemplo, mediante un procedimiento de matching) y; la *Unificación Débil* que es una extensión borrosa del algoritmo clásico de unificación. De forma general, la *Unificación Débil* consiste en reemplazar la relación de igualdad sintáctica por una relación de similitud. Esta relación de similitud R relaciona los símbolos de un alfabeto de un lenguaje de primer orden L, i.e., $R = \{R_P \cup R_F \cup R_V\}$, donde R_V es una similitud sobre V definida como sigue: (1) $R_V(z,y) = 0$ si $x \neq y$ con $x,y \in V$; (2) $R_V(x,x) = 1$. Entonces, dados dos símbolos f, $g \in F$, con la misma aridad n, perteneciendo al alfabeto L, se establece una relación entre f y g con R_F y se cuantifica por medio de un grado de aproximación. Por ejemplo, es posible poner en relación los símbolos f y g tal que "f es similar a g con grado de aproximación α", con $\alpha \in (0,1]$. Ahora el algoritmo de unificación no termina cuando dos términos difieren en alguno de sus símbolos porque podrían

[1] En algunas propuestas, se usan intervalos de verdad $[f_n, f_m]$

ser similares. Además, el procedimiento de resolución debe adaptarse para computar los grados obtenidos en cada paso de resolución. Un programa borroso, en este marco [2], se compone de un conjunto de cláusulas y una relación entre los símbolos de un alfabeto L. Por tanto, suponiendo un conjunto de fórmulas.

$$C_1 \equiv A \leftarrow B'_1, \ldots, B'_n$$
$$C_2 \equiv B_1 \leftarrow$$
$$\ldots$$
$$C_n \equiv B_n \leftarrow$$

donde hay un hecho $B'_i \leftarrow$ que es similar a un antecedente en C_1, i.e., $R(B'_1, B_1) = \alpha_1, \ldots, R(B'_n, B_n) = \alpha_n$. Entonces podemos inferir $\langle A, \beta \rangle$, con $\beta = \Lambda_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Estos marcos de trabajo permiten una integración más natural con las variables lingüísticas a través del uso de algoritmos eficientes de unificación semántica que permite asociar a un símbolo del lenguaje (constantes, función o predicado) un término lingüístico [6]. Por ejemplo los conceptos "joven" y "muy joven" podrían estar relacionados considerando un universo de discurso previamente establecido.

Como veremos a continuación, cuando queremos tratar con la vaguedad y la imprecisión, la ventaja de los marcos que extienden la unificación frente a los que extienden resolución es que, los primeros, permiten que el tratamiento de la vaguedad se realice de forma independiente y, por tanto, la conexión entre el nivel de conocimiento y el nivel simbólico es mayor. Además, extender la unificación implica que la aproximación se representa y se gestiona a nivel sintáctico en lugar de a nivel de regla. Informalmente, la idea básica es que la vaguedad se proporciona por un proceso de abstracción que emplea una representación formal de relaciones de similitud entre los elementos en el alfabeto del lenguaje y que permite omitir la introducción de pesos en las cláusulas, en favor del uso de términos lingüísticos o palabras como elementos del lenguaje.

3 Representación del conocimiento con lenguajes lógico borrosos

El conocimiento es un repositorio de información que está relacionado a un campo de interés que, junto con un conjunto de reglas de razonamiento, activa un agente (humano o artificial) para resolver problemas no triviales en esa área. Un sistema que resuelve un problema en un determinado campo se dice que tiene conocimiento en ese campo. Por lo general, una representación del conocimiento es una descripción formal que puede emplearse para la computación simbólica, independientemente que esta descripción pueda finalmente traducirse a una combinación de estructura de datos y procedimientos que usa tales datos con el objetivo de producir un comportamiento inteligente.

Una característica compartida en toda representación del conocimiento es que tiene que manipular dos clases de entidades: i) los hechos, verdades de un determinado mundo que queremos representar; y ii) la representación de esos hechos usando un formalismo. Estas entidades inducen la necesidad de distinguir entre dos niveles: i) el nivel de conocimiento, donde se describen los hechos y el comportamiento; y ii) el nivel simbólico, donde los objetos del nivel de conocimiento se representan por medio de símbolos de un formalismo (con una clara semántica operacional que pueda ser implementada en un computador). Gracias a sus capacidades deductivas el nivel simbólico puede simular el razonamiento e inferir nuevo conocimiento.

La mayoría de las veces, el conocimiento sobre un campo se describe en lenguaje natural (inglés, español, etc). Por tanto, el problema de representar el conocimiento usando un lenguaje de programación lógica se convierte en un problema de traducción. Esta traducción consiste en pasar del nivel de conocimiento al nivel simbólico. Así que, estos lenguajes preservan la conexión natural entre estos dos niveles, lo que es una característica esencial del paradigma declarativo. Hablando sobre el conocimiento tenemos que distinguir entre conocimiento preciso y el conocimiento vago e impreciso. La vaguedad y la imprecisión están implícitas en el lenguaje y por tanto en el nivel de conocimiento. Este conocimiento vago se hace explícito en el nivel simbólico. Queremos decir que, si decimos "Juan es joven" y "María es madura" las sentencias son precisas pero los conceptos "joven" y "maduro" son vagos. Por tanto, en el nivel simbólico se tiene que representar la sentencia precisa, por ejemplo, "Juan es joven" y además se tiene que caracterizar que entendemos por "joven".

Tabla 1: Conexión entre el nivel de conocimiento y el nivel simbólico en los lenguajes de programación lógica borrosa

Nivel de Conocimiento	**Nivel Simbólico**	**Enfoque LP**
"John is young" "Mary is middle"	`age(john,young)` `age(mary,middle)`	Prolog (A standard LP language fails to represent vagueness)
	`age(john,young):-[1.0]` `age(john,middle):-[0.8]` `age(mary,young):-[0.8]` `age(mary,middle):-[1.0]`	Annotated FLP
	`age(john,young)]` `age(mary,middle)` `young ~ middle = 0.8`	Similarity-based FLP (Precise and vague Knowledge are separated)

En la última sección hemos presentado dos líneas de trabajo de lenguajes lógico borrosos concebidos para tratar con la vaguedad y la imprecisión. Los marcos que extienden resolución anotan los hechos y las reglas con grados de ver-

[2] Por simplicidad, explicamos un marco reducido que extiende la unificación. A fin de obtener más detalles ver [5, 11]

dad, rompiendo la conexión natural entre el nivel de conocimiento y el nivel simbólico; esto quiere decir que, cuando se representa el conocimiento, en estos lenguajes el tratamiento del conocimiento preciso e impreciso se mezcla. La ruptura de la conexión natural entre ambos niveles causa que la representación de conocimiento en estos lenguajes sería menos adecuada y más compleja porque se convierte en un proceso menos intuitivo (ver Tabla 1).

Por el contrario, los marcos basados en unificación débil permiten la representación separada del conocimiento preciso y vago. En particular, el Ejemplo 1 (ver Sección 4) y la Tabla 1 muestran que los marcos basados en unificación débil permiten una integración natural del nivel de conocimiento y el nivel simbólico, ya que proporcionan un tratamiento independiente de la vaguedad que hace que sean más adecuados para la representación del conocimiento ya que la traducción de conocimiento en estos lenguajes es más directa, intuitiva y declarativa.

También, note que la sintaxis del programa es muy similar a la empleada por el lenguaje Prolog, ya que el lenguaje no se modifica sustancialmente, a un nivel sintáctico, excepto para incorporar los recursos expresivos que la extensión del lenguaje proporciona con el objetivo de facilitar la gestión de la vaguedad y, especialmente, la definición de las ecuaciones de proximidad (cuando se requiere establecer la relación semántica entre los símbolos). Por tanto el diseño e implementación de la parte crisp de un programa puede realizarse empleando las técnicas de construcción de programas declarativas clásicas. Por otro lado, el tratamiento de la vaguedad puede realizarse de forma separada o, incluso, podría ser hecho de forma transparente al programador obteniendo las ecuaciones de proximidad de herramientas especializadas (recursos lingüísticos o repositorios de variables lingüísticas). Esto se contrapone a lo que ocurre en los marcos basados en resolución borrosa donde el tratamiento de la vaguedad se mezcla con la caracterización del conocimiento preciso complicando la tarea de representación.

4 Programación Lógica Lingüística

La Programación Lógica Lingüística (PLL, para abreviar) se centra en emplear términos lingüísticos, palabras y relaciones para representar el conocimiento vago o impreciso en lugar de números o anotaciones (grados o intervalos de verdad). Como hemos discutido, las anotaciones numéricas rompen la conexión natural entre el nivel de conocimiento y el nivel simbólico dificultando la tarea de representación de conocimiento.

La PLL debería diseñarse para hacer una clara distinción entre el tratamiento de la vaguedad y el conocimiento. Para solucionar este problema, un lenguaje de programación debería tener la habilidad de interpretar un símbolo sintáctico como un término lingüístico o una palabra para facilitar la conexión entre el lenguaje natural y el lenguaje formal. En tal propuesta la vaguedad y la imprecisión se manejan poniendo en relación términos lingüísticos o palabras empleando unificación semántica. Por tanto, la unificación semántica debe ser una característica importante y ser implementada eficientemente. Note que al usar subconjuntos borrosos como significado asociado a los símbolos se cuenta con la capacidad de usar varios tipos (conjuntos borrosos de tipo-2, intervalo-valorados, intuicionistas o conjuntos vagos) y así la unificación semántica podría adaptarse a distintos contextos. Teniendo en cuenta este último supuesto, los estudios sobre medidas de similitud y ranking entre los distintos tipos de subconjuntos borrosos serán clave en la PLL.

La PLL debe permitir trabajar con relaciones borrosas además de relaciones de similitud a fin de modelar conceptos o representar ontologías. Las restricciones de transitividad impuestas por las relaciones de similitud podrían producir conflictos con las especificación de los usuarios y podrían causar un mal modelado de la información vaga. Por ejemplo imagine la siguiente secuencia de colores: `{white, pale grey, grey, dark grey, black}`. Puedes admitir que un color es similar al adyacente, o incluso que `pale grey` y `dark grey` tienen algún parecido, sin embargo `white` no es cercano a `black`.

La PLL debería permitir el uso de herramientas lingüísticas (crisp o fuzzy) de forma natural con el objetivo de facilitar la definición de relaciones borrosas a los usuarios del sistema. Por ejemplo herramientas como WordNet [2], WordNet::Similarity [10] o ConceptNet [8].

Bousi∼Prolog (Bousi para abreviar) [5, 7] es un lenguaje de programación lógico borroso que extiende la unificación. Se encuentra disponible públicamente en la URL: http://dectau.uclm.es/bousi. Su sintaxis y semántica operacional se corresponden con el marco descrito en el item segundo de la Sección 2, pero puede trabajar con relaciones borrosas, no sólo con relaciones de similitud. Bousi∼Prolog puede ser visto como un sistema novel para la **Programación Lógica Lingüística** ya que ha sido concebido para hacer una clara separación entre el conocimiento preciso, el conocimiento vago y el control.

En Bousi∼Prolog el conocimiento vago se puede representar de dos formas: (i) empleando relaciones binarias borrosas (relaciones de proximidad, relaciones de similitud o incluso relaciones de jerarquía); (ii) mediante la definición de variables lingüísticas (usando directivas específicas — ver Ejemplo 1). Los términos lingüísticos adquieren significado mediante su asociación a un conjunto borroso. La asociación entre los símbolos sintácticos y los conjuntos borrosos se realiza en tiempo de compilación obteniendo una relación borrosa [6]. Brevemente, el método se resume en los siguientes pasos: primero se declara las variables lingüísticas (tanto sus etiquetas como sus funciones de

pertenencia); después comparamos las funciones de pertenencia empleando técnicas estándar mediante funciones de matching [1]; finalmente, como resultado de esta comparación, obtenemos una relación borrosa que, por lo general, no es una relación de similitud. Una vez se ha generado la relación borrosa, el mecanismo operacional del lenguaje manipula los términos lingüísticos (subconjuntos borrosos) de una forma totalmente estándar, es decir, como símbolos regulares de un lenguaje de primer orden (símbolos de constante, función o predicado) que son capaces de participar en un proceso de unificación débil al mismo nivel que el resto de símbolos del alfabeto del lenguaje. Por lo tanto, somos capaces de simular un algoritmo de unificación semántica por medio de un algoritmo de unificación débil que es de naturaleza sintáctica.

Por otro lado, Bousi∼Prolog permite trabajar con herramientas lingüísticas que permiten representar y manipular relaciones semánticas (sinonimia, antonimia, hiperonimia, homonimia, meronimia, etc). Por ejemplo, permite trabajar con WordNet::Similarity [10] (basado en WordNet [2]). Wordnet es un thesauro pero es también una ontologia. Conjunto de palabras (synsets) agrupadas por su significado. También proporciona definiciones generales y maneja varios tipos de relaciones semánticas entre los conjuntos de sinónimos. Por tanto, es posible conocer el significado de una palabra y, al mismo tiempo, asociar este con otras palabras empleando relaciones semánticas. Las relaciones semánticas y los "synsets" pueden emplearse para obtener el grado de cercanía entre dos palabras y entonces, una palabra se relaciona a otra mediante la herramienta WordNet::Similarity.

El siguiente programa ilustra algunas de las características mencionadas.

Ejemplo 1 *Supongamos un fragmento de una base de datos deductiva que almacena una red semántica con información sobre el nombre de las personas, su color de ojos y otras características.*

```
% Definition of the linguistic variable age.
:-domain(age(0,100,years)).
:-fuzzy_set(age, [young(0,0,30,50),
     middle(20,40,60,80), old(50,80,100,100)]).

% PROXIMITY EQUATIONS
mixed~brown=0.48.   light~green=0.4.
mixed~green=0.6.    light~gray=0.55.
mixed~gray=0.45.    light~blue=1.0.
dark~brown=0.52.    dark~black=1.0.

% FACTS
is_a(john,person).      age(peter, age#68).
is_a(peter,person).     eye_color(john, gray).
is_a(mary,person).      eye_color(mary,blue).
age(john, young).       eye_color(peter,brown).
age(mary, middle).

% RULES
wise(X) :- age(X, very#old).
```

Este pequeño programa encapsula muchas de las características útiles mencionadas de un marco basado en **Programación Lógica Lingüística**. *Los conceptos vagos se definen de forma separada bien por la especificación de las variables lingüísticas (directivas* `domain` *y* `fuzzy_set` *las cuales dan significado a las etiquetas lingüísticas) o bien por el conjunto de ecuaciones de proximidad. En este ejemplo, las ecuaciones de proximidad definen una relación de proximidad. El conocimiento preciso se representa por hechos o reglas y es donde los conceptos precisos y vagos se relacionan. Note también que es posible usar modificadores sobre las etiquetas lingüísticas (ver [7]).*

En este contexto, es muy natural lanzar preguntas como "`?- wise(X).`*" (¿quién es sabio?) o "*`?- eye_color(X, light), age(X, young).`*" (¿quién es joven y tiene los ojos claros?) y obtener una respuesta razonable donde otros sistemas fallan. Esto es porque el sistema* Bousi∼Prolog *es capaz de razonar en presencia de vaguedad y cercanía a través de una extensión del mecanismos operación sobre un algoritmo de unificación débil que usa la información proporcionada por las ecuaciones de proximidad.*

Estas características convierten a Bousi∼Prolog en un sistema bien situado para llevar los marcos de programación al paradigma de la computación con palabras ya que proporciona dos importantes capacidades: (a) la habilidad de precisar el significado de las palabras extraídas del lenguaje natural usando relaciones de proximidad, lo que permite modelar relaciones semánticas entre las palabras (e.g., sinonimia, antonimia, hiperonimia, etc) y emplear los términos lingüísticos para tratar la vaguedad y la imprecisión; (b) la capacidad de razonar y computar con palabras y cláusulas precisadas mediante un algoritmo de unificación semántica basado en unificación débil que permite computar con relaciones semánticas.

5 Trabajos relacionados

Los trabajos relacionados son básicamente tres. En [14] sólo se consideran predicados lingüísticos. Es decir, las fórmulas tales como $p(y)$ o $p(x,y)$ donde p es el nombre de la variables lingüística e y es un término lingüístico en $T(p)$. Sin embargo, en nuestro caso, es posible tratar términos lingüísticos como símbolos de constante, función o predicado y no hay limitaciones impuestas en la sintaxis del lenguaje. Esta característica puede producir grandes beneficios con pequeño esfuerzo. Por ejemplo, Bousi∼Prolog dispone de un número mayor de recursos expresivos y permite razonar de forma aproximada más fácilmente. Más reciente es el trabajo [4] donde se presenta un marco de programación lógico lingüístico borroso. Sin embargo aunque los auto-

res indican que su marco es lógico lingüístico el hecho es que es un lenguaje borroso anotado que emplea anotaciones lingüísticas (grados de verdad), es decir, no hacen uso de términos lingüísticos. Por último en [12] se propone un Prolog borroso más natural. El autor sugiere extender la unificación y la resolución con relaciones semánticas, en particular, con una unificación basada en sinonimia y una resolución basada en antonimia. Este trabajo es el más cercano de los tres a nuestra propuesta, la diferencia fundamental reside en que en nuestro marco se permite emplear relaciones semánticas en la unificación pero no en la resolución y la antonimia se trata como una similitud de conceptos opuestas. Un trabajo futuro de interés sería exportar la ideas de este trabajo en nuestro marco.

Por último queremos comentar las principales diferencias con nuestros trabajos previos [5, 6, 7] donde el lenguaje Bousi∼Prolog se presentó en gran detalle. Actualmente, permite el uso de términos lingüísticos y cuenta con algunas de las características deseables de un sistema lógico lingüístico. Sin embargo sólo se han estudiado sus propiedades formales cuando trabaja con relaciones de similitud y no con relaciones de proximidad. El estudio formal del lenguaje cuando trabaja con relaciones de proximidad es un paso fundamental en un contexto de programación lógico y será clave para la formalización de la PLL.

6 Conclusiones

En este trabajo hemos discutido la representación del conocimiento vago empleando las dos principales líneas de trabajo en la programación lógica borrosa: lenguajes anotados y aquellos que extienden el procedimiento de unificación clásico. Hemos mostrado que los lenguajes anotados representan el conocimiento vago a bajo nivel, usando anotaciones (numéricas) en las reglas y mezclando el conocimiento preciso y vago. Por otro lado, los lenguajes que extienden la unificación representan el conocimiento vago de una forma más abstracta, haciendo una clara distinción entre el conocimiento crisp (representado por los hechos y las reglas del programa) y el conocimiento vago (representado por las relaciones borrosas o las variables lingüísticas). En nuestra opinión, esta separación mejora la naturaleza declarativa del lenguaje dotándolo de características interesantes: (i) preserva la conexión natural entre el nivel de conocimiento y el nivel simbólico y; (ii) facilita la programación de programación dándole al sistema la gestión de la vaguedad y permitiendo que el programador sólo tenga que preocuparse de la lógica.

Por último, hemos propuesto un marco **lógico lingüístico** que permite la definición de conceptos vagos por medio de relaciones borrosas o empleando variables lingüísticas. También permite el tratamiento de la imprecisión a través de recursos lingüísticos (crisp o fuzzy). Creemos que este nuevo marco, que es una evolución natural de las propuestas de programación lógica borrosa basados en relaciones de similitud, está bien situado para conducir a la programación lógica hacia el paradigma de la computación con palabras y tiene en el sistema Bousi∼Prolog a un verdadero e incipiente representante.

Referencias

[1] M. Cayrol, H. Farency, and H. Prade. Fuzzy Pattern Matching. Kybernetes, 11:103-106 (1982).

[2] C. Fellbaum. WordNet: An Electronic Lexical Database. MIT Press (1998).

[3] S. Guadarrama, Muñoz and C. Vaucheret. Fuzzy Prolog: A New Approach Using Soft Constraints Propagation. Fuzzy Sets and Systems, Elsevier, 144(1):127–150 (2004).

[4] V. Hung Le, F. Liu, D. K. Tran. Fuzzy linguistic logic programming and its applications. In: Theory and Practice of Logic Programming, Volume 9 9(3): 309-341 (2009).

[5] P. Julián-Iranzo and C. Rubio-Manzano. A Declarative Semantics for Bousi∼Prolog. In: Proc. of PPDP'09, pp. 149–160 (2009).

[6] P. Julián-Iranzo and C. Rubio-Manzano. An Efficient Fuzzy Unification Method and its Implementation into the Bousi∼Prolog System. In: Proc. of FUZZ-IEEE'10 (2010).

[7] C. Rubio-Manzano and P. Julián-Iranzo. Fuzzy linguistic prolog and its applications. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, DOI: 10.3233/IFS-130834, pp. 12. IOS Press (2013).

[8] H. Liu, P. Singh Commonsense Reasoning in and over Natural Language. in: Proc. of KES'2004 pp 293–306 (2004).

[9] J. Medina, M. Ojeda-Aciego and P. Vojtáš, Multi-adjoint Logic Programming with Continuous Semantics. In: LNAI 2173, pp. 351–364, Springer-Verlag (2001).

[10] T. Pedersen, S. Patwardhan and Jason Michelizzi. WordNet::Similarity - Measuring the Relatedness of Concepts. In: Proc. AAAI-04, pp. 1024-1025 (2004).

[11] M.I. Sessa. Approximate Reasoning by Similarity-based SLD Resolution. Theoretical Computer Science, 275(1-2): 389–426 (2002).

[12] A. Sobrino. The Role of Synonymy and Antonymy in 'Natural' Fuzzy Prolog. Soft Computing in Humanities and Social Sciences. Studies in Fuzziness and Soft Computing Vol. 273 Springer (2012).

[13] U. Straccia. Fuzzy Logic, Annotation Domains and Semantic Web Languages. Scalable Uncertainty Management, SUM 2011, (2011).

[14] H.E. Virtanen. Linguistic Logic Programming. In: Proc. Workshop on Logic Programming and Soft Computing, Manchester (1998).

[15] P. Vojtáš. Fuzzy Logic Programming. Fuzzy Sets and Systems, 124 (1): pp. 361–370 (2001).

[16] L.A. Zadeh. Computing With Words and Perceptions. A Paradigm Shift. In Joint Colloquium Distinguished Lecture Series June 22 (2009).

Multi-criteria decision making with linguistic labels: A comparison of two methodologies applied to energy planning

Arayeh Afsordegan [1], Mónica Sánchez[1], Núria Agell [2], Lázaro Cremades[1], Siamak Zahedi[1]

[1]*Universitat Politècnica de Catalunya UPC-Barcelona Tech*,
{arayeh.afsordegan,monica.sanchez,lazaro.cremades,siamak.zahedi}@upc.edu
[2]*ESADE Business School, Universitat Ramon Llull*, nuria.agell@esade.edu

Abstract

This paper compares two multi-criteria decision making (MCDM) approaches based on linguistic label assessment. The first approach consists of a modified fuzzy TOPSIS methodology introduced by Kaya and Kahraman in 2011. The second approach, introduced by Agell et al. in 2012, is based on qualitative reasoning techniques for ranking multi-attribute alternatives in group decision-making with linguistic labels. Both approaches are applied to a case of assessment and selection of the most suitable types of energy in a geographical area.

Keywords: Fuzzy reasoning, Group decision making, Multi-criteria decision-making, Qualitative reasoning, Energy planning.

1 INTRODUCTION

Multi-criteria decision making under uncertainty and fuzzy systems are proved to be very suitable techniques in problems involving conflicting in particular in sustainable energy analysis and planning [1][2][3][4][5]. Fuzzy and qualitative reasoning techniques are applied to overcome uncertainty in human judgments that involve vague information. In these cases, it is often difficult to obtain exact numerical values for criteria and indicators [6] and fuzzy and qualitative reasoning are capable of representing uncertainty, emulating skilled humans, and handling vague situations. Frequently, this uncertainty is captured by using linguistic terms or fuzzy numbers to evaluate the set of criteria or indicators [7]. In addition, considering that in general not all the criteria have the same importance, setting up of weights is necessary. In a decisional process, assessment and selection of alternatives derive from complex hierarchical comparisons among them, which are often based on conflict criteria [8].

Recently, fuzzy systems are used as systematic tools for sustainability assessment. Different studies on energy planning have been developed to help energy planners and policy makers to design strategies for energy system models. The aim of this paper is to analyze and compare some MCDM approaches based on fuzzy and qualitative reasoning techniques for energy planning [9]. In particular, we compare two MCDM approaches based on linguistic label assessment. The first approach, introduced by Kaya and Kahraman in 2011,isbased on fuzzy TOPSIS methodology [10]. The second approach, introduced by Agell et al. in 2012, is based on qualitative reasoning techniques for ranking multi-attribute alternatives in group decision-making with linguistic labels [11].The main contribution of this paper is the comparison of both approaches in an example based on data provided in a paper by Kaya and Kahraman in 2011 [10],which is used to illustrate the mechanisms employed in both approaches and analyzes their similarities and differences.

The paper is organized as follows. Section 2 describes some relevant fuzzy MCDM methods applied to ranking and selection of alternatives. Section 3 introduces and compares two specific MCDM methods where fuzzy and qualitative alternatives' descriptions are considered. In Section 4 a case example based on renewable energies assessment is presented and a comparison of the results obtained by both methods is conducted. Finally, the last section highlights some conclusions and future research directions.

2 LITERATURE REVIEW

MCDM is a powerful tool used for evaluating problems and deal with the process of making decisions with multiple objectives, introduced in the early 1970s. It has two main purposes, the first one is describing trade-offs among different objectives and the other one is structuring decision process, defining and selecting alternatives, determining criteria formulations and weights, applying value judgments and finally evaluating the results to make

decisions. Most of MCDM approaches which can handle both quantitative and qualitative criteria, share the common characteristics of conflict among criteria and difficulties in design/selection of alternatives [1][3].

MCDM usually deals with three kinds of problems: choice problems, ranking problems and sorting problems. The goal of the decision maker in each type of problem is different: in choice problems the aim is to find the best alternative, in ranking problems we want to know the goodness of all alternatives, which is usually presented as a ranking from the best to the worst, and in sorting problems we want to know which alternatives belong to each class of a predefined set of ordered classes [12].

Reference point methods are a group of MCDM methodologies widely used for ranking problems. Among them we can highlight TOPSIS method, which was developed by Huang and Yong as an alternative to ELECTRE. TOPSIS is based on an aggregating function of the evaluation scores of the experts and determines the best alternative by calculating the distances from the positive and negative ideal solutions [13].

The question of how can the experts express their preferences to make a decision is a major issue to be faced. Therefore, most of the selection parameters cannot be given precisely and the evaluation data of the alternatives' suitability for various subjective criteria and the weights of the criteria are usually expressed in linguistic terms by the decision-makers [3].There exist many different representation formats that can be used in each model, i.e., preference orderings, utility values, multiplicative preference relations, fuzzy preference relations and so on. Every representation format has its own advantages and disadvantages, like precision or easiness of use and understanding. The use of Fuzzy Sets Theory, proposed by Zadeh in 1965 has given very good results for modeling qualitative information. It can be treated as a mechanism that mimics the human inference process with fuzzy information. It is a tool with the ability to compute with words to model qualitative human thought process in the analysis of complex systems and decisions. Therefore, fuzzy logic is appropriate for unstructured decision making [14].

On the other hand, Qualitative Reasoning (QR) is another subarea of Artificial Intelligence that tries to understand and explain human beings' ability to reason without having exact information. The main objective of QR is to develop systems that permit operating in conditions of insufficient or no numerical data [15]. Qualitative Reasoning also deals with problems in such a way that the principle of relevance is preserved, that is, each variable is valued with the level of precision required. In group decision evaluation processes, it is not unusual for a situation to arise in which different levels of precision have to be worked with simultaneously depending on the information available to each expert. QR tackles the problem of integrating the representation of existing uncertainty within the group [11].

As the importance of renewable energies since the 1990's has increased, a decision for governments and businesses to establish renewable energy systems in a suitable place and to decide which renewable energy source or combination of sources is the best choice to investment become an important issue [1][16][17]. It is necessary to change the energy structure, integrating new sources and modifying the way we use fossil fuel because of its damage to environment. The Kyoto Protocol of 1997 and after that the strategy of Europe 2020 can be mentioned as recent incentives in the European Union [18].

Energy planning problems are complex problems usually involving multiple decision makers (DMs) and multiple criteria. These problems are quite suited to the use of MCDM as a way of evaluating environmental sustainability [4][6][19]. Each country must prepare its own energies policies based on geographical and environmental factors due to their differences. For this reason, several strategies planning and researches have been done in different countries. A group of studies refers to applying MCDM methods as a strong tool in energy planning with their own categorization and introduced different methods [4][5][6][20][21].

3 TWO MULTI-CRITERIA DECISION MAKING APPROACHES

In general, in decision problems where the information is imprecise and involves uncertainty, alternatives cannot be assessed by means of precise numerical values. This fact is even more important when alternatives bear on uncertainty due to qualitative aspects of the involved variables. This uncertainty is usually framed in terms of preferences with interval or fuzzy values through a linguistic approach [11][22].

3.1. MODIFIED FUZZY TOPSIS

TOPSIS is a widely accepted multi-attribute decision-making technique due to its simultaneous consideration of the ideal and the anti-ideal solutions, and its easily programmable computation procedure [20]. In fuzzy TOPSIS, linguistic preferences are converted to fuzzy numbers. In Kaya and Kahraman study in 2011 [10] a modified fuzzy TOPSIS methodology is proposed to make a multi-criteria selection among energy alternatives.

The Kaya and Kahraman study uses triangle fuzzy numbers a linguistic term, that each triplet vector (τ_1,τ_2,τ_3) correspond to a linguistic term by using fuzzy membership functions as in Eq. 1.

$$\mu_{\tilde{\tau}}(x) = \begin{cases} 0, & x_{1\leq}\tau_1, \\ \frac{x-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}, & \tau_1 \leq x \leq \tau_2, \\ \frac{x-\tau_3}{\tau_2-\tau_3}, & \tau_2 \leq x \leq \tau_3, \\ 0, & x \geq \tau_3, \end{cases} \quad (1)$$

Alternatives are assessed by means of the above fuzzy numbers by a group of DMs. Then, using a convenient set of weights, the corresponding fuzzy numbers are aggregated for each alternative. Then FPIS (fuzzy positive ideal solution) A^* and FNIS (fuzzy negative ideal solution) A^- are computed and the distance of each alternative from FPIS and FNIS is calculated by means of (Eq. 2):

$$d(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) = \sqrt{\frac{1}{3}[(\rho_1-\tau_1)^2 + (\rho_2-\tau_2)^2 + (\rho_3-\tau_3)^2]} \quad (2)$$

Finally the closeness coefficient of each alternative is obtained by Eq. 3 and the alternatives ranked according to the maximum CC_i values.

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^* + d_i^-}, \quad i = 1,2 \dots, m. \quad (3)$$

3.2. A QUALITATIVE APPROACH

Agell et al. introduced in 2012 a qualitative approach for ranking alternatives described qualitatively inspired by the Reference Point Method which ranks the alternatives by using a distance function (previously defined on the absolute order-of-magnitude qualitative space) [11]. This technique uses qualitative assessments of alternatives and minimizes the distance between them and a certain target point that models the best performance for each criterion considered. It deals with the problem in such a way that the principle of relevance is preserved, i.e., each variable is valued with the level of precision required.

This approach uses a set of qualitative labels with different levels of precision. The basic labels, corresponding to linguistic terms, are defined by a discretization given by a set $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ of real numbers as landmarks, $B_i = [a_i, a_{i+1}]\ i = 1, \dots, n$. The non-basic labels describing different levels of precision, are defined as $[B_i, B_j] = [a_i, a_{j+1}]\ i, j = 1, \dots, n$.
Then a location function is defined by the addition of measures of basic label to its right and to its left (Eq. 4).

$$I([B_i, B_j]) = (-(i-1), n-j) \quad (4)$$

This function codifies each alternative via a 2-m dimensional vector of integer numbers (being m the product of the number of experts by the number of criteria) and the vector $(B_n, \dots, B_n)$ is considered as a reference label to compute distances. Finally, alternatives are ranked according to their minimum distance to the reference label.

3.3. COMPARING BOTH METHODOLOGIES

Although both above presented MCDM approaches process uncertainty in different ways, they can deal with the same kind of linguistic information. Table 1 shows differences and similarities of these two methods (See Table 1).

Table 1: Differences and similarities of two methods

		Agell et al.	Kaya and Kahraman
Differences	Scale	Qualitative intervals	Fuzzy numbers
	Aggregation step	Distance to the maximum	Aggregation + distances to the positive and negative ideal solutions
	Normalization	Without prior normalization	With normalization
Similarities		Using linguistic labels	
		Using distance functions	

In order to demonstrate the potential of these methodologies, an application in the energy planning area will be presented.

4 A CASE EXAMPLE: RENEWABLE ENERGIES ASSESSMENT

Energy is a significant factor for economic development of countries. As economy advances and human society requires more energy, the lack of fossil energy and its pollution on the environment has given rise to a serious contradiction among energy providing, environment protection and economic development [4]. Therefore, renewable energy such as solar, wind, hydropower, biomass and geothermal are potential sources to supply global energy requirements in a sustainable way. The great advantages of these energy sources are primary, domestic, and clean and also considerable feature is inexhaustible energy sources [1]. The assessment and selection of the most suitable types of energy in a geographical area is a complex problem, involving technical, economic, environmental, political, and social criteria.

An example, based on data provided in a paper by Kaya and Kahraman in 2011, is used to illustrate the mechanisms employed in the approaches introduced in the above section. Then we analyze their similarities and differences [10].

4.1. ALTERNATIVES, CRITERIA AND INDICATORS FOR SUSTAINABILITY ASSESSMENT

We consider seven energy alternatives solar, wind, nuclear, biomass, hydraulic, combined heat and power and conventional.

Although some articles define different quantitative and qualitative indicators to assess energy planning, four main criteria are accepted by most of the researchers: technological, environmental, economic and social [5][8][19].

Next, both MCDM methods introduced in Section 3 are performed on the basis of nine indicators (See Table 2) - as conveniently weighted by a group of three experts using AHP [10].

Table 2: Criteria and Indicators

Technical	Economical	Environmental	Social
Efficiency	Investment cost	NO_X emission	Social acceptability
Exergy (rational) efficiency	Operation and maintenance cost	CO_2 emission	Job creation
		Land use	

4.2. RESULTS

Once determined the evaluation criteria, indicators, weights and the alternatives set, the steps of the modified fuzzy TOPSIS algorithm and qualitative reasoning are executed.

4.2.1. Modified Fuzzy TOPSIS

To determine the best energy alternative with the proposed fuzzy TOPSIS procedure, three experts evaluated the energy alternatives with respect to each indicator using Table 3.

Table 3: Fuzzy evaluation scores for the alternatives (Kaya and Kahraman)

Linguistic terms	Fuzzy numbers
Very Poor(VP)	(0,0,1)
Poor(p)	(0,1,3)
Medium Poor(MP)	(1,3,5)
Fair(F)	(3,5,7)
Medium Good(MG)	(5,7,9)
Good(G)	(7,9,10)
Very Good(VG)	(9,10,10)

Then experts' linguistic evaluations are normalized and aggregated to get a mean value for each pair-wise comparison and weighted normalized fuzzy decision matrix is constructed.

The procedure detailed in Subsection 3.1 was applied and according to the CC_i values, the best alternative is A4 (wind energy). The order of the rest of alternatives is Biomass, solar, CHP, hydraulic, nuclear, and conventional energy.

4.2.2. Qualitative Approach

The Agell et al. approach also uses in this example 7 basic qualitative labels (See Table 4).

Table 4: Qualitative evaluation scores for the alternatives (Agell et al.)

Linguistic terms	Qualitative labels	locations
Very Poor(VP)	B_1	(0,6)
Poor(p)	B_2	(-1,5)
Medium Poor(MP)	B_3	(-2,4)
Fair(F)	B_4	(-3,3)
Medium Good(MG)	B_5	(-4,2)
Good(G)	B_6	(-5,1)
Very Good(VG)	B_7	(-6,0)

Via the location function, each alternative is represented by a 54-dimensional vector of integer numbers (Eq. 5, Eq. 6), and the vector $(B_7, \dots, B_7)$ is considered as the reference label to compute distances.

$$A \leftrightarrow (\overbrace{L_{11}, \dots, L_{19}}^{Expert\ 1}, \overbrace{L_{21}, \dots, L_{29}}^{Expert\ 2}, \overbrace{L_{31}, \dots, L_{39}}^{Expert\ 3}) \quad (5)$$

$$A \leftrightarrow (X_{11}, \dots, X_{1,18}, X_{21}, \dots, X_{2,18}, X_{31}, \dots, X_{3,18}) \quad (6)$$

Then, the Euclidean weighted distance of each alternative to the reference vector is computed (Eq.7)

$$d(A, \tilde{A}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{9} w_i (\sum_{k=1}^{6} (X_{ki} - \widetilde{X_{kl}})^2)} \quad (7)$$

Where w_i is the weight corresponding to each indicator. Then the alternatives are ranked according to the minimum distance.

4.2.3. Comparing Results

In the example, the proposed algorithms were implemented and wind energy is found to be the best alternative among other energy technologies in both studies for a particular scenario (considering w_1=0.09; w_2=0.1; w_3=0.1; w_4=0.11; w_5=0.13; w_6=0.15; w_7=0.11; w_8=0.09; w_7=0.12). Applying both, Kaya and Kahraman and Agell et al. methodologies, the final ranking obtained is:

wind > biomass > solar > CHP > hydraulic > nuclear > conventional energy.

So, although both MCDM linguistic approaches process uncertainty in different ways, their results produce the same ranking in this first scenario.
In addition, 4 scenarios (changing the weights for each criterion) have been considered to analyze the sensitivity of the results obtained by both methods. The results corresponding to these four scenarios, along with the first scenario's results, are summarized in Table 5. Differences between both rankings were found just in the shadowed

cells. In each shadowed cell the first energy source corresponds to Kaya and Kahraman methodology [10] and the second one to Agell et al. approach.

Table 5: Sensitivity Analysis

Scenario1	Scenario2	Scenario3	Scenario4	Scenario5
Wind	Biomass	Biomass	Wind	Biomass
Biomass	Wind	Wind	Solar/ Biomass	Solar
Solar	Solar	Solar	Biomass/ Solar	Wind/CHP
CHP	CHP	Nuclear/CHP	CHP	Nuclear/Wind
Hydra.	Nuclear/ Hydra.	CHP/Hydra.	Hydra.	CHP/Hydra.
Nuclear	Hydra./ Nuclear	Hydra./ Nuclear	Nuclear	Convent./ Nuclear
Convent.	Convent.	Convent.	Convent.	Hydra./ Convent.

As it can be seen in the table, the results obtained from both methodologies always coincide in the first option and in general they produce compatible rankings of alternatives. Higher differences were found in the last scenario. A plausible reason for these differences is that, in this case, the greater weights correspond to those indicators in which there was a greater disagreement among experts' scores [10], producing higher uncertainty.

4.3. CONCLUSION AND FUTURE WORK

Since qualitative criteria make the evaluation process hard and vague, it is suitable to express the judgments of experts in linguistic variables such as fuzzy numbers or qualitative intervals. In this paper two MCDM approaches based on linguistic label assessment have been compared and applied in an example in the energy sector. The modified fuzzy TOPSIS methodology proposed by Kaya and Kahraman utilizes fuzzy linguistic variables in the evaluation processes of both criteria and alternatives and in Agell et al.a group decision method is given for ranking the alternatives by comparing distances to a reference k-dimensional vector of qualitative labels.

For further research a new hybrid fuzzy-qualitative-based multi-criteria decision-making procedure in order to determine the most appropriate renewable energy alternative in a specific area can be developed. Moreover, the results of this study may be compared with the results of other fuzzy MCDM methods like ELECTRE, PROMETHEE, or VIKOR. Finally the theoretical framework including more indicators, such as waste management, public health risk, possible accidents impact or others can be extended.

Acknowledgements

This research was partially supported by the SENSORIAL Research Project (TIN2010-20966-C02-01 and TIN2010-20966-C02-02), funded by the Spanish Ministry of Science and Information Technology. Partial support was also provided by a doctoral fellowship awarded to one of the authors at the ESADE Business School, with additional support from Ramon Llull University.

References

[1] S. D. Pohekar and M. Ramachandran, "Application of multi-criteria decision making to sustainable energy planning—A review," *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 8, no. 4, pp. 365–381, Aug. 2004.

[2] K. F. R. Liu, "Evaluating environmental sustainability: an integration of multiple-criteria decision-making and fuzzy logic.," *Environ. Manage.*, vol. 39, no. 5, pp. 721–36, May 2007.

[3] J.-J. Wang, Y.-Y. Jing, C.-F. Zhang, and J.-H. Zhao, "Review on multi-criteria decision analysis aid in sustainable energy decision-making," *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 13, no. 9, pp. 2263–2278, Dec. 2009.

[4] H. Polatidis, D. Haralambopoulos, G. Munda, and R. Vreeker, "Selecting an Appropriate Multi-Criteria Decision Analysis Technique for Renewable Energy Planning," *Energy Sources, Part B Econ. Planning, Policy*, vol. 1, no. 2, pp. 181–193, Jul. 2006.

[5] C. Kahraman, S. Cebi, and I. Kaya, "Selection among renewable energy alternatives using fuzzy axiomatic design: The case of Turkey," *J. Univers. Comput. Sci.*, vol. 16, no. 1, pp. 82–102, 2010.

[6] R. Abu-Taha, "Multi-criteria applications in renewable energy analysis: A literature review," in *Technology Management in the Energy Smart World (PICMET), 2011 Proceedings of PICMET '11:*, 2011.

[7] A. M. Nieto Morote and F. Ruz Vila, "Fuzzy Multicriteria Decision Making Applied to the Strategic Plan of Valencia," *Mathw. soft Comput.*, vol. 7, 2000.

[8] M. Beccali, M. Cellura, and M. Mistretta, "Decision-making in energy planning.

Application of the Electre method at regional level for the diffusion of renewable energy technology," *Renew. Energy*, vol. 28, no. 13, pp. 2063–2087, Oct. 2003.

[9] C. Kahraman and I. Kaya, "A fuzzy multicriteria methodology for selection among energy alternatives," *Expert Syst. Appl.*, vol. 37, no. 9, pp. 6270–6281, Sep. 2010.

[10] I. Kaya and C. Kahraman, "Multicriteria decision making in energy planning using a modified fuzzy TOPSIS methodology," *Expert Syst. Appl.*, vol. 38, no. 6, pp. 6577–6585, Jun. 2011.

[11] N. Agell, M. Sánchez, F. Prats, and L. Roselló, "Ranking multi-attribute alternatives on the basis of linguistic labels in group decisions," *Inf. Sci. (Ny).*, vol. 209, pp. 49–60, Nov. 2012.

[12] P. Vincke, *Multicriteria Decision Aid*. Chichester, UK: John Wiley, 1992.

[13] S. Opricovic and G.-H. Tzeng, "Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 156, no. 2, pp. 445–455, Jul. 2004.

[14] L. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I," *Inf. Sci. (Ny).*, vol. 8, no. 3, pp. 199–249, Jan. 1975.

[15] K. D. Forbus, "Qualitative process theory," *Artif. Intell.*, vol. 24, no. 1–3, pp. 85–168, Dec. 1984.

[16] T. J. Evans, V. Strezov, and E. Annette, "Assessment of sustainability indicators for renewable energy technologies," *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 13, pp. 1062–1088, 2009.

[17] R. Baños, F. Manzano-Agugliaro, F. G. Montoya, C. Gil, A. Alcayde, and J. Gómez, "Optimization methods applied to renewable and sustainable energy: A review," *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 15, no. 4, pp. 1753–1766, May 2011.

[18] European Commission, "Communication from the comission Europe 2020, A strategy for smart, sustainable and inclusive growth," Brussels, 2010.

[19] J.-J. Wang, Y.-Y. Jing, C.-F. Zhang, G.-H. Shi, and X.-T. Zhang, "A fuzzy multi-criteria decision-making model for trigeneration system," *Energy Policy*, vol. 36, no. 10, pp. 3823–3832, Oct. 2008.

[20] F. Cavallaro, "Fuzzy TOPSIS approach for assessing thermal-energy storage in concentrated solar power (CSP) systems," *Appl. Energy*, vol. 87, no. 2, pp. 496–503, Feb. 2010.

[21] J. R. San Cristóbal, "A goal programming model for environmental policy analysis: Application to Spain," *Energy Policy*, vol. 43, pp. 303–307, Apr. 2012.

[22] F. Mata, L. Martinez, and E. Herrera, "An adaptive consensus support model for group decision-making problems in a multigranular fuzzy linguistic context," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 17, no. 2, pp. 279–290, 2009.

MODELOS DE CONJUNTOS RUGOSOS DIFUSOS TOLERANTES AL RUIDO: DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Lynn D'eer[1], **Nele Verbiest**[1], **Chris Cornelis**[1,2], **Lluis Godo**[3]

[1]*Department of Applied Mathematics, Computer Science and Statistics, Ghent University, Krijgslaan 281 (S9), B-9000 Gent, Bélgica*, {Lynn.Deer,Nele.Verbiest}@UGent.be

[2] *Departamento de Ciencias de la Computación y I.A., CITIC, Universidad de Granada, Calle del Periodista Daniel Saucedo Aranda s/n, 18071 Granada, España*, Chris.Cornelis@decsai.ugr.es

[3]*IIIA - CSIC, Campus de la UAB s/n, 08193 Bellaterra, España*, godo@iiia.csic.es

Resumen

Desde que a principios de los años noventa se propuso el primer modelo híbrido difuso-rugoso, muchos investigadores se han interesado en la generalización de la noción de aproximación inferior y superior de un conjunto difuso a partir de una relación difusa. Un tipo específico de estos nuevos modelos se centran en proponer aproximaciones robustas al posible ruido en los datos. En este artículo, repasamos las propuestas más prominentes, y comprobamos cuáles de las propiedades deseables del modelo estándar de los conjuntos rugosos se mantienen en estas propuestas.

Palabras Clave: conjuntos rugosos difusos, hibridización, aproximación inferior y superior, tolerancia al ruido.

1 Introducción

Los conjuntos rugosos [10] permiten caracterizar un conjunto de objetos por una aproximación inferior y superior, teniendo en cuenta una relación de equivalencia que representa la indiscernibilidad entre los objetos. Dubois y Prade propusieron en 1990 su hibridización con los conjuntos difusos [6]. Hoy en día, más de 20 años después, sigue aumentando el interés por los conjuntos rugosos difusos; esto es debido principalmente a su potencial demostrado en aplicaciones de aprendizaje automático, en particular en la selección de características [3, 8] e instancias [13].

La hibridización difusa-rugosa se ha realizado de varias maneras; el enfoque más común consiste en usar extensiones difusas de la implicación y de la conjunción booleana, junto con el uso del ínfimo y el supremo como extensiones de los cuantificadores universal y existencial. Esta idea dió lugar a la propuesta seminal en [6], y desde entonces muchos autores se han centrado en refinar dicho modelo. Se comprobó que con una elección apropriada de los operadores lógicos difusos, y con el uso de una relación de similitud (también llamada relación difusa de equivalencia) para modelar la indiscernibilidad aproximada, la mayoría de las propiedades del modelo original de los conjuntos rugosos se podían mantener [1, 9, 11]. Por otro lado, desde el punto de vista práctico, el uso de las relaciones de similitud no siempre es conveniente, por lo que se han propuesto también modelos de conjuntos rugosos difusos basados en relaciones difusas generales. En [5], se han unificado todos estos enfoques bajo el paradigma del modelo general de los conjuntos difusos rugosos basado en operadores difusos de implicación y conjunción, imponiendo restricciones mínimas a las aproximaciones.

A causa del uso del ínf y del sup, las aproximaciones basadas en implicaciones y conjunciones son sensibles a pequeños cambios en los argumentos. Esto limita su potencial de aplicación en los problemas de análisis de datos, donde típicamente hay una presencia de ruido en los datos. Por tanto, varios autores han propuesto modelos de conjuntos rugosos difusos que son robustos a la perturbación de datos, como por ejemplo [2, 4, 7, 12, 14]. Desafortunadamente, el precio a pagar por el aumento en la robustez es que los modelos correspondientes satisfacen menos propiedades teóricamente deseables. En este artículo, llevamos a cabo un análisis comparativo de cuatro modelos prominentes que son tolerantes al ruido: el modelo de β-precisión [12], el modelo de precisión variable difusa-rugosa (PVDR) [14], el modelo de conjuntos rugosos por cuantificadores difusos (CRCD) [2], y el modelo basado en los operadores OWA (Ordered Weighted Average) [4]. Evaluamos cuáles de las propiedades se mantienen en los distintos modelos, y cómo esto puede afectar en las aplicaciones que los usen.

Después de recordar los preliminares necesarios en la Sección 2, resumimos y comentamos las definiciones de las aproximaciones tolerantes al ruido en la Sección 3. En la Sección 4, las evaluamos con respecto a una lista de propiedades deseables. Finalmente, en la Sección 5, presentamos

las conclusiones y unos comentarios sobre nuestro trabajo futuro.

2 Preliminares

2.1 Conectivas lógicas difusas

En este trabajo usaremos las siguientes definiciones para operadores difusos de conjunción, disyunción, negación e implicación.

Una *conjunción* es una función $\mathscr{C}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ que es creciente en ambos argumentos y que satisface $\mathscr{C}(0,0) = \mathscr{C}(0,1) = \mathscr{C}(1,0) = 0$ y $\mathscr{C}(1,1) = 1$. Se llama *conjunción frontera* si además cumple $\mathscr{C}(1,x) = x$ para cada x en $[0,1]$. Una conjunción frontera conmutativa y asociativa se llama *t-norma*.

Una *disyunción* es una función $\mathscr{D}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ que es creciente en ambos argumentos y que satisface $\mathscr{D}(1,0) = \mathscr{D}(0,1) = \mathscr{D}(1,1) = 0$ y $\mathscr{D}(0,0) = 0$. Se llama *disyunción frontera* si además cumple $\mathscr{D}(0,x) = x$ para cada x en $[0,1]$. Un disyunción frontera conmutativa y asociativa se llama *t-conorma*.

Una *negación* es una función decreciente $\mathscr{N}\colon [0,1] \to [0,1]$ que satisface $\mathscr{N}(0) = 1$ y $\mathscr{N}(1) = 0$. Se llama *involutiva* si para cada $x \in [0,1]$, $\mathscr{N}(\mathscr{N}(x)) = x$. La negación estándar $\mathscr{N}_s$ se define, para x en $[0,1]$, como $\mathscr{N}_s(x) = 1 - x$.

Dadas una negación involutiva $\mathscr{N}$, una conjunción $\mathscr{C}$ y una disyunción $\mathscr{D}$, la disyunción $\mathscr{N}$*-dual de* $\mathscr{C}$ es el operador definido como $\mathscr{D}_{\mathscr{C},\mathscr{N}}(x,y) = \mathscr{N}(\mathscr{C}(\mathscr{N}(x),\mathscr{N}(y)))$, y la conjunción $\mathscr{N}$*-dual de* $\mathscr{D}$ es el operador definido como $\mathscr{C}_{\mathscr{D},\mathscr{N}}(x,y) = \mathscr{N}(\mathscr{D}(\mathscr{N}(x), \mathscr{N}(y)))$, para cada x,y en $[0,1]$. Se puede comprobar que el operador $\mathscr{N}$-dual de una t-norma es una t-conorma, y viceversa.

Una *implicación* $\mathscr{I}$ es una función $\mathscr{I}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ que satisface $\mathscr{I}(1,0) = 0$, $\mathscr{I}(1,1) = \mathscr{I}(0,1) = \mathscr{I}(0,0) = 1$ y que es decreciente en el primer argumento y creciente en el segundo argumento. Si $\mathscr{I}$ satisface $\mathscr{I}(1,x) = x$ para cada x en $[0,1]$, se llama *implicación frontera*.

Sean $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ y $\mathscr{N}$ una conjunción frontera, una disyunción y una negación, respectivamente. La *S-implicación* $\mathscr{I}_{\mathscr{D},\mathscr{N}}$ basada en $\mathscr{D}$ y $\mathscr{N}$ se define, para x,y en $[0,1]$, como $\mathscr{I}_{\mathscr{D},\mathscr{N}}(x,y) = \mathscr{D}(\mathscr{N}(x),y)$. La *R-implicación* $\mathscr{I}_{\mathscr{C}}$ basada en $\mathscr{C}$ se define, para x,y en $[0,1]$, como $\mathscr{I}_{\mathscr{C}}(x,y) = \sup\{\gamma \in [0,1] \mid \mathscr{C}(x,\gamma) \leq y\}$. Tanto las S-implicaciónes como las R-implicaciónes son casos particulares de implicaciones frontera.

Dadas una negación involutiva $\mathscr{N}$ y una implicación $\mathscr{I}$, la *conjunción inducida por* $\mathscr{I}$ *y* $\mathscr{N}$ es el operador $\mathscr{C}_{\mathscr{I},\mathscr{N}}$ definido, para $x,y \in [0,1]$, como $\mathscr{C}_{\mathscr{I},\mathscr{N}}(x,y) = \mathscr{N}(\mathscr{I}(x,\mathscr{N}(y))$. No necesariamente es una t-norma.

2.2 Conjuntos Difusos y Relaciones Difusas

Un conjunto difuso A en un universo no vacío U se identifica con su función de pertenencia $A : U \to [0,1]$. La colección de todos los conjuntos difusos en U se denota por $\mathscr{F}(U)$.

Para cada α en $[0,1]$, el *conjunto (difuso) constante* $\hat{\alpha}$ se define, para x en U, como $\hat{\alpha}(x) = \alpha$. En el caso nítido, los únicos conjuntos constantes son $\emptyset$ y U.

Sean $A \in \mathscr{F}(U)$ y $\mathscr{N}$ una negación. El $\mathscr{N}$*-complemento* $A^{\mathscr{N}}$ *de* A se define como $A^{\mathscr{N}}(x) = \mathscr{N}(A(x))$ para todo $x \in U$.

Una relación binaria difusa R en U es un conjunto difuso en $U \times U$. R se llama *reflexiva* si $R(x,x) = 1$ para todo $x \in U$, *simétrica* si $R(x,y) = R(y,x)$ para todo $x,y \in U$, y *serial* si $\sup_{y \in U} R(x,y) = 1$ para cada $x \in U$. Cada relación difusa simétrica R cumple $R = R'$.

Dada una t-norma $\mathscr{T}$, R se llama $\mathscr{T}$*-transitiva* si para cada x, y, z en U, $\mathscr{T}(R(x,y),R(y,z)) \leq R(x,z)$. Si R es reflexiva, simétrica y $\mathscr{T}$-transitiva, se llama una *relación de* $\mathscr{T}$*-similitud*. Cuando $\mathscr{T} =$ mín, hablamos simplemente de una *relación de similitud*. Como el mínimo es la t-norma más grande, una relación de similitud es una relación de $\mathscr{T}$-similitud para cada t-norma $\mathscr{T}$.

2.3 Aproximación Inferior y Superior en la Teoría de los Conjuntos Rugosos

2.3.1 Modelo de Pawlak

Un *espacio de aproximación clásico* es un par (U,R) donde U es un conjunto no vacío U y R es una relación de equivalencia en U. La aproximación rugosa de un conjunto nítido A en U por R es el par de conjuntos $(R{\downarrow}A, R{\uparrow}A)$ definidos, para $x \in U$, como

$$x \in R{\downarrow}A \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y \in U)((y,x) \in R \Rightarrow y \in A), \qquad (1)$$

$$x \in R{\uparrow}A \quad \Leftrightarrow \quad (\exists y \in U)((y,x) \in R \wedge y \in A). \qquad (2)$$

Un par (A_1,A_2) de conjuntos en U se llama *conjunto rugoso* en (U,R) si hay un conjunto A en U tal que $A_1 = R{\downarrow}A$ y $A_2 = R{\uparrow}A$. El modelo original de Pawlak se ha generalizado de varias maneras. Abajo, nos centramos en el caso donde A y R son un conjunto difuso y una relación difusa en U respectivamente.

2.3.2 Modelo Difuso-Rugoso Basado en Implicaciones y Conjunciones

En esta sección, consideramos un *espacio de aproximación difuso*, es decir, un par (U,R) donde U es en un conjunto no vacío U y R una relación binaria difusa en U. Muchas definiciones de conjuntos rugosos difusos surgen como extensiones fieles de las ecuaciones (1) y (2) al caso $[0,1]$-valorado. En particular, Dubois y Prade trabajaron con una

relación de similitud R, y remplazaron la implicación y la conjunción booleanas por la S-implicación $\mathscr{I}_{\text{máx},\mathscr{N}_s}$ (implicación de Kleene-Dienes) y el mínimo, respectivamente. En [5], se propuso el siguiente formato para las aproximaciones usando implicaciones y conjunciones generales.

Definición 1 *Sea (U,R) un espacio de aproximación difuso, A un conjunto difuso en U, $\mathscr{I}$ una implicación y $\mathscr{C}$ una conjunción. La* aproximación $(\mathscr{I},\mathscr{C})$-difusa-rugosa *de A por R es el par de conjuntos difusos $(R{\downarrow_{\mathscr{I}}}A, R{\uparrow_{\mathscr{C}}}A)$ definidos, para $x \in U$, como*

$$(R{\downarrow_{\mathscr{I}}}A)(x) = \inf_{y\in U} \mathscr{I}(R(y,x),A(y)) \quad (3)$$

$$(R{\uparrow_{\mathscr{C}}}A)(x) = \sup_{y\in U} \mathscr{C}(R(y,x),A(y)). \quad (4)$$

Un par (A_1,A_2) de conjuntos difusos en U se llama un conjunto difuso rugoso *en (U,R) si hay un conjunto difuso A en U tal que $A_1 = R{\downarrow_{\mathscr{I}}}A$ y $A_2 = R{\uparrow_{\mathscr{C}}}A$.*

La elección de la conjunción y de la implicación se hace típicamente guiada por las propiedades que se requieren a las aproximaciones correspondientes. Algunas propiedades que se imponen habitualmente se muestran en la Tabla 1: dualidad (D); inclusión de la aproximación inferior en A y de A en la aproximación superior (INC); monotonía de los conjuntos (MC) y de las relaciones (MR); interacción con la intersección y la unión (IU), idempotencia (ID), invariancia por las aproximaciones de los conjuntos vacío y universo (VU), y de los conjuntos constantes (CC). Téngase en cuenta que en un espacio de aproximación de Pawlak, todas se cumplan, salvo (CC), que se define exclusivamente para los conjuntos difusos.

Tabla 1: Propiedades de las aproximaciones inferior y superior.

Referencia	Definición
(D)	$R{\downarrow}A = (R{\uparrow}A^{\mathscr{N}})^{\mathscr{N}}$
(INC)	$R{\downarrow}A \subseteq A \subseteq R{\uparrow}A$
(MC)	$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} R{\downarrow}A \subseteq R{\downarrow}B \\ R{\uparrow}A \subseteq R{\uparrow}B \end{cases}$
(MR)	$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow \begin{cases} R_1{\downarrow}A \supseteq R_2{\downarrow}A \\ R_1{\uparrow}A \subseteq R_2{\uparrow}A \end{cases}$
(IU)	$R{\downarrow}(A\cap B) = R{\downarrow}A \cap R{\downarrow}B$ $R{\uparrow}(A\cup B) = R{\uparrow}A \cup R{\uparrow}B$
(ID)	$R{\downarrow}(R{\downarrow}A) = R{\downarrow}A$ $R{\uparrow}(R{\uparrow}A) = R{\uparrow}A$
(VU)	$R{\downarrow}\emptyset = \emptyset = R{\uparrow}\emptyset$ $R{\downarrow}U = U = R{\uparrow}U$
(CC)	$R{\downarrow_{\mathscr{I}}}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$ $R{\uparrow_{\mathscr{C}}}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$

En lo que sigue, asumimos que (U,R), (U,R_1) y (U,R_2) son espacios de aproximación difusos, A y B son conjuntos difusos en U, $\mathscr{I}$ es una implicación, $\mathscr{C}$ una conjunción y $\mathscr{N}$ una negación *involutiva*. Se pueden comprobar los siguientes resultados (cf. [5]).

Proposición 1 *Si $\mathscr{C}$ es la conjunción inducida por $\mathscr{I}$ y $\mathscr{N}$, es decir, $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathscr{I},\mathscr{N}}$, entonces (D) se cumple.*

Esta propiedad se cumple en particular cuando el par $(\mathscr{I},\mathscr{C})$ consiste en una S-implicación $\mathscr{I}_{\mathscr{D},\mathscr{N}}$ y una conjunción $\mathscr{C}$, donde $\mathscr{D}$ es la disyunción $\mathscr{N}$-dual de $\mathscr{C}$, y también cuando $(\mathscr{I},\mathscr{C})$ consiste en una R-implicación $\mathscr{I}_{\mathscr{T}}$ y una t-norma $\mathscr{T}$ continua por la izquierda tal que $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{\mathscr{I}_{\mathscr{T}}}$.

Proposición 2 *Si R es reflexiva, $\mathscr{I}$ es una implicación frontera y $\mathscr{C}$ es una conjunción frontera, entonces (INC) se cumple.*

Proposición 3 *(MC), (MR) y (IU) siempre se cumplen.*

Proposición 4 *Si R es reflexiva y $\mathscr{T}$-transitiva, donde $\mathscr{T}$ es una t-norma continua por la izquierda y $(\mathscr{I},\mathscr{C})$ consiste en la R-implicación $\mathscr{I}_{\mathscr{T}}$, y $\mathscr{T}$; o $(\mathscr{I},\mathscr{C})$ consiste en la S-implicación $\mathscr{I}_{\mathscr{S},\mathscr{N}}$ basada en la t-conorma $\mathscr{N}$-dual de $\mathscr{T}$ con respecto a una negación involutiva $\mathscr{N}$, y $\mathscr{T}$, (ID) se cumple.*

Proposición 5 *Si R es serial, (VU) se cumple.*

Proposición 6 *Si R es reflexiva, $\mathscr{I}$ una implicación frontera y $\mathscr{C}$ una conjunción frontera, entonces (CC) se cumple.*

3 Modelos Difusos-Rugosos Tolerantes al Ruido

Debido al uso del ínf y del sup en las ecuaciones (3) y (4), el resultado de las aproximaciones se determina por un solo elemento (en el caso de que U sea finito). Esta característica puede resultar perjudicial en un contexto de análisis de datos, considerando que algunos datos muestrales pueden ser erróneas (ruidosas), y por tanto, pueden perturbar las aproximaciones inferior y superior y así debilitar los algoritmos de aprendizaje automático que las emplean; este efecto se estudió por ejemplo en [7]. Varios autores han considerado maneras para esquivar este problema, proponiendo alternativas robustas para la aproximación inferior y superior. Abajo, discutimos cuatro enfoques bien conocidos. A lo largo de esta sección, asumimos que A es un conjunto difuso en un espacio de aproximación difuso (U,R) con U finito.

Empezamos por el modelo de β-precisión de Fernández-Salido y Murakami [12]. En esencia, este modelo remplaza el ínf y el sup por operadores de agregación menos estrictos, los cuales recordamos primero.

Definición 2 *Dados una t-norma $\mathscr{T}$, una t-conorma $\mathscr{S}$, $\beta \in [0,1]$ y $n > 1$, la quasi-t-norma $\mathscr{T}_\beta$ y la quasi-t-conorma S_β de β-precisión de orden n son funciones de $[0,1]^n$ en $[0,1]$ tal que para cada $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ en $[0,1]^n$,*

$$\mathscr{T}_\beta(\mathbf{x}) = \mathscr{T}(y_1,\ldots,y_{n-m}),$$
$$\mathscr{S}_\beta(\mathbf{x}) = \mathscr{S}(z_1,\ldots,z_{n-p}),$$

donde $y_i = x_j$ si x_j es el i-ésimo elemento más grande de $\mathbf{x}$, $z_i = x_j$ si x_j es el i-ésimo elemento más pequeño de $\mathbf{x}$, y

$$m = \text{máx}\left\{ i \in \{0,\ldots,n\} \mid i \leq (1-\beta)\sum_{j=1}^{n} x_j \right\},$$
$$p = \text{máx}\left\{ i \in \{0,\ldots,n\} \mid i \leq (1-\beta)\sum_{j=1}^{n} (1-x_j) \right\}.$$

Definición 3 *Sea $\mathscr{N}$ una negación involutiva, $\mathscr{T}$ una t-norma, $\mathscr{S}$ su t-conorma $\mathscr{N}$-dual y $\beta \in [0,1]$. Dadas una implicación $\mathscr{I}$ y una conjunción $\mathscr{C}$, la aproximación β-precisión de A por R es el par de conjuntos difusos $(R{\downarrow}_{\mathscr{I},\mathscr{T}_\beta}A, R{\uparrow}_{\mathscr{C},\mathscr{I}_\beta}A)$, definidos, para x en U, como*

$$(R{\downarrow}_{\mathscr{I},\mathscr{T}_\beta}A)(x) = \mathop{\mathscr{T}_\beta}_{y\in U}\langle \mathscr{I}(R(y,x),A(y))\rangle,$$
$$(R{\uparrow}_{\mathscr{C},\mathscr{I}_\beta}A)(x) = \mathop{\mathscr{S}_\beta}_{y\in U}\langle \mathscr{C}(R(y,x),A(y))\rangle.$$

En otras palabras, controlados por β, los elementos más pequeños no se toman en cuenta en el cálculo de la aproximación inferior. Por analogía, los elementos más grandes no afectan a la aproximación superior. Además, el uso de t-normas y t-conormas distintas a mín y máx permiten una interacción mayor entre los argumentos a agregar.

Una solución alternativa es "ahogar" el conjunto difuso A por un nivel de incertidumbre, como pasa en el modelo de precisión variable difuso-rugoso (PVDR) de Zhao et al. [14].

Definición 4 *Dadas una implicación $\mathscr{I}$, una conjunción $\mathscr{C}$, una negación $\mathscr{N}$, y $\alpha \in [0,1)$, la aproximación de precisión variable α de A por R es el par de conjuntos difusos $(R{\downarrow}_{\mathscr{I},\alpha}A, R{\uparrow}_{\mathscr{C},\alpha}A)$, definidos, para x en U, como*

$$(R{\downarrow}_{\mathscr{I},\alpha}A)(x) = \inf_{y\in U} \mathscr{I}(R(y,x), \text{máx}\{\alpha, A(y)\}),$$
$$(R{\uparrow}_{\mathscr{C},\alpha}A)(x) = \sup_{y\in U} \mathscr{C}(R(y,x), \text{mín}\{\mathscr{N}(\alpha), A(y)\}).$$

Como tal, los elementos con grados de pertenencia muy bajos a A son suavizados por un nivel de incertidumbre α para limitar su impacto en la aproximación inferior, mientras lo contrario ocurre para la aproximación superior.

El siguiente modelo de conjuntos rugosos por cuantificadores difusos (CRCD) [2] difiere bastante de los modelos anteriores, ya que no depende de implicaciones y conjunciones, sino que emplea la noción de cuantificador difuso, extendiendo el modelo nítido de conjuntos rugosos de precisión variable (CRPV) de Ziarko [15].

Definición 5 *Un cuantificador difuso creciente regularmente es una función $Q\colon [0,1] \to [0,1]$ creciente que satisface $Q(0) = 0$ y $Q(1) = 1$.*

Definición 6 *Dado un par (Q_u, Q_l) de cuantificadores difusos crecientes regularmente, la aproximación cuantificada por (Q_u, Q_l) de A por R es el par de conjuntos difusos $(R{\downarrow}_{Q_u}A, R{\uparrow}_{Q_l}A)$ definidos, para x en U, como*

$$(R{\downarrow}_{Q_u}A)(x) = \begin{cases} Q_u\left(\frac{|Rx\cap A|}{|Rx|}\right) & si\ Rx \neq \emptyset \\ 1 & si\ Rx = \emptyset \end{cases}$$
$$(R{\uparrow}_{Q_l}A)(x) = \begin{cases} Q_l\left(\frac{|Rx\cap A|}{|Rx|}\right) & si\ Rx \neq \emptyset \\ 1 & si\ Rx = \emptyset. \end{cases}$$

donde Rx es el conjunto difuso en U definido como $Rx(y) = R(y,x)$ para y en U, y $|\cdot|$ denota cardinalidad.

En la interpretación propuesta por [2], x pertenece a $R{\downarrow}_{Q_u}A$ en el grado que "la mayoría" de los elementos relacionados con x pertenecen a A, y a $R{\uparrow}_{Q_l}A$ en el grado que "por lo menos algunos" elementos relacionados con x pertenecen a A.

El último modelo que consideramos [4], remplaza ínf y sup en las ecuaciones (3) y (4) por agregaciones de tipo OWA (promedio ponderado ordenado), cuya definición se recuerda primero.

Definición 7 *Dados una secuencia D de n valores escalares y un vector de pesos $W = \langle w_1,\ldots,w_n\rangle$ de longitud n, tal que $w_i \in [0,1]$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, y dada la permutación σ de $\{1,\ldots,n\}$ tal que $d_{\sigma(i)}$ es el i-ésimo valor más grande de D, el* operador OWA *actuando en D produce el valor:*

$$\text{OWA}_W(D) = \sum_{i=1}^{n} w_i d_{\sigma(i)}.$$

Definición 8 *Dadas una implicación $\mathscr{I}$ y una conjunción $\mathscr{C}$, y vectores de pesos OWA W_1 y W_2 de longitud n, la aproximación ponderada por (W_1, W_2) de A por R es el par de conjuntos difusos $(R{\downarrow}_{\mathscr{I},W_1}A, R{\uparrow}_{\mathscr{C},W_2}A)$ definidos, para $x \in U$, como*

$$(R{\downarrow}_{\mathscr{I},W_1}A)(x) = \mathop{\text{OWA}_{W_1}}_{y\in U}\langle \mathscr{I}(R(y,x),A(y))\rangle,$$
$$(R{\uparrow}_{\mathscr{C},W_2}A)(x) = \mathop{\text{OWA}_{W_2}}_{y\in U}\langle \mathscr{C}(R(y,x),A(y))\rangle.$$

Variando los vectores de pesos en el operador OWA, se obtienen diferentes modelos de conjuntos rugosos difusos, como ejemplos podemos destacar aquellos propuestos en [7].

4 Propiedades

En esta sección, evaluamos los cuatro modelos robustos de la sección anterior con respecto a las propiedades de la Tabla 1. Empezamos por el model de β-precisión. Debido a la monotonicidad de las conectivas lógicas difusas implicadas, (MC) y (MR) siempre se cumplen. Para (D), tenemos la siguiente proposición.

Proposición 7 *Sea $\mathscr{T}$ una t-norma y sea $\mathscr{S}$ la t-conorma dual con respecto a la negacíon estándar $\mathscr{N}_s$. Si $\mathscr{C}$ es la conjunción inducida por $\mathscr{I}$ y $\mathscr{N}_s$, es decir, $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathscr{I},\mathscr{N}_s}$, (D) se cumple para $\downarrow_{\mathscr{I},\mathscr{T}_\beta}$ y $\uparrow_{\mathscr{C},\mathscr{S}_\beta}$.*

Esta propiedad no se cumple en general para $\mathscr{N}$ involutiva, ya que en ese caso $\mathscr{T}_\beta$ y $\mathscr{S}_\beta$ no necesariamente descartan la misma cantidad de elementos. Las propiedades restantes no son válidas. El siguiente ejemplo lo demuestra para (INC).

Ejemplo 1 *Sea $\mathscr{I}$ una implicación frontera y $\mathscr{C}$ una conjunción frontera. Sean $U = \{y_0, \ldots, y_{10}\}$, A un conjunto difuso tal que $A(y_i) = \frac{i}{10}$ para cada $i \in \{0, \ldots, 10\}$, y R una relación de similitud tal que $R(y_i, y_j) = 1$ para cada $i, j \in \{0, \ldots, 10\}$. Sean $(\mathscr{T}, \mathscr{S})$ iguales a $(\min, \max)$ y $\beta = 0.8$. Tenemos que $\mathscr{I}(R(z,x), A(z)) = A(z) = \mathscr{C}(R(z,x), A(z))$ para cada $x, z \in U$. Se obtiene que $m = p = 1$, así que en la aproximación inferior (resp., superior) el valor más bajo (resp., más alto) se omite. Obtenemos para cada $x \in U$ que*

$$\min_{y \in U} \mathscr{I}(R(y,x), A(y)) = \min_{y \in U} A(y) = 0.1,$$

lo que implica que $(R\downarrow_{\mathscr{I},\min_{0.8}} A)(y_0) > A(y_0)$. A continuación,

$$\max_{y \in U} \mathscr{C}(R(y,x), A(y)) = \max_{y \in U} A(y) = 0.9,$$

y por lo tanto $(R\uparrow_{\mathscr{C},\max_{0.8}} A)(y_{10}) < A(y_{10})$.

Para el modelo PVDR, (MC), (MR) y (IU) son válidas. Las pruebas de estas propiedades, al igual que las de las proposiciones abajo, son completamente análogas a las obtenidas para el modelo basado en implicaciones y conjunciones.

Proposición 8 *Si $\mathscr{C}$ es la conjunción inducida por $\mathscr{I}$ y $\mathscr{N}$, es decir, $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathscr{I},\mathscr{N}}$, (D) se cumple para $\downarrow_{\mathscr{I},\alpha}$ y $\uparrow_{\mathscr{C},\alpha}$.*

Proposición 9 *Si R es una relación difusa reflexiva y $\mathscr{T}$-transitiva, donde $\mathscr{T}$ es una t-norma que es continua por la izquierda, y el par $(\mathscr{I}, \mathscr{C})$ consiste en la R-implicación $\mathscr{I}_{\mathscr{T}}$ y la t-norma $\mathscr{T}$, (ID) se cumple para $\downarrow_{\mathscr{I},\alpha}$ y $\uparrow_{\mathscr{C},\alpha}$.*

Las propiedades restantes no se cumplen en general para este modelo. Abajo consideramos un ejemplo para (VU).

Ejemplo 2 *Sean $\mathscr{I}$, $\mathscr{C}$, U y R definidos como en el Ejemplo 1, y sean $\alpha = 0.1$ y $\mathscr{N} = \mathscr{N}_s$. Obtenemos para $x \in U$ que*

$$(R\downarrow_{\mathscr{I},\alpha} \emptyset)(x) = \inf_{y \in U} \mathscr{I}(1, \max\{0.7, \emptyset(y)\}) = 0.1,$$
$$(R\uparrow_{\mathscr{C},\alpha} U)(x) = \sup_{y \in U} \mathscr{C}(1, \min\{0.3, U(y)\}) = 0.9.$$

Como el modelo nítido de CRPV de Ziarko [15] viola (D), (INC), (MR), (IU) and (ID), el modelo de CRCD, que lo extiende, sufre las mismas limitaciones. Por otro lado, como se usan cuantificadores difusos crecientes, (MC) se cumple. Finalmente, se puede comprobar que (CC) no se cumple en general, pero sí podemos garantizar la propiedad (VU).

Proposición 10 *Si R es una relación serial, (VU) se cumple para el modelo CRCD.*

Por último, el modelo basado en OWA siempre satisface las propiedades (MC) y (MR) de monotonicidad, y además cumple la dualidad (D) bajo ciertas condiciones.

Proposición 11 *Sea W_1 un vector de pesos OWA de longitud n. Si el par $(\mathscr{I}, \mathscr{C})$ consiste en una implicación $\mathscr{I}$ y la conjunción inducida por $\mathscr{I}$ y $\mathscr{N}_S$, es decir, $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathscr{I},\mathscr{N}_S}$, y W_2 es el vector de pesos OWA definido por $(W_2)_i = (W_1)_{n-i+1}$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, (D) se cumple para $\mathscr{N} = \mathscr{N}_S$.*

Las demás propiedades no se cumplen en general. El siguiente contraejemplo lo demuestra para (VU), (CC) y (INC).

Ejemplo 3 *Sea $U = \{x, y\}$ y R una relación de similitud tal que $R(x,y) = 0.5$. $\mathscr{I}$ y $\mathscr{C}$ se definen, para x, y en $[0,1]$, como $\mathscr{I}(x,y) = \min(1, 1-x+y)$ y $\mathscr{C}(x,y) = \max(0, x+y-1)$. Además, $W_1 = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ y $W_2 = \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle$. Calculamos el grado de pertenencia de la aproximación inferior de $\emptyset = \hat{0}$ y la aproximación superior de $U = \hat{1}$ para x:*

$$(R\downarrow_{\mathscr{I},W_1} \hat{0})(x) = \frac{1}{6},$$
$$(R\uparrow_{\mathscr{C},W_2} \hat{1})(x) = \frac{5}{6}.$$

La Tabla 2 resume los resultados de nuestro análisis. Un ✓signica que la propiedad correspondiente siempre se cumple, mientras que ✯ se usa para indicar que existen condiciones bajo las cuales la propiedad se cumple. En los casos restantes, escribimos ✗. La conclusión más importante parece ser que ninguno de los modelos tolerantes al ruido es capaz de conservar todas las propiedades del modelo original de Pawlak y de la extensión basada en implicaciones y conjunciones, incluso cuando R es una relación de similitud. Si se requiere la dualidad, solo los modelos de β-precisión, de PVDR y de OWA sirven; sin embargo, ya que en muchas aplicaciones de análisis de datos solo se usa

la aproximación inferior, este problema puede ser de menor importancia. Un defecto más grave, quizás, es la violación de (MR) por el modelo CRCD: efectivamente, cuando la granularidad de los datos impuesta por la relación difusa R se hace más fina, esperamos por ejemplo que la aproximación inferior no se reduzca.

Tabla 2: Evaluación de las propiedades

propiedad	IC	β-PREC	PVDR	CRCD	OWA
(D)	☆	☆	☆	✗	☆
(INC)	☆	✗	✗	✗	✗
(MC)	✓	✓	✓	✓	✓
(MR)	✓	✓	✓	✗	✓
(IU)	✓	✗	✓	✗	✗
(ID)	☆	✗	☆	✗	✗
(VU)	☆	✗	✗	☆	✗
(CC)	☆	✗	✗	✗	✗

5 Conclusiones y Trabajo Futuro

En este artículo, hemos presentado un resumen de algunos modelos actuales de conjuntos rugosos difusos diseñados para manejar datos con ruido, y los hemos evaluado con respecto a una serie de propiedades deseables. Hemos comprobado que, en comparación con el modelo basado en implicaciones y conjunciones, menos propiedades del modelo clásico de Pawlak se mantienen, lo cual parece ser el precio lógico a pagar si queremos tener una mayor robustez. El uso práctico de cada modelo, sin embargo, se determinará por su rendimiento en aplicaciones concretas. En particular, en el contexto de análisis de datos, como trabajo futuro pensamos evaluar de forma experimental la estabilidad de las aproximaciones de las clases de decisión cuando los datos de atributos condicionales y de clase están contaminados por ruido.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Ciencias y Tecnología bajo el Proyecto con referencia TIN2011-28488, y por el Fondo Especial de Investigación (BOF) de la Universidad de Gante. Lluis Godo reconoce financiación parcial por parte del Proyecto MINECO con referencia TIN2012-39348-C02-01.

Referencias

[1] Boixader, D., Jacas, J., Recasens, J.: Upper and lower approximation of fuzzy sets. International Journal of General Systems **29**, 555-568 (2000)

[2] Cornelis, C., De Cock, M., Radzikowska, A.: Vaguely quantified rough sets. In: Proceedings of 11th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing (RSFDGrC2007). (2007) 87–94

[3] Cornelis, C., Hurtado Martín, G., Jensen, R., Ślęzak, D.: Attribute selection with fuzzy decision reducts. Information Sciences **180**(2) (2010) 209–224

[4] Cornelis, C., Verbiest, N., Jensen, R.: Ordered weighted average based fuzzy rough sets. In: Proceedings of the 5th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology (RSKT2010). (2010) 78–85

[5] D'eer, L., Verbiest, N., Cornelis, C., Godo, L.: Implication-conjunction based models of fuzzy rough sets: definitions and properties. Proceedings of RSFDGrC, Lecture Notes in Artificial Intelligence **8170** (2013) 169–179

[6] Dubois, D., Prade, H.: Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. International Journal of General Systems **17** (1990) 191–209

[7] Hu, Q., Zhang, L., An, S., Zhang, D., Yu, D.: On robust fuzzy rough set models. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **20**(4) (2012) 636 – 651

[8] Jensen, R., Shen, Q.: Fuzzy-rough sets assisted attribute selection. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **15**(1) (2007) 73–89

[9] Morsi, N., Yakout, M.: Axiomatics for fuzzy rough set. Fuzzy Sets Systems **100** (1998) 327–342

[10] Pawlak, Z.: Rough sets. International journal of computer and information sciences **11**(5) (1982) 341–356

[11] Radzikowska, A., Kerre, E.: A comparative study of fuzzy rough sets. Fuzzy Sets and Systems **126** (2002) 137–155

[12] Fernández-Salido, J.M., Murakami, S.: Rough set analysis of a general type of fuzzy data using transitive aggregations of fuzzy similarity relacións. Fuzzy Sets and Systems **139** (2003) 635–660

[13] Verbiest, N., Cornelis, C., Herrera, F.: FRPS: A fuzzy rough prototype selection method. Pattern Recognition **46**(10) (2013) 2770–2782

[14] Zhao, S., Tsang, E.C.C., Chen, D.: The model of fuzzy variable precision rough sets. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **17**(2) (2009) 451–467

[15] Ziarko, W.: Variable Precision Rough Set Model. Journal of Computer and System Sciences **46** (1993) 39–59

ELICITACIÓN DE PROBABILIDADES DIFUSAS

Eloy Vicente Cestero[1], **Alfonso Mateos Caballero**[1], **Antonio Jiménez Martín**[1]

[1] *Universidad Politécnica de Madrid. Departamento de Inteligencia Artificial*,
vicentecestero@upm.es, {amateos,ajimenez}@fi.upm.es

Resumen

En este trabajo exponemos un método interactivo cuyo objetivo es extraer de los expertos un número difuso que indique la probabilidad subjetiva de un suceso. Este método, basado en los clásicos métodos de apuestas y loterías para la elicitación de probabilidades, evita el uso de escalas de términos lingüísticos representados por números difusos con amplitud de soporte y simetría previamente establecidos, permitiendo a cada experto una mayor o menor precisión y libertad en el establecimiento de sus juicios probabilísticos. Además, establecemos una función que mide la calidad del juicio probabilístico expresado mediante la agregación de dos componentes que miden la coherencia y la precisión mostrada por el experto durante el proceso de educción.

Palabras Clave: Elicitación de probabilidades, números difusos trapezoidales, métodos de apuestas y loterías.

1 INTRODUCCIÓN.

En multitud de situaciones el enfoque subjetivo es el único posible para la asignación de probabilidades de ocurrencia de sucesos para los cuales no se tiene experiencia ni datos previos, ni existe la posibilidad de poner en práctica mecanismos empíricos para la obtención de datos. Abbas et al [1], Morgan y Henrion [5] y Von Holstein y Matheson [12], entre otros autores, han detallado algunos de los métodos de asignación de probabilidades subjetivas.

El Protocolo SRI (Standford Research Institute) [12, 7, 9] es un procedimiento recomendable para la elicitación de probabilidades subjetivas que trata de evitar la aparición de sesgos en los juicios probabilísticos de los expertos [8]. Sin embargo, en multitud de ocasiones el ambiente en el que se desarrolla un sistema de ayuda a la decisión es de imprecisión y vaguedad, de modo que los expertos son incapaces de dar valores concretos a las probabilidades de ocurrencia de los distintos escenarios y la forma más sencilla de proceder en estos casos consiste en asignar intervalos numéricos.

En los últimos años, se están introduciendo razonamientos de lógica difusa que constituye el paradigma ideal cuando se necesitan modelizar conceptos vagos o imprecisos [2, 4, 10, 11], ya que los números difusos constituyen una generalización de los intervalos numéricos.

Cuando los expertos son incapaces de decidirse por un valor concreto al asignar probabilidades a un suceso, puede ser útil, y de hecho es muy común, establecer escalas de términos lingüísticos como “improbable”< “poco probable”< “probabilidad media”< “probable”< “seguro” para asignar probabilidades sin exigir un compromiso excesivo del experto en cuanto a la precisión de sus juicios. Estos términos lingüísticos se pueden asociar a números difusos trapezoidales normalizados con soporte en [0,1] para poder operar con ellos dentro de una aritmética adecuada.

Sin embargo, esta manera de proceder simplifica demasiado el proceso de asignación de probabilidades, ya que transforma el intervalo [0,1] en un conjunto discreto. Los expertos pueden tener dificultades para elegir entre dos términos lingüísticos consecutivos, y los resultados de elegir uno u otro pueden ser significativamente diferentes. Además, el uso de una escala rígida de términos lingüísticos mediante números difusos con una amplitud fija lleva a una pérdida de información muy valiosa, como es la mayor o menor precisión en los juicios de los expertos a la hora de asignar probabilidades, por otro lado la simetría de los números utilizados en la escala tampoco tiene por qué ser adecuada en todos los casos ni para todos los expertos.

Entonces, en lugar de pedirle al experto que asigne un valor lingüístico de una escala, desarrollaremos un proceso interactivo para asignar un número difuso a una probabilidad subjetiva, de modo que dicho número represente fielmente el valor preferencial de la probabilidad a asignar y la precisión que el experto tiene en tal afirmación.

En la Sección 2 desarrollamos la Teoría de la Probabilidad Lingüística extendiendo a la Teoría Clásica de la Probabilidad y adaptamos este marco de trabajo a los números difusos trapezoidales.

En la Sección 3 describimos los métodos clásicos de asignación de probabilidades subjetivas para variables discretas basados en apuestas y loterías y adaptamos dichos métodos al ambiente difuso mediante el uso de números difusos trapezoidales.

Finalmente, en la Sección 4, construimos una función de evaluación de la calidad del juicio probabilístico expresado por el experto.

2 TEORÍA DE LA PROBABILIDAD LINGÜÍSTICA.

Toda la Teoría Clásica de la Probabilidad se puede construir a partir de los bien conocidos axiomas de Kolmogorov. Nuestro objetivo en esta Sección es extender la teoría clásica al paradigma difuso, de modo que podamos definir una variable aleatoria lingüística.

Un *número difuso trapezoidal normalizado* con soporte en el intervalo $[a_1,a_4]$ de la recta real es una tupla (a_1,a_2,a_3,a_4) con $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ junto con una función $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{si } a_1 \leq x < a_2 \\ 1, & \text{si } a_2 \leq x < a_3 \\ \frac{x-a_4}{a_3-a_4}, & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{si } a_4 < x \end{cases}$$

que indica el grado de pertenencia de cada valor $x \in \mathbb{R}$ al número $\tilde{A}$. Denotaremos por $\mathbb{R}^{\mathscr{TF}}$ al conjunto formado por todos estos números. Si Además, $a_2 = a_3$ el número se denomina "triangular".

Denotaremos por $\oplus, \otimes, \ominus$ y $\oslash$ a las operaciones aritméticas usuales entre números difusos trapezoidales descritas en [4].

Dado un número difuso normalizado trapezoidal $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\mathscr{TF}}$ y $\alpha \in [0,1]$ se define el $\alpha - corte$ de $\tilde{A}$ como :

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, & \text{si } \alpha \in (0,1] \\ \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

donde $\overline{X}$ representa la clausura de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$.

Nótese que los números difusos extienden de modo natural a los números reales: El número $a \in \mathbb{R}$ se puede representar mediante la función de pertenencia $\mu_{\tilde{a}} = I_{\{a\}}$ donde I es el indicador de un conjunto.

También los intervalos de números reales se pueden representar por medio de números difusos, de modo que el intervalo $A = [a,b]$ corresponde a la función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}} = I_A$.

En particular, un número real a se puede escribir como número difuso trapezoidal normalizado como $\tilde{a} = (a,a,a,a)$, y el intervalo $[a,b]$ de números reales se puede escribir como $\tilde{A} = (a,a,b,b)$.

El conjunto $\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ de los números difusos con soporte en $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo con la siguiente distancia [4]:

$$d_\infty : \mathbb{R}^{\mathscr{F}} \times \mathbb{R}^{\mathscr{F}} \to \mathbb{R},$$
$$d_\infty\left(\tilde{A},\tilde{B}\right) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H\left(\tilde{A_\alpha},\tilde{B_\alpha}\right),$$

con $d_H(X,Y)$ la distancia de Hausdorff en el espacio métrico completo de los intervalos cerrados y acotados de la recta real.

Esta estructura permite definir la convergencia de una sucesión de números difusos o el concepto de serie convergente, fundamental para poder extender el tercer axioma de Kolmogorov a los números difusos.

Los tres axiomas de Kolmogorov se pueden extender a los números difusos normalizados de la siguiente forma [4]:

Un espacio probabilístico difuso es una terna $(\Omega, \mathscr{H}, p^{\mathscr{F}})$ formada por el espacio de eventos Ω de un experimento aleatorio, una σ-álgebra $\mathscr{H}$ sobre el espacio de eventos y una función $p^{\mathscr{F}} : \mathscr{H} \to \mathbb{R}^{\mathscr{F}}$ verificando:

- Axioma 1: $\tilde{0} \leq p^{\mathscr{F}}(E) \leq \tilde{1}\ \forall E \in \mathscr{H}$.
- Axioma 2: $p^{\mathscr{F}}(\Omega) = \tilde{1}$.
- Axioma 3: Dada una familia de eventos disjuntos dos a dos $E_i \in \mathscr{H}$, con $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $p^{\mathscr{F}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \subseteq \sum_{i\in\mathbb{N}} p^{\mathscr{F}}(E_i)$. donde $\subseteq$ denota la operación de subsumción en $\mathbb{R}^{\mathscr{F}}$.

La aritmética usual de números difusos normalizados carece de elementos inversos respecto a las operaciones $\oplus$ y $\otimes$. Esto impide calcular la probabilidad del evento complementario a partir del evento natural mediante la resolución de una sencilla ecuación. Por tanto, es necesario incluir un cuarto axioma en la Teoría de la Probabilidad Lingüística para que ésta pueda extender a la teoría clásica:

- Axioma 4: $p^{\mathscr{F}}(A^c) = \tilde{1} \ominus p^{\mathscr{F}}(A)$.

Con estos cuatro axiomas se verifican las siguientes propiedades:

1. $p^{\mathscr{F}}(\varnothing) = \tilde{0}$, siendo $\varnothing$ un suceso imposible. Basta aplicar los axiomas 4 y 2.

2. $E \subseteq F \Rightarrow p^{\mathscr{F}}(E) \leq p^{\mathscr{F}}(F)$. La demostración puede verse en [4].

3. $p(E \bigcup F) = p(E) \oplus p(F) \ominus p(E \bigcap F)$. La demostración es similar al caso real.

Definido el espacio probabilístico difuso, podemos definir conceptos como el de variable aleatoria lingüística:

Una *variable aleatoria lingüística* es una función $X : \left(\Omega, \mathscr{H}, p^{\mathscr{F}}\right) \rightarrow D_X$ de un espacio de probabilidad difuso $\left(\Omega, \mathscr{H}, p^{\mathscr{F}}\right)$ en un universo de discurso D_X tal que $X^{-1}(x) \in \mathscr{H}$, $\forall x \in D_x$. En particular, si la imagen de X es un conjunto numerable entonces, se dice que la variable es discreta.

La *función de masa* de una variable aleatoria discreta es una función $f : X \rightarrow [0,1]^{\mathscr{F}}$ definida por $f(x) = p^{\mathscr{F}}(w \in \Omega : X(w) = x)$.

En la Teoría Clásica de la Probabilidad es conocido que un conjunto de valores $\pi_i \in [0,1]$ numerable, tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i = 1$, es la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta χ que tiene un conjunto numerable de estados d_i con probabilidad $P_\chi(d_i) = \pi_i$. El equivalente difuso de este teorema es el siguiente:

Teorema de representación [4]: Si $D = \{d_i : i \in I\}$ es un conjunto finito no vacío y $\{\tilde{\pi}_i : i \in I\}$ es un conjunto de números difusos tales que $\forall i \in I$ $\tilde{0} \leq \tilde{\pi}_i \leq \tilde{1}$ y $\tilde{\pi}_i \subseteq \tilde{1} \ominus \left[\bigoplus_{j \neq i} \tilde{\pi}_j\right] \in \mathbb{R}^{\mathscr{F}}$, entonces existe un espacio probabilístico difuso $\left(\Omega, \mathscr{H}, p^{\mathscr{F}}\right)$ y una variable aleatoria difusa discreta X sobre este espacio probabilístico tal que su función de masa es

$$f(d) = \begin{cases} \tilde{\pi}_i, & \text{si } d = d_i \text{ para algún } i \in I \\ \tilde{0}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3 ELICITACIÓN DE PROBABILIDADES DIFUSAS MEDIANTE APUESTAS Y LOTERÍAS.

Una vez descrito el marco de la Teoría de la Probabilidad Lingüística, nuestro propósito en esta Sección consiste en desarrollar un método interactivo analista-experto que permita extraer el juicio probabilístico del segundo mediante un número difuso.

Mediante la asignación de probabilidades subjetivas, se trata de establecer la función de probabilidad en el caso de una variable discreta y la función de distribución en el caso de que la variable aleatoria sea continua. En ambos casos se pueden desarrollar métodos directos o indirectos.

Los *métodos directos* para la derterminación de una función de probabilidad, en el caso discreto, consisten en encontrar un sistema completo de sucesos disjuntos dos a dos, y preguntar directamente al experto por la probabilidad de cada uno de los sucesos que forman dicho sistema. Es necesario garantizar los axiomas de Kolmogorov, ya que, de lo contrario, el experto no es coherente en sus juicios probabilísticos.

Estos métodos directos son muy rápidos y fáciles de implementar, sin embargo tienen el inconveniente de que no evitan los sesgos que se pueden producir durante el proceso de elicitación.

Los *métodos indirectos* [3, 6, 13], en el caso discreto, consisten en presentarle al experto la posibilidad de participar en dos juegos diferentes en los cuales se ganan o se pierden determinadas cantidades monetarias con ciertas probabilidades, comparadas con las probabilidades del suceso bajo estudio. El experto debe elegir en qué juego desea participar, y si es coherente elegirá siempre aquella alternativa que le resulte más favorable. El analista cambiará iterativamente las condiciones de los juegos propuestos y aprovechará las respuestas del decisor en cada iteración para inferir la probabilidad de A. Se desarrolla así un proceso que culmina con un par de juegos entre los que el experto es indiferente, y en este momento resulta fácil dar un valor para la probabilidad de A.

El analista puede cambiar las condiciones de los juegos modificando cantidades monetarias o probabilidades. Si cambia cantidades monetarias, el método se denomina *de elicitación mediante apuestas*. Si se modifican las probabilidades, se denomina *de elicitación mediante loterías*.

Asignación basada en apuestas. Para asignar las probabilidades de un suceso S mediante este método tomamos dos cantidades monetarias, x e y, y presentamos al experto las siguientes dos apuestas:

- A_1: Si ocurre el suceso S, usted gana x. Si no ocurre S, usted pierde y (gana $-y$).
- A_2: Si ocurre S, usted pierde x (gana $-x$). Si no ocurre S, usted gana y.

Ahora se le pregunta qué apuesta prefiere. Si ambas apuestas son indiferentes para el decisor entonces la ganancia esperada en ambas es igual:

$$xP(S) - yP(S^c) = -xP(S) + yP(S^c)$$

de donde

$$P(S) = \frac{y}{x+y}$$

En caso contrario, el analista debe reajustar progresivamente los valores x e y hasta obtener la indiferencia del experto. Es decir, si $A_1 \succeq A_2$ se reduce x y/o se incrementa y,

y se vuelven a presentar las dos apuestas (y viceversa si $A_2 \succeq A_1$) hasta encontrar dos apuestas indiferentes para el experto.

En multitud de ocasiones el experto tiene dificultades para identificar un único valor de indiferencia, de modo que el resultado de este método será en general un intervalo numérico de [0,1]

Asignación basada en loterías. Si en lugar de cambiar los valores monetarios, modificamos las probabilidades obtenemos el método basado en loterías, que consiste en lo siguiente:

Se consideran un premio muy bueno, que denotaremos por T, y un premio muy malo que denotaremos por W.

Se presentan al experto las siguientes loterías:

- L_1: Si ocurre el suceso S, usted gana el premio T. Si no ocurre el suceso S, usted gana el premio W.
- L_2: Con probabilidad p usted gana el premio T. Con probabilidad $1-p$ usted gana el premio W.

Si el experto es indiferente a ambas loterías, entonces $P(S) = p$, en caso contrario, el analista debe reajustar progresivamente el valor de p hasta obtener la indiferencia del experto. Es decir, si $L_1 \succeq L_2$ entonces el analista debe reducir el valor de p y volver a presentar ambas loterías al experto (y viceversa si $L_2 \succeq L_1$), hasta encontrar dos loterías indiferentes. En este método también resulta más fácil proporcionar un intervalo numérico en lugar de un único valor real.

Supongamos que del método de las loterías obtenemos el intervalo $[a,c]$ y del método de las apuestas obtenemos $[b,d]$.

- Si $[a,c] \bigcap [b,d] = \varnothing$, entonces el experto es incoherente.
- Si $[a,c] \bigcap [b,d] \neq \varnothing$, entonces:
  - Si ninguno de los intervalos está contenido en el otro, podemos suponer sin pérdida de genaralidad que $a < b \leq c < d$. Entonces, el experto piensa que la probabilidad del suceso es el número difuso trapezoidal $\tilde{\pi} = (a,b,c,d)$.
  - Si uno de los intervalos está contenido en otro, podemos suponer sin pérdida de genaralidad que $[a,c] \subseteq [b,d]$. Entonces el experto piensa que la probabilidad del suceso es el número difuso trapezoidal $\tilde{\pi} = (b,a,c,d)$.

Una vez que el experto ha asignado la probabilidad a un suceso, se le pide la probabilidad de otro suceso disjunto con el anterior, para lo cual se vuelven a desarrollar los dos métodos anteriores. Ahora bien, al igual que en el caso real exigíamos que la suma de las probabilidades de los sucesos (disjuntos dos a dos) fuera 1, en el paradigma difuso hemos de exigir que se verifiquen las condiciones del teorema de representación dado en la Sección 2, es decir que: $\tilde{\pi}_i \subseteq \tilde{1} \ominus \left[\bigoplus_{j \neq i} \tilde{\pi}_j \right]$, siendo $\tilde{\pi}_i$ las probabilidades asignadas sucesivamente a los eventos (recordemos que la aritmética usual de números difusos impide la resolución de ecuaciones sencillas ya que no existe elemento inverso respecto de las operaciones $\oplus$ y $\otimes$). De esta manera, en virtud del citado teorema, definimos una variable aleatoria discreta difusa.

4 CALIDAD DE LA INFORMACIÓN. MEDIDAS DE PRECISIÓN Y COHERENCIA.

La razón de utilizar los métodos indirectos de elicitación de probabilidades se encuentra precisamente, en reducir la influencia de las heurísticas utilizadas por el experto, que le llevan a incluir sesgos en sus juicios probabilísticos [8]. Además,, los protocolos de elicitación usuales [12] recomiendan el uso de varios métodos con objeto de poder contrastar la información suministrada con cada uno de ellos y poder discutir los resultados con el experto, o valorar la calidad de la información suministrada. De este modo, el método propuesto en la Sección 3 para la obtención de un número difuso que indique el juicio probabilístico del experto cumple con dichas recomendaciones. Además, la construcción de dicho número difuso permite valorar cuantitativamente la calidad de la información aportada.

En esta Sección vamos a dar dos medidas que informan sobre la coherencia y la precisión del experto en su juicio probabilístico. Finalmente, agregaremos ambas medidas en una función que indique la calidad de la información aportada.

Coherencia del Experto. Como decíamos en la Sección 3, el experto es incoherente si $[a,c] \bigcap [b,d] = \varnothing$, pero si $[a,c] \bigcap [b,d] = \{\xi\}$ entonces el número difuso que designa el juicio probabilístico dado por el experto es un número difuso triangular (a,ξ,d), ya que $\xi = b = c$. Sin embargo ¿podemos decir que el experto es incoherente si $[a,c] \bigcap [b,d] = \varnothing$, y no lo es si $[a,c] \bigcap [b,d] = \{\xi\}$? Obviamente no, ya que ambas situaciones son prácticamente iguales, de modo que los números difusos triangulares (que no sean reales) también representan situaciones de incoherencia, ya que la intersección de los intervalos es un único número real. De hecho, podemos afirmar que el número triangular no real representa el límite entre la coherencia y la incoherencia en los juicios probabilísticos dados por los métodos de apuestas y loterías.

En caso contrario, si $[a,c] = [b,d]$ el experto ha sido com-

pletamente coherente, y el número difuso que designa su juicio probabilístico es un número rectangular (un intervalo nítido). Entonces, la forma del número difuso (rectangular, trapezoidal propiamente dicho, o triangular) indica la coherencia del juicio proporcionado por el experto, y de este modo, podemos medir la coherencia mediante la siguiente función:

Dado un número difuso trapezoidal normalizado $\tilde{A} = (a,b,c,d) \in [0,1]^{\mathscr{T}\mathscr{F}}$ que denota el juicio probabilístico de un experto para un evento determinado, llamaremos *coherencia* de $\tilde{A}$ a

$$C(\tilde{A}) = \begin{cases} \frac{c-b}{d-a}, & \text{si } d-a \neq 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedades:

1. $C(\tilde{A}) \in [0,1]\ \forall \tilde{A} \in [0,1]^{\mathscr{T}\mathscr{F}}$.
2. $C(\tilde{A}) = 1$ si y sólo si $\tilde{A}$ es un número nítido. En particular la coherencia de cualquier intervalo real (visto como número difuso) contenido en $[0,1]$ es 1.
3. $C(\tilde{A}) = 0$ si y sólo si $\tilde{A}$ es un número triangular.
4. C es una función continua en $[0,1]^{\mathscr{T}\mathscr{F}}$.

Demostración. Las tres primeras propiedades son triviales, ya que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$. Veamos la cuarta:

Sea $\left\{\tilde{X}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathscr{T}\mathscr{F}}$ una sucesión convergente:

$$\tilde{X}_n \underset{n\to\infty}{\to} \tilde{Y} \in [0,1]^{\mathscr{T}\mathscr{F}} \Leftrightarrow d_\infty\left(\tilde{X}_n, \tilde{Y}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Por tanto $\underset{\alpha\in[0,1]}{sup} \left\{d_H\left(\tilde{X}_{n\alpha}, \tilde{Y}_\alpha\right)\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ y, en particular para $\alpha = 1$ se tiene $d_H\left(\tilde{X}_{n1}, \tilde{Y}_1\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, y para $\alpha = 0$, $d_H\left(\tilde{X}_{n0}, \tilde{Y}_0\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Luego:

$$d_H(\tilde{X}_{n1}, \tilde{Y}_1) = inf\left\{r > 0 : \left[\tilde{X}_{n1} \subseteq \bigcup_{x\in\tilde{Y}_1} B(x,r)\right] \wedge \left[\tilde{Y}_1 \subseteq \bigcup_{x\in\tilde{X}_{n1}} B(x,r)\right]\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \tilde{X}_{n1} \underset{n\to\infty}{\to} \tilde{Y}_1$$

y

$$d_H(\tilde{X}_{n0}, \tilde{Y}_0) = inf\left\{r > 0 : \left[\tilde{X}_{n0} \subseteq \bigcup_{x\in\tilde{Y}_0} B(x,r)\right] \wedge \left[\tilde{Y}_0 \subseteq \bigcup_{x\in\tilde{X}_{n0}} B(x,r)\right]\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \tilde{X}_{n0} \underset{n\to\infty}{\to} \tilde{Y}_0$$

Para concluir, basta tener en cuenta que, por definición, $C(\tilde{X}_n) = \frac{l\left(\tilde{X}_{n1}\right)}{l\left(\tilde{X}_{n0}\right)}$ y $C(\tilde{Y}) = \frac{l\left(\tilde{Y}_1\right)}{l\left(\tilde{Y}_0\right)}$, donde l denota la longitud del intervalo. Por tanto, $C(\tilde{X}_n) \underset{n\to\infty}{\to} C(\tilde{Y})$. Nótese que si $l(\tilde{Y}_0) = 0$ entonces $max\{(d-a),(c-b)\} = 0$, y $C(\tilde{X}_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Precisión del Experto. Por otro lado, también puede interesarnos la precisión con la que el experto ha expresado su juicio probabilístico:

Dado un número difuso trapezoidal normalizado $\tilde{A} = (a,b,c,d) \in [0,1]^{\mathscr{F}}$ que denota el juicio probabilístico de un experto para un evento determinado. Llamaremos *precisión* de $\tilde{A}$ a

$$S(\tilde{A}) = 1 - \frac{d-a+c-b}{2}.$$

Propiedades:

1. $S(\tilde{A}) \in [0,1]\ \forall \tilde{A} \in [0,1]^{\mathscr{F}}$.
2. $S(\tilde{A}) = 1$ si y sólo si $\tilde{A}$ es un número real.
3. $S(\tilde{A}) = 0$ si y sólo si $\tilde{A}$ es el intervalo $[0,1]$.
4. S es una función continua en $[0,1]^{\mathscr{T}\mathscr{F}}$.
5. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow S(\tilde{A}) \geq S(\tilde{B})$ donde $\subseteq$ es la relación de subsumción dada en la Sección 2.

Demostración: Las tres primeras propiedades son triviales. La demostración de la cuarta propiedad es similar a la demostración de la continuidad de la coherencia ya que, por definición, $S(\tilde{A}) = 1 - \frac{d-a+c-b}{2} = 1 - \frac{l(\tilde{A}_1)+l(\tilde{A}_0)}{2}$, siendo $\tilde{A}_\alpha$ el $\alpha - corte$ de $\tilde{A}$ para $\alpha = 0,1$.

Veamos la quinta propiedad:

Sean $\tilde{A} = (a_1,b_1,c_1,d_1)$ y $\tilde{B} = (a_2,b_2,c_2,d_2)$. Si $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ entonces $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $c_1 \geq c_2$ y $d_1 \geq d_2$, por tanto $d_1 - a_1 \geq d_2 - a_2$ y $c_1 - b_1 \geq c_2 - b_2$. Luego, $S(\tilde{A}) \geq S(\tilde{B})$.

Calidad del juicio probabilístico asignado por el experto. Podemos medir la calidad del juicio probabilístico dado por el experto mediante:

$$\psi(\tilde{A}) = C(\tilde{A}) \times S(\tilde{A}).$$

Propiedades:

1. $\psi(\tilde{A}) \in [0,1]$.
2. $\psi(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{A} = (a,a,a,a) \in \mathbb{R}$.
3. $\psi(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{A}$ es triangular, o $\tilde{A} = (0,0,1,1) = [0,1]$.
4. ψ es una función continua en $[0,1]^{\mathscr{T}\mathscr{F}}$.

Demostración.

1. Trivial si se consideran las propiedades de las medidas de coherencia y precisión indicadas anteriormente.

2. $\psi(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow C(\tilde{A}) = 1$ y $S(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow d-a+c-b = 0$, $\frac{c-b}{d-a} = 1 \Leftrightarrow d-a = b-c$ y $c-b = d-a$ por tanto, $b-c = c-b = d-a \Leftrightarrow b-c = d-a = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d$, ya que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$.

3. $\psi(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow C(\tilde{A}) = 0$ o $S(\tilde{A}) = 0$. Por un lado, $C(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow c - b = 0$ ($\tilde{A}$ es triangular). Y, por otro lado, $S(\tilde{A}) = 0 \Leftrightarrow d-a+c-b = 2 \Leftrightarrow d-a-1 = 1-c+b$ y, puesto que $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, se tiene que $d-a-1 \leq 0$ y $1-c+b \geq 0$, luego $d-a-1 = 1-c+b = 0$, y por tanto, $d-a = c-b = 1$, luego $\tilde{A} = (0,0,1,1)$.

4. ψ es una función continua por ser el producto de dos funciones continuas en un espacio métrico completo.

La utilidad de la función de calidad dada es obvia: En un proceso de elicitación interactivo, si el experto ha dado un número difuso con una calidad por debajo de un cierto umbral determinado previamente por el analista, teniendo en cuenta las condiciones del problema, se puede discutir el resultado con el experto e incluso, se podría optar por desechar la información de este experto y consultar a otros.

5 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método de elicitación de probabilidades difusas que consiste en extraer el juicio probabilístico de un experto en forma difusa, en el marco de la Teoría de la Probabilidad Lingüística. Además, se ha definido una función de calidad de la información obtenida, útil en un proceso de filtrado y mejora de la información

Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo ha sido posible gracias a la financiación de la Comunidad Autónoma de Madrid a través del proyecto S-2009/ESP-1685 y del Ministerio de Ciencia y Tecnología del Gobierno de España a través del proyecto MYTM2011-28983-C03-03.

Referencias

[1] Abbas, Ali E., Budescu, David V., Hsiu-Ting Yu, Haggerty, Ryan. A Comparison of Two Probability Encoding Methods: Fixed Probability vs. Fixed Variable Values. *Decision Analysis* Vol. 5, No. 4. pp 190-202. 2008.

[2] Dokas, I.M, Karras, D.M., Panagiotakopoulos, D.C. Fault tree analysis and fuzzy expert systems: Early warning and emergency response of landfill operations. *Environmental Modelling and Software*. Vol 24 pp 8-25. 2009.

[3] Finetti, B. Foresight: its Logical Laws, its Subjective Sources. In emphStudies in Subjective Probability. H.E. Kyburg and H.E. Smokler Eds. Wiley. 1964.

[4] Halliwell J. *Linguistic Probability Theory*. PhD Thesis. University of Edinburgh. 2007.

[5] Morgan, M.G. and Henrion, M. *Uncertainty: A guide to dealing with Uncertainty in Quantitative Risk and Policy Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge G.B. 1990.

[6] Savage, L.J. *The Fundations of Statistics*. Wiley. Nueva York. 1954.

[7] VV.AA. *Expert Elicitation: Methodological suggestions for its use in environmental health impact assessments*. National Institute for Public Health and the Environment 2008.

[8] Tversky, A. and Kahneman, D. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science, New Series*, Vol. 185, No. 4157. pp. 1124-1131. 1974.

[9] U.S. Nuclear Regulatory Commission. *Severe Accident Risks: An Assessment for Five U.S. Nuclear Power Plants*. NRC Publications. 1990.

[10] Vicente, E., Jiménez, A. and Mateos, A. A Fuzzy Approach to Risk Analysis in Information Systems. *Proceedings of the 2nd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*. 2013a.

[11] Vicente, E., Mateos, A. and Jiménez, A. A new similarity function for generalized trapezoidal fuzzy numbers. *Lecture Notes on Artificial Intelligence*. Part I, pp 400-411. 2013b

[12] Stäel Von Holstein C.A. and Matheson, H. A *Manual For Encoding Probability Distributions. SRI International*, Standford Research Institute 1979.

[13] Winkler, R.L. The quantification of judgment: some methodological suggestion. *Journal of the American Statis. Assoc.*, 1967 b, Vol. 62, n2 320, pp: 1105-1120. 1968

¿Cuántos clústers hay? El algoritmo WAT

Gabriel Mattioli Aramburu

Universitat Politecnica de Catalunya, gabriel.mattioli@upc.edu

Resumen

En este trabajo se propone un algoritmo basado en el desenfoque de imágenes para estimar de forma computacionalmente eficient el número de clústers a encontrar en una imagen. Esto es importante para inicializar algunos de los algoritmos de clustering más usados como Fuzzy c-Means o Expectation-Maximization.

Palabras Clave: Clustering, Algoritmo WAT, desenfocar, mancha

1 Introducción

Uno de los mayores retos en el campo de la AI es el de automatizar de forma efectiva y efica una habilidad humana tan natural como el reconocimiento de patrones y el clustering. En la literatura se puede hallar una vasta colección de algoritmos y métodos de diversa índole que proponen soluciones a este problema; pero la investigación en el campo sigue abierta ya que el problema está lejos de estar resuelto de forma general.

Algunos de los algoritmos de clustering más utilizados, como Fuzzy c-Means (FCM) o Expectation-Maximization (EM), adolecen de un problema previo: ¿Cuántos clústers deben ser hallados? Estos algoritmos requieren saber a priori el número de objetos a encontrar, y este problema no es trivial en general.

Diversos algoritmos han sido propuestos en la literatura para resolver este problema de forma automática [8] [11]. Estos métodos se basan en una aplicació iterativa del algoritmo de clustering (de ahora en adelante en este trabajo FCM) considerando un número diferente de clusters y estudiar la varianza y el error cometido por cada iteración. Sin embargo esta idea tiene un problema fundamental. Dado que los algoritmos de clustering son en general computacionalmente costosos puede ser inasumible explorar todas las posibilidades para encontrar la mejor. Por ejemplo, si la imagen inicial tiene 500 objetos, siguiendo estos métodos FCM tendría que ejecutarse un mínimo de 500 veces.

En este trabajo se propone un nuevo algoritmo llamado WAT (Woods And Trees) con un enfoque diferente para el problema con un coste computacional significat vamente menor. La idea subyacente no es un estudio variacional de una aplicación iterativa de FCM sino una estimación directa del número de clústers.

El trabajo está estructurado de la siguente manera:

En la Sección 2 se propone el algoritmo WAT. El funcionamiento del algoritmo se explica detalladamente así como los parámetros que gobiernan su comportamiento. En la Sección 3 se detallarán algunos puntos técnicos del algoritmo propuesto. Se especificará algunas cuestiones matemáticas y se darán algunos apuntes teóricos que justifica algunos pasos del algoritmos. En la Sección 4 se estudiará el comportamiento del algoritmo sobre 2 imágenes bíomédicas reales. Finalmente, las conclusiones se darán en la Sección 5.

2 El Algoritmo WAT

En esta sección se introduce el algoritmo WAT. En primer lugar se explicará la idea germinal del método que se propone y que le da nombre. A continuación se explicará en detalle el algoritmo. En secciones posteriores se analizarán algunos detalles técnicos asociados y su funcionamiento en un caso práctico.

La idea básica de este trabajo es que a veces hace falta "dar un paso atrás" para contemplar la globalidad de una obra. Éste hecho queda patente, por ejemplo, al observar pinturas en un museo o similar; dónde hace falta alejarse de la imagen para no perderse en los detalles asociados al trazado del cuadro y ver las figura globales que la pintura ofrece. De forma análoga, a veces una imagen desenfocada ofrece más información estructural de la misma que la original al evitar el exceso de detalles. Es bien sabido en el campo del clustering que "Noise is in the details" [3]. El factor

clave del razonamiento es que no sólo el ruido está en los detalles sino en que a veces el ruido es precisamente el hecho de tener detalles, al distraer o "sobrealimentar" a los algoritmos de análisis.

Este punto de vista es bien recogido en el dicho popular: "A veces los árboles no te dejan ver el bosque". La expresión inglesa hermana de la nuestra es:

You can't see the wood for the trees.

que da nombre al algoritmo Woods And Trees (WAT) que se propone en este trabajo.

A nivel formal, el principal actor de este algoritmo es el concepto de mancha que se def ne a continuación

Definition 2.1. *Sea p un píxel de una imagen I de dimensiones $N \times M$, $E : I \times I \to [0,1]$ una relación difusa que evalua la similitud en nivel de gris entre píxels, d una medida de distancia, $h \in [0,1]$ y $r \in [1,N]$. Diremos que p define una mancha si y sólo si:*

$$\forall p' \;\; d(p,p') \leq r \Leftrightarrow E(p,p') \geq h$$

.

La def nición de mancha propuesta es muy intuitiva y se sigue de la def nición matemática de bola (o entorno). Si un píxel p pertenece a un objeto concreto entonces en un entorno del mismo el nivel de gris debería ser homogéneo, luego para un r y h adecuado p def nirá una mancha.

En el plano computacional esta def nición presenta dos inconvenientes. El primero es que no tiene en cuenta que las imagenes reales presentan ruido y por tanto la homogeneidad esperada no tiene porqué ser tal. El segundo es que aplicar esta def nición sobre todos los píxels p de la imagen y todos los p' de los entornos asociados es costoso computacionalmente; hecho contrario a uno de los objetivos iniciales del trabajo propuesto.

2.1 Parametros del Algoritmo WAT

Para solucionar los problemas expuestos anteriormente el algoritmo introduce y es gobernado por los parámetros siguientes:

- $r \in \mathbb{Z}^+$; $r << N,M$: Radio de granularidad
- $h \in \mathbb{R}$; $h \in [0,1]$: Similitud en nivel de gris para asumir cluster común
- $k \in \mathbb{Z}^+$; $k \in [1,(2r)^2]$: Número de píxels a evaluar en cada
- $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $\varepsilon \in (0,1)$: Exhaustividad de búsqueda en la imagen

Expliquemos brevemente el sentido de cada uno de estos parámetros:

Los parámeros r y h miden la precisión y la granularidad para def nir manchas (Def nición 2.1)

El parámetro r es el radio de las bolas cuadradas consideradas alrededor de cada pixel p. Por coherencia con el método y consistencia de algunos detalles que se comentarán después, r debe ser signif cativamente menor que las dimensiones de la imagen.

La similitud entre píxeles es evaluada por la relación difusa E. El parámetro h es la cota inferior de similitud en nivel de gris entre p' y p para asumir que pertenecen a un objeto común.

Evaluar cuáles de todos los $N \times M$ píxels de la imagen def nen manchas es no sólo redundante sino que aumenta la complejidad computacional. Para evitarlo el algoritmo WAT no estudia todos los píxeles de la imagen sino un número aleatorio n de todos ellos. El problema de los números aleatorios es que no se puede asegurar que toda la imagen sea cubierta por los entornos de los n píxeles elegidos. De todas formas para el proposito del algoritmo no es necesario estudiar absolutamente toda la imagen sino un porcentaje signif cativo de la misma. El parámetro ε representará una cota superior del porcentaje de imagen no estudiada. Debe señalarse que este valor es una estimación ya que se trabaja con números aleatorios. Cual es el número n de píxeles a elegir aleatoriamente para asegurar estadísticamente que el porcentaje deseado de imagen es estudiado es un problema no trivial que se tratará en la Sección 3.1.

Dados píxeles $p_1,...,p_n$ centros de entornos cuadrados de radio r es aún costoso contrastar p_i con sus $4r^2-1$ píxeles p'_i de su entorno. Además la idea intuitiva de mancha no debería ser tan exhaustiva. Por ello el algoritmo sólo estudiará la similitud de p_i con k píxeles aleatoriamente escogidos de su entorno.

2.2 El Algoritmo WAT

El algoritmo WAT funciona de la manera siguiente:

Algorithm 2.2. *INPUT: Una imagen $N \times M$ y valores de los parámetros r, h, k, y ε*

1. *Calcular el número n de píxeles*
2. *Elegir aleatoriamente n píxeles $p_1,...,p_n$ de la imagen*
3. *Para cada p_i*
   (a) *Elegir k píxeles aleatorios $p'_1,...,p'_k$ en un entorno cuadrado de p_i de radio r*
   (b) *Comparar el nivel de gris entre p_i y p'_j para $j = 1,...,k$ mediante la relación difusa E*
   (c) *Si para cada p'_j se verifica que $E(p_i,p'_j) \geq h$ entonces p_i define una mancha*
4. *Notemos $s_1,...,s_m$ los píxeles que definen manchas*

5. *Para cada s_i*

   (a) *Para $j = 1,...,n$ si $d(s_i,s_j) < 2r$ y $E(s_i,s_j) \geq h$ entonces s_i y s_j pertenecen al mismo clúster.*

6. *Notemos $c_1,...,c_t$ las manchas definiendo clústeres diferentes*

OUTPUT: $c_1,...,c_t$

Ilustremos algunos puntos interesantes del algoritmo.

En primer lugar, aunque primeramente se hable de píxeles, luego de manchas y f nalmente de clústers; a un nivel práctico se trabaja en todo momento sobre píxeles (conjuntamente con sus entornos de radio r). El paso 3 del algoritmo WAT etiqueta como manchas aquellos píxeles que tienen un nivel de gris homogéneo con su entorno y el paso 5 identif ca en un mismo clúster manchas diferentes si sus entornos se intersecan ($d(p_i,p_j) < 2r$) y su nivel de gris también similar.

El output del algoritmo son t píxels que pueden tomarse como semillas para un FCM de t clústers. Dependiendo cómo se implemente el paso 5 del algoritmo estos píxeles pueden ser diferentes.

El hecho de identif car manchas similares que se intersecan es lo que nos permite encontrar objetos en la imagen. Si la condición de intersección se elimina el algoritmo no nos dará el número de objetos sino el número de clases de objetos en la imagen. Por ejemplo, en una imagen donde un objeto se repite, tener en cuenta esta condición nos dará los diferentes objetos como diferentes clústers pero si la eliminamos tendremos un mismo clúster (clase) para todos estos objetos repetidos. Dependiendo del contexto y la imagen puede ser preferible una situación o la otra. Es interesante esta propiedad del algoritmo ya que le da una gran polivalencia sin cambiar ni el código ni el núcleo del método.

3 Algunos comentarios técnicos del Algoritmo WAT

En esta sección se detallarán algunas cuestiones colaterales y técnicas del algoritmo WAT propuesto en la sección anterior. En primer lugar se especif cará cómo hallar el número n de píxels aleatorios iniciales para ejecutar el algoritmo. Posteriormente se explicará cómo el paso 4 del algoritmo puede ser visto como un Single Linkage [2] f ltrado.

3.1 Cómo decidir el número inicial de píxeles

Como ya se ha comentado anteriormente, uno de los objetivos de WAT es ser preciso a un mínimo coste computacional. El parámetro ε regula el espacio de búsqueda del algoritmo. Por ejemplo, para un valor de $\varepsilon = 0.05$ el algoritmoi debería asegurar estadísticamente que un 95% de la imagen es cubierta por n bolas cuadradas aleatorias de radio r. El problema es, dados r y ε, cómo hallar n.

En este trabajo proponemos la siguente fórmula para una imagen de dimensiones $N \times M$:

$$n \geq \frac{log(\varepsilon)}{log(1-\frac{(2r)^2}{N \cdot M})}$$

Tomando n el menor entero que satisface la desigualdad. Expliquemos de dónde viene esta fórmula.

Notemos, A_i el área no cubierta después de elegir aleatoriamente i bolas. Por supuesto:

$$A_0 = N \cdot M$$

Si $r << N,M$

$$A_1 = A_0 - (2r^2) = A_0 - (2r)^2 \frac{A_0}{A_0}$$

Y podemos inducir la sigiente fórmula iterativa:

$$A_{i+1} = A_i - (2r)^2 \frac{A_i}{A_0}$$

Si la reescribimos como una serie geométrica tenemos:

$$A_{i+1} = A_i(1-(2r^2)/NM) = NM(1-(2r^2)/NM)^i$$

Estamos buscando el valor de i tal que $A_{i+1} \leq NM \cdot \varepsilon$.

$$NM(1-(2r^2)/NM)^i < NM \cdot \varepsilon$$

De donde, simplif cando y tomando logaritmos, tenemos:

$$i \geq \frac{log(\varepsilon)}{log(1-\frac{(2r)^2}{N \cdot M})}$$

La fórmula propuesta es consistente estadísticamente y robusta. En efecto, si $r \ll N,M$ entonces la esperanza estadística de nueva área cubierta por la i+1-ésima bola es exactamente $(2r)^2 \frac{A_i}{A_0}$, de dónde se sigue todo el razonamiento La clave es que si $r \ll N,M$ pueden despreciarse los casos donde la nueva bola interseca los límites de la imagen y en cada iteración estamos tomando el valor de máxima verosimilitud.

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.01$
$r = 3$	122804	159771	245607
$r = 5$	44209	57517	88416
$r = 10$	11052	14379	22103

Tabla 1: Valor de n para diferentes valores de r y ε en una imagen de 1.92 megapíxeles

3.2 Identificar manchas como un Single Linkage filtrado

El algoritmo WAT consta de dos pasos principales. El primero es identificar qué píxeles definen manchas. El segundo consiste en identificar manchas entre sí como partes de un todo común.

Dado cómo se establece el valor de n (Sección 3.1), podemos suponer que el $(1-\varepsilon)\times 100\%$ de la imagen está cubierto. Por consiguiente, el problema de identificar qué manchas son parte de un clúster común es simplemente un problema de juntar las manchas no disjuntas similares.

La condición 5 del algoritmo WAT establece que dos manchas definidas por píxeles p_1, p_2 son la misma mancha sii $d(p_1,p_2) < 2r$ y $E(p_1,p_2) \geq h$. Ésto quiere decir exactamente que dos manchas se identifican si son no disjuntas y similares en nivel de gris. Así, si un objeto contiene diferentes bolas que definen manchas, por construcción éstas podrán ser concatenadas en la identificación. De esta forma este paso puede ser visto como un Single Linkage (SL) filtrado. En la Figura 1 se ilustra comos estas manchas se concatenan.

Uno de los problemas de SL es que la concatenación de cadenas transitivas puede eventualmente llevar a una conexión global que trascienda los clústers-objetivo [4] [10]. Bajo nuestro enfoque este problema no aparece ya que no estamos ejecutando un SL global sino restringido a los píxeles seleccionados (manchas) que presentan una homogeneidad con su entorno. Este filtro evita las problemáticas cadenas transitivas.

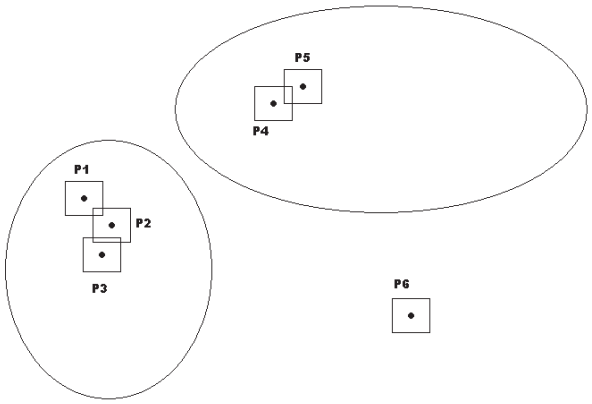


Figura 1: Tres clusters. Puede verse cómo se concatenan las manchas

4 Ejemplo de una aplicación de WAT

En esta sección se ilustrará el funcionamiento del algoritmo WAT propuesto sobre imagenes biomédicas reales.

Las figuras 3 and 4 son dos mamografías con tumores (o calcificaciones) señaladas.

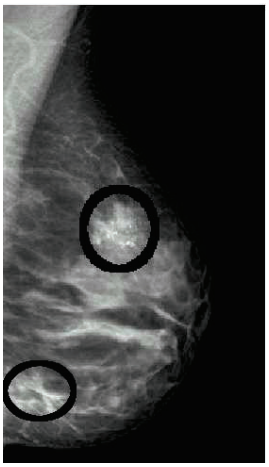


Figura 2: Mamografía 1

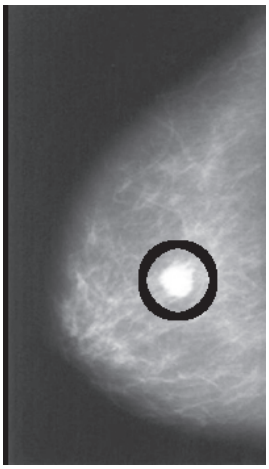


Figura 3: Mamografía 2

El problema es detectar automáticamente estos tumores. Para ello se ha ejecutado en primer lugar el algoritmo WAT para estimar el número de clústers a encontrar y posteriormente se ha ejecutado FCM.

Después de una estimación inicial el valor de los parámetros de WAT se ha fijado en $r = 4$, $h = 0.7$, $k = 5$ y $\varepsilon = 0.05$.

En ambas mamografías WAT propone 4 clústers a ser hallados. Las Figuras 4 y 5 muestran los clústers output de un FCM ejecutado para encontrar los cuatro clústers con las semillas propuestas por WAT.

Puede observarse que en la segmentación de la Mamografía 1 los clústers output no identifican exactamente los tumores pero sí que se da una buena aproximación. Poodrían obtenerse los tumores con un postproceso de limpieza de imagen.

En la Mamografía 2 el resultado no es tan claro ya que no hay ningún clúster claro que segmente el tumor de forma diferenciada. Puede observarse, sin embargo, que en los clústers correspondientes a las fibras y al tumor hay una pequeña diferencia de tonalidad de gris en la zona tumorosa. Este hecho hace que aunque la segmentación parezca pero que la de la Mamografía 1, de facto la identificación del tumor es más clara en este segundo ejemplo.

De todas formas debe observarse que aunque los clústers output no señalan claramente los tumores, este problema es debido al algoritmo de segmentación (en este caso FCM) y no al algoritmo WAT propuesto. La ejecución de WAT ha dado como resultado que 4 eran los clústers que debían ser encontrados, cifra correcta para el problema (fondo, mama, fibras y tumores) . De hecho, un análisis de las semillas que WAT propone para buscar los clústers muestra un comportamiento robusto y coherente con el resultado esperado y el final.

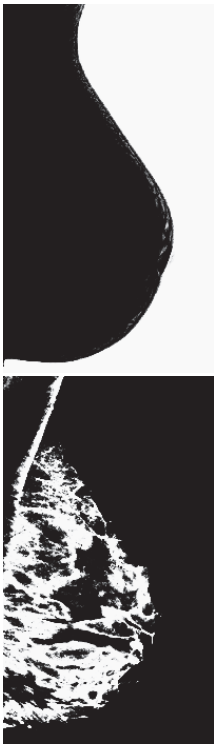


Figura 4: Mamografía 1: Segmentación del fondo, la mama, las f bras y los tumores

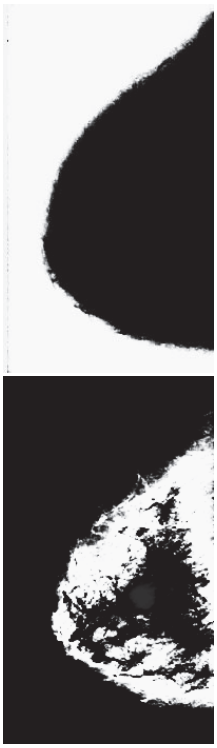


Figura 5: Mamografía 2: Segmentación del fondo, la mama, las f bras y los tumores

El último comentario respecto al ejemplo propuesto es referente al coste computacional. La ejecución del algoritmo WAT ha tomado 2.64s de tiempo de cálculo mientras que FCM ha durado 9.81s. De aquí se inf ere que, como era esperable, WAT es computacionalmente muy superior a los otros métodos propuestos en [8] [11] que se basan en una ejecución múltiple de FCM.

Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto un nuevo algoritmo para encontrar el número de clústers existentes en una imagen o muestra. Este problema es crucial para la inicialización de varios de los algoritmos de clustering más utilizados como,por ejemplo, Fuzzy c-Means.

El algoritmo propuesto ha sido bautizado como WAT (Woods And Trees) ya que a través de la idea de desenfocar una imagen permite ver a la vez los árboles o el bosque.

Tres cosas deben ser subrayadas del método propuesto. La primera es su bajo coste computacional, especialmente al compararla con otros métodos propuestos en la literatura. En segundo lugar, en ningún lugar se asegura que la cifra de clústers que propone WAT como output sea la mejor; pero por construcción es una buena estimación que ha apuntado a ser la exacta en los ejemplos propuestos. Pór último, aunque se haya remarcado repetidamente la idea de desenfoque como nuclear del método, en ningún lugar se ha realizado un desenfoque real de la imagen. Por contra, es el ojo que observa la imagen (WAT) el que la mira desenfocada con un desenfoque graduable a través de los parámetros.

Como trabajo futuro debería testearse el algoritmo WAT en diversas imagenes y contrastarlo de forma más rigurosa con otros métodos para poder af rmar con vehemencia las bondades aquí apuntadas. Otra línea interesante de investigación es que WAT admite una justif cación teórica bastante interesante sobre la cual el autor está trabajando actualmente y espera poder presentar en futuras publicaciones.

Agradecimientos

El autor está subvencionado por la Universitat Politècnica de Catalunya.

Referencias

[1] Duin R.P.W., Pekalska E.: *The dissimilarity representation for pattern recognition. Foundations and applications* World Scientif c (2005) .

[2] J. C. Gower, G. J. S. Ross: *Minimum Spanning Trees and Single Linkage Cluster Analysis*. Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics), Vol. 18, No. 1, pp. 54-64 (1969)

[3] A. B. Hamza, P. L. Luque-Escamilla, J. Martínez-Aroza, R. Román-Roldán: *Removing noise and preserving details with relaxed median filters*. Journal of Mathematical Imaging and Vision. Vol. 11, Iss 2, pp. 161-177 (1999).

[4] Hartigan, J. A.: *Consistency of Single Linkage for High-Density Clusters. Journal of the American Statistical Association*. Vol. 76, No. 374, pp. 388-394 (1981).

[5] Lindeberg, T.: *Feature detection with automatic scale selection*. International journal of computer vision. Vol. 30(2), pp. 79-116 (1998).

[6] Mattioli, G., Recasens, J.: *Isomorphisms between Indistinguishability Operators and related Concepts*. Information Sciences. Vol. 241, pp. 85-100 (2013).

[7] Mattioli, G.: *Application of Fuzzy Techniques to Biomedical Images*. UPC publications. Master Thesis (2012).

[8] Pelleg, D., Moore, A.: X-means: *Extending k-means with efficient estimation of the number of clusters*. Proceedings of the seventeenth international conference on machine learning. Vol. 1, pp. 727-734 (2000).

[9] Recasens, J.: *Indistinguishability Operators. Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations*. Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 260 (2011)

[10] Stuetzle, W., Nugent, R.: *A Generalized Single Linkage Method for Estimating the Cluster Tree of a Density*. Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol. 19, Iss. 2 (2010).

[11] Tibshirani, R., Walther, G., Hastie, T.: *Estimating the number of clusters in a data set via the gap statistic*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B Statistical Methodology. Vol. 63, Iss. 2 pp. 411-423 (2001).

[12] Witkin, A.: *Scale-space filtering: A new approach to multi-scale description*. Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'84. Vol. 9, pp. 150-153 (1983).

Some Illustrative Examples of Permutability of Fuzzy Operators and Fuzzy Relations

Neus Carmona[1], **Jorge Elorza**[1], **Jordi Recasens**[2], **Jean Bragard**[1]

[1]*Departamento de Física y Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra, Pamplona,*
ncarmona@alumni.unav.es, {jelorza, jbragard}@unav.es
[2]*Secció Matemàtiques i Informàtica, ETSAV, Universitat Politècnica de Catalunya, Sant Cugat del Vallès,*
j.recasens@upc.edu

Abstract

Composition of fuzzy operators often appears and it is natural to ask when the order of composition does not change the result. In previous papers, we characterized permutability in the case of fuzzy consequence operators and fuzzy interior operators. We also showed the connection between the permutability of the fuzzy relations and the permutability of their induced fuzzy operators. In this work we present some examples of permutability and non permutability of fuzzy operators and fuzzy relations in order to illustrate these results.

Keywords: Permutability, Fuzzy Consequence Operator, Fuzzy Preorder, Similarity Relation.

1 INTRODUCTION

Composition of fuzzy operators often appears in fields like fuzzy mathematical morphology or approximate reasoning. In fuzzy mathematical morphology, fuzzy operators are used as morphological filters for image processing [6], [7]. In approximate reasoning, fuzzy consequence operators perform the role of deriving consequences from certain premises and relations [5], [9], [11]. These two fields are closely related and several results can be transfered from one field to the other [10]. In previous papers [3], [4] we studied permutability of the composition of fuzzy consequence operators and fuzzy interior operators in a general context and we related it to the preservation of the operator type through composition. We also connected permutability of fuzzy relations with permutability of the operators they induce through Zadeh's compositional rule. We focused in the case of fuzzy consequence operators induced by fuzzy preorders and fuzzy indistinguishability relations. The aim of this paper is to show that all the studied cases exist and to provide examples to illustrate each of them.

Our paper is organized as follows: In Section 2 we recall the main definitions and results that will be used throughout the paper. In Section 3 we recall the main results about permutability from our previous work. Finally, in Section 4 we provide a collection of examples to illustrate each of the studied cases.

2 PRELIMINARIES

In this paper, X will denote a non-empty classical universal set, $[0,1]^X$ will be the set of all fuzzy subsets of X with truth values in $[0,1]$ and $*$ a left-continuous t-norm.

Definition 2.1. *A fuzzy (binary) relation on X is a map $R : X \times X \longrightarrow [0,1]$. Γ' will denote the set of fuzzy binary relations defined on X. A fuzzy relation $R \in \Gamma'$ is said to be:*

1. *Reflexive if $R(x,x) = 1 \quad \forall x \in X$*
2. *Symmetric if $R(x,y) = R(y,x) \quad \forall x,y \in X$*
3. *$*$-Transitive if $R(x,y) * R(y,z) \leq R(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$*

A reflexive and $*$-transitive fuzzy relation is called a fuzzy $*$-preorder. *If it also satisfies symmetry, then it is called a* fuzzy $*$-similarity *or* $*$-indistinguishability relation. *Given $R,S \in \Gamma'$, we say that $R \leq S$ if and only if $R(x,y) \leq S(x,y)$ for all $x,y \in X$.*

Composition of fuzzy relations is given by the sup-$*$ composition.

Definition 2.2. *Let $R,S \in \Gamma'$ be fuzzy relations on a set X and $*$ a t-norm. The* ***sup-$*$ composition*** *of R and S is the fuzzy relation defined for all $x,y \in X$ by*

$$R \circ S(x,y) = \sup_{w \in X} \{R(x,w) * S(w,y)\} \tag{1}$$

The transitive closure of a fuzzy relation R is the smallest upper approximation of R which is $*$-transitive [2]. More precisely,

Definition 2.3. *We define the* ***$*$-transitive closure*** $\overline{R}$ *of a fuzzy relation R as the fuzzy relation given by*

$$\overline{R} = \inf_{\substack{S\in\widehat{\Gamma}\\ R\leq S}} \{S\} \tag{2}$$

where $\widehat{\Gamma}$ denotes the set of all $*$-transitive fuzzy relations in X.

The explicit formula for the transitive closure is given by $\overline{R} = \sup_{n\in\mathbb{N}} R^n$ where the power of R is defined using the sup-$*$ composition. The $*$-transitive closure of a reflexive fuzzy relation is a fuzzy $*$-preorder and the $*$-transitive closure of a reflexive and symmetric relation is an $*$-indistinguishability relation.

A fuzzy operator is a map $C : [0,1]^X \longrightarrow [0,1]^X$. We denote Ω' the set of fuzzy operators defined from $[0,1]^X$ to $[0,1]^X$.

Definition 2.4. *A fuzzy operator $C \in \Omega'$ is called a* fuzzy consequence operator *(FCO for short) when it satisfies for all $\mu, \nu \in [0,1]^X$:*

1. *Inclusion $\mu \subseteq C(\mu)$*
2. *Monotony $\mu \subseteq \nu \Rightarrow C(\mu) \subseteq C(\nu)$*
3. *Idempotence $C(C(\mu)) = C(\mu)$*

Ω will denote the set of all FCO on X.

Definition 2.5. *[1] A fuzzy operator $C \in \Omega'$ is called a* fuzzy interior operator *(FIO for short) when it satisfies for all $\mu, \nu \in [0,1]^X$:*

1. *Anti-inclusion $C(\mu) \subseteq \mu$*
2. *Monotonicity $\mu \subseteq \nu \Rightarrow C(\mu) \subseteq C(\nu)$*
3. *Idempotence $C(C(\mu)) = C(\mu)$*

Λ will denote the set of all FIO on X.

The inclusion of fuzzy subsets is given by the pointwise order, i.e. $\mu \subseteq \nu$ if and only if $\mu(x) \leq \nu(x)$ for all $x \in X$. Given two fuzzy operators C_1, C_2 we say that $C_1 \leq C_2$ if $C_1(\mu) \subseteq C_2(\mu)$ for all $\mu \in [0,1]^X$.

Every fuzzy relation induces a fuzzy operator using Zadeh's compositional rule.

Definition 2.6. *Let $R \in \Gamma'$ be a fuzzy relation on X. The fuzzy operator induced by R through Zadeh's compositional rule is defined by*

$$C_R^*(\mu)(x) = \sup_{w\in X} \{\mu(w) * R(w,x)\} \tag{3}$$

Let us recall the definitions of fuzzy closure and fuzzy interior of a fuzzy operator C. The fuzzy closure is the smallest FCO which is greater than or equal to C. The fuzzy interior is the greatest FIO which is smaller than or equal to C. Formally,

Definition 2.7. *Let $C : [0,1]^X \longrightarrow [0,1]^X$ be a fuzzy operator. We define the* ***fuzzy closure*** $\overline{C}$ ***of*** *C as the fuzzy operator given by*

$$\overline{C} = \inf_{\substack{\phi\in\Omega\\ C\leq\phi}} \{\phi\} \ . \tag{4}$$

Definition 2.8. *Let $C : [0,1]^X \longrightarrow [0,1]^X$ be a fuzzy operator. We define the* ***fuzzy interior*** $\overset{\circ}{C}$ ***of*** *C as the fuzzy operator given by*

$$\overset{\circ}{C} = \sup_{\substack{\phi\in\Lambda\\ C\geq\phi}} \{\phi\} \ . \tag{5}$$

3 PERMUTABILITY

First of all, let us recall the definitions of permutability for fuzzy relations and fuzzy operators.

Definition 3.1. *Let $R, S \in \Gamma'$ be fuzzy relations. We say that R and S* ***permute*** *(or that R and S are permutable) if $R \circ S = S \circ R$ where $\circ$ is the sup-$*$ composition.*

Definition 3.2. *Let C, C' be fuzzy operators. We say that C and C'* ***permute*** *(or that C and C' are permutable) if $C \circ C' = C' \circ C$ where $\circ$ is the usual composition.*

3.1 PERMUTABILITY OF FCO AND FIO

In [3] we proved the following results which characterize permutability between FCO and the dual case of FIO. Proofs are provided there.

For two fuzzy consequence operators to permute it is necessary and sufficient that their composition gives a FCO in both directions:

Theorem 3.1. *Let C, C' be fuzzy consequence operators. Then, C and C' permute if and only if $C \circ C'$ and $C' \circ C$ are fuzzy consequence operators.*

Hence, permutability appears when the operator type is preserved.

Proposition 3.2. *Let C, C' be fuzzy consequence operators. Then, $C \circ C'$ is a fuzzy consequence operator if and only if $C \circ C' = \overline{\max(C, C')}$.*

As a consequence of the previous result we have that C and C' permute if and only if both $C \circ C'$ and $C' \circ C$ coincide with $\overline{\max(C, C')}$.

The dual results hold for fuzzy interior operators. For two fuzzy interior operators to permute it is necessary and sufficient that their composition gives a FIO in both directions. In this case, their composition is the interior of their minimum.

Theorem 3.3. *Let C, C' be fuzzy interior operators. Then, C and C' permute if and only if $C \circ C'$ and $C' \circ C$ are fuzzy interior operators.*

Proposition 3.4. *Let C, C' be fuzzy interior operators. Then, $C \circ C'$ is a fuzzy interior operator if and only if $C \circ C' = \min_{\circ}(C, C')$.*

Hence, C and C' permute if and only if both $C \circ C'$ and $C' \circ C$ coincide with $\min_{\circ}(C, C')$.

3.2 PERMUTABILITY OF FCO INDUCED BY FUZZY RELATIONS

It was proved in [13] that two $*$-indistinguishability relations defined on a finite set X permute if and only if $E \circ F$ is an $*$-indistinguishability relation. In this case, $E \circ F = \max(E, F)$.

In [4], this result was extended to general fuzzy preorders and any set X, finite or not.

Theorem 3.5. *Let R and P be two fuzzy $*$-preorders on X. Then, R and P are permutable if and only if $R \circ P$ and $P \circ R$ are fuzzy $*$-preorders. In this case, $R \circ P$ coincides with the $*$-transitive closure $\overline{\max}(R, P)$ of $\max(R, P)$.*

Notice that both compositions are needed in order to obtain permutability. In Section 4 we will illustrate this fact with an example.

Since indistinguishability relations are preorders that also satisfy the symmetric property, we can soften this constraint.

Proposition 3.6. *Let E and F be two $*$-indistinguishability relations on X. Then, E and F are permutable if and only if $E \circ F$ is a $*$-indistinguishability relation. In this case, $E \circ F$ coincides with the $*$-transitive closure $\overline{\max}(E, F)$ of $\max(E, F)$.*

Composition of fuzzy operators induced by fuzzy relations using Zadeh's compositional rule can be described in terms of the inducing relations as shown in the following proposition. This description makes natural to think that permutability of fuzzy relations is connected to permutability of the operators they induce.

Proposition 3.7. *Let R, S be two fuzzy relations and let C_R^* and C_S^* be the corresponding fuzzy operators induced through Zadeh's compositional rule. Then,*

$$C_R^* \circ C_S^* = C_{S \circ R}^* \tag{6}$$

where $S \circ R$ denotes the sup-$*$ composition of fuzzy relations.

Let us focus on the case of operators induced by fuzzy preorders. It is well known that fuzzy operators induced from fuzzy relations through Zadeh's compositional rule are fuzzy consequence operators if and only if the relation is a fuzzy preorder [8]. However, not every FCO can be induced by a preorder. The relation between permutability of fuzzy preorders and permutability of their induced consequence operators can be summarized in the following theorem.

Theorem 3.8. *[4] Let R, P be fuzzy $*$-preorders. Then,*

$$C_R^* \circ C_P^* = C_P^* \circ C_R^* \quad \Leftrightarrow \quad R \circ P = P \circ R$$

If the preorders are fuzzy indistinguishability relations, the induced operators behave specially well.

Proposition 3.9. *[12] Let E be a fuzzy $*$-indistinguishability relation and let C_E^* be the fuzzy operator induced through Zadeh's compositional rule. Then,*

1. *C_E^* is a fuzzy consequence operator.*
2. *$C_E^*(\bigcup_{i \in I} \mu_i) = \bigcup_{i \in I} C_E^*(\mu_i)$ for any index set I and all $\mu_i \in [0,1]^X$.*
3. *$C_E^*(\{x\})(y) = C_E^*(\{y\})(x)$ for all $x, y \in X$ where $\{x\}$ denotes the singleton of x.*
4. *$C_E^*(\alpha * \mu) = \alpha * C_E^*(\mu)$ for any constant $\alpha \in [0,1]$ and $\mu \in [0,1]^X$.*

Moreover, every fuzzy operator satisfying conditions of Proposition 3.9 can be written in the form C_E^* for a certain $*$-indistinguishability relation E. Hence, there is a bijection between the set of $*$-indistinguishability relations and the set of fuzzy operators satisfying the conditions of Proposition 3.9.

Even if C_E^* and C_F^* do not permute, their composition always satisfy the following properties.

Proposition 3.10. *Let E, F be fuzzy $*$-indistinguishability relations. Then, $C_{E \circ F}^*$ satisfies properties 2, 4 of Proposition 3.9. Moreover, it satisfies the inclusion and monotony properties from the definition of FCO.*

In [4] we proved that permutability of operators induced by similarity relations can be characterized as follows:

Theorem 3.11. *Let E, F be $*$-indistinguishability relations. Then, their consequences C_E^* and C_F^* permute if and only if $E \circ F$ is an indistinguishability relation.*

Corollary 3.12. *Let C, C' be fuzzy operators satifying all the conditions of Proposition 3.9. Then, C and C' permute if and only if $C \circ C'$ also satisfies all these conditions.*

4 EXAMPLES

The aim of this section is to illustrate the results given in Section 3 with different examples. We will provide cases of fuzzy operators and fuzzy relations that do and do not permute.

The first example shows that the condition in Theorem 3.5 cannot be softened. Preservation of the operator type in

one direction is not enough to obtain permutability between fuzzy consequence operators.

Example 4.1. *Let X be a non empty classical set and let $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ such that $0<\beta<\alpha<1$. Let C' and C be FCO defined as follows:*

$$C'(\mu)(x) = \begin{cases} 1 & if \quad \mu(x) > \beta \\ \beta & if \quad \mu(x) \leq \beta \end{cases}$$

$$C(\mu)(x) = \begin{cases} 1 & if \quad \mu(x) > \alpha \\ \alpha & if \quad \mu(x) \leq \alpha \, . \end{cases}$$

*Note that $C' \circ C$ is a FCO. In fact, $C' \circ C = \overline{\max(C,C')} = X$ where $X(\mu)(x) = 1$ for all $x \in X$ and $\mu \in [0,1]^X$. However, C and C' **do not permute**. Indeed, one has*

$$(C \circ C')(\mu)(x) \begin{cases} 1 & if \quad \mu(x) > \beta \\ \alpha & if \quad \mu(x) \leq \beta \end{cases}$$

which is not a FCO since it does not satisfy idempotence.

The next example proves that there exist fuzzy consequence operators that permute.

Example 4.2. *Let X be a non empty classical set. Let $x_1, x_2 \in X$ with $x_1 \neq x_2$ and let C' and C be defined as*

$$C'(\mu)(x) = \begin{cases} 1 & if \; x = x_1 \\ \mu(x) & otherwise \end{cases}$$

$$C(\mu)(x) = \begin{cases} 1 & if \; x = x_2 \\ \mu(x) & otherwise \end{cases}$$

*Notice that C and C' are FCO and **permute**, i.e. $C \circ C' = C' \circ C$, and by Thm. 3.2, their composition*

$$C' \circ C(\mu)(x) = \begin{cases} 1 & if \;\; x = x_1 \;\; or \;\; x = x_2 \\ \mu(x) & otherwise \end{cases}$$

is a FCO.

Let us show some cases of permutability and non-permutability of min-preorders. From Theorem 3.8, their induced consequence operators behave in the same way as the relations do.

For simplicity, we shall write C^*_R instead of $C^{\min}_R$.

Example 4.3. *Let R and P be fuzzy min-preorders (but not similarities) defined as follows:*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 1 & 0.75 \\ 0.4 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.55 & 1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

*R and P **permute** and therefore, their consequences also do.*

$$\overline{\max(R,P)} = R \circ P = P \circ R = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 1 & 0.75 \\ 0.4 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Taking for example, $\mu = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$, it is easy to see that

$$C^*_R \circ C^*_P(\mu) = C^*_P \circ C^*_R(\mu) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Example 4.4. *Let Q and S be fuzzy min-preorders (but not similarities) defined as follows.*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 1 & 0.75 \\ 0.4 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

Their compositions are given by

$$Q \circ S = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 1 & 0.75 \\ 0.4 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S \circ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 1 & 0.75 \\ 0.4 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

*Notice that $\overline{\max(S,Q)} = S \circ Q$ but Q and S **do not permute**. Taking $\mu = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$, it is easy to see that*

$$C^*_Q \circ C^*_S(\mu) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$
$$C^*_S \circ C^*_Q(\mu) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Example 4.5. *Let E and F be fuzzy min-indistinguishability relations defined as follows.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 1 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Notice that E and F ***permute***.

$$\overline{\max(E,F)} = E \circ F = F \circ E = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

Therefore, C_E^* *and* C_F^* *also* ***permute***.

Example 4.6. *Let E and F be fuzzy min-indistinguishability relations defined as follows.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.4 & 0.8 & 1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.7 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.5 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

E and F ***do not permute***.

$$F \circ E = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E \circ F = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 0.7 & 1 \end{pmatrix}$$

However, as seen in Proposition 3.10, both compositions $C_E^* \circ C_F^*$ *and* $C_F^* \circ C_E^*$ *satisfy properties 2, 4 of Proposition 3.9 and the inclusion and monotony properties from the definition of FCO.*

Acknowledgements

We acknowledge the partial support of the project FIS2011-28820-C02-02 from the Spanish Government and N.C. acknowledges the financial support of the "Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra".

References

[1] Bělohlávek, R. , Funioková, T.: Fuzzy interior operators. International Journal of General Systems, Vol. 33, Iss. 4, pp. 415–430, 2004.

[2] Bandler, W,. Kohout, J.: Special properties, closures and interiors of crisp and fuzzy relations. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 26, pp. 317–331, 1988.

[3] Carmona, N., Elorza, J., Recasens, J., Bragard J.: Permutability of Fuzzy Consequence Operators and Fuzzy Interior Operators. In: *Advances in Artificial Intelligence: Proceedings of the 15th Conference of the Spanish Association for Artificial Intelligence*, pp. 62–69, Springer, 2013.

[4] Carmona, N., Elorza, J., Recasens, J., Bragard J.: Permutability of Fuzzy Consequence Operators induced by fuzzy relations. To be published in: *Proceedings of MDAI'13. Lecture Notes in Artificial Intelligence*, Springer, 2013.

[5] Castro J.L., Trillas, E.: Tarski's fuzzy consequences. In: *Proceedings of the International Fuzzy Engineering Symposium '91*, Vol. 1, pp. 70–81, 1991.

[6] De Baets, B. , Kerre, E. , Gupta, M.: The fundamentals of fuzzy mathematical morphology part 1: Basic concepts. *International Journal of General Systems*, Vol. 23, Iss. 2, 1995.

[7] Deng, T.Q., Heijmans, H.J.A.M.: Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *J. Math. Imaging Vision*, Vol. 16, pp. 155–171, 2002.

[8] Elorza, J. and Burillo, P.: On the relation of fuzzy preorders and fuzzy consequence operators, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems 7 (3), pp. 219–234, 1999.

[9] Elorza, J. and Burillo, P.: Connecting fuzzy preorders, fuzzy consequence operators and fuzzy closure and co-closure systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 139(3), pp. 601–613, 2003.

[10] Elorza, J. et al.: On the relation between fuzzy closing morphological operators, fuzzy consequence operators induced by fuzzy preorders and fuzzy closure and co-closure systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 218, pp. 73–89, 2013.

[11] Pavelka, J., On Fuzzy Logic I. *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math.* Vol. 25, pp. 45–52, 1979.

[12] Recasens, J.: Indistinguishability Operators: Modelling Fuzzy Equalities and Fuzzy Equivalence Relations. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Vol. 260, Springer, 2010.

[13] Recasens, J.: Permutable indistinguishability operators, perfect vague groups and fuzzy subgroups. *Information Sciences*, Vol. 196, pp. 129–142 (2012)

SOFTWARE PARA EJECUTAR DIVERSOS TIPOS DE DIVISIÓN RELACIONAL DIFUSA

David E. Casas del Rosal[1], José Galindo Gómez [2]

[1] Centro de formación Ábaco, Córdoba davidecasas@centroabaco.com
[2] Dpto. Lenguajes y Ciencias de la Computación,
Universidad de Málaga, jgg@lcc.uma.es

Resumen

La división relacional es quizá la operación del álgebra relacional más compleja y potente que existe. Nos permite recuperar de una relación concreta todos aquellos registros relacionados con todos (cuantificador universal) los registros de otra relación. Si además, las relaciones implicadas en la operación son relaciones difusas, la potencia y complejidad es mayor. Incluso en relaciones clásicas, relajar las condiciones de la división es interesante para evitar la estricta definición de esta operación. Debido a la importancia de esta operación se ha desarrollado la aplicación FQDivision que nos permite realizar las divisiones relaciones difusas según diversas propuestas en la literatura científica.

Palabras Clave: Bases de datos difusas, División relacional difusa, consultas difusas, álgebra relacional difuso, cuantificadores difusos.

1 INTRODUCCIÓN

Se puede introducir información difusa o imprecisa dentro de las bases de datos relacionales a través de dos mecanismos principalmente. Así pues, podemos encontrar dicha información a través del almacenamiento de la misma dentro de las relaciones de la base de datos, o en los procesos de relajación de las operaciones (condiciones, umbrales de cumplimiento, cuantificadores, etc.).

Si hablamos de la información difusa almacenada dentro de la base de datos, está información puede encontrarse de distintas clases [4]. Una de ellas es a través de grados en cada tupla que pueden representar grados de pertenencia a la relación, grados de posibilidad, necesidad. También pueden almacenarse datos difusos como atributos de la relación, los cuales pueden ser distribuciones de posibilidad, o datos difusos con o sin una relación de orden subyacente (intervalos, etiquetas lingüísticas, distribuciones sobre números, o sobre escalares, grados difusos asociados a atributos, etc.).

La otra forma de usar imprecisión es, por ejemplo, relajando las condiciones de las consultas (selección en el álgebra relacional) para obtener datos que en condiciones normales no aparecerían al ser las condiciones (o requisitos) demasiado estrictas. Normalmente, en este caso obtendremos un grado que mide en qué medida se cumplen dichas operaciones.

La cantidad y tipo de datos que se pueden representar y utilizar las impone el modelo de bases de datos relacional difuso utilizado. Por ello, en este trabajo hemos utilizado el modelo de GEFRED empleado en [3] que es una síntesis ecléctica de los modelos más utilizados. Ese modelo ha sido ampliado en [4].

Se ha desarrollado un software que, basándose en el modelo anterior permite efectuar la división relacional difusa siguiendo las propuestas de distintos autores. El software permite utilizar los dos tipos de información difusa, esto es, dependiendo del modelo de división, hemos implementado la relajación de la operación de división relacional difusa mediante el uso de datos difusos, y mediante la relajación de las condiciones de las mismas.

Además, también se han desarrollado propuestas que permiten la relajación de la división a través de la elección de distintos cuantificadores aplicables a dichas propuestas, de tal manera que se podrán utilizar cuantificadores de la división distintos al cuantificador universal o para todos, usando cuantificadores como el existencial, es decir, que cumple alguno de los requisitos, u otros cuantificadores como la minoría, la mayoría, etc.

2 TIPOS DE DIVISIONES

A continuación resumimos las distintas divisiones difusas que se han implementado en este trabajo.

2.1. DIVISIÓN DE MOUADDIB

Se basa en la identificación de objetos que tienen similares características. Para su propuesta [5] de división utilizan un modelo de bases de datos simple que consiste en añadir un grado a cada tupla de las relaciones con el sentido de pertenencia, aunque también se puede interpretar como medida de certeza. Por tanto, el tipo de dato difuso que se puede representar en su división es un escalar y un grado asociado a dicho escalar. Estos escalares además, deben tener una función de similitud definida entre ellos.

Su propuesta de división es interesante ya que permite introducir como dato difuso los escalares con funciones de similitud, pero es muy limitado. Por ejemplo, sólo definen la división cuando hay una columna común entre las relaciones de la división, lo cual resulta excesivamente estricto. Tampoco relajan el cuantificador universal de la división.

2.2. DIVISIÓN DE UMANO/FUKAMI

Esta división se define sobre un modelo de bases de datos relacionales difusas dotado de mucha expresividad, ya que permite el uso de muchos tipos de información difusa: distribuciones de posibilidad, rangos numéricos y etiquetas para representar que la información es desconocida, no definida o no aplicable, etc.

Sin embargo, en su propuesta de división relacional difusa [6] consideran que en el resultado de la división R÷S aparecerán las tuplas tales que los valores del grado (μS) para todas las tuplas de S son menores o iguales que los valores del grado (μR) en las tuplas correspondientes, entendiendo a μR **y** μS como grado de pertenencia a sus respectivas relaciones.

No explican detenidamente qué hacer en una división difusa si nos encontramos distribuciones de posibilidad como valores de los atributos. Por tanto, hemos implementado está división con relaciones que contienen datos clásicos o "crisp" como atributos y un grado de pertenencia asociado a cada tupla. Tampoco relajan el cuantificador universal de la división.

2.3. DIVISIÓN DE BOSC ET AL.

Esta propuesta [1] opta por la utilización de las relaciones en forma clásica añadiendo un grado asociado a un único atributo de cada relación.

Lo interesante de esta propuesta es que proponen distintas soluciones a la operación en base al significado con el que participe cada grado. Así, podemos utilizar grados de cumplimiento o de importancia, y para cada combinación de estos significados en las relaciones de la división, se utilizará una implicación distinta para la resolución de su división. Además, sólo podremos usar un criterio en la división ya que sólo contemplan un grado por tupla, y en ciertos casos los resultados son poco intuitivos. Tampoco relajan el cuantificador universal de la división.

2.4. DIVISIÓN DE YAGER

Encontramos, de nuevo, una propuesta de división difusa [8] basada en relaciones clásicas que sólo añaden un grado a cada tupla. Sin embargo, en su división el cuantificador utilizado puede relajarse, mediante el uso de operadores OWA (Ordered Weighted Average) [9] permitiendo a través de ellos, definir los cuantificadores. Ejemplos de ellos podrían ser el cuantificador existencial, universal, "La Mayoría", "Aproximadamente la mitad", etc.

2.5. DIVISIÓN DE VILA ET AL.

Vila, Cubero, Medina y Pons proponen [7] un modelo de bases de datos que permite el almacenamiento de distribuciones de posibilidad, y además, definen como hacer la operación de división en caso de que este tipo de datos esté presente en la operación.

Para ello, definen un nuevo operador denominado compresión, que dada la operación R(A, B) ÷ S(B), el resultado de comprimir la relación R será otra relación $\delta_B(R)$, tal que sólo tendrá una tupla por cada valor diferente de A y la relación S se convertirá en una única tupla.

Las distribuciones de posibilidad resultantes de ambas relaciones contendrán los pares valor/posibilidad de todas las distribuciones de posibilidad incluidas en las relaciones originales tomando los valores máximos para cada valor del dominio subyacente.

También permiten en su división el uso de cuantificadores difusos.

2.6. DIVISIÓN DE GEFRED

La división de GEFRED está implementada sobre su propio modelo que es una síntesis ecléctica de muchos otros modelos y por tanto, uno de los que más tipos de información difusa puede representar. La Tabla 1 representa algunos de los tipos de datos que se permiten.

Para realizar la división difusa utilizan la formula clásica de la división haciendo ligeros retoques para adaptarla a la naturaleza imprecisa de la información. Esto, implica la redefinición del resto de operadores algebraicos para adaptarlos al tratamiento de la información imprecisa.

GEFRED define de nuevo todos los operadores del álgebra relacional en lo que denominan el álgebra relacional difuso, esto dota las operaciones de mayor potencia al permitir la relajación de las restricciones de las condiciones de los operadores a través de los comparadores difusos definidos para tal fin.

Todos estos operadores añaden un grado al resultado de la operación para indicar el grado de pertenencia de las tuplas resultantes sobre la operación realizada.

Al igual que los dos modelos anteriores también define el uso de cuantificadores de la división. Es por tanto el modelo de división más potente por permitir mayor tipo de operaciones y mayor flexibilidad.

Tabla 1: Tipos de datos soportados por GEFRED

1. Un escalar simple. Ej: {1/Grande} (Tamaño = Grande)
2. Un número simple. Ej: {1/28} (Edad = 28)
3. Un conjunto de posible asignaciones de escalares excluyentes. Ej: {1/Bueno, 1/Malo}
4. Un conjunto de posibles asignaciones excluyentes de números. Ej: {1/20, 1/21} (Edad = {20, 21})
5. Una distribución de posibilidad en el dominio de los escalares. Ej: Aptitud = { 0.6/Malo 0.7/ Normal}
6. Una distribución de posibilidad en el dominio de los números. Ej: Edad = {0.4/23, 1/24, 0.8/25}
7. Número real que represente un grado de cumplimiento dentro del intervalo unitario [0,1]. Ej: Calidad = 0.9
8. Un valor desconocido (Unknown) sobre el dominio U considerado. Unknown={1/ u: u∈ U}
9. Un valor indefinido (Undefined) sobre el dominio U considerado. Undefined={0 / u: u∈ U}
10. Un valor nulo o no aplicable (Null) sobre el dominio U considerado. Unknown={1/Unknown, 1/Undefined}

3 SOFTWARE

El software ha sido desarrollado mediante el lenguaje de programación java para conseguir que la aplicación sea multiplataforma.

Como SGDB relacional, hemos optado por Oracle, ya que utilizamos el modelo de GEFRED para la representación y el almacenamiento de la información difusa y dicho modelo está implementado en ese SGBD.

Para conseguirlo lo hacen a través de dos mecanismos principalmente, mediante el almacenamiento de metadatos (datos sobre los datos difusos) y mediante la creación de paquetes y funciones escritos en lenguaje PL/SQL, a través de los cuales se definen los operadores relacionales difusos, los comparadores e incluso un analizador semántico que reconoce la sintaxis escrita en lenguaje FSQL (Fuzzy SQL), descrito en [4], junto con el modelo de implementación de bases de datos difusas. Con todo ello, sintetizando, se consigue representar y manipular los datos mostrados en la Tabla 1.

FSQL es un lenguaje basado en SQL y que permite operaciones difusas. Especialmente las consultas difusas son muy potentes, teniendo mucha variedad de comparadores difusos, posibilidad de usar cuantificadores difusos, umbrales de cumplimiento, etc.

El esquema de funcionamiento es el que puede verse en la Figura 1.

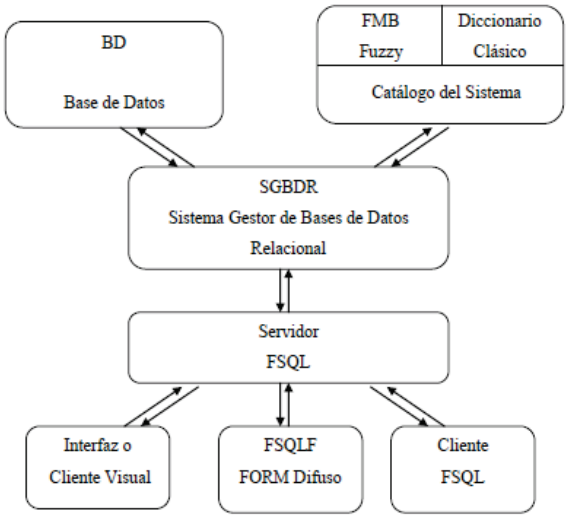


Figura 1: Modelo General del servidor

3.1. FQDIVISION

La aplicación FQDivision [2] permite la creación, el lanzamiento y la gestión de consultas tanto clásicas como difusas. Tiene una interfaz gráfica ligera y permite la creación y edición de varios documentos.

Para efectuar las divisiones difusas dispone de una serie de cuadros de diálogo para cada una de las propuestas de división expuestas anteriormente, adaptándose a las características de cada una de ellas, como puede verse en la Figura 4 y la Figura 5 .

Para esto, ha sido necesario la ampliación del servidor FSQL para añadir soporte a las divisiones. Se ha mantenido la misma filosofía utilizada por el servidor FSQL, mediante el uso de una interfaz cliente-servidor. Se han creado nuevos paquetes PL/SQL para la implementación de cada una de las divisiones.

Siguiendo el mecanismo utilizado por el servidor FSQL, cuando se lanza una división difusa se obtiene del servidor una consulta SQL, que al lanzarla contra la base de datos obtiene el resultado de la división relacional difusa lanzada.

Ya que debe existir una comunicación bidireccional se ha tenido que crear además, un mecanismo de comunicación bidireccional para el envío de los parámetros de la división y la recogida de los resultados. Por tanto, hemos añadido nuevos objetos a los metadatos ya definidos por el servidor FSQL para completar dicha información.

4 EJEMPLO

Tengamos en cuenta dos relaciones difusas, PLAYERS y SEARCH, donde PLAYERS (Tabla 2) es una relación que contiene el nombre de jugadores de baloncesto, por

ejemplo, el equipo al que pertenece y dos columnas difusas, altura (HEIGHT) y calidad (QUALITY), definidas sobre referencial ordenado y. SEARCH es una relación que contiene solamente las columnas altura y calidad y que representa a los requisitos de búsqueda de la división que puede verse en la Tabla 3. La definición de altura puede verse en la Figura 2

Tabla 2: Tabla PLAYERS Relación origen (R).

Player	Team	Height	Quality
P1	Córdoba	SHORT	VERY_GOOD
P2	Córdoba	VERY_TALL	BAD
P3	Granada	SHORT	VERY_GOOD
P4	Granada	VERY_TALL	BAD
P5	Granada	198	REGULAR
P6	Málaga	SHORT	VERY_GOOD
P7	Málaga	TALL	BAD
P8	Málaga	VERY_TALL	VERY_GOOD
P9	Sevilla	SHORT	GOOD
P10	Sevilla	VERY_TALL	BAD
P11	Sevilla	NORMAL	GOOD
P12	Cádiz	VERY_TALL	VERY_GOOD
P13	Cádiz	SHORT	GOOD
P14	Almería	TALL	VERY_GOOD
P15	Almería	SHORT	REGULAR
P16	Huelva	TALL	VERY_GOOD
P17	Jaen	VERY_TALL	REGULAR

Tabla 3: Tabla SEARCH Relación destino (S).

Height	Quality
SHORT	VERY_GOOD
VERY_TALL	BAD

En este caso concreto las relaciones están definidas según el modelo de GEFRED. Por ello, utilizaremos su propuesta de división. Tras escoger estas tablas como participantes de la división, escogeremos ese tipo de división del listado de implementaciones disponibles que facilita el software, como se ve en la Figura 3.

Mas tarde, en el cuadro de diálogo específico de la división de GEFRED, seleccionaremos todos los parámetros de la división a realizar, esto es, las columnas comunes a ambas relaciones, que representan los requisitos, las columnas no comunes que serán las que obtengamos del resultado de la división, así como las restricciones que queramos utilizar.

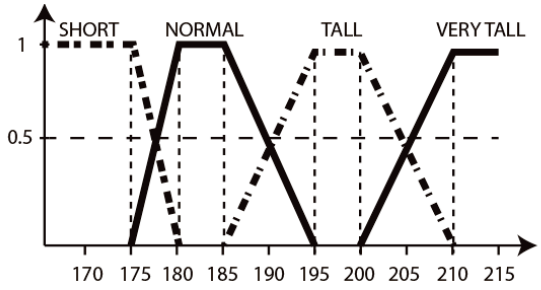


Figura 2: Definición de la etiqueta HEIGHT

Algunas de estas restricciones pueden ser, por ejemplo, el tipo de cualificador, o el comparador difuso utilizado para la comparación de las columnas comunes, en nuestro caso hemos elegido el operador FEQ (Fuzzy Equal, o Posiblemente Igual), un umbral escogido para filtrar los resultados, y el tipo de cuantificador utilizado.

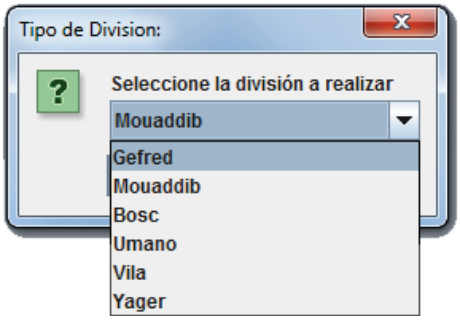


Figura 3: Selección del tipo de división.

En Figura 4 puede verse la forma en la que se han seleccionado los requisitos.

Así pues, una vez lanzada la operación, el resultado que vamos a obtener de la aplicación tendrá 3 partes: la relación resultante con los grados de cumplimiento, cada una de las relaciones implicadas en la división para que podamos comparar los resultados, y además, la traducción en lenguaje SQL de la consulta, que se ha realizado para obtener la división solicitada.

El resultado del lanzamiento de esta división con los parámetros especificados en la Figura 4 es el que puede verse en la Figura 6.

Como puede verse el resultado obtenido es el esperado, ya que por ejemplo los equipos de Córdoba y Granada obtienen un grado de 1 al cumplir totalmente con los requisitos buscados, sin embargo, Sevilla actúa con grado 0.75 porque no cumple completamente el requisito SHORT, VERY GOOD, pero sí que existe una tupla similar, la del jugador P9 que actúa con SHORT y GOOD.

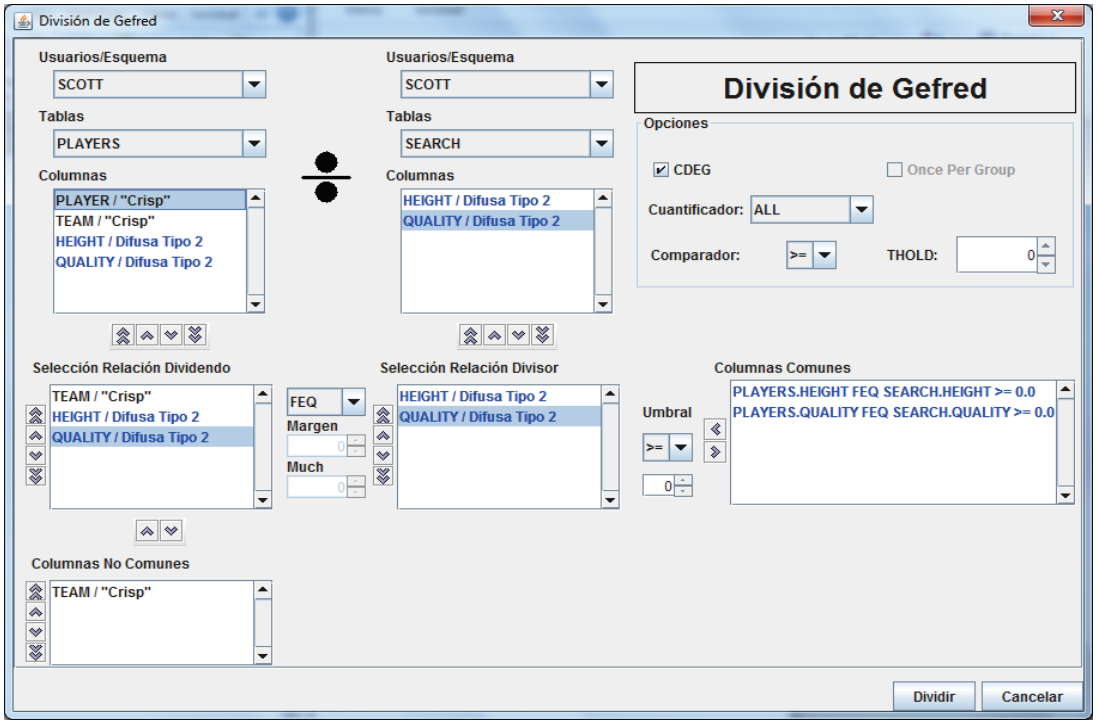


Figura 4: Cuadro de diálogo de la división de GEFRED.

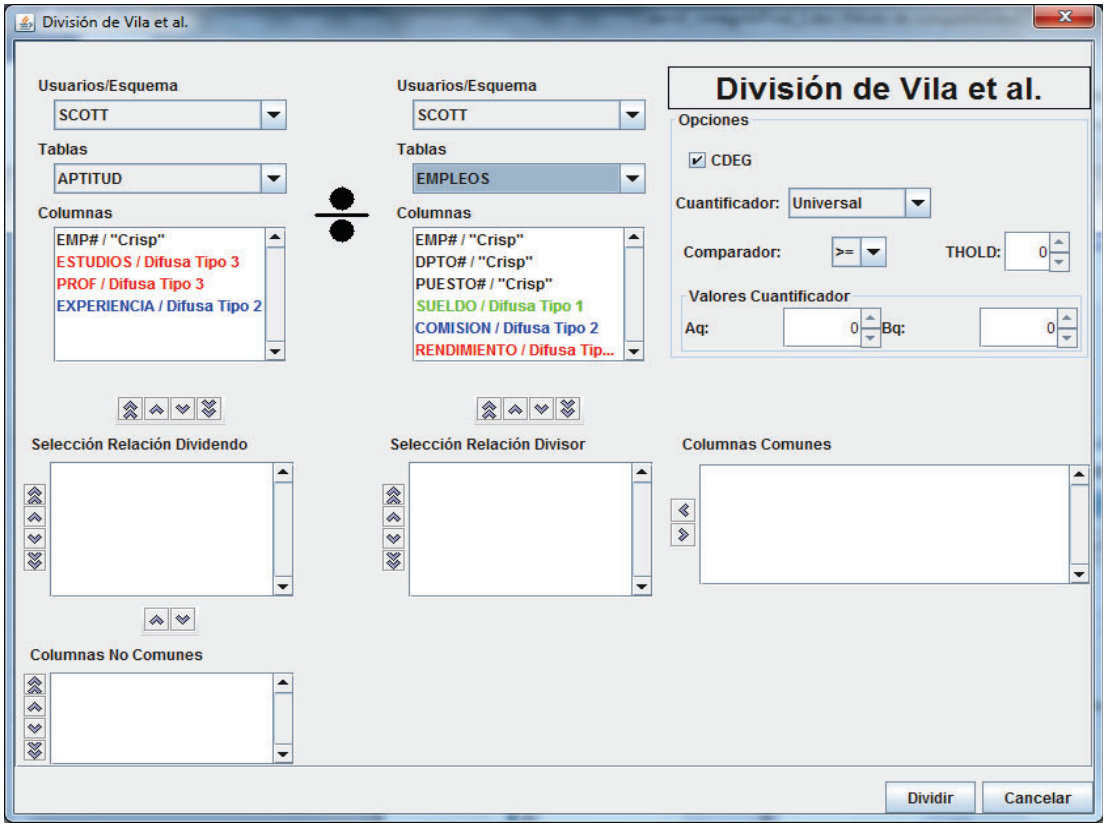


Figura 5. Cuadro de diálogo de la división de Vila.

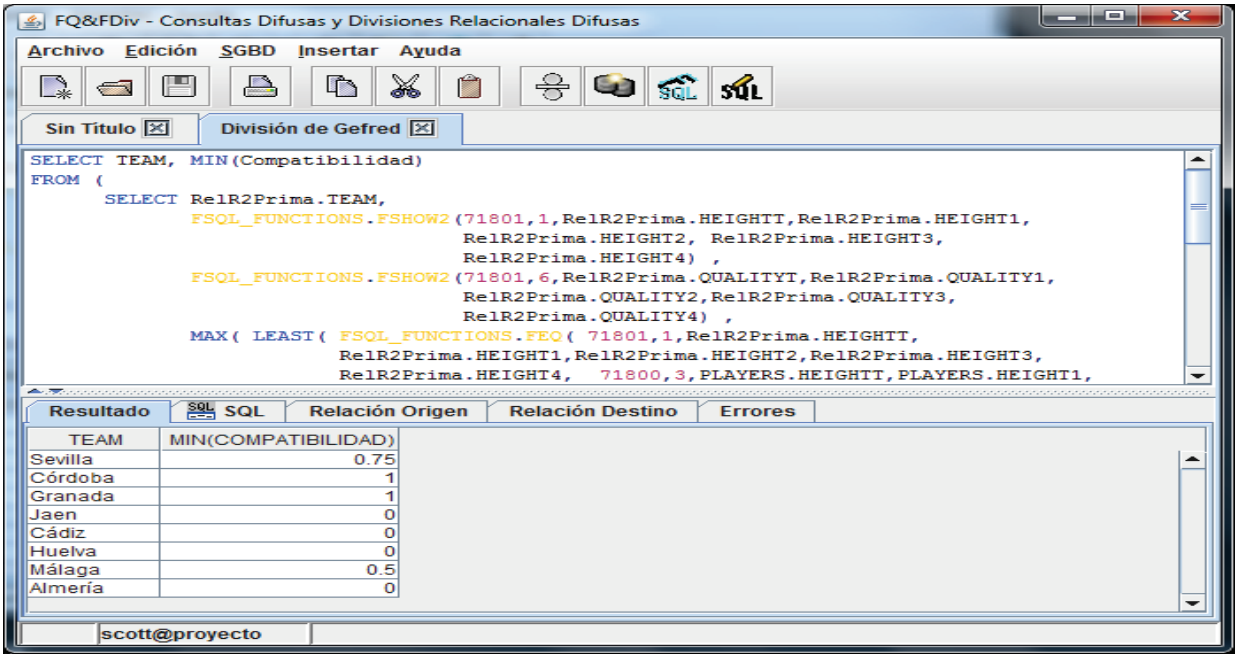


Figura 6: Ventana de resultado de la división (abajo), y la traducción SQL (arriba).

Conclusiones

El software que hemos desarrollado es una herramienta orientada al tratamiento de los distintos modelos de divisiones relacionales difusas para poder estudiar su comportamiento y poder dar a conocer y comparar las distintas propuestas escogidas para su implementación.

Además, es una herramienta para el lanzamiento y la gestión de consultas tanto clásicas como difusas, por lo que creemos que el programa es muy útil, permitiendo el uso en muchas plataformas distintas ya que está desarrollado en Java.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido incluido dentro del proyecto TIN2011-26046 del gobierno de España.

Referencias

[1] P. Bosc, D. Dubois, O. Pivert, H. Prade, “Flexible queries in relational databases – The example of the division operator”. Theorical Computer Science 171, pp. 281-302, 1997

[2] D.E. Casas del Rosal, “Implementación y Comparación de Distintos Modelos de División Relacional Difusa en Bases de Datos Difusas”. Proyecto Fin de Carrera, ETSI Informática, dirigido por J. Galindo. Universidad de Málaga, 2013.

[3] J. Galindo, J.M. Medina, J.C. Cubero, M.T. García, "Relaxing the Universal Quantifier of the Division in Fuzzy Relational Databases". International Journal of Intelligent Systems, Vol. 16-6, pp. 713-742, 2001.

[4] J. Galindo, A. Urrutia, M. Piattini, "Fuzzy Databases: Modeling, Design and Implementation". Idea Group Publishing Hershey, USA, 2006.

[5] N. Mouaddib. “Fuzzy Identification in Fuzzy Databases: The Nuanced Relational Division”. International Journal of Intelligent System. 9 pp. 461-473. 1994.

[6] M. Umano, M. Fukami, Fuzzy Relational Algebra for Possibility-Distribution-Fuzzy-Relational Model of Fuzzy Data. Journal of Intelligent Information Systems 3, pp. 7-28, 1994.

[7] M. A. Vila, J C. Cubero, J. M. Medina, O. Pons, “The Generalized Selection: An Alternative Way for the Quotient Operation in Fuzzy Relational Databases”. In “Fuzzy Logic Computing”. Eds B. Bouchon-Meunier, R. R. Yager, L. A. Zadeh, pp. 241-250. World Scientific, 1995

[8] R. R. Yager, “Fuzzy Quotient Operators for Fuzzy Relational Databases”. First Int. Fuzzy Engineering Symposium, IFES’91, pp. 289-296, 1991.

[9] R.R. Yager: E-Z OWA weights. En: *Proceedings of the 10th IFSA World Congress*, Istanbul (Turkey), pp. 39-42, 2003.

CONTRACTIBLE AND RECURSIVELY REDUCTIBLE MEASURES OF SPECIFICITY

Luis Garmendia[1], **Ramon Gonzalez-del-Campo**[2], **Ronal R. Yager**[3]

[1]*Address1*, lgarmend@fdi.ucm.es
[2]*Address2*, rgonzale@estad.ucm.es
[3]*Address3*, yager@panix.com

Abstract

The contractible measures of specificity and recursively reductible measures of specificity allow to compute the measure of specificity of a fuzzy set from a previous one. They are useful when the cardinality or the universe of discourse is decreased without computing the measure of specificity for the new fuzzy set again. These kind of measures of specificity allow to compute very efficiently without resorting the membership degree of the new fuzzy set.

Keywords: Fuzzy sets, Measures of specificity, Contractible measures of specificity.

1 Introduction

Measures of specificity [1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10] are useful measures of information for fuzzy sets to know how useful they are to choose an element from the universe. They have also been defined for interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and type-2 fuzzy sets [4, 11, 12].

In real life, a universe of candidates can grow up or can be decreased, specially when it is a set of candidates and it is needed to choose a subset of it. Yager's Expansible measures of specificity [13] have the characteristic that they do not change when a new candidate has been added to the universe of discourse with a membership degree zero in a new expanded fuzzy set on a universe with one more candidate.

In [5] the recursive measures of specificity are introduced to compute measures of specificity of fuzzy sets when the universe of candidates is increased with an element with any membership degree using the previously computed measure and taking a constant bounded number of operations, and so, without sorting again all the membership degrees.

In this paper it is defined a dual concept: contractible measures of specificity for reductible fuzzy sets.

This paper's goal is to define dual concepts from expansible and recursive measures of specificity to solve performance problems when we are computing the specificity measure of a fuzzy set and the universe is decreased using a constant bounded number of operations and without a resort of all the membership degrees of the expanded fuzzy set.

2 Preliminaries

Definition 2.1. *A fuzzy set μ on $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ is normal if there exists an element e_i in X such that $\mu(e_i) = 1$.*

Definition 2.2. *A fuzzy set μ on $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ is a singleton if there exists an element e_i in X such that $\mu(e_i) = 1$ and $\mu(e_j) = 0$ for all elements e_j in X with $i \neq j$.*

Definition 2.3. *[6] Let $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ be a finite universe and let $[0,1]^X$ be the class of fuzzy sets on X. A measure of specificity Sp is a mapping $Sp : [0,1]^X \to [0,1]$ such that:*

- *$Sp(\mu) = 1$ if and only if μ is a singleton.*
- *$Sp(\emptyset) = 0$.*
- *If μ and ν are normal fuzzy sets and $\mu \subseteq \nu$, then $Sp(\mu) \geq Sp(\nu)$.*

Definition 2.4. *[6] The linear measure of specificity of a fuzzy set A on a finite space $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ is defined as follows:*

$$Sp_{\overrightarrow{w}}(A) = a_1 - \sum_{j=2}^{n} w_j a_j$$

where a_j is the j^{th} greatest membership degree of A and $\{w_j\}$ is a set of weights verifying:

- *$w_j \in [0,1]$*
- *$\Sigma_{j=2}^{n} w_j = 1$*

Definition 2.5. *[13] The fractional measure of specificity is defined as follows:*

$$Sp(A) = a_1^2 / \sum_{j=1}^{n} a_j$$

where a_j is the j^{th} greatest membership degree of A.

Definition 2.6. *[6] The product measure of specificity is defined as follows:*

$$Sp(A) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (ka_j + (1-a_j))$$

where k is in [0,1].

Definition 2.7. *[13] Let A be an fuzzy set on $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ and let A' be an extended fuzzy set of A on $X' = \{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$. A measure of specificity Sp is expansible if it satisfies the following condition:*

$$\text{If } A'(e_{n+1}) = 0 \text{ then } Sp(A) = Sp(A')$$

3 Contractible Measures of specificity

In [13] Yager's expansible measures of specificity were showed. A dual concept is introduced as contractible measure of specificity when the specificity does not change when some candidates are eliminated from the universe. The weak contractible measures of specificity is introduced when candidates are eliminated with a membership degree equal to zero and the measure of specificity does not change.

Let $\{a_1, \ldots, a_n\}$ be the membership degrees of a fuzzy set A_X decreasing ordered on a universe $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Definition 3.1. *The k-reduction of a fuzzy set A_{X^k} is as fuzzy set on $X^k = X \setminus \{e_{n-k+1}, \ldots, e_n\}$ such that $A_{X^k}(e_j) = A_X(e_j)$ for all j in $1, \ldots, n-k$.*

Definition 3.2. *Let A_{X^k} be any k-reduction of a fuzzy set A_X. A measure of specificity Sp is k-contractible if it is verified that $Sp(A_X) = Sp(A_{X^k})$.*

Lemma 3.1. *Let Sp be the linear measure of specificity with $w_2 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j : 3, \ldots, n$. Then Sp is a k-contractible measure of specificity if $n - k > 2$.*

Proof. Trivial □

Definition 3.3. *Let A_{X^k} be any k-reduction of A. If $A(e_r) = 0$ for all e_r in $X \setminus X^k$ then a measure of specificity Sp is weak k-contractible if it is verified that $Sp(A_X) = Sp(A_{X^k})$.*

Lemma 3.2. *If Sp is a k-contractible measure of specificity then Sp is a weak k-contractible measure of specificity.*

Proof. Trivial □

Lemma 3.3. *The fractional measure of specificity is weak k-contractible.*

Proof. Let A_X be a fuzzy set such that $A(e_q) = 0$ for all q in $n-k+1, \ldots, n$. Then:

$$Sp(A_X) = \frac{a_1^2}{\sum_{j=1}^{n} a_j} = \frac{a_1^2}{\sum_{j=1}^{k} a_j} = Sp(A_{X^k})$$

□

Lemma 3.4. *The fractional measure of specificity is not k-contractible.*

Proof.

$$Sp(A_X) = \frac{a_1^2}{\sum_{j=1}^{n} a_j} = \frac{a_1^2}{\sum_{j=1}^{k} a_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_j} < Sp(A_{X^k})$$

□

Lemma 3.5. *The product measure of specificity is weak k-contractible.*

Proof.

$$Sp(A) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (ka_j + (1-a_j)) = a_1 \prod_{j=2}^{k} (ka_j + (1-a_j))$$

$$= Sp(A_{X^k})$$

□

Lemma 3.6. *The product measure of specificity is not k-contractible.*

Proof.

$$Sp(A) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (ka_j + (1-a_j))$$

$$= a_1 \prod_{j=2}^{k} (ka_j + (1-a_j)) \prod_{j=k+1}^{n} (ka_j + (1-a_j))$$

so:

$$Sp(A) = \prod_{j=k+1}^{n} (ka_j + (1-a_j)) Sp(A_{X^k})$$

□

Lemma 3.7. *The uniformly measure of specificity is not weak k-contractible.*

Proof. Let A a fuzzy set on universe X with cardinality n. If the k lowest membership degrees are 0 then:

$$Sp(A) = a_1 - \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n} a_j = a_1 - \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n-k} a_j$$

Let A_{X^k} be the k-reduction of A. Then :

$$Sp(A_{X^k}) = a_1 - \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=2}^{n-k} a_j$$

which is different to $Sp(A)$ for any $k > 0$ □

Theorem 3.1. *If Sp is an expansible measure of specificity then Sp is weak 1-contractible.*

Proof. Let A_X be a fuzzy set on $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ such that $A(e_n) = 0$. Let Sp be an expansible measure of specificity. Then $Sp(A_X) = Sp(A_{X^1})$ so Sp is 1-contractible measure of specificity □

4 Recursively Reductible Measures of specificity

The recursively k-reductible measures of specificity are very efficiently computed when some candidates in X are rejected. They are dually defined to the recursive measures of specificity [5], but instead of increasing the universe, now it is decreased in k elements..

Definition 4.1. *A measure of specificity is recursively k-reductible if there exists a mapping $\psi : [0,1]^2 \to [0,1]$ such that:*

$$Sp(A_{X^k}) = \psi(Sp(A_X), k)$$

for any A_X.

Lemma 4.1. *If Sp is a k-contractible measure of specificity then Sp is a recursively k-reductible measure of specificity.*

Proof. Trivial with $\psi(x,y) = x$ □

Lemma 4.2. *The fractional measure of specificity is recursively k-reductible.*

Proof.

$$Sp(A) = \frac{a_1^2}{a_1 + \ldots + a_n}$$

$$= \frac{a_1^2}{a_1 + \ldots + a_{n-k} + a_{n-(k+1)} + \ldots + a_n} =$$

$$= \frac{a_1^2}{\frac{a_1^2}{Sp(A^k)} + a_{n-(k+1)} + \ldots + a_n} =$$

$$= \frac{a_1^2 Sp(A^k)}{a_1^2 + (a_{n-(k+1)} + \ldots + a_n) Sp(A^k)}$$

Then:

$$Sp(A^k) = \frac{a_1^2 Sp(A)}{a_1^2 - (a_{n-(k+1)} + \ldots + a_n) Sp(A)}$$

and

$$\psi(x,k) = \frac{a_1^2 x}{a_1^2 - (a_{n-(k+1)} + \ldots + a_n) x}$$

□

Lemma 4.3. *The product measure of specificity is recursively k-reductible.*

Proof.

$$Sp(A_X) = a_1 \prod_{j=2}^{n} (qa_j + (1 - a_j))$$

$$= a_1 \prod_{j=2}^{n-k} (qa_j + (1 - a_j)) \prod_{i=n-k+1}^{n} (qa_i + (1 - a_i))$$

$$= Sp(A_{X^k}) \prod_{i=n-k+1}^{n} (qa_i + (1 - a_i))$$

Then:

$$\psi(x,k) = \frac{x}{\prod_{i=n-k+1}^{n} (qa_i + (1 - a_i))}$$

□

Definition 4.2. *Let A_X be any fuzzy set such that $A(e_r) = 0$ for all e_r in $A \setminus A_{X^k}$. A measure of specificity is weak recursively k-reductible if there exists a mapping $\psi : [0,1]^2 \to [0,1]$ such that:*

$$Sp(A_{X^k}) = \psi(Sp(A_X), k)$$

Lemma 4.4. *If Sp is a recursively k-reductible measure of specificity then Sp is a weak recursively k-reductible-contractible measure of specificity.*

The previous results are summarized in tables 1, 2 and 3.

Table 1: Types of contractibility for some measures of specificity

	k-contractible	weak k-contractible
Linear measure with $w_2 = 1$ and $w_j = 0$	yes	yes
Linear measure	no	no
Fractional	no	yes
Product	no	yes

Table 2: Recursively k reducibility vs expansibility for some measures of specificity

	k-contractible	recursively k-reductible	expansible
Linear measure with $w_2 = 1$ and $w_j = 0$	yes	yes	yes
Linear measure	no	no	no
Fractional	no	yes	yes
Product	no	yes	yes

Table 3: Recursively function of some known recursively k-reductible measures of specificity

Measure of specificity	$\psi(x,k)$
Fractional	$\frac{a_1^2 x}{a_1^2 - (a_{n-(k+1)} + \ldots + a_n)x}$
Product	$\frac{x}{\prod_{i=n-k+1}^{n}(qa_i + (1-a_i))}$

Theorem 4.1. *A recursive measure of specificity Sp is recursively 1-reductible if there exists the inverse function of the extension mapping ϕ.*

Proof. Let A_X be an fuzzy set on $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ and let $A'_{X'}$ be an extended fuzzy set of A on $X' = \{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ with $A'(e_i) = A(e_i)$ for all e_i in X and with $A'(e_{n+1}) = b$.

Let Sp a recursive measure of specificity. Then $Sp(A') = \phi_b(Sp(A))$ and $Sp(A) = \phi_b^{-1}(Sp(A'))$. So $A = A_{X^1}$ and $\psi(x,1) = \phi_b(x)$ □

5 Conclusions

There are defined several properties of measures of specificity that can be used to easily compute them efficiently when the universe of candidates is decreased.

The contractible measures of specificity is useful to know when the specificity of a fuzzy set does not change if some elements of the universe are removed. In similar way, the recursively reductible measures of specificity allow to know how to change the specificity of a fuzzy if some elements of the universe are removed.

Both of kind of measures of specificity are then very efficient to compute keeping the knowledge of the usefulness of the information on a fuzzy set when some candidates are rejected.

Acknowledgements

We thank the support of the research project TIN2012-32482.

References

[1] L. Garmendia, R.R. Yager, E. Trillas, and A. Salvador. On t-norms based specificity measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 133(2):237–248, 2003.

[2] L. Garmendia, R.R. Yager, E. Trillas, and A. Salvador. General measures of specificity of fuzzy sets under t-indistinguishabilities. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(4):568–572, 2006.

[3] L. Garmendia, R.R. Yager, E. Trillas, and A. Salvador. A t-norm based specificity for fuzzy sets on compact domains. *International Journal of General Systems*, 35(6):687–698, 2006.

[4] R. González-del Campo, L. Garmendia, and R. Yager. Specificity for interval-valued fuzzy sets. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 5(3):452–459, 2012.

[5] R. González-del Campo, L. Garmendia, and R.R Yager. Recursive measures of specificity. In *IV Congreso español de informática CEDI 2013*, pages 1077–1084, 2013.

[6] R.R. Yager. Ordinal measures of specificity. *International Journal of General Systems*, 17:57–72, 1990.

[7] R.R. Yager. Similarity based measures of specificity. *International Journal of General Systems*, 19:91–106, 1991.

[8] R.R. Yager. Default knowledge and measures of specificity. *International Journal of General Systems*, 61:1–44, 1992.

[9] R.R. Yager. On the specificity of a possibility distribution. *Fuzzy Sets and Systems*, 50:279–292, 1992.

[10] R.R. Yager. On measures of specificity. In O. Kaynak, L.A. Zadeh, B. Turksen, and I.J. Rudas, editors, *Computational Intelligence: Soft Computing and Fuzzy-Neuro Integration with Applications*. Springer, 1998.

[11] R.R. Yager. Containment and specificity for type-2 fuzzy sets. *International Journal Of Fuzzy Systems*, 9:55–66, 2007.

[12] R.R. Yager. On the measure of specificity of intuitionistic fuzzy sets. *NAFIPS 2008 - Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*, pages 677–682, 2008.

[13] R.R. Yager. Expansible measures of specificity. *Int. J. General Systems*, 41(3):247–263, 2012.

APLICACIÓN DE LA LÓGICA FUZZY A LA CREACIÓN ÁREAS CORTAFUEGOS COMPATIBLES CON LA EXTRACCIÓN DE BIOMASA CON FINES ENERGÉTICOS

Irma Fernández Migueláñez [1], Javier Madrigal Olmo [2], Luis Garmendia Salvador [3], Carmen Hernando Lara [2], Mercedes Guijarro Guzmán [2]

[1] irma.fermi@gmail.com

[2] *INIA, Centro de Investigación Forestal. Laboratorio de Incendios forestales. Ctra. Coruña km 7,5 28040 Madrid* , incendio@inia.es

[3] *Departamento de Inteligencia Artificial e ingeniería del Software. Facultad de Informática, UCM,* lgarmend@fdi.ucm.es

Resumen

En el contexto del proyecto *Life+ Bioenergy and Fire Prevention* se ha considerado la necesidad de realizar un estudio exhaustivo de las implicaciones de la explotación de biomasa para la prevención de incendios forestales en el área denominada Macizo de Caroig, en el Oeste de la provincia de Valencia.

El problema que tienen muchas zonas mediterráneas con crecimientos bajos, fuertes pendientes (dificultad de mecanización) y escasez de mercado de madera es que estos aprovechamientos han dejado de ser rentables. La biomasa sería una alternativa comercial para los excedentes de madera en pie que tienen muchos montes actualmente sin explotación. Se está planteando en diversos foros que el impulso de estos aprovechamientos supondría además una mejora de la prevención de incendios por disminución de la biomasa existente.

La creación de áreas cortafuegos aplicando la lógica fuzzy puede ayudar a flexibilizar las actuaciones ya que permite considerar la pendiente del terreno y degrada las zonas de desbroce, lo que puede facilitar su gestión, reduciendo los impactos visuales de diseños basados en buffer lineales, como los establecidos hasta ahora. El objetivo de este estudio es evaluar la validez de lógica fuzzy para planificar redes cortafuegos y comparar las superficies de actuación con las obtenidas con un buffer lineal.

Los resultados obtenidos en la construcción de áreas cortafuegos mediante lógica fuzzy demuestra que la superficie estimada en el escenario fuzzy es significativamente menor que utilizando el buffer lineal, lo que supondría una optimización de los recursos a la hora de ejecutar el mantenimiento de las redes de cortafuegos flexibilizando su ejecución y minimizando el impacto visual.

Palabras Clave: Áreas Cortafuegos, Biomasa, Incendios Forestales, Lógica fuzzy.

1 INTRODUCCIÓN

1.1. PROYECTO LIFE+ "BIOENERGY AND FIRE PREVENTION"

En junio de 2010 fue aprobado por la Comisión Europea el proyecto *LIFE+ Bioenergy and Fire Prevention,* para un periodo de ejecución de octubre 2010 a septiembre de 2013. El objetivo principal es proponer una metodología que permita la ordenación de los Montes Públicos con aprovechamiento principal de biomasa compatible con la prevención de incendios forestales, (http://www.bioenergy-project.eu/).

1.2. LA BIOMASA

Entre los beneficios de la biomasa forestal se han citado: la seguridad de suministro (debido a que la tasa de extracción de madera española es del 41% que contrasta con la tasa europea del 69%, [1]), la disminución de emisiones de gases de efecto invernadero (entre un 55% y un 98%, en comparación con los combustibles fósiles), su potencial de creación de empleo y el desarrollo económico de zonas rurales (debido a que la totalidad de esta biomasa se extrae en áreas rurales en general con bajos niveles de desarrollo económico y despoblación).

La disminución del riesgo de incendios y facilidad de extinción, es otra de las ventajas más beneficiosas de la biomasa [2], mediante: la reducción de los residuos agrícolas y forestales que van a vertederos; reducción de la erosión y desertificación; contribución a la gestión del matorral para prevenir incendios, a la regeneración natural

y al crecimiento y calidad de las masas forestales; mejora de la gestión forestal mediante la realización de planes de silvicultura sobre montes arbolados y matorral al eliminar la vegetación de competencia y mejora el estado fitosanitario de los montes reduciendo el riesgo de plagas y de contaminación ambiental.

Como consecuencia de estas ventajas y de la mejora de los sistemas de obtención de energía (térmica y eléctrica), la biomasa forestal se está proponiendo como una energía renovable de futuro, [3]. Sin embargo impedimentos legales (moratoria sobre primas a la biomasa como energía renovable) y técnicos (falta de rentabilidad de aprovechamientos forestales en áreas mediterráneas de baja producción forestal) están dificultando su puesta en marcha.

1.3. MODELOS DE COMBUSTIBLE

Un objetivo esencial en la gestión del fuego es predecir el comportamiento y los efectos de un incendio en la naturaleza. Para ello es necesario conocer la combustibilidad, entendida como la capacidad del sistema forestal para mantener y extender un fuego, teniendo en cuenta la meteorología y la topografía. El análisis de la combustibilidad se realiza mediante los denominados modelos de combustible basados en la estructura de la vegetación.

Recientemente, el Consorcio de bomberos de Valencia y la Unidad de Brigadas de Emergencia en base a los modelos realizados por Scott y Burgan [4], también han propuesto una nueva clasificación de modelos de combustible para la provincia de Valencia, [7]. Esta adaptación es debida a una gran diversidad de estructuras de matorral, y a la inclusión del concepto de modelos de pasto de terrenos rurales abandonados por la agricultura.

2 ZONA DE ESTUDIO

La zona de estudio está formada por el Macizo de Caroig (Figura 1). Se localiza en la provincia de Valencia, dentro de la Comunidad Valenciana. Se trata de una superficie de aproximadamente 130541,7 hectáreas en las que se agrupan un total de 18 municipios. Las coordenadas UTM son (665068,57; 4355699,61), (687620,32; 4295207,75), (664680,90; 4354885,73) y (704101,00; 4317277,41).

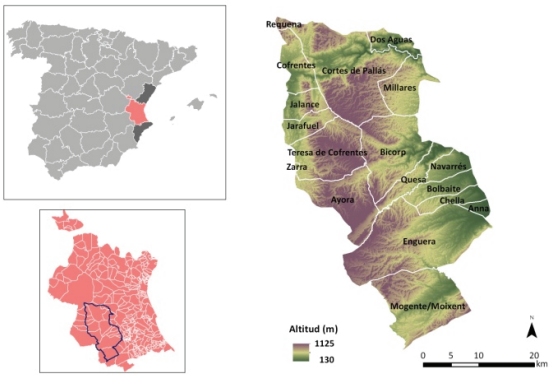


Figura 1: Situación del Macizo de Caroig.

Gran parte del territorio forestal tiene diferentes figuras de protección (Red Natura 2000, LICS, ZEPA), en concreto 80515,2 hectáreas pertenecen a zonas LIC (Lugares de Importancia Comunitaria son todos aquellos ecosistemas protegidos con objeto de contribuir a garantizar la biodiversidad mediante la conservación de los hábitats naturales y de la fauna y flora silvestres) y 86940,8 hectáreas de zonas ZEPA (Zona de Especial Protección para las Aves).

Los modelos de combustible presentes en la zona de estudio se detallan en la Figura 2.

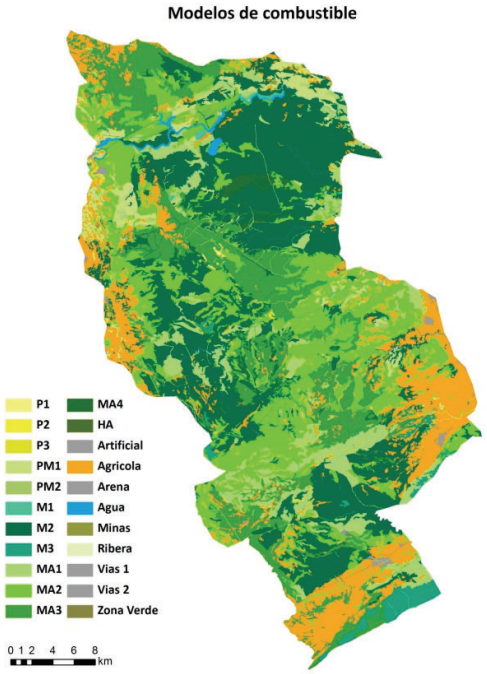


Figura 2: Modelos de combustible del Macizo de Caroig. FUENTE: Consorcio de Bomberos de Valencia.

Tabla 1: Superficie ocupada por cada modelo de combustible y su porcentaje respecto a la superficie total de la zona de estudio.

	Modelos de combustible	Superficie (ha)
Pastizal	**P1**	385,27
	P2	
	P3	
Pastizal- matorral	**PM1**	25884,42
	PM2	
Matorral	**M1**	42774,61
	M2	
	M3	

Matorral bajo arbolado	**MA1**	59084,41
	MA2	
	MA3	
	MA4	
Hojarasca bajo arbolado	**HA**	
No combustibles	-	22823,71

La totalidad de los terrenos forestales de la Comunidad Valenciana tienen la consideración de "zonas de alto riesgo de incendios forestales" según la resolución de 19 de julio de 2005, [8].

En lo referente a la gestión forestal, la Comunidad Valenciana está dividida en once demarcaciones, según la ley forestal de la Generalitat Valenciana, [9]. El macizo de Caroig es un área comprendida entre las demarcaciones de Xátiva, Requena y Llíria de alto interés para el proyecto *Bioenergy and Fire Prevention,* debido a que presenta gran cantidad de superficie forestal sin explotación que se considera interesante para su aprovechamiento energético. Se dispone del Plan de Prevención de Incendios Forestales de la Demarcación de Xàtiva, [10].

La probabilidad de que se produzca un GIF (Gran Incendio Forestal de más de 500 ha) aumenta cuando se dan condiciones meteorológicas adversas (que pueden concretarse fundamentalmente en: alta temperatura, baja humedad relativa y alta velocidad del viento), además, la peligrosidad del incendio viene determinada por las características topográficas de la zona, así como por las características del combustible.

Tanto la acumulación de biomasa como la desaparición de zonas de discontinuidad suponen un cambio en la estructura de los sistemas forestales que provoca un aumento de la peligrosidad de los incendios, superando en ocasiones la capacidad de los medios de extinción para controlar el incendio. Ante esta problemática, dentro de las líneas de actuación que forman parte de este plan, está la construcción o conservación de Áreas Cortafuegos.

El dimensionamiento de los elementos de ruptura se hace en función de la longitud de llama prevista, de acuerdo con los modelos de combustible presentes en cada zona y para unas condiciones meteorológicas características en los días de máximo riesgo.

3 PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN

Las áreas cortafuegos se construyen con el fin de fraccionar el territorio como medida preventiva de los incendios forestales, siendo infraestructuras de apoyo y seguridad fundamentales en las operaciones de extinción. El alto coste de apertura y mantenimiento de cortafuegos puede verse en parte paliado por el aprovechamiento energético, al menos en una primera intervención. No obstante, un diseño adecuado determinará la forma óptima del área para que, cumpliendo los objetivos preventivos, permita optimizar la superficie de actuación reduciendo los costes de mantenimiento.

El Plan de la Demarcación de Xátiva establece unas anchuras de las áreas en torno a un eje (camino, pista o zona decapada a suelo mineral), dependiendo del modelo de combustible que atraviese. Así, un modelo de matorral tiene unas medidas, en cuanto a anchura del cortafuego, más ancho, que un modelo de arbolado ya que se prevén más velocidades de propagación e intensidades de llama. Dicho Plan de la Demarcación establece unas medidas bastante rígidas para la red de cortafuegos. Estas áreas se dividen transversalmente en tres fajas o bandas: banda de decapado, banda de desbroce y bandas auxiliares.

Aplicar la lógica fuzzy en la construcción de estas áreas puede ayudar a flexibilizar las actuaciones ya que permite considerar la pendiente del terreno y degrada las zonas de desbroce, lo que puede facilitar su gestión, reduciendo los impactos visuales de diseños basados en buffer lineales, como los establecidos hasta ahora. El objetivo de este estudio es evaluar la validez de lógica fuzzy para planificar redes cortafuegos y comparar las superficies de actuación con las obtenidas con un buffer lineal.

4 ANÁLISIS FUZZY

Las tecnologías de sistemas de información geográfica permiten definir un conjunto borroso 'cercano a un cortafuegos' definido sobre un universo de pixeles del ráster de entrada, asignándole un grado de pertenencia entre 0 y 1, en función de un algoritmo de difuminación especificado.

La herramienta utilizada en ArcGIS Desktop 10 es *Fuzzy Membership* y la función de transformación aplicada es una función lineal entre los valores mínimos y máximos especificados, en este caso el valor mínimo es el 0 (valor del eje central o banda de decapado del cortafuegos) y el valor máximo es el ancho de la banda de desbroce, determinado en la Tabla 2, por lo que se representa una transformación lineal de pendiente positiva, como se observa en la Figura 3 la línea azul. De esta manera, las distancias cercanas a la banda de decapado pertenecen a la zona donde se inicia la degradación del desbroce a realizar, extrayendo un mayor porcentaje de vegetación respecto a los valores cercanos a la banda de desbroce donde el porcentaje de extracción será menor. Aplicando la lógica fuzzy en la banda de desbroce se obtiene un gradiente como el que supondría hacer una degradación desde el eje central de los cortafuegos hasta el final de la banda de desbroce.

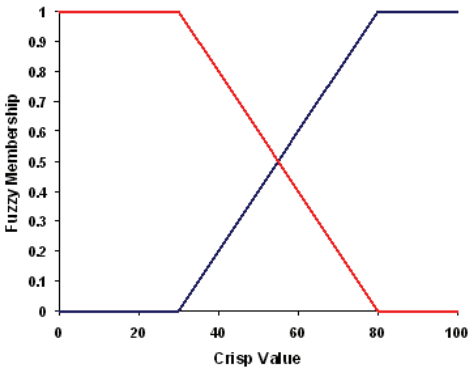


Figura 3: Función lineal *Fuzzy* Membership, [11].

Se consideraron dos tipos de buffer a realizar. El buffer lineal se realiza mediante la herramienta Buffer de ArcGIS 10 y consiste en una zona de amortiguamiento de ancho dado constante alrededor de, en este caso, de la banda de decapado del cortafuegos. Y el buffer difuso es el creado a partir de la modelización del terreno, considerando su pendiente, mediante la herramienta *Cost Distance*. Sobre este buffer se puede aplicar la lógica fuzzy, en el sentido de obtener la anchura del área cortafuegos depende del orden del área cortafuegos, según lo asignado por el fraccionamiento del territorio y los modelos de combustible. Para el mejor uso de las herramientas se utilizan los modelos de combustible en los 4 grandes grupos detallados en la Tabla 1.

El buffer lineal (decapado) que coincide con el ancho de la red, tiene unas medidas distintas según sea de orden 1 (6 metros) y de orden 2 (3 metros). Las bandas de desbroce tienen distintos valores según el modelo de combustible que atraviesen (Tabla 2).

Tabla 2: Medidas medias de las áreas cortafuegos según el orden y el modelo de combustible [10].

Orden	Modelos	Banda de decapado (m)	Banda de desbroce (m)	Longitud (m)
1 orden	Pasto	6	12	8,08
	Matorral		70	157,78
	Pasto-matorral		30	172,56
	Matorral bajo arbolado		50	173,03
2 orden	Pasto	3	5	2,86
	Matorral		30	114,49
	Pasto-matorral		15	93,67
	Matorral bajo arbolado		20	144,25

En el resto de la superficie de la zona de estudio se consigue un ráster a partir de pendientes reclasificadas en 0-5% (1), 5-10%(2), 10-30%(3), 30-60%(4) (límite de mecanización) y <60% (5), en el que mediante *Cost Distance*, se consigue una capa ráster con distancias que tienen en cuenta el esfuerzo que causa recorrerlas.

Las herramientas de *fuzzy membership*, usan esta capa para hacer que las distancias al cortafuegos sean de pertenencia borrosa entre el grado de pertenencia 0 para los pixeles cercanos al eje central, y el grado de pertenecia 1 para los pixeles en el límite del ancho de la banda de desbroce o más lejanos. Un ejemplo gráfico de este conjunto borroso se representa en la siguiente figura

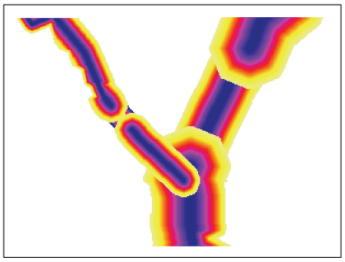


Figura 4: Detalle gráfico del conjunto borroso 'cercania a un cortafuegos' sobre el raster de entrada.

5 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Para el análisis entre las superficies obtenidas a través de buffer lineal y buffer fuzzy se utiliza un Friedman ANOVA, donde el factor es el tipo de buffer (fuzzy o lineal) y la variable dependiente es la superficie total de la red de cortafuegos del macizo de Caroig. Se consideran 8 réplicas por tipo de buffer correspondientes a las superficies calculadas para cada grupo de modelos de combustible (pasto, matorral, pasto-matorral, matorral bajo arbolado) en los dos órdenes de importancia de los cortafuegos (1º y 2º orden).

6 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos del análisis estadístico (Figura 5), donde se comparan los 8 datos de superficie, según modelo de combustible y orden, (Tabla 2) en cada uno de los escenarios (fuzzy y lineal) demuestran que la superficie en el escenario fuzzy es significativamente menor que utilizando el buffer lineal (p-valor=0,011719), lo que significaría una optimización de los recursos a la hora de ejecutar el mantenimiento de las redes de cortafuegos consideradas en el Macizo de Caroig.

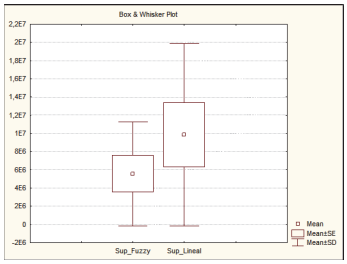


Figura 5: Resultados del análisis estadístico entre las superficies resultantes de construir un buffer lineal y otro mediante Cost Distance y lógica fuzzy. El Friedman ANOVA muestra diferencias significativas al 95% en ambos tipos de buffer para el cálculo de las superficies de actuación ($p<0,05$).

Tabla 3: Resultado de las superficies (m^2) buffer lineales y buffer fuzzy.

Orden	Modelos	Superficie buffer eje central (m2)	Superficie buffer fuzzy (m2)	Media	Superficie buffer lineal (m2)
1 orden	Pasto	99672	131400	0,31	214696
	Matorral	1936980	15734928	0,46	27037252
	Pasto-matorral	2131856	7610924	0,41	12130348
	Matorral bajo arbolado	2152564	11748012	0,45	22078960
2orden	Pasto	17648	16492	0,32	31616
	Matorral	695200	4213524	0,45	7695108
	Pasto-matorral	572280	1815108	0,41	3138204
	Matorral bajo arbolado	879664	3173188	0,32	6481740

Al ser un ancho de desbroce irregular, tanto en el interior del área como en los bordes exteriores, se obtienen áreas de menor impacto visual y adaptadas al terreno ya que se ha usado la pendiente como variable de cálculo (Figura 6). El uso de dicha variable asegura además mayores anchuras en zonas de mayor pendiente lo que está justificado desde el punto de vista preventivo, [12].

Los valores de la degradación difusa se pueden reclasificar en rangos en los cuales se establezca la cantidad de biomasa a extraer, por ejemplo (Tabla 4):

Tabla 4: Ejemplo extracción mediante rangos fuzzy.

Reclasificación fuzzy	% a extraer
0-0,2	10%
0,2-0,4	25%
0,4-0,6	40%
0,6-1	100

En términos de gestión, contando con datos de inventario de pasto y matorral o incluso mediante reconocimiento visual, se puede cuantificar la biomasa a extraer.

El buffer difuso permite incluir el concepto cualitativo en los rangos establecidos (extraer mucho, regular, poco) lo que facilitaría el planteamiento en campo de muchos de los trabajos de ejecución (lógica del pensamiento humano, en este caso del operario que extrae la biomasa) sin disminuir la eficacia del tratamiento para prevenir incendios. Por tanto la determinación de los puntos de corte de los rangos se puede establecer a criterio del gestor o directamente en la ejecución de los trabajos, lo que resulta un buffer más flexible tanto para su ejecución como para su mantenimiento.

En la Tabla 3 se detallan también los datos medios de los valores fuzzy en cada buffer. Todos los registros son menores a 0,5, lo que demuestra que la pendiente tiene un gran peso a la hora de hacer el buffer, por lo que se justifica la opción de utilizar las distancias en función de costes en esfuerzo.

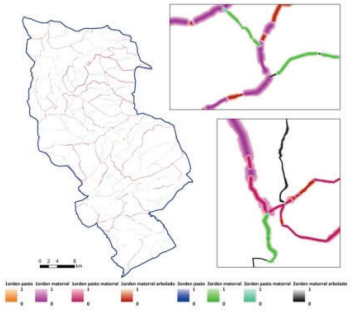


Figura 6: Áreas cortafuegos mediante lógica fuzzy y detalle de dos zonas, donde se puede observar los diferentes tamaños de los buffer.

7 CONCLUSIONES

El uso de la lógica fuzzy en la creación de redes cortafuegos en el Macizo de Caroig en un contexto energético también es un proyecto pionero en España, según la bibliografía consultada. Se observa que es efectivo en cuanto a optimización de los recursos, debido a que se puede cuantificar la cantidad de biomasa de la superficie a extraer y así disminuir los costes que supone construir y mantener dicha infraestructura. Al tener en cuenta la pendiente del terreno, se justifica en términos de prevención de incendios. Una línea de trabajo futura puede ser la introducción de más variables en la construcción de los buffer fuzzy, como pueden ser otros componentes del triángulo del fuego: viento dominante, vientos locales debido a la topografía, exposición de la ladera por su efecto en la desecación de combustibles, o la combinación de todas ellas.

Agradecimientos

Agradecemos al Consorcio de Bomberos de Valencia y a la *Direcció General de Prevenció, Extinció d'Incendis i Emergències Conselleria de Gobernació* de la Comunidad Valenciana el suministro de las capas de información necesarias para la elaboración de este trabajo.

Este trabajo se ha realizado en el contexto del Máster TIG de la UCM como consecuencia de la colaboración entre dicho Máster y el INIA para el desarrollo de las prácticas de empresa del alumnado y la elaboración del proyecto fin de Máster.

El presente estudio se ha elaborado en el contexto del Contrato CON13-005 entre INIA e IBERDROLA RENOVABLES para la realización de actividades dentro del proyecto *LIFE+ Bioenergy & Fire Prevention.*

Agradecimiento también al proyecto TIN2012-32482.

Referencias

[1] SECF, 2013; La situación de los bosques y el sector forestal en España. Sociedad Española de Ciencias Forestales. Disponible on-line: http://www.secforestales.org/web/images/ISFE/isfe2013v1.pdf

[2] DURALDE M.A., TOLOSANA E., DE GREGORIO M. (Madrigal J. Coord.), 2012. El aprovechamiento energético de la biomasa forestal y la prevención de incendios. Conclusiones de la Jornada de Debate SELVIRED-FIRESMART. INIA. Madrid. 15 pp. Disponible on line http://www.firesmartproject.eu/docs/workshop_selvired/Conclusiones_Jornada_SELVIRED-FIRESMART.pdf

[3] APPA (de Gregorio M. coord.), 2012. Balance económico de la actualización de las retribuciones a la producción eléctrica a partir de las biomasas. Asociación de Productores de Energías Renovables. Madrid. 30 pp.

[4] SCOTT J.H., BURGAN R.E., 2005. Standard fire behavior fuel models: a comprehensive set for use with Rothermel's surface fire spread model. Gen. Tech. Rep. RMRS-GTR-153. Fort Collins, CO: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Rocky Mountain Research Station.

[5] VÉLEZ R., 2009. La Defensa contra Incendios Forestales. Fundamentos y experiencias. McGrawHill

[6] RODRÍGUEZ SILVA F. y MOLINA J.R., 2010. Manual Técnico para la modelización de la combustibilidad asociada a los ecosistemas forestales mediterráneos. Laboratorio de Defensa contra incendios forestales. Departamento de Ingeniería forestal. Universidad de Córdoba. Córdoba. 90 pp.

[7] QUÍLEZ R., CHINCHILLA S., 2013. Caracterización de modelos de combustible en la provincia de valencia. FLAMMA. 3 (2): 31-40.

[8] DOGV núm. 5062, de 2 de agosto de 2005. Resolución de 29 de julio de 2005, de la Conselleria de Territorio y Vivienda, por la que se declaran los terrenos forestales de la Comunidad Valenciana zona de alto riesgo de incendio.

[9] BOE núm. 23 de 27 de Enero de 1994. Ley 3/1993, de 9 de diciembre, Forestal de la Comunidad Valenciana.

[10] Generalitat Valenciana, 2009. Plan de prevención de incendios de la Demarcación Forestal de Xátiva. Disponible on-line: http://www.cma.gva.es/web/indice.aspx?nodo=68906&idioma=C

[11] ESRI, 2012. Pertenencia difusa (Spatial Analyst) en Centro de Recursos de ArcGIS 10. Disponible on-line: http://help.arcgis.com/es/arcgisdesktop/10.0/help/index.html#//009z000000rn000000

[12] PIMONT F., DUPUY J.L., LINN R.R., 2009. Validation of FIRETEC wind-flows over a canopy and a fuel-break. Int J Wildland Fire 2009; 18: 775–790.

[13] Zadeh, L.A., 1965. *Fuzzy Sets*. Information and Control 8, pp. 338-353.

[14] Zadeh, L. A., 1987. Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers. John Wiley & Sons, New York.

[15] Zimmermann, H.J., 1987. Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems. Kluwer Academic Publishers. Boston.

ESTUDIO PRELIMINAR SOBRE EL USO DE OPERADORES DE AGREGACIÓN UNINORMA EN MODELADO DIFUSO LINGÜÍSTICO

Francisco A. Márquez [1], Sebastià Massanet[2], Antonio Peregrín [1]

[1] *Dept. de Tecnologías de la Información. Universidad de Huelva*, {alfredo.marquez,peregrin}@dti.uhu.es

[2] *Dept. Matemáticas e Informática. Universidad de las Islas Baleares*, s.massanet@uib.es

Resumen

En este trabajo realizamos un estudio preliminar sobre el uso de operadores uninorma como operadores de agregación de antecedentes de las reglas aplicado al modelado difuso lingüístico, ya que hasta donde sabemos no se ha usado antes. Las uninormas proporcionan un mecanismo de agregación adaptativa particular para cada regla que depende tanto del valor de un parámetro, el elemento neutro de la uninorma, que será ajustado mediante un algoritmo evolutivo, como de los propios valores agregados para comportarse bien como una t-norma o bien como una t-conorma. Se han realizado pruebas con dos tipos de uninormas y cuatro problemas, y los resultados empíricos son prometedores pues mejoran la precisión del sistema sustancialmente y animan a profundizar en esta línea en futuros trabajos.

Palabras Clave: Agregación adaptativa, uninorma, t-norma, t-conorma, modelado difuso lingüístico, sistemas difusos evolutivos.

1 INTRODUCCION

En el diseño de modelos difusos lingüísticos, además de los elementos relacionados con la Base de Conocimiento (BC), es decir, reglas y funciones de pertenencia, cuya influencia es muy marcada puesto que son los elementos que contienen la información que incorpora el modelo para cumplir su función, también es posible actuar sobre sus diferentes operadores, tanto en el Sistema de Inferencia como en la Interfaz de Defuzzificación [3, 4].

Además, estos elementos pueden usarse con parámetros para convertirse en adaptativos, es decir, métodos que pueden tener comportamientos específicamente adaptados en general o a cada regla en particular.

Dentro de ellos, la Interfaz de Defuzzificación es el componente que más frecuentemente se parametriza, posiblemente por su mayor impacto en la precisión del modelo y sencillez de interpretación. Así, en [5], se presenta un estudio sobre las diferentes Interfaces de Defuzzificación adaptativas cuyos parámetros son aprendidos con técnicas evolutivas. Por otra parte, la parametrización del Sistema de Inferencia también encuentra aportaciones en la literatura, tales como la propuesta en [1] donde se presenta un estudio sobre las diferentes alternativas para introducir parámetros en el Sistema de Inferencia, su comportamiento y significado. En definitiva, el uso de operadores adaptativos en los Sistemas Difusos Lingüísticos para modelado y control, tanto en el Sistema de Inferencia como en la Interfaz de Defuzzificación, o en ambos de modo simultáneo [11], ha demostrado ofrecer mejoras relevantes en la precisión de los mismos.

Si nos centramos en los Sistemas de Inferencia adaptativos, éstos suelen estar basados en el uso de t-normas adaptativas como operadores de agregación [1].

En este trabajo se propone y estudia el uso de un operador de agregación más flexible en la parametrización del Sistema de Inferencia: concretamente se propone el uso de Uninormas [14]. Con ello se pretende obtener mayores posibilidades de adaptar la forma en la que cada regla participa más allá de la habitual expresión del operador de agregación conjuntivo de los antecedentes implementado con una t-norma. Las uninormas, que pueden agregar comportándose como conjunción tanto como disyunción, amplían las opciones y por ello favorecerán una mejor cooperación entre las reglas difusas y por consiguiente modelos difusos más precisos.

El trabajo se organiza presentando en la Sección 2 el uso de uninormas, su descripción, interpretación y forma de ajustar sus parámetros. La Sección 3 describe la experimentación desarrollada sobre las cuatro aplicaciones empleadas y analiza los resultados. Finalmente en la Sección 4 se muestran las conclusiones finales.

2 MODELADO LINGÜÍSTICO USANDO AGREGACIÓN CON UNINORMAS

En primer lugar describiremos los operadores uninorma y su papel en la agregación en sistemas difusos de tipo lingüísitico o Mamdani, y posteriormente mostraremos un modelo de ajuste paramétrico apropiado para estos operadores.

2.1. AGREGACIÓN CON UNINORMAS

La Regla Composicional de Inferencia en el Modelado Difuso con fuzzificación puntual permite realizar la inferencia difusa de la siguiente forma:

1º Se utilizan conectivos de agregación (conjuntivos y/o disyuntivos) que permiten agregar la contribución procedente de cada antecedente, y que al tratarse de fuzzificación puntual son los puntos de corte de las entradas discretas ($x_{1,...,}x_n$) del sistema con las funciones de pertenencia de los antecedentes de las reglas. Al resultado de este cálculo se le denomina comúnmente *grado de emparejamiento* (h_i). Para realizarlo se utiliza generalmente una t-norma (agregación conjuntiva).

2º Aplicar, el operador de implicación, I, utilizando el grado de emparejamiento calculado para cada regla y la parte consecuente de dicha regla.

Dos de las t-normas típicamente empleadas para agregar los antecedentes, por su simplicidad computacional y buen comportamiento [4] son:

$$\textit{Producto Lógico (minimo): } T_M(x,y) = \min(x,y), \quad (1)$$

$$\textit{Producto Algebraico: } T_P(x,y) = x \cdot y. \quad (2)$$

Aunque su uso es menos frecuente, también se pueden usar t-conormas [12] (agregación disyuntiva). Dos de las más típicas, que además usaremos más adelante en este estudio son:

$$\textit{Máximo: } S_M(x,y) = \max(x,y), \quad (3)$$

$$\textit{Suma Probabilística: } S_P(x,y) = x + y - xy. \quad (4)$$

Sin embargo, particularmente en los últimos años se han estudiado otras formas de agregación motivadas por el hecho de que para ciertas aplicaciones otros operadores que actúan entre la conjunción y la disyunción pueden ser más apropiados [8, 14].

En otro sentido, en el pasado se ha llevado a cabo la parametrización de la agregación de antecedentes en modelado difuso mediante el uso de t-normas adaptativas, y se ha verificado su mayor impacto frente a la parametrización de los operadores de implicación [1, 11]. Por este motivo, en este trabajo seguimos la línea de estudiar la parametrización de los operadores de agregación de los antecedentes de las reglas.

De entre los operadores de agregación propuestos en la literatura, en este estudio preliminar hemos escogido dos de los más simples y que a su vez ofrecen un parámetro en su expresión: nos referimos a las uninormas [14].

Las uninormas son operadores de agregación que nacieron como generalización de las t-normas y las t-conormas.

Definición 1 ([14]). Una uninorma es un operador asociativo, conmutativo y creciente $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ con elemento neutro $e \in [0,1]$, i.e., $U(e,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$.

Claramente una uninorma U es una t-norma cuando $e = 1$ y una t-conorma cuando $e = 0$. Para toda uninorma se cumple $U(1,0) = U(0,1) \in \{0,1\}$ y se llama conjuntiva si $U(1,0) = 0$ y disyuntiva si $U(1,0) = 1$. La estructura de cualquier uninorma U, como se puede observar en la Figura 1, es como una t-norma en $[0,e]^2$, como una t-conorma en $[e,1]^2$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en los otros casos, es decir, en el subconjunto del cuadrado unidad dado por

$$D_e = [0,e) \times (e,1] \cup (e,1] \times [0,e). \quad (5)$$

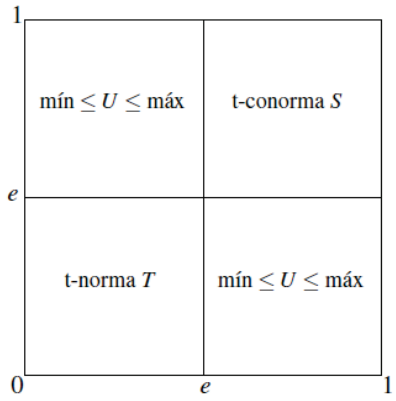


Figura 1: Estructura general de una uninorma U con elemento neutro e.

Una de las familias más conocidas de uninormas es la constituida por las uninormas de $U_{\min}$ (ver [9]). Estas uninormas, que son siempre conjuntivas, se construyen a partir de una t-norma T y una t-conorma S utilizando el mínimo en la región D_e, es decir,

$$U_{min}(x,y) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & si\ x,y \in [0,e], \\ e + (1-e) \cdot S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & si\ x,y \in [e,1], \\ \min(x,y) & si\ x,y \in D_e\ . \end{cases}$$

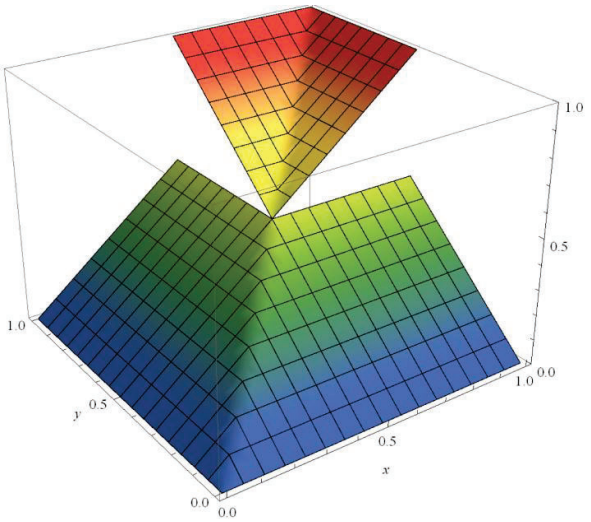
En esta comunicación, se considerarán las uninormas $U_{T_M,S_M,e}$ y $U_{T_P,S_P,e}$ pertenecientes a la clase de $U_{\min}$, donde se toman como t-normas asociadas el mínimo y el producto algebraico y como t-conormas asociadas el máximo y la suma probabilística, respectivamente. Entre ellas, la uninorma $U_{T_M,S_M,e}$ pertenece a su vez a la familia de las uninormas idempotentes, aquéllas que satisfacen $U(x,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$ e introducidas en [6]. De hecho, esta uninorma fue una de las primeras consideradas en la literatura (ver [14]). En la Figura 2, se han representado ambas uninormas.

En este estudio vamos a considerar un parámetro e determinado para cada regla, es decir, contaremos con tantos e_i como reglas, para propiciar un mecanismo de agregación local para cada regla de la BC, ya que como en el caso de la agregación con t-normas parametrizadas estudiadas en el pasado [1, 11], proporcionaba los mejores resultados en cuanto a precisión frente al caso de un único valor genérico para todo el sistema. Los parámetros e_i se corresponden con los elementos neutros de las uninormas que modelan las reglas. Este modelo generaliza el usual basado en t-normas [4] y el basado en t-conormas [12], que se corresponderían con los casos en los que para todas las reglas, $e_i = 1$ y $e_i = 0$, respectivamente.

La interpretación que realizamos sobre cómo actúan los operadores de agregación uninorma utilizados de esta forma es la siguiente: El elemento neutro del operador uninorma junto con los valores a agregar de cada antecedente de la regla, determinan en cada caso si el operador de agregación uninorma actúa como t-norma (conjunción) como t-conorma (disyunción) o como un operador compensantivo (región D_e). Utilizando uninormas de U_{min} en la región D_e la uninorma también se comporta como una conjunción y se pueden escoger la t-norma y la t-conorma asociadas que se deseen. Hay que remarcar que el uso de uninormas conjuntivas no modifica el significado lógico de la inferencia del caso clásico ya que estos operadores coinciden con la conjunción clásica cuando nos restringimos a $[0,1]^2$.

En definitiva, se trata de un operador que permite aprender mediante el parámetro del elemento neutro como actuará la expresión usando un valor para cada regla; pero no sólo depende de él sino que un mismo valor del elemento neutro determinado podría hacer agregar a esa regla de una forma u otra dependiendo también del emparejamiento de las entradas con cada antecedente. Por tanto, no se trata simplemente de un mecanismo que hace que cada regla sea conjuntiva o disyuntiva sino que en él influyen otros factores. En la Figura 2 se muestra como con un valor de $e = 0.5$, el operador actúa en la parte alta del gráfico como conjunción para determinados valores de x e y, y como disyunción en los demás.

$(a) U_{T_M,S_M,e}$



$(b) U_{T_P,S_P,e}$

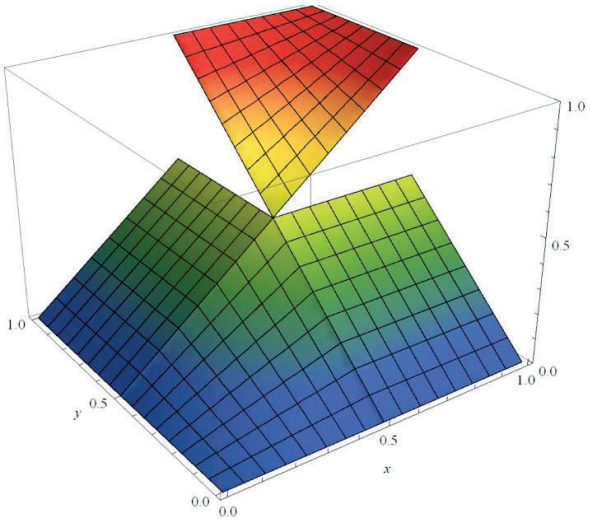


Figura 2: Uninormas de $U_{\min}$ consideradas con $e = \frac{1}{2}$.

2.2. AJUSTE DE PARAMETROS

En el presente trabajo utilizaremos un modelo evolutivo basado en un Algoritmo Genético de tipo CHC [7] para ajustar o aprender, como se ha comentado anteriormente, el mejor elemento neutro e que permita al operador de agregación actuar de la mejor manera posible para cada regla para un conjunto de entrenamiento dado. A conti-

nuación se describirán los componentes de este modelo: codificación y población inicial, evaluación, operador de cruce y mecanismo de rearranque.

Codificación y población inicial

Cada cromosoma se codifica como un vector de reales con m parámetros e_i, uno para cada regla de la Base de Reglas (BR). Cada uno toma valores en el intervalo [0, 1] que determinan el valor del neutro e_i que actuará.

$$C = (e_1, \ldots, e_m) \mid e_i \in [0, 1].$$

La población inicial se obtiene generando un individuo con todos los genes a '1' y por tanto coincidiendo con el uso de una t-norma en cada regla, y los demás individuos son generados aleatoriamente dentro del intervalo [0, 1].

Evaluación

Para evaluar un cromosoma utilizamos el clásico Error Cuadrático Medio (ECM),

$$ECM(M) = \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{P}\left(y_k - M(x_k)\right)^2}{P} \qquad (6)$$

donde M es el modelo difuso cuyo Sistema de Inferencia utiliza el valor del elemento neutro descrito por el valor del parámetro, la t-norma del mínimo como operador de implicación, y el método de defuzzificación centro de gravedad ponderado por el grado de emparejamiento, utilizando una base de datos concreta decodificada. Esta medida utiliza un conjunto de datos para la evaluación constituido por P pares de datos numéricos $Z_k=(x_k, y_k)$, k=1,...,P, siendo x_k los valores de las variables de entrada y y_k los correspondientes a las variables de salida.

Operador de cruce

Aunque el algoritmo CHC fue concebido para cromosomas con codificación binaria, existen versiones para su uso con cromosomas con codificación real como la empleada en la parte correspondiente a los parámetros de este trabajo, la cual utiliza el BLX-α [10]. como operador de cruce (α=0.5). El cálculo de la distancia de Hamming se realiza convirtiendo los genes reales en una representación en cadenas y hallando la distancia de Hamming teniendo en cuenta si difiere o no cada uno de los caracteres. Sólo aquellas cadenas con una distancia mayor del umbral son combinadas. El umbral se inicializa a L/4 siendo L la longitud de la cadena o cromosoma. Cuando ningún descendiente es insertado en la nueva población, el umbral se reduce en una unidad.

Rearranque.

Para salir de óptimos locales, el algoritmo CHC utiliza un mecanismo de rearranque. En este caso, el mejor cromosoma se mantiene en la población y el resto son generados aleatoriamente dentro del conjunto [0, 1]. Este mecanismo será aplicado cuando el umbral L alcance un valor menor que 0.

3 ESTUDIO EXPERIMENTAL

En esta sección planteamos una experimentación para analizar el funcionamiento de la propuesta. Hemos seleccionado 4 problemas de regresión con distintos tamaños. La Tabla 1 resume las principales características de estos 4 problemas seleccionados de la página web del proyecto KEEL [2] http://sci2s.ugr.es/keel/datasets.php desde donde pueden ser descargados.

Para cada problema se muestra el número de variables y el de ejemplos. Los problemas están ordenados de menor a mayor dimensionalidad, considerándose que el problema ELE es de baja dimensionalidad y STP, WAN y WIZ de dimensionalidad media para problemas de regresión.

Tabla 1: Problemas considerados en el análisis.

Problema	Nombre	Variables	Ejemplos
Electrical Maintenance	ELE	4	1056
Stock	STP	9	950
Weather Ankara	WAN	9	1609
Weather Izmir	WIZ	9	1461

Esta sección está organizada como sigue: En primer lugar, en la Subsección 3.1 se describe la configuración del estudio experimental, mientras en la Subsección 3.2 se analiza el comportamiento de las uninormas estudiadas como conectivos de agregación en los antecedentes.

3.1. CONFIGURACIÓN DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL

Como se ha comentado en la Sección 2, en este estudio, utilizamos dos uninormas de la clase de $U_{\min}$, la primera utilizando la t-norma del mínimo y la t-conorma asociada del máximo, a cuyo modelo hemos denominado $\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$. La segunda utilizando la t-norma del producto algebraico y como t-conorma asociada, la suma probabilística que hemos denominado $\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$.

En los distintos experimentos, se trabaja con un modelo de validación cruzada con 5 particiones de datos, esto es, 5 particiones aleatorias al 20%, y la combinación de cuatro particiones (80%) como entrenamiento y una partición como prueba. Así se tienen 5 particiones al 80% y 20% en entrenamiento y prueba. Para cada partición cada método ha sido ejecutado 6 veces y en las tablas se muestran los resultados medios de las 30 ejecuciones de cada algoritmo. Además hemos aplicado un t-test con un nivel de confianza del 95% (α = 0.05) para asegurar que existen diferencias significativas entre los métodos.

Las particiones lingüísticas iniciales consideradas tendrán 5 términos lingüísticos con forma triangular. En todos los casos, se ha empleado el algoritmo de Wang y Mendel (WM) [13] para obtener la BR inicial. Además en dicha obtención se ha utilizado la t-norma del mínimo tanto como conectivo en los antecedentes como en la implicación y el centro de gravedad ponderado por el grado de emparejamiento como método de defuzzificación.

En la Tabla 2 se muestran los resultados iniciales obtenidos, donde #R representa el número medio de reglas, y ECM_{ENT} y ECM_{PRU} el valor medio de error en entrenamiento y en prueba respectivamente. En este caso, se ha optado por ordenar los problemas según la complejidad de nuestro modelo.

Tabla 2: Precisión inicial calculada con la BR de WM.

Problema	#R	ECM_{ENT}	ECM_{PRU}
ELE	65	56135	56359
STP	265,4	1,453	1,487
WAN	456,8	4,878	6,128
WIZ	399,2	3,107	4,008

Los valores de los parámetros utilizados son: población = 50, número de evaluaciones = 200000.

3.2. ANALISIS DE RESULTADOS

En esta Sección se muestran y analizan los resultados obtenidos por $\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$ y $\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$ en comparación con la BR inicial obtenida con el algoritmo de WM. La Tabla 3 muestra para cada problema, la precisión (medida en ECM) alcanzada para cada uno de los operadores tanto en el conjunto de entrenamiento como prueba. En negrita se destacan aquellos valores que mejor comportamiento presentan.

Tabla 3: Precisión obtenida por los operadores adaptativos $\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$, $\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$

Problema	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$		$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	
	ECM_{ENT}	ECM_{PRU}	ECM_{ENT}	ECM_{PRU}
ELE	37682	39940	**30437**	**32550**
STP	0,816	0,987	**0,478**	**0,654**
WAN	2,322	4,489	**1,753**	**4,232**
WIZ	1,471	2,910	**0,985**	**2,575**

Por otro lado con el fin de hacer un análisis lo más detallado posible en la Tabla 4 mostramos los resultados de aplicar un test t-student (con 95% de confianza) de cada uno de estos modelos con los resultados originales obtenidos por el algoritmo de WM. La interpretación de ellas es:

+ El primero tiene un comportamiento significativamente mejor que el segundo.

- El primero tiene un comportamiento significativamente peor que el segundo.

= Indica un comportamiento estadísticamente sin diferencias significativas.

Tabla 4: T-test de comparación entre cada uno de los modelos con la BR inicial.

Problema	Comparación			t-test en ECM_{ENT}	t-test en ECM_{PRU}
ELE	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$	-	WM	+	+
	$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	-	WM	+	+
STP	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$	-	WM	+	+
	$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	-	WM	+	+
WAN	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$	-	WM	+	+
	$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	-	WM	+	+
WIZ	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$	-	WM	+	+
	$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	-	WM	+	+

Además en la Tabla 5 mostramos los resultados de aplicar un test t-student (con 95% de confianza) al mejor resultado medio de la Tabla 3 con respecto al otro modelo para cada problema.

Tabla 5: T-test de comparación entre el modelo $\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$ y el modelo $\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$.

Problema	Comparación			t-test en ECM_{ENT}	t-test en ECM_{PRU}
ELE	$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	-	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$	+	+
STP	$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	-	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$	+	+
WAN	$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	-	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$	+	+
WIZ	$\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$	-	$\boldsymbol{M}(U_{T_M,S_M,e})$	+	+

Observando las tablas realizamos el siguiente análisis:

- Los dos modelos que utilizan uninormas como operador de agregación de antecedentes, mejoran sustancialmente los resultados que se obtienen respecto de la t-norma del mínimo, que es la más utilizada en modelado difuso. La posibilidad de que algunas reglas agreguen con mecanismos personalizados y diferentes, e incluso que no lo hagan mediante conjunción (esta primera parte ya sabíamos que daría buenos resultados por [1, 11]) sino mediante disyunción, parece ofrecer una ventaja. Consideramos que es necesario ampliar el estudio y comparar el uso de uninormas con el de operadores de conjunción basados en t-normas adaptativas también.
- Dentro de los dos operadores uninorma, los resultados también son diferentes, obteniéndose

mejores (más precisos) con la uninorma $\boldsymbol{M}(U_{T_P,S_P,e})$ que con la idempotente. Quizás se deba a que ésta puede variar su comportamiento entre la del Mínimo y la de Producto Algebraico cuando actúa como t-norma o conjunción de los antecedentes, además de cómo t-conorma suma probabilistica cuando actúa como disyunción de antecedentes es decir, puede tener influencia el hecho de tener más grados de libertad, si bien ésta es una observación que requerirá mayor contraste y estudios posteriores más amplios.

- La mejora de estos modelos parece ser independiente del tipo de dimensionalidad de problema utilizado ya que su comportamiento no parece estar afectado por este hecho, si bien habrá que utilizar mayor número de problemas diferentes más adelante para confirmarlo definitivamente.

4 CONCLUSIONES

A la vista del estudio preliminar desarrollado en este trabajo, el uso de uninormas como mecanismo de agregación de antecedentes adaptativo para Sistemas Basados en Reglas Difusas Lingüísticos para modelado difuso parece ser prometedor por sus mejoras en precisión. Los dos modelos implementados que usan uninormas mejoran en los cuatro problemas diferentes de forma significativa al modelo que utiliza la t-norma como operador de agregación. Este es el resultado que nos indica que debemos continuar ampliando el estudio con más uninormas diferentes (puesto que entre ellas también hay diferencias), incrementar el número de problemas, utilizar también las t-normas adaptativas cuyos resultados eran mejores que los obtenidos por las t-normas no adaptativas, etc.

Por otro lado, tampoco debemos dejar de observar que hemos empleado bases de conocimiento cuyas reglas fueron aprendidas evaluándolas con el método de WM [13] que valora cada regla de tipo conjuntiva de forma individual, mientras que las uninormas flexibilizan este criterio, y por ello, quizás debamos también plantearnos un aprendizaje de la BC más apropiado a cómo se van a agregar en el proceso de inferencia, lo cual, conduciría a obtener también bases de conocimiento más compactas.

Referencias

[1] J. Alcala-Fdez, F. Herrera, F. Márquez and A. Peregrín: Increasing fuzzy rules cooperation based on evolutionary adaptive inference systems. *International Journal of Intelligent Systems* 22:9, pp. 1035-1064, 2007.

[2] J. Alcala-Fdez, L. Sanchez, S. Garcia, M. del Jesus, S. Ventura, J. Garrell, J. Otero, C. Romero, J. Bacardit, V. Rivas, J. Fernandez and F. Herrera: Keel: a software tool to assess evolutionary algorithms for data mining problems. *Soft Computing* 13:3, pp. 307–318, 2009.

[3] O. Cordón, F. Herrera and A. Peregrín: Applicability of the fuzzy operators in the design of fuzzy logic controllers. *Fuzzy Sets and System* 86, pp. 15-41, 1997.

[4] O. Cordón, F. Herrera and A. Peregrín: Searching for basic properties obtaining robust implication operators in fuzzy control. *Fuzzy Sets and* Systems 111**,** pp. 237-251, 2000.

[5] O. Cordón, F. Herrera, F. Márquez and A. Peregrín: A Study on the Evolutionary Adaptive Defuzzification Methods in Fuzzy Modelling. *Internacional Journal of Hybrid Intelligent Systems* 1:1, pp. 36-48, 2004.

[6] B. De Baets: Idempotent uninorms. *European Journal of Operational Research.* 118, 631–642, 1999.

[7] L.J. Eshelman: The CHC Adaptive search algorithm: How to have safe search when engaging in nontraditional genetic recombination. *Foundations of Genetic Algorithms-1*,Rawlins,G.J.E.(*Eds*), pp. 265-283, 1991.

[8] J. Fodor and T. Keresztfalvi. "Nonstandard Conjunctions and Implications in Fuzzy Logic." International Journal of Approximate Reasoning 12 (1995) 69-84.

[9] J. C. Fodor, R. R. Yager, and A. Rybalov: Structure of uninorms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems* 5, pp. 411–127, 1997.

[10] F. Herrera, M. Lozano, A. Sanchez: A taxonomy for the crossover operator for real-coded genetic algorithms: an experimental study. *International Journal of Intelligent System* 18, pp. 309–338, 2003.

[11] F.A. Márquez, A. Peregrín y F. Herrera: Cooperative evolutionary learning of fuzzy rules and parametric aggregation connectors for Mamdani linguistic fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 15:6, pp. 1162-1178, 2007.

[12] M. Mizumoto: Pictorial representations of fuzzy connectives, part I: Cases of t-norms, t-conorms and averaging operators. *Fuzzy Sets and System* 31, pp. 217–242, 1989.

[13] L. X. Wang and J.M. Mendel: Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 22:6, pp. 1414-1427, 1992.

[14] R. R. Yager and A. Rybalov. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems* 80, pp. 111–120, 1996.

Modeling and Control of Medicine Production Areas

Daniel Fernández, **Adolfo R. de Soto***

School of Industrial Engineering and Computer Science
University of León,
danielfernandezmencia@gmail.com, adolfo.rdesoto@unileon.es

Abstract

This paper aims to solve a specific control problem from a practical point of view. With that purpose a model of some pharmaceutical production areas with its standard control system have been developed. Based on their working experience and the requirements from the law concerning medicine production protocols authors have developed three control strategies, being two of them new adapted solutions against the traditional Proportional Integrator (PI) control strategy. After having successfully designed the model of the plant and the model of the control systems some simulations were carried in order to compare all control strategies. The traditional PI control solution was unable to control the system under the restrictions coming from the real system, whereas both the memory plus PI control solution and the fuzzy logic control solution were able to cope with all the difficulties. Moreover, fuzzy logic control was able to improve the stabilizing time achieved with the PI plus memory control.

1 Introduction

In this article we are going to solve the problem of pressure and flow rate control in clean rooms. Clean Rooms are production areas in which the air contamination turns out to be a major issue on what we are producing [8]. It means we must assure the customer our products have no contaminating agents that could make the product not to work in the best cases, or to produce several unexpected secondary effects in the worst ones. Clean areas are normally used for medicine production, electronic devices production among other applications and the pollution in the air and the air renewal within pressure control are the major challenges to deal with when working in there under ISO standard conditions. The best solution to all these problems comes from a well defined design taking into account every single disturbance and condition that could affect the overall system performance. But hardly ever the best design and the non-reckless cheapest design are the same one.

Actually, most of the systems were designed for the ideal conditions but they do not take into account the extra energy losses coming from filter blinding, component's aging and other system's features that vary with time. Moreover, their control systems do not consider the consequences of releasing/closing a control valve in the rest of the system, including other controlled variables. If you add to this the fact that nowadays we are living hard times where nearly all companies have got monetary problems to even survive, we can easily find that topics like well executed maintenance and systems reshaping are far beyond their possibilities. The last option is to redesign the control strategy, but in such a way you do not need to change any of the devices installed.

Based on their working experience the authors have led to the following conclusion: "If we redefine our control strategies from traditional solutions to adapted solutions; we will be able to perform a better control with less maintenance costs and with an increase in system's reliability. This cannot be done without the knowledge coming from the staff and its success depends on our ability to extract knowledge from their words and teachings." In the next section we will describe the designing process of the air conditioning and filtering system combined with production rooms, their variables and overall system's behavior. Section III will be used to explain the system's constraints, Matlab/Simulink simulation parameters and the three control strategies implemented in our system. In section IV we are going to release the results of three tested controls in the designed system: the PI Control, the Modified PI plus Memory Control and the Fuzzy Control. And finally, in section V we will carry out the conclusions part and the future work pro-

* Author acknowledges the support of the Spanish Ministry for Economy and Innovation and the European Regional Development Fund (ERDF/FEDER) under grant TIN2011-29827-C02-02.

posals paragraph.

2 System Design: Features, constraints, assumptions and calculations

System design is a medicine production area based on the author's experience and in [2][3][4][5][7][8]. System is formed by all the air circuits and auxiliary devices installed in them, and three medicine production rooms which from now on will be called room "A", room "B" and room "C". All the rooms are three meters high and the areas of each room are: room A $6*10=60m^2$, room B $3*6=18m^2$ and room C $15*4+10*10=160m^2$. Each room volume can be calculated by multiplying each area by $3m$ of height. Both room A and room B are class C clean rooms and room C is a class D clean room. Each class will determine the number of air renewals needed in each room and the maximum and minimum air flow rates desired to assure the class cleanness. Air speed range allowed in class C clean rooms is $0.051m/s-0.072m/s$ and in class D clean rooms is $0.005m/s-0.0041m/s$ [8]. Both speed ranges are required only in the air entrance, the output air speed can be increased up to $1m/s$ without any problem. On the other side, air renewal range required in class C is $60-90renewals/hour$ and air renewal range needed in class D is $5-45renewals/hour$ [8].

In order to achieve these objectives we have taken the value $75renewals/hour$ for class C and $15renewals/hour$. These values will assure us that we will always achieve the air renewal objective despite of disturbances or any other unexpected phenomena.

With the necessary air renewals and the volume of each room we have calculated the average air flow in each of the rooms: room A, $3.75m^3/s$; room B, $1.125m^3/s$; room C, $2m^3/s$; Total Nominal Air flow rate, $6.875m^3/s$. In order to calculate each air entrance's area we have chosed from clean area's law the average air speed: rooms A and B, $0.068m/s$; and room C, $0.036m/s$. Taking both the average flow rates and the air speeds each room's entrance area was calculated: room A, $55.14m^2$; room B, $16.54m^2$; and room C, $55.56m^2$. All entrance areas have a height of $1m$ above the rooms which will be taken into account for energy losses. Once we have calculated the air entrance areas it is time to calculate the pipe diameters of the whole system. The following criteria is used to choose the design diameter: $D_{Optimal} \geq \sqrt{(\frac{8*Q}{\pi*v_{max}^2})}$.

For security reasons, we have chosen a $v_{max}=3.2m/s$ for the main pipes and a $v_{max}=2.8m/s$ for the secondary pipes. Based on these data, design diameters are: Main pipe diameter $D_{abc}=1.4m$, A-pipe diameter $D_a=1.1m$, B-pipe diameter $D_b=0.6m$ and C-pipe diameter $D_c=0.8m$. Some High Efficiency Particulate Air (HEPA) filters were installed in order to clean the air before it enters in each of the clean areas and everytime it leaves the previously mentioned rooms. As we have done before, we are going to show results concerning the necessary air leaving areas: room A, $4.7m^2$; room B, $1.4m^2$ and room C, $2.56m^2$. These areas are usually installed close to the bottom along one side of the room in order to "vacuum" as much dust as possible in a automatic way. Before calculating the energy losses a singleline scheme of the system is shown in Figure 1 and we are going to brief explain the Bernoulli effect and other assumptions taken to design this system.

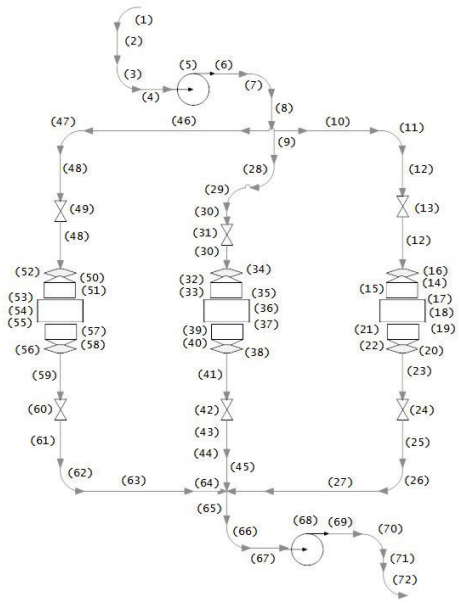


Figure 1: Singleline Scheme

Each number between brackets in Figure 1 represents one part of the whole system, and all parts will be described in this paragraph. Parts (2),(5m); (4), (20m); (6),(20m); (8), (20m); (10), (5.75m); (12), (2m); (15), (1m); (18), (3m); (21),(1m); (23), (2m); (25), (2m); (27), (7.75m); (28), (1m); (30), (2m); (33), (1m); (36), (3m); (39),(1m); (41),(2m); (43), (2m); (45),(1m); (46),(6.5m); (48), (2m); (51), (1m); (54), (3m); (57), (1m); (59), (2m); (61), (2m); (63),(8.5mm); (65), (20m); (67), (16m); (69), (16m); and (71), (3m) are straight pipes with each part's length included between brackets. Parts (1), (3), (7), (11), (26), (29), (44), (47), (62), (66), (70) and (72) are pipe elbows. Parts (16), (20), (34), (38), (52) and (56) are the system HEPA filters. On the other side parts (14), (17), (19), (22), (32), (35), (37), (40), (50), (53), (55) and (58) are the expansions and contractions (2 expansions and 2 contractions before and after each room) of the pipes in order to reduce the air speed before entering and to raise the speed after leaving the room.

Parts (9) and (64) are the pipes junctions, parts (13), (31) and (49) are the manual valves installed to get the pressure

difference in each room. We will discuss this topic later on. Parts (24), (42) and (60) are the control valves used by the control system to get the necessary pressure and air flow rate in each room. And, finally, parts (5) and (68) are the impulsion and extraction air pumps. Its calculation will be done later.

Before entering in system's calculations we will make a quick stop to talk about assumptions, constraints and Bernoulli. Bernoulli establishes that for any fluid circuit with a viscous and incompressible fluid the energy differences between two points of that circuit are: $P_a + \rho * g * z_a + \frac{\rho * v_a^2}{2} - (Losses)_{a-b} + (Pumps)_{a-b} = P_b + \rho * g * z_b + \frac{\rho * v_b^2}{2}$. More information about Bernoulli can be found in [5]. If we have feature changes like flow rate, pressure, etc due to the distance variation and due to density variation we cannot apply Bernoulli. However, we consider density to be constant because pressures handled in the circuit are not above $800 - 900$ Pascals (relative measurement) at any moment or place. In order to think about variable density we should have pressures above 100000 Pascals (relative measurement).

Following the same criteria we should take into account feature changes with distance when the distance between the pump and the farthest point is counted in kilometers and our farthest distance is below 100 meters. Both criteria explanations can be found in [4]. Now that we know that our system variables like pressure and flow rate do not change with either distance or density changes (because we can consider them constant) we can successfully apply Bernoulli to design our system. Other assumption made in the system design is that any pressure/energy loss below $1 * 10^{-3}$ will be neglected from the system due to its void impact in the circuit's energy losses.

Room's pressure set points are: room A, $0 Pascals$; room B, $-10 Pascals$; and room C, $-20 Pascals$. These values have been chosen to be negative because the whole area has been dsigned to be a virus production area. The only way to access into these rooms is through room C.

With this pressure set points everytime we open a door to enter or to leave room C the air will enter inside (due to pressure differential) instead of leaving the room with the viruses. Whereas room C is a general purpose room with stores, computers and general purpose devices, rooms B and specially A are the critical production areas. Room B is a dressing room, it is only accessible through room C and it is the only way to enter in room A. With the pressures of A and B we get the effect that everytime a door is opened between room A and B or between room B and C the air will go as follows $A \rightarrow B \rightarrow C$. In room A we need that every particle we move away from the room should be removed from the room so that both production (viruses) and packaging operations can be done in the same room. We could summarize the pressure selection with the following sentence: "Everything will go to C and remain in C until it is extracted by the air conditioning system".

Now we will calculate all the system losses in order to define the functions that model the system's behavior. We can classify all losses into two different groups: Primary losses and Secondary losses, if the reader wants to learn more about losses calculation much more information can be found in [5]. Primary losses are the ones related with straight distances, so all the circuit parts that are straight pipes will get their losses calculated in this group. On the other hand, secondary losses includes pipe elbows, expansions and contractions, filters, manual and control valves and pipes junctions or T-junctions. Reader must notice that all losses are mainly flow rate dependent and that is why the previous diamenter design criteria was chosen. First we will calculate the primary losses and then the secondary losses. After that we will calculate the air pumps needed in the system prior to define the system behavior equation, the flow rate equations and the room pressure equations. All losses will be calculated in terms of pressure, which is the main magnitude used in air systems. Primary losses calculation can be performed with the formula showed below:

$$P_{PL} = \frac{2 * \lambda * \rho * L * Q^2}{\pi^2 * D^5}, \tag{1}$$

where P_{PL} is the primary losses calculation, λ is a coefficient calculated with the following formulas, ρ is the air density, L is the length, Q is the air flow rate and D is the pipe diameter. λ is calculated by knowing the Reynolds number. Reynolds number is calculated as follows:

$$Reynolds = \frac{\rho * v * D}{\mu} = 65027 * v * D. \tag{2}$$

In our system this number will never be less than 100000 which means we have to use the second equation of Kármán-Prandtl:

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{2 * \log_{10} \frac{D}{2*0.25} + 1.74}\right)}, \tag{3}$$

where 0.25 is the rugosity of the oxidized steel. The different λ used in our primary losses are $\lambda_{abc} = 0.329$, $\lambda_a = 0.333$, $\lambda_b = 0.343$ and $\lambda_c = 0.338$. Our total primary losses results are: $P_{PLabc} = 1.92 * Q_{abc}^2$, $P_{PLa} = 1.055 * Q_a^2$, $P_{PLb} = 5.581 * Q_b^2$ and $P_{PLc} = 4.328 * Q_c^2$. Once we have finished calculating all primary losses we head to calculate the secondary losses. All secondary losses follows the following formula, no matter the type of secondary loss we have, but what makes each secondary loss unique is the ζ coefficient calculation. Secondary losses follow this formula:

$$P_{SL} = \frac{2 * \zeta * \rho * Q^2}{\pi^2 * D^4}. \quad (4)$$

Starting with pipe elbow losses the ζ coefficient is calculated as follows. Because of the relation between the pipe diameter and the elbow radius is 0.5, $\zeta = 0.25$. This value has been obtained through elbow pipe ζ coefficient table. The losses related with elbow pipes are: $P_{SLabc} = 0.102 * Q_{abc}^2$, $P_{SLa} = 0.089 * Q_a^2$, $P_{SLb} = 0.504 * Q_b^2$ and $P_{SLc} = 0.16 * Q_c^2$. On the other hand, filter losses are quite more higher than the previous calculated losses. We will consider the worst case for our circuit, which is when the filter about to be changed. In that case $\zeta = 200$ and the losses are: $P_{SLa} = 35.709 * Q_a^2$, $P_{SLb} = 403.408 * Q_b^2$ and $P_{SLc} = 127.641 * Q_c^2$. Expansion and Contraction losses are quite low and some of them have been neglected due its low value (after performing their calculations). The results shown here need to calculate from the expansion and contraction areas the equivalent diameter and then follow the operation method purposed in [5]. The losses from expansions and contractions are: $P_{SLa} = 0.173 * Q_a^2$, $P_{SLb} = 2.01 * Q_b^2$ and $P_{SLc} = 0.625 * Q_c^2$. In our system we also have two T-joints. These T-joints are the area where the flow is spread into three air circuits (9) and the area where all the flows coming from all the circuits are put together. By looking in the T-joints table we get $\zeta = 6$. Because of the losses are directly related with the three flows, this T-losses are calculated using the losses formula and added three times, one each flow:

$$P_{SLabc} = 1.071 * Q_a^2 + 12.1 * Q_b^2 + 3.83 * Q_c^2. \quad (5)$$

Last losses to be calculated are the ones which corresponds to the manual control valves and the controlled valves. As said before, manual control valves are valves which are set during installation in order to get the desired pressures in the rooms during nominal conditions. This setting process will be calculated here by applying Bernoulli between the entrance of the upper T-joint (9) and each of the rooms. Pressure and flow rate variables are chosen to be the nominal ones, that is; the desired pressure set points and the nominal flows calculated with the air renewals. The formula for both the controlled valve and the manual valve is:

$$P_{SLV} = \frac{2 * \rho * Q^2 * 10^{\frac{(90-X)}{30}}}{\pi^2 * D^4} - 0.3, \quad (6)$$

where X is the valve opening rate. This value has a range from 0 (completely closed) to 100 (completely opened). After performing all the calculations manual valves are set in the simulation with the following % opening values: $X_a = 90\%$, $X_b = 45\%$ and $X_c = 60\%$.
Once we have finished calculating all the system losses its time to get the best air pumps for our system. In order to choose the best pump we need to know the nominal air flow rate the air pump has to work with and the pressure increase it has to generate for the system. With both data then we look up into manufacturer's tables looking for the pump with the best performance. The nominal flow rate needed is $6.875 m^3/s$. In order to calculate the necessary pressure drop we have applied Bernoulli between the atmosphere and the point at the entrance of the upper T-joint (9) for the impulsion air pump and the atmosphere (going through the output, (72)-(71)...) and the input of the room A for the extraction air pump. The calculated pressure increase the pumps have to give the system are: $P_{PIPImp} = 574.533$ Pascals and $P_{PIPExt} = 612.946$ Pascals. Looking at the manufacturer's tables one pump gave the best performance for both situations: the L-37-630 from Stein Baltogar S.A. It could have happened that each situation would have required a different pump but in this case we this model is the best solution for both situations. After taking some points from the L-37-630 table we have modeled the pump behavior equation:

$$\triangle P_{pump} = 925 - 6.25 * Q_{pump}^2. \quad (7)$$

This equation behaves worse than the original one from the manufacturer's, so that our simulation results are always a bit worse than in real life. That gives us the confidence of the fact that if a control strategy works in the simulation, it will behave even better in the reality, which was the initial objective of this article. These are the system's behavior equations:

$$Q_b = Q_a * \sqrt{\frac{72.317 + 0.179 * 10^{\frac{(90-X_a)}{30}}}{861.234 + 2.017 * 10^{\frac{(90-X_b)}{30}}}}, \quad (8)$$

$$Q_c = Q_a * \sqrt{\frac{72.317 + 0.179 * 10^{\frac{(90-X_a)}{30}}}{265.568 + 0.638 * 10^{\frac{(90-X_c)}{30}}}}. \quad (9)$$

Being $\sqrt{b} = \sqrt{\frac{72.317+0.179*10^{\frac{(90-X_a)}{30}}}{861.234+2.017*10^{\frac{(90-X_b)}{30}}}}$ and $\sqrt{c} = \sqrt{\frac{72.317+0.179*10^{\frac{(90-X_a)}{30}}}{265.568+0.638*10^{\frac{(90-X_c)}{30}}}}$, we can define the last equations:

$$Q_a = \frac{Q_{abc}}{1 + \sqrt{b} + \sqrt{c}}, \quad (10)$$

$$Q_{abc}^2 = \frac{1850}{14.522 + \frac{74.459+0.179*10^{\frac{(90-X_a)}{30}} + 24.2*\sqrt{b}+7.66*\sqrt{c}}{1+\sqrt{b}+\sqrt{c}}}, \quad (11)$$

$$P_a = 0.3 - 1.09 * Q_{abc} - 37.59 * Q_a - 12.1 * Q_b - 3.83 * Q_c + P_P, \quad (12)$$

$$P_b = 0.3 - 1.09 * Q_{abc} - 1.07 * Q_a - 468.07 * Q_b - 3.83 * Q_c + P_P, \quad (13)$$

$$P_c = 0.3 - 1.09 * Q_{abc} - 1.07 * Q_a - 12.1 * Q_b - 140.85 * Q_c + P_P. \quad (14)$$

Now that all design calculations have been performed we will move to the next section in order to describe the simulations developed.

3 Simulation and Control Strategies Development

Matlab working environment has been chosen to simulate the plant and the working conditions as well as the control systems. Its features like feasibility, reliability and ease to program with graphics programming language (Simulink) make it a good option to simulate on. In the next paragraphs we are going to talk about all the constraints this models have in order to achieve results close to reality.

A discrete solver has been chosen with a time step of $0.05s$. That means the whole system, including entrances, behaviors and outputs are calculated every $0.05s$. With this performance we can assure the output results have enough accuracy because air conditioning systems does not suffer from strong changes in a quicker way than several times this time step.

Pressure sensor readings are once each second. With this constraint we want to reproduce the exact behavior of the sensor system one of the authors worked with for more than a year. This makes the control much harder because the control system does not know what is happening in the system between sensor readings.

Control outputs are only delivered from the control systems to the control valves once every two seconds and then valves react to the ordered value. Authors' experience with this system was an observed deliver interval between $1-2s$ and we have taken the worst case scenario for our simulations.

Control valves will open or close only a maximum quantity of 20% every second. This constraint is implemented in order to represent the fact that actuators do not move to the delivered order instantaneously. Furthermore, a ramp-behavior has been installed in each control valve in order to approximate the real behavior of the actuator, and to give the system the opportunity to calculate the intermediate states of the system while each actuator is moving to the desired position.

Simulation time set to $1500s$ in order to see all possible damping performances and fluctuations in the system. Actually, one of our major objectives for these simulations is to stabilize the pressure in each room with dampings not bigger than five pascals towards the set point, once the system reaches the permanent state [8][7]. A simulation time of $1500s$ has been set in order to appreciate all the system's fluctuations when trying to stabilize it. In the results section all these phenomena can be observed.

Once all real system constraints have been explained and how they have been implemented we will introduce to the reader the three control techniques implemented in the simulations. The first control technique developed consist in a normal Proportional Integral (PI) control. The mayor disadvantage of this control in the real system is its low reliability to successfully control the system with no dampings. At this point we have to point out that the real system will never accept control coefficients below 0.1 and in the simulation we have used values up to 0.058, and even with those values the system is not properly controlled as we will see in the results section.

Theoretically speaking, the real system should be controlled with a proper adjustment of the PI coefficients, but the necessary values needed to control this system are below the threshold value. Moreover, as we have previously seen in the model calculation, each valve change affects the other parts of the system, and the normal PI control system tries to control each room without knowing the pressures from the other linked rooms. Finally, a PID control have not been considered due to the disadjustment possibility of the real system due to isolation failure of the transmission cables and the pressence of high frequency noises created by telecommunications.

The second control strategy is based on the PI control, but before the control's output stage a memory control is developed. This memory control mixes a 90% of the previous control order with a 10% of the current control order, except for room C pressure control, in which the percentages are 80% and 20%. With this solution a slower response is obtained but much more noise and damping-immune. With this control strategy we can successfully control the system, but within time.

The third control strategy was developed in order to successfully control the system, but in much less time than the PI plus memory control. Many fuzzy controller has been created to control HVAC systems[1, 6]. With this objective, a fuzzy controller with up to twenty-seven rules based on the three pressure inputs of the system was developed. This fuzzy controller is a standard Mandani type fuzzy controller with min, max and min as *and*, *or* and *implication* operations respectively, and max as aggregation method

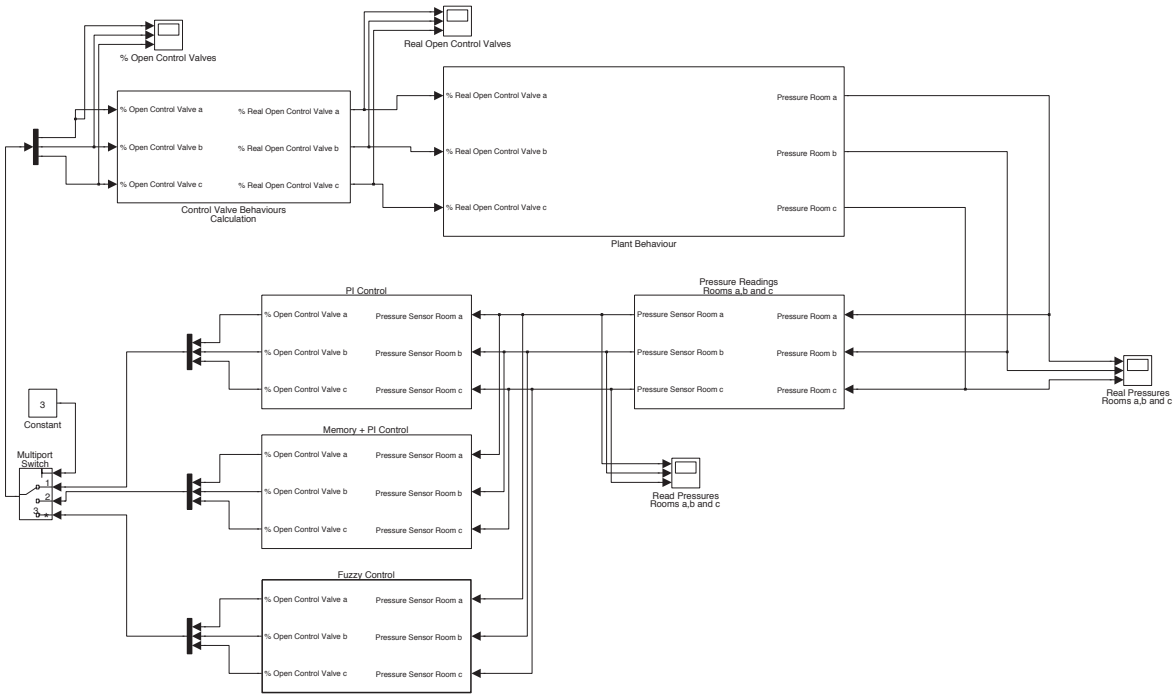


Figure 2: Main Simulation Scheme

and *centroid* as defuzzification method [11][12][13]. Coming back the imputs, in each pressure input, three membership functions were designed as *low pressure*, *normal pressure* and *high pressure*. Later on, in each of the three output orders five membership functions were designed as *lhigh close*, *lhigh open*, *llow close*, *llow open* and *lnothing*. All of these membership functions are triangular functions except the edge functions, whose shape were trapezium shapes. Rules elicitation was done using only the expertise of one of the authors. With all these membership functions the twenty seven rules were built following these three criteria: "if the pressure is high in one room we have to open the output control valve"; "if the pressure is low in one room we have to close the output control valve"; and "if at least one of the pressures is in the normal pressure membership function we will perform low close or low open operations, whereas if no pressure is in the normal pressure membership function we will perform high close or high open operations". The twenty-seven rules come from all the possible combinations of the inputs. If each input has three membership functions and we also have three inputs we have up to $3*3*3=27$ rules. Before heading to the results section, a picture of the whole simulation is shown in Figure 2. In this figure we can apreciate that the three control strategies are implemented in the same simulation but only one is connected to the output valves in each simulation.

4 Results

In this section we will first show all the results obtained with each of the control strategies prior to perform a brief explanation before the conclusion section. The results of the three control strategies are shown in Figures 3 to 5.

As we can easily notice, PI control is unable to stabilize the system whereas the other two control strategies are able to do it, but the fuzzy logic control strategy needs much less time. By looking into the PI control results we can easily notice why the simulation time has been chosen to be $1500s$ whereas the other two control systems needed much less

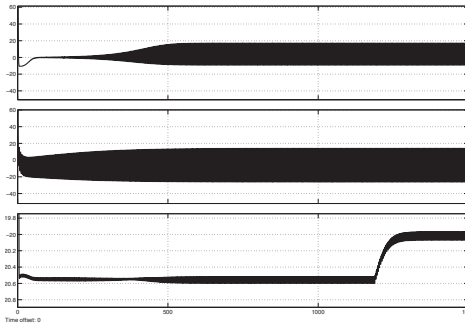


Figure 3: Rooms A, B and C Pressures. PI Control

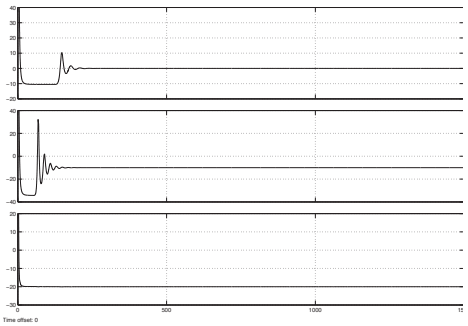


Figure 4: Rooms A, B and C Pressures. PI+Memory Control

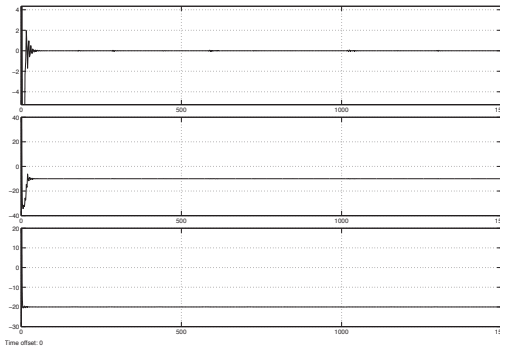


Figure 5: Rooms A, B and C Pressures. Fuzzy Logic Control

time to reach the desired values and not to fluctuate outside the design limits (5 Pascals towards each set point).

With these results we can easily notice how system's behaviour can be much better controlled with fuzzy systems, no matter if we know the equations that rule that system or not. It only has two mayor disadvantages, the knowledge gathering and the control systems has to be able to cope with all the necessary calculations in real time. This two disadvantages lead us to expend more money on it so the systems should be worth to implement it.

5 Conclusions

As it is shown in the results section, three major conclusions are obtained from these simulations:

- PI Control is unable to stabilize the system in 1500 seconds with dampings smaller than five pascals towards each set point except for room C (the biggest one).
- PI+Memory Control is able to stabilize the whole system in about 200 seconds. Even though this time is quite high, if we take into consideration all the restrictions and constraints that the real system has it can be a feasible solution.
- Fuzzy Logic Control is able to stabilize the whole system in 35 seconds. This solution is way better than the two previous ones and even the dampings are much smaller than with the other control strategies.

From these three conclusions we purpose a general conclusion and some future work proposals. Fuzzy logic control can achieve much better outcomes that traditional or adaptive solutions, specially when the system complexity increases. On the other hand, the success rate of the fuzzy logic control strategy totally depends on the experience of the workers in contact with the system and in our ability to extract that knowledge and transform it into mathematical rules. If this knowledge extraction and mathematical definition processes are carried out properly results achieved are far beyond the outcomes from the traditional techniques.

Talking about future work proposals, we are trying to implement the fuzzy control solution in the real plant. Reader

must remember that the major objective of this article was to accomplish the law without expending more money on new equipment.

References

[1] Alcalá, R., Benítez, J. M., Casillas, J., Cordón, O., and Pérez, R. (2003). Fuzzy control of HVAC systems optimized by genetic algorithms. Applied Intelligence, 18(2), 155-177.

[2] Jose Luis Jimenez Álvarez, Gerente TCI, S.L.L. *Criterios de diseño de instalaciones HVAC para zonas estériles.* Julio,Agosto 2012 Farmespañ a Industrial.

[3] United States Environmental Protection Agency *Hoja de Datos - Tecnología de Control de Contaminación del Aire.* EPA-452/F-03-057.

[4] Alfonso Buitrago Ruiz, Hug Quiroga Cruz *Flujo de Gas en Tuberias bajo Condiciones no Estables.* Dyna 132, 2001.

[5] Claudio Mataix *Mecánica de fluidos y maquinaria hidráulica.* Oxford University Press Mexico S.A. de C.V. (February 7, 1982). ISBN-10 9686034293.

[6] Mirinejad, H., Welch, K. C., and Spicer, L. (2012, May). A review of intelligent control techniques in HVAC systems. In Energytech, 2012 IEEE (pp. 1-5). IEEE.

[7] Grupo Europeo Ingeniería Agroalimentaria y Ambiental *Clasificación de las Salas Blancas.* www.gei-2a.com.

[8] ISO Standards *ISO 14644 Standards: Air Cleanliness series regulation.* ISO Standards, 1999.

[9] R. Babuska, Fuzzy modeling for control, Kluwer Academic Publishers, Boston; 2001.

[10] Klir, George J and Clair, Ute St and Yuan, Bo; Fuzzy set theory: foundations and applications, Prentice Hall, 1997.

[11] Ronald R. Yager and Dimitar P. Filev Essentials of Fuzzy Modeling and Control, New York, NY: John Wiley, 1994;

[12] Yager, R.R. and Ovchinnikov, S. and Tong, R.M. and Nguyen, H:T. Eds., Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L.A. Zadeh, John Wiley & Sons, 1987.

[13] Zadeh, L.A. Fuzzy Sets, Journal Information and Control, Volume 8 Pages 338–353, 1965.

OWA OPERATORS IN MULTI-CRITERIA DECISION ANALYSIS

José M. Merigó, Jian-Bo Yang, Yu-Wang Chen

Manchester Business School, University of Manchester, Booth Street West, M156PB Manchester, UK,
jose.merigolindahl@mbs.ac.uk; jian-bo.yang@mbs.ac.uk; yu-wang.chen@mbs.ac.uk

Abstract

The ordered weighted average (OWA) is an aggregation operator that provides a parameterized family of operators between the minimum and the maximum. This paper studies the use of the OWA operator in multi-criteria decision analysis. The main advantage of this approach is the possibility of considering the attitudinal character of the decision maker in the decision process. Several models are studied including additive and multiplicative multi-attribute utility theory, expected values and risk measures and models with quantiles and scenarios. Some further generalizations by using quasi-arithmetic means are also considered. The applicability of this approach is also studied and some simple numerical examples are provided.

Keywords: Multi-criteria decision analysis; Multi-attribute utility theory; OWA operator.

1 INTRODUCTION

Aggregation operators are very common in the literature for multi-criteria decision analysis (MCDA) [1,25]. They collect the available information providing some kind of summarized results. Probably, the most popular one is the weighted sum model which is commonly used in multi-attribute utility theory (MAUT) [9,18]. Some other common approach in this direction is the weighted product model which uses a multiplicative methodology in the aggregation process [3,17]. During the last decades many other aggregation methods have been introduced in the literature. Among others, it is worth mentioning the ordered weighted average [22]. It aggregates the information providing a parameterized family of operators between the minimum and the maximum. In MCDA this is very useful in decision making under uncertainty because it integrates the classical methods in the same formulation including the optimistic, pessimistic, Laplace and Hurwicz criterion. In this context, the main contribution of the ordered weighted average (OWA) operator is that it weights the information according to the attitudinal character of the decision maker instead of giving importance to the variables.

Focusing on MCDA, there are many methods for analysing the information. As mentioned before, the most common one is the weighted sum model that is extensively used in additive MAUT. However, there are many other available methodologies. First, the use of weighted averages can be extended to the more general framework of the expected value that is based on the use of probabilistic information in order to deal with risk environments [2] and is commonly used for expected utility theory [20]. Some other authors have used variances in order to assess the information [10], quantiles [16] and scenarios [19].

According to Durbach and Stewart [4], uncertainty in MCDA can be classified in five general formats, namely probabilities, decision weights, explicit risk measures, fuzzy measures and scenarios. Some other methodologies for dealing with uncertainty and related complexities have been studied in many other works including the analytical hierarchy process (AHP) [15], the technique for order performance by similarity to ideal solution [8], behavioural decision theory [14] and the evidential reasoning approach [26]. For a general overview of these and other related methods see [5,18].

The aim of this paper is to present some new extensions of the OWA operator when dealing with MCDA methods. The main advantage of doing so is that it allows the aggregation process to consider the attitudinal character of the decision maker from a total pessimistic to a total optimistic one. These extensions are developed in two general steps. First, it is introduced the use of the OWA operator which implies the elimination of the previous additive or multiplicative aggregation system. Next, some more general formulations that consider the classical additive system with the OWA aggregation in the same formulation are presented.

The analysis first studies the use of the OWA operator instead of the expected value in utility theory. The main reason for doing so is because sometimes no weights are available in the problem and it is necessary to use another approach such as an aggregation system that weights the

information according to the attitudinal character of the decision maker. Similar extensions are developed for models that use expected values and explicit risk attributes, quantiles, scenarios and multiplicative models.

The applicability of these new approaches are studied from a general perspective and it is seen that they can be applied in a wide range of problems because all the previous studies that use the weighted average in MCDA can be revised and extended with this approach. Some simple numerical examples are presented in order to understand the methodology suggested.

This paper is organized as follows. Section 2 introduces the use of the OWA operator in MCDA. Section 3 discusses the applicability of the new approach and presents some simple numerical examples and Section 4 summarizes the main conclusions of the paper.

2 OWA OPERATORS IN MCDA

The use of the OWA operator in decision making has been widely studied in the scientific community [22,25]. However, the main focus has been on the basic foundations and with applications in fuzzy systems and related problems. One of the reasons for this is because the OWA operator in essence, is a statistical technique and it has been presented mainly in computer science journals. Therefore, many key issues of MCDA have still not been considered under this framework. In this section it is presented a first connection between the OWA operator and some key foundations of MCDA. First, let us analyze the use of the OWA operator in MAUT.

Assume a decision problem with m alternatives A_h, $h \in \{1, \ldots, m\}$ and assessed with n attributes c_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Let Z_{hi} be a random variable that evaluates A_h on c_i, and $u_i(Z_{hi})$ be the value of single-attribute utility functions. Thus, we may construct the ordered weighted averaging multi-attribute utility theory (OWA-MAUT) as follows:

$$U_h = \sum_{j=1}^{n} w_j E[u_j(Z_{hj})], \tag{1}$$

where $u_j(Z_{hj})$ is the jth largest of the single-attribute utility functions $u_i(Z_{hi})$ and w_j is the jth weight denoting the attitudinal character of the decision maker.

As we can see, the key features of the OWA-MAUT is that it reorders the utility functions from largest to lowest in order to aggregate the information. It is also possible to use a dual aggregation where the reordering is developed from smallest to largest by using the transformation $w_j = w^*_{n+1-j}$. Observe that in this type of problems it is assumed that there is no probabilistic information available and the information is aggregated according to the attitudinal character of the decision maker. Thus, if he is totally optimistic, he will consider the most optimistic result that may occur. That is, $\text{Max}\{E[u_j(Z_{hj})]\}$, which is represented in the weighting vector as $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$.

On the other hand, if he is totally pessimistic, he will select the minimum potential result: $\text{Min}\{E[u_j(Z_{hj})]\}$. That is, $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. Note that it is also possible to consider a neutral criteria following the Laplace criteria. Although the result is equivalent to the arithmetic mean, observe that conceptually is not the same. The reason is that the arithmetic mean reflects that all the attributes are equally important. However, the neutral approach assumes that there is no information regarding the attributes so it is selected a neutral position where it is given the same weight for all the variables. The Hurwicz methodology is also included in this approach because it is a particular case of the OWA operator. In this case we get: $\alpha \times \text{Max}\{E[u_j(Z_{hj})]\} + (1 - \alpha) \times \text{Min}\{E[u_j(Z_{hj})]\}$.

An important issue when analyzing the information with the OWA operator is to characterize the weighting vector. Following the methodology used by Yager [22] it is possible to use the degree of or-ness of the weighting vector and the entropy of dispersion. The degree of or-ness, also known as degree of optimism or pessimism is formulated as follows:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right). \tag{2}$$

Note that $\alpha(W) \in [0, 1]$. For the maximum we get $\alpha(W) = 1$; for the minimum, $\alpha(W) = 0$ and for the arithmetic mean, $\alpha(W) = 0.5$. It is straightforward to calculate the and-ness measure (degree of pessimism) by using the dual: And-ness $= 1 - \alpha(W)$. Observe that it is possible to develop other measures considering the curvature of the utility function.

The entropy of dispersion measures the entropy of the weighting vector and is defined as follows:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j). \tag{3}$$

As we can see, for any step aggregation [23] such as the maximum, the minimum or the median, the dispersion is $H(W) = 0$. The maximum dispersion is found when using the arithmetic mean (Laplace criteria): $H(W) = \ln n$.

An interesting result found with the OWA-MAUT is that it is possible to construct interval numbers in the spirit of MCDA models with quantiles. For example, we could construct the following typical expression: OWA-MAUT $= [\text{Max}\{E[u_j(Z_{hj})]\}, \sum_{j=}^{n} w_j E[u_j(Z_{hj})], \text{Min}\{E[u_j(Z_{hj})]\}]$.

Thus, it is possible to consider the normal assumption but also the extreme situations that represent the worst and best situation that could occur in the future.

Sometimes, it is better to use a multiplicative approach when dealing with MAUT problems [17]. In this case, it could be used the ordered weighted geometric averaging (OWGA) operator [7,21] forming the OWGA-MAUT as follows:

$$U_h = \prod_{j=1}^{n} E[u_j(Z_{hj})]^{w_j}. \quad (4)$$

More generally, these approaches could be studied by using generalized and quasi-arithmetic means. Thus, it should be used the GOWA and the Quasi-OWA operator in the analysis [6,12,24]. By using the GOWA operator it is formed the GOWA-MAUT:

$$U_h = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j E[u_j(Z_{hj})]^{\lambda} \right)^{1/\lambda}, \quad (5)$$

where λ is a parameter such that $\lambda \in \{-\infty, \infty\} - \{0\}$. And by using the Quasi-OWA operator, we get the Quasi-OWA-MAUT:

$$U_h = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(E[u_j(Z_{hj})]\right) \right), \quad (6)$$

where g is a strictly continuous monotonic function. Observe that the Quasi-OWA-MAUT is more general because it includes the GOWA MAUT when the function g becomes $E[u_j(Z_{hj})]^{\lambda}$. Moreover, it includes many other particular cases including [11]:

- OWA-MAUT: g becomes $E[u_j(Z_{hj})]$.
- OWGA-MAUT: g tends to $E[u_j(Z_{hj})]^0$.
- Quadratic OWA MAUT: g becomes $E[u_j(Z_{hj})]^2$.
- Harmonic OWA MAUT: g becomes $E[u_j(Z_{hj})]^{-1}$.
- Cubic OWA MAUT: g becomes $E[u_j(Z_{hj})]^3$.

The use of the OWA operator in MCDA can also be extended to other frameworks. For example, it can be implemented in models that use expected values and explicit risk measures. In this case, it is obtained the following expression:

$$U_h^{(risk)} = \sum_{j=1}^{n} \left(w_j u_j E[(Z_{hj})] - w_{hi}^R R_{hi} \right), \quad (7)$$

where $u_j E[(Z_{hj})]$ is the jth largest of the $u_j E[(Z_{hi})]$, R_{hi} is the corresponding measure of the risk of Z_{hj} and w_{hi}^R is the weight of the risk for R_{hi}. The main advantage of this approach is that it is possible to aggregate the information according to the attitudinal character and considering the risk that each attribute may have. An alternative formulation that can be very practical in this context is to weight the information after the risk has been considered. That is:

$$U_h^{(risk)} = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j, \quad (8)$$

where D_j is the jth largest of the $(u_j E[(Z_{hi})] - w_{hi}^R R_{hi})$. Thus, it is possible to obtain a general value that considers this risk and then aggregate the information. This is important because the idea of the OWA is to reorder the information according to its expected outcome. Thus, the most optimistic result should be the one that has the highest result when combining the utility outcome with the risk and not only looking to the utility.

These models can also be extended with a multiplicative approach. For Eq. (7) we could use:

$$U_h^{(risk)} = \prod_{j=1}^{n} \left(\left(u_j E(Z_{hj})\right)^{w_j} - R_{hi}^{w_{hi}^R} \right). \quad (9)$$

Following Eq. (8) we get:

$$U_h^{(risk)} = \prod_{j=1}^{n} D_j^{w_j}, \quad (10)$$

where D_j is the jth largest of the $(u_j E[(Z_{hi})] - w_{hi}^R R_{hi})$.

More generally, it is also possible to use generalized and quasi-arithmetic means under this approach. This forms a more global expression that includes a wide range of particular cases. By using Eq. (7) it is formed:

$$U_h^{(risk)} = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \left(w_j g\left(u_j E[(Z_{hj})]\right) - w_{hi}^R g(R_{hi}) \right) \right). \quad (11)$$

And with Eq. (8):

$$U_h^{(risk)} = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(D_j) \right), \quad (12)$$

where g is a strictly continuous monotonic function. Note that it is implicitly assumed that g is equal for the utility outcome and the risk measure. However, it is possible to consider more complex formulations where they use different functions. Moreover, here we can also find quadratic aggregations, geometric and harmonic ones as it has been explained for the Quasi-OWA-MAUT.

Next, let us look into models with quantiles [4]. Here we can also introduce the use of the OWA operator as follows:

$$U_h^{(quant)} = \sum_{j=1}^{n} \left(w_j \sum_{k=1}^{N_q} w_{q_k} u_j(z_{hj}^{(q_k)}) \right), \quad (13)$$

where $u_j(z_{hj}^{(q_k)})$ is the jth largest of the $u_i(z_{hi}^{(q_k)})$, q_k refers to a specific quantile, $z_{hi}^{(q_k)}$ is the q_kth quantile of Z_{hj}, w_{q_k} is the weight associated with q_k and N_q is the number of quantiles used.

This approach can also be improved by using generalized and quasi-arithmetic means obtaining a more robust formulation in the following way:

$$U_h^{(quant)} = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \left(w_j g\left(\sum_{k=1}^{N_q} w_{q_k} u_j(z_{hj}^{(q_k)}) \right) \right) \right), \quad (14)$$

where g is a strictly continuous monotonic function. Observe that here it is also included the geometric, the quadratic and the harmonic aggregation as particular cases.

Finally, let us analyze the use of the OWA operator in models that use scenarios [4]. Here, it is possible to follow three different methodologies. First, it can be used the OWA operator for the normal weights and for the scenario weights. In this case, the information has to be aggregated first by the normal weights using the OWA methodology. Once the results are found, reorder again the information and aggregate the information with the scenario weights that now uses the OWA approach. This is formulated as follows:

$$U_h^{(scen)} = \sum_{t=1}^{N_q}\left(w_{s_t} \sum_{j=1}^{n} w_j u_j(z_{hj}^{(s_t)}) \right), \quad (15)$$

where $u_j(z_{hj}^{(s_t)})$ is the jth largest of the $u_i(z_{hi}^{(s_k)})$, s_t denotes a specific scenario, w_{s_t} aggregates the $t$ht largest $\sum_{j=1}^{n} w_j u_j(z_{hj}^{(s_t)})$ and N_s is the number of scenarios used. As we can see, here it is used a double aggregation process with the OWA operator. Observe that it is possible to consider situations where the OWA operator is only used in the first step or in the second one. The motivation for this is according to the available information. Sometimes, the weights of the attributes or the scenarios are known and it is not necessary to use the OWA operator. Recall that by using the OWA operator, the decision maker is considering his attitudinal character instead of giving importance to the variables. If the OWA operator is only used in the first step, the aggregation would look as:

$$U_h^{(scen)} = \sum_{k=1}^{N_q}\left(w_{s_k} \sum_{j=1}^{n} w_j u_j(z_{hj}^{(s_k)}) \right). \quad (16)$$

And if it is only used in the second step:

$$U_h^{(scen)} = \sum_{t=1}^{N_q}\left(w_{s_t} \sum_{i=1}^{n} w_i u_i(z_{hi}^{(s_t)}) \right). \quad (17)$$

More generally, it is also possible to further extend this approach with generalized and quasi-arithmetic means. By using quasi-arithmetic means it is found the following expression:

$$U_h^{(scen)} = f^{-1}\left[\sum_{t=1}^{N_q}\left(w_{s_t} f\left[g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(u_j(z_{hj}^{(s_t)})\right)\right)\right]\right)\right], \quad (18)$$

where g and f are strictly continuous monotonic functions. Observe that they may follow the same trend or not depending on the specific problem considered. Similarly to the previous quasi-arithmetic equations, it includes a wide range of particular cases including those that use generalized, geometric and quadratic means. In this case, it is also possible to look to situations that use OWA operators only in the first step or in the second one. However, let us include the quasi-arithmetic version in the form of a weighted quasi-arithmetic mean because it includes the weighted average as a particular case. When using the OWA in the first step we get:

$$U_h^{(scen)} = f^{-1}\left[\sum_{k=1}^{N_q}\left(w_{s_k} f\left[g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(u_j(z_{hj}^{(s_k)})\right)\right)\right]\right)\right]. \quad (19)$$

And in the second step:

$$U_h^{(scen)} = f^{-1}\left[\sum_{t=1}^{N_q}\left(w_{s_t} f\left[g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i g\left(u_i(z_{hi}^{(s_t)})\right)\right)\right]\right)\right]. \quad (20)$$

Note that many other extensions and particular cases could be developed following the OWA literature [13,25,27]. However, those presented here are believed to be some of the most representative ones.

3 NUMERICAL EXAMPLE

The use of the OWA operator in MCDA has a lot of potential because in principle they can be implemented in equivalent problems where the classical approaches were studied. This is possible as long as their specific conditions hold. For the OWA operator, the key assumption is to consider the attitudinal character of the decision maker by using a specific degree of optimism or pessimism in the decision problem. Implicitly, here it is also assumed that no attribute weights are available or at least they are not considered in the analysis.

In this context, these models can be applied to almost any decision making model that is assessed under the framework of MCDA. Among others, it is worth mentioning business and economic applications that includes financial decision making, strategic management and human resource selection. Moreover, there should be a distinction between macro decisions that involve huge quantities of money or equivalent and micro decisions concerned with the natural activity of individuals and enterprises.

In the following, let us look into some simple numerical example in order to understand the new approach developed in the paper. The example is focussed on MAUT problems. It will be considered the use of the OWA with an additive framework.

Assume a company that is planning its general strategy for the next year and considers five alternatives:

- A_1 = Expand to the Asian market.
- A_2 = Expand to the South American market.
- A_3 = Expand to the African market.
- A_4 = Expand to all three markets.
- A_5 = Do not make any expansion.

In order to analyse the information, the decision maker considers that five representative attributes express the value of each alternative:

- c_1 = Expected benefits in the short-term.
- c_2 = Expected benefits in the mid-term.

- c_3 = Expected benefits in the long-term.
- c_4 = Costs for implementation of the strategy.
- c_5 = Other variables.

According to this information, the decision maker quantifies the utility that each strategy provides according to the attribute considered. The results are shown in Table 1.

Table 1: Expected utility outcomes

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
A_1	70	30	80	40	50
A_2	20	40	70	50	60
A_3	40	50	90	20	40
A_4	50	60	60	30	70
A_5	70	50	30	70	40

According to this information, the decision maker aggregates the information in order to find the optimal alternative. For doing so, it is used the classical MAUT and the OWA-MAUT. The minimum and the maximum are also considered in order to get a general picture of all the potential results that may occur. The attribute weights are: V = (0.3, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1). And the attitudinal character is: W = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3). The results are shown in Table 2.

Table 2: Aggregated results

	Min	Max	MAUT	OWA-MAUT
A_1	30	80	56	46
A_2	20	70	44	41
A_3	20	90	48	40
A_4	30	70	52	49
A_5	30	70	50	43

As we can see, the optimal choice in this example is usually A_1 although sometimes it may be also optimal A_3 and A_4. It is worth noting that due to uncertainty we do not know the future results. What it is done in the aggregation is provide expected results that fit with the attitudinal character of the decision maker. Therefore, depending on the attitude selected, the results may be different leading to different decisions.

4 CONCLUSIONS

A new approach for MCDA has been suggested. The main feature of the new approach is the use of the OWA operator in some of the most common methods for MCDA. Thus, it is possible to consider the attitudinal character of the decision maker in the aggregation process. This implies that he is able to consider any potential result from the most pessimistic to the most optimistic one and select the central result that seems to be in closest accordance with his interests. Several approaches have been developed including the OWA-MAUT, models that combine expected values with risk measures, approaches with quantiles and methods with scenarios. For most of these approaches, the analysis has started with the usual additive version, giving special attention to it by studying some key properties and particular cases. Some other extensions with multiplicative and generalized aggregation operators have been considered. The paper has ended with a simple numerical example of the new approach with a focus on MAUT problems.

Acknowledgements

We would like to thank the anonymous reviewers for valuable comments that have improved the quality of the paper. Support from the European Commission through the project PIEF-GA-2011-300062 is gratefully acknowledged.

References

[1] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo: *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Springer-Verlag: Berlin, 2007.

[2] V. Belton, T. Stewart: *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach*. Kluwer Academic Publishers: Boston, 2002.

[3] P.W. Bridgman: *Dimensional Analysis*. Yale University Press: New Haven, 1922.

[4] I. Durbach, T. Stewart: Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis. *European Journal of Operational Research* 223, pp. 1-14, 2012.

[5] J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott: *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. Springer: Boston, 2005.

[6] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens: Characterization of the ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3, pp. 236-240, 1995.

[7] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana: A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making. *International Journal of Intelligent Systems* 18, pp. 689-707, 2003.

[8] C. Hwang, K. Yoon: *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*. Springer-Verlag, 1981.

[9] H. Keeney, H. Raiffa: *Decisions with Multiple Objectives: Preference and Value Tradeoffs*. Cambridge University Press: Cambridge, 1993.

[10] C. Kirkwood: Estimating the impact of uncertainty on deterministic multi-attribute evaluation. *Management Science* 38, pp. 819-826, 1992.

[11] J.M. Merigó, M. Casanovas: The uncertain induced quasi-arithmetic OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems* 26, pp. 1-24, 2011.

[12] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente: The induced generalized OWA operator. *Information Sciences* 179, pp. 729-741, 2009.

[13] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente: The induced 2-tuple linguistic generalized OWA operator and its application in linguistic decision making. *Information Sciences* 236, pp. 1-16, 2013.

[14] A. Morton, B. Fasolo: Behavioural decision theory for multi-criteria decision analysis: a guided tour. *Journal of the Operational Research Society* 60, pp. 268-275, 2009.

[15] T. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill. New York, 1980.

[16] C. Spetzler, C.A. Staël Von Holstein: Probability encoding in decision analysis. *Management Science* 21, pp. 340-358, 1975.

[17] T. Stewart: Simplified approaches for multicriteria decision making under uncertainty. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 4, pp. 246-258, 1995.

[18] E. Triantaphyllou: *Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[19] K. Van der Heijden: *Scenarios: The Art of Strategic Conversation*. John Wiley & Sons. New York, 1996.

[20] J. Von Neumann, O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press: New York, 1953.

[21] Z.S. Xu, Q.L. Da: The ordered weighted geometric averaging operators. *International Journal of Intelligent Systems* 17, pp. 709-716, 2002.

[22] R.R. Yager: On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* 18, pp. 183-190, 1988.

[23] R.R. Yager: Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems* 59, pp. 125-148, 1993.

[24] R.R. Yager: Generalized OWA aggregation operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 3, pp. 93-107, 2004.

[25] R.R. Yager, J. Kacprzyk, G. Beliakov: *Recent Developments on the Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Practice*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[26] J.B. Yang, M.G. Singh: An evidential reasoning approach for multiple attribute decision making with uncertainty. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 24, pp. 1-18, 1994.

[27] N. Zhao, C.P. Wei, Z.S. Xu, Sensitivity analysis of multiple criteria decision making method based on the OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 28, pp. 1124-1139, 2013.

A fuzzy viewpoint of consensus measures in Social Choice

José Carlos R. Alcantud, **Rocío de Andrés Calle**

Universidad de Salamanca
Fac. de Economía y Empresa, {jcr,rocioac}@usal.es

Abstract

In this work we use fuzzy set theory to contribute to the formal analysis of the measurement of consensus in a group of experts or a society. This approach allow us to capture the vagueness associated with the concept of "consensus" by means of widely accepted mathematical tools. We define a *consensual state* as a fuzzy subset whose characteristic function attaches memberships to "acceptable consensual states" for each element of a given group decision making problem.

Keywords: Consensus measure, Fuzzy Set, Consensual state.

1 INTRODUCTION

Reaching consensus in group decision making problems, as well as its measurement, are prominent and active research areas in Decision Making Theory (see [7], [11], [14], [15], [17], [19] and [20], among others, as well as [9, 10] for constructions from aggregation functions) and in Social Choice Theory (see [1], [3] and [12] as a sample). This increasing attention is the consequence of considering group decision making problems of real life in which not only is significant to rank the alternatives but it also is important to measure how much consensus this solution conveys to the group (see Figure 1).

Strictly speaking, *consensus* means full and unanimous agreement. This strict meaning of consensus is often an idyllic concept, among other reasons, because experts' opinions about complex alternatives are usually characterized by their ideas, principles, knowledge, etc.; because most voting procedures incentivate strategic behaviors; et cetera. Therefore, instead here we are bound by the definition given by the Oxford dictionaries: "a general agreement". Since "general" is a vague concept, one is led to consider that it requires to refer to the *degree of consensus*.

Here we introduce the aforementioned idea of *degree of consensus* from a fuzzy viewpoint. This treatment is in contrast with the current trend in social choice, where precise measures of the undefined concept of consensus or cohesiveness are provided (and characterized by axioms when possible). To this purpose, we redefine the seminal contribution by Bosch [12] and other related works in terms of fuzzy sets.

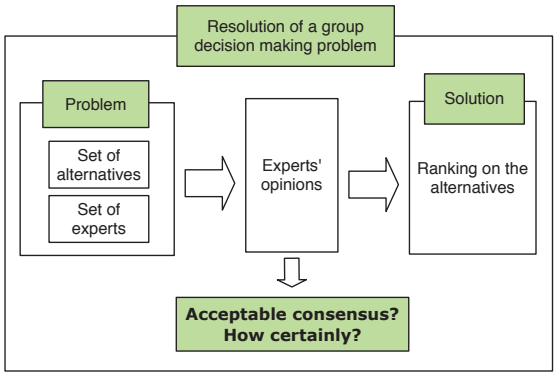


Figure 1: Resolution of a group decision making problem and consensus

This paper is organized as follows. In Section 2 we state the problem of modelling consensus of profiles of opinions from a fuzzy point of view. In this analysis different frameworks that depend on the nature of the information are considered. Thus to achieve our purpose we introduce consensual states of various kinds. Moreover, an extensive list of particular cases are presented and discussed. Section 3 includes some elementary mathematical properties of consensual fuzzy subsets. Finally, in Section 4 we give some concluding remarks.

2 CONSENSUS IN SOCIAL CHOICE: A FUZZY VIEWPOINT

The measurement of the degree of agreement in a group has recently attracted much attention from researchers in social choice (cf., [1] or [3] as a sample), although its study is often complex and controversial since it involves the treatment of individual opinions, aggregation procedures or voting rules; it is conditional on the context; etc. This handicap is common to virtually all branches of the Social Sciences. Both aspects have been the subject of a joint treatment in [4, 5].

Instead of measuring consensus, a concept that has not been formally defined in social choice, here we take a different position. We treat the intrinsically vague concept of consensus from a fuzzy viewpoint, which permits to give a formal support to the idea that profiles of opinions are more or less consensual. Acceptably consensual states constitute a fuzzy subset of the set of possible states or profiles, thus its characteristic function captures the natural idea that these profiles belong to the set of 'acceptable consensual states' to a certain extent. Furthermore, precise restrictions on the concept of consensus can be incorporated into the structure of the fuzzy set. For example, the natural idea that profiles where all agents have exactly the same opinions must belong to the set of 'acceptable consensual states' with certainty should always be imposed.

Henceforth we refer to a fixed $X = \{x_1, ..., x_k\}$, a finite decision set of k options, alternatives or candidates. Abusing notation, on occasions we refer to option x_s as option s for convenience. A population of agents or voters is a finite subset $\mathbf{N} = \{1, 2, ..., N\}$ of natural numbers. The agents can either compare or evaluate the options. We proceed to describe models that arise from each possibility.

2.1 THE CASE OF AGENTS THAT ORDER THE ALTERNATIVES

The seminal work by Bosch [12] introduces the axiomatic analysis of consensus for a collective of agents, and he works under the assumption that each of them has a linear order on a common set of alternatives. This is also the case of Alcalde-Unzu and Vorsatz [1]. It is simple to extend the analysis to the case of complete preorders, where ties among alternatives are allowed. We exploit this possibility in Alcantud et al [2], where an empirical application to the coherence of the ranking of top universities by the ARWU (Academic Ranking of World Universities) is given. We proceed to define the elements in that analysis.

Let $W(X)$ be the set of weak orders or complete preorders on X, that is, the set of complete and transitive binary relations on X. If $R \in W(X)$ reflects the preferences of an agent, then by $x_i R x_j$ we mean "the agent thinks that alternative x_i is at least as good as x_j". $L(X)$ denotes the set of linear orders on X. Of course, $L(X) \subseteq W(X)$.

A *profile* $\mathscr{R} = (R_1, \ldots, R_N) \in W(X) \times \overset{N}{\ldots} \times W(X)$ is a vector of weak orders. Each $R_i \in W(X)$ represents the preferences of individual i on the k alternatives, for each $i = 1, \ldots, N$. We say that the profile $\mathscr{R}$ is constant to R if $\mathscr{R} = (R, \overset{N}{\ldots}, R)$. The collection of all profiles is denoted by $\mathscr{P}$ and $\mathscr{L}$ is the collection of all profiles of linear orders.

Any permutation σ of the voters $\{1, 2, ..., N\}$ determines a permutation of $\mathscr{R}$ by $\mathscr{R}^\sigma = (R_{\sigma(1)}, ..., R_{\sigma(N)})$. Similarly, any permutation π of the alternatives $\{1, 2, ..., k\}$ determines a permutation of every complete preorder $R \in W(X)$ via $x_s {}^\pi R_i x_t \Leftrightarrow x_{\pi^{-1}(s)} R_i x_{\pi^{-1}(t)}$ for all $s, t \in \{1, \ldots, k\}$ and $i \in \{1, \ldots, N\}$. Then with $\mathscr{R}$ and π we can associate ${}^\pi\mathscr{R} = ({}^\pi R_1, ..., {}^\pi R_N)$.

Definition 1 A *consensual state* is a fuzzy subset of $\mathscr{P}$ whose membership function $\mu : \mathscr{P} \to [0, 1]$ verifies:

i) $\mu(\mathscr{R}) = 1$ if and only if $\mathscr{R}$ is a constant profile.

This restriction captures the requirement that only profiles where all agents have the same preferences must belong to the set of 'acceptable consensual states' with certainty.

The consensual state is *normal* when

ii) $\mu(\mathscr{R}^\sigma) = \mu(\mathscr{R})$ for each permutation σ of the agents.

iii) $\mu({}^\pi\mathscr{R}) = \mu(\mathscr{R})$ for each permutation π of the alternatives.

We also refer to (*normal*) *consensual fuzzy subsets* of $\mathscr{P}$. This property means that the membership degree is independent of the names of the agents and of the order in the list of alternatives. Similarly one can define *restricted consensual states* as *consensual fuzzy subsets* of $\mathscr{L}$, and then introduce normality as above.

We now present some illustrative examples.

The simplest possible consensual state only tells apart constant and non-constant profiles. It captures the restrictive meaning of consensus as full and unanimous agreement.

Example 1 The trivial consensual state μ_t is defined as: $\mu_t(\mathscr{R}) = 1$ if and only if $\mathscr{R}$ is a constant profile, and $\mu_t(\mathscr{R}) = 0$ otherwise. It is a normal consensual state.

Under this drastically precise concept of 'consensual degree', profiles with perfect unanimity must be declared as acceptably consensual with certainty, and all other profiles are *completely* non-consensual.

Bosch [12, 3.3.1] inspires a less naive but still primitive definition of a consensual fuzzy subset of $\mathscr{L}$. For every $R \in L(X)$, let $c_R(i)$ denote the alternative that is ranked in the i-th position by R. When $\mathscr{R} = (R_1, ..., R_N) \in \mathscr{L}$, the set

$C_{\mathscr{R}} \subseteq X$ of alternatives ranked in the same position by all agents is $C_{\mathscr{R}} = \{x_t \in X : \text{ for some } i, x_t = c_i(R_j) \text{ for all } j\}$. Constant profiles are characterized by $C_{\mathscr{R}} = X$. With these elements we can define:

Example 2 The simple restricted consensual state μ_s is given by: $\mu_s(\mathscr{R}) = \frac{|C_{\mathscr{R}}|}{k}$. It is a normal restricted consensual state.

According to μ_s, the membership degree of a profile of linear orders is defined as the proportion of alternatives that are ranked at the same position by all voters, to the total number of alternatives.

Another source of inspiration is Hays [16], who was the first to propose a measure of concordance among members of a collective. He was inspired by Kemeny's distance between pairs of linear orders. In a similar vein the following construction captures a related concept of consensus.

Example 3 The Hays consensual state μ_H is defined as: $\mu_H(\mathscr{R})$ is the probability that for a randomly chosen pair of alternatives, two randomly chosen agents have the same preferences on them. It is immediate to check that μ_H is a normal consensual state.

A more restrictive concept of consensus is the following:

Example 4 The Pareto consensual state μ_A is defined as: $\mu_A(\mathscr{R})$ is the probability that for a randomly chosen pair of alternatives, all agents have the same preferences on them. It is immediate to check that μ_A is a normal consensual state.

Clearly $\mu_A(\mathscr{R}) \leqslant \mu_H(\mathscr{R})$ throughout.

Our next example is inspired by Bosch [12, 3.3.5]. It uses as a basis of the degree of membership the cardinality of the largest subsociety that share the same preference:

Example 5 The plurality consensual state μ_p is defined as: $\mu_p(\mathscr{R}) = max_i \frac{|N_i|}{N}$ where $\mathbf{N} = N_1 \cup ... \cup N_t$ indicates a partition of $\mathbf{N}$ into subsets of agents with the same preference. This is induced by the equivalence relation: agent i is related to agent j if and only if $R_i = R_j$. It is immediate to check that μ_p is a normal consensual state.

2.2 THE CASE OF AGENTS WITH DICHOTOMOUS OPINIONS

Alcantud et al. [3] introduced the axiomatic analysis of consensus when agents have dichotomous opinions on the alternatives. This situation is both theoretically tractable and empirically versatile. Let us mention some possible applications. In [3], the cohesiveness of forecasts about the 2012 presidential elections in USA made by polling agencies is measured. In Alcantud and Muñoz-Torrecillas [6] another type of applications to political analysis are given. To be concrete, referenda in Switzerland (where the agents are the cantons) and Italy (where the agents are individual voters) are studied from an intertemporal perspective. Nevertheless the usual example is the case when the agents are asked to participate in elections under the Approval Voting (AV) mechanism. Brams and Fishburn [13] survey results from several scientific societies that adopted AV since 1987, like Mathematical Association of America (MAA), American Mathematical Society (AMS), Institute for Operations Research and Management Sciences (INFORMS), American Statistical Association (ASA), or Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). Many other examples are mentioned, including the Society for Judgment and Decision Making, the Social Choice and Welfare Society, the International Joint Conference on Artificial Intelligence, and the European Association for Logic, Language and Information, the Econometric Society or the National Academy of Sciences of the USA. The secretary-general of the United Nations is an official elected by AV.

Now we proceed to define the elements in that analysis. We consider that each expert can vote for or approve of as many options, alternatives or candidates as he/she wishes, thus showing extreme and dichotomous opinions. A *dichotomous profile* of the society $\mathbf{N}$ on the set of alternatives X is an $N \times k$ *binary* matrix

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & \dots & M_{Nk} \end{pmatrix}_{N \times k}$$

where M_{ij} is the opinion of the expert i over the alternative x_j, in the sense

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if expert } i \text{ approves the alternative } x_j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Obviously, row i of the profile M describes the dichotomous assessment of expert i over the alternatives. Column j of the profile M captures the experts' assessments on the alternative j; we denote it by M^j.

We write $\mathbb{M}_{N\times k}$ for the set of all $N \times k$ binary matrices. A dichotomous profile $M \in \mathbb{M}_{N\times k}$ is *constant* if the set of approved alternatives is the same across experts, i.e., if each M^j is constant. For convenience, $\mathbf{1}_{N\times k}$ denotes the $N \times k$ matrix whose cells are universally equal to 1.

Any permutation σ of the experts $\{1,2,...,N\}$ determines a profile M^σ by permutation of the rows of M: row i of the profile M^σ is row $\sigma(i)$ of the profile M. Similarly, any permutation π of the alternatives $\{1,2,...,k\}$ determines a profile ${}^\pi M$ by permutation of the columns of M: column j of the profile ${}^\pi M$ is column $\pi(j)$ of the profile M.

Definition 2 A *consensual dichotomous state* is a fuzzy

subset of $\mathbb{M}_{N\times k}$ whose membership function $\mu : \mathbb{M}_{N\times k} \to [0,1]$ verifies:

i) $\mu(M) = 1$ if and only if M is a dichotomous constant profile.

This restriction captures the requirement that only profiles where all agents approve of exactly the same alternatives must belong to the set of 'acceptable consensual states' with certainty.

The consensual dichotomous state is *normal* when

ii) $\mu(M^\sigma) = \mu(M)$ for each permutation σ of the agents.

iii) $\mu({}^\pi M) = \mu(M)$ for each permutation π of the alternatives.

We also refer to (*normal*) *consensual fuzzy subsets* of $\mathbb{M}_{N\times k}$: their membership degrees are independent of the names of the agents and of the order in the list of alternatives.

As in the case of consensual states, we proceed to list some examples. The simplest possible consensual dichotomous state is the following:

Example 6 The trivial consensual dichotomous state $\bar{\mu}_t$ is defined as: $\bar{\mu}_t(M) = 1$ if and only if M is a constant dichotomous profile, and $\bar{\mu}_t(M) = 0$ otherwise. It is a normal consensual dichotomous state.

Building on the crisp analysis in Alcantud et al. [3], we proceed to define a consensual dichotomous state that adapts the vague concept of consensus in Example 2 to the current setting:

Example 7 The simple consensual dichotomous state $\bar{\mu}_s$ is defined as: $\bar{\mu}_s(M) = \frac{n}{k}$, where n denotes the number of constant columns of M. It is a normal consensual dichotomous state.

Under $\bar{\mu}_s$, the degree of membership of a dichotomous profile is the proportion of alternatives that are either approved or disapproved by all agents, to the total number of alternatives.

Some more sophisticated proposals can be imported from related ideas in Alcantud and Muñoz-Torrecillas [6]:

Example 8 The pairwise consensual dichotomous state $\bar{\mu}_p$ is defined as: $\bar{\mu}_p(M)$ is the probability that for a randomly chosen alternative, two randomly chosen agents have the same opinion (either approval or disapproval) on that alternative. It is a normal consensual dichotomous state.

Example 9 The majoritarian consensual dichotomous state $\bar{\mu}_m$ is defined as: $\bar{\mu}_m(M)$ is the probability that the opinion of a randomly chosen agent on a randomly chosen alternative is supported by a majority of the agents. It is a normal consensual dichotomous state.

3 SOME ELEMENTARY MATHEMATICAL PROPERTIES OF CONSENSUAL STATES

Needless to say, not all consensual (resp., dichotomous) states are universally valid. Different ethical, legal, or practical constraints are natural in certain situations, and they can be implemented by imposing adequate mathematical properties on the pertinent generic definition. Let us give just a few examples in the simplified but rich context of consensual dichotomous states.

Consider the aforementioned case of Swiss referenda where each canton can only say 'yes' or 'no' to each issue. This is a legal restriction implying that only consensual dichotomous states with the following property are meaningful:

Definition 3 A consensual dichotomous state μ is *reciprocal* when $\mu(M) = \mu(\mathbf{1}_{N\times k} - M)$ for each $M \in \mathbb{M}_{N\times k}$.

Reciprocity means that replacing 0's with 1's and 1's with 0's does not alter the membership degrees. It is not difficult to check that the examples in Subsection 2.2 verify this definition. The reason for imposing it in the analysis of referenda as in the Swiss example is that each question could be rephrased in exactly opposed terms, thus the answers given should be reversed (in the sense that a 'yes' becomes a 'no' and conversely). However it is clear that such reformulation should not change the degree of membership of the profile of answers, since the political implications are exactly the same.

Similarly, in cases where the population is not fixed (as the case of the Italian referenda studied in Alcantud and Muñoz-Torrecillas [6]) it may seem appealing to use consensual dichotomous states that verify the following property:

Definition 4 Define the *replication* of a dichotomous profile M of the society $\mathbf{N}$ as $M \uplus M \in \mathbb{M}_{2N\times k}$ obtained by duplicating each row of M, in the sense that both rows t and $N+t$ of $M \uplus M$ are row t of M, for each $t = 1,\ldots,N$. A consensual dichotomous state μ verifies *replication invariance* when $\mu(M) = \mu(M \uplus M)$ for each $M \in \mathbb{M}_{N\times k}$.

The idea here is that proportions and not quantities of votes matter. Now Examples 6, 7 and 9 verify this definition while 8 does not verify it.

In a related vein, a consistency property that is typically assumed claims that when the society's opinions are equally divided on each issue, then the society is considered to have

no cohesiveness whatsoever. If we are bound by this assumption then we must refer to states with the following property:

Definition 5 A consensual dichotomous state μ is *balanced* when $\mu(M) = 0$ for each $M \in \mathbb{M}_{N\times k}$ such that M^j has the same number of 0's and 1's, for every $j = 1, ..., k$.

Other related constraints required by the characteristics of certain problems or applications are cited elsewhere, e.g., Beliakov et al. [10, Subsections 3.1 and 3.2]. In fact our definition of reciprocity is germane to their Definition 10 (property C5), replication invariance is germane to their Definition 11 (property C6), and balancedness is germane to their Definition 9 (property C4).

Regarding formal mathematical properties of consensual (resp., dichotomous) states other than the attributes required by potential applications that have been pointed out, we present the following proposition:

Proposition 1 *Let $\{\mu_i : i = 1, ..., t\}$ be consensual (resp., dichotomous) states. Then:*

a) $\mu_1 \cup ... \cup \mu_t$ and $\mu_1 \cap ... \cap \mu_t$ are consensual (resp., dichotomous) states. They are normal provided that each μ_i is normal.

b) if $\alpha_1, ..., \alpha_t$ are non-negative and $\alpha_1 + ... + \alpha_t = 1$, then $\alpha_1\mu_1 + ... + \alpha_t\mu_t$ is a consensual (resp., dichotomous) state. It is normal provided that each μ_i is normal.

4 CONCLUDING REMARKS

In this paper we analyse the vague concept of consensus, cohesiveness or coherence of (crisp) opinions from the point of view of fuzzy set theory. To this purpose we have introduced a general framework whose performance has been explored, as well as an extensive list of particular examples from two specific models. In particular, some proposals from the standard literature in social choice have been exported to this new approach. Moreover, some elementary mathematical properties of consensual fuzzy subsets have been put forward too.

Our concepts have similarities with the idea of local homogeneity as defined in Jurio et al. [18, Definition 1]. Their properties (LH1) and (LH4) resemble closely the notion of a normal consensual state, while (LH2) accounts for reciprocity. As in our applications, further properties are requested that are suitable to deal with image processing. [1]

To conclude, we mention that a reformulation of the models in terms similar to 'measures of dispersion' can be given as follows (cf., Alcantud et al. [2] for a discussion in the language of social choice). A *disconsensual state* is a fuzzy subset of $\mathscr{P}$ whose membership function $\mu' : \mathscr{P} \to [0,1]$ verifies:

i') $\mu'(\mathscr{R}) = 0$ if and only if $\mathscr{R}$ is a constant profile.

For a disconsensual state, normality is the conjunction of ii) and iii) as in the definition of consensual state. The same can be done for disconsensual dichotomous states. In order to change from consensual to disconsensual states and conversely, one can simply use any fuzzy negation (cf., Beliakov et al. [8], Beliakov et al. [10, Definition 5]). That is to say, any monotone non-increasing function $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ with $N(0) = 1$, $N(1) = 0$. Particularly, the standard negation $N(x) = 1 - x$ can be used.

Proposition 2 *Let N be a negation. For each μ consensual (resp., dichotomous) state, $N \circ \mu$ is a disconsensual (resp., dichotomous) state. Furthermore, μ is normal if and only if $N \circ \mu$ is normal. Conversely, if μ' is a disconsensual (resp., dichotomous) state then $N \circ \mu'$ is a consensual (resp., dichotomous) state, and μ' is normal if and only if $N \circ \mu'$ is normal.*

Acknowledgements

The authors are grateful to Fernando Bobillo, Humberto Bustince and Francisco Javier Fernández for their kind invitation and encouragement to participate in ESTYLF 2014. The careful revision by two anonymous referees improved the presentation of our results and is gratefully acknowledged. Financial support by the Spanish Ministerio de Ciencia e Innovación under Project ECO2012–31933 (J. C. R. Alcantud), Project ECO2012–32178 and Project CGL2008–06003–C03–03/CLI (R. de Andrés Calle) is gratefully acknowledged.

References

[1] J. Alcalde-Unzu, M. Vorsatz: Measuring the cohesiveness of preferences: an axiomatic analysis. *Social Choice and Welfare* **41**, 965–988, 2013.

[2] J. C. R. Alcantud, R. de Andrés Calle, T. González-Arteaga: Codifications of complete preorders that are compatible with Mahalanobis disconsensus measures. In: Eurofuse 2013 Workshop. Uncertainty and Imprecision Modelling in Decision Making, pp. 19-26. Bernard de Baets, János Fodor and Susana Montes (Eds.). Ediciones de la Universidad de Oviedo, 2013.

[3] J. C. R. Alcantud, R. de Andrés Calle, J. M. Cascón: On measures of cohesiveness under dichotomous opinions: some characterizations of Approval Consensus Measures. *Information Sciences* **240**, 45–55, 2013.

[1] We are grateful to an anonymous referee for pointing out this link.

[4] J. C. R. Alcantud, R. de Andrés Calle, J. M. Cascón: A unifying model to measure consensus solutions in a society. *Mathematical and Computer Modelling* **57**, 1876–1883, 2013.

[5] J. C. R. Alcantud, R. de Andrés Calle, J. M. Cascón: Consensus and the act of voting. *Studies in Microeconomics* **1**, 1–22, 2013.

[6] J. C. R. Alcantud, M. J. Muñoz-Torrecillas: On the measurement of sociopolitical consensus in direct democracies: Proposal of indexes. MPRA Paper No. 47268, http://mpra.ub.uni-muenchen.de/47268/.

[7] S. Alonso, F. Cabrerizo, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma: Group decision making with incomplete fuzzy linguistic preference relations. *International Journal of Intelligent Systems* **24**, 201–222, 2009.

[8] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo: *Aggregation functions: A guide for practitioners*. Springer, Heidelberg, 2007.

[9] G. Beliakov, T. Calvo, S. James: Aggregating fuzzy implications to measure group consensus. *Proceedings of the IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS)*, Edmonton, Canada, 1016–1021, 2013.

[10] G. Beliakov, T. Calvo, S. James: Consensus measures constructed from aggregation functions and fuzzy implications. *Knowledge-Based Systems* **55**, 1–8, 2014.

[11] G. Bordogna, M. Fedrizzi, G. Pasi: A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans* **27**, 126–132, 1997.

[12] R. Bosch: *Characterizations of Voting Rules and Consensus Measures*, Ph. D. Dissertation, Tilburg University, 2005.

[13] S. J. Brams, P.C. Fishburn: Going from theory to practice: the mixed success of approval voting. *Social Choice and Welfare* **25**, 457–474, 2005.

[14] N. Bryson: Group decision-making and the analytic hierarchy process: Exploring the consensus-relevant information content. *Computers and Operational Research* **1**, 27–35, 1996.

[15] Z. Fan, X. Chen: Consensus measures and adjusting inconsistency of linguistic preference relations in group decision making. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* **3613**, 130–139, 2005.

[16] W. Hays: A note on average Tau as a measure of concordance. *Journal of the American Statistical Association* **55**, 331–341, 1960.

[17] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F. Chiclana: A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A: Systems and Humans* **32**, 394–402, 2005.

[18] A. Jurio, H. Bustince, M. Pagola, P. Couto, W. Pedrycz: New measures of homogeneity for image processing: an application to fingerprint segmentation. *Soft Computing*, forthcoming.

[19] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, H. Nurmi: *Consensus under fuzziness*. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[20] Z. Xu: An automatic approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making. *Computers and Industrial Engineering* **56**, 1369–1374, 2009.

Towards the algebraization of Formal Concept Analysis over complete dioids

Francisco J. Valverde-Albacete[1], **Carmen Peláez-Moreno**[2]

[1]*Depto Lenguajes y Sistemas Informáticos, UNED, Spain*, fva@lsi.uned.es
[2]*Depto Teoría de Señal y Comunicaciones, UC3M, Spain*, carmen@tsc.uc3m.es

Abstract

Complete dioids are already complete residuated lattices. Formal contexts with entries in them generate Concept Lattices with the help of the polar maps. Previous work has already established the spectral nature of some formal concepts for contexts over certain kinds of dioids. This paper tries to raise the awareness that linear algebra over exotic semirings should be one place to look to understand the properties of FCA over L-lattices.

Keywords: Semiring theory. Spectral theory of matrices. FCA: Semiring-valued extensions. Philosophical foundations.

1 INTRODUCTION

Several attempts have been made to generalise the basic framework of Formal Concept Analysis [9] or Galois Lattice theory [3] since it was conceived. Recall that this is a theory of concrete lattices arising from certain Galois connections between two sets induced by a binary incidence relation. If finds concrete applications in data mining and exploratory information retrieval, among others [18].

Perhaps the earliest and more developed generalisation is that of L-Fuzzy, or simply Fuzzy, Formal Concept Analysis (FFCA), where incidences are allowed to have values in a fuzzy algebra which is also a complete lattice [4, 5]. Such fuzzy algebras can alternatively be described as fuzzy semirings [11].

Recall that a *semiring* is an algebra $\mathscr{S} = \langle S, \oplus, \otimes, \varepsilon, e \rangle$ whose additive structure, $\langle S, \oplus, \varepsilon \rangle$, is a commutative monoid and whose multiplicative structure, $\langle S \backslash \{\varepsilon\}, \otimes, e \rangle$, is a monoid with multiplication distributing over addition from right and left and with additive neutral element absorbing for $\otimes$, i.e. $\forall a \in S,\ \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ [11].

An independently motivated generalisation of FCA, $\mathscr{K}$-Formal Concept Analysis, uses an idempotent semifield $\mathscr{K}$—a kind of semiring with a multiplicative group structure—as the range of the relation [20]. Whereas fuzzy semirings are mostly used to capture a "degree of truth", semifields are used to capture the concept of "cost" or, dually, "utility".

It is intriguing that these algebras induce Galois Connections and Formal Concept Analysis inasmuch as idempotent semifields are as far as a naturally ordered semiring can be from prototypical fuzzy semirings like $\langle [0,1], \max, \min, 0, 1 \rangle$—in a sense made evident in this paper. In fact, idempotent semifields do not fulfill some of the more restrictive or technical conditions for an algebra L to define an L-fuzzy set [10]: in particular, in an idempotent semifield the identity is never an infinity element.

However, it has already been determined that the condition for an algebra to induce a flavour of Formal Concept Analysis is that it be a complete residuated lattice [4]. Unsurprisingly, one of the notoriously overlooked abstractions of fuzzy semirings and idempotent semifields are dioids, or naturally-ordered semirings whose zero is the bottom in the order. The naturalness of the order comes from its compatibility with the multiplication.

$$\forall a, b, c \in S, a \leq b \iff c \otimes a \leq c \otimes b \ . \qquad (1)$$

Dioids are already residuated so complete dioids are already complete residuated lattices (see Fig. 1), hence Formal Concept Analysis-inducing. Furthermore, semiring $\mathbb{B}$ is embedded in both fuzzy semirings and idempotent semifields. Note that [15] already asked for a revisiting of idempotent semifields and the investigation of their relationship to fuzzy algebras.

A more intriguing finding is that the formal concepts of such extensions seem to be related to the eigenvectors of certain operators related to the incidence of an L-valued formal context [19]. This subject has been picked up in more modern work [21], underscoring the importance of those concepts issuing from the broad field of linear algebra

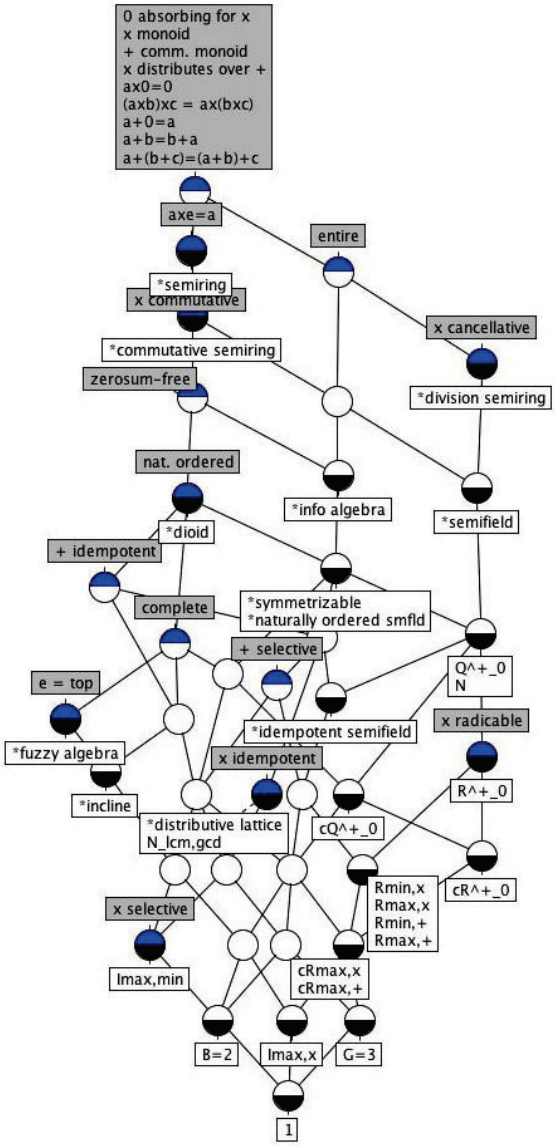


Figure 1: **Concept Lattice of dioids in the context of commutative semirings.** Note that rings—which are not naturally ordered—are missing in the picture, what makes the concept for attribute *complete* seem to be proper restriction of the concept for *dioid*. In a formal context including rings, this would not be so.

over "exotic" semirings for Formal Concept Analysis, and, in particular, the spectral theory of matrices.

2 SOME LINEAR ALGEBRA OVER DIOIDS

2.1 BASIC CONCEPTS

A semiring $\mathscr{S}$ is:

1. *zerosumfree* iff $a \oplus b = \varepsilon \Rightarrow a = \varepsilon$ and $b = \varepsilon$.
2. *entire* iff $a \otimes b = \varepsilon \Rightarrow a = \varepsilon$ or $b = \varepsilon$.
3. *positive or an information algebra* iff it is both zerosumfree and entire.
4. *partially-ordered* iff there is an order $\langle S, \preccurlyeq \rangle$ compatible with addition and multiplication, such that for all $a, b, c \in S$, if $a \preccurlyeq b$ then $a \oplus c \preccurlyeq b \oplus c$, $a \otimes c \preccurlyeq b \otimes c$ and $c \otimes a \preccurlyeq c \otimes b$.

Note that, in partially-ordered semirings, if $a_i \preccurlyeq b_i$ then $\sum a_i \preccurlyeq \sum b_i$. Furthermore, if $\mathscr{S}$ is a partially-ordered set, then it is *positive* if $\varepsilon = \bot$ is the infimum or *bottom* for this

set $\bot \preccurlyeq a$ for all $a \in S$ [13]. If $\mathscr{S}$ is positive then also if $a_i \preccurlyeq b_i$ then $\prod a_i \preccurlyeq \prod b_i$ [13].

In a semiring, the *natural or canonical or difference preorder* is for all $a,b \in S$, $a \preccurlyeq b \iff a \oplus c = b$ for some $c \in S$. A semiring $\mathscr{D} = \langle D, \oplus, \otimes, \bot, e \rangle$ is *a dioid—for* double monoid—*or naturally- or canonically- [16] or difference-ordered [11–13]* if this natural pre-order is actually a partial order.

Example 1. *The following are dioids:*

1. $\mathbb{B} \equiv 2 \equiv \langle \{0,1\}, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$, *(Boolean algebra)*
2. $\mathbb{I}_{\max,\min} \equiv \langle [0,1], \max, \min, 0, 1 \rangle$, *(toll semiring) [2]*
3. $\mathbb{N}_{\min,+} \equiv \langle \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}, \min, +, \infty, 0 \rangle$, *(*tropical semiring*)*
4. $\mathbb{R}_{\max,+} \equiv \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$, *(*max-plus, schedule or morphological algebra*) [1]*
5. $\mathbb{R}_{\min,+} \equiv \langle \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0 \rangle$ *[1], (*optimization algebra*)*
6. $\mathbb{R}_{\max,\times} \equiv \langle \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}, \max, \times, 0, 1 \rangle$, *(*max-times semiring*) [16]*
7. $\mathbb{I}_{\max,\times} \equiv \langle [0,1], \max, \times, 0, 1 \rangle$,*(*fuzzy max-times algebra*) [16]*

Their relationships can be gleaned from Fig. 1.

Note that the product of k dioids is also a dioid.

A big class of dioids is that of *(additively) idempotent semirings*. An idempotent semiring $\mathscr{D}$ is a semiring whose additive structure $\langle D, \oplus, \varepsilon \rangle$ is an *idempotent semigroup*, that is, $\forall a \in D, a \oplus a = a$. Idempotent semirings are all canonically-ordered and, if commutative, they are already $\vee$-semilattices (read *sup- or join-semilattice*), whose operation is compatible with the canonical order $a \oplus b = a \vee b$ and selects the *lowest upper bound, supremum or join* [16, Chap. 1, Theorems 1&2].

Another class of important dioids are those with a multiplicative group structure or *semifields*. These are all entire, and thence information algebras.

2.1.1 Completeness

In a semiring $\mathscr{S}$ for each $a \in S$, define

$$a^{+k} = a \oplus a^2 \oplus \ldots a^k = \sum_{i=1}^{k} a^i \quad a^{*k} = e \oplus a^{+k} = \sum_{i=0}^{k} a^i \quad (2)$$

The *Kleene star* is the limit $a^* = \lim_{k \to \inf} a^{*k}$ when it exists. Likewise the *Kleene plus* is the limit $a^+ = \lim_{k \to \inf} a^{+k}$ when it exists. Since $a^{*k} = e \oplus a^{+k}$ and $a^{+k} = a \otimes a^{*(k-1)} = a^{*(k-1)} \otimes a$ the existence of one of the limits entails the existence of the other:

$$a^* = e \oplus a^+ \qquad a^+ = a \otimes a^* = a^* \otimes a \ . \qquad (3)$$

As the existence of such elements is crucial for our purposes after Theorem 3.1, completeness issues in semirings deserve a lengthier treatment: a *complete semiring* $\mathscr{S}$ [12] is a semiring where for every (possibly infinite) family of elements $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq S$ we can define an element $\sum_{i \in I} a_i \in S$ such that

1. if $I = \varnothing$, then $\sum_{i \in I} a_i = \varepsilon$,
2. if $I = \{1 \ldots n\}$, then $\sum_{i \in I} a_i = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$,
3. if $b \in S$, then $b \otimes (\sum_{i \in I} a_i) = \sum_{i \in I} b \otimes a_i$ and $(\sum_{i \in I} a_i) \otimes b = \sum_{i \in I} a_i \otimes b$, and
4. if $\{I_j\}_{j \in J}$ is a partition of I, then $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} a_i \right)$.

If I is countable in the definitions above, then $\mathscr{S}$ is *countably complete* and already zerosumfree [11, Prop. 22.28].

To investigate completion issues, call an element in a semiring $a \in S$ *infinite* iff $a \oplus b = a$ for all $b \in S$, and *strongly infinite* if also $a \otimes b = a = b \otimes a$ [11]. If $\overline{\mathscr{S}}$ is a complete semiring, then it has a (necessarily unique) infinite element [11, Prop. 22.27].

A dioid $\mathscr{D}$ is *complete*, if it is complete as a semiring, further complete as a naturally ordered set $\langle D, \preccurlyeq \rangle$ and left (L_a) and right (R_a) multiplications are lower semicontinuous, that is, join-preserving. In such cases, the *top* of the dioid is the unique infinite element $\top = \top \oplus a$, for all $a \in D$, whence $a \preccurlyeq \top$.

All the above can be seen instantiated in:

Example 2. *1. In* $\mathbb{B}$ *we have* $0^* = 1^* = 1$*, hence* 1 *is (vacuously) strongly infinite.*

2. *In the schedule algebra* $\mathbb{R}_{\max,+}$ *we have* $a^k := k \cdot a$ *so* $e \oplus a^k := \max(0, k \cdot a)$*. That is, for* $a \leq 0$*,* $e \oplus a^k = e$ *and* $a^* := 0$*. On the other hand, for* $b > 0$*,* $e \oplus b^k = b^k$ *and such elements do not have a star, hence* $\mathbb{R}_{\max,+}$ *is incomplete. When we complete* $\overline{\mathbb{R}}_{\max,+}$ *with* $\top := \infty$*, for* $b > e$ *we have* $b^* = b^+ = \top$*.*

As a partially-ordered set, a $\vee$-semilattice is *complete* when the lowest upper bound operates on arbitrary subsets of S and likewise for complete $\wedge$-semilattices. Lattices are *complete* when both their $\vee$- and $\wedge$-semilattices are complete, hence they have both a top and a bottom. From a well-known order-theory theorem—a complete $\vee$-semilattice with bottom is also a complete lattice [8, Theorem 2.31, p. 47]—it is clear that complete idempotent semirings are already complete lattices.

A fortiori, selective semifields can all be completed, as, for instance, the (initially incomplete) maxplus and minplus semifields in Example 2

Example 3. *1. The* completed Minplus semifield*,* $\overline{\mathbb{R}}_{\min,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \min, \dot{+}, \infty, 0, -\infty \rangle$,

2. *the* completed Maxplus semifield*,* $\overline{\mathbb{R}}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \max, \dot{+}, -\infty, 0, \infty \rangle$.

These two completions are actually inverses $\overline{\mathbb{R}}_{\min,+} =$

$\overline{\mathbb{R}}^{-1}_{\max,+}$ *and order-dual [17]. Indeed they are better jointly called the* max-min-plus *semiring* $\overline{\mathbb{R}}^{\min,+}_{\max,+}$. *We have* $-\infty + \infty = -\infty$ *and* $-\infty \dot{+} \infty = \infty$, *which solves several issues in dealing with the separately completed dioids*

The algebras above were first recorded as *blogs*, bounded, lattice-ordered groups [7, §4.1], although the name did not catch, and would be called *bounded ℓ-groups* nowadays. The lattice $\mathbb{B}$ can be embedded in any bounded ℓ-group, by restricting the carrier set to $\{\bot, \top\}$. The boolean operations would then be implemented as $\oplus$ and $\otimes$ restricted to such set. A richer structure is the 3-element bounded ℓ-group $\mathfrak{3} = \langle \{\bot, e, \top\}, \oplus, \dot{\oplus}, \otimes, \dot{\otimes}, \bot, e, \top \rangle$.

Proposition 2.1. *[7, Th. 4.5] The 3-element blog can be embedded isomorphically in any blog.*

2.2 SEMIMODULES OVER DIOIDS

In this context, a *semimodule over a semiring*, is the analogue of a module over a ring [11, 12]: a *right $\mathscr{S}$-semimodule* is an additive commutative monoid $\mathscr{X} = \langle X, \oplus, \varepsilon_{\mathscr{X}} \rangle$ endowed with a *right action* $(x, \lambda) \mapsto x \odot \lambda$ such that $\forall \lambda, \mu \in S,\ x, x' \in X$. Following the convention of dropping the symbols for the scalar action and semiring multiplication we have:

$$x(\lambda\mu) = (x\lambda)\mu \qquad x\varepsilon = \varepsilon_{\mathscr{X}}$$
$$(x \oplus x')\lambda = x\lambda \oplus x'\lambda \qquad xe = x$$

The definition of a *left $\mathscr{S}$-semimodule* $\mathscr{Y}$ follows the same pattern with the help of a *left action*, $(x, \lambda) \mapsto \lambda \odot x$ and similar axioms. A $(\mathscr{R}, \mathscr{S})$*-semimodule* is a set M endowed with left $\mathscr{R}$-semimodule and a right $\mathscr{S}$-semimodule structures, and a $(\mathscr{R}, \mathscr{S})$*-bisemimodule* a $(\mathscr{R}, \mathscr{S})$-semimodule such that the left and right actions commute.

For $n, p \in \mathbb{N}$, the semimodule of finite matrices $\mathscr{M}_{n\times p}(\mathscr{S}) = \langle S^{n\times p}, \oplus, \mathscr{E} \rangle$ is a $(\mathscr{M}_n(\mathscr{S}), \mathscr{M}_p(\mathscr{S}))$-bisemimodule, with matrix multiplication-like left and right actions and entry-wise addition. Special cases of it are the bisemimodules of column vectors $\mathscr{M}_{p\times 1}(\mathscr{S})$ and row vectors $\mathscr{M}_{1\times n}(\mathscr{S})$. In the following we systematically equate left (resp. right) $\mathscr{S}$-semimodules and row (resp. column) semimodules over $\mathscr{S}$. This motivates calling them *(semi)vector spaces*.

In a semimodule $\mathscr{X}$ over a semifield $\mathscr{K}$ one can define an element-wise inversion operation $\cdot^{-1} : X \to X, x \mapsto x^{-1}$ such that $(x^{-1})_i = x_i{}^{-1}$. If the semifield is also a complete dioid, then the *inverse* semimodule is the order dual $\mathscr{X}^{-1} \cong \langle X, \leq^{\mathrm{d}} \rangle$. Hence, a *complete* semimodule [11] over an idempotent semifield is also a complete lattice, with join and meet operations fulfilling $v_1 \leq v_2 \iff v_1 \vee v_2 = v_2 \iff v_1 \wedge v_2 = v_2$. $v_1 \wedge v_2 = \left(v_1^{-1} \vee v_2^{-1}\right)^{-1}$ á la Boole.

Example 4. *Semimodules over* $\overline{\mathbb{R}}_{\max,+}$ *have inverses over* $\overline{\mathbb{R}}_{\min,+}$ *and vice versa. In particular* $\left(\overline{\mathbb{R}}_{\max,+}\right)^{-1} = \overline{\mathbb{R}}_{\min,+}$, *and dually. For* $\overline{\mathbb{R}}_{\max,+}$, *it is* $v_1 \wedge v_2 = v_1 \dot{\oplus} v_2 = (v_1^{-1} \oplus v_1^{-1})^{-1} = \min(v_1, v_2)$.

3 STUDY CASE: THE SPECTRAL THEORY OVER DIOIDS

Given a square matrix $A \in S^{n\times n}$ the *right (left) eigenproblem* is the task of finding the *right eigenvectors* $v \in S^{n\times 1}$ and *right eigenvalues* $\rho \in S$ (respectively *left eigenvectors* $u \in S^{1\times n}$ and *left eigenvalues* $\lambda \in S$) satisfying:

$$u \otimes A = \lambda \otimes u \qquad A \otimes v = v \otimes \rho \tag{4}$$

The left and right eigenspaces—$\mathscr{U}_\lambda(A)$ and $\mathscr{V}_\rho(A)$—and spectra—$\Lambda(A)$ and $\mathrm{P}(A)$—are the sets of solutions:

$$\begin{aligned} \mathscr{U}_\lambda(A) &= \{u \in S^{1\times n} \mid u \otimes A = \lambda \otimes u\} \\ \Lambda(A) &= \{\lambda \in S \mid \mathscr{U}_\lambda(A) \neq \{\varepsilon^n\}\} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_\rho(A) &= \{v \in S^{n\times 1} \mid A \otimes v = v \otimes \rho\} \\ \mathrm{P}(A) &= \{\rho \in S \mid \mathscr{V}_\rho(A) \neq \{\varepsilon^n\}\} \end{aligned} \tag{6}$$

Since $\Lambda(A) = \mathrm{P}(A^{\mathrm{T}})$ and $\mathscr{U}_\lambda(A) = \mathscr{V}_\lambda(A^{\mathrm{T}})$, from now on we will omit references to left eigenvalues, eigenvectors and spectra, unless we want to emphasize differences.

With so little structure it might seem hard to solve (4). Readily available techniques are combinatorial in nature and a very generic solution exists based on the following recurring concept. For a matrix over a semiring $A \in S^{n\times n}$ consider the sum $A^{*k} = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^k$, where addition and multiplication over matrices are intuitively obtained from those of the underlying semiring, A^k represents a product of k factors and I is the neutral element for matrix multiplication. The *Kleene star* of A is $A^* = \lim_{k\to\infty} A^{*k}$and the *Kleene plus* of A is $A^+ = A \otimes A^*$. Most of the results on eigenvalues and eigenvectors in this paper stem from the following fact:

Proposition 3.1 (Gondran and Minoux, Theorem 1 [14, 16])**.** *Let $A \in \mathscr{S}^{n\times n}$ be a matrix over a semiring. If A^* exists, the following two conditions are equivalent:*

1. $A^+_{ii} \otimes \mu = A^*_{\cdot i} \otimes \mu$ *for some* $i \in \{1 \ldots n\}$, *and* $\mu \in S$.
2. $A^+_{ii} \otimes \mu$ *(and* $A^*_{\cdot i} \otimes \mu$*) is an eigenvector of A for e ,* $A^+_{\cdot i} \otimes \mu \in \mathscr{V}_e(A)$.

Regarding the structure of right eigenspaces, it is well-known that they are right subsemimodules of $\mathscr{S}^{n\times 1}$ [11, p.219],[6, §4.1.1]. The following corollary highlights the novelty afforded by completed dioids:

Corollary 3.2. *Let $A \in \overline{\mathscr{K}}^{n\times n}$ be a matrix with entries in a commutative complete idempotent semiring. For all eigenvalues $\rho \in \mathrm{P}(A)$, $\mathscr{V}_\rho(A)$ is a complete lattice.*

3.1 The improper spectrum

Without loss of generality, from now on call $\top$ any strongly infinite element of $\mathscr{S}$. Corollary 3.2 highlights the novelty afforded by complete dioids and preludes the following crucial difference between spectra in *completed* and incomplete semirings:

Proposition 3.3 (Improper spectrum)**.** *Let $A \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathscr{S}})$ be a matrix with entries in an entire zerosumfree semiring with strongly infinite element $\top \in \overline{\mathscr{S}}$. If $\rho \neq \varepsilon$ and $v \in \mathscr{V}_\rho(A), v \neq \varepsilon^n$ then,*

1. $v \otimes \top \in \mathscr{V}_\rho(A) \cap \mathscr{V}_{\rho'}(A)$, *with* $\rho' \in \overline{S} \backslash \{\varepsilon\}$.
2. $\mathrm{P}(A) \supseteq \overline{S} \backslash \{\varepsilon\}$.

The proposition applies, a fortiori, to dioids with a commutative multiplicative group structure. It essentially asserts that there is an underlying structure common to all possible eigenspaces in a matrix. But we know that these are all lattices, whence this underlying structure has to be a lattice.

This raises a terminological issue since we would like to distinguish between the *proper* eigenvalues, like those afforded by the spectral theory on matrices over incomplete dioids, and the induced or *improper* eigenvalues in Proposition 3.3. We propose to call an eigenvalue *proper* when it has at least one eigenvector with finite coordinates. The set of proper (left) eigenvalues is the *proper (left) spectrum*,

$$\Lambda^{\mathrm{p}}(A) = \{\lambda \in \Lambda(A) \mid \exists u \in \mathscr{U}_\lambda(A), \text{fin-supp}(u) \neq \varnothing\} \text{ and}$$
$$\mathrm{P}^{\mathrm{p}}(A) = \{\rho \in \mathrm{P}(A) \mid \exists v \in \mathscr{V}_\rho(A) \text{ fin-supp}(v) \neq \varnothing\} \ .$$

3.2 The null eigenspace

Some other results are combinatorial in nature: Call $e_i = I_{\cdot i}$ the i-th column of I, the unit in the semiring of matrices $\mathscr{M}_n(S)$—e_i is a vector whose coordinates are zero except for $e_i(i) = e$—and note that $A \otimes e_i = A_{\cdot i}$.

Lemma 3.4. *Let $A \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S})$ over a semiring. Then:*

1. *If the i-th column of A is zero, then $e_i \in \mathscr{V}_\varepsilon(A)$, whence $\varepsilon \in \mathrm{P}^{\mathrm{p}}(A)$.*
2. *Further, if $\mathscr{S}$ is entire, then G_A has no cycles if and only if ε is the unique eigenvalue of A.*
3. *Further, if $\mathscr{S}$ is entire and zerosumfree and $\varepsilon \in \mathrm{P}(A)$, then A has at least one zero column.*

Call the columns of I selected by the set of zero columns of A, the *fundamental eigenvectors of A for ε,* $\mathrm{FEV}_\varepsilon(A) = \{I_{\cdot i} \mid A_{\cdot i} = \varepsilon^n\}$. The name is justified by,

Proposition 3.5. *Let $A \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S})$ over an entire zerosumfree semiring. The null eigenspace is generated by the fundamental eigenvectors of A for ε.*

$$\mathscr{V}_\varepsilon(A) = \langle \mathrm{FEV}_\varepsilon(A) \rangle_{\mathscr{S}} \tag{7}$$

Recall that on completed dioids with multiplicative group structure this is actually a lattice. In fact it is the boolean lattice with as many atoms as independent eigenvectors.

3.2.1 The irreducible case

We can actually generate all eigenspaces in completed dioids with multiplicative group structure in this way: Recall that a matrix over a semiring is *reducible* if its rows and columns can be simultaneously permuted into a triangular block from. Otherwise it is *irreducible.*

Then an irreducible matrix A has a *maximal cycle mean* $\mu_\oplus(A)$ associated to the adjacency graph $\overline{G}_A$ of the matrix. In such case a finite skeleton lattice $\mathscr{L}_\rho(A)$ related to the improper eigenvalues, and another lattice related to the single proper eigenvalue $\mathscr{L}_{\rho(A)}(A)$:

Theorem 3.6. *Let $A \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathscr{K}})$ be an irreducible matrix over a complete selective radicable semifield, $\overline{\mathscr{K}}$. Then,*

1. $\Lambda(A) = \overline{\mathscr{K}} \backslash \{\bot\} = \mathrm{P}(A)$.
2. $\Lambda^{\mathrm{p}}(A) = \{\mu_\oplus(A)\} = \mathrm{P}^{\mathrm{p}}(A)$.
3. *If* $\rho \in \mathrm{P}(A) \backslash \mathrm{P}^{\mathrm{p}}(A)$, *then* $\mathscr{V}_\rho(A) = \{\bot^n, \top^n\} = \mathscr{L}_\rho(A)$.
4. *If* $\mu_\oplus(A) \prec \top$, *then* $\mathscr{V}_{\rho(A)}(A) = \langle \mathrm{FEV}_{\rho(A)}(A) \rangle_{\overline{\mathscr{K}}} \supset \mathscr{L}_{\rho(A)}(A) = \langle \mathrm{FEV}_{\rho(A)}(A) \rangle_{\mathbb{3}}$.

The details for both the irreducible and the reducible case can be found in [21, 22].

3.2.2 Discussion

Although, promisingly, we have arrived to prove that there are (both continuous and discrete) lattices aplenty in the spectral theory of some commutative dioids with a multiplicative group structure, we have failed to prove our point in two aspects: that this applies to *commutative* dioids *in general* and that the lattices of FCA *actually arise in this form*. This is left for future work.

4 CONCLUSIONS

We have proven that there are lattices aplenty in the spectral theory of matrices over certain kinds of dioids. We believe that linear algebra over dioids provides an extended view into concept lattices beyond that provided by pure order theory, despite lacking the width and wealth of result that standard Linear Algebra has. Furthermore, it also widens the scope of Lattice Theory.

Although the comfort zone of handling a quite manageable set of results has to be abandoned in this pursuit, e.g. those extremely well captured in [9], we believe this avenue of research can help realize the true potential of Wille's initial grand view in placing a more constructive, data-aware version of Lattice Theory at the center of modern mathematical applications.

Acknowledgements

FJVA was partially supported by EU FP7 project LiMoSINe (contract 288024) for this research. CPM was partially supported by the Spanish Government-Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología project 2011-268007/TEC.

References

[1] R. A Cuninghame-Green. Minimax algebra and applications. *Fuzzy Sets And Systems*, 41(3):251–257, 1991.

[2] R. A Cuninghame-Green and K. Cechlárová. Residuation in fuzzy algebra and some applications. *Fuzzy Sets And Systems*, 71(2):227–239, 1995.

[3] M. Barbut and B. Monjardet. *Ordre et classification. Algèbre et combinatoire, tome I*. Méthodes mathématiques des sciences de l'Homme. Hachette, 1970.

[4] R. Bělohlávek. *Fuzzy Relational Systems. Foundations and Principles*, volume 20 of *IFSR International Series on Systems Science and Engineering*. Kluwer Academic, 2002.

[5] A. Burusco and R. Fuentes-González. The study of the L-fuzzy Concept Lattice. *Mathware and Soft Computing*, 1(3):209–218, 1994.

[6] P. Butkovič. *Max-linear Systems. Theory and Algorithms*. Monographs in Mathematics. Springer, 2010.

[7] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 1979.

[8] B. Davey and H. Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 2002.

[9] B. Ganter and R. Wille. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999.

[10] J. A. Goguen. L-fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl*, 18 (1):145–174, 1967.

[11] J. S. Golan. *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic, 1999.

[12] J. S. Golan. *Power Algebras over Semirings. With Applications in Mathematics and Computer Science*, volume 488 of *Mathematics and its applications*. Kluwer Academic, Dordrecht, Boston, London, 1999.

[13] J. S. Golan. *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications (Mathematics and Its Applications)*. Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1402013582.

[14] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes. *EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique*, 2:25–41, 1977.

[15] M. Gondran and M. Minoux. Dioids and semirings: links to fuzzy set and other applications. *Fuzzy Sets And Systems*, 158(1273–1294), Apr. 2007.

[16] M. Gondran and M. Minoux. *Graphs, Dioids and Semirings. New Models and Algorithms*. Operations Research Computer Science Interfaces series. Springer, 2008.

[17] J. J. Moreau. Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques. *J. Math. pures et appl.*, 49:109–154, 1970.

[18] J. Poelmans, S. O. Kuznetsov, D. I. Ignatov, and G. Dedene. Formal Concept Analysis in Knowledge Processing: A Survey on Models and Techniques. *Expert Systems with Applications*, 40(16):6601–6623, 2013.

[19] F. J. Valverde-Albacete and C. Pelaez-Moreno. Spectral lattices of $(R_{max,+})$-formal contexts. *Formal Concept Analysis. Proceedings of the 6th International Conference, ICFCA 2008, Montreal, Canada, February 25-28, 2008.*, Lecture Notes in Computer Science (LCNS 4933):124–139, 2008.

[20] F. J. Valverde-Albacete and C. Pelaez-Moreno. Extending conceptualisation modes for generalised Formal Concept Analysis. *Information Sciences*, 181: 1888–1909, May 2011.

[21] F. J. Valverde-Albacete and C. Peláez-Moreno. Spectral lattices of reducible matrices over completed idempotent semifields. In M. Ojeda-Aciego and J. Outrata, editors, *Concept Lattices and Applications (CLA 2013)*, pages 211–224. Université de la Rochelle, Laboratory L31, La Rochelle, October 2013. ISBN 978-2-7466-6566-8. URL `http://ceur-ws.org/Vol-1062/paper18.pdf`.

[22] F. J. Valverde-Albacete and C. Peláez-Moreno. Spectral lattices of irreducible matrices over completed idempotent semifields. *Submitted*, 2013.

ON THE CONSTRUCTION OF FUZZY GALOIS CONNECTIONS*

Francisca García-Pardo[1], **Inma P. Cabrera**[2], **Pablo Cordero**[2], **Manuel Ojeda-Aciego**[2]

[1]*Dept Didáctica de las Matemáticas, las CC.SS. y las CC.EE. Univ. de Málaga*, fgarciap@uma.es
[2]*Dept Matemática Aplicada. Univ. de Málaga*, {ipcabrera,pcordero,aciego}@uma.es

Abstract

Given a mapping f from a fuzzy poset (A,ρ_A) to any set B, we introduce conditions which allow for defining a fuzzy ordering on B and a mapping from B to A such that the pair (f,g) forms a fuzzy Galois connection.

Keywords: Fuzzy Galois connections, fuzzy posets.

1 INTRODUCTION

Galois connections can be found in a number of research areas, both theoretical and applied. Denecke, Erné, and Wismath stated in their monograph [7] that *Galois connections provide the structure-preserving passage between two worlds of our imagination*, and there is a plethora of examples showing that these worlds can be absolutely disparate.

There is a number of papers which study fuzzy Galois connections from the abstract algebraic standpoint [2, 3, 5, 6, 10, 12, 14, 15] and also focusing on its applications [7–9, 11, 16–21, 23]. In this paper, we focus on the case of Galois connections between fuzzy posets; specifically, we assume a mapping between a fuzzy poset (A,ρ_A) and a set B and provide conditions under which this mapping is form of a Galois connection. For this to happen, firstly, one needs to define a fuzzy ordering on the range of the mapping and, then, define the other half of the Galois connection as a mapping from B to A.

The structure of this work is the following: in the next section, we introduce the preliminary definitions and results, essentially notions related to fuzzy orderings and to fuzzy Galois connections, and some results which will be later needed. Section 3 introduces the main contribution, including several previous lemmas which allow to simplify the presentation of the proof of the main theorem. Finally, we include some conclusions and prospects for future work.

* Partially supported by the Spanish Ministry of Science with projects TIN11-28084 and TIN12-39353-C04-01.

2 PRELIMINARY RESULTS

The most usual underlying structure for considering fuzzy extensions of Galois connections is that of residuated lattice, $\mathbb{L}=(L,\vee,\wedge,1,0,\otimes,\to)$. Thus, an $\mathbb{L}$-fuzzy set is a mapping from the universe set to the membership values structure $X\colon U\longrightarrow L$ where $X(u)$ means the degree in which u belongs to X. Given X and Y two $\mathbb{L}$-fuzzy sets, X is said to *be included in* Y, denoted as $X\subseteq Y$, if $X(u)\leq Y(u)$ for all $u\in U$.

An $\mathbb{L}$-fuzzy binary relation on U is an $\mathbb{L}$-fuzzy subset of $U\times U$, $\rho_U\colon U\times U\longrightarrow L$, and it is said to be:

- *Reflexive* if $\rho_U(a,a)=1$ for all $a\in U$.
- *Transitive* if for all $a,b,c\in U$, the following inequality $\rho_U(a,b)\otimes\rho_U(b,c)\leq\rho_U(a,c)$ holds.
- *Symmetric* if $\rho_U(a,b)=\rho_U(b,a)$ for all $a,b\in U$.
- *Antisymmetric* if condition $\rho_U(a,b)=\rho_U(b,a)=1$ implies $a=b$, for all $a,b\in U$.

One can find several alternative (non-equivalent) definitions of antisymmetry in a fuzzy setting [1, 4, 22]; to the best of our knowledge the one given in the definition above has not been introduced before.

Definition 1 (Fuzzy poset) *An* $\mathbb{L}$-fuzzy partially ordered set *is a pair* $\mathbb{U}=(U,\rho_U)$ *in which* ρ_U *is a reflexive, antisymmetric and transitive* $\mathbb{L}$*-fuzzy relation on* U.

A crisp ordering can be given in U *by* $a\leq_U b$ *if and only if* $\rho_U(a,b)=1$.

From now on, when no confusion arises, we will omit the prefix "$\mathbb{L}$-", and we will assume that $\mathbb{U}$ is a fuzzy poset (U,ρ_U).

Definition 2 *For every element $a \in U$, the extension to the fuzzy setting of the notions of upper and lower closure $a^{\uparrow}, a^{\downarrow}: U \longrightarrow L$ is given by $a^{\downarrow}(u) = \rho_U(u,a)$ and $a^{\uparrow}(u) = \rho_U(a,u)$ for all $u \in U$.*

A *maximum* for a fuzzy set X is an element a satisfying

- $X(a) = 1$ and
- $X \subseteq a^{\downarrow}$.

Observe that maximum elements are necessarily unique, because of antisymmetry.

Definition 3 *Let $\mathbb{A} = (A, \rho_A)$ and $\mathbb{B} = (B, \rho_B)$ be fuzzy ordered sets.*

1. *A mapping $f: A \longrightarrow B$ is said to be* antitone *if $\rho_A(a_1,a_2) \leq \rho_B(f(a_2), f(a_1))$ for each $a_1, a_2 \in A$.*
2. *Moreover, a mapping $f: A \longrightarrow A$ is said to be* inflationary *if $a \leq_A f(a)$ for all $a \in A$.*

We adopt the standard generalization of the notion of Galois connection to the framework of fuzzy posets introduced in [24]. It is worth to note that although Yao and Lu use the term fuzzy Galois connection, their definition actually is that of an adjunction [13].

Definition 4 (Fuzzy Galois Connection) *Let $\mathbb{A} = (A, \rho_A)$, $\mathbb{B} = (B, \rho_B)$ be fuzzy posets, and two mappings $f: A \longrightarrow B$ and $g: B \longrightarrow A$. The pair (f,g) forms a Galois connection between A and B, denoted $(f,g): \mathbb{A} \longleftrightarrow \mathbb{B}$ if, for all $a \in A$ and $b \in B$, the equality $\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(b, f(a))$ holds.*

Notation 1 *From now on, we will use the following notation, for a mapping $f: A \longrightarrow B$ and a fuzzy subset Y of B, the fuzzy set $f^{-1}(Y)$ is defined as $f^{-1}(Y)(a) = Y(f(a))$, for all $a \in A$.*

Finally, we recall the following theorem which states different equivalent forms to define a fuzzy Galois connection.

Theorem 1 ([13]) *Let $\mathbb{L} = (L, \vee, \wedge, 1, 0, \otimes, \rightarrow)$ be a complete residuated lattice, $\mathbb{A} = (A, \rho_A), \mathbb{B} = (B, \rho_B)$ be $\mathbb{L}$-fuzzy ordered sets and $f: A \to B$ and $g: B \to A$ be two mappings. The following conditions are equivalent:*

i) $(f,g): \mathbb{A} \longleftrightarrow \mathbb{B}$.

ii) *f and g are antitone maps, and $g \circ f$, $f \circ g$ are inflationary maps.*

iii) $f(a)^{\downarrow} = g^{-1}(a^{\uparrow})$ *for all $a \in A$.*

iv) $g(b)^{\downarrow} = f^{-1}(b^{\uparrow})$ *for all $b \in B$.*

v) *f is antitone and $g(b) = \max f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$.*

vi) *g is antitone and $f(a) = \max g^{-1}(a^{\uparrow})$ for each $a \in A$.*

3 MAIN RESULT

In this section, we include a set of lemmas which will allow to clarify the proof of the main result concerning the construction of fuzzy Galois connections.

Lemma 1 *Let (A, ρ_A) and (B, ρ_B) fuzzy posets and $f: A \longrightarrow B$ an antitone mapping. Then, for all $b \in f(A)$, if $\max f^{-1}(b^{\uparrow})$ exists then $\max f^{-1}(b)$ exists*[1] *and $\max f^{-1}(b^{\uparrow}) = \max f^{-1}(b)$.*

Proof: Let us write $m = \max f^{-1}(b^{\uparrow})$ and let us prove that $a \leq_A m$, for all $a \in f^{-1}(b)$, and $m \in f^{-1}(b)$, i.e. $m = \max f^{-1}(b)$.

On the one hand, we have that $f^{-1}(b^{\uparrow})(x) \leq m^{\downarrow}(x)$ for all $x \in A$, that is, $\rho_B(b, f(x)) \leq \rho_A(x,m)$. Thus, for all $a \in f^{-1}(b)$, we have $1 = \rho_B(b,b) = \rho_B(b, f(a)) \leq \rho_A(a,m)$ which means $a \leq_A m$. Now, as f is antitone we have that $1 = \rho_A(a,m) \leq \rho_B(f(m), f(a)) = \rho_B(f(m), b)$.

On the other hand, $1 = f^{-1}(b^{\uparrow})(m) = \rho_B(b, f(m))$. Therefore, $f(m) = b$ because ρ_B is antisymmetric. □

In the following result, we consider a mapping from a fuzzy poset to an unstructured set, and find some necessary conditions on the existence of fuzzy Galois connections associated to the projection mapping on the quotient set.

Lemma 2 *Let (A, ρ_A) a fuzzy poset and $f: A \longrightarrow B$ a map. Let A_f be the quotient set wrt the kernel equivalence relation ($a_1 \equiv_f a_2$ iff $f(a_1) = f(a_2)$) and $\pi: A \longrightarrow A_f$ the natural projection. If there exists a fuzzy order ρ_{A_f} in A_f and $g: A_f \longrightarrow A$ such that $(\pi, g): A \longleftrightarrow A_f$ then,*

1. *$g([a]) = \max [a]$ for all $a \in A$.*
2. *$\rho_{A_f}([a_1],[a_2]) = \rho_A(a_2, \max [a_1])$ for all $a_1, a_2 \in A$.*
3. *$\rho_A(a_1,a_2) \leq \rho_A(\max [a_1], \max [a_2])$ for all $a_1, a_2 \in A$.*

Proof: Since (π, g) is a Galois connection, applying Theorem 1, we have that $g([a]) = \max \pi^{-1}([a]^{\uparrow})$. By Lemma 1, we obtain $\max \pi^{-1}([a]^{\uparrow}) = \max \pi^{-1}([a]) = \max [a]$. The condition $\rho_A(a_2, g([a_1])) = \rho_{A_f}([a_1], \pi(a_2))$ leads to the definition of the fuzzy order in A_f as $\rho_{A_f}([a_1],[a_2]) = \rho_A(a_2, \max [a_1])$. Finally, since π and g are antitone maps, $\rho_A(a_1,a_2) \leq \rho_{A_f}([a_2],[a_1]) \leq \rho_A(g([a_1]), g([a_2])) = \rho_A(\max [a_1], \max [a_2])$. □

Lemma 3 *Let (A, ρ_A) be a fuzzy poset and $\sim$ an equivalence relation on A. Suppose that the following conditions hold*

[1] The first maximum corresponds to the maximum of a fuzzy set, and the second is computed by using the crisp ordering.

There should not be any problem concerning which ordering is used hereafter, since the context is always clarifying in this respect.

1. *There exists* $\max[a]$, *for all* $a \in A$.
2. $\rho_A(a_1,a_2) \leq \rho_A(\max[a_1],\max[a_2])$, *for all* $a_1,a_2 \in A$.

We denote by $\tilde{A}$ *the quotient set of* A *wrt* $\sim$ *and the natural projection by* $\pi : A \longrightarrow \tilde{A}$. *Then,* $\rho_{\tilde{A}} : \tilde{A} \times \tilde{A} \longrightarrow L$ *defined by* $\rho_{\tilde{A}}([a_1],[a_2]) = \rho_A(a_2,\max[a_1])$ *is a fuzzy order in* $\tilde{A}$. *Moreover, the pair* $(\pi,\max)$ *is a fuzzy Galois connection, that is,* $(\pi,\max) : A \longleftrightarrow \tilde{A}$.

Proof:

- Reflexivity: $\rho_{\tilde{A}}([a],[a]) = \rho_A(a,\max[a]) = 1$, for all $a \in A$.
- Transitivity:

$$\begin{aligned}\rho_{\tilde{A}}([a_1],[a_2]) \otimes \rho_{\tilde{A}}([a_2],[a_3]) &= \\ &= \rho_A(a_2,\max[a_1]) \otimes \rho_A(a_3,\max[a_2]) \\ &\leq \rho_A(\max[a_2],\max[a_1]) \otimes \rho_A(a_3,\max[a_2]) \\ &\leq \rho_{\tilde{A}}([a_1],[a_3])\end{aligned}$$

- Antisymmetry: Assume $a_1,a_2 \in A$ such that $\rho_{\tilde{A}}([a_1],[a_2])) = \rho_{\tilde{A}}([a_2],[a_1]) = 1$.

  By hypothesis, we have that

$$1 = \rho_A(a_2,\max[a_1]) \leq \rho_A(\max[a_2],\max[a_1])$$

  and

$$1 = \rho_A(a_1,\max[a_2]) \leq \rho_A(\max[a_1],\max[a_2])$$

  Since ρ_A is antisymmetric, $\max[a_1] = \max[a_2]$ and then $[a_1] = [a_2]$.

  Finally, for all $a_1,a_2 \in A$, $\rho_A(a_1,\max[a_2]) = \rho_{\tilde{A}}([a_2],[a_1]) = \rho_{\tilde{A}}([a_2],\pi(a_1))$. Therefore, we have that $(\pi,\max) : A \longleftrightarrow \tilde{A}$. □

Lemma 4 *Consider a fuzzy poset* (A,ρ_A) *and a bijective mapping* $\varphi : A \longrightarrow B$, *then* φ *induces a fuzzy ordering in* B, $\rho_B : B \times B \longrightarrow \mathbb{L}$ *defined as*

$$\rho_B(b,b') = \rho_A(\varphi^{-1}(b'),\varphi^{-1}(b))$$

such that φ *and* φ^{-1} *are antitone and* $(\varphi,\varphi^{-1}) : A \longleftrightarrow B$.

Proof: Straightforward. □

Given a subset $A \subseteq U$, and a fixed element $m \in A$, any fuzzy ordering ρ_A in A can be extended to a fuzzy ordering on U, $\rho_m : U \times U \longrightarrow L$ as follows: given $x,y \in U$

$$\rho_m(x,y) = \begin{cases} \rho_A(y,x) & \text{if } x,y \in A \\ \rho_A(y,m) & \text{if } x \notin A, y \in A \\ 0 & \text{if } y \notin A, x \neq y \\ 1 & \text{if } y \notin A, x = y \end{cases}$$

Lemma 5 ρ_m *is a fuzzy ordering on* U.

Proof: Just some routine computations are needed to check that ρ_m is a fuzzy ordering and, hence, (U,ρ_m) is a fuzzy partially ordered set. □

Lemma 6 *Consider a subset* $A \subseteq U$, *a fixed element* $m \in A$, *and a fuzzy ordering* ρ_A *in* A. *If we write* i *for the inclusion of* A *into* U, *and define the map* $j : (A,\rho_A) \longrightarrow (U,\rho_m)$ *as*

$$j(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in A \\ m & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

then we have that $(i,j) : (A,\rho_A) \longleftrightarrow (U,\rho_m)$.

Proof: Follows easily by routine computation. □

Theorem 2 *Let* (A,ρ_A) *be a fuzzy poset and a mapping* $f : A \longrightarrow B$. *Let* A_f *be the quotient set over the kernel relation* $a \equiv_f b \Longleftrightarrow f(a) = f(b)$. *Then, there exists a fuzzy order in* (B,ρ_B) *and a map* $g : B \longrightarrow A$ *such that* $A \longleftrightarrow B$ *if and only if*

1. *There exists* $\max[a]_f$ *for all* $a \in A$.
2. *For all* $a_1,a_2 \in A$, *the following inequality holds:*

$$\rho_A(a_1,a_2) \leq \rho_A(\max[a_1]_f,\max[a_2]_f)$$

Proof: Suppose that there exists $(f,g) : \mathbb{A} \longleftrightarrow \mathbb{B}$ a Galois connection, then $g(b) = \max f^{-1}(b^{\uparrow})$ for all $b \in B$. Given $a \in A$, observe that if $b = f(a)$ then $[a]_f = \{x \in A \mid f(x) = f(a)\} = f^{-1}(b)$. So, $g(f(a)) = \max f^{-1}(b^{\uparrow}) = \max f^{-1}(b) = \max[a]_f$. Moreover, $\rho_A(a_1,a_2) \leq \rho_B(f(a_2),f(a_1)) \leq \rho_A(g(f(a_1)),g(f(a_2))) = \rho_A(\max[a_1]_f,\max[a_2]_f)$.

Conversely, given (A,ρ_A) and $f : A \longrightarrow B$, consider the canonical decomposition of f through the quotient set A_f

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\ f\ } & B \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \mathbb{A}_f & \xrightarrow{\ \varphi\ } & f(A) \end{array}$$

where $\pi : A \longrightarrow A_f$ is the natural projection, $\pi(a) = [a]_f$, $\varphi([a]_f) = f(a)$, and $i(b) = b$ is the inclusion map.

Now, using $[a]_f = \pi(a)$ and the conditions 1 and 2, we have $(\pi,\max) : A \longleftrightarrow A_f$, by Lemma 3.

Moreover, since the map $\varphi : A_f \longrightarrow f(A)$ is bijective, we can apply Lemma 4 and we have an induced fuzzy ordering $\rho_{f(A)}$ on $f(A)$ such that the pair $(\varphi,\varphi^{-1}) : A_f \longleftrightarrow f(A)$.

The fuzzy ordering $\rho_{f(A)}$ also induces a fuzzy ordering on B, as stated in Lemma 5, and a mapping $j : B \longrightarrow f(A)$ such that $(i,j) : f(A) \longleftrightarrow B$.

Finally, the composition $g = \max \circ \varphi^{-1} \circ j$ is a mapping $g\colon B \longrightarrow A$ such that (f,g) is a fuzzy Galois connection. □

4 CONCLUSIONS

We have introduced a characterization of the existence of fuzzy Galois connections in the framework of fuzzy partially ordered sets. Specifically, the main contribution of this work goes further in that assuming the existence of a mapping $f\colon A \longrightarrow B$ from a fuzzy poset (A,ρ_A) to a set B (not necessarily ordered or fuzzily ordered) guarantees the possibility of defining a fuzzy ordering on B and a mapping $g\colon B \longrightarrow A$ such that (f,g) forms a Galois connection.

This characterization paves the way of finding new Galois connections between different frameworks and, furthermore, suggests new lines of investigation such as considering more general structures, such as the existence of fuzzy (or even crisp) Galois connections associated to a mapping from a fuzzy preordered set.

This problem is of great importance since antisymmetry, in practice, is sometimes a too strong requirement; the study of this problem is particularly challenging since our current results are stated in terms of the existence of maximum elements which are unique precisely because of antisymmetry, which is no longer available in a preordered setting.

References

[1] I. Beg. On fuzzy order relations. *J. Nonlinear Science and Applications*, 5, 357–378, 2012.

[2] R. Bělohlávek. Fuzzy Galois connections. *Mathematical Logic Quarterly*, 45(4):497–504, 1999.

[3] R. Bělohlávek. Lattices of fixed points of fuzzy Galois connections. *Mathematical Logic Quartely*, 47(1):111–116, 2001.

[4] U. Bodenhofer. A Similarity-Based Generalization of Fuzzy Orderings Preserving the Classical Axioms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 8(5): 593–610, 2000.

[5] F. Börner. Basics of Galois connections. *Lect. Notes in Computer Science*, 5250:38–67, 2008.

[6] G. Castellini, J. Koslowski, and G. E. Strecker. Categorical closure operators via Galois connections. *Mathematical research*, 67:72–72, 1992.

[7] K. Denecke, M. Erné, and S. L. Wismath. *Galois connections and applications*, volume 565. Springer, 2004.

[8] Y. Djouadi. Extended Galois derivation operators for information retrieval based on fuzzy formal concept lattice. *Lect. Notes in Computer Science*, 6929:346–358, 2011.

[9] P. Filipiuk, M. Terepeta, H. Nielson, and F. Nielson. Galois connections for flow algebras. *Lect. Notes in Computer Science*, 6722:138–152, 2011.

[10] A. Frascella. Fuzzy Galois connections under weak conditions. *Fuzzy Sets and Systems*, 172(1):33–50, 2011.

[11] L. Freeman and D. White. Using Galois lattices to represent network data. *Sociological Methodology*, pages 127–146, 1993.

[12] J. G. García, I. Mardones-Pérez, M. A. de Prada-Vicente, and D. Zhang. Fuzzy Galois connections categorically. *Math. Log. Q.*, 56(2):131–147, 2010.

[13] F. García-Pardo, I. Cabrera, P. Cordero, and M. Ojeda-Aciego. On Galois connections and soft computing. *Lect. Notes in Computer Science*, 7903:224–235, 2013.

[14] G. Georgescu and A. Popescu. Non-commutative fuzzy Galois connections. *Soft Computing*, 7(7):458–467, 2003.

[15] H. Herrlich and M. Hušek. Galois connections categorically. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 68(1):165–180, 1990.

[16] A. Jaoua and S. Elloumi. Galois connection, formal concepts and Galois lattice in real relations: application in a real classifier. *Journal of Systems and Software*, 60(2):149–163, 2002.

[17] J. Järvinen, M. Kondo, and J. Kortelainen. Logics from Galois connections. *Int. J. Approx. Reasoning*, 49(3):595–606, 2008.

[18] S. Kuznetsov. Galois connections in data analysis: Contributions from the soviet era and modern russian research. *Lect. Notes in Computer Science*, 3626:196–225, 2005.

[19] A. Melton, D. A. Schmidt, and G. E. Strecker. Galois connections and computer science applications. *Lect. Notes in Computer Science*, 240:299–312, 1986.

[20] S.-C. Mu and J. Oliveira. Programming from Galois connections. *Journal of Logic and Algebraic Programming*, 81(6):680–704, 2012.

[21] J. Propp. A Galois connection in the social network. *Mathematics Magazine*, 85(1):34–36, 2012.

[22] B. Šešelja and A Tepavčević. Fuzzy ordering relation and fuzzy poset. *Lecture Notes in Computer Science* 4815:209–216, 2007.

[23] M. Wolski. Galois connections and data analysis. *Fundamenta Informaticae*, 60:401–415, 2004.

[24] W. Yao and L.-X. Lu. Fuzzy Galois connections on fuzzy posets. *Mathematical Logic Quarterly*, 55:105–112, 2009.

ALGUNOS ELEMENTOS DE MORFOLOGÍA MATEMÁTICA EN EL ANÁLISIS DE CONCEPTOS L-DIFUSOS

Cristina Alcalde[1], **Ana Burusco**[2], **Ramón Fuentes-González**[2]

[1]*Departamento de Matemática Aplicada. UPV/EHU.*
Plaza de Europa 1, 20018 San Sebastián, c.alcalde@ehu.es
[2]*Departamento de Automática y Computación. Universidad Pública de Navarra*
Campus de Arrosadía, 31006 Pamplona, {burusco,rfuentes}@unavarra.es

Resumen

Este trabajo es una continuación del estudio de la relación entre la Morfología Matemática Difusa y el Análisis de Conceptos L-Difusos cuando trabajamos con relaciones estructurantes $R \in L^{X\times Y}$, con L retículo completo y X e Y conjuntos finitos. Comenzaremos dando las definiciones de las nuevas herramientas de erosión y dilatación, y analizaremos su interpretación desde el punto de vista del Análisis de Conceptos L-Difusos. A continuación, estudiaremos cómo se pueden definir el Gradiente Morfológico y las transformaciones Top-Hat y Hit-or-Miss cuando trabajamos con relaciones estructurantes $R \in L^{X\times Y}$. Veremos también cual es su aplicación en el ámbito de los contextos L-difusos (L,X,Y,R). Finalmente, ilustraremos la teoría con un caso práctico.

Palabras Clave: Análisis de Conceptos L-Difusos, Morfología Matemática Difusa, Análisis de Conceptos Formales, Extracción de Conocimiento.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 ANÁLISIS DE CONCEPTOS L-DIFUSOS

En trabajos anteriores [9, 10] definimos los contextos L-difusos (L,X,Y,R), con L un retículo completo, X e Y dos conjuntos de objetos y atributos respectivamente y $R \in L^{X\times Y}$ una relación difusa entre ellos. Esta teoría es una extensión del Análisis de Contextos Formales de Wille [20, 12] al caso difuso, donde la relación entre los objetos y atributos que queremos estudiar, en lugar de valores binarios, toma valores en un retículo completo L.

Para trabajar con estos contextos L-difusos, definimos los operadores derivación como:

$$\forall A \in L^X, \forall B \in L^Y \quad \begin{aligned} A_1(y) &= \inf_{x\in X}\{I(A(x),R(x,y))\} \\ B_2(x) &= \inf_{y\in Y}\{I(B(y),R(x,y))\} \end{aligned}$$

con I un operador implicación difuso definido en $(L,\leq)$, y donde A_1 representa de un modo difuso el conjunto de atributos relacionados con todos los objetos de A, y B_2 los objetos relacionados con todos los atributos de B.

La información almacenada en el contexto se visualiza mediante los conceptos L-difusos, los cuales son pares $(A,A_1) \in (L^X,L^Y)$ donde A es un punto fijo del operator φ definido como $\varphi(A) = (A_1)_2 = A_{12}$. Estos pares, cuyas primera y segunda componentes se llaman respectivamente extensión e intensión difusas, representan un conjunto de objetos que comparten un conjunto de atributos.

El conjunto $\mathscr{L} = \{(A,A_1)/A \in \text{fix}(\varphi)\}$ con la relación de orden $\leq$ definida como $(A,A_1) \leq (C,C_1)$ if $A \leq C$ (ó $A_1 \geq C_1$) es un retículo completo que se denomina retículo de conceptos L-difusos [9, 10].

En [1, 8, 5, 17] se pueden consultar otros resultados importantes sobre esta teoría.

1.2 MORFOLOGÍA MATEMÁTICA

La Morfología Matemática es una teoría utilizada en el tratamiento y análisis de imágenes por medio de filtros y operadores que las modifican. Esta teoría, iniciada por G. Matheron [16] y J. Serra [18], se utiliza en contextos relativos a actividades tales como la extracción de información en imágenes digitales, la eliminación de ruido en las mismas o el reconocimiento de patrones, entre otras.

En esta teoría, las imágenes binarias se representan mediante suconjuntos A de $X = \mathbb{R}^n$, o $X = \mathbb{Z}^n$ para imágenes digitalizadas (o señales cuando n=1).

Los *filtros morfológicos* se definen como operadores $F : \wp(X) \to \wp(X)$ que transforman, simplifican, limpian o extraen información relevante de esas imágenes $A \subseteq X$. Di-

cha información es proporcionada por la imagen filtrada $F(A) \subseteq X$.

Estos filtros morfológicos se obtienen a partir de dos operadores básicos, la *dilatación* δ_S y la *erosión* ε_S, que en el caso de imágenes binarias se definen, respectivamente, utilizando la suma y la diferencia de Minkowski [18].

$$\delta_S(A) = A \oplus S = \bigcup_{s \in S} A_s$$

$$\varepsilon_S(A) = A \ominus \check{S} = \bigcap_{s \in \check{S}} A_s$$

donde A es una imagen que es tratada con otra $S \subseteq X$, llamada *elemento estructurante*, o con su opuesta $\check{S} = \{-x/x \in S\}$. Donde $A_s = \{a+s/a \in A\}$ es una traslación de A y la imagen estructurante S representa el efecto que queremos producir en la imagen inicial A.

Estos operadores son transformaciones duales con respecto a la complementación [19]:

$$\varepsilon_S(A) = (\delta_{\check{S}}(A^c))^c, \quad \forall A, S \in \wp(X)$$

Componiendo estos operadores dilatación y erosión asociados con el elemento estructurante S se obtienen los filtros. La elección de un filtro morfológico dado viene motivada por el conocimiento disponible acerca de la forma, el tamaño y la orientación de las estructuras que deseamos filtrar.

Los filtros básicos son la *apertura morfológica* $\gamma_S : \wp(X) \to \wp(X)$ y el *cierre morfológico* $\phi_S : \wp(X) \to \wp(X)$ definidos como:

$$\gamma_S = \delta_S \circ \varepsilon_S$$

$$\phi_S = \varepsilon_S \circ \delta_S$$

Estas definiciones se extienden para considerar imágenes con tonos de gris, formalizando dichas imágenes mediante funciones. [18]

1.2.1 Morfología Matemática Difusa

En el campo de trabajo difuso, y asociado con retículos, se ha desarrollado un nuevo *procesamiento morfológico difuso de imágenes* [6, 4, 7, 15] utilizando conjuntos L-difusos A y S (con $X = \mathbb{R}^2$ o $X = \mathbb{Z}^2$) como imágenes y elementos estructurantes.

Los conjuntos L-difusos $A : X \to L$ y $S : X \to L$ se interpretan como imágenes n-dimensionales en el espacio $X = \mathbb{R}^n$ (o como imágenes n-dimensionales digitalizadas para el caso de que $X = \mathbb{Z}^n$).

En la literatura, (véase [4, 6, 14]), se introducen los operadores erosión y dilatación difusos asociados con el par residuado $(*, I)$. Utilizaremos en este trabajo las definiciones dadas por I. Bloch [6] que mostramos a continuación.

Si $S : X \to L$ representa una imagen que tomamos como *elemento estructurante*, entonces, asociados con la terna (L, X, S), podemos considerar los siguientes operadores:

La erosión difusa de la imagen $A \in L^X$ mediante el elemento estructurante S es el conjunto L-difuso $\varepsilon_S(A) \in L^X$ definido como:

$$\varepsilon_S(A)(x) = \text{ínf}\{I(S(y-x), A(y))/y \in X\}, \quad \forall x \in X$$

La dilatación difusa de la imagen A mediante el elemento estructurante S es el conjunto L-difuso $\delta_S(A)$ dado por:

$$\delta_S(A)(x) = \sup\{S(x-y) * A(y)/y \in X\}, \quad \forall x \in X$$

En trabajos previos [2], y en el marco del tratamiento de imágenes o señales, hemos estudiado las propiedades de operadores erosión y dilatación morfológicos difusos asociados a un par residuado $(I, *)$ del tipo (implicador, conjuntor) en contextos del tipo $([0,1], X, X, R_S)$, en los que el conjunto X es igual al espacio $\mathbb{R}^n$ o al espacio digitalizado $\mathbb{Z}^n$ y sus subconjuntos difusos $A \in [0,1]^X$ se interpretan como representación de imágenes, (o señales en el caso $n = 1$), con tonos de gris. En estas interpretaciones $R_s \in [0,1]^{X \times X}$ es una relación difusa asociada a una imagen (o señal) estructurante $S \in [0,1]^X$ que sintetiza el efecto de las erosiones o dilataciones sobre otras imágenes.

Más tarde, en [3], utilizamos relaciones estructurantes $R \in L^{X \times X}$ que representan los diferentes efectos que deseamos producir en una imagen o señal difusa inicial $A \in L^X$.

Extenderemos ahora estas definiciones a un contexto más amplio en el que trabajaremos con una relación estructurante L-difusa $R \in L^{X \times Y}$, con $X, Y \neq \emptyset$, y un par residuado $(I, *)$ formado por un operador implicador y un conjuntor tales que

$$(\alpha * \beta)' = I(\alpha, \beta'), \quad \forall \alpha, \beta \in L$$

En este caso, se extienden las definiciones dadas de erosión y dilatación como sigue:

Definición 1. *La erosión difusa del subconjunto L-difuso $A \in L^X$ mediante la relación estructurante $R \in L^{X \times Y}$ es el subconjunto difuso $\varepsilon_{1R}(A) \in L^Y$ definido por:*

$$\varepsilon_{1R}(A)(y) = \text{ínf}\{I(R(x,y), A(x))/x \in X\}, \quad \forall y \in Y$$

La dilatación difusa del subconjunto L-difuso $A \in L^X$ mediante la relación estructurante $R \in L^{X \times Y}$ es el subconjunto difuso $\delta_{1R}(A) \in L^Y$ definido por:

$$\delta_{1R}(A)(y) = \sup\{R(x,y) * A(x))/x \in X\}, \quad \forall y \in Y$$

Análogamente, la erosión y la dilatación difusas de un subconjunto L-difuso $B \in L^Y$ serán, respectivamente,

$$\varepsilon_{2R}(B)(x) = \text{ínf}\{I(R(x,y), B(y))/y \in Y\}, \quad \forall x \in X$$
$$\delta_{2R}(B)(x) = \sup\{R(x,y) * B(y))/y \in Y\}, \quad \forall x \in X$$

Utilizando los operadores erosión y dilatación difusos se construyen los filtros morfológicos básicos: la apertura y el cierre.

Definición 2. *La apertura difusa del subconjunto $A \in L^X$ mediante la relación estructurante $R \in L^{X\times Y}$ es el subconjunto difuso que resulta de la composición de la erosión de A con su dilatación:*

$$\gamma_{1R}(A) = \delta_{2R}(\varepsilon_{1R}(A)) = (\delta_{2R} \circ \varepsilon_{1R})(A)$$

definimos el cierre difuso del subconjunto $A \in L^X$ mediante la relación estructurante $R \in L^{X\times Y}$ como:

$$\phi_{1R}(A) = \varepsilon_{2R}(\delta_{1R}(A)) = (\varepsilon_{2R} \circ \delta_{1R})(A)$$

Del mismo modo, definimos la apertura y el cierre difusos de $B \in L^Y$:

$$\gamma_{2R}(B) = \delta_{1R}(\varepsilon_{2R}(B)) = (\delta_{1R} \circ \varepsilon_{2R})(B)$$
$$\phi_{2R}(B) = \varepsilon_{1R}(\delta_{2R}(B)) = (\varepsilon_{1R} \circ \delta_{2R})(B)$$

En el siguiente apartado estudiaremos otros elementos de Morfología Matemática.

2 GRADIENTE MORFOLÓGICO. TRANSFORMACIONES TOP-HAT Y HIT-OR-MISS

El gradiente morfológico y las transformaciones Top-Hat y Hit-or-Miss son herramientas definidas en Morfología Matemática. Estas herramientas han sido introducidas en [11] para el análisis de datos. Posteriormente, en [13] aparecen definiciones análogas en el contexto del tratamiento de imágenes.

El objetivo de este trabajo será dar una nueva extensión de estas definiciones a la tupla (L,X,Y,R) utilizando elementos estructurantes que vendrán dados por relaciones binarias L-difusas, y estudiar su significado desde el punto de vista del Análisis de Conceptos L-Difusos.

2.1 GRADIENTE MORFOLÓGICO

Las erosiones y dilataciones son elementos básicos en Morfología Matemática que se pueden combinar definiendo operadores gradiente.

Una suposición habitual en el análisis de imágenes consiste en la consideración de objetos dentro de la imagen como regiones de niveles de gris bastante homogéneas. De ello se desprende que los límites o bordes de los objetos se encuentran donde hay grandes variaciones de niveles de gris. Los operadores gradiente se utilizan para mejorar estas variaciones. El gradiente morfológico resalta la variación máxima de las intensidades de nivel de gris dentro de la zona definida por la relación estructurante.

El operador gradiente morfológico básico, también llamado *Gradiente de Beucher* se define como la media aritmética entre la dilatación y la erosión. Siguiendo esta idea, podemos dar la siguiente definición:

Definición 3. *Sea (L,X,Y,R) la tupla asociada con la relación estructurante $R \in L^{X\times Y}$. Definimos el gradiente del subconjunto $A \in L^X$ o $B \in L^Y$, respectivamente, como:*

$$GRAD_{1R}(A) = T(\delta_{1R}(A), (\varepsilon_{1R}(A))')$$
$$GRAD_{2R}(B) = T(\delta_{2R}(B), (\varepsilon_{2R}(B))')$$

donde T es una t-norma definida en el retículo L y $'$ una negación fuerte.

2.2 TRANSFORMACIONES TOP-HAT Y HIT-OR-MISS

La elección de un filtro morfológico está motivada por el conocimiento disponible acerca de la forma, el tamaño y la orientación de las estructuras que deseamos filtrar. Las transformaciones morfológicas Top-Hat proceden en el orden contrario. Esto es, consisten en utilizar el conocimiento sobre las características de las formas que no son compartidas por las estructuras relevantes de la imagen. Para poder eliminar dichas formas, se utiliza una apertura o cierre con un elemento estructurante que no se adecúa a las estructuras relevantes de la imagen.

De este modo, las transformaciones Top-Hat se pueden utilizar para realzar fronteras. Siguiendo las definiciones dadas en Morfología Matemática, podemos dar las siguientes definiciones:

Definición 4. *Sea (L,X,Y,R) la tupla asociada con la relación estructurante $R \in L^{X\times Y}$. Definimos la* transformación Top-Hat por apertura TH_R^{γ} *y la* transformación Top-Hat por cierre TH_R^{ϕ} *como:*

$$TH_{1R}^{\gamma}(A) = T(A, (\gamma_{1R}(A))')$$
$$TH_{2R}^{\phi}(B) = T(\phi_{2R}(B), B')$$

con $A \in L^X$, $B \in L^Y$ y T una t-norma que puede ser la utilizada para definir la erosión y la dilatación u otra diferente. Análogamente, podemos definir $TH_{2R}^{\gamma}(B)$ y $TH_{1R}^{\phi}(A)$.

Son transformaciones diferencia que determinan las relaciones difusas que representan las fronteras interna y externa de una imagen A.

La transformación Hit-or-Miss se utiliza para localizar formas específicas dentro de una imagen. En Morfología Matemática, dados dos elementos estructurantes con intersección vacía, se define la transformación Hit-or-Miss como la intersección de las erosiones producidas por los elementos estructurantes en un conjunto y su complementario.

Definición 5. *Sean $R_1, R_2 \in L^{X\times Y}$ dos relaciones difusas verificando $R_1 \leq R_2'$. Definiremos el Hit-or-Miss de $A \in L^X$ asociado al par de relaciones (R_1,R_2) y a una t-norma T de la siguiente forma:*

$$HM_{1(R_1,R_2)}(A) = T(\varepsilon_{1R_1}(A), \varepsilon_{1R_2}(A'))$$

Análogamente, definimos el Hit-or-Miss de $B \in L^Y$ como:

$$HM_{2(R_1,R_2)}(B) = T(\varepsilon_{2R_1}(B), \varepsilon_{2R_2}(B'))$$

3 APLICACIÓN EN EL ANÁLISIS DE CONCEPTOS L-DIFUSOS

Uno de los principales resultados que relaciona la Morfología Matemática con el Análisis de Conceptos L-Difusos es el siguiente:

Proposición 1. *Dada la relación $R \in L^{X\times Y}$, sea (L,X,Y,R') el contexto L-difuso asociado a la relación R' obtenida a partir de R aplicando una negación fuerte. Entonces, los operadores dilatación y erosíon difusos está relacionados con los operadores derivación $(\cdot)_1$ y $(\cdot)_2$ en dicho contexto L-difuso mediante las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{1R}(A) &= (A')_1, \quad \forall A \in L^X \\
\delta_{2R}(B) &= (B_2)', \quad \forall B \in L^Y \\
\varepsilon_{2R}(B) &= (B')_2, \quad \forall B \in L^Y \\
\delta_{1R}(A) &= (A_1)', \quad \forall A \in L^X
\end{aligned}$$

Demostración. Omitimos la demostración por falta de espacio. □

Utilizando este resultado podemos analizar el efecto que tienen las transformaciones del apartado anterior cuando trabajamos con contexos L-difusos.

En el caso del gradiente morfológico, en términos del Análisis de Conceptos L-difusos:

$$GRAD_{1R}(A) = T((A_1)', ((A')_1)') = 1 - S(A_1, (A')_1)$$

$$GRAD_{2R}(B) = T((B_2)', ((B')_2)') = 1 - S(B_2, (B')_2)$$

donde S es la t-conorma asociada a la t-norma T y $(\cdot)_1$ y $(\cdot)_2$ los operadores derivación definidos en el contexto L-difuso (L,X,Y,R').

Podríamos decir que consiste en calcular el complementario de la unión de las intensiones (o extensiones) de los conceptos derivados de A y A', (o B y B') en el contexto (L,X,Y,R') cuando estamos utilizando una implicación residuada.

De especial interés desde el punto de vista del Análisis de Conceptos L-Difusos puede considerarse la transformación Top-Hat por cierre TH_R^ϕ cuando se utiliza una implicación residuada para la erosión y la dilatación, ya que puede interpretarse como la diferencia que hay entre un conjunto de partida $A \in L^X$ o $B \in L^Y$ y la extensión o intensión del concepto derivado en el contexto (L,X,Y,R'). Esto es así porque el cierre coincide con aplicar los dos operadores derivación del Análisis Conceptos L-Difusos sucesivamente al conjunto de partida.

En cuanto a la transformación Hit-or-Miss, el resultado dependerá de la relaciones con las que trabajemos.

Como caso particular, podemos trabajar con $R_1 = R$ y $R_2 = R'$ ya que $R \leq R'' = R$. Entonces, $HM_{1(R,R')}(A) = T(\varepsilon_{1R}(A), \varepsilon_{1R'}(A'))$ dependerá de la t-norma utilizada.

Una interpretación desde el punto de vista del análisis de conceptos L-difusos de este operador es la siguiente:

Como $\varepsilon_{1R}(A) = (A')_1$, siendo $(\cdot)_1$ el operador derivación asociado a la relación R', partiendo de A y con una implicación residuada, estaríamos obteniendo intensiones de conceptos B en (L,X,Y,R) tales que su complementario B' es una intensión de concepto en (L,X,Y,R'). Esto, en general no se cumple, ya que estaríamos exigiendo que la implicación cumpliese $I(a,b) = I(a',b')$. De alguna forma, podríamos decir que éstos son los conceptos más robustos.

Podríamos pensar en otras elecciones de R_1 y R_2. Por ejemplo, si tomamos $R_1 = R$ y una nueva relación R_3 que diremos que representa una visión más optimista de R ($R \leq R_3$), podemos definir $R_2 = R_3 \wedge R_1' = R_3 \wedge R'$. (Se cumple que $R_1 \leq (R_3 \wedge R_1')' = R_3' \vee R_1$.) Esta nueva relación R_3 podría interpretarse desde el punto de vista de nuestro caso práctico como una cierta matización que se hace de la relación R.

Este último proceso que propone la elección de $R_3 \geq R$ para construir R_2 se puede formalizar eligiendo un cuantificador lingüístico. Así, si por ejemplo utilizamos un cuantificador lingüístico como "un poco" asociado al modificador "débil" $\sqrt{a}$, obtendríamos $R_3(x,y) = \sqrt{R(x,y)}$.

4 CASO PRÁCTICO

En una empresa se pretende evaluar el trabajo realizado por los equipos de los diferentes departamentos para conseguir comparaciones entre ellos. Cada responsable ha contestado a un test para evaluar a su equipo. Consideramos el conjunto X formado por los diferentes reponsables, el conjunto Y es el conjunto de preguntas del test, y la relación R almacena las respuestas dadas. Estas respuestas son valores numéricos que varían desde 0 (en total desacuerdo) hasta 1 (totalmente de acuerdo). Por lo tanto, $R \in L^{X\times Y}$, con $L = \{0, 0.1, 0.2, \ldots 1\}$. Las características de los miembros del equipo de trabajo que se evalúan en el test son:

y_1 : Son expertos en sus tareas
y_2 : Trabajan con profesionalidad
y_3 : Son honestos con sus compañeros
y_4 : Se responsabilizan de sus tareas
y_5 : Se comunican entre ellos
y_6 : Cumplen habitualmente los plazos establecidos
y_7 : Gestionan con profesionalidad los errores de los demás
y_8 : Se adaptan con rapidez a los cambios de prioridades
y_9 : Toman rápidamente sus decisiones

La relación R que se obtiene solicitando la opinión de los responsables de los grupos respecto a las cuestiones se recoge en la siguiente tabla.

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
x_1	1	0.8	1	1	0.8	0.9	0.7	1	1
x_2	0.9	0.8	0.8	0.8	1	0.7	0.6	1	0.8
x_3	0.7	0.9	1	0.2	0	0.8	1	0.6	0.5
x_4	0	0.1	0.2	0	0	0	0	0.2	0
x_5	0.7	0	0.8	0.3	0.6	0	0.8	1	0.4
x_6	0	0	0	0.2	0.2	0.2	0	0.2	0
x_7	0.8	1	1	0.8	1	1	1	0.7	0.9
x_8	0.3	0	0	0	0.1	0	0.2	0	0.2
x_9	0.7	0	0.8	1	0	1	0.8	0.7	0.8
x_{10}	0.3	0	0.8	0	1	1	1	0.7	0.8

En este ejemplo, tomaremos como elemento estructurante la relación R que se puede interpretar como el efecto que nosotros queremos producir en un conjunto de entrada que estará formado por un grupo de responsables ($A \in L^X$) o por un conjunto de preguntas del test ($B \in L^Y$).

Por otra parte, construiremos el contexto L-difuso (L,X,Y,R'), donde la relación R' representará los puntos débiles de los equipos de trabajo.

Comenzaremos analizando el efecto del gradiente. Si tomamos el siguiente $A \in L^X$:

$$A = \{x_1/1, x_2/1, x_3/1, x_4/0, x_5/0, x_6/0, x_7/1, x_8/0, x_9/1, x_{10}/0\}$$

Escribiendo la definición de gradiente desde el punto de vista del análisis de conceptos L-difusos:

$$GRAD_{1R}(A) = T((A_1)', ((A')_1)') = 1 - S(A_1, (A')_1)$$

y tomando como t-conorma la de Lukasiewicz $S(a,b) = \text{mín}(1, a+b)$ o el máximo $S(a,b) = \text{máx}(a,b)$ obtenemos:

$$GRAD_{1R}(A) = \{y_1/0.7, y_2/0.1, y_3/0.8, y_4/0.3, y_5/1, y_6/1, y_7/1, y_8/1, y_9/0.8\}$$

Podemos interpretar esta transformación como el cálculo de las características que no figuran entre los puntos débiles de todos los responsables de A o de todos los responsables que no están en A. En este caso dichas características serían y_5, y_6, y_7 e y_8 y, en menor medida, y_9, y_3 e y_1.

Aplicaremos a continuación la transformación Top-Hat por cierre TH_R^{ϕ} que desde el punto de vista del análisis de conceptos nos proporciona resultados más interesantes. Si, por ejemplo, partimos del conjunto de atributos:

$$B = \{y_1/0, y_2/0, y_3/0, y_4/1, y_5/1, y_6/1, y_7/1, y_8/0, y_9/1\}$$

tenemos que, utilizando la t-norma del mínimo o la de Lukasiewicz, se obtiene:

$$TH_R^{\phi}(B) = T(\phi_{2R}(B), B') = \{y_1/0.9, y_2/0.9, y_3/0.8, y_4/0, y_5/0, y_6/0, y_7/0, y_8/0.8, y_9/0\}$$

En este caso, se aprecian diferencias entre B y su cierre, o lo que es lo mismo, entre B y la intensión del concepto que se deriva de él. Estas diferencias están en los atributos y_1, y_2, y_3 e y_8.

La aplicación de la transformación Hit-or-Miss a este ejemplo nos servirá para establecer puntos fuertes de un grupo de responsables que al mismo tiempo son débiles del resto de responsables.

Las dos relaciones R_1 y R_2 utilizadas en esta transformación deben ser tales que $R_1 \leq R_2'$. Tomemos por ejemplo $R_1 = R$ y $R_2 = R'$.

En este caso, podemos partir de un $A \in L^X$ que representa a un grupo de responsables, por ejemplo:

$$A = \{x_1/1, x_2/1, x_3/1, x_4/0, x_5/0, x_6/0, x_7/1, x_8/0, x_9/1, x_{10}/0\}$$

y, si calculamos $\varepsilon_{1R}(A)$, estaremos obteniendo los puntos débiles de los responsables que no están en A. El cálculo de $\varepsilon_{1R'}(A')$ nos proporcionaría los puntos fuertes de los responsables de A :

$$\varepsilon_{1R}(A) = \{y_1/0.3, y_2/0.9, y_3/0.2, y_4/0.7, y_5/0, y_6/0, y_7/0, y_8/0, y_9/0.2\}$$
$$\varepsilon_{1R'}(A') = \{y_1/0.7, y_2/0, y_3/0.8, y_4/0.2, y_5/0, y_6/0.7, y_7/0.6, y_8/0.6, y_9/0.5\}$$

Finalmente $HM_{1(R,R')}(A) = T(\varepsilon_{1R}(A), \varepsilon_{1R'}(A'))$ dependerá de la t-norma utilizada. Como la utilización de R y R' es muy exigente, tomaremos la mayor de las t-normas, esto es, el mínimo. El resultado así obtenido es:

$$HM_{1(R,R')}(A) = \text{mín}(\varepsilon_{1R}(A), \varepsilon_{1R'}(A')) = \{y_1/0.3, y_2/0, y_3/0.2, y_4/0.2, y_5/0, y_6/0, y_7/0, y_8/0, y_9/0.2\}$$

donde vemos que aunque ninguno de los elementos tiene un grado de pertenencia grande (debido a la exigencia impuesta en la elección de R_1 y R_2), las características y_1, y_3, y_4 e y_9 son aquellas que en mayor medida son puntos débiles de los responsables que no están en A y puntos fuertes de los que están en A.

Veamos qué ocurre si tomamos otras relaciones $R_1 = R$ y $R_2 = R_3 \wedge R_1'$, donde para construir la relación R_3 se sabe que las valoraciones de ciertos responsables son siempre malas, por lo que se puede aplicar un factor de ponderación de las mismas. Por ejemplo,

$$R_3(x,y) = \begin{cases} \text{mín}\{R(x,y) * 1.5, 1\} & \text{si } x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \\ R(x,y) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos ahora que partimos del mismo conjunto de responsables $A = \{x_1, x_2, x_3, x_7, x_9\}$. En este caso, utilizando el mínimo también como t-norma.

$$HM_{1(R,R_2)}(A) = \{y_1/0.3, y_2/0.8, y_3/0.2, y_4/0.7, y_5/0, y_6/0, y_7/0, y_8/0, y_9/0.2\}$$

Interpretaríamos este resultado diciendo que fundamentalmente y_2 e y_4 y, aunque en menor medida, también y_1, y_3 e y_9 son puntos débiles de los responsables que no están en A y puntos fuertes de los responsables de A teniendo en cuenta que hemos aplicado el factor de ponderación para aquellas observaciones correspondientes a los cinco primeros responsables.

5 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo, hemos encontrado nuevos elementos que permiten establecer relaciones entre Morfología Matemática Difusa y Análisis de Conceptos Difusos cuando trabajamos con relaciones estructurantes $R \in L^{X \times Y}$.
En trabajos futuros, queremos extender este vínculo a otras herramientas, tanto de Morfología Matemática Difusa como del Análisis de Conceptos L-difusos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Grupo de Investigación del Gobierno Vasco *Sistemas Inteligentes y Energía (SI+E)* (Proyecto IT677-13), y por el Grupo de Investigación de la Universidad Pública de Navarra *Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados*.

Referencias

[1] Alcalde, C., Burusco, A., Fuentes-González, R., Zubia, I.: Treatment of L-fuzzy contexts with absent values. Information Sciences. 179 (1-2), 1–15 (2009)

[2] Alcalde, C., Burusco, A., Fuentes-González, R.: An interpretation of the L-Fuzzy Concept Analysis as a tool for the Morphological Image and Signal Processing. In: Proc. of CLA 2012, pp. 81–92. Fuengirola, (2012)

[3] Alcalde, C., Burusco, A., Fuentes-González, R.: L-fuzzy Concept Analysis Fuzzy Mathematical Morphology Formal Concept Analysis Morphological Image Processing. In: Proc. of 8th Conference of EUSFLAT 2013, pp. 132–139. Milán, (2013)

[4] De Baets, B.: Fuzzy morphology: a logical approach. In: Ayyub, B., Gupta, M. (eds.) Uncertainty Analysis, Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics and neural network Approach, pp. 53–67, Kluwer Academic Publishers (1997)

[5] Belohlavek, R., Konecny, J.: Concept lattices of isotone vs. antitone Galois connections in graded setting: Mutual reducibility revisited. Information Sciences. 199, 133–137 (2012)

[6] Bloch, I., Maître, H.: Fuzzy Mathematical Morphologies: a comparative study. Télécom Paris 94D001 (1994)

[7] Burillo, P., Frago, N., Fuentes-González, R.: Generation of Fuzzy Mathematical Morphologies. Mathware & Soft Computing. VIII (1), 31–46 (2001)

[8] Burusco, A., Fuentes-González, R.: Concept lattices defined from implication operators. Fuzzy Sets and Systems. 114, 431–436 (2000)

[9] Burusco, A., Fuentes-González, R.: The Study of the L-fuzzy Concept Lattice. Mathware and Soft Computing. I (3), 209–218 (1994)

[10] Burusco, A., Fuentes-González, R.: Construction of the L-fuzzy Concept Lattice. Fuzzy Sets and Systems. 97 (1), 109–114 (1998)

[11] Frago, N., Fuentes-González, R., Burillo, P.: Procesos de descubrimiento de conocimiento en bases de datos usando grafos asociados a filtros morfológicos. In: Proc. of ESTYLF 2008, pp. 59–66. Asturias, (2008)

[12] Ganter, B., Wille, R.: Formal concept analysis: Mathematical foundations. Springer, Berlin - New York (1999)

[13] González-Hidalgo, M., et al.: Fuzzy Hit-or-Miss Transform Using the Fuzzy Mathematical Morphology Based on T-norms. In H. Bustince et al. (eds.), Aggregation Functions in Theory and in Practise, Advances in Intelligent Systems and Computing (228), 391–403 (2013)

[14] Goutsias, J., Heijmans, H.J.A.M.: Fundamenta Morphologicae Mathematicae. Fundamenta Informaticae. 41, 1–31 (2000)

[15] Maragos, P.: Lattice Image Processing: A Unification of Morphological and Fuzzy Algebric Systems. Journal of Mathematical Imaging and Vision. 22, 333–353 (2005)

[16] Matheron, G.: Eléments pour une théorie des milieux poreux. Masson, Paris (1967)

[17] Medina, J., Ojeda-Aciego, M.: Multi-adjoint t-concept lattices. Information Sciences. 180 (5), 712–725 (2010)

[18] Serra, J.: Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press. I (fourth printing 1990) and II (second printing 1992)

[19] Soille, P.: Morphological Image Analysis. Principles and Applications. Second Edition. Springer (2004)

[20] Wille, R.: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: Rival, I. (ed.), Ordered Sets, pp. 445–470. Reidel, Dordrecht (1982)

Prefiltrado para sistemas de recomendación basado en lógica difusa

Pablo Cordero[1], **Manuel Enciso**[2], **Jose Luis Leiva**[2], **Ángel Mora**[1], **Carlos Rossi**[2]

[1]*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga*, pcordero@uma.es, amora@ctima.uma.es
[2]*Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación, Universidad de Málaga*, enciso@lcc.uma.es, crossi@uma.es,jlleivao@lcc.uma.es

Resumen

La mayoría de los sistemas de recomendación basados en contenidos sugieren al usuario sobre items cercanos a su interés. En los sistemas reales, el principal problema es la cantidad de items que el sistema debe valorar. Proponemos como herramientas de trabajo la lógica difusa y el Análisis Formal de Conceptos para desarrollar un pre-filtrado de dichos items con el que se reduce la entrada y por tanto se mejora la eficiencia de los sistemas de recomendación clásicos. Planteamos el uso de la Lógica de Simplificaciones para diseñar el proceso de pre-filtrado e ilustramos la propuesta por medio de una aplicación en el sector turístico.

Palabras Clave: Sistemas de Recomendación, Lógica Difusa, Análisis Formal de Conceptos, Implicaciones.

1 Introduction

En los últimos años, el uso de sistemas de recomendación (SR) se ha popularizado en aplicaciones de diverso tipo. En el ámbito del turismo, resulta especialmente interesante su aplicación para facilitar al turista la planificación de una visita, ofreciendo una selección personalizada de productos. Este tipo de sistemas se hace necesario en los destinos turísticos con objeto de que el turista pueda encontrar fácil y rápidamente productos adecuados a sus gustos, ya que lo habitual es que las aplicaciones que ofrece cualquier destino turístico muestren una amplia lista de puntos de interés. Este hecho provoca que en muchos casos los usuarios se sientan desbordados al tener que elegir entre una gran diversidad de alternativas [Lymberopoulos et al., 2011]. Por tanto, los SR deben implementar mecanismos de filtrado para proporcionar un conjunto de puntos de interés que se ajusten de la forma más precisa posible a las necesidades reales del turista. En [Leiva et al., 2012], se presenta una clasificación de los tipos de sistemas de recomendación más habitualmente utilizados: Colaborativos, Basados en contenido, Demográficos, Basados en conocimiento, Basados en utilidad, Basados en casos.

Nuestra propuesta se encuadra en los sistemas de recomendación basados en contenido que se basan en categorizar los ítems a recomendar, sugiriendo productos que tengan características similares a otros que han sido bien valorados anteriormente por el usuario o que tienen características similares a las que solicita el usuario en la petición.

De cara a su utilización en sistemas turísticos, una carencia importante detectada en estos modelos es que no utilizan atributos de contexto [Adomavicius et al., 2010]. Para mejorar la calidad de las recomendaciones, el sistema debe no sólo utilizar las valoraciones de los distintos puntos o atributos de los mismos o las preferencias del turista, sino que debe manejar información de otra naturaleza como clima, compañía, horarios, etc. [Adomavicius and Tuzhilin, 2011]. En el sector turístico es indispensable tener en cuenta este tipo de información contextual. Por ejemplo, si está lloviendo, el sistema recomendará lugares cerrados y no abiertos, y si vamos en pareja a cenar será mejor que nos recomienden un restaurante tranquilo y/o romántico que en uno de comida rápida.

El contexto es un concepto multifacético que ha sido estudiado a través de diferentes investigaciones y disciplinas, incluyendo ciencias de la computación (principalmente en la inteligencia artificial), la ciencia cognitiva, la lingüística, la psicología y ciencias organizativas [Bazire and Brézillon, 2005]. En este artículo nos concentraremos en el concepto de contexto relacionado con los sistemas de recomendación y los sistemas móviles. En este entorno se considera el contexto como el conjunto de información que abarca la ubicación del usuario, la identidad de las personas cercanas al usuario, los objetos a su alrededor, y los cambios en estos elementos [Adomavicius and Tuzhilin, 2011].

Como se indicó anteriormente, para mejorar las recomendaciones hay que tomar en consideración la información contextual disponible como categorías adicionales de datos [Leiva et al., 2012]. En otras palabras el sistema para poder realizar las recomendaciones debe tener en cuenta tres dimensiones: usuarios, ítems y contexto [Adomavicius and Tuzhilin, 2011].

En nuestra opinión, el paradigma de prefiltrado es el más adecuado para un sistema de recomendación en destinos turísticos (probablemente con miles de puntos de interés turísticos), considerando que será usado habitualmente en dispositivos móviles. La razón es que permite que los procesos de recomendación manipulen un número reducido de puntos de interés, ganando en eficiencia. Otra ventaja importante de esta aproximación es que puede combinarse con cualquier técnica de recomendación existente.

El sistema de recomendación que proponemos utilizará un prefiltrado contextual basado en contenido, que utilice atributos contextuales y características deseables de los puntos turísticos que desea visitar en el instante en el cual solicita la recomendación. Además, no será necesario tener información sobre visitas anteriores del turista, por tanto no tiene necesidad de disponer de capacidad de visitas históricas, ni de valoraciones de otros turistas. El prefiltrado contextual no solo servirá para que filtre y descarte ítems, sino que mediante reglas podrá también complementar los atributos relacionados con las preferencias del turista, haciendo que no tenga que introducir demasiada información sobre las características de los puntos que desea visitar.

Para poder realizar recomendaciones el sistema propuesto sólo necesita:

- Las preferencias del turista, que expresará en su perfil de usuario tanto las características de lo que le gustaría visitar como los atributos contextuales a considerar (si viaja con menores, con algún minusválido, horario, clima, etc.).
- Las características de los diferentes puntos turísticos, tipo de turista al que va dirigido y reglas que relaciona atributos contextuales con atributos de productos a recomendar. Esta información debe ser suministrada por los expertos del destino turístico.

Algunos autores [Zenebe and Norcio, 2009] han propuesto el uso de la lógica difusa como una base formal para los sistemas de recomendación. Sin embargo, como se ha comentado anteriormente, nuestra aproximación intenta también recoger la aproximación de [Adomavicius and Tuzhilin, 2005]: incorporar la información contextual en el proceso de recomendación. En este artículo, abordamos esta doble faceta desde el prisma del Análisis Formal de Conceptos - AFC [Wille, 1982, Ganter and Wille, 1999].

Desde el punto de vista filosófico, un *concepto* es una idea general que se corresponde con algún tipo de entidad y que puede ser caracterizada por algunas propiedades. Sin embargo, el AFC ha llegado a ser un marco útil tanto en el plano teórico como en el práctico en áreas como el análisis de datos, representación del conocimiento, data mining, web semántica, etc.

En AFC se identifican las relaciones existentes entre un conjunto de objetos y un conjunto de atributos por medio de una tabla binaria. A partir de estas relaciones se determinan los conceptos que vienen formalizados por las conexiones de Galois presentes en la tabla entre dichos conjuntos. Dichos conceptos están caracterizados por una relación de orden conformando un retículo de conceptos como estructura. Algunos autores han usado AFC para sistemas de recomendación [du Boucher-Ryan and Bridge, 2006] como método de agrupación de datos a través de conceptos.

Otro de los tópicos importantes en AFC es extraer el conjunto de implicaciones entre los conjuntos de atributos que se satisfacen en el retículo de conceptos, de hecho las implicaciones constituyen una dual representación del propio retículo. Una de las principales ventajas de considerar las implicaciones es la posibilidad de manipularlas utilizando las Lógicas de Dependencias Funcionales [Armstrong, 1974].

En este trabajo, proponemos la generación de un conjunto de implicaciones difusas que se corresponda con un contexto dado, que se enriquecerá con conocimiento del usuario. Utilizaremos como referencia el trabajo [Belohlavek, 1999] que puede considerarse como un trabajo de referencia en este área. Primero, el conocimiento del sistema sobre los puntos de interés (POI - Points of interest) se representa por medio de relaciones difusas en el marco del AFC. La utilización de nuestra lógica difusa [Belohlavek et al., 2012] para la manipulación de implicaciones difusas permite el diseño de un método automático para la eliminación de redundancia en la especificación. El conjunto resultante permitirá una más eficiente validación del conjunto de los POIs. En la figura 1 se muestra la arquitectura propuesta.

El trabajo se organiza de la siguiente forma: En la Sección 2 resumimos el marco de trabajo, la Sección 3 describe la lógica ejecutable para manipular implicaciones difusas, que será usada en la Sección 4 para introducir un sistema de pre-filtrado para un sistema de recomendación basado en contexto y su aplicación a un ejemplo del sector turístico. En la última sección presentamos algunas conclusiones y trabajos futuros.

2 Resultados Previos

Utilizaremos la Lógica Difusa para incorporar a la especificación grados de imprecisión e incertidumbre. Desde que Lofti Zadeh introdujo la Teoría de los Conjuntos Difusos, la

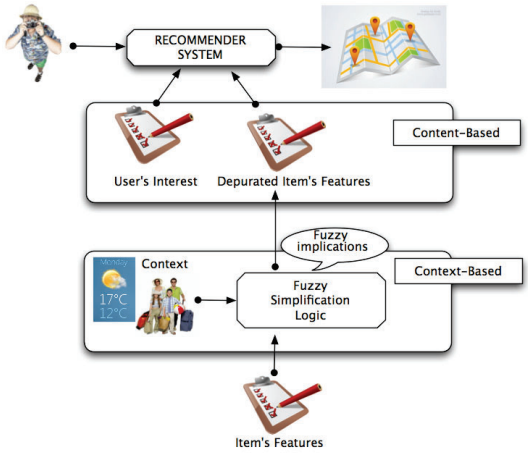


Figura 1: Arquitectura de Sistema de Recomendación

aproximación más habitual consiste en reemplazar el conjunto de valores de verdad $\{0,1\}$ (falso, cierto) por un retículo residuado arbitrario. Nuestra propuesta consiste en considerar $([0,1],\vee,\wedge,0,1,\otimes,\rightarrow,^*,\smallsetminus)$ donde el intervalo $[0,1]$ es enriquecido con el ínfimo (denotado por $\wedge$), el supremo ($\vee$), una t-norma continua por la izquierda ($\otimes$) como el operador conjunción, el residuo $a \rightarrow b = \sup\{x \in [0,1] \mid x \otimes a \leq b\}$, una operación denominada *hedge* * y la diferencia $\smallsetminus$. Los operadores *hedge* [Hájek, 2001] son una clase de funciones unitarias que capturan la semántica de la noción "muy cierto". Los dos casos extremos son la identidad y la globalización (i.e. $1^* = 1$ y $x^* = 0$ para todo $1 \neq x \in L$). La operación de diferencia viene dada por $x \smallsetminus y = x$ si $y < x$ y 0 en otro caso.

Un conjunto difuso en un conjunto universal U es una función $A\colon U \rightarrow [0,1]$; las operaciones con conjuntos se definen en la forma habitual.

La inclusión de conjuntos se extiende como sigue: para todo $A,B\colon U \rightarrow [0,1]$, el grado en el que A es un subconjunto de B es

$$S(A,B) = \bigwedge_{u \in U} (A(u) \rightarrow B(u))$$

Particularmente, si $S(A,B) = 1$ escribimos $A \subseteq B$ y, en este caso, $A(u) \leq B(u)$ para todo $u \in U$.

Vamos a trabajar con conjuntos difusos finitos. En la notación que usaremos, los elementos con valor cero, no aparecen y el grado 1 se omite. Por ejemplo, $A = \{b/_{0.4}, d/_{0.1}, f\}$ denota que $A(b) = 0.4$, $A(d) = 0.1$, $A(f) = 1$ y $A(x) = 0$ en otro caso.

El punto de partida en AFC difuso es la relación difusa [Burusco and Fuentes 1994, Burusco and Fuentes 1998, Belohlavek, 1999][1] que captura el grado en el que un atributo dado se satisface en un objeto. Específicamente, dado un conjunto finito de objetos X y un conjunto finito de atributos Y, el AFC difuso extrae conocimiento de una relación difusa $I\colon X \times Y \rightarrow [0,1]$ donde $I(x,y) = \vartheta$ representa el grado en el que el objeto x tiene el atributo y. Usualmente, la relación difusa I se muestra en una tabla en la que por filas se representan objetos, las columnas se corresponden con atributos y en la posición (x,y) de la tabla aparece el grado $I(x,y)$.

Una información importante que puede ser extraída de la relación difusa viene dada en términos de implicaciones de atributos.

Las implicaciones son fórmulas $A \Rightarrow B$ donde A y B son conjuntos difusos de atributos. El grado en el que esta implicación de atributos se satisface en la relación difusa I viene dado por

$$||A \Rightarrow B||_I = \bigwedge_{x \in X} (S(A,I_x)^* \rightarrow S(B,I_x))$$

donde I_x denota el conjunto difuso en el que $I_x(y) = I(x,y)$ para todo $y \in Y$.

De esta forma, por ejemplo,

$$\{b/_{0.2}, d\} \Rightarrow \{c/_{0.8}\}$$

significa que todo objeto que tiene atributo b con grado al menos 0.2 y grado 1 en el atributo d, tiene al menos grado 0.8 en el atributo c.

Resaltar que tanto el lado izquierdo como el derecho de una implicación $A \Rightarrow B$ pueden ser vacíos. Si B es el conjunto vacío, la implicación captura una información que siempre es válida y no tiene que ser considerada en el proceso de inferencia. Sin embargo, si el conjunto A es vacío, la implicación proporciona información relevante, particularmente en la aplicación en la que estamos trabajado. Por ejemplo, la implicación $\varnothing \Rightarrow \{c/_{0.8}\}$ se interpreta de la siguiente forma: el atributo c debe tener como grado al menos 0.8.

Dada una relación difusa I, $A \overset{\vartheta}{\Longrightarrow} B$ denota que la implicación $A \Rightarrow B$ es cierta con grado al menos ϑ lo que es equivalente a asegurar que $A \Rightarrow \vartheta \otimes B$ se satisface con grado 1 (ver [Belohlavek et al., 2012] para más detalles). Usaremos $\vartheta \otimes B$ para denotar el conjunto difuso $(\vartheta \otimes B)(y) = \vartheta \otimes B(y)$ para todo $y \in Y$.

3 Una Lógica para la manipulación de Implicaciones Difusas de Atributos

Se hace necesario para la manipulación de la información proporcionada en términos de implicaciones, mé-

[1] En la literatura de AFC, esta relación difusa se denomina contexto, pero en nuestro trabajo omitiremos esta denominación para evitar confusión con el término contexto usado en los sistemas de recomendación.

todos automáticos para inferir nueva información de un conjunto de implicaciones. Aunque existen en la literatura, varios sistemas axiomáticos, estos no han sido desarrollados para el diseño de métodos automáticos. En [Belohlavek et al., 2012], los autores presentaron *Fuzzy Attribute Simplification Logic*, $\mathbb{FSL}$, un sistema axiomático correcto y completo para razonar con implicaciones con el que desarrollar métodos automáticos de manipulación de dichas implicaciones.

El sistema consiste de tres reglas de deducción,

$$[\texttt{Ax}] \quad \vdash AB \Rightarrow A \qquad \text{(Axioma)}$$

$$[\texttt{Sim}] \quad A \Rightarrow B, C \Rightarrow D \vdash A(C \smallsetminus B) \Rightarrow D \qquad \text{(Simplificación)}$$

$$[\texttt{Mul}] \quad A \Rightarrow B \vdash \vartheta^* \otimes A \Rightarrow \vartheta^* \otimes B \qquad \text{(Multiplicación)}$$

donde A, B, C, D son conjuntos difusos y $\vartheta \in [0,1]$. Usamos la convención de escribir AB en lugar de $A \cup B$.

La más relevante característica de este conjunto axiomático es que las reglas de inferencia pueden ser vistas como reglas de equivalencia, lo que permite eliminar (simplificar) información redundante. Esta simplificación se aplica tanto a las implicaciones como a los atributos y es especialmente apropiada para entornos heterogéneos en los que diferentes usuarios proporcionan varias implicaciones lo que puede provocar un alto grado de redundancia en las especificaciones.

Estas equivalencias son las siguientes

1. $\{A \Rightarrow B\} \equiv \{A \Rightarrow B \smallsetminus A\}$;
2. $\{A \Rightarrow B, A \Rightarrow C\} \equiv \{A \Rightarrow BC\}$;
3. $\{A \Rightarrow B, C \Rightarrow D\} \equiv \{A \Rightarrow B, A(C \smallsetminus B) \Rightarrow D \smallsetminus B\}$ cuando $A \subseteq C$.

donde A, B, C y D son conjuntos difusos.

4 Aplicación de $\mathbb{FSL}$ a un Sistema de Recomendación basado en contexto

Hasta este punto, hemos presentado los fundamentos teóricos que combinamos para incorporar el contexto en un sistema de recomendación. Nuestra propuesta se basa en:

- La lógica difusa y el AFC difuso multivaluado han probado su utilidad como formalismos correctos para especificación y razonamiento con incertidumbre. Ganter y Wille [Ganter and Wille, 1999] proponen transformar un contexto multivaluado (contextos con atributos que pueden tener un conjunto de valores) en un contexto de simples valores utilizando lo que denominan el escalado conceptual que en nuestro caso adem·s tomar· valores del intervalo $[0,1]$.
- Proponemos una combinación unificada de las técnicas de razonamiento basadas en contexto en un sistema de recomendación basado en contenido.
- El usuario introduce en el sistema todas las características de su contexto y entonces los métodos de razonamiento depuran el conjunto de todas las implicaciones asociadas para obtener un conjunto más simple de implicaciones difusas.
- El conjunto final de implicaciones se usa para validar y por tanto podar, los ítems que el sistema de recomendación debe evaluar. Por lo tanto, el conjunto original de ítems es pre-filtrado y solo un subconjunto de ellos será la entrada del sistema de recomendación.

Ejemplo 1 *Consideramos un grupo de POIS de un destino turístico con algunos atributos para describirlo (Diseño, Ambiente, Precio, Servicios). Cada atributo tiene un conjunto finito de posibles valores y se recurre a un experto en el sector turístico que asesora al sistema dando un grado a cada valor en los dominios, obteniendo una relación difusa (ver tabla 1). Este ejemplo sirve de ilustración en el resto del artículo. Se irán mostrando diferentes aspectos de la Arquitectura de Recomendación basándonos en él.*

El contexto del sistema se representa por un conjunto de dominios discretos $\mathscr{C} = \{\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n\}$. Cada dominio se asocia con una dimensión del contexto (por ejemplo tiempo, compañía, hora del día, etc.) que tiene por tanto un conjunto finito de valores: $\mathscr{C}_i = \{v_1^i, \ldots, v_n^i\}$. Definimos el contexto del usuario, denominado, *estado*, como una n-tupla de pares *(valor del dominio, grado)*.

Ejemplo 2 *Sea Tiempo, Compañía, Hora del día las tres dimensiones del contexto con los siguientes dominios: Tiempo={caluroso, templado, cubierto, lluvioso}, Compañía={sólo,amigos, parejas, familia, gran grupo} y Hora={mañana, mediodía, tarde, noche}. Un usuario puede especificar su contexto por medio del vector de estado: [(Calor, 0.8), (tarde,0.8), (familia,0.7)].*

Definimos un segmento de contexto como un valor específico de un dominio y su grado asociado. Proporcionamos un marco de trabajo en el que cada segmento de contexto es asociado con un conjunto de implicaciones difusas. Como presentamos en la sección 2, las implicaciones pueden etiquetarse con un grado para expresar la certeza de la propia implicación. Por lo tanto, el grado de un segmento de contexto es heredado por todas las implicaciones.

Ejemplo 3 *Las implicaciones asociadas con el contexto se introducen como sigue (observa que el grado del contexto se transfiere a la implicación):*

- *Segmento de Contexto: Calor/*$_{0.8}$*. Implicaciones:*

Tabla 1: Representación en AFC de los POIS

	Diseño		Ambiente			Precio			Servicios		
	EspacioAbierto	EspacioCerrado	Tranquilo	Animado	Pintoresco	Barato	Moderado	Caro	AireAcond.	Vistas	Terraza
Restaurante Est·ndar	0.3	0.8	0.8	0.5	0.2	0.7	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
Estrellas Michelin	0.1	0.8	0.9	0.2	0.1	0	0.1	0.9	0.9	0.5	0.1
Burger	0.3	0.8	0.3	0.8	0.1	0.9	0.3	0.1	0.8	0.1	0.4
Tapas Bar	0.3	0.8	0.2	0.8	0.9	0.9	0.5	0.1	0.5	0.1	0.1
Pizzeria	0.1	0.9	0.3	0.8	0.7	0.9	0.5	0.3	0.8	0.3	0.5
Pescado Fresco en Playa	0.9	0.2	0.3	0.8	0.8	0.5	0.7	0.8	0.3	0.9	0.9

$Caro/_{0.8}$,$EspacioCerrado/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Aire\ Acond./_{0.8}$, $Paisaje/_{0.9}$, $Pintoresco/_{0.2}$

$EspacioAbierto/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Barato/_{0.7}$

- *Segmento de Contexto: Tarde*$/_{0.8}$. *Implicaciones:*

  $EspacioAbierto/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Terraza/_{0.6}$, $Barato/_{0.9}$

- *Segmento de Contexto: Familia*$/_{0.7}$. *Implicaciones:*

  $\emptyset \overset{0.7}{\Rightarrow} Barato/_{0.6}$

  $EspacioCerrado/_{0.8} \overset{0.7}{\Rightarrow} Aire\ Acond./_{0.9}$

Como hemos mencionado en la Sección 3, $\emptyset \overset{0.7}{\Rightarrow} Barato/_{0.6}$ *del último segmento de contexto indica que si el usuario está acompañado por su familia con grado* 0.7 *entonces el restaurante debe ser barato con grado al menos* 0.6.

En nuestra propuesta, utilizamos los métodos de deducción automática desarrollados sobre $\mathbb{FSL}$ para depurar la especificación del contexto y obtener un conjunto canónico de implicaciones. Hay muchos trabajos en AFC relacionados con la búsqueda de dichos conjuntos, denominados bases. Destacar que no hay definiciones adecuadas de bases para implicaciones difusas en AFC difuso. Sin embargo, como el ejemplo 4 muestra, es posible ilustrar los beneficios de usar $\mathbb{FSL}$ para obtener un conjunto de implicaciones equivalente y más simple que represente la información sobre el contexto.

Ejemplo 4 *De la especificación del ejemplo anterior, si nosotros tenemos el contexto proporcionado por el usuario* $\{Calor/_{0.8}, Tarde/_{0.8}, Familia/_{0.7}\}$ *entonces se construye el conjunto de implicaciones reuniendo todas las anteriores implicaciones en un conjunto unificado:*

$\{Caro/_{0.8}$,$EspacioCerrado/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Aire\ Acond./_{0.8}$, $Paisajes/_{0.9}$, $Pintoresco/_{0.2}$;

$EspacioAbierto/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Barato/_{0.7}$;

$EspacioAbierto/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Terraza/_{0.6}$, $Barato/_{0.9}$;

$\emptyset \overset{0.7}{\Rightarrow} Barato/_{0.6}$;

$EspacioCerrado/_{0.8} \overset{0.7}{\Rightarrow} Aire\ Acond./_{0.9}$ $\}$

Utilizando las reglas de inferencia de $\mathbb{FSL}$ *podemos eliminar información y obtenemos un conjunto equivalente y más simple de implicaciones:*

$\{Caro/_{0.8}$,$EspacioCerrado/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Paisajes/_{0.9}$, $Pintoresco/_{0.2}$;

$EspacioAbierto/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Terraza/_{0.6}$;

$\emptyset \overset{0.7}{\Rightarrow} Barato/_{0.6}$;

$EspacioCerrado/_{0.8} \overset{0.7}{\Rightarrow} Aire\ Acond./_{0.9}$ $\}$

Es necesario destacar que el algoritmo de eliminación de redundancia tiene complejidad cuadrática con respecto al número de implicaciones. Este número es mucho menor que el número de POIS (habitualmente varios miles) en cualquier destino turístico. Finalmente, nuestro sistema hace uso de la información asociada con el contexto del usuario, proporcionado por el conjunto unificado y depurado de implicaciones, para filtrar el conjunto de POIS a ser recomendados al usuario. Para cada POI en la tabla de AFC, se validan el conjunto de implicaciones, eliminando todos aquellos POIS que no las satisfacen. La complejidad de este último paso es $O(n)$ con n el número de POIs. De esta forma, hemos diseñado un proceso de pre-filtrado contextual.

Ejemplo 5 *Como en el ejemplo 4, si el contexto del usuario es la tarde de un día caluroso, viajando con la familia, nuestro proceso de pre-filtrado contextual reduce la lista de restaurantes de la tabla 1 a Burger y Pizzeria, puesto que:*

- *Estrellas Michelin no satisface* $Caro/_{0.8}$,$EspacioCerrado/_{0.8} \overset{0.8}{\Rightarrow} Paisajes/_{0.9}$, $Pintoresco/_{0.2}$
- *Pescado Fresco en Playa no satisface* $\emptyset \overset{0.7}{\Rightarrow} Barato/_{0.6}$
- *Restaurante Estándar y Tapas bar no satisface* $EspacioCerrado/_{0.8} \overset{0.7}{\Rightarrow} Aire\ Acond._{0.9}$

De esta forma, el conjunto de POIs que el sistema de recomendación deberá manipular se ve significativamente reducido.

5 Conclusiones y Trabajos Futuros

Los sistemas de recomendación basados en contenido pueden ser mejorados de forma significativa si son capaces de incorporar y manipular información contextual. Para lograr este objetivo usaremos lógica difusa y el Análisis Formal de Conceptos como una herramienta sólida para combinar información del contexto y recomendadores basados en contenido. Más específicamente, utilizamos la Lógica de Simplificaciones difusa para desarrollar un proceso inteligente de pre-filtrado con coste lineal. Este proceso genera un conjunto de implicaciones que captura la información de contexto y que se usa para validar los POIs candidatos a ser recomendados. El método se aplica en dos pasos: en el primero se traslada la información del contexto proporcionada por el usuario como su *estado*, es decir, un conjunto simplificado de implicaciones difusas y en el segundo, las implicaciones son utilizadas para filtrar los POIs no validados por las implicaciones.

Este trabajo puede ser extendido en dos direcciones. Primero, las implicaciones inducidas por el contexto pueden enriquecerse con las implicaciones que automáticamente pueden extraerse de la tabla de intereses del usuario. Proponemos el AFC para extraer esta información. Como segundo trabajo, proponemos sustituir los algoritmos actuales de recomendación por técnicas de AFC.

Agradecimientos

Soportado por los programas **Andalucía Tech** (International Campus of Excellence), P09-FQM-5233 de la Junta de Andalucía y por el TIN2011-28084 del Ministerio de Innovación y Ciencia, cofinanciado por European Regional Development Fund (ERDF).

Referencias

[Adomavicius and Tuzhilin, 2005] Adomavicius, G. and Tuzhilin, A. (2005). Towards the next generation of recommender systems: A survey of the state of the art and possible extensions. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering archive*, 17(6):734–749.

[Adomavicius and Tuzhilin, 2011] Adomavicius, G. and Tuzhilin, A. (2011). Context-aware recommender systems. In *Recommender Systems Handbook*, pages 217–253.

[Adomavicius et al., 2010] Adomavicius, G., Tuzhilin, A., Berkovsky, S., Luca, E. W. D., and Said, A. (2010). Context-awareness in recommender systems: research workshop and movie recommendation challenge. In *RecSys*, pages 385–386.

[Armstrong, 1974] Armstrong, W. W. (1974). Dependency structures of data base relationships. In *IFIP Congress*, pages 580–583.

[Bazire and Brézillon, 2005] Bazire, M. and Brézillon, P. (2005). Understanding context before using it. In *CONTEXT*, pages 29–40.

[Belohlavek, 1999] Belohlavek, R. (1999). Fuzzy Galois connections. *Mathematical Logic Quarterly*, 45(4):497–504.

[Belohlavek et al., 2012] Belohlavek, R., Cordero, P., Enciso, M., Mora, A., and Vychodil, V. (2012). An efficient reasoning method for dependencies over similarity and ordinal data. *LNCS*, vol. 7647, pages 408–419. Springer Berlin Heidelberg.

[Burusco and Fuentes 1994] Burusco, A., Fuentes-González, R. (1994). The Study of the L-fuzzy Concept Lattice. *Mathware and Soft Computing*, I (3), 209–218 (1994)

[Burusco and Fuentes 1998] Burusco, A., Fuentes-González, R. (1994). Construction of the L-fuzzy Concept Lattice. Fuzzy Sets and Systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 97 (1), 109–114 (1998)

[du Boucher-Ryan and Bridge, 2006] du Boucher-Ryan, P. and Bridge, D. (2006). Collaborative recommending using formal concept analysis. *Knowledge-Based Systems*, 19:309–315.

[Ganter and Wille, 1999] Ganter, B. and Wille, R. (1999). *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations*. Springer Verlag.

[Hájek, 2001] Hájek, P. (2001). On very true. *Fuzzy Sets and Systems*, 124(3):329–333.

[Leiva et al., 2012] Leiva, J. L., Guevara, A., and Rossi, C. (2012). Sistemas de recomendación para realidad aumentada en un sistema integral de gestión de destinos. *Revista de Análisis turístico*, 14:69–81.

[Lymberopoulos et al., 2011] Lymberopoulos, D., Zhao, P., König, A. C., Berberich, K., and Liu, J. (2011). Location-aware click prediction in mobile local search. In *CIKM*, pages 413–422.

[Wille, 1982] Wille, R. (1982). Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. *Ordered Sets*, pages 445–470.

[Zenebe and Norcio, 2009] Zenebe, A. and Norcio, A. F. (2009). Representation, similarity measures and aggregation methods using fuzzy sets for content-based recommender systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:76–94.

A survey of general operators useful for fuzzy FCA

Mª Eugenia Cornejo[1], **Jesús Medina**[2], **Eloisa Ramírez-Poussa**[1]

[1]*Department of Statistic and O.R., University of Cádiz. Spain*, {mariaeugenia.cornejo,eloisa.ramirez}@uca.es
[2]*Department of Mathematics, University of Cádiz. Spain*, jesus.medina@uca.es

Abstract

Adjoint triples are useful basic operators used in several domains. Specifically they play an important role in formal concept analysis, providing a general framework: multi-adjoint concept lattices. This paper presents other general operators which can be considered to define concept-forming operators in the fuzzy concept lattice framework.

Keywords: Adjoint triples, implication triples, unorms, uninorms.

1 INTRODUCTION

Many domains in mathematics and information sciences are formed by different types of algebraic structures such as many-valued logics, generalized measure and integral theory, quantum logics and quantum computing, etc.

T-norms [13, 23, 25], which are defined in the unit interval $[0,1]$, are the operators used most often in applicative examples. However, these operators are very restrictive and several applications need more general structures.

Adjoint triples are a general structure which has been developed to increase the flexibility of the framework, since conjunctors are neither required to be commutative nor associative.

Other important generalizations of t-norms and residuated implications exist, such as implication triples [18], sup-preserving aggregations [4], unorms [14], uninorms [26, 11] and extended-order algebras [12]. These operators are defined following the same motivation of adjoint triples in order to reduce the mathematical requirements of the basic operators used for computation in the considered framework.

This paper recalls the settings in which these operators are defined, shows a comparison among them and investigates when the general considered operators have adjoint implications and so, they can be used to define concept-forming operators as usual.

2 ADJOINT TRIPLES

Adjoint triples arise as a generalization of a t-norm and its residuated implication. Since the general conjunctor assumed in an adjoint triple need not be commutative, we have two different ways of generalizing the well-known adjoint property between a t-norm and its residuated implication, depending on which argument is fixed.

Definition 1. *Let* $(P_1,\leq_1)$, $(P_2,\leq_2)$, $(P_3,\leq_3)$ *be posets and* $\&\colon P_1\times P_2\to P_3$, $\swarrow\colon P_3\times P_2\to P_1$, $\nwarrow\colon P_3\times P_1\to P_2$ *be mappings, then* $(\&,\swarrow,\nwarrow)$ *is an* adjoint triple *with respect to* P_1,P_2,P_3 *if* $\&$, $\swarrow$,$\nwarrow$ *satisfy the* adjoint property*:*

$$x\leq_1 z\swarrow y \text{ iff } x\&y\leq_3 z \text{ iff } y\leq_2 z\nwarrow x$$

where $x\in P_1$, $y\in P_2$ *and* $z\in P_3$.

Note that this property generalizes the residuation condition [**?**] for no commutative operators.

Straightforward consequences can be obtained from the adjoint property, such as the monotonicity properties.

Proposition 1. *If* $(\&,\swarrow,\nwarrow)$ *is an* adjoint triple*, then*

1. $\&$ *is order-preserving on both arguments, i.e. if* $x_1,x_2,x\in P_1$, $y_1,y_2,y\in P_2$ *and* $x_1\leq_1 x_2$, $y_1\leq_2 y_2$, *then* $(x_1\&y)\leq_3(x_2\&y)$ *and* $(x\&y_1)\leq_3(x\&y_2)$*; and*
2. $\swarrow$, $\nwarrow$ *are order-preserving on the first argument and order-reversing on the second argument, i.e., if* $x_1,x_2,x\in P_1$, $y_1,y_2,y\in P_2$, $z_1,z_2,z\in P_3$ *and* $x_1\leq_1 x_2$, $y_1\leq_2 y_2$, $z_1\leq_3 z_2$, *then* $(z_1\swarrow y)\leq_1(z_2\swarrow y)$, $(z\swarrow y_2)\leq_1(z\swarrow y_1)$, $(z_1\nwarrow x)\leq_2(z_2\nwarrow x)$ *and* $(z\nwarrow x_2)\leq_2(z\nwarrow x_1)$*;*

Moreover, the adjoint implications are unique.

Proposition 2. *Given a conjunctor $\&$, its residuated implications $\swarrow$ and $\nwarrow$ are unique.*

Next, several useful inequalities are presented.

Lemma 1. *[7] Given the posets $(P_1,\leq_1)$, $(P_2,\leq_2)$, $(P_3,\leq_3)$ and an adjoint triple $(\&,\swarrow,\nwarrow)$ with respect to P_1,P_2,P_3, the following inequalities hold, for all $x\in P_1, y\in P_2, z\in P_3$:*

1. $(z\swarrow y)\,\&\,y\leq_3 z$.
2. $y\leq_2 z\nwarrow(z\swarrow y)$.
3. $x\leq_1 (x\,\&\,y)\swarrow y$.
4. $x\,\&\,(z\nwarrow x)\leq_3 z$.
5. $x\leq_1 z\swarrow(z\nwarrow x)$.
6. $y\leq_2 (x\,\&\,y)\nwarrow x$.

Example of adjoint triples are the Gödel, product and Łukasiewicz t-norms together with their residuated implications. Note that, the Gödel, product and Łukasiewicz t-norms are commutative, then the residuated implications satisfy that $\swarrow^{\mathrm{G}}=\nwarrow_{\mathrm{G}}$, $\swarrow^{\mathrm{P}}=\nwarrow_{\mathrm{P}}$ and $\swarrow^{\mathrm{L}}=\nwarrow_{\mathrm{L}}$. These adjoint triples are defined on $[0,1]$ as:

$$\&_{\mathrm{G}}(x,y)=\min(x,y) \qquad z\nwarrow_{\mathrm{G}} x=\begin{cases}1 & \text{if } x\leq z\\ z & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\&_{\mathrm{P}}(x,y)=x\cdot y \qquad z\nwarrow_{\mathrm{P}} x=\min(1,z/x)$$

$$\&_{\mathrm{L}}(x,y)=\max(0,x+y-1) \qquad z\nwarrow_{\mathrm{L}} x=\min(1,1-x+z)$$

Example 1. *Given $m\in\mathbb{N}$, the set $[0,1]_m$ is a regular partition of $[0,1]$ in m pieces, for example $[0,1]_2=\{0,0.5,1\}$ divide the unit interval in two pieces.*

A discretization of the product t-norm is the operator $\&^*_{\mathrm{P}}\colon [0,1]_{20}\times[0,1]_8\to[0,1]_{100}$ defined, for each $x\in[0,1]_{20}$ and $y\in[0,1]_8$ as:

$$x\,\&^*_{\mathrm{P}}\,y=\frac{\lceil 100\cdot x\cdot y\rceil}{100}$$

which residuated implications $\swarrow^*_{\mathrm{P}}\colon [0,1]_{100}\times[0,1]_8\to[0,1]_{20}$, $\nwarrow^*_{\mathrm{P}}\colon [0,1]_{100}\times[0,1]_{20}\to[0,1]_8$ are defined as:

$$b\swarrow^*_{\mathrm{P}} a = \frac{\lfloor 20\cdot\min\{1,b/a\}\rfloor}{20}$$

$$b\nwarrow^*_{\mathrm{P}} c = \frac{\lfloor 8\cdot\min\{1,b/c\}\rfloor}{8}$$

Hence, the triple $(\&^*_{\mathrm{P}},\swarrow^*_{\mathrm{P}},\nwarrow^*_{\mathrm{P}})$ is an adjoint triple and the operator $\&^*_{\mathrm{P}}$ is neither commutative nor associative. Similar adjoint triples can be obtained from the Gödel and Łukasiewicz t-norms.

3 IMPLICATION TRIPLES

Implication triples and adjointness algebras were introduced in [18] and a lot of properties were studied in [1, 22] moreover, an extension, the logic of tied implications, was presented in [19, 20, 21].

Definition 2. *Let $(L,\leq_L)$ $(P,\leq_P)$ be two posets with a top element $\top_P$ in $(P,\leq_P)$. An* adjointness algebra *is an 8-tuple $(L,\leq_L,P,\leq_P,\top_P,A,K,H)$, satisfying the following four conditions:*

1. *The operation $A\colon P\times L\to L$ is antitone in the left argument and isotone in the right argument, and it has $\top_P$ as a left identity element, that is $A(\top_P,\gamma)=\gamma$, for all $\gamma\in L$. We call A an* implication *on (L,P).*
2. *The operation $K\colon P\times L\to L$ is isotone in each argument and has $\top_P$ as a left identity element, that is $K(\top_P,\beta)=\beta$, for all $\beta\in L$. We call K a* conjunction *on (L,P).*
3. *The operation $H\colon L\times L\to P$ is antitone in the left argument and isotone in the right argument, and it satisfies, for all $\beta,\gamma\in L$, that*

   $$H(\beta,\gamma)=\top_P \quad \textit{if and only if} \quad \beta\leq_L\gamma$$

   We call H a forcing-implication *on L.*
4. *The three operations A, K and H, are mutually related by the following condition, for all $\alpha\in P$ and $\beta,\gamma\in L$:*

   $$\beta\leq_L A(\alpha,\gamma) \quad \textit{iff} \quad K(\alpha,\beta)\leq_L\gamma \quad \textit{iff} \quad \alpha\leq_P H(\beta,\gamma)$$

   which is called the adjointness condition.

We call the ordered triple (A,K,H) an implication triple *on (L,P).*

In [7] several properties of adjoint triples were proven in order to relate adjoint triples to implication triples. From now on, posets $(P_1,\leq_1)$, $(P_2,\leq_2)$ and $(P_3,\leq_3)$, and the adjoint triple $(\&,\swarrow,\nwarrow)$ will be fixed. Moreover, we will write, for example, $P_1=P_2$ instead of $(P_1,\leq_1)=(P_2,\leq_2)$ and $P_1\subseteq P_2$ instead of $(P_1,\leq_1)\subseteq(P_2,\leq_2)$.

In order to relate adjoint triples to implication triples, we must consider that the antecedent and consequent elements are evaluated in the right and left arguments of the implications of the adjoint triples, respectively, and that this evaluation is the opposite for the implications in the implication triples. Therefore, we define $\swarrow^{\mathrm{op}}\colon P_2\times P_3\to P_1$, $\nwarrow_{\mathrm{op}}\colon P_1\times P_3\to P_2$, as $y\swarrow^{\mathrm{op}} z=z\swarrow y$ and $x\nwarrow_{\mathrm{op}} z=z\nwarrow x$, for all $x\in P_1$, $y\in P_2$ and $z\in P_3$.

Proposition 3 ([7])**.** *If $P_2\subseteq P_3$ and P_1 has a maximum $\top_1$, the following equivalence holds.*

$\swarrow^{\mathrm{op}}$ *is a forcing-implication iff* $\top_1\,\&\,y=y$, *for all* $y\in P_2$

Proposition 4 ([7])**.** *If $P_1\subseteq P_3$ and P_2 has a maximum $\top_2$, the following equivalence holds.*

$\nwarrow_{\mathrm{op}}$ *is a forcing-implication iff* $x\,\&\,\top_2=x$, *for all* $x\in P_1$

Proposition 5 ([7]). *If $P_3 = P_2$ and P_1 has a maximum $\top_1$, then the following equivalence is provided*

$$z \nwarrow \top_1 = z, \text{ for all } z \in P_3 \quad \text{iff} \quad \top_1 \,\&\, y = y, \text{ for all } y \in P_2$$

Proposition 6 ([7]). *If $P_1 = P_3$ and P_2 has a maximum $\top_2$, then the following equivalence is provided*

$$z \swarrow \top_2 = z, \text{ for all } z \in P_3 \quad \text{iff} \quad x \,\&\, \top_2 = x, \text{ for all } x \in P_1$$

As a consequence of the results above, we present the following theorem, introduced in [7] which relates the adjoint implication to implication triples.

Theorem 1 ([7]). *Given an adjoint triple $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ with respect to the posets $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$, $(P_3, \leq_3)$. If $P_2 = P_3$ and P_1 has a maximum $\top_1$ as a left identity element for $\&$, then $(\&, \swarrow^{\mathrm{op}}, \nwarrow_{\mathrm{op}})$ is an implication triple.*

Example 2. *The adjoint triple $(\&_{\mathrm{P}}^*, \swarrow_{\mathrm{P}}^*, \nwarrow_{\mathrm{P}}^*)$ given in Example 1 is not an implication triple. This operator is non-commutative and non-associative at the same time, but it does not satisfy that 1 is a left identity for $\&_{\mathrm{P}}^*$, that is, there exists an element $y \in [0,1]_8$ such that $1 \,\&_{\mathrm{P}}^* y \neq y$. For instance, if $y = 0.625$, then $1 \,\&_{\mathrm{P}}^* 0.625 = 0.63$. In addition, $[0,1]_8 \neq [0,1]_{20}$.*

Therefore, the definition of adjoint triple is more general than implication triple.

4 SUP-PRESERVING AGGREGATION OPERATORS

In [3] an interesting problem in concept lattice theory is solved using an inf-residuum relation equation. These results have been extended in [10]. Specifically, in this last paper the property-oriented concept lattices are considered to solve sup-t-norm and inf-residuum products of relations and, moreover, several results in order to obtain the whole set of solutions of these equations, using fuzzy formal concept analysis, have been presented.

With respect to the flexibility in the definition of the fuzzy relation equations, to the best of our knowledge, one of the more general frameworks is given in [4], in which general operators are considered and an unification of the sup-t-norm and inf-residuum products of relations is given.

Next, we will compare these operators with the adjoint triples and show that the latter are more general and so, the equations introduced in [4] are a particular case of the multi-adjoint relation equations.

Definition 3. *A* sup-preserving aggregation structure *(*aggregation structure, for short*) is a quadruple $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3, \square)$, where $\mathbf{L}_i = (L_i, \preceq_i)$, with $i \in \{1,2,3\}$, are complete lattices and $\square \colon L_1 \times L_2 \to L_3$ is a function which commutes with suprema in both arguments, that is,*

$$\left(\bigvee_{j \in J} a_j\right) \square b = \bigvee_{j \in J} (a_j \square b)$$

$$a \square \left(\bigvee_{j' \in J'} b_j\right) = \bigvee_{j' \in J'} (a \square b_{j'})$$

for all $a, a_j \in L_1$ $(j \in J)$, $b, b_{j'} \in L_2$ $(j' \in J')$.

From the results given in [4] the following theorem is obtained.

Theorem 2 ([4]). *Given an aggregation structure $\square \colon L_1 \times L_2 \to L_3$, there exist two mappings $\square\circ \colon L_3 \times L_2 \to L_1$ and $\circ\square \colon L_1 \times L_3 \to L_1$, satisfying that*

$$a_1 \square a_2 \leq_3 a_3 \quad \text{iff} \quad a_2 \leq_2 a_1 \circ\square a_3 \quad \text{iff} \quad a_1 \leq_1 a_3 \square\circ a_2$$

for all $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$, $a_3 \in L_3$.

This is the adjoint property, hence the following result is obtained.

Corollary 1. *The triple $(\square, \square\circ, \circ\square^d)$, where $a_3 \circ\square^d a_1 = a_1 \circ\square a_3$, for all $a_1 \in L_1$, $a_3 \in L_3$, is an adjoint triple.*

However the inverse is not true, since only posets are needed in the definition of an adjoint triple. Although in multi-adjoint relation equations we need to consider adjoint triples related to two complete lattices $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ and a poset $(P, \leq)$. This last one need not be a complete lattice. Therefore, in the setting of fuzzy formal concept analysis both triples are not equivalent either.

The generality of $(P, \leq)$ is very important since, for instance, it can be a multilattice [5, 6, 15, 17]. For example, an interesting fuzzy relation defined in a multilattice is given in [17]. Furthermore, in order to solve the proposed problem in multi-adjoint logic programming, several adjoint triples are needed, which permits the multi-adjoint relation equations.

5 U-NORMS

Another general operators are the *u-norms* [14]. U-norms have been presented as a generalization of the following three functions: arithmetic mean, continuous Archimedean t-norm and "fuzzy and" with $\gamma < 1$.

Definition 4. *A* u-norm *is a function $U \colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, such that $U(0,0) = 0$, $U(1,1) = 1$, and U is strictly increasing on the set $D = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid 0 < U(x,y)\}$.*

Clearly, the Gödel t-norm is not a u-norm and so, the conjunctor of an adjoint triple could not be a u-norm. On the other hand, an arbitrary u-norm may not form an adjoint triple:

Example 3. *The weighted power mean $M_{w_1,w_2,r}$ with $w_1, w_2 \in [0,1]$, $w_1 + w_2 = 1$ and $0 < r < \infty$ is defined as*

$$M_{w_1,w_2,r}(x,y) = \begin{cases} (w_1 x^r + w_2 y^r)^{1/r} & \text{if} \quad r \neq 0 \\ x^{w_1} y^{w_2} & \text{if} \quad r = 0 \end{cases}$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$. This operator is a u-norm [14]. If we consider $w_1 = w_2 = 0.5$ and $r = 1$, then we have that

$$M_{0.5,0.5,1}(x,y) = 0.5x + 0.5y, \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}$$

and this u-norm has not got adjoint implications, since the conjunctor of an adjoint triple satisfies that $x \,\&\, \bot = \bot$ and, in this case, $M_{0.5,0.5,1}(x,0) = \frac{x}{2} \neq 0$, for all $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Therefore, $M_{0.5,0.5,1}(x,y)$ cannot be in an adjoint triple.

However, in order to solve the fuzzy relation equations with u-norms introduced in [14], the authors need to consider continuous u-norms. This assumption provides that the u-norm has two adjoint implications [16], which straightforwardly shows that the considered u-norms are a particular case of a conjunctor in an adjoint triple. As a consequence, the setting given in [14] is a particular case of the multi-adjoint relation equations as well.

6 UNINORMS

Uninorms are a generalisation of t-norms and t-conorms [26]. These operators are characterized by having a neutral element which is not necessarily equal to 0 (as for t-norms) or 1 (as for t-conorms).

Definition 5. *A uninorm on $([0,1], \leq)$ is a commutative, associative, increasing mapping $U\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ for which there exists an element $e \in [0,1]$ such that $U(e,x) = x$, for all $x \in [0,1]$. The element e is called the neutral element of U.*

Given a uninorm U on the unit interval, there exists a t-norm T_U, a t-conorm S_U on $([0,1], \leq)$ and two increasing bijective mappings $\phi_e\colon [0,e] \to [0,1]$ and $\psi_e\colon [e,1] \to [0,1]$ with increasing inverse, such that [11]

1. For all $x, y \in [0,e]$, $U(x,y) = \phi_e^{-1}(T_U(\phi_e(x), \phi_e(y)))$
2. For all $x, y \in [e,1]$, $U(x,y) = \psi_e^{-1}(S_U(\psi_e(x), \psi_e(y)))$

The last property shows that the behavior of a uninorm is similar to a t-norm for elements less or equal than e and as a t-conorm for elements greater or equal than e. Therefore, a uninorm might not necessarily be the conjunctor of an adjoint triple, which will be shown in the following.

Note that, if $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ is an adjoint triple then it satisfies the adjoint property. This property can be adequately interpreted in terms of multiple-valued inference as asserting both that the truth-value of $z \swarrow y$ is the maximal x satisfying $x \,\&\, z \leq y$.

In the following, we will consider a uninorm on $([0,1], \leq)$ which does not satisfy this last property.

Example 4. *Given $e \in]0,1[$, the operator U_e on $([0,1], \leq)$ defined, for each $x, y \in [0,1]$, by*

$$U_e(x,y) = \begin{cases} max(x,y) & \text{if} \quad x \geq e \quad \text{and} \quad y \geq e \\ min(x,y) & \text{if} \quad else \end{cases}$$

is a uninorm. If we assume that U_e is the conjunctor of an adjoint triple, then its adjoint implication $\swarrow$ must satisfy that:

$$z \swarrow y = max\{x \in [0,1] \mid U_e(x,y) \leq z\}$$

If we consider $e = 0.5$, $y = 0.7$ and $z = 0.6$, it can be proven that the maximum does not exist.

Therefore, in general, a uninorm may not have adjoint implications and so, be part of an adjoint triple.

A particular case of uninorms, widely studied and used [2, 8], are the left-continuous uninorms. As these operators have adjoint implications, the left-continuous uninorms are a particular case of adjoint conjunctors. For example, the conjunctor of the adjoint triple defined in Example 1 is not a left-continuous uninorm since $\&_P^*$ is neither commutative nor associative.

7 EXTENDED-ORDER ALGEBRAS

In [9] simple implications are considered in order to introduce different algebraic structures.

This section only recalls several algebraic structures given in [12] and compares the considered operators with the conjunctor of an adjoint triple.

Definition 6. *[12] A w-eo algebra is a triple $(P, \to, \top)$ where P is a non-empty set, $\to\colon P \times P \to P$ is a binary operation and $\top$ a fixed element of P, satisfying for all $a, b, c \in P$ the following conditions*[1]

(o_1) $a \to \top = \top$ (upper bound condition)

(o_2) $a \to a = \top$ (reflexivity condition)

(o_3) $a \to b = \top$ and $b \to a = \top$ then $a = b$ (antisymmetry condition)

(o_4) $a \to b = \top$ and $b \to c = \top$ then $a \to c = \top$ (weak transitivity condition)

Given a w-eo algebra $(P, \to, \top)$, the relation $\leq$ determined by the operation $\to$, by means of the equivalence

$$a \leq b \text{ if and only if } a \to b = \top, \text{ for all } a, b \in P$$

[1] Note that the names of the properties are those in [12].

is an order relation in P. Moreover, $\top$ is the greatest element in $(P,\leq)$. This order relation was called *the natural order in P*, in [12].

Note that the previous equivalence is the property that satisfies a forcing-implication [18]. Hence, given a poset $(P,\leq)$ with a greatest element $\top$ and $\to\colon P\times P\to P$ is a forcing-implication on P, then $(P,\to,\top)$ is a w-eo algebra.

When the natural order in a w-eo algebra $(P,\to,\top)$ provides a complete lattice, we say that $(P,\to,\top)$ is a complete w-eo algebra $(P,\to,\top)$, in short, a w-ceo algebra. In this case we will write L and $\preceq$ instead of P and $\leq$, respectively.

Definition 7. *Let L be a non-empty set, $\to\colon L\times L\to L$ a binary operation and $\top$ a fixed element of L. The triple $(L,\to,\top)$ is a right-distributive w-ceo algebra, if it is a w-ceo algebra and satisfies the following condition*

(d'_r) *for any $a\in L$, $B\subseteq L$: $a\to\bigwedge B=\bigwedge(a\to B)$*

Next results relate the notions presented above to the implication triples introduced in [18].

Proposition 7. *Let $(L,\preceq)$ be a complete lattice and (A,K,H) an implication triple on (L,L). Then, the triple $(L,H,\top)$ is a right-distributive w-ceo algebra.*

Proposition 8. *Let $(L,\preceq)$ be a complete lattice and (A,K,H) an implication triple on (L,L). If $K(x,\top)=x$, for all $x\in L$, then $(L,A,\top)$ is a right-distributive w-ceo algebra.*

From now on, we will only consider the operation H since less hypotheses need to be assumed. Analogous results for A can be obtained considering the boundary condition noted in Proposition 8.

Corollary 2. *Given a poset $(P,\leq)$ with a top element $\top$ and an implication triple (A,K,H) on (P,P). The triple $(P,H,\top)$ is a w-eo algebra.*

Note that, if $(L,\preceq)$ is a complete lattice and (A,K,H) is an implication triple on (L,L), by Proposition 7, we have that $(L,H,\top)$ is a right-distributive w-ceo algebra. In this environment, the adjoint product $\otimes\colon L\times L\to L$ introduced in [9, 12] and defined as

$$a\otimes x=\bigwedge\{t\in L\mid x\preceq a\to t\}$$

for all $a,x\in L$, is not the operator K given in Definition 2, whenever $\otimes$ or K are not commutative. Therefore, the properties shown in Proposition 4.1 of [9] cannot be related to properties of implication triples presented in [20], in general. Although, these can be related if $\otimes$ or K are commutative.

In [9] is introduced an additional binary operation $\rightsquigarrow\colon L\times L\to L$ satisfying

$$a\preceq b\rightsquigarrow c\quad\text{iff}\quad a\otimes b\preceq c\quad\text{iff}\quad b\preceq a\to c$$

for all $a,b,c\in L$. Then the triple $(\rightsquigarrow,\otimes,\to)$ is not an implication triple on (L,L) since K is not defined in the same way that $\otimes$. Moreover, we cannot identify $\to$ with H because $(\otimes,\to)$ does not satisfy the same adjoint property that (K,H). Moreover, $\to$ cannot be A because A is not a forcing-implicaton.

However, we can define the operation $\otimes'\colon L\times L\to L$ by

$$a\otimes' x=\bigwedge\{t\in L\mid a\preceq x\to t\}$$

for all $a,x\in L$. This operator coincides with the operator K, given in Definition 2, and satisfies the adjointness condition given in the same definition. As a consequence, the triple $(\rightsquigarrow,\otimes',\to)$ is an implication triple on (L,L).

Proposition 9. *Given a complete lattice $(L,\preceq)$ and the mappings $\rightsquigarrow$, $\otimes$ and $\to$ defined above, the triple $(\rightsquigarrow,\otimes,\to)$ is an adjoint triple with respect to L.*

8 CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

General operators have been presented and a comparison among them is given. These operators can be used in the concept-forming operators of fuzzy concept lattices frameworks. Moreover, the properties introduced in different papers can be considered to provide extra properties in formal concept analysis.

In the future more operators and properties will be studied.

Acknowledgements

Partially supported by the Spanish Science Ministry projects TIN2009-14562-C05-03 and TIN2012-39353-C04-04, and by Junta de Andalucía project P09-FQM-5233.

References

[1] A. A. Abdel-Hamid and N. N. Morsi. Associatively tied implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 136(3):291–311, 2003.

[2] I. Aguiló, J. Suñer, and J. Torrens. A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms. *Information Sciences*, 180(20):3992 – 4005, 2010.

[3] R. Bělohlávek. Concept equations. *Journal of Logic and Computation*, 14(3):395–403, 2004.

[4] R. Bělohlávek. Sup-t-norm and inf-residuum are one type of relational product: Unifying framework and consequences. *Fuzzy Sets and Systems*, 197:45–58, 2012.

[5] M. Benado. Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier, II. Théorie des multistructures. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 5(80):308–344, 1955.

[6] P. Cordero, G. Gutiérrez, J. Martínez, and I. P. de Guzmán. A new algebraic tool for automatic theorem provers. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 42(4):369–398, 2004.

[7] M. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez. A comparative study of adjoint triples. *Fuzzy Sets and Systems*, 211:1–14, 2013.

[8] B. De Baets and J. Fodor. Residual operators of uninorms. *Soft Computing*, 3(2):89 – 100, 1999.

[9] M. E. Della Stella and C. Guido. Associativity, commutativity and symmetry in residuated structures. *Springer Science+Business Media*, 30(2):363 – 401, 2013.

[10] J. C. Díaz and J. Medina. Solving systems of fuzzy relation equations by fuzzy property-oriented concepts. *Information Sciences*, 222:405–412, 2013.

[11] J. C. Fodor, R. R. Yager, and A. Rybalov. Structure of uninorms. *Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst.*, 5(4):411–427, Aug. 1997.

[12] C. Guido and P. Toto. Extended-order algebras. *Journal of Applied Logic*, 6(4):609 – 626, 2008.

[13] E. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular norms*. Kluwer academic, 2000.

[14] J.-L. Lin, Y.-K. Wu, and S.-M. Guu. On fuzzy relational equations and the covering problem. *Information Sciences*, 181(14):2951 – 2963, 2011.

[15] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Fuzzy logic programming via multilattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 158:674–688, 2007.

[16] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, A. Valverde, and P. Vojtáš. Towards biresiduated multi-adjoint logic programming. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3040:608–617, 2004.

[17] J. Medina and J. Ruiz-Calviño. Fuzzy formal concept analysis via multilattices: first prospects and results. In *The 9th International Conference on Concept Lattices and Their Applications (CLA 2012)*, pages 69–79, 2012.

[18] N. N. Morsi. Propositional calculus under adjointness. *Fuzzy Sets and Systems*, 132(1):91–106, 2002.

[19] N. N. Morsi and M. S. El-Zekey. Applications of tied implications to approximate reasoning and fuzzy control. In *70 Years of FCE STU*, 2008.

[20] N. N. Morsi, W. Lotfallah, and M. S. El-Zekey. The logic of tied implications, part 1: Properties, applications and representation. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(15):647–669, 2006.

[21] N. N. Morsi, W. Lotfallah, and M. S. El-Zekey. The logic of tied implications, part 2: Syntax, fuzzy sets and systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(17):2030–2057, 2006. Corrigendum in: Fuzzy Sets and Systems 157 (17) (2006) 2416-2417.

[22] N. N. Morsi and E. M. Roshdy. Issues on adjointness in multiple-valued logics. *Information Sciences*, 176:2886–2909, 2005.

[23] H. T. Nguyen and E. Walker. *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall, Boca Ratón, Florida, third edition, 2006.

[24] J. Pócs. Note on generating fuzzy concept lattices via galois connections. *Information Sciences*, 185(1):128 – 136, 2012.

[25] B. Schweizer and A. Sklar. Associative functions and abstract semigroups. *Publ. Math. Debrecen*, 10:69–81, 1963.

[26] R. R. Yager and A. Rybalov. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 80(1):111 – 120, 1996.

Applying multi-adjoint relation equations to fuzzy logic programming

Juan Carlos Díaz-Moreno, **Jesús Medina-Moreno**

Department of Mathematics, University of Cádiz. Spain, {juancarlos.diaz,jesus.medina}@uca.es

Abstract

The abductive reasoning and finding out the confidence factors of the rules in a fuzzy logic program are two important problems in logic programming. This paper studies their solution using fuzzy relation equations, in which the solvability of these equations is given in terms of a particular concept lattice framework.

Keywords: Adjoint triples, fuzzy relation equations, fuzzy logic programming.

1 INTRODUCTION

Multi-adjoint logic programming is a general logical framework which is receiving considerable attention. This framework was originated as a generalisation of diverse non-classical logic programming frameworks whose semantic structure is the multi-adjoint lattice, in which a lattice is considered together with several conjunctors and implications.

On the other hand, fuzzy relation equations, introduced by E. Sanchez [19], are associated with the composition of fuzzy relations and are used to investigate theoretical and applicational aspects of fuzzy set theory [4], e.g. approximate reasoning, time series forecast, decision making, fuzzy control, as an appropriate tool for handling and modeling of non-probabilistic form of uncertainty, etc.

The multi-adjoint relation equations [7] were presented as a generalization of the fuzzy relation equations [17, 19]. This general environment inherits the properties of the multi-adjoint philosophy, consequently, e.g. several conjunctors and residuated implications defined on general carriers as lattice structures can be used, which provide more flexibility in order to relate the variables considered in the system, generalizing the recent framework given in [1, 2].

These equations have been related to multi-adjoint property-oriented concept lattices in order to attain results that ensure the existence of solutions in these systems [7].

One important problem in fuzzy logic programming is to find out the confidence factors of the rules in a program. If we obtain several observations of the variables involved in the program, a system can be built in which the unknown variables are the weights of the rules. We will show that, in the multi-adjoint framework, this system can be interpreted as a multi-adjoint relation equation. Therefore, this problem can be solved using the fuzzy relation equation theory.

Abductive reasoning is another important problem in logic programming, in which two subsets of variables, the observed variables and the hypotheses, are considered and the values of the hypotheses must be computed, in order to explain the detected values of the observed variables. This paper also describes and solves this problem in terms of multi-adjoint relation equation theory.

2 ADJOINT TRIPLES AND M.A. PROPERTY-ORIENTED CONCEPT LATTICES

The basic operators in this environment are the adjoint triples [3], which are formed by three mappings: a possibly non-commutativity conjunctor and two residuated implications, that satisfy the well-known adjoint property.

Definition 1. *Let* $(P_1,\leq_1)$, $(P_2,\leq_2)$, $(P_3,\leq_3)$ *be posets and* $\&\colon P_1\times P_2\to P_3$, $\swarrow\colon P_3\times P_2\to P_1$, $\nwarrow\colon P_3\times P_1\to P_2$ *be mappings, then* $(\&,\swarrow,\nwarrow)$ *is an* adjoint triple *with respect to* P_1,P_2,P_3 *if:*

$$x\leq_1 z\swarrow y \quad \textit{iff} \quad x\,\&\,y\leq_3 z \quad \textit{iff} \quad y\leq_2 z\nwarrow x \qquad (1)$$

where $x\in P_1$, $y\in P_2$ *and* $z\in P_3$.

Equivalence (1) is called *adjoint property*. These operators are a straightforward generalization of t-norms and its residuated implication. Since a t-norm is commutative, in this case both implications coincide. In [14] more general examples of adjoint triples are given.

Example 1. *Let $[0,1]_m$ be a regular partition of $[0,1]$ into m pieces, for example $[0,1]_2 = \{0, 0.5, 1\}$ divides the unit interval into two pieces.*

A discretization of a t-norm $\&\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ is the operator $\&^*\colon [0,1]_n \times [0,1]_m \to [0,1]_k$, where $n,m,k \in \mathbb{N}$, and which is defined, for each $x \in [0,1]_n$ and $y \in [0,1]_m$, as:

$$x \,\&^* y = \frac{\lceil k \cdot (x \,\& y)\rceil}{k}$$

where $\lceil _ \rceil$ is the ceiling function.

For this operator, the corresponding residuated implications $\swarrow^*\colon [0,1]_k \times [0,1]_m \to [0,1]_n$ and $\nwarrow_*\colon [0,1]_k \times [0,1]_n \to [0,1]_m$ are defined as:

$$z \swarrow^* y = \frac{\lfloor n \cdot (z \leftarrow y)\rfloor}{n} \qquad z \nwarrow_* x = \frac{\lfloor m \cdot (z \leftarrow x)\rfloor}{m}$$

where $\lfloor _ \rfloor$ is the floor function and $\leftarrow$ is the residuated implication of the t-norm $\&$.

The triple $(\&^*, \swarrow^*, \nwarrow_*)$ is an adjoint triple, although the operator $\&^*$ could be neither commutative nor associative. □

The basic structure, which allows the existence of several adjoint triples for a given triplet of lattices, is the multi-adjoint property-oriented frame.

Definition 2. *Given two complete lattices $(L_1, \preceq_1)$ and $(L_2, \preceq_2)$, a poset $(P, \leq)$ and adjoint triples with respect to P, L_2, L_1, $(\&_i, \swarrow^i, \nwarrow_i)$, for all $i = 1, \ldots, l$, a* multi-adjoint property-oriented frame *is the tuple $(L_1, L_2, P, \&_1, \ldots, \&_l)$.*

The definition of context in this framework is analogous to the one given in [13].

Definition 3. *Let $(L_1, L_2, P, \&_1, \ldots, \&_l)$ be a multi-adjoint property-oriented frame. A* context *is a tuple (A, B, R, σ), where A and B are non-empty sets (usually interpreted as attributes and objects, respectively), R is a P-fuzzy relation $R\colon A \times B \to P$ and $\sigma\colon B \to \{1, \ldots, l\}$ is a mapping which associates any element in B with some particular adjoint triple in the frame.*

From now on, we will fix a multi-adjoint property-oriented frame and context, $(L_1, L_2, P, \&_1, \ldots, \&_l)$, (A, B, R, σ) and, to improve readability, we will write $\&_b$, $\nwarrow_b$ instead of $\&_{\sigma(b)}$, $\nwarrow_{\sigma(b)}$.

In this environment, the following mappings $^{\uparrow\pi}\colon L_2^B \to L_1^A$ and $^{\downarrow^N}\colon L_1^A \to L_2^B$ are defined, for each $a \in A$, $b \in B$, as

$$\begin{aligned} g^{\uparrow\pi}(a) &= \sup\{R(a,b) \,\&_b\, g(b) \mid b \in B\} \\ f^{\downarrow^N}(b) &= \inf\{f(a) \nwarrow_b R(a,b) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

The pair $(^{\uparrow\pi}, ^{\downarrow^N})$ is an isotone Galois connection [11, 12].

A pair of fuzzy subsets $\langle g, f\rangle$, with $g \in L^B$, $f \in L^A$, such that $g^{\uparrow\pi} = f$ and $f^{\downarrow^N} = g$, will be called *multi-adjoint property-oriented concept*. In that case, g is called the *extent* and f the *intent* of the concept. The set of all these concepts will be denoted by $\mathscr{M}_{\pi N}$ and, together with the ordering $\preceq$ defined by $\langle g_1, f_1\rangle \preceq \langle g_2, f_2\rangle$ iff $g_1 \preceq_2 g_2$ (or equivalently $f_1 \preceq_1 f_2$), forms a complete lattice [11, 12], $(\mathscr{M}_{\pi N}, \preceq)$, which is called *multi-adjoint property-oriented concept lattice*.

3 MULTI-ADJOINT LOGIC PROGRAMMING

In this general fuzzy logic programming, a language $\mathscr{L}$ contains propositional variables, constants, and a set of logical connectives. The usual connectives are adjoint triples and a number of aggregators.

The language $\mathscr{L}$ is interpreted on a *(biresiduated) multi-adjoint lattice*,[1] $\langle L_1, L_2, L_3, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \ldots, \&_n, \swarrow^n, \nwarrow_n\rangle$, where $(L_1, \preceq_1)$,$(L_2, \preceq_2)$, $(L_3, \preceq_3)$ are complete lattices and $(\&_i, \swarrow^i, \nwarrow_i)$ is a collection of adjoint triples, in which each $\&_i$ is a conjunctor intended to provide a *modus ponens*-rule with respect to $\swarrow^i$ and $\nwarrow_i$.

A *rule* is a formula $A \swarrow^i \mathscr{B}$ or $A \nwarrow_i \mathscr{B}$, where A is a propositional symbol (usually called the *head*) and $\mathscr{B}$ (which is called the *body*) is a formula built from propositional symbols $B_1, \ldots, B_n$ ($n \geq 0$), truth values of L and conjunctions, disjunctions and aggregations.

A *multi-adjoint logic program* is a set of pairs $\langle \mathscr{R}, \alpha\rangle$, where $\mathscr{R}$ is a rule and α is a value, which may express the confidence which the user of the system has in the truth of the rule $\mathscr{R}$.

Example 2. *The following example presents a multi-adjoint program, which may represent the behaviour of a motor. The set of variables (propositional symbols) is*

$$\Pi \;=\; \{\texttt{rm}, \texttt{nb}, \texttt{oh}, \texttt{hfc}, \texttt{lo}, \texttt{lw}\}$$

representing to `rich_mixture`, `noisy_behaviour`, `overheating`, `high_fuel_consumption`, `low_oil`, `low_water`, *respectively.*

The carrier for the truth values of the propositional symbols will be the regular partition of the unit interval in 10 pieces, $[0,1]_{10}$. To express the confidence which the user of the system has in the truth of the rules, we assume the regular partition $[0,1]_4 = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$. These values mean that a rule can be erased, bad, acceptable, well *or* excellent. *Therefore, let us consider the multi-adjoint lattice*

$$\langle [0,1]_{10}, [0,1]_4, [0,1]_{10}, \&^*_{\mathrm{G}}, \swarrow^*_{\mathrm{G}}, \nwarrow^*_{\mathrm{G}}, \&^*_{\mathrm{P}}, \swarrow^*_{\mathrm{P}}, \nwarrow^*_{\mathrm{P}}, \wedge_{\mathrm{L}}\rangle$$

[1] Note that a multi-adjoint lattice is a particular case of a multi-adjoint property-oriented frame.

where $(\&_G^*, \swarrow_G^*, \nwarrow_G^*)$ *and* $(\&_P^*, \swarrow_P^*, \nwarrow_P^*)$ *are discretization of the Gödel and product conjunctors, given in Example 1,* $\&_G^*, \&_P^* \colon [0,1]_{10} \times [0,1]_4 \to [0,1]_{10}$. *Moreover, the Łukasiewicz conjunctor* $\wedge_L \colon [0,1]_{10} \times [0,1]_{10} \to [0,1]_{10}$ *will be used in the program.*

The following set of multi-adjoint rules form a multi-adjoint program, which may represent the behaviour of a motor.

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathtt{hfc} & \nwarrow_G^* & \mathtt{rm} \wedge_L \mathtt{lo}, 0.75 \rangle \\ \langle \mathtt{oh} & \nwarrow_G^* & \mathtt{lo}, 0.5 \rangle \\ \langle \mathtt{nb} & \nwarrow_P^* & \mathtt{rm}, 0.75 \rangle \\ \langle \mathtt{oh} & \nwarrow_P^* & \mathtt{lw}, 1 \rangle \\ \langle \mathtt{nb} & \nwarrow_G^* & \mathtt{lo}, 1 \rangle \end{array}$$

The usual procedure is to measure the levels of "oil", "water" and "mixture" of a specific motor, after that the values for `low_oil`, `low_water` *and* `rich_mixture` *are obtained, which are represented in the program as:*

$$\langle \mathtt{lo}, 0.2 \rangle \quad \langle \mathtt{lw}, 0.2 \rangle \quad \langle \mathtt{rm}, 0.5 \rangle$$

Finally, the values for the rest of variables (propositional symbols) are computed [16]. For instance, in order to attain the value for $\mathtt{overheating}(o,w)$, *for a level of oil,* o, *and water,* w, *the rules* $\langle \mathtt{oh} \nwarrow_G^* \mathtt{lo}, \vartheta_1 \rangle$ *and* $\langle \mathtt{oh} \nwarrow_P^* \mathtt{lw}, \vartheta_2 \rangle$ *are considered and its value is obtained as:*

$$\mathtt{oh}(o,w) = (\mathtt{lo}(o) \,\&_G^*\, \vartheta_1) \vee (\mathtt{lw}(w) \,\&_P^*\, \vartheta_2) \qquad (2)$$

Now, from another point of view, the problem could be to recompute the weights of the rules from experimental instances of the variables, that is, the values of `overheating`, `noisy_behaviour` *and* `high_fuel_consumption` *are known for particular measures of* `low_oil`, `low_water` *and* `rich_mixture`.

Specifically, given the levels of oil, $o_1, \ldots, o_n$, *the levels of water,* $w_1, \ldots, w_n$, *and the measures of mixture,* $r_1, \ldots, r_n$, *we may experimentally know the values of the variables:* $\mathtt{nb}(r_i, o_i)$, $\mathtt{hfc}(r_i, o_i)$ *and* $\mathtt{oh}(o_i, w_i)$, *for all* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Considering Equation 2, the unknown elements could be ϑ_1 *and* ϑ_2 *instead of* $\mathtt{oh}(o,w)$. *Therefore, the problem now is to look for the values of* ϑ_1 *and* ϑ_2, *which solve the following system obtained after assuming the experimental data for the propositional symbols,* $ov_1, o_1, w_1, \ldots, ov_n, o_n, w_n$.

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{oh}(ov_1) & = & (\mathtt{lo}(o_1) \,\&_G^*\, \vartheta_1) \vee (\mathtt{lw}(w_1) \,\&_P^*\, \vartheta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \mathtt{oh}(ov_n) & = & (\mathtt{lo}(o_n) \,\&_G^*\, \vartheta_1) \vee (\mathtt{lw}(w_n) \,\&_P^*\, \vartheta_2) \end{array}$$

This system can be interpreted as a system in which several conjunctors, $\&_G^*$ *and* $\&_P^*$, *are assumed. Note that these conjunctors are neither commutative nor associative and are defined on general lattices, as the multi-adjoint framework permits.*

The following section shows that the system above is really a multi-adjoint relation equation.

4 COMPUTING THE WEIGHTS OF THE RULES OF M.A.L. PROGRAMS

First of all, this section recalls the multi-adjoint relation equations, which follows the philosophy of multi-adjoint framework. These equations are a generalization of the fuzzy relation equations which provide a more flexible environment to solve problems associated with approximate reasoning, time series forecast, decision making, fuzzy control, etc.

The operator used in order to obtain the systems will be the generalization of the sup-$*$-composition, introduced in [20], which was used in [18]. From now on, a multi-adjoint property-oriented frame $(L_1, L_2, P, \&_1, \ldots, \&_l)$ will be fixed as the algebraic structure in which the definitions and results will be given.

Given the universes U, V and W, the fuzzy relations $K \colon W \times U \to P$, and $D \colon W \times V \to L_1$, an unknown fuzzy relation $R \colon U \times V \to L_2$, and a mapping that relates each element in U to one adjoint triple, $\sigma \colon U \to \{1, \ldots, l\}$, we have that a *multi-adjoint relation equation with* sup-&-*composition* is the equation

$$K \odot_\sigma R = D \qquad (3)$$

that is to say,

$$\bigvee_{u \in U} (K(w,u) \,\&_u\, R(u,v)) = D(w,v), \quad w \in W, v \in V$$

where $\&_u$ represents the adjoint conjunctor associated with u by σ, that is, if $\sigma(u) = s$, for $s \in \{1, \ldots, l\}$, then $\&_u$ is exactly $\&_s$.

Note that $\sigma \colon U \to \{1, \ldots, l\}$ is an interesting mapping, which plays a similar role as the one given in a multi-adjoint context. For instance, this map provides a partition of U in preference sets.

Equation 3 can be rewritten as different systems, one for each $v \in V$, with one equation for each $w \in W$:

$$\bigvee_{u \in U} (K(w,u) \,\&_u\, R(u,v)) = D(w,v), \quad w \in W \qquad (4)$$

Consequently, if we solve System (4), we attain a column of R (i.e. the elements $R(u,v)$, with $u \in U$). Therefore, solving one system for each $v \in V$, the unknown relation R is obtained.

Thus, instead of studying the complete Equation 3 we will consider System (4).

Now, the system in Example 2 will be written as a multi-adjoint relation equation, in which the weights associated with the rules are unknown.

Example 3. *Assuming Example 2, the measures of particular cases of the behaviour of the motor will be written as: h_i, n_i, ov_i, r_i, o_i, w_i, for* hfc, nb, oh, rm, lo *and* lw*, respectively, in each case i, with $i \in \{1,2,3\}$.*

For instance, the next system associated with overheating *is obtained from the computation provided in Example 2.*

$$\begin{aligned}
\mathtt{oh}(ov_1) &= (\mathtt{lo}(o_1) \,\&_{\mathrm{G}}^{*}\, \vartheta_{\mathtt{lo}}^{\mathtt{oh}}) \vee (\mathtt{lw}(w_1) \,\&_{\mathrm{P}}^{*}\, \vartheta_{\mathtt{lw}}^{\mathtt{oh}}) \\
\mathtt{oh}(ov_2) &= (\mathtt{lo}(o_2) \,\&_{\mathrm{G}}^{*}\, \vartheta_{\mathtt{lo}}^{\mathtt{oh}}) \vee (\mathtt{lw}(w_2) \,\&_{\mathrm{P}}^{*}\, \vartheta_{\mathtt{lw}}^{\mathtt{oh}}) \\
\mathtt{oh}(ov_3) &= (\mathtt{lo}(o_3) \,\&_{\mathrm{G}}^{*}\, \vartheta_{\mathtt{lo}}^{\mathtt{oh}}) \vee (\mathtt{lw}(w_3) \,\&_{\mathrm{P}}^{*}\, \vartheta_{\mathtt{lw}}^{\mathtt{oh}})
\end{aligned}$$

where $\vartheta_{\mathtt{lo}}^{\mathtt{oh}}$ and $\vartheta_{\mathtt{lw}}^{\mathtt{oh}}$ are the weights associated with the rules with head oh*. Similar systems can be obtained for* high_fuel_consumption *and* noisy_behaviour*.*

Assuming the multi-adjoint frame $\langle [0,1]_{10}, [0,1]_4, [0,1]_{10}, \&_{\mathrm{G}}^{*}, \&_{\mathrm{P}}^{*} \rangle$ these systems are particular systems of multi-adjoint relation equations. The corresponding environment is formed by the sets $U = \{\mathtt{rm}, \mathtt{lo}, \mathtt{lw}, \mathtt{rm} \wedge_{\mathrm{L}} \mathtt{lo}\}$, $V = \{\mathtt{hfc}, \mathtt{nb}, \mathtt{oh}\}$, $W = \{1,2,3\}$; the mapping σ that relates the elements lo*, $\mathtt{rm} \wedge_{\mathrm{L}} \mathtt{lo}$ to the Gödel triple, and* rm*,* lw *to the product triple; the relation $K\colon W \times U \to P$, defined as the values given by the propositional symbols in U on the experimental data, for instance, if $u =$* lo*, then $K(1,\mathtt{lo}) = \mathtt{lo}(o_1)$, $K(2,\mathtt{lo}) = \mathtt{lo}(o_2)$, $K(3,\mathtt{lo}) = \mathtt{lo}(o_3)$; and the relation $D\colon W \times V \to L_1$, defined analogously, for instance, if $v =$* rm*, then $D(1,\mathtt{rm}) = \mathtt{rm}(r_1)$, $D(2,\mathtt{rm}) = \mathtt{rm}(r_2)$, $D(3,\mathtt{rm}) = \mathtt{rm}(r_3)$.*

Finally, the unknown fuzzy relation $R\colon U \times V \to L_2$ is formed by the weights of the rules in the program.

Properties about the solvability of System (4) have been studied using fuzzy formal concept analysis in several papers [7, 8, 6, 5].

Given the environment needed to define System (4) and *its associated multi-adjoint property-oriented context* (W,U,K,σ) , the concept lattice associated with this context will be called $\mathscr{M}_{\Pi N}(K)$.

As a consequence of this relation, the following result holds [7].

Theorem 1. *[7] Let $v \in V$ and the fuzzy subset $f_v \in L_1^W$, defined as $f_v(w) = D(w,v)$, for all $w \in W$. System (4) can be solved if and only if $\langle f_v^{\downarrow N}, f_v \rangle$ is a concept of $\mathscr{M}_{\Pi N}(K)$. In this case, $g \in L_2^U$ is a solution of System (4) if and only if $g^{\uparrow \Pi} = f_v$ and $f_v^{\downarrow N}$ is the greatest solution.*

The next example solves the problem to obtain the weights associated with the rules from particular observed data for the propositional symbols of the previous example.

Example 4. *To make it easier to understand the method we only solve the system proposed in Example 3, in which only the weights of the rules associated with* oh *are computed using three experimental situations. Moreover, since rules with body* rm *and $\mathtt{rm} \wedge_{\mathrm{L}} \mathtt{lo}$ do not exist in the program, the weights for those hypothetical rules are 0, then the terms $\mathtt{rm}(r_i) \,\&_{\mathrm{G}}\, 0$ and $(\mathtt{rm}(r_i) \wedge_{\mathrm{L}} \mathtt{lo}(o_i)) \,\&_{\mathrm{P}}\, 0$, that are equal to 0, do not appear.*

For example, the experimental data could be:

$$\begin{array}{lll}
\mathtt{oh}(ov_1) = 0.3 & \mathtt{oh}(ov_2) = 0.7 & \mathtt{oh}(ov_3) = 0.4 \\
\mathtt{lo}(o_1) = 0.3 & \mathtt{lo}(o_2) = 0.6 & \mathtt{lo}(o_3) = 0.5 \\
\mathtt{lw}(w_1) = 0.3 & \mathtt{lw}(w_2) = 0.9 & \mathtt{lw}(w_3) = 0.5
\end{array}$$

which will be used to solve the system given in Example 3.

Therefore, the multi-adjoint property-oriented context is (W,U,K,σ), where the mapping σ associates the propositional symbol lo *with the Gödel triple and* lw *with the product triple, and the relation $K\colon W \times U \to [0,1]_{10}$ is defined in Table 1.*

Table 1: Relation K.

	lo	lw
1	0.3	0.3
2	0.6	0.9
3	0.5	0.5

Hence, considering the fuzzy subset $f_{\mathtt{oh}}\colon W \to [0,1]_{10}$ associated with oh *is defined by the experimental data as $f_{\mathtt{oh}}(1) = 0.3$, $f_{\mathtt{oh}}(2) = 0.7$, and $f_{\mathtt{oh}}(3) = 0.4$. By Theorem 1, the goal will be to attain a fuzzy subset $g\colon U \to [0,1]_4$, such that $g^{\uparrow \pi} = f_{\mathtt{oh}}$, which can be found if and only if $\langle (f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow N}, f_{\mathtt{oh}} \rangle$ is a multi-adjoint property-oriented concept in the considered context.*

First of all, we compute $(f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow N}$.

$$\begin{aligned}
(f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow N}(\mathtt{lo}) &= \inf\{f_{\mathtt{oh}}(1) \nwarrow_G K(1,\mathtt{lo}), \\
&\qquad f_{\mathtt{oh}}(2) \nwarrow_G K(2,\mathtt{lo}), f_{\mathtt{oh}}(3) \nwarrow_G K(3,\mathtt{lo})\} \\
&= \inf\{0.3 \nwarrow_G 0.3, 0.7 \nwarrow_G 0.6, 0.4 \nwarrow_G 0.5\} \\
&= \inf\{1,1,0.25\} = 0.25 \\
(f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow N}(\mathtt{lw}) &= \inf\{0.3 \nwarrow_P 0.3, 0.7 \nwarrow_P 0.9, 0.4 \nwarrow_P 0.5\} \\
&= \inf\{1, 0.75, 0.75\} = 0.75
\end{aligned}$$

Now, the fuzzy subset $(f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow^N\uparrow_\pi}$ *is obtained.*

$$\begin{aligned}(f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow^N\uparrow_\pi}(1) &= \sup\{K(1,\mathtt{lo})\,\&_G\,(f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow^N}(\mathtt{lo}),\\ &\qquad K(1,\mathtt{lw})\,\&_P\,(f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow^N}(\mathtt{lw})\}\\ &= \sup\{0.3\,\&_G\,0.25, 0.3\,\&_P\,0.75\}\\ &= \sup\{0.3, 0.3\} = 0.3\\ (f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow^N\uparrow_\pi}(2) &= \sup\{0.6\,\&_G\,0.25, 0.9\,\&_P\,0.75\} = 0.7\\ (f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow^N\uparrow_\pi}(3) &= \sup\{0.5\,\&_G\,0.25, 0.5\,\&_P\,0.75\} = 0.4\end{aligned}$$

Thus, $\langle (f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow^N}, f_{\mathtt{oh}}\rangle$ *is a multi-adjoint property-oriented concept and so, the considered system can be solved and the largest solution is* $(f_{\mathtt{oh}})^{\downarrow^N}$*, that is, the largest values to* $\vartheta^{\mathtt{oh}}_{\mathtt{lo}}$*,* $\vartheta^{\mathtt{oh}}_{\mathtt{lw}}$ *are* 0.25*,* 0.75*, respectively.*

If the system does not give us a solution, knowing that it has one, one possibility could be to change properly the conjunctors associated with `lo` *and* `lw` *in order to modify the computation and to obtain a solution. The flexibility of the multi-adjoint framework provides this modification directly since any general conjunctor with its residuated implications can be used.*

Next section introduces a mechanism to solve the well-known abduction problem in multi-adjoint logic programming.

5 SOLVING THE ABDUCTION PROBLEM

The abduction problem [9, 10, 15] considers two subsets of variables, the *observed variables*, *OV*, and the *hypotheses*, *H*, and consists in find out the values of the hypotheses in order to explain the given values of the observed variables.

For instance, in Example 2, we can consider as observed variables the propositional symbols:[2]

$$OV = \{\mathtt{nb}, \mathtt{oh}\}$$

and as hypotheses: $H = \{\mathtt{rm}, \mathtt{lo}, \mathtt{lw}\}$.

Hence, in this example, we know the weights of the rules and the values of their heads for an observation ov_1, nb_i and we need to find out the values of the propositional symbols in the body of each rule.

Therefore, we must solve the system of multi-adjoint relation equations:

$$\begin{aligned}\mathtt{oh}(ov_i) &= (\mathtt{lo}(o_i)\,\&^*_{\mathrm{G}}\,\vartheta^{\mathtt{oh}}_{\mathtt{lo}}) \vee (\mathtt{lw}(w_i)\,\&^*_{\mathrm{P}}\,\vartheta^{\mathtt{oh}}_{\mathtt{lw}}) \vee (\mathtt{rm}(r_i)\,\&^*_{\mathrm{P}}\,0)\\ \mathtt{nb}(nb_i) &= (\mathtt{lo}(o_i)\,\&^*_{\mathrm{G}}\,\vartheta^{\mathtt{nb}}_{\mathtt{lo}}) \vee (\mathtt{lw}(w_i)\,\&^*_{\mathrm{P}}\,0) \vee (\mathtt{rm}(r_i)\,\&^*_{\mathrm{P}}\,\vartheta^{\mathtt{nb}}_{\mathtt{rm}})\end{aligned}$$

[2] In order simplify the system, which will be presented later, the propositional symbol `high_fuel_consumption` is not considered as observed variable.

where the observed values $\mathtt{oh}(ov_i)$, $\mathtt{nb}(nb_i)$ and the weights of the rules are known and the values of $\mathtt{lo}(o_i), \mathtt{lw}(w_i), \mathtt{rm}(r_i)$ are unknown.

Note that for each observation ov_i, nb_i of `noisy_behaviour`, `overheating`, respectively, a system will be obtained.

The previous system cannot be solved as in Section 4, since the unknown values are in the left argument of the conjunctors and these are not commutative.

However, in this case, the theory of the multi-adjoint object-oriented concept lattices [12] can be applied. Specifically, a result similar to Theorem 1 is obtained and can analogously be used to solve the system above.

6 CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

Two important problems in fuzzy logic programming have been considered, find out the weights of the rules of a multi-adjoint logic program and the abduction problem, which have been solved using fuzzy relation equations.

The paper has also shown that the fuzzy concept lattice theory have been used to solve this kind of equations.

In the future, more problems will be considered. Moreover, the comparison of other mechanism to solve the adductive reasoning will be studied.

Acknowledgements

Partially supported by the Spanish Science Ministry projects TIN2009-14562-C05-03 and TIN2012-39353-C04-04, and by Junta de Andalucía project P09-FQM-5233.

References

[1] E. Bartl and R. Belohlavek. Sup-t-norm and inf-residuum are a single type of relational equations. *International Journal of General Systems*, 40(6):599–609, 2011.

[2] R. Bělohlávek. Sup-t-norm and inf-residuum are one type of relational product: Unifying framework and consequences. *Fuzzy Sets and Systems*, 197:45–58, 2012.

[3] M. Cornejo, J. Medina, and E. Ramírez. A comparative study of adjoint triples. *Fuzzy Sets and Systems*, 211:1–14, 2013.

[4] A. Di Nola, E. Sanchez, W. Pedrycz, and S. Sessa. *Fuzzy Relation Equations and Their Applications to Knowledge Engineering*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1989.

[5] J. Díaz, J. Medina, and R. Rodríguez. Solutions of systems of fuzzy relation equations as concepts of a formal context. In *XVI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, ESTYLF 2012*, pages 156–162, 2012.

[6] J. C. Díaz and J. Medina. Concept lattices in fuzzy relation equations. In *The 8th International Conference on Concept Lattices and Their Applications*, pages 75–86, 2011.

[7] J. C. Díaz and J. Medina. Multi-adjoint relation equations. *Information Sciences*, 253:100–109, 2013.

[8] J. C. Díaz and J. Medina. Solving systems of fuzzy relation equations by fuzzy property-oriented concepts. *Information Sciences*, 222:405–412, 2013.

[9] T. Eiter and G. Gottlob. The complexity of logic based abduction. *J. ACM*, 42:3–42, 1995.

[10] A. Kakas, R. Kowalski, and F. Toni. The role of abduction in logic programming. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 5, pages 235–324. Oxford Univ. Press, 1998.

[11] J. Medina. Towards multi-adjoint property-oriented concept lattices. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 6401:159–166, 2010.

[12] J. Medina. Multi-adjoint property-oriented and object-oriented concept lattices. *Information Sciences*, 190:95–106, 2012.

[13] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(2):130–144, 2009.

[14] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, A. Valverde, and P. Vojtáš. Towards biresiduated multi-adjoint logic programming. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 3040:608–617, 2004.

[15] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and P. Vojtáš. A multi-adjoint logic approach to abductive reasoning. In *Logic Programming, ICLP'01*, pages 269–283. Lecture Notes in Computer Science 2237, 2001.

[16] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and P. Vojtáš. Multi-adjoint logic programming with continuous semantics. In *Logic Programming and Non-Monotonic Reasoning, LPNMR'01*, pages 351–364. Lecture Notes in Artificial Intelligence 2173, 2001.

[17] W. Pedrycz. Fuzzy relational equations with generalized connectives and their applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 10(1-3):185 – 201, 1983.

[18] I. Perfilieva. Fuzzy relation equations in semilinear spaces. *Communications in Computer and Information Science*, 80:545–552, 2010.

[19] E. Sanchez. Resolution of composite fuzzy relation equations. *Information and Control*, 30(1):38–48, 1976.

[20] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I, II, III. *Information Sciences*, 8–9:199–257, 301–357, 43–80, 1975.

UNA PROPUESTA PARA MEDIR EL CONSENSO ENTRE AGENTES QUE VALORAN LAS ALTERNATIVAS MEDIANTE EXPRESIONES LINGÜÍSTICAS IMPRECISAS

José Luis García Lapresta[1]

[1]*Grupo de Investigación PRESAD, IMUVA, Departamento de Economía Aplicada, Universidad de Valladolid*,
lapresta@eco.uva.es

Resumen

En este trabajo se considera un escenario en el que los agentes valoran las alternativas mediante expresiones lingüísticas formadas por un término lingüístico de una escala finita prefijada, cuando están seguros de sus opiniones, o por varios términos lingüísticos consecutivos, cuando tienen dudas. En este contexto se introducen medidas de consenso que permiten evaluar el grado de acuerdo entre los agentes, primero sobre cada alternativa, y a continuación de forma global, teniendo en cuenta los grados de consenso obtenidos sobre cada una de las alternativas. En ambos casos se utilizan funciones de agregación y se muestran algunas propiedades de las correspondientes medidas de consenso.

Palabras Clave: Consenso, Imprecisión, Valoraciones lingüísticas, Métricas, Funciones de agregación.

1 INTRODUCCIÓN

Bosch [4] introdujo la noción de medida de consenso en el marco de los órdenes lineales y proporcionó caracterizaciones axiomáticas de varias medidas básicas. García-Lapresta y Pérez-Román [10] extendieron dicha noción al ámbito de los órdenes débiles y estudiaron una clase de medidas de consenso generadas por métricas. Por otra parte, Erdamar *et al.* [6] extendieron la noción de medida de consenso al escenario de las preferencias aprobatorias.

En este trabajo se plantea una forma flexible de medir el consenso entre agentes que muestran sus opiniones sobre las alternativas mediante valoraciones lingüísticas en un ambiente de imprecisión.

Un punto de partida para abordar la imprecisión en la valoración de alternativas es Torra [20], donde se introduce la noción de *hesitant fuzzy set* como una generalización de los conjuntos intuicionistas difusos y los multiconjuntos difusos, dando la oportunidad a los agentes de asignar varios valores de pertenencia a cada alternativa.

En este trabajo se presenta una clase de medidas de consenso dentro del ámbito de las valoraciones lingüísticas, de forma que los agentes pueden expresar de forma imprecisa sus opiniones asignando varios términos lingüísticos a las alternativas. La clase de medidas de consenso introducida está generada por funciones de agregación, primero para asignar un grado de consenso a cada alternativa mediante la agregación de las distancias entre las valoraciones individuales sobre la alternativa en cuestión, y después para generar un grado de consenso global a partir de los grados de consenso sobre las diferentes alternativas. La propuesta que aquí se realiza es una generalización de la incluida en García-Lapresta y Pérez-Román [12], donde los grados de consenso se aplican a la generación de conglomerados.

El enfoque que en este trabajo se ha dado a la imprecisión consiste en una adaptación de los *absolute order of magnitude spaces* introducidos por Travé-Massuyès y Dague [22] y Travé-Massuyès y Piera [23]; más concretamente en las extensiones dadas por Roselló *et al.* [16, 17, 18] (véanse también Agell *et al.* [2] y Falcó *et al.* [7, 8]).

El trabajo está organizado como sigue. En la Sección 2 se introducen algunas nociones necesarias para el desarrollo del resto del trabajo. La Sección 3 contiene la propuesta sobre la medición del consenso y se muestran algunas propiedades. En la Sección 4 se incluye un ejemplo ilustrativo a partir de los datos del experimento de campo de Agell *et al.* [1]. La Sección 5 concluye el trabajo con algunas consideraciones finales.

2 PRELIMINARES

En esta sección se introduce la notación y algunas nociones necesarias relativas a las expresiones lingüísticas, distancias entre expresiones lingüísticas y funciones de agregación.

2.1 EXPRESIONES LINGÜÍSTICAS

A continuación se muestra el marco en el que los agentes muestran sus opiniones sobre las alternativas (en Falcó *et al.* [8] puede encontrarse una información más detallada).

Sean $A = \{1, \ldots, m\}$, con $m \geq 2$, el conjunto de agentes y $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, con $n \geq 2$, el conjunto de alternativas que han de ser evaluadas por los agentes.

Cuando un agente esté seguro de su opinión acerca de una alternativa, asignará un término lingüístico dentro de una escala ordenada $L = \{l_1, \ldots, l_g\}$, con $l_1 < l_2 < \cdots < l_g$. Se supondrá que la escala lingüística está equilibrada y que la distancia entre términos lingüísticos consecutivos es siempre la misma.

Cuando los agentes no estén seguros de qué término lingüístico otorgar a una alternativa, se les permitirá asignar una expresión lingüística formada por varios términos lingüísticos consecutivos. Para ello se considerará la propuesta de Travé-Massuyès y Piera [23].

Se define el conjunto de *expresiones lingüísticas* como

$$\mathbb{L} = \{[l_h, l_k] \mid l_h, l_k \in L,\ 1 \leq h \leq k \leq g\},$$

donde $[l_h, l_k] = \{l_h, l_{h+1}, \ldots, l_k\}$.

Puesto que $[l_h, l_h] = \{l_h\}$, esta expresión lingüística puede reemplazarse por el término lingüístico l_h. Así, $L \subset \mathbb{L}$.

Un ejemplo de conjunto formado por cinco términos lingüísticos $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$ con su significado puede verse en la Tabla 1.

Tabla 1: Significado de los términos lingüísticos.

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
muy mal	mal	aceptable	bien	muy bien

A partir de L pueden formarse expresiones lingüísticas como $[l_1, l_3]$ ('entre muy mal y aceptable'), $[l_4, l_5]$ ('entre bien y muy bien'), etc.

La Fig. 1 contiene la representación gráfica del caso considerado. En el nivel más bajo se encuentran los términos lingüísticos y a medida que se sube en el grafo aumenta la imprecisión.

2.2 DISTANCIAS ENTRE EXPRESIONES LINGÜÍSTICAS

Dado que $\mathbb{L}$ es finito, toda métrica $\delta : \mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ genera de forma natural una métrica normalizada $d : \mathbb{L}^2 \longrightarrow [0,1]$:

$$d(\mathscr{E}, \mathscr{F}) = \frac{\delta(\mathscr{E}, \mathscr{F})}{\Delta},$$

donde $\Delta = \max\{\delta(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \mid \mathscr{E}, \mathscr{F} \in \mathbb{L}\}$.

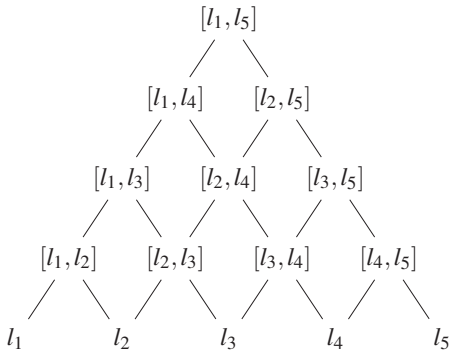


Figura 1: Representación gráfica de $\mathbb{L}$ para $g = 5$.

La *métrica geodésica normalizada*, $d : \mathbb{L}^2 \longrightarrow [0,1]$, se define como

$$d\big([l_h, l_k], [l_{h'}, l_{k'}]\big) = \frac{|h - h'| + |k - k'|}{2 \cdot (g - 1)}. \qquad (1)$$

Conviene señalar que el numerador del cociente anterior corresponde al número mínimo de aristas que hay que recorrer para ir de $[l_h, l_k]$ a $[l_{h'}, l_{k'}]$. Por otra parte, el denominador corresponde al número mínimo de aristas que hay que recorrer para ir del menor término lingüístico, l_1, al mayor término lingüístico, l_g. De esta forma se garantiza que la métrica toma sus valores en el intervalo unidad.

Existen otras métricas sobre conjuntos de expresiones lingüísticas. Así, en Falcó *et al.* [7] se define una familia de métricas donde a las distancias geodésicas se les añaden factores de corrección definidos por dos parámetros que permiten penalizar la imprecisión de manera flexible.

Dada una expresión lingüística $\mathscr{E} = [l_h, l_k] \in \mathbb{L}$, su *inversa* se define como $\mathscr{E}^{-1} = [l_{g+1-k}, l_{g+1-h}]$.

Se dirá que una métrica $d : \mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es *equilibrada* si para cualesquiera $\mathscr{E}, \mathscr{F} \in \mathbb{L}$ se verifica

$$d\left(\mathscr{E}^{-1}, \mathscr{F}^{-1}\right) = d(\mathscr{E}, \mathscr{F}).$$

Resulta inmediato comprobar que la métrica geodésica normalizada es equilibrada.

2.3 FUNCIONES DE AGREGACIÓN

Las medidas de consenso introducidas en la siguiente sección están generadas por las distancias entre todas las valoraciones individuales. Dichas distancias serán agregadas mediante funciones de agregación (véanse Fodor y Roubens [9], Beliakov *et al.* [3], Torra y Narukawa [21] y Grabisch *et al.* [14]).

Definición 1 *Una* función de agregación *es una función* $F : [0,1]^q \longrightarrow [0,1]$ *que es monótona creciente en ca-*

da componente y satisfice las condiciones de frontera $F(0,\ldots,0)=0$ *y* $F(1,\ldots,1)=1$.

Además,

1. F *es* simétrica *si para cada permutación* π *sobre* A *y cada* $(t_1,\ldots,t_q)\in[0,1]^q$ *se verifica*

$$F\left(t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(q)}\right)=F(t_1,\ldots,t_q).$$

2. F *es* idempotente *si para cada* $t\in[0,1]$ *se verifica* $F(t,\ldots,t)=t$.

3. F *es* compensativa *si para cada* $(t_1,\ldots,t_q)\in[0,1]^q$ *se verifica*

$$\text{mín}\{t_1,\ldots,t_q\}\leq F(t_1,\ldots,t_q)\leq \text{máx}\{t_1,\ldots,t_q\}.$$

Resulta inmediato comprobar que toda función de agregación idempotente es compensativa, y viceversa.

3 MEDICIÓN DEL CONSENSO

Para medir el consenso que un grupo de agentes tiene sobre una alternativa dentro del escenario considerado, se propondrá un método basado en el coeficiente de Gini [13] y en las medidas de consenso introducidas por García-Lapresta y Pérez-Román [10] en el contexto de órdenes débiles.

Habitualmente los procesos de búsqueda de consenso son dinámicos y están diseñados de forma secuencial, de manera que un moderador trata de cambiar las opiniones de algunos agentes en varias rondas con el propósito de que aumente el grado de acuerdo en el grupo de agentes (véanse Kacprzyk *et al.* [15], Saint y Lawson [19] y Eklund *et al.* [5], entre otros).

Aunque en este trabajo no se abordarán los mencionados procesos dinámicos de búsqueda de consenso, el hecho de disponer de medidas de consenso permite su utilización para tal fin dentro del escenario considerado.

Un *perfil* V es una matriz (v_i^a) con m filas y n columnas de expresiones lingüísticas,

$$V=\begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_i^1 & \cdots & v_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ v_1^a & \cdots & v_i^a & \cdots & v_n^a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ v_1^m & \cdots & v_i^m & \cdots & v_n^m \end{pmatrix}=(v_i^a),$$

donde el coeficiente $v_i^a\in\mathbb{L}$ representa la valoración dada por el agente $a\in A$ a la alternativa $x_i\in X$.

Dado un perfil $V=(v_i^a)$, su inverso $V^{-1}=(u_i^a)$ queda definido por $u_i^a=(v_i^a)^{-1}$. Dada una permutación π sobre A y un perfil $V=(v_i^a)$, el perfil $V^\pi=(u_i^a)$ queda definido por $u_i^a=v_i^{\pi(a)}$. Dada una permutación σ sobre $\{1,\ldots,n\}$ y un perfil $V=(v_i^a)$, el perfil $V_\sigma=(u_i^a)$ queda definido por $u_i^a=v_{\sigma(i)}^a$.

Con objeto de poder utilizar funciones de agregación para agregar distancias, a partir de ahora todas las métricas se considerarán normalizadas.

A continuación se introduce la propuesta para medir el consenso de los agentes sobre cada alternativa, la cual descansa en la elección de una métrica y de una función de agregación que han de ser fijadas de antemano: una vez conocidas las valoraciones de los agentes, se calculan las distancias entre ellas y éstas se agregan mediante la función de agregación; el resultado obtenido muestra el grado de disentimiento entre los agentes; el grado de consenso se define como el valor simétrico en el intervalo unidad del grado de disentimiento.

Definición 2 *Sean una métrica* $d:\mathbb{L}^2\longrightarrow[0,1]$*, una función de agregación* $F:[0,1]^{m(m-1)/2}\longrightarrow[0,1]$ *y un perfil* $V=(v_i^a)$*. El* grado de consenso sobre la alternativa $x_i\in X$ *se define como*

$$C_{d,F}(V,x_i)=1-F\left(d\left(v_i^1,v_i^2\right),d\left(v_i^1,v_i^3\right),\ldots,d\left(v_i^{m-1},v_i^m\right)\right).$$

En el siguiente resultado se muestran algunas propiedades del grado de consenso sobre alternativas. Normalización significa que dichos grados siempre se encuentran en el intervalo unidad. Anonimato significa que lo único importante son las valoraciones obtenidas por cada alternativa, independientemente de quién las proporcione. Unanimidad significa que el máximo consenso sólo se alcanza cuando las opiniones de los agentes son idénticas. Reciprocidad significa que el consenso no se modifica si todos los agentes invierten sus valoraciones.

Proposición 1 *Sean una métrica* $d:\mathbb{L}^2\longrightarrow[0,1]$ *y una función de agregación* $F:[0,1]^{m(m-1)/2}\longrightarrow[0,1]$*. Para cada perfil* $V=(v_i^a)$ *y cada alternativa* $x_i\in X$ *se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Normalización:* $C_{d,F}(V,x_i)\in[0,1]$.

2. *Anonimato: Si* F *es simétrica, entonces* $C_{d,F}(V^\pi,x_i)=C_{d,F}(V,x_i)$ *para cualquier permutación* π *sobre* A.

3. *Unanimidad: Si* d *es equilibrada, entonces* $C_{d,F}(V,x_i)=1$ *si y sólo si* $v_i^a=v_i^b$ *para cualesquiera* $a,b\in A$.

4. *Reciprocidad:* $C_{d,F}(V^{-1},x_i)=C_{d,F}(V,x_i)$.

Una vez conocidos los grados de consenso de los agentes sobre cada una de las alternativas, el grado global de consenso se define como el resultado de agregar dichos grados mediante una función de agregación fijada con antelación.

Definición 3 *Sean una métrica* $d : \mathbb{L}^2 \longrightarrow [0,1]$, *dos funciones de agregación* $F : [0,1]^{m(m-1)/2} \longrightarrow [0,1]$ *y* $G : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ *y un perfil* $V = (v_i^a)$. *El* grado global de consenso *se define como*

$$C_{d,F}^G(V) = G\left(C_{d,F}(V,x_1),\ldots,C_{d,F}(V,x_n)\right).$$

En el siguiente resultado se muestran algunas propiedades del grado global de consenso. El significado de ellas es similar al del caso de las alternativas. En cuanto a las nuevas propiedades, neutralidad significa que las alternativas son tratadas de forma simétrica; y compensatividad significa que el grado global de consenso se encuentra entre los valores mínimo y máximo de consenso alcanzados por las alternativas.

Proposición 2 *Sean una métrica* $d : \mathbb{L}^2 \longrightarrow [0,1]$ *y dos funciones de agregación* $F : [0,1]^{m(m-1)/2} \longrightarrow [0,1]$ *y* $G : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$. *Para cada perfil* $V = (v_i^a)$ *se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Normalización:* $C_{d,F}^G(V) \in [0,1]$.
2. *Anonimato: Si* F *es simétrica, entonces* $C_{d,F}^G(V^\pi) = C_{d,F}^G(V)$ *para cualquier permutación* π *sobre* A.
3. *Neutralidad: Si* G *es simétrica, entonces* $C_{d,F}^G(V_\sigma) = C_{d,F}^G(V)$ *para cualquier permutación* σ *sobre* $\{1,\ldots,n\}$.
4. *Reciprocidad:* $C_{d,F}^G(V^{-1}) = C_{d,F}^G(V)$.
5. *Compensatividad: Si* G *es idempotente, entonces*

$$\min\{C_{d,F}(V,x_1),\ldots,C_{d,F}(V,x_n)\} \leq C_{d,F}^G(V) \leq \max\{C(V,I,x_1),\ldots,C(V,I,x_n)\}.$$

4 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Con el fin de ilustrar el análisis del consenso introducido en este trabajo, se considerará el experimento de campo llevado a cabo por Agell *et al.* [1], donde cinco agentes expertos valoraron la combinación de cinco frutas con chocolate negro.

Los cinco agentes de $A = \{1,2,3,4,5\}$ evaluaron la combinación de chocolate negro con las cinco frutas de $X = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ reseñadas en la Tabla 2 mediante las expresiones lingüísticas de $\mathbb{L}$ generadas por el conjunto de términos lingüísticos $L = \{l_1,l_2,l_3,l_4,l_5\}$ cuyos significados se incluyen en la Tabla 3.

La Tabla 4 contiene las valoraciones dadas por los agentes a la combinación de chocolate negro con las frutas correspondientes.

Resulta interesante señalar que de las 25 valoraciones proporcionadas por los agentes, 15 de ellas fueron términos lingüísticos, 9 fueron expresiones lingüísticas formadas por dos términos lingüísticos consecutivos y una de ellas fue totalmente imprecisa, puesto que consistió en los cinco términos lingüísticos.

Tabla 2: Frutas.

x_1	arándano rojo
x_2	grosella
x_3	acerola
x_4	anacardo
x_5	guayaba

Tabla 3: Significado de los términos lingüísticos.

l_1	no combina en absoluto
l_2	no combina bien
l_3	combina bien
l_4	combina muy bien
l_5	es una combinación excelente

Es importante mencionar que incluso agentes especializados en su propio campo pueden tener dudas acerca de qué valoración otorgar a las alternativas (en este experimento el 40 % de los casos).

Teniendo en cuenta la definición de métrica geodésica normalizada (1), en la Tabla 5 se muestran las distancias entre los pares de valoraciones individuales sobre cada alternativa x_i, $i = 1,2,3,4,5$.

En la Tabla 6 se muestran los grados de consenso $C_{d,F}(V,x_i)$ sobre las cinco alternativas, según cuatro funciones de agregación: media aritmética (MA), mediana (Med), 1-media recortada (1-MR) y 2-media recortada (2-MR)[1], teniendo en cuenta la métrica geodésica normalizada.

Para las cuatro funciones de agregación consideradas el mayor grado de consenso se alcanza en x_1, después en x_5 y en x_2; a continuación en x_4 y en x_3 para la media aritmética, y en x_3 y en x_4 para el resto de funciones de agregación.

En la Tabla 7 se muestran los grados de consenso globales $C_{d,F}^G(V)$ para tres funciones de agregación G: media aritmética, mediana y 1-media recortada (al agregar cinco valores, la 2-media recortada coincide con la mediana).

[1] La *k-media recortada* calcula la media aritmética de los valores una vez excluidos los k más altos y los k más bajos. El caso extremo de este tipo de medias lo constituye la mediana, que sólo tiene en cuenta el valor central, cuando hay un número impar de valores, o la media aritmética de los dos valores centrales, cuando el número de valores es par.

Tabla 4: Valoraciones dadas por los agentes.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	$[l_4, l_5]$	$[l_3, l_4]$	l_1	$[l_4, l_5]$	l_1
2	l_5	$[l_1, l_2]$	$[l_2, l_3]$	l_3	$[l_1, l_2]$
3	l_5	l_3	l_4	l_5	l_2
4	l_5	$[l_2, l_3]$	l_4	l_5	$[l_1, l_2]$
5	l_5	$[l_1, l_2]$	l_2	$[l_1, l_5]$	l_3

Tabla 5: Distancias $d\left(v_i^a, v_i^b\right)$.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$d\left(v_i^1, v_i^2\right)$	0,125	0,500	0,375	0,375	0,125
$d\left(v_i^1, v_i^3\right)$	0,125	0,125	0,750	0,125	0,250
$d\left(v_i^1, v_i^4\right)$	0,125	0,250	0,750	0,125	0,125
$d\left(v_i^1, v_i^5\right)$	0,125	0,500	0,250	0,375	0,500
$d\left(v_i^2, v_i^3\right)$	0,000	0,375	0,375	0,500	0,125
$d\left(v_i^2, v_i^4\right)$	0,000	0,250	0,375	0,500	0,000
$d\left(v_i^2, v_i^5\right)$	0,000	0,000	0,125	0,500	0,375
$d\left(v_i^3, v_i^4\right)$	0,000	0,125	0,125	0,000	0,125
$d\left(v_i^3, v_i^5\right)$	0,000	0,375	0,375	0,500	0,250
$d\left(v_i^4, v_i^5\right)$	0,000	0,250	0,250	0,500	0,375

5 CONSIDERACIONES FINALES

La propuesta de medición de consenso desarrollada en este trabajo puede aplicarse a procesos dinámicos de búsqueda de consenso en el marco de la valoración lingüística de alternativas. Debido a la monotonía de la función de agregación que genera la medida de consenso global, el moderador sólo tiene que intentar que aumente el consenso en las alternativas, ya que tales aumentos se propagan al consenso global.

Para detectar qué agentes están más alejados de las opiniones del grupo, en una alternativa determinada, puede llevarse a cabo un análisis de conglomerados, como el propuesto en García-Lapresta y Pérez-Román [12].

Una vez se haya alcanzado el umbral de consenso deseado, se puede proceder a aplicar algún sistema de votación con el fin de conseguir una decisión colectiva (en el escenario planteado, por ejemplo los diseñados en Falcó *et al.* [7, 8]).

Agradecimientos

El autor agradece al *Group de Recerca en Enginyeria del Coneixement* (GREC) y en particular a Núria Agell la información proporcionada sobre el experimento de campo que dirigió. Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el *Ministerio de Economía y Competitividad* (proyecto ECO2012-32178) y por la *Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León* (proyecto VA066U13).

Tabla 6: Grados de consenso $C_{d,F}(V, x_i)$.

F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
MA	0,950	0,725	0,625	0,650	0,775
Med	1,000	0,750	0,625	0,562	0,812
1-MR	0,953	0,718	0,640	0,625	0,781
2-MR	0,958	0,729	0,666	0,604	0,791

Tabla 7: Grados de consenso globales $C_{d,F}^G(V)$.

$F \setminus G$	MA	Med	1-MR
MA	0,745	0,725	0,716
Med	0,750	0,750	0,729
1-MR	0,743	0,718	0,713
2-MR	0,750	0,729	0,729

Referencias

[1] N. Agell, G. Sánchez, M. Sánchez, F.J. Ruiz: Selecting the best taste: a group decision-making application to chocolates design. En: *Proceedings of the 2013 IFSA-NAFIPS Joint Congress*, Edmonton (Canadá), pp. 939–943, 2013.

[2] N. Agell, M. Sánchez, F. Prats, L. Roselló: Ranking multi-attribute alternatives on the basis of linguistic labels in group decisions. *Information Sciences* 209, pp. 49–60, 2012.

[3] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo: *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Springer, Heidelberg, 2007.

[4] R. Bosch: *Characterizations of Voting Rules and Consensus Measures*. Tesis doctoral. Tilburg University, 2005.

[5] P. Eklund, A. Rusinowska, H. de Swart: Consensus reaching in committees. *European Journal of Operational Research* 178, pp. 185–193, 2007.

[6] B. Erdamar, J.L. García-Lapresta, D. Pérez-Román, M.R. Sanver: Measuring consensus in a preference-approval context. *Information Fusion* 17, pp. 14–21, 2014.

[7] E. Falcó, J.L. García-Lapresta, L. Roselló: Aggregating imprecise linguistic expressions. En: P. Guo, W. Pedrycz (Eds.), *Human-Centric Decision-Making Models for Social Sciences*. Springer-Verlag, Berlín, 2014, pp. 97–113.

[8] E. Falcó, J.L. García-Lapresta, L. Roselló: Allowing agents to be imprecise: A proposal using multiple linguistic terms. *Information Sciences* 258, pp. 249–265, 2014.

[9] J. Fodor, M. Roubens: *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[10] J.L. García-Lapresta, D. Pérez-Román: Measuring consensus in weak orders. En: E. Herrera-Viedma, J.L. García-Lapresta, J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi, S. Zadrożny (Eds.), *Consensual Processes*, STUDFUZZ, vol. 267. Springer-Verlag, Berlín, 2011, pp. 213–234.

[11] J.L. García-Lapresta, D. Pérez-Román: Consensus-based hierarchical agglomerative clustering in the context of weak orders. En: *Proceedings of the 2013 IFSA-NAFIPS Joint Congress*, Edmonton (Canadá), pp. 1010–1015, 2013.

[12] J.L. García-Lapresta, D. Pérez-Román: Consensus-based clustering under hesitant qualitative assessments. En evaluación.

[13] C. Gini: *Variabilità e Mutabilità*. Tipografia di Paolo Cuppini, Bologna, 1912.

[14] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap: *Aggregation Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[15] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, H. Nurmi: Group decicion making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Systems* 49, pp. 21–31, 1992.

[16] L. Roselló, F. Prats, N. Agell, M. Sánchez: Measuring consensus in group decisions by means of qualitative reasoning. *International Journal of Approximate Reasoning* 51, pp. 441–452, 2010.

[17] L. Roselló, F. Prats, N. Agell, M. Sánchez: A qualitative reasoning approach to measure consensus, En: E. Herrera-Viedma, J.L. García-Lapresta, J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi, S. Zadrożny (Eds.), *Consensual Processes*, STUDFUZZ, vol. 267. Springer-Verlag, Berlín, 2011, pp. 235–261.

[18] L. Roselló, M. Sánchez, N. Agell, F. Prats, F.A. Mazaira: Using consensus and between generalized multiattribute linguistic assessments for group decision-making. *Information Fusion* 17, pp. 83–92, 2014.

[19] S. Saint, J.R. Lawson: *Rules for Reaching Consensus: A Modern Approach to Decision Making*. Jossey-Bass, San Francisco, 1994.

[20] V. Torra: Hessitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems* 25, pp. 529–539, 2010.

[21] V. Torra, Y. Narukawa: *Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators*. Springer, Berlín, 2007.

[22] L. Travé-Massuyès, P. Dague (Eds.): *Modèles et Raisonnements Qualitatifs*. Hermes Science, París, 2003.

[23] L. Travé-Massuyès, N. Piera: The orders of magnitude models as qualitative algebras. En: *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Detroit (Estados Unidos), 1989.

PLATAFORMA WEB 2.0 PARA LA GESTIÓN DE TOMA DE DECISIONES EN CENTROS EDUCATIVOS

Juan Antonio Morente-Molinera, **Raquel Ureña-Pérez**, **Enrique Herrera-Viedma**, **Antonio Gabriel López-Herrera**

Department of Computer Science and A. I., University of Granada, 18071 Granada Spain, {jamoren,raquel,viedma,lopez-herrera}@decsai.ugr.es

Resumen

El objetivo de este artículo es el diseño de una plataforma Web par la Toma de Decisiones en Grupo en centros educativos. Con ella, el personal de estos centros podrá comunicarse entre sí y llevar a cabo todos los pasos necesarios para la Toma de Decisiones gracias a las tecnologías Web 2.0. Actualmente, cada vez que es necesario tomar una decisión en un centro educativo, las personas involucradas deben dejar a un lado sus obligaciones, reunirse, debatir el tema y decidir que hacer al respecto. Con este sistema, dado que los decisores podrán participar en el proceso desde cualquier parte y en cualquier momento, se consigue una mayor flexibilidad y ahorro de tiempo en el continuo proceso de Toma de Decisiones al que se ven sometidos.

Palabras Clave: Toma de Decisiones en Grupo, Modelado Lingüístico, Tecnologías Web 2.0.

1 INTRODUCCIÓN

La Toma de Decisiones es un campo que tiene un gran impacto en el Área Educacional. Sus aplicaciones en este área se han estudiado en profundidad y están claramente presentes en la literatura actual [2, 7, 9]. Un profesor, para transmitir un concepto a sus estudiantes, debe hacer frente a varias decisiones: ¿Cuál es el mejor modo de transmitir la información para que los alumnos la entiendan?, ¿qué debo hacer para captar la atención de mis estudiantes? y, en el caso de tener que transmitir varios conceptos: ¿cuál es la mejor manera de ordenarlos?. Estas decisiones son críticas y distinguen a los buenos de los malos profesores. Sin embargo, estas no son las únicas decisiones que un docente debe tomar.

En todos los centros educacionales se deben tomar constantemente una cantidad enorme de decisiones relacionadas con la organización del centro y el alumnado. Estas decisiones son críticas para el correcto funcionamiento del centro. Algunos ejemplos pueden ser el debate sobre si un alumno debe repetir curso, que debe ser llevada a cabo por sus profesores, si un cierto equipamiento es comprado o no para un aula o si una determinada metodología didáctica es aplicada o no sobre un grupo de alumnos. Este tipo de decisiones, al contrario que las comentadas anteriormente, están relacionadas con la metodología educativa y organizativa del centro y debe ser tomada no por una única persona, sino por un grupo de éstas formado por el personal sobre el que recaiga la responsabilidad de tomar dicha decisión. Por tanto, un profesor no es sólo una entidad única que toma sus propias decisiones sino que es una pieza más del engranaje que conforma el centro educativo.

En las Tomas de Decisiones en las que intervienen varias personas, el procedimiento más común consiste en establecer una reunión en donde se discute el problema y se toma una decisión. Este proceso conlleva una perdida de tiempo para los decisores implicados y es claramente ineficiente. Varias de las razones se exponen a continuación:

- El personal del centro educativo tiene distintos horarios y muchas responsabilidades por lo que encontrar un hueco en el que todos puedan reunirse puede ser una tarea muy complicada.
- Cuando varias personas debaten un tema, es muy fácil perder el hilo de discurso principal y acabar tratando temas no relacionados con el objetivo inicial de la reunión.
- Las reuniones tienen una cantidad de tiempo preestablecida, si no se ha tomado ninguna decisión y ésta finaliza debe hacerse otra reunión asumiendo la pérdida de tiempo que ello conlleva.

Por todas las razones expuestas, es necesario desarrollar métodos que solucionen estos problemas y mejoren el sistema actual de Toma de Decisiones en los centros educativos.

Una manera de conseguir los objetivos propuestos consiste en utilizar Internet y las tecnologías Web 2.0. En sus primeros años, Internet era una fuente de consulta de información. Las páginas Webs eran estáticas y el usuario no podía contribuir en su mejora, sólo realizar operaciones de consulta. Actualmente, la situación ha cambiado completamente. Internet se ha convertido en una infraestructura colectiva donde los usuarios pueden compartir su conocimiento y comunicase con personas en todo el mundo. Usando estas nuevas tecnologías, es fácil diseñar e implementar una plataforma Web que permita a los usuarios comunicarse, debatir, aportar opiniones y, en definitiva, tomar decisiones a través de Internet, participando desde donde y cuando ellos puedan sin necesidad de reunirse todos en un mismo lugar. Para una mayor comodidad de los usuarios a la hora de expresar sus opiniones, es posible usar técnicas de Modelado Lingüístico [5].

En la sección 2, se exponen algunos conceptos necesarios para entender el funcionamiento de la plataforma Web. En la seccion 3 mostraremos su diseño. En la subsección 3.1, describiremos el algoritmo de Toma de Decisiones implementado. En la subsección 3.2, describiremos la arquitectura empleada y explicaremos cómo se ha diseñado la base de datos. En la subsección 3.3, describiremos los diferentes estados por los que pasa un proceso de decisión dentro de la plataforma Web. En la sección 4 se muestra un ejemplo de uso del sistema implementado. En la sección 5, se muestras algunas conclusiones.

2 PRELIMINARES

2.1 Modelado Lingüístico

Es fácil observar que los humanos y los ordenadores nos expresamos de forma distinta. Mientras que los ordenadores utilizan números para expresar información, los humanos preferimos la utilización de conceptos que son, en su mayoría, muy poco precisos. Debido a ésto, es necesario el desarrollo de métodos que permitan al ordenador representar y trabajar con los conceptos imprecisos utilizados por los humanos. Gracias al Modelado Lingüístico, es posible representar este tipo de información en un ordenador y proporcionarle, además, mecanismos matemáticos para que pueda operar con ella.

El Modelado Lingüístico comienza con Zadeh y su definición del concepto de variable lingüística [11, 12, 13]. Una variable lingüística es una *variable cuyos valores no son número sino palabras o frases en un lenguaje natural o artificial*. Son menos precisas que los números y más cercanas a la manera en que los humanos se expresan. Formalmente, una variable lingüística es una 5-tupla $\langle L, T(L), U, S, M\rangle$ donde L es el nombre de la variable, $T(L)$ es un conjunto finito de términos lingüísticos, S es la regla sintáctica que genera los términos de $T(L)$ y M es una regla semántica que asocia con cada etiqueta lingüística X su significado $M(X)$ donde $M(X)$ es un conjunto difuso en U.

Se considera que un conjunto lingüístico es balanceado si sus términos están distribuidos en una escala donde se define un orden total [10].

2.2 Toma de Decisiones en Grupo

Formalmente, un problema lingüístico de Toma de Decisiones en Grupo se puede definir de la siguiente manera [4, 5]:

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} (n \geq 2)$ un conjunto de posibles alternativas y teniendo en cuenta la información proporcionada por un conjunto de expertos $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} (m \geq 2)$ utilizando un conjunto lingüístico S. ¿Cómo podemos clasificar los elementos de X?.

Generalmente, este problema puede ser resuelto siguiendo los siguientes pasos:

1. *Recolección de matrices de preferencia*: Los expertos, tras conocer la naturaleza del problema, debatir y compartir opiniones, proporcionan sus preferencias al sistema.
2. *Fase de agregación*: Las preferencias son agregadas creando una matriz colectiva representativa de la opinión de todos los decisores implicados.
3. *Fase de selección*: Se analiza la matriz colectiva con el fin de identificar el grado general de preferencia de cada una de las alternativas y, con dicho valor, se ordenan de mayor a menor.

Si aplicamos medidas de consenso sobre las matrices de preferencias proporcionadas por los usuarios es posible averiguar el grado de acuerdo alcanzado en la decisión [1]. Si el grado de consenso es bajo, es posible sugerir a los decisores que modifiquen sus valores de preferencia para poder acercarse más a la opinión general retrasando, de esta forma, el proceso final de selección. Normalmente, son necesarias varias rondas antes de alcanzar un valor de consenso aceptable que permita obtener unos resultados que sean respaldados por la mayoría de los decisores.

Podemos ver un esquema de todo este proceso en la Figura 1.

3 MÉTODOS

3.1 Algoritmo de Toma de Decisiones en Grupo Implementado

El algoritmo de Toma de Decisiones utilizado en la plataforma Web es una versión simplificada no multigranular

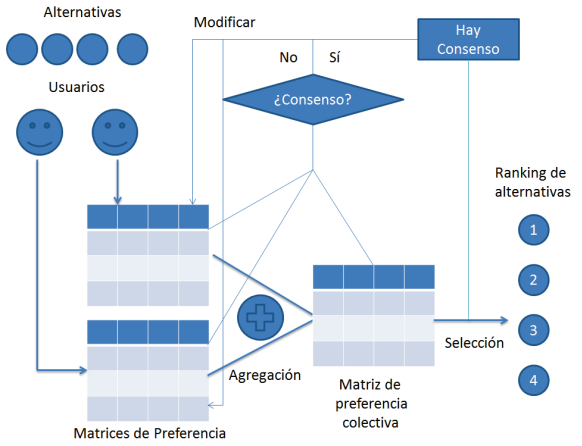


Figura 1: Esquema de un proceso de Toma de Decisiones.

del definido en [8]. Un algoritmo multigranular permite al usuario elegir el conjunto lingüístico que quiere utilizar para proporcionar sus preferencias. En nuestro caso, por tanto, por simplicidad, usaremos el mismo conjunto lingüístico para todos ellos. Ademas, la muestra de los resultados del proceso de decisión se realizará usando etiquetas lingüísticas fáciles de entender por el usuario.

El algoritmo de Toma de Decisiones utilizado se lleva a cabo mediante los tres pasos comentados en la sección 2.2: recolección de matrices de preferencia, fase de agregación y fase de selección. Cada uno de estos pasos serán comentados en más detalle en la siguientes subsecciones.

3.1.1 Recolección de matrices de preferencia

El primer paso consiste en que un conjunto de expertos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ proporcione al sistema sus preferencias sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Hay varios sistemas de representación que pueden utilizarse para ello. De entre los disponibles, utilizaremos las relaciones de preferencia debido a que comparan las alternativas dos a dos lo que hace mucho más cómodo el proceso para el usuario. Además, este tipo de representación nos permite observar si hay consistencia o no en las opiniones proporcionadas.

Formalmente, una relación difusa de preferencia se define como una matriz $P^k \subset X \times X$ que tiene una función de pertenencia $\mu_{P^k} : X \times X \to [0,1]$ donde $\mu_{P^k}(x_i, x_j) = p^k_{ij}$ indica el grado de preferencia de x_i sobre x_j. En el algoritmo implementado, el grado de preferencia viene dado con el conjunto de términos lingüísticos $S = \{very_low, low, medium, high, very_high\}$. S es balanceado y se define sobre el intervalo $[0,1]$.

3.1.2 Fase de agregación

Una vez que se han obtenido todas las matrices de preferencias de los usuarios, debe calcularse la matriz colectiva de preferencias. Primero, se han de transformar las etiquetas lingüísticas a valores numéricos. Para ello, utilizaremos el valor de posición de la etiqueta dentro del conjunto lingüístico haciéndole un cambio de escala del intervalo $[0,g]$ al $[0,1]$. Por tanto, la representación numérica de la etiqueta s_i, que pertenece al conjunto de términos lingüísticos balanceado $S = \{s_0, \ldots, s_i, \ldots, s_{g-1}\}$ cuya granularidad es g, puede calcularse utilizando la siguiente expresión:

$$NR_{s_i} = \frac{i}{g-1} \tag{1}$$

Tras esta conversión, las matrices numéricas resultantes se agregan usando un operador de agregación. En nuestro caso usaremos el operador de media:

$$C_{ij} = \phi(P^{1\ldots m}_{ij}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} P^k_{ij}}{m} \tag{2}$$

donde ϕ representa el operador de media.

3.1.3 Fase de selección

Una vez calculada la matriz colectiva de preferencias, ésta puede usarse para calcular el ranking de alternativas. En [8], se usan dos operadores, quantifier-guided dominance degree (GDD) y quantifier-guided non-dominance degree (GNDD) [3], con este fin. El operador GDD trata de averiguar qué alternativas dominan a las demás mientras que GNDD calcula qué alternativas no son dominadas por ninguna otra. Cuanto mayor valor de GDD y GNDD tenga una alternativa, mayor posición tendrá en el ranking.

Formalmente, el operador GDD se define como:

$$GDD_i = \phi(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{i(i-1)}, c_{i(i+1)}, \ldots, c_{in}) \tag{3}$$

GNDD se define como:

$$GNDD_i = \phi(c^s_{1i}, c^s_{2i}, \ldots, c^s_{(i-1)i}, c^s_{(i+1)i}, \ldots, c^s_{ni}) \tag{4}$$

donde

$$c^s_{ji} = \text{máx}\{c_{ji} - c_{ij}, 1\} \tag{5}$$

Los resultados del ranking de alternativas pueden presentarse lingüísticamente al usuario si se selecciona, para ello, la etiqueta lingüística con posición más cercana dentro del conjunto lingüístico utilizado al resultado numérico obtenido. Se puede usar para ello la siguiente expresión:

$$LR_r = s_i | i = round(r \cdot g) \tag{6}$$

donde r es el valor numérico que quiere expresarse lingüísticamente, $r \in [0,1]$ y s_i es un término lingüístico perteneciente al conjunto balanceado S cuyo valor de granularidad es g y se define sobre el intervalo $[0,1]$.

3.1.4 Algoritmo de consenso

Las medidas de consenso se utilizan para proporcionar a los expertos información acerca del estado del proceso de decisión. Gracias a esta información, los expertos pueden apreciar si se está llegando a un acuerdo o si, por el contrario, hay opiniones enfrentadas. En el algoritmo elegido, las medidas de consenso se calculan utilizando las matrices de preferencias proporcionadas por los expertos. Primero, para cada dos expertos i y j, se calcula la matriz de similaridad de sus preferencias mediante la siguiente expresión [6]:

$$sm_{ij}^{lk} = s(p_i^{lk}, p_j^{lk}) = 1 - |(p_i^{lk} - p_j^{lk})| \quad (7)$$

donde sm_{ij}^{lk} indica el valor de similaridad de la alternativa x_l sobre la x_k teniendo en cuenta las opiniones de los expertos e_i y e_j.

La matriz de consenso que indica el valor para cada par de alternativas se calcula agregando todas las matrices de similaridad de la siguiente forma:

$$cm^{lk} = \phi(sm_{ij}^{lk}) i, j = 1, \ldots, m,\ l, k = 1, \ldots, n \wedge i < j \quad (8)$$

donde ϕ es el operador de media.

Utilizando la matriz cm, se pueden obtener medidas de consenso a distintos niveles:

- **Nivel 1 (pares de alternativas)**: En este nivel se mide el consenso para cada par de alternativas. El grado de consenso para el par de alternativas (x_l, x_k) se calcula mediante la siguiente expresión:

$$cp^{lk} = cm^{lk},\ \forall l, k = 1, \ldots, n;\ l \neq k \quad (9)$$

- **Nivel 2 (alternativas)**: En este nivel se calcula el nivel de consenso para cada una de las alternativas. El valor de consenso para la alternativa x_i se puede calcular usando la siguiente expresión:

$$ca^l = \frac{\sum_{k=l, k \neq l}^{n} (cp^{lk} + cp^{lk})}{2(n-1)} \quad (10)$$

- **Nivel 3 (global)**: Agregando todos los valores de consenso del nivel 2, se puede obtener el valor de consenso global del proceso de decisión. Este valor se puede calcular utilizando la siguiente expresión:

$$cr = \frac{\sum_{l=1}^{n} ca^l}{n} \quad (11)$$

Los valores obtenidos en todos los niveles son numéricos y están situados en el rango $[0, 1]$. Es posible presentarlos a los expertos de forma lingüística utilizando la expresión (6).

3.2 Arquitectura y Estructura de la Base de datos del Sistema

La plataforma Web de Toma de Decisiones sigue una arquitectura Cliente-Servidor. Toda la información y funcionalidades están almacenadas en el servidor a donde el usuario accede mediante Internet usando su propio dispositivo cliente. La principal ventaja de usar este tipo de arquitectura es que el usuario no tiene que instalar ningún programa, sólo acceder al sistema a través de Internet usando cualquier navegador. La Figura 2 muestra un esquema de la configuración del servidor utilizado.

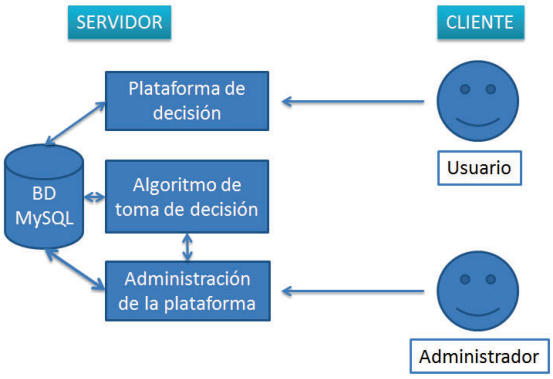


Figura 2: Esquema de implementación de la plataforma Web.

En el lado del cliente podemos ver que existen dos tipos de acceso. El primero es el usuario, que accede a la plataforma para participar en un proceso de decisión concreto y comunicarse con los demás usuarios que participen en éste. Este tipo de cliente no tiene permisos para cambiar ningún dato referente al proceso, sólo puede participar en él. El otro tipo de usuario es el administrador. El administrador es el encargado de crear y modificar procesos de decisión ya existentes en la plataforma y de que la plataforma Web funcione correctamente. Además, decide los usuarios que participan en cada uno de los procesos de decisión y configura el algoritmo utilizado para la Toma de Decisiones en caso de haber varios disponibles. Es posible tener varios administradores y limitar a algunos para que sólo puedan crear procesos de decisión y modificar los suyos propios sin interferir en los que han creado los demás ni en la configuración de la plataforma Web. El administrador puede, a su vez, actuar como usuario si se agrega a sí mismo a un proceso de decisión.

En el lado del servidor, podemos distinguir cuatro partes claramente diferenciadas:

- **Plataforma de decisión**: Representa el entorno Web donde el usuario puede proporcionar sus preferencias y comunicarse con los demás usuarios implicados en la decisión para debatir las posibles soluciones. En la

implementación actual de la plataforma, se puede acceder a esta parte en el enlace indicado en [14].

- **Administración de la Plataforma Web**: Proporciona al administrador medios para crear y modificar procesos de decisión, usuarios, listas de usuarios y configurar la plataforma Web. En la implementación actual de la plataforma Web se puede acceder a esta parte en el enlace indicado en [15].

- **Base de Datos**: En la base de datos se almacena toda la información referente a los procesos de Toma de Decisiones, usuarios, la plataforma Web y la configuración de los algoritmos utilizados.

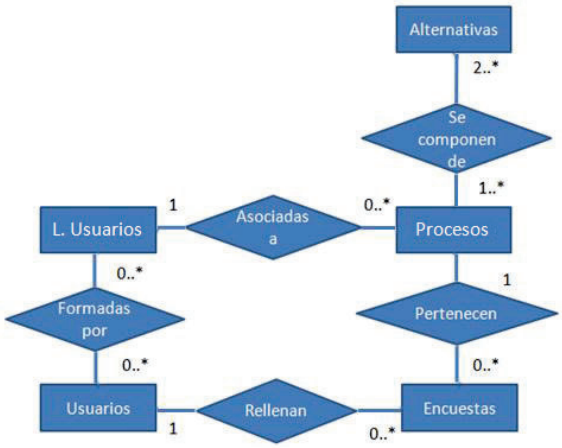


Figura 3: Base de datos de la plataforma Web.

En la Figura 3 se muestra el diagrama entidad-relación de la base de datos. El objetivo de cada una de las tablas se describe a continuación:

- **Procesos**: Cada proceso representa una toma de decisión. Cada uno tiene asociado una lista de usuarios con los expertos que deben participar y una lista de alternativas que representan las posibles elecciones que los expertos pueden hacer.

- **Alternativas**: Cada instancia representa una posible elección asociada a un proceso de decisión determinado.

- **Usuarios**: Cada instancia representa a un usuario del sistema. Éste puede ser un usuario o un administrador con permisos completos o limitados.

- **Lista de Usuarios**: Cada lista representa a un conjunto de usuarios. Se asocian a los distintos procesos de decisión para determinar que usuarios pueden participar en ellos.

- **Encuestas**: Cada instancia representa una serie de preferencias proporcionadas por un usuario para un proceso de Toma de Decisiones concreto.

3.3 Diagrama de Estados

Mientras se lleva a cabo el proceso de decisión, éste pasa por varios estados. Dichos estados y las posibles transiciones pueden verse en la Figura 4.

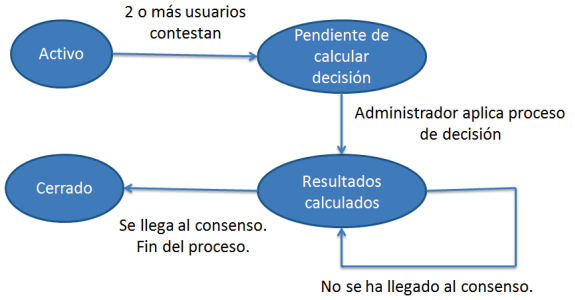


Figura 4: Diagrama de estados de un proceso de Toma de Decisión en la plataforma Web.

Cuando se crea el proceso de decisión, éste se encuentra en estado *activo*. Los usuarios que tienen acceso al proceso pueden comunicarse entre ellos y proporcionar sus preferencias al sistema a través de Internet. Cuando dos o más de ellos lo han hecho, el proceso pasa al estado *pendiente de calcular decisión* en el que el administrador del proceso puede, en cualquier momento, ejecutar el algoritmo de Toma de Decisiones para informar a los usuarios sobre el estado de la decisión y el valor de consenso alcanzado. Cuando se ha llevado a cabo esta acción, el proceso pasa a estado de *resultados calculados*. Estos resultados temporales pueden ser actualizados cada cierto tiempo para que los usuarios tengan siempre acceso a información actualizada acerca de como avanza el proceso. Cuando el consenso es alto o ha pasado el tiempo máximo permitido para la toma de la decisión, el administrador ejecuta por última vez el algoritmo de decisión mostrándose entonces los resultados finales a los usuarios y pasando el proceso al estado de *cerrado*. En este estado los usuarios pueden seguir comunicándose para comentar los resultados finales pero no pueden modificar sus preferencias.

4 EJEMPLO ILUSTRATIVO

En un centro educativo es necesario reponer los ordenadores del aula de informática. Usando nuestra plataforma Web, el proceso que se llevaría a cabo para decidir qué tipo de ordenador comprar sería el siguiente:

- **Creación del proceso de decisión**: Un administrador genera un nuevo proceso de decisión en donde cada

alternativa es uno de los posibles ordenadores a elegir. Tres opciones se dan a elegir, un ordenador Acer, uno HP y uno Apple con una serie de características cada uno. Se crea una lista de usuarios con los miembros del centro que tienen que tomar la decisión y se asocia al proceso.

- **Debate y votación**: Los miembros del personal asociados al proceso debaten, mediante la plataforma Web, los pros y contras de cada uno de los ordenadores y proporcionan al sistema su opinión mediante una encuesta que compara cada opción dos a dos.

- **Cálculo de las medidas de consenso**: Cada cierto tiempo, el administrador puede ordenar el cálculo de las medidas de consenso para que los usuarios puedan observar el estado del proceso de decisión.

- **Toma de decisión final y cierre del proceso**: Cuando el consenso sea alto o se haya alcanzado la fecha límite, el proceso de decisión se cierra y el ordenador elegido es el que finalmente se compra.

5 CONCLUSIONES

En un centro educativo se llevan a cabo procesos de Toma de Decisiones en Grupo constantemente. Gracias a la plataforma Web para la Toma de Decisiones en Centros Educativos que hemos diseñado y con el único requisito de tener acceso a Internet, el personal educativo puede debatir, opinar y votar en el proceso de Toma de Decisiones evitando la pérdida de tiempo que conllevan las reuniones.

Nuestra plataforma, además, mantiene a los usuarios informados acerca de cómo se va desarrollando el proceso de decisión y el consenso alcanzado. Las medidas de consenso son muy útiles ya que pueden utilizarse para sugerir a los usuarios como modificar sus preferencias para que se acerquen a la opinión general, muestran aquellas alternativas más controvertidas y ayudan a que el debate siga adelante y no se estanque. Además, la plataforma ayuda a que las votaciones y debates se lleven a cabo de forma justa y ordenada.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado con la financiación de los Proyectos de Excelencia Andaluces TIC-05299 y TIC-5991 y los fondos FEDER del proyecto TIN2010-17876.

Referencias

[1] F. Cabrerizo, I. J. Pérez, E. Herrera-Viedma: Analyzing consensus approaches in fuzzy group decision making: advantages and drawbacks. *Soft Computing* 14(5), pp. 451-463, 2010.

[2] B. Cowie: Teacher formative assessment decision making: a consideration of principles and consequences. *Assesment Matters* 1, pp. 47-63, 2009.

[3] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J. Verdegay: A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach. *Information Sciences* 85(4), pp. 223-239, 1995.

[4] F. Herrera, E. Herrera-Viedma: Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems* 115, pp. 67-82, 2000.

[5] F. Herrera, S. Alonso, F Chiclana, E. Herrera-Viedma: Computing with words in decision making: foundations, trends and prospects. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 8(4), pp. 337-364, 2009.

[6] F. Mata, L. Martínez, E. Herrera-Viedma: An adaptive consensus support model for group decision making with a linguistic assessment approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 17(2), pp. 279-290, 2009.

[7] K. K. Metz: Applying an ethical framework to educational decision making. *Journal of deaf studies and deaf education* 17(1), pp. 136, 2012.

[8] I. J. Pérez, F. J. Cabrerizo, E. Herrera-Viedma: A mobile decision support system for dynamic group decision making problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans* 40(6), pp. 1244-1256, 2010.

[9] J. P. Shapiro, J. A. Stefkovich: *Ethical leadership and decision making in education: Applying theoretical perspectives to complex dilemmas*. Taylor and Francis, 2011.

[10] R.R. Yager: An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning* 12(3-4), pp. 237-261, 1995.

[11] L. A. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences* 8, pp. 199-249, 1975.

[12] L. A. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-II. *Information Sciences* 8, pp. 301-357, 1975.

[13] L. A. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. *Information Sciences* 9, pp. 43-80, 1975.

[14] Zona de administración de la plataforma Web: `http://molienda.ugr.es/sdae/sdaeadmin`

[15] Zona de toma de decisiones de la plataforma Web: `http://molienda.ugr.es/sdae/sdaeuser`

Gestión de Expertos con Comportamientos no Cooperativos en Procesos de Consenso en Grandes Grupos

Francisco José Quesada Real[1], **Iván Palomares Carrascosa**[1], **Luis Martínez López**[1]

[1]*Depto. de Informática, Universidad de Jaén*, {fqreal,ivanp,martin}@ujaen.es

Resumen

Los problemas de Toma de Decisiones en Grupo se caracterizan por la participación de múltiples expertos con diferentes puntos de vista, que desean encontrar una solución común a un problema compuesto por un conjunto de alternativas. A menudo, en este tipo de problemas surge la necesidad de aplicar un Proceso de Consenso, en el que los expertos tratan de alcanzar un alto nivel de acuerdo antes de tomar la decisión, mediante la discusión y el acercamiento de opiniones entre ellos. No obstante, en la toma de decisiones con grandes grupos, pueden existir con mayor facilidad ciertos subgrupos con comportamiento no cooperativo de cara a alcanzar un acuerdo colectivo. Por ello, es conveniente identificar dichos subgrupos y gestionarlos para que su comportamiento no dificulte el alcance del consenso. En esta contribución presentamos una metodología, basada en conjuntos difusos y computación con palabras, para estudiar el comportamiento de los expertos en procesos de consenso, con el objetivo de identificar y gestionar a aquellos expertos cuyo comportamiento no contribuye al alcance del consenso.

Palabras Clave: Toma de Decisión en Grandes Grupos, Consenso, Conjuntos Difusos, Computación con palabras, Penalización.

1 Introducción

Los problemas de Toma de Decisiones en Grupo (TDG) tienen como objetivo encontrar una solución común a un problema compuesto por un conjunto de alternativas, por parte de un grupo compuesto por múltiples expertos [4]. Para ello, los expertos valorarán las distintas alternativas que pueden dar solución al problema [3]. Clásicamente, los problemas de TDG se han resuelto aplicando únicamente un proceso de selección de alternativas. Sin embargo, en ocasiones es posible que como resultado de dicho proceso únicamente se haya elegido la alternativa que satisface a la mayoría de expertos, sin tener en cuenta las valoraciones de aquellos expertos que discrepen con la solución. Esto puede hacer que algunos expertos no se sientan representados con la solución escogida y que por tanto puedan rechazarla [1]. Para solventar este problema, surgen los Procesos de Consenso [8], en los que los expertos tratan de alcanzar un alto nivel de acuerdo antes de tomar una decisión, mediante la discusión y el acercamiento de las posturas individuales de cada uno de ellos.

Clásicamente, los problemas de TDG han sido normalmente llevados a cabo por un pequeño número de expertos en entornos empresariales y organizativos. No obstante, la irrupción de nuevos paradigmas y entornos para tomar decisiones, como las redes sociales o la e-democracia, han hecho que los problemas de toma de decisiones en los que participan grandes grupos cobren una importancia cada vez mayor [6]. En procesos de consenso, especialmente aquellos en los que participan grandes grupos de expertos, puede ocurrir que algunos de los expertos participantes o subgrupos de ellos pretendan buscar un mayor interés particular que colectivo, de manera que no colaboren a la hora de acercar sus opiniones a las del resto del grupo [9]. Por este motivo, es conveniente identificar y tratar a dichos expertos o subgrupos, para evitar que su comportamiento sesgue o manipule la solución colectiva del problema de TDG, afectando así al desarrollo del proceso de consenso.

En ésta contribución, presentamos una propuesta basada en la teoría de conjuntos difusos [11] y computación con palabras [10], para estudiar el comportamiento de los participantes en procesos de consenso según su grado de cooperación, con el fin de identificar y gestionar aquellos comportamientos de expertos que no contribuyen a alcanzar un acuerdo. Para gestionar dichos comportamientos, ponderaremos a los expertos con pesos que indiquen el grado de importancia de sus opiniones dentro del grupo. Así, se tratará de premiar el peso de los expertos con comportamiento cooperativo, y penalizarlos en caso contrario [9].

Este trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 se

introducen los preliminares necesarios. En la Sección 3 se presenta la propuesta para la gestión de comportamientos no cooperativos en procesos de consenso. La Sección 4 presenta una simulación de consenso en toma de decisiones con grandes grupos, a la que se ha aplicado nuestra propuesta. Por último la sección 5 recogerá los comentarios finales.

2 Preliminares

En esta sección revisaremos algunos conceptos básicos sobre los problemas de TDG, los procesos de consenso y la computación con palabras.

2.1 Toma de Decisión en Grupo

La TDG implica la participación de varios decisores o expertos que han de tomar una decisión de manera colectiva, de cara a alcanzar una solución común a un problema. Un proceso de toma de decisión en el que participen varios expertos, donde cada uno de ellos aporta sus propios conocimientos y experiencia, dará como resultado, en ciertos contextos, una decisión de mayor calidad que la aportada por un único experto [4].

Formalmente, un problema de TDG se caracteriza por [3]:

- La existencia de un problema a resolver.
- Un conjunto $X = \{x_1, ..., x_n\} (n \geq 2)$, de *alternativas* o posibles soluciones entre las que escoger.
- Un conjunto $E = \{e_1, ..., e_m\} (m \geq 2)$, de individuos o *expertos* que expresan sus opiniones o preferencias sobre el conjunto de alternativas.

Los expertos normalmente utilizan una estructura de preferencia para expresar sus opiniones sobre las alternativas. Una de las estructuras de preferencia más utilizadas en problemas de TDG bajo incertidumbre es la *relación de preferencia difusa* [2, 3, 5]. Una relación de preferencia difusa P_i asociada al experto e_i se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_{P_i} : X \times X \rightarrow [0,1]$, y se representa para X finito mediante una matriz de dimensión $n \times n$:

$$P_i = \begin{pmatrix} - & \cdots & p_i^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{n1} & \cdots & - \end{pmatrix}$$

donde cada valoración $p_i^{lk} = \mu_{P_i}(x_l, x_k)$ representa el grado de preferencia de la alternativa x_l sobre x_k según el experto e_i, de forma que $p_i^{lk} > 0.5$ indica preferencia de x_l sobre x_k, $p_i^{lk} < 0.5$ indica preferencia de x_k sobre x_l, y $p_i^{lk} = 0.5$ indica indiferencia entre x_l y x_k.

Clásicamente, el proceso de selección de alternativas para resolver un problema de TDG se compone de dos fases [7] (ver Figura 1):

1. *Fase de Agregación*: Se combinan las preferencias de los expertos.
2. *Fase de Explotación*: Consiste en obtener una alternativa o subconjunto de alternativas que den solución al problema de toma de decisión.

Figura 1: Proceso clásico para la resolución de problemas de TDG.

2.2 Procesos de alcance de Consenso

Al aplicar el proceso de selección de alternativas en un problema de TDG, puede ocurrir que uno o varios expertos sientan que sus opiniones no han sido tenidas en cuenta para alcanzar la solución, lo que puede implicar que no estén de acuerdo con la misma. Dado que existen situaciones en las que es necesario un alto nivel de acuerdo entre los expertos participantes, surge la necesidad de aplicar un proceso de alcance de *consenso*, añadiéndose así una nueva fase al proceso de TDG con el objetivo de que los expertos lleguen a un alto nivel de acuerdo antes de tomar la decisión.

El consenso puede definirse como el acuerdo producido por consentimiento mutuo entre todos los miembros de un grupo o entre varios grupos [1, 8]. Se trata de un proceso dinámico e iterativo, coordinado por una figura humana conocida como moderador, encargada de supervisar y guiar a los expertos durante dicho proceso. La Figura 2 muestra un esquema general de los procesos de consenso, cuyas principales fases son [5, 6]:

1. *Expresión y Recopilación de preferencias*: Cada experto e_i proporciona sus preferencias sobre X (ej. mediante una relación de preferencia difusa P_i).
2. *Determinar el grado de consenso*: El moderador calcula el nivel de acuerdo alcanzado en el grupo, cr, como un valor en el intervalo, $[0,1]$ (donde un valor de 1 indica acuerdo unánime de todos los expertos sobre todas las alternativas). Para ello, se utilizan medidas de consenso, normalmente basadas en diferentes medidas de similitud y operadores de agregación [3, 5, 6].
3. *Control de consenso*: Se compara cr con un umbral de consenso mínimo deseado, $\mu \in [0,1]$, establecido a priori por el moderador. Si $cr > \mu$, se ha alcanzado consenso y se pasa al proceso de selección; en caso contrario, se procede a la siguiente fase de discusión.

4. *Generación de recomendaciones*: El moderador calcula la preferencia colectiva del grupo, P_c, mediante la agregación de las preferencias individuales de los expertos. En base a P_c, identifica a aquellos expertos e_i y valoraciones p_i^{lk} que se encuentran más alejados del consenso, y recomienda a dichos expertos su modificación (aumentar o disminuir el valor de la valoración), para aumentar el grado de acuerdo alcanzado en la siguiente ronda. Cada recomendación de cambio generada consiste en una terna $(e_i,(x_l,x_k),Dirección)$, que indica que el experto e_i, debe modificar la preferencia p_i^{lk}, en la dirección dada por $Dirección \in \{Aumentar, Disminuir\}$.

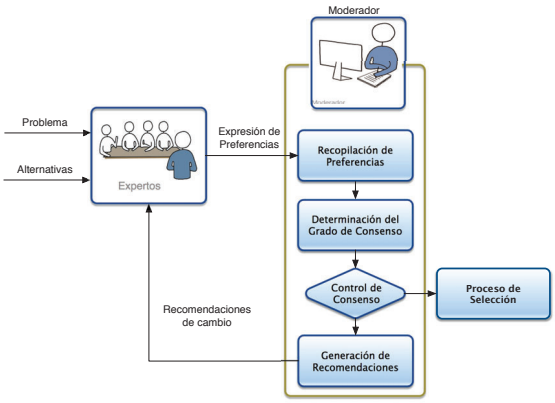


Figura 2: Esquema general de procesos de consenso.

El proceso de consenso normalmente implica la necesidad de que los expertos revisen y modifiquen sus opiniones, en base a las recomendaciones recibidas, con el objeto de acercarlas a las del resto del grupo. No obstante, puede darse el caso de que algunos expertos no cooperen tal y como se les indica en dichas recomendaciones, dando prioridad a sus intereses personales sobre los del grupo. Este tipo de comportamientos es el que se pretende identificar y gestionar en este trabajo, como se detallará en la Sección 3.

2.3 Computación con palabras

Los seres humanos utilizan términos lingüísticos para comunicarse, razonar y comprender el entorno que les rodea. Las máquinas, en cambio, requieren símbolos mucho más formales [10]. Una de las propuestas más utilizadas para establecer un nexo de comunicación comprensible entre seres humanos y máquinas, es el llamado paradigma de computación con palabras [12], propuesto por Zadeh y basado en la teoría de conjuntos difusos [11]. Ésta metodología proporciona un marco de trabajo en el que los conceptos pueden ser modelados mediante conjuntos difusos, de manera que sean entendidos tanto por las máquinas como por los seres humanos.

Un concepto fundamental en computación por palabras es el de término lingüístico. Entendemos por término lingüístico cualquier palabra usada para expresar el valor de un atributo. Por ejemplo, si tenemos un atributo llamado *distancia*, algunos posibles términos lingüísticos para expresar el valor de dicho atributo podrían ser: "cercana", "media", "lejana", "muy lejana". De este modo, con la ayuda de los términos lingüísticos, los humanos podemos comprender y razonar mejor sobre nuestro entorno.

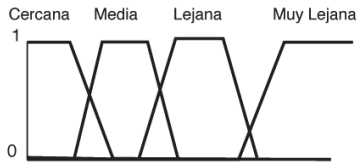


Figura 3: Diferentes términos lingüísticos para el atributo *distancia*

Dada la inherente vaguedad e imprecisión que presentan los valores asociados a los términos lingüísticos, los conjuntos difusos suponen una herramienta útil para formalizar los conceptos asociados a los mismos (ver Figura 3), permitiendo así la comprensión y realización de procesos computacionales sobre dichos conceptos por parte de las máquinas. Si **P** es un término (ej. "cercana") de un vocabulario asociado con un atributo **A** (ej. *distancia*), podemos expresar **P** como un subconjunto difuso en el dominio $Y \subseteq \mathbb{R}$ de **A**. Dado un valor $y \in Y$, su grado de pertenencia en **P**, $\mu_{\mathbf{P}}(y) \in [0,1]$, indica el grado de compatibilidad del valor y con el término lingüístico **P**.

La elección del vocabulario de términos lingüísticos para describir un atributo, así como el significado asociado a dichos términos, representado por conjuntos difusos, es una tarea a realizar por parte de los seres humanos, quienes deben facilitar al ordenador los términos que se van a utilizar y su significado mediante conjuntos difusos.

3 Gestión de Expertos no Cooperativos en Procesos de Consenso

En esta sección, presentamos una metodología para gestionar el comportamiento de expertos no cooperativos en procesos de consenso llevados a cabo durante la resolución de problemas de TDG. Para ello, en primer lugar definiremos las etapas necesarias para llevar a cabo la gestión de los comportamientos de dichos expertos. Seguidamente, se integrará la propuesta en el esquema general de procesos de consenso revisado en la sección anterior.

Yager propuso en [9] un enfoque para penalizar a aquellos expertos que intentan manipular la solución en un problema de TDG, para desviar la opinión colectiva a su favor a través de los valores de sus propias preferencias. Dicho enfoque está basado en la asignación de pesos o grados de importancia a los expertos, de manera que al disminuir el valor de algunos de estos pesos, la opinión de los exper-

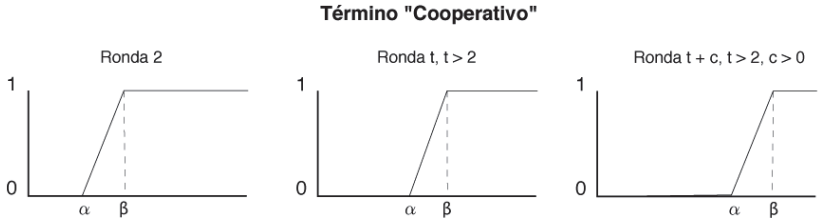


Figura 4: Evolución del conjunto difuso asociado al término lingüístico "cooperativo" a lo largo del proceso de consenso

tos asociados a los mismos tenga menor importancia que la del resto de expertos del grupo, a la hora de obtener una opinión colectiva que dé solución al problema de TDG. El enfoque presentado en este trabajo parte de las ideas expuestas por Yager, y consiste en asignar a cada experto participante $e_i \in E$ un peso o grado de importancia, $w_i^t \in [0,1]$, siendo $t \in \mathbb{N}$ la ronda de discusión actual en el proceso de consenso. Los pesos de los expertos se utilizarán a la hora de calcular la preferencia colectiva del grupo, P_c (obtenida aplicando un operador de agregación ponderada sobre las preferencias individuales [6]), con el fin de que las opiniones de los expertos más cooperativos (quienes tendrán un mayor peso) sean tenidas en cuenta en mayor medida a la hora de calcular P_c.

El modelo que proponemos para la gestión de comportamientos se compone de las tres fases siguientes:

1. *Cálculo de coeficientes de cooperación.*
2. *Ponderación de expertos.*
3. *Normalización de pesos.*

A continuación, se describirá con mayor detalle cada una de las fases de la propuesta.

3.1 Cálculo de coeficientes de cooperación.

Sea $\sharp REC_i^t$ el número de recomendaciones proporcionadas a e_i para modificar alguna/s de sus valoraciones p_i^{lk} antes de comenzar la ronda de consenso t, y sea $\sharp COOP_i^t$ el número de recomendaciones que e_i modifica siguiendo las indicaciones en dicha ronda. Definimos el coeficiente de comportamiento cooperativo o *coeficiente de cooperación* $BEH_i^t \in [0,1]$ de e_i en la ronda t como:

$$BEH_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si } \sharp REC_i^t = 0, \\ \frac{\sharp COOP_i^t}{\sharp REC_i^t} & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1)$$

El valor de este coeficiente indica el grado en el que el experto modifica sus opiniones según se le ha indicado en las recomendaciones de cambio recibidas. Si en una ronda determinada el experto no recibe ninguna recomendación, significa que todas sus valoraciones se encuentran cercanas al consenso, por lo que en tal caso su coeficiente de cooperación valdrá 1.

3.2 Ponderación de expertos.

En esta fase, utilizaremos las nociones anteriormente revisadas sobre conjuntos difusos y computación con palabras, para asignar el peso de cada experto en función de su coeficiente de cooperación calculado en la fase anterior. Para ello, se define la semántica del término lingüístico "cooperativo", mediante un subconjunto difuso en el intervalo unitario, con la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_{COOP}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \alpha, \\ \frac{y-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha \leq y < \beta, \\ 1 & \text{si } y \geq \beta. \end{cases} \quad (2)$$

siendo $\alpha, \beta, y \in [0,1]$, $\alpha < \beta$. Así, el peso w_i^t del experto e_i en la ronda t viene dado por el grado de pertenencia del coeficiente de comportamiento cooperativo BEH_i^t a este conjunto difuso:

$$w_i^t = \mu_{COOP}(BEH_i^t) \quad (3)$$

Además, se considerará que el hecho de no cooperar cuando el proceso de consenso se encuentra en un estado avanzado, tras varias rondas de discusión, debe suponer una mayor penalización que el no cooperar en las primeras rondas del mismo, donde se es más permisivo en el comportamiento de los expertos. Para reflejar esto, proponemos el uso flexible de diferentes conjuntos difusos que modelen el significado del término "cooperativo" en cada ronda, aumentando gradualmente los valores de α, β de forma que el soporte del conjunto difuso [11] sea más reducido a medida que el proceso de consenso avance. La Figura 4 ilustra este proceso.

3.3 Normalización de pesos.

Dado que en cada ronda de consenso se obtendrán diferentes valores para los pesos w_i^t de los expertos, en esta fase se aplica una normalización de dichos pesos, como sigue:

$$\hat{w}_i^t = \frac{w_i^t}{\sum_{i=1}^{m} w_i^t} \quad (4)$$

siendo $\hat{w}_i^t \in [0,1]$ y $\sum \hat{w}_i^t = 1$. Una vez normalizados los pesos, estos serán tenidos en cuenta para el cálculo de la preferencia colectiva en la ronda actual.

3.4 Integración en el proceso de consenso

Una vez presentada la propuesta para la gestión de comportamientos en procesos de consenso, a continuación mostramos su integración en dichos procesos, mediante la extensión del esquema general para llevar a cabo los procesos de consenso (Fig. 2), tal y como muestra la Figura 5. La gestión de comportamientos se lleva a cabo por primera vez en la segunda ronda de discusión ($t > 1$), ya que el cálculo de pesos está basado en las recomendaciones de cambio que recibe cada experto al finalizar la ronda anterior.

Al comienzo del proceso de consenso ($t = 1$), se asume que todos los expertos tienen igual grado de importancia. Posteriormente, el peso de cada experto variará en función de su comportamiento en cada ronda del mismo. Por ejemplo, el peso de un experto que no coopera en las dos primeras rondas del proceso de consenso deberá verse decrementado tras dichas rondas. En cambio, si en rondas sucesivas el experto decide cooperar acercando sus opiniones a las del resto del grupo, su peso deberá aumentar nuevamente.

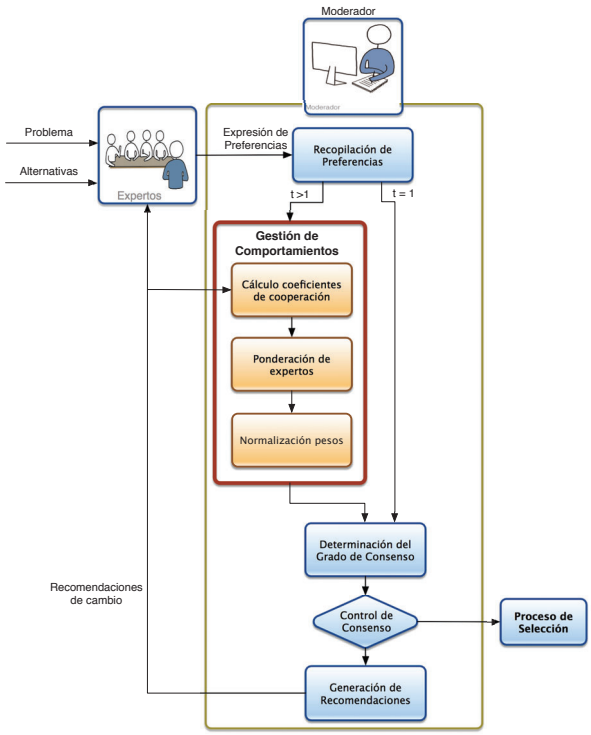


Figura 5: Esquema de Procesos de Consenso con gestión de comportamientos

4 Ejemplo de aplicación

En esta sección mostramos un ejemplo para ilustrar el uso de la propuesta para la gestión de comportamientos no cooperativos, mediante la simulación de un proceso de consenso para la resolución de un problema de TDG con un grupo relativamente grande.

Un comité formado por 40 expertos, $E = \{e_1, \ldots, e_{40}\}$, desea llegar a un acuerdo sobre la elección de una propuesta para el diseño de un parque en la ciudad de Jaén, de entre cuatro posibles propuestas, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. El umbral de acuerdo mínimo deseado es $\mu = 0.85$.

Los parámetros iniciales del conjunto difuso "cooperativo" son: $\alpha = 0.2$ y $\beta = 0.5$. Tras la cuarta ronda de discusión, se aumenta el valor de cada uno de estos parámetros en 0.1 en cada ronda, hasta que cada uno de ellos alcance el valor 1. Con esto conseguimos ser más restrictivos en el concepto de comportamiento cooperativo conforme avance el proceso de consenso (Fig. 4).

Los expertos presentan diferentes comportamientos:

1. *Cooperativo* (expertos $e_1 - e_{30}$): los expertos aplican todos los cambios necesarios en sus preferencias según se les indica en las recomendaciones recibidas, a lo largo de todo el proceso.
2. *Indefinido* (expertos $e_{31} - e_{40}$): el comportamiento de los expertos varía a lo largo del proceso de consenso, pudiendo aplicar los cambios sugeridos o ignorarlos.

La Tabla 1 muestra la evolución de los pesos de los expertos a lo largo del proceso de consenso, habiendo alcanzado el nivel de acuerdo deseado tras nueve rondas de discusión. Como puede verse, los expertos que siempre cooperan ($e_1 - e_{30}$) presentan un peso mayor a lo largo del proceso. En cambio, los expertos con un comportamiento indefinido presentan diferentes pesos en función de su grado de cooperación, no siendo nunca superiores al peso de los expertos totalmente cooperativos en la ronda correspondiente. Al aplicar normalización a los pesos, se consigue que el peso de los expertos cooperativos se compense con el de aquellos expertos que han sido penalizados por no cooperar lo suficiente.

Para ilustrar de forma detallada el cálculo de pesos según diferentes comportamientos, a continuación mostramos el procedimiento para calcular el peso de e_{31} en $t = 5$ y $t = 8$:

- $t = 5$: En esta ronda, los parámetros del conjunto difuso "cooperativo" tienen los valores $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.6$. e_{31} recibe $\sharp REC_{31}^5 = 8$ recomendaciones de cambio y modifica $\sharp COOP_{31}^5 = 3$ de sus valoraciones según dichas recomendaciones. Su coeficiente de cooperación es $BEH_{31}^5 = 3/8 = 0.375$, y su peso sin normalizar es:

$$w_{31}^5 = \mu_{COOP(5)}(0.375) = \frac{0.375 - 0.3}{0.6 - 0.3} = 0.25$$

  Tras normalizar, el peso de e_{31} es de:

$$\hat{w}_{31}^5 = \frac{w_{31}^5}{\sum_{i=1}^{40} w_i^5} = 0.0066$$

Tabla 1: Pesos normalizados de los expertos, $\hat{w}_i^t$, a lo largo del proceso de consenso

t	$e_1 - e_{30}$	e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{34}	e_{35}	e_{36}	e_{37}	e_{38}	e_{39}	e_{40}
2	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
3	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025	0.025
4	0.0256	0.0256	0.0256	0.0256	0	0.0256	0.0256	0.0256	0.0256	0.0256	0.0256
5	0.0265	**0.0066**	0.0265	0.0265	0.0176	0.0029	0.0265	0.0265	0.0265	0.0265	0.0176
6	0.0277	0.0026	0	0.0277	0.0277	0.0246	0.0277	0.0277	0.0277	0	0.0026
7	0.0263	0.0263	0.0263	0.0263	0.0263	0.0263	0.0263	0.0263	0.0263	0	0
8	0.0261	**0**	0.0261	0.0261	0.0261	0.0261	0.0261	0.0261	0.0261	0.0058	0.0261
9	0.0267	0.0044	0.0267	0.02678	0.0267	0.0267	0.0267	0.0267	0.0267	0.0044	0

- $t = 8$: e_{31} recibe 4 recomendaciones de cambio, de las cuales obedece 2, luego su grado de cooperación es mayor en este caso: $BEH_{31}^8 = 2/4 = 0.5$. Sin embargo, se tiene que $\alpha = 0.6$ y $\beta = 0.9$, es decir, tras un elevado número de rondas se es más restrictivo en el concepto de comportamiento cooperativo:

$$w_{31}^8 = \mu_{COOP(8)}(0.5) = 0$$

  De donde $\hat{w}_{31}^8 = 0$.

Una vez alcanzado el consenso, se aplica un proceso de selección para escoger la mejor alternativa [7], basado en el cálculo de la preferencia colectiva del grupo mediante un operador de agregación que permita tener en cuenta en mayor medida las opiniones de expertos con mayor peso.

5 Comentarios Finales

En este trabajo, hemos presentado una propuesta para gestionar comportamientos no cooperativos en procesos de consenso, con el fin de resolver problemas de TDG con un gran número de expertos, en el que se trata de premiar a los expertos que cooperan para llegar al consenso y penalizar a los expertos cuyo comportamiento no es cooperativo, utilizando para ello la teoría de conjuntos difusos y computación con palabras. Entre los trabajos futuros más inmediatos, nos proponemos definir enfoques que permitan utilizar diferentes conjuntos difusos de forma flexible, en función del comportamiento de cada experto y el estado del proceso de alcance de consenso en un momento dado.

6 Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto de Investigación AGR-6581.

Referencias

[1] C. Butler, A. Rothstein : On Conflict and Consensus: A Handbook on Formal Consensus Decision Making. *Takoma Park*, 2006.

[2] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F. Chiclana : A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, vol. 32, no. 3, pp. 394–402, 2002.

[3] J. Kacprzyk: Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 18, no. 2, pp. 105-118, 1986.

[4] J. Lu, G. Zhang, D. Ruan, F. Wu. Multi-Objective Group Decision Making. *Imperial College Press*, 2006.

[5] F. Mata, L. Martínez, E. Herrera-Viedma: An adaptative consensus support model for group decision-making problems in a multigranular fuzzy linguistic context. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 279–290, 2009.

[6] I. Palomares, L. Martínez, F. Herrera: A Consensus Model to Detect and Manage Non-Cooperative Behaviors in Large Scale Group Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, In Press. DOI: 10.1109/TFUZZ.2013.2262769.

[7] M. Roubens: Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy sets and Systems*, vol. 90, no. 2, pp. 199–206, 1997.

[8] S. Saint, J.R. Lawson: Rules for Reaching Consensus. A Modern Approach to Decision Making. *Jossey-Bass*, 1994.

[9] R.R. Yager: Penalizing Strategic Preference Manipulation in Multi-Agent Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 3, Jun 2001.

[10] R.R. Yager: Concept Representation and Database Structures in Fuzzy Social Relational Networks. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, vol. 40, no. 2, Mar 2010.

[11] L.A. Zadeh: Fuzzy Sets, *Information and Control*, vol. 8, no. 2, pp. 338-353, 1965.

[12] L.A. Zadeh: Fuzzy logic equals computing with words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 2, pp. 103–111, May. 1996.

Modelo lingüístico de toma de decisiones dinámicas muticriterio con información heterogénea

Santiago Zapata C.[1], **Macarena Espinilla**[2], **Luis Martínez**[2]

[1]*Departamento de Informática. Universidad Tecnológica Metropolitana. Chile*, szapata@utem.cl
[2]*Departamento de Informática. Universidad de Jaén. España*, {macarena.espinilla,luis.martinez}@ujaen.es

Resumen

La toma de decisión dinámica multicriterio está centrada en seleccionar la mejor alternativa de acuerdo a las valoraciones de una serie de criterios, los cuales caracterizan al conjunto de alternativas solución, en múltiples periodos de tiempo. Debido a la imprecisión e incertidumbre de la información relacionada en el problema de decisión y a la naturaleza de los criterios, usualmente, las valoraciones de los criterios están expresadas en diferentes dominios de expresión: numérico, intervalar y lingüísticos. En estas situaciones de decisión, el problema se define en un contexto heterogéneo, no encontrándose en la literatura ningún modelo de toma de decisión dinámico multicriterio que afronte dicho contexto. En esta contribución se propone un modelo lingüístico de toma de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea, el cual permite expresar las valoraciones de las alternativas en diferentes dominios de expresión, ofreciendo resultados lingüísticos para facilitar la comprensión de los mismos. Finalmente, se presenta un ejemplo ilustrativo para mostrar el funcionamiento del modelo lingüístico de toma de decisión dinámico multicriterio propuesto.

Palabras Clave: Toma de decisión, multicriterio, dinámico, información heterogénea, 2-tupla lingüística

1 INTRODUCCIÓN

La Toma de Decisión es una actividad habitual en el mundo real y juega un rol importante en multitud de campos como la ingeniería, la economía, las finanzas o la evaluación [6]. Un esquema de resolución de un problema de toma de decisión consta de dos fases: (i) la fase de agregación donde se obtienen las valoraciones colectivas de cada alternativa y (ii) una fase de explotación para obtener el conjunto solución de alternativas al problema [6].

Existen situaciones de decisión donde es necesario tener en cuenta las valoraciones de las alternativas en múltiples periodos de tiempo para escoger la mejor alternativa que resuelve el problema de decisión en cada periodo [1]. La mencionada situación de decisión se ha denominado *dinámica* y describe también situaciones de decisión donde a lo largo del tiempo varían el número de elementos del problema, ya sea por la inclusión o eliminación de alternativas, criterios o expertos.

En [1] fue propuesto un marco de decisión dinámico para la resolución de problemas de toma de decisión multicriterio donde no es necesario guardar todas las valoraciones de las alternativas a lo largo del tiempo. Para ello, funciones de evaluación y operadores de agregación adecuados son utilizados en cada periodo para calcular una valoración dinámica para cada alternativa que tienen en cuenta el desempeño de la alternativa en el periodo actual, valoración no-dinámica, y su desempeño en los periodos anteriores. Así, con la selección de los operadores de agregación adecuados se evita guardar toda la información del problema de decisión, siendo necesario guardar únicamente la valoración dinámica de cada alternativa en el periodo anterior al actual.

En dicho marco dinámico las valoraciones de los criterios deben estar expresadas numéricamente en el intervalo unidad. Sin embargo, debido a la imprecisión e incertidumbre de la información que puede aparecer en los problemas de decisión o bien por la naturaleza de los criterios o la falta de información de los mismos, puede ser adecuado que las valoraciones de los criterios estén expresadas en diferentes dominios de expresión como el numérico, el intervalar y el lingüístico [3], definiéndose un contexto de decisión con *información heterogénea*.

Esta contribución propone un modelo lingüístico de toma de decisión dinámico para manejar información heterogénea. Para ello, se propone un proceso de agregación

multi-etapa basado en la extensión del modelo lingüístico 2-tupla [2] para manejar información heterogénea [3]. Dicha extensión propone una serie de funciones de transformación que nos permitirán unificar las valoraciones expresadas en diferentes dominios de expresión en valoraciones 2-tuplas lingüísticas [3], siendo posible también la utilización de operadores de agregación adecuados que eviten guardar la información de todo el problema de decisión a lo largo del tiempo. Finalmente, es destacable que el modelo propuesto proporcionará valoraciones sobre las alternativas, tanto valoraciones dinámicas como no-dinámicas, las cuales facilitarán la interpretación de los resultados.

Este trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 revisamos los conceptos básicos usados en nuestra propuesta. En la Sección 3, presentamos el nuevo modelo lingüístico de toma de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea. Con el objetivo de ilustrar el modelo propuesto, en la Sección 4 se presenta la resolución de un problema de toma de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea. Finalmente, indicaremos una serie de conclusiones.

2 PRELIMINARES

El modelo lingüístico de toma de decisiones propuesto en esta contribución sigue el marco de decisión dinámico multicriterio propuesto en [1] basándose en el modelo de representación lingüístico 2-tupla [2] y su extensión para el manejo de información heterogénea [3]. En esta sección revisamos brevemente dichos conceptos.

2.1 MARCO DE DECISIÓN DINÁMICO MULTICRITERIO

En un problema de toma de decisión dinámico multicriterio [1] se define un número positivo discreto de periodos de decisión $T = \{1,2,\ldots\}$, siendo A_t el conjunto de alternativas disponibles en el momento $t \in T$. En cada periodo de tiempo t, para cada alternativa disponible $a \in A_t$, una valoración no dinámica es calculada $R_t(a) \in [0,1]$, utilizando un operador de agregación $Agg_1 : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ que combina las valoraciones del conjunto de criterios $C_t = \{c_1,\ldots,c_n\}$ expresadas en el intervalo unidad.

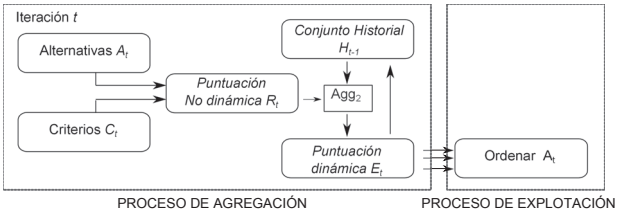


Figura 1: Marco de decisión dinámico multicriterio

La información involucrada en el problema de decisión sobre el conjunto de alternativas a lo largo del tiempo es llevada a cabo a través de una iteración entre el periodo actual y el histórico de los periodos previos que es definido como: $H_0 = \emptyset;\ H_t = \bigcup_{t'<t} A'_t;\ t,t' \in T$

La naturaleza dinámica del proceso de decisión (ver Figura 1) es soportada por una función de evaluación $E_t(a)$ que es definida para cada $t \in T$ como: $E_t(a) : H_t \longrightarrow [0,1]$.

$$E_t(a) = \begin{cases} R_t(a), & a \in A_t \setminus H_{t-1} \\ Agg_2(E_{t-1}(a), R_t(a)), & a \in A_t \cap H_{t-1} \\ E_{t-1}(a), & a \in H_{t-1} \setminus A_t \end{cases} \quad (1)$$

Definiéndose $Agg_2 : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ como un operador de agregación asociativo que puede aplicar diferentes tipos de refuerzo para el conjunto de alternativas, considerando la actitud en el proceso de toma de decisión (ver [5]). Así, pueden utilizarse como operadores de agregación aquellos que están basados en t-normas y t-conormas [8], ya que cumplen la propiedad asociativa, cumpliendo también la propiedad de compensación [9]:

$$min(x_1,\ldots,x_m) \leqslant Agg_2(x_1,\ldots,x_m) \leqslant max(x_1,\ldots,x_m)$$

2.2 MODELO LINGÜÍSTICO BASADO EN 2-TUPLAS

El modelo lingüístico de representación basado en 2-tuplas está basado en el concepto de *traslación simbólica* [2] y representa la información lingüística a través de una 2-tupla (s,α), donde $s \in S = \{s_0,\ldots,s_g\}$ es un conjunto de términos lingüísticos y $\alpha \in [-.5,.5)$ es un valor numérico que representa la traslación simbólica [2].

Para operar con información lingüística, este modelo de representación define la función $\Delta_S : [0,g] \rightarrow \langle S \rangle = S \times [-0.5,0.5)$ que permite transformar un valor numérico contenido en el intervalo $[0,g]$ en la 2-tupla lingüística que representa la información equivalente:

$$\Delta_S(\beta) = (s_i,\alpha), \begin{cases} s_i, & i = round(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-.5,.5) \end{cases}$$

Cabe señalar que $\Delta_S^{-1} : \langle S \rangle \longrightarrow [0,g]$ es definida como $\Delta_S^{-1}(s_i,\alpha) = i + \alpha$. De este modo, una 2-tupla lingüística $\langle S \rangle$ queda identificada con su valor numérico en $[0,g]$.

Operadores de agregación que obtienen un valor lingüístico 2-tupla a partir de un conjunto de valoraciones lingüísticas en 2-tupla han sido propuestos en la literatura [2, 4].

$$2T - Agg : \langle S \rangle^n \longrightarrow \langle S \rangle$$

2.3 EXTENSIÓN BASADA EN 2-TUPLA PARA EL MANEJO DE INFORMACIÓN HETEROGÉNEA

En [3] fueron definidas un conjunto de funciones de transformación que permiten transformar valores expresados en diferentes dominios de expresión (numérico, intervalar o lingüístico) a valores lingüísticos expresados en 2-tuplas de un conjunto lingüístico seleccionado denominado *Conjunto Básico de Términos Lingüísticos* (BLTS) y notado como $S_{BLTS} = \{s_i, i = 0, \ldots, g\}$, el cual es seleccionado con el objetivo de guardar el mayor conocimiento posible (ver [3]). Para ello, se sigue el esquema mostrado en la Figura 2.

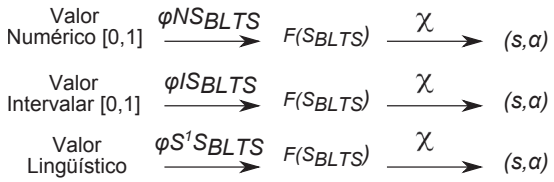


Figura 2: Transformación a valores en 2-tuplas lingüística

En primer lugar, la información heterogénea es unificada en conjuntos difusos en el BLTS $F(S_{BLTS})$, usando una función de transformación adecuada al dominio de expresión:

- *Dominio numérico*. Cuando $v \in [0,1]$ una función de transformación numérica $\varphi_{NS_{BLTS}} : ([0,1]) \rightarrow F(S_{BLTS})$ es aplicada:

$$\varphi_{NS_{BLTS}}(v) = \sum_{i=0}^{g} (s_i / \gamma_i) \tag{2}$$

  donde $\gamma_i = \mu_{s_i}(v) \in [0,1]$ es el grado de pertenencia de v a $s_i \in S_{BLTS}$.

- *Dominio intervalar*. Cuando $v \in P([0,1])$, una función de transformación intervalar $\varphi_{IS_{BLTS}} : P([0,1]) \rightarrow F(S_{BLTS})$, es aplicada:

$$\varphi_{IS_{BLTS}}(v) = \sum_{i=0}^{g} (s_i / \gamma_i) \tag{3}$$

  donde $\gamma_i = \max_y \min\{\mu_I(y), \mu_{s_i}(y)\}$, con $l = \{0, \ldots, g\}$, siendo $\mu_I(\cdot)$ y $\mu_{s_i}(\cdot)$ funciones de pertenencia asociadas con el intervalo $I \in P([0,1])$ y el término $s_l \in S_{BLTS}$, respectivamente.

- *Dominio lingüístico*. Cuando $v \in S^k$, tal que $S^k = \{s_0^k, \ldots, s_{g_k}^k\}$ y $g_k < g$, la función de transformación lingüística$\varphi_{S^k S_{BLTS}} : S^k \rightarrow F(S_{BLTS})$ es aplicada:

$$\varphi_{S^k S_{BLTS}}(s_l^k) = \sum_{i=0}^{g} (s_i / \gamma_i) \tag{4}$$

  donde $\gamma_i = \max_y \min\{\mu_{s_l}(y), \mu_{s_i}(y), i = 0, \ldots, g\}$.

En segundo lugar, los conjuntos difusos en el BLTS son transformados a valores 2-tupla por la función $\chi : F(S_{BLTS}) \rightarrow \langle S \rangle$ definida como:

$$\chi(\{(s_0, \gamma_0), (s_1, \gamma_1), \ldots, (s_g, \gamma_g)\}) = \Delta_S \left(\frac{\sum_{i=0}^{g} i\,\gamma_i}{\sum_{i=0}^{g} \gamma_i} \right) = (s, \alpha) \tag{5}$$

3 MODELO LINGÜÍSTICO DE TOMA DE DECISIONES DINÁMICO MULTICRITERIO CON INFORMACIÓN HETEROGÉNEA

En esta sección se presenta un modelo lingüístico de toma de decisiones dinámico multicriterio con información heterogénea, el cual ofrece valoraciones colectivas lingüísticas de las alternativas al final de cada periodo.

En la Figura 3 se ilustra el modelo propuesto, el cual incluye una fase de agregación multietapa y una fase de explotación, ambas son detalladas a continuación.

3.1 Fase de Agregación Multietapa

El modelo propuesto en esta contribución está compuesto por una fase de agregación multietapa, la cual se divide en 4 etapas donde se encuentra un ciclo iterativo por cada periodo de tiempo que comprende desde la etapa 2 hasta la etapa 4.

A continuación, se detalla cada etapa del proceso de agregación.

A - Escoger un conjunto básico de términos lingüísticos.

Las valoraciones de los múltiples criterios expresadas en diferentes dominios de expresión serán unificadas en un dominio lingüístico seleccionado (ver [3]), el cual es notado como S_{BLTS}. Además, las valoraciones colectivas de cada alternativa, tanto dinámicas como no-dinámicas, serán también expresadas en dicho dominio lingüístico con el objetivo de facilitar la comprensión de los resultados.

B- Unificación de la información en valoraciones lingüísticas en 2-tuplas en S_{BLTS}.

Cada valoración $v_t^i \in \{N, P([0,1]), S^k\}$ del periodo t sobre la alternativa $a \in A_t$ según el criterio $c_i \in C_t$ es transformada a un valor lingüístico 2-tupla a través de la función de transformación correspondiente a su dominio de expresión (Ecuación (2), (3) ó (4)) y la Ecuación (5). Por tanto, en esta fase se unifican todas las valoraciones de la alternativa al dominio de expresión lingüístico seleccionado $(s, \alpha)_t^j \in \langle S_{BLTS} \rangle$.

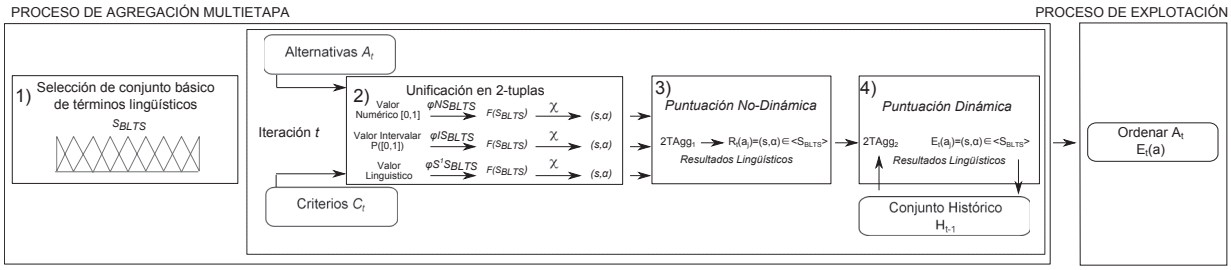


Figura 3: Modelo lingüístico de toma de decisiones dinámico multicriterio con información heterogénea

C- Valoración no-dinámica para cada alternativa.

Para cada alternativa disponible en el periodo t es calculada una valoración colectiva lingüística no-dinámica, agregando las valoraciones lingüísticas unificadas de cada alternativa en el periodo t a través de un operador de agregación para 2-tuplas lingüísticas $2TAgg_1$.

$$R_t(a) = 2TAgg_1((s,\alpha)_t^i; i = 1,\ldots,n) = (s,\alpha)_t \in \langle S_{BLTS}\rangle$$

Es destacable que la valoración colectiva no-dinámica está expresada en un dominio lingüístico, el cual facilita la compresión de los resultados.

D- Valoración dinámica para cada alternativa.

Un vez que las valoraciones no-dinámicas han sido obtenidas, es calculada una valoración dinámica para cada alternativa disponible en el periodo t. Para ello son utilizadas una función de evaluación E_t y un operador de agregación adecuado Agg_2, siendo interesante el uso de t-norma y t-conorma [8] $U : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, ya que cumplen la propiedad de asociatividad y otras como la conmutativa, la monotonicidad y la condiciones frontera.

Los operadores de agregación asociativos brindan la posibilidad de no guardar toda la información del problema de decisión, siendo necesario tan solo guardar la valoración dinámica de la última iteración $t-1$.

$$E_t(a) = \begin{cases} R_t(a), & a \in A_t \setminus H_{t-1} \\ Agg_2(E_{t-1}(a), R_t(a), & a \in A_t \cap H_{t-1} \\ E_{t-1}(a), & a \in H_{t-1} \setminus A_t \end{cases} \quad (6)$$

Dado que las t-normas y t-conormas requieren valores expresados en el intervalo unidad, en el modelo propuesto es necesario que las valoraciones expresadas en 2-tuplas lingüísticas se normalicen a valores en dicho intervalo. Para ello, es utilizada la función Δ_S^{-1} para transformar las valoraciones expresadas en 2-tuplas lingüística a un valor numérico en el intervalo de granularidad $[0,g]$, el cual es normalizado posteriormente al intervalo $[0,1]$, dividiendo por la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos g.

Una vez que la información se ha agregado a través de función adecuado, se obtiene un valor expresado en el intervalo unidad. Así, multiplicando dicho valor por la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos g, se obtiene el valor agregado en el intervalo $[0,g]$, el cual puede ser transformado a un valor expresado en 2-tuplas lingüísticas a través de la función Δ_S^{-1}. De este modo, las valoraciones dinámicas obtenidas de cada alternativa se encuentran expresadas en 2-tuplas lingüísticas, facilitando su interpretación.

3.2 Fase de explotación

Una vez que se han obtenido las valoraciones dinámicas lingüísticas de las alternativas disponibles para cada iteración, la fase de explotación es llevada a cabo. Para ello, el conjunto de alternativas disponibles es ordenado a partir de las valoraciones dinámicas lingüísticas calculadas en cada iteración.

4 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Con el objetivo de mostrar el funcionamiento del modelo lingüístico de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea, en esta sección se proporciona un ejemplo ilustrativo.

Se desean seleccionar entre un equipo de 10 atletas los 4 que formarán parte en una competición de carrera de relevos que se desarrolla en tres fases. Para escoger a los atletas, el seleccionador evaluará el desempeño de los atletas en una prueba de selección antes de cada fase de competición $T = \{1,2,3\}$. Para valorar el desempeño de los atletas son considerados un criterio de beneficio *calidad en la transferencia del testigo* y dos criterios de coste: *velocidad* y *metros recorridos en la entrega testigo* $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, respectivamente. Según la naturaleza de los criterios, c_1 se valorará en un dominio de expresión lingüístico (ver Figura 4), c_2 se valorará en un dominio de expresión numérico y c_3 en un dominio de expresión intervalar.

A continuación se muestra la resolución del problema de toma de decisión siguiendo el modelo propuesto en la sec-

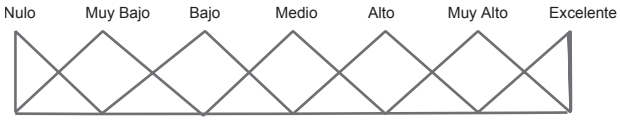


Figura 4: Dominio de expresión lingüístico

ción anterior.

En primer lugar es escogido el dominio de expresión lingüístico donde se expresarán las valoraciones colectivas, dinámicas y no-dinámicas. En este problema, el dominio escogido es el mostrado en la Figura 4, el cual coincide con el dominio de expresión utilizado para expresar las valoraciones del criterio c_1.

Tabla 1: Información de la primera prueba $t = 1$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
c_1	E	A	E	MA	M	A	M	MA
c_2	80,0	84,0	79,0	72,0	68,0	77,0	75,0	74,0
c_3	1,5 2,0	0,5 1,0	1,5 2,0	0,5 1,0	1,0 1,5	0,5 1,0	0,5 1,0	1,0 1,5

En la Tabla 1 son mostradas las valoraciones de los atletas en la primera prueba de selección que deberán ser unificadas al dominio de expresión lingüístico S_{BLTS}. Previamente, las valoraciones de los criterios de coste c_2 y c_3 que estan expresadas en un dominio numérico e intervalar respectivamente, son normalizadas al intervalo unidad. Para las valoraciones sobre el criterio c_2 la normalización se realiza mediante la Ecuación 7.

$$v_{ij} = 1 - \frac{\overline{v_{ij}} - min(v_{ij})}{max(v_{ij}) - min(v_{ij})} \tag{7}$$

La Tabla 2 muestra la información unificada en 2-tuplas lingüísticas. Con el objetivo de clarificar el proceso de unificación de la información heterogénea a 2-tuplas lingüísticas, a continuación se muestran los cálculos relacionados con las valoraciones del atleta 1.

Ejemplo 1.

$\chi\left(\varphi_{SS_{BLTS}}(E)\right) =$
$\chi\left(\{(s_0,0),(s_1,0),(s_2,0),(s_3,0),(s_4,0),(s_5,.5),(s_6,1)\}\right) =$
$(s_6,-.4)$

$\chi\left(\varphi_{NS_{BLTS}}(\overline{80})\right) = \chi\left(\varphi_{NS_{BLTS}}(0.20)\right) =$
$\chi\left(\{(s_0,0),(s_1,.5),(s_2,.5),(s_3,0),(s_4,0),(s_5,0),(s_6,0)\}\right)$
$= (s_2,-.5)$

$\chi\left(\varphi_{IS_{BLTS}}(\overline{[1.5-2.0]})\right) = \chi\left(\varphi_{IS_{BLTS}}([0-0.25])\right) =$
$\chi\left(\{(s_0,1),(s_1,1),(s_2,1),(s_3,0),(s_4,0),(s_5,0),(s_6,0)\}\right) =$
$(s_1,0)$

Las valoraciones no-dinámicas de la primera iteración, las cuales resumen el desempeño del los atletas en la primera prueba, se han obtenido a través del operador de media ponderada para 2-tuplas lingüísticas, $2T-WA^{\boldsymbol{w}} : \langle S\rangle^n \longrightarrow \langle S\rangle$

Tabla 2: Información de la primera prueba $t = 1$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
c_1	$(s_6,-.4)$	$(s_4,0)$	$(s_6,-.4)$	$(s_5,0)$	$(s_3,0)$	$(s_4,0)$	$(s_3,0)$	$(s_5,0)$
c_2	$(s_2,-.5)$	$(s_0,0)$	$(s_2,-.1)$	$(s_5,-.5)$	$(s_6,0)$	$(s_3,-.4)$	$(s_2,.4)$	$(s_3,.4)$
c_3	$(s_1,0)$	$(s_5,0)$	$(s_1,0)$	$(s_5,0)$	$(s_3,0)$	$(s_5,0)$	$(s_5,0)$	$(s_3,0)$
$R_t(a)$	$(s_2,-.2)$	$(s_1,.4)$	$(s_2,.1)$	$(s_5,-.3)$	$(s_5,.1)$	$(s_3,.2)$	$(s_3,0)$	$(s_4,-.5)$
$E_t(a)$	$(s_2,-.2)$	$(s_1,.4)$	$(s_2,.1)$	$(s_5,-.3)$	$(s_5,.1)$	$(s_3,.2)$	$(s_3,0)$	$(s_4,-.5)$

con el vector de pesos $W = (.7,.2,.1)$.

$$2T-WA^{\boldsymbol{w}}\left((s_1,\alpha_1),\ldots,(s_n,\alpha_n)\right) = \Delta_S\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\,\Delta_S^{-1}(s_i,\alpha_i)\right)$$

A continuación se muestra un ejemplo donde son ilustrados los cálculos para obtener la valoración no-dinámica del atleta 1 a través del operador de agregación media ponderada para 2-tuplas lingüística.

Ejemplo 2. $2T-WA^{\boldsymbol{w}}\left((s_6,-.4),(s_2,-.5),(s_1,0)\right) =$
$\Delta_S\left(5.6\times 0.7+1.5\times 0.2+1\times 0.1\right)) = \Delta_S(3.8) = (s_2,-.2)$

En la primera iteración, las valoraciones dinámicas coinciden con las valoraciones no-dinámicas, dado que el conjunto histórico de valoraciones se encuentra vacío. Así, para la primera fase de competición el conjunto de atletas es ordenado a partir de los valoraciones dinámicas lingüísticas, estableciéndose el siguiente orden:

$$\mathbf{a5} > \mathbf{a4} > \mathbf{a8} > \mathbf{a6} > a7 > a3 > a2 > a1$$

En la Tabla 3 son mostradas las valoraciones de los atletas en la segunda prueba de selección y en la Tabla 4 las transformaciones y valoraciones asociadas.

Tabla 3: Valoraciones de la segunda prueba $t = 2$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
c_1	E	-	E	E	M	M	M	MA
c_2	60,0	-	78,0	68,0	78	82,0	78,0	72,0
c_3	1,0 1,5	- -	1,5 2,0	0,5 1,0	1,5 2,0	0,5 1,0	1,0 1,5	0,0 1,50

Tabla 4: Valoraciones de la segunda prueba $t = 2$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
c_1	$(s_6,-.4)$	-	$(s_6,-.4)$	$(s_6,-.4)$	$(s_3,0)$	$(s_3,0)$	$(s_3,0)$	$(s_5,0)$
c_2	$(s_6,0)$	-	$(s_2,-.5)$	$(s_4,-.3)$	$(s_2,-.5)$	$(s_1,-.5)$	$(s_2,-.5)$	$(s_3,.2)$
c_3	$(s_2,.2)$	-	$(s_0,.2)$	$(s_4,-.2)$	$(s_1,-.2)$	$(s_4,-.2)$	$(s_2,.2)$	$(s_4,-.4)$
$R_t(a)$	$(s_5,.2)$	-	$(s_2,-.2)$	$(s_4-.1)$	$(s_2,-.3)$	$(s_2,-.5)$	$(s_1,.2)$	$(s_4,-.5)$
$E_t(a)$	$(s_5,.4)$	$(s_1,.4)$	$(s_3,.2)$	$(s_6,-.4)$	$(s_6,-.1)$	$(s_4,0)$	$(s_4,-.1)$	$(s_5,-.1)$

Para el cálculo de las valoraciones dinámicas se ha utilizado como operador de agregación Agg_2 la t-conorma *Suma-producto* definida como $x+y-xy$. Así, con dicho operador es agregada la valoración dinámica de la iteración $t = 1$ con la valoración no-dinámica de la iteración $t = 2$ para obtener la valoración dinámica de la iteración $t = 2$. A continuación, se muestra un ejemplo de cómo es calculada la valoración dinámica del atleta 1 a través del operador de agregación Agg_2 y la uninorma *Suma-producto* que opera sobre valores en el intervalo unidad.

Ejemplo 3. $\Delta_S((Agg_2(\frac{\Delta_S^{-1}(s_2,-.2)}{g},\frac{\Delta_S^{-1}(s_5,.2)}{g}))*g) = \Delta_S((Agg_2(\frac{1.8}{6},\frac{5.2}{6}))*g) = \Delta_S((Agg_2(0.86,0.3))*g) = \Delta_S(0.902*6) = \Delta_S(5.4) = (s_5,.4)$

Es de destacar que el atleta 2 no ha asistido a la segunda prueba de selección, por este motivo su valoración dinámica en el periodo $t = 2$ coincide con la valoración dinámica de la primera prueba $t = 1$. Por tanto, para la segunda fase de competición el conjunto de atletas es ordenado a partir de los valoraciones dinámicas lingüísticas, estableciéndose el siguiente orden:

$$\mathbf{a5} > \mathbf{a4} > \mathbf{a1} > \mathbf{a8} > a6 > a7 > a3 > a2$$

En la Tabla 5 son mostradas las valoraciones de los atletas en la última prueba de selección y en la Tabla 6 las transformaciones y valoraciones asociadas.

Tabla 5: Información de la tercera prueba $t = 3$

	a1	**a2**	**a3**	**a4**	**a5**	**a6**	**a7**	**a8**
c_1	E	B	MA	E	M	M	M	MA
c_2	60,0	84,0	70,0	69,0	77,0	78,0	81,0	71,0
c_3	1,0 1,5	1,0 2,0	1,0 1,5	0,5 1,0	1,5 2,0	1,5 2,0	1,0 1,5	0,0 1,50

Tabla 6: Valoraciones de la tercera prueba $t = 3$

	a1	**a2**	**a3**	**a4**	**a5**	**a6**	**a7**	**a8**
c_1	$(s_6,-.3)$	$(s_2,0)$	$(s_5,0)$	$(s_6,-.3)$	$(s_3,0)$	$(s_3,0)$	$(s_3,0)$	$(s_5,0)$
c_2	$(s_6,0)$	$(s_0,0)$	$(s_4,-.5)$	$(s_4,-.2)$	$(s_2,-.25)$	$(s_2,-.5)$	$(s_1,-.2)$	$(s_3,0)$
c_3	$(s_2,.2)$	$(s_2,-.5)$	$(s_2,.2)$	$(s_4,-.2)$	$(s_1,-.2)$	$(s_1,-.2)$	$(s_2,.2)$	$(s_4,-.3)$
$R_t(a)$	$(s_5,.2)$	$(s_1,-.5)$	$(s_3,.4)$	$(s_4,-.1)$	$(s_2,-.3)$	$(s_2,-.5)$	$(s_1,.2)$	$(s_4,-.5)$
$E_t(a)$	$(s_6,-.1)$	$(s_2,3)$	$(s_5,-.2)$	$(s_6,-.2)$	$(s_6,-.1)$	$(s_5,-.5)$	$(s_4,.3)$	$(s_6,-.5)$

Al igual que en la anterior iteración, para el cálculo de las valoraciones dinámicas se ha utilizado como operador de agregación Agg_2 la t-conorma *Suma-producto*. Finalmente, para la última fase de selección el conjunto de atletas es ordenado a partir de los valoraciones dinámicas lingüísticas, estableciéndose el siguiente orden:

$$\mathbf{a5} = \mathbf{a1} > \mathbf{a4} > \mathbf{a8} > a3 > a6 > a7 > a2$$

En caso de que fuese necesario resolver los empates, se puede hacer uso de índices dinámicos discriminativos [7].

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un nuevo modelo lingüístico de toma de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea basado en el modelo lingüístico 2-tupla y su extensión para tratar con información expresada en diferentes dominios de expresión. El modelo lingüístico de decisión propuesto permite expresar las valoraciones de los criterios en diferentes dominios de expresión: numérico, intervalar y lingüístico, proporcionando valoraciones lingüísticos de las alternativas, tanto dinámicas como no-dinámicas, las cuales facilitan la interpretación de los resultados. T-normas y t-conormas, las cuales cumplen la propiedad de asociatividad, son utilizadas como operadores para agregar las valoraciones, por lo que no es necesario guardar toda la información del problema de decisión a lo largo del tiempo. Finalmente, se ha mostrado un ejemplo que ilustra el funcionamiento del modelo lingüístico de decisión dinámico multicriterio con información heterogénea. Como trabajo futuro, apuntar el estudio de los empates en las valoraciones dinámicas atendiendo al comportamiento de las alternativas a lo largo del tiempo.

Agradecimientos
Este artículo ha sido realizado con la ayuda del proyecto TIN2012-31263.

Referencias

[1] G. Campanella and R.A. Ribeiro. A framework for dynamic multiple-criteria decision making. *Decision Support Systems*, 52(1):52–60, 2011.

[2] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.

[3] F. Herrera, L. Martínez, and P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1):115–132, 2005.

[4] J.M. Merigó, M. Casanovas, and L. Martínez. Linguistic aggregation operators for linguistic decision making based on the dempster-shafer theory of evidence. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 18(3):287–304, 2010.

[5] R.A. Ribeiro, T.C. Pais, and L.F. Simoes. Benefits of full-reinforcement operators for spacecraft target landing. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 257:353–367, 2010.

[6] Marc Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(2):199 – 206, 1997.

[7] L. Martínez M. Espinilla Y. Zulueta, J. Martínez-Moreno. A discriminative dynamic index based on bipolar aggregation operators for supporting dynamic multi-criteria decision making. In H. Bustince, J. Fernandez, R. Mesiar, and T. Calvo, editors, *Aggregation Functions in Theory and in Practise*, volume 228 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pages 237–248. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[8] Ronald R. Yager and Alexander Rybalov. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 80(1):111 – 120, 1996.

[9] H.J Zimmermann and P Zysno. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 4(1):37 – 51, 1980.

A NEW LINGUISTIC CONSENSUS MODEL BASED ON A FUZZY ONTOLOGY AS WEAPON OF INFLUENCE

I.J. Pérez[1], **J.A. Morente-Molinera**[2], **R. Wikström**[3], **J. Mezei**[3], **C. Carlsson**[3], **E. Herrera-Viedma**[2]

[1]*Dept. of Computer Sciences and Engineering, University of Cádiz, Spain*, ignaciojavier.perez@uca.es
[2]*Dept. of Computer Science and Artificial Intelligence, University of Granada, Spain*, {jamoren,viedma}@decsai.ugr.es
[3]*IAMSR, Åbo Akademi University, Turku, Finland*, {robin.wikstrom,jmezei,christer.carlsson}@abo.fi

Abstract

In an ideal world, Group Decision Making problems would be solved only regarding the experts self-interest, that is, the desire to maximize benefits and minimize costs. But in real world, people are suffering continuous attempts by their partners to influence their opinions. In such a way, the interaction among experts usually involves a person trying to change another person's opinions and behavior, that is, a discussion or negotiation process. In order to reach a successful negotiation, there must be a common ground between parties for the process to bring together their respective positions. Thus, there is still a necessity of developing tools to help users to reach good group decisions as if they participated in a real face to face meeting. Therefore, we propose a new consensus model to deal with the psychology of negotiation by using the power of a fuzzy ontology as weapon of influence to make group decision scenarios more precise and realistic.

Keywords: Consensus process; Negotiation process; Fuzzy ontology; Weapons of influence; Linguistic Approach

1 INTRODUCTION

The process of negotiation is a pervasive activity in human society ranging from negotiations among nations to individual negotiations in everyday life. But involving many people in decision making does not guarantee success. Actually, there are individuals that try to exert pressure in order to persuade others that could be easily influenced. In these situations, classical group decision making models fail.

It is obvious that the comparison of different actions according to their desirability in decision problems, in many cases, cannot be done by using a single criterion or by a single decision maker. Consequently, we interpret the decision process in the framework of Group Decision Making (GDM) [8]. In these situations, problems can be solved in different ways involving a group of experts to achieve a common solution. There have been several efforts in the specialized literature to create different models to properly address and solve GDM situations. Some of these proposals have provided interesting results with the help of fuzzy set theory, as it is an efficient tool to model and deal with vague or imprecise options, alternatives and opinions of several decision makers [8]. However, there are decision situations in which the experts' preferences cannot be assessed precisely in a quantitative form but may be in a qualitative one, and thus, the use of a *linguistic approach* is necessary [11]. The *linguistic approach* is an approximate technique which represents qualitative aspects as linguistic values by means of *linguistic variables*, that is, variables whose values are not numbers but words or sentences in a natural or artificial language.

The main purpose of a negotiation model is to reach a consensual solution as quickly as possible by decreasing the gap between the perceptions of different decision makers. The perception of the decision makers depends on the various relations between alternatives and attributes. As a real life example, one can mention the present problem of the euro crisis: before finding a solution for the situation, the different perceptions of each country have to be attuned to have a common ground for negotiations. We have to cope with two different issues when modeling a negotiation problem: (1) the relations describing alternatives and attributes are known only partially in most of the cases and (2) these relations change dynamically. Fuzzy ontologies can provide a solution to handle both issues in an efficient way: we can model incomplete and uncertain information using the well-established theory of fuzzy logic and we can dynamically model the changes in the structure by employing ontologies.

The aim of this contribution is to extend the new consensus model proposed in [9] to overcome these issues by using a fuzzy linguistic approach [11]. To do so, this contribution

combines the power of a fuzzy ontology and fuzzy linguistic aggregation operators. The negotiation process is also addressed in our extension as part of the linguistic consensus model by using the fuzzy ontology knowledge in order to drive the decision behavior of the involved parties.

The rest of the contribution is set out as follows. The state of the art about linguistic consensual processes and fuzzy ontologies is discussed in Section 2. The proposed new linguistic consensus model is described in Section 3. Finally, our conclusions will be pointed out in Section 4.

2 STATE OF THE ART

In this section we show the main elements and features of consensus reaching processes and the use of fuzzy ontologies in decision making.

2.1 CONSENSUS REACHING PROCESSES

A classical GDM situation consists of a problem to solve, a solution set of possible alternatives, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $(n \geq 2)$, and a group of two or more experts, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $(m \geq 2)$, characterized by their own ideas, attitudes, motivations and knowledge, who express their opinions about the set of alternatives to achieve a common solution.

One of the problems in this field is to find the best way to represent the information. There are situations in which the information cannot be assessed precisely in a quantitative form but may be in a qualitative one. For example, when attempting to qualify phenomena related to human perception, we are often led to use words in natural language instead of numerical values, e.g. when evaluating quality of a football player, terms like *good*, *medium* or *bad* can be used.

The ordinal fuzzy linguistic approach [11] is a tool based on the concept of linguistic variable [11] to deal with qualitative assessments. It is a very useful kind of fuzzy linguistic approach because its use simplifies the processes of computing with words as well as linguistic representation aspects of problems. It has proven its usefulness in many problems, e.g., in decision making, web quality evaluation, information retrieval, recommender systems, political analysis, etc.

It is defined by considering a finite and totally ordered label set $S = \{s_i\}, i \in \{0, ..., g\}$ in the usual sense, i.e., $s_i \geq s_j$ if $i \geq j$, and with odd cardinality (usually 7 or 9 labels). The mid term represents an assessment of "approximately 0.5", and the rest of the terms are placed symmetrically around it. The semantics of the label set is established from the ordered structure of the label set by considering that each label for the pair (s_i, s_{g-i}) is equally informative. For example, we can use the following set of seven labels to represent linguistic information: $S = \{s_0 = N, s_1 = VL, s_2 = L, s_3 = M, s_4 = H, s_5 = VH, s_6 = P\}$, where N=*Null*, VL=*Very Low*, L=*Low*, M=*Medium*, H=*Hight*, VH=*Very Hight* and P=*Perfect*.

Using this approach, it is possible to define automatic and symbolic aggregation operators of linguistic information, as for example the LOWA operator [6].

In this contribution, we propose to use a classical consensual decision model composed by two different processes [2]:

1. *Consensus process:* This process refers to how to obtain the maximum degree of agreement among the experts on the solution alternatives. It is very important because, in any decision process, it is preferable that the experts reach a high degree of consensus on the solution set of alternatives before obtaining the final solution.
2. *Selection process:* This process describes how to obtain the solution set of alternatives from the opinions on the alternatives given by the experts. It consists of two phases: aggregation and exploitation. The aggregation phase defines a collective opinion according to the preferences provided by the experts. The exploitation phase transforms the global information about the alternatives into a global ranking.

In such a way, we assume that the experts give their preferences by using Fuzzy Linguistic Preference Relations.

A Fuzzy linguistic Preference Relation (FLPR) P^h given by an expert e_h is a fuzzy set defined on the product set $X \times X$, that is characterized by a linguistic membership function

$$\mu_{P^h} : X \times X \longrightarrow S$$

where the value $\mu_{P^h}(x_i, x_k) = p_{ik}^h$ is interpreted as the linguistic preference degree of the alternative x_i over x_k for the expert e_h.

Moreover, we assume that consensus is a measurable parameter with the highest value corresponding to unanimity and the lowest one to complete disagreement [7]. We can use specific consensus degrees to measure the current level of consensus in the decision process. Assuming FLPRs as representations of the experts' preferences, we could compute the consensus degrees at three different levels [6]: pairs of alternatives, alternatives and relations. The computation of the consensus degrees is carried out as follows:

1. For each pair of experts, e_k, e_l $(k < l)$, a similarity matrix, $SM^{kl} = (sm_{ij}^{kl})$, is defined where

$$sm_{ij}^{kl} = 1 - \frac{|I(p_{ij}^k) - I(p_{ij}^l)|}{g}.$$

being $I : S \to \{0,\ldots,g\} \mid I(s_p) = p \; \forall s_p \in S$.

2. Then, a consensus matrix, CM, is calculated by aggregating all the similarity matrices using the arithmetic mean as the aggregation function ϕ:

$$cm_{ij} = \phi(sm_{ij}^{12}, sm_{ij}^{13}, \ldots, sm_{ij}^{1m}, sm_{ij}^{23}, \ldots, sm_{ij}^{(m-1)m}).$$

3. Once the similarity and consensus matrices are computed we proceed to obtain the consensus degrees at the three different levels to obtain a global consensus degree, called consensus on the relation:

$$CR = \frac{\sum_{i=1}^{n} ca_i}{n}.$$

Initially, in this consensus model we consider that in any nontrivial GDM problem the experts disagree in their opinions so that decision making has to be viewed as an iterative process composed by several discussion rounds, in which experts are expected to modify their preferences according to the advice given by the moderator. This means that agreement is obtained only after some rounds of consultation. In each round, we calculate the consensus measures and check the current agreement existing among experts using CR.

Normally, to achieve consensus among the experts, it is necessary to provide the whole group of experts with some advice (feedback information) on how far the group is from consensus, what are the most controversial issues (alternatives), whose preferences are in the highest disagreement with the rest of the group, how their change would influence the consensus degree, and so on.

In such a way, the moderator carries out three main tasks: (i) to compute the consensus measures, (ii) to check the level of agreement and (iii) to produce some advice for those experts that should change their minds.

2.2 DECISION MAKING AND FUZZY ONTOLOGIES

Since the introduction of fuzzy logic in the context of decision making, fuzzy sets and possibility theory became a widely used alternative to model uncertainty. When facing incomplete information, decision support systems based on fuzzy modeling can provide a useful tool to aid decision makers. In many applications, the information that can be used in the decision making process is available in the form of an ontology. However, classical (crisp) ontologies are not appropriate to represent imprecise and vague knowledge. To handle this problem, the concept of fuzzy ontology was introduced into different domains and proved to be useful for example in information retrieval, e-learning, medical applications or weather forecasting. In recent years, decision making has been identified as one of the potential application areas of fuzzy ontology/fuzzy description logic [3].

An ontology can be defined as a systematic description of relationships and entity dependencies: a hierarchical representation of concepts with associated properties. The concept of fuzzy ontology as an extension of classical ontology emerged in the 2000's to deal with imprecise and vague concepts. Contrary to classical ontology, there exists no unique definition of fuzzy ontology: it is usually anchored to the specific domain or application area. In general, a fuzzy ontology is simply an ontology which uses fuzzy logic to provide a natural representation of imprecise and vague knowledge and eases reasoning over it [1].

Throughout the contribution, we will define the fuzzy ontology as a set of fuzzy relations [3]:

$$R_i : A_i \times B_i \to [0,1].$$

R_i can represent different types of relationships or dependencies:

$$\{a_i \in A_i\} \texttt{is_part_of} \{b_i \in B_i\},$$

$$\{a_i \in A_i\} \texttt{has_property} \{b_i \in B_i\},$$

with $R_i(a_i, b_i)$ describing the degree of the strength of the relation. The values of the relation are usually determined by experts or estimated using different sources of information. After the fuzzy ontology is created, the reasoning can be performed using different classes of fuzzy description logic ($fuzzyDL$).

In the context of decision making, the fuzzy relation R_i can be seen as the evaluation of a set of different alternatives (A_i) with respect to a set of given criteria (B_i).

3 A NEW CONSENSUS MODEL WITH A FUZZY ONTOLOGY

In this section we propose a new consensus model with two different phases. Firstly, it is worth noting that we are considering decision contexts with a large number of alternatives. Thus we show the use of a fuzzy ontology to deal with large sets of alternatives. Then, a new negotiation process to influence group decision behavior based on two different points of reference (consensual and social) is formally illustrated. Therefore, this consensus model uses two kinds of criteria to guide the negotiation process among experts (see Figure 1).

3.1 DEALING WITH LARGE SETS OF ALTERNATIVES IN GDM PROBLEMS

As we have previously mentioned, making the correct decisions, in an effective way, is today a relevant problem in many areas. The data about different issues is becoming more detailed. This, and the fact that also the number

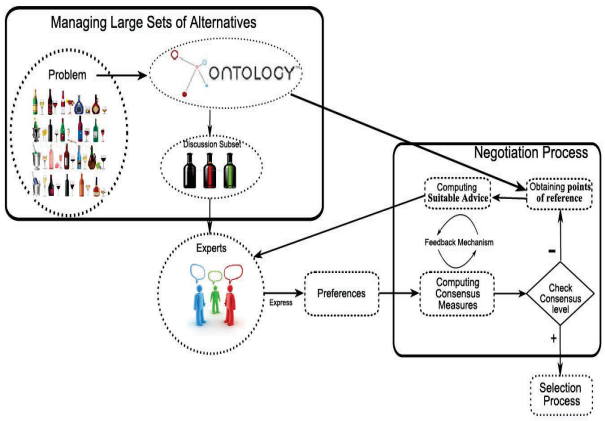


Figure 1: New consensus reaching process based on a fuzzy ontology.

of different alternatives is increasing, makes it necessary to find new solutions for finding the optimal alternatives. Nowadays, as the datasets are increasing in size, it implies that experts that should make decisions based on this information are faced with an increasing amount of alternatives. However, by using a fuzzy ontology, it is possible to obtain a smaller set of alternatives which are more "appropriate" in a given context than the others.

In such a way, experts can specify a hierarchy of criteria or contexts (a logical combination of different criteria) which they consider to be the most relevant in a given situation. Using the reasoning system of the fuzzy ontology, we can identify the alternatives which satisfy this set of criteria to the highest degree.

One important question is the aggregation of different attributes. OWA operators can be included in ontologies to increase the precision and effectiveness of the reasoning. By using OWA operators for the purpose to combine concepts, one can create new ones which are combinations of previously defined concepts [3].

An example could be based on four different attributes. One then wants to find out which alternative satisfies these attributes the most. By using OWA, this can be solved in the following way:

$$\begin{aligned}&\arg\max_i OWA(\\&\quad R(x_i,\texttt{attribute_A}),R(x_i,\texttt{attribute_B}),\\&\quad R(x_i,\texttt{attribute_C}),R(x_i,\texttt{attribute_D}))\end{aligned} \tag{1}$$

The obtained values are then combined using an OWA operator, producing the final value. The weights are $\mathbf{w} \approx (w_1, w_2)$ and attributes $\mathbf{b} \approx$ `Criterionl`, `Criterion2`. The values of the weights are usually determined based on expert knowledge but they can be specified using existing knowledge bases.

For the above example, the vector associated with the OWA operator can be defined as $\mathbf{w} \approx (0.20, 0.50, 0.20, 0.10)$. We consider five different alternatives, with different values for the different attributes. The solutions for (1) can be obtained as:

$$\begin{aligned}f(x_1) &= 0.20\cdot 0.2 + 0.50\cdot 0.90 + 0.20\cdot 0.35 + 0.10\cdot 0.55 \approx 0.615\\ f(x_2) &= 0.20\cdot 0.5 + 0.50\cdot 0.10 + 0.20\cdot 0.02 + 0.10\cdot 0.23 \approx 0.177\\ f(x_3) &= 0.20\cdot 1.0 + 0.50\cdot 0.25 + 0.20\cdot 0.9 + 0.10\cdot 0.78 \approx 0.583\\ f(x_4) &= 0.20\cdot 0.5 + 0.50\cdot 0.25 + 0.20\cdot 0.6 + 0.10\cdot 0.09 \approx 0.354\\ f(x_5) &= 0.20\cdot 0.3 + 0.50\cdot 0.70 + 0.20\cdot 0.0 + 0.10\cdot 0.77 \approx 0.487\end{aligned}$$

With the goal being to find the alternative that satisfies the equation the most, the following problem should be solved:

$$\arg\max_{i=1,2,3,4,5} \{f(x_i)\}$$

The alternative that has the highest value is $i = 1$, this alternative could therefore be considered to be the most suitable solution for this problem. We can also identify the top n alternatives which can be provided to the experts. Therefore they do not receive only one answer, but a set of "good " answers.

3.2 NEGOTIATION PROCESS

Once we obtain a suitable discussion subset, each expert e_k has to express his/her preferences on the selected alternatives by means of a FLPR P^k. Then, the system can compute the current level of agreement achieved among the experts (CR) as has been described in Section 2.1.

If the consensus measure CR is not high enough and if the number of rounds has not reached a maximum number of iterations, some experts' opinions should be modified. Thus, a negotiation phase has to be initiated. In such a case, it is necessary to find some tactics or weapons of influence to convince some of the experts to change their minds in order to coordinate the preferences and reach a consensual solution.

To guide the change of the experts' opinions, current approaches try to simulate a group negotiation session in which a feedback mechanism is applied [2]. This mechanism can substitute the moderator's actions in the consensus reaching process. However, the main problem for the feedback mechanism is to find the way of convincing experts to make their individual positions converge and, therefore, to support them in obtaining and agreeing on a particular feasible solution.

To do that, we propose a three steps negotiation process. Firstly, it is necessary to fix some points of reference in order to drive the negotiation to an optimal and consensual solution narrowing the gaps between the positions of

experts. Secondly, additional consensus measures, called proximity measures, are computed [6]. Finally, these measures and points of reference allow us to build a new feedback mechanism as a kind of recommender system so that experts receive some advice and, if they take the recommendations into account, they will change their preferences to quickly obtain a high consensus level [7].

3.2.1 Obtaining fuzzy linguistic preference relations as points of reference

Current approaches use a collective FLPR to represent the group opinion. This FLPR, $P^c = (p_{ij}^c)$, is obtained by means of the aggregation of all individual preference relations $\{P^1, P^2, \ldots, P^m\}$. It indicates the global preference between every pair of alternatives according to the majority of experts' opinions. The aggregation is carried out by means of the LOWA operator ϕ_Q guided by a fuzzy linguistic non-decreasing quantifier Q [10]:

$$p_{ij}^c = \phi_Q(p_{ij}^1, \ldots, p_{ij}^m).$$

In such a way, P^c is taken as point of reference P^r to drive the negotiation process. The main advantage of this election appears when experts are willing to obey the recommendations, because the experts that are hindering the agreement are identified and quickly guided to the consensual solution. But sometimes, to convince an expert to modify his/her preferences based only on the quicker way to reach consensus can be insufficient to change the experts' mind. Therefore, according to Cialdini [5], we propose the use of the *Social Proof* as a powerful weapon to influence people. The principle of *Social Proof* states that one important mean that people use to decide what to do in a situation is to look at what others are doing or have done there. This principle can be used to stimulate a person's compliance with a request by informing the person that many other individuals have been complying with it [5].

We employ fuzzy ontology once again, but this time, the query is refined in order to obtain the virtual optimal solution according to the knowledge stored and modeled by the fuzzy ontology. In such a way, we can use the taxonomy and inference rules, which have been gathered from the society's habits and wisdom, as weapon of influence to persuade some experts. At the same time, as the solution is considered optimal by the fuzzy ontology, we can help experts to reach better decisions.

Usually fuzzy ontologies are able to give us some fuzzy utility values for each alternative of the discussion subset. As we are dealing with FLPRs, we can use a transformation function [4] in order to obtain the optimal fuzzy preference relation, from the ontology and finally, we are able to compute the optimal FLPR, P^o, by using the labels' membership functions.

$$p_{ij}^o = \begin{cases} \dfrac{u_i/u_j}{u_i/u_j + u_j/u_i}, & \text{if } (u_i, u_j) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & \text{if } (u_i, u_j) = (0,0) \end{cases}$$

where u_i/u_j can be interpreted as the preference intensity of A_i to A_j.

Therefore, we can propose this optimal FLPR P^o as a new point of reference P^r to compute suitable advices for the experts. In such a way, those experts whose opinions are far away from the optimal solution given by the ontology, will be also asked to change their preferences with the appeal that it is the best solution according to the whole society. Thus, the negotiation is lead both ways (optimal and consensual) at the same time. It manages to persuade experts and reduces the probability for process stagnation.

3.2.2 Computing proximity measures

Proximity measures evaluate the agreement between the individual experts' opinions and a feasible solution. To compute them for each expert, we use both points of reference P^r, previously proposed, in order to establish the direction of the negotiation. Thus, the proximity measures are computed as follows:

$$pr^{kr} = \frac{\sum_{z=1}^{n} pa_z^{kr}}{n}.$$

3.2.3 Advising experts: feedback mechanism

Once we have computed the proximity measures from each expert to both points of reference (the collective solution P^c and the optimal solution P^o), we need to identify those experts who should change their preferences and to compute some easy rules to drive the negotiation process. To do so, the production of advice to influence the experts in order to achieve a good and consensual solution, trying to avoid the stagnation, is carried out in two phases: *Identification phase* and *Recommendation phase*.

- *Identification phase:*

  We must identify the experts, alternatives and pairs of alternatives that contribute less to reach a high degree of consensus and those that are far away from the optimal solution.

  1. *Identification of experts.* We identify the set of experts, $EXPCH$, that should receive advice on how to change some of their preference values:
     $EXPCH_c = \{k \mid pr^{kc} < \gamma_1\}$
     $EXPCH_o = \{k \mid pr^{ko} < \gamma_2\}$
     where γ is the minimum proximity level required for the expert to be noted to change.

2. *Identification of alternatives.* We identify the alternatives whose associated assessments should be taken into account by the above experts in the change process of their preferences:
$ALT_{kc} = \{x_i \in X \mid pa_i^{kc} < \gamma_1 \ \wedge k \in EXPCH_c\}$
$ALT_{ko} = \{x_i \in X \mid pa_i^{ko} < \gamma_2 \ \wedge k \in EXPCH_o\}$
3. *Identification of pairs of alternatives.* In this step we identify the particular pairs of alternatives (x_i, x_j) whose respective assessments p_{ij}^k the expert e_k should change.
$PALT_{kc} = \{(x_i, x_j) \mid pp_{ij}^{kc} < \gamma \wedge x_i \in ALT_{kc} \wedge k \in EXPCH_c\}$
$PALT_{ko} = \{(x_i, x_j) \mid pp_{ij}^{ko} < \gamma \wedge x_i \in ALT_{ko} \wedge k \in EXPCH_o\}$

- *Recommendation phase:*

  In this phase we recommend changes to the experts of their preferences according to two kinds of rules:

  1. *Rules to increase the consensus level.* We must find out the direction of change to be applied to the preference assessment of each expert $e_k \in EXPCH_c$, p_{ij}^k, with $(x_i, x_j) \in PALT_{kc}$. To do this, we define some direction rules by comparing p_{ij}^k and p_{ij}^c :
  2. *Rules to improve the quality of the solution.* We must find out the direction of change to be applied to the preference assessment of each expert $e_k \in EXPCH_o$, p_{ij}^k, with $(x_i, x_j) \in PALT_{ko}$. To do this, we define some direction rules by comparing p_{ij}^k and p_{ij}^o :

4 CONCLUSIONS

In this contribution, we have proposed a novel consensus approach using fuzzy ontologies as a support for group decision making methods. OWA and LOWA operators were employed as a basis to aggregate preferences and also to combine different criteria to create contextual variables which can describe complex contexts. Our method uses two reference points to reach consensus. The concept of proximity measure is used to facilitate the negotiation process and providing recommendations to the experts exploiting both reference points.

The main advantage of our proposal lies in the persuasive power of the society. At each consensus stage, not only those experts whose minds are far away from the consensual solution receive recommendations, but also those that are far away from the optimal solution of the fuzzy ontology. Therefore, it reduces the opinion changing aversion of the experts decreasing the stagnation, modeling with more accuracy real world GDM scenarios and reaching better consensual solutions. Consequently, although the consensus reaching process does not seem to be as direct as it is in previous approaches, in practice it is more effective.

Acknowledgements

This paper has been developed with the financing of FEDER funds in FUZZYLING-II Project TIN2010-17876, Andalusian Excellence Projects TIC-05299 and TIC-5991, and the Dyscotec TEKES Strategic Research Project 40039/11.

References

[1] F. Bobillo. Managing vagueness in ontologies. *PhD Dissertation, University of Granada, Spain*, 2008.

[2] F. J. Cabrerizo, J. M. Moreno, I. J. Pérez, and E. Herrera-Viedma. Analyzing consensus approaches in fuzzy group decision making: advantages and drawbacks. *Soft Computing*, 14(5):451–463, 2010.

[3] C. Carlsson, M. Brunelli, and J. Mezei. Decision making with a fuzzy ontology. *Soft Computing*, 16(1):1143–1152, 2012.

[4] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 97(1):33–48, 1998.

[5] R. Cialdini. The science of persuasion. *Scientific American*, 1:76–81, 2001.

[6] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J. L. Verdegay. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 78(1):73–87, 1996.

[7] E. Herrera-Viedma, J. L. Garcia-Lapresta, J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, H. Nurmi, and S. Zadrozny (Eds.). *Consensual Processes*. Springer, 2011.

[8] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi. *Multiperson decision making models using fuzzy sets and possibility theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.

[9] I. J. Pérez, R. Wikstrom, J. Mezei, C. Carlsson, and E. Herrera-Viedma. A new consensus model for group decision making using fuzzy ontology. *Soft Computing*, in press, 2013.

[10] R. R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.

[11] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, 8,8,9:199–249,301–357,43–80, 1975.

A dynamic CWW engine to support decisions re-evaluation

Romina Torres[1,2], **Rodrigo Salas**[3], **Hernan Astudillo**[2]

[1]*Facultad de Ingeniería, Universidad Andres Bello, Chile*, romina.torres@unab.cl
[2]*Departamento de Informática, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile*, {romina,hernan}@inf.utfsm.cl
[3]*Escuela de Ingeniería Civil Biomédica, Universidad de Valparaíso, Chile*, rodrigo.salas@uv.cl

Abstract

Alternative selection problems using qualitative information have been successfully addressed using a linguistic approach. However, under real-world situations, functionally-equivalent alternatives are constantly competing to be selected by improving their qualitative aspects. Therefore, the semantic of the linguistic term set may change through time (shift or fluctuate) when the validity of already decisions must be verified. We propose to extend the linguistic resolution scheme for supporting decisions re-evaluation through time by adding a background process that adjusts the semantic of the linguistic term set each time there is enough evidence that experts' perceptions about it have shifted. We present our ongoing work supporting reconfiguration decisions of self-adaptive service-based systems under a highly competitive service market.

Keywords: linguistic decision making, computing with words, drift, reconfiguration, service-based system.

1 Introduction

Decision makers usually use a linguistic-based language to specify models' constraints. On those cases, linguistic decision making (LDM) models [DVV92] have been successfully used in software engineering to solve ill-structured decision problems. Furthermore, the computing with words (CWW) methodology has been applied as the computational basis of the LDM processes [MRH10]. In CWW, *words* are the basic concepts and they are modeled as linguistic values (granules) of linguistic variables [Zad75]. The setup stage of the LDM resolution scheme [HH00] includes the selection of the linguistic term set as well as the definition of its semantics. Usually, this is carried out by a consensus and it is a perception-based process, where humans experts define the "meaning" of each granule by using their partial knowledge about the domain. Afterwards, decision makers define their models as an aggregation of constraints over a set of linguistic values. During the aggregation and exploitation phases, these models are used to rank and select alternatives from a set of functionally-equivalent ones.

However, under a non-stationary environment, functionally-equivalent alternatives are constantly competing to be selected by improving their non-functional properties (NFPs). This demands that design-time models must be re-evaluated during runtime in order to verify that the already made decisions are still valid. Unfortunately, the LDM resolution scheme considers the definition of the semantic of the linguistic term set as a setup stage (carried out once). But, *words may mean different things through time even to the same people"* [Tor13]. Thus, probably, decisions' validity will be re-evaluated during runtime using obsolete models. In this work, we extend transparently and safety for decision makers the lifetime of their models from design time to runtime. Transparently because the experts are whose update the semantic of the linguistic term set each time they need. And safety (mitigating premature decisions), because the semantic changes are not immediately reflected but until there is enough evidence (by *word*) that it has drifted. To this aim, we introduce our technique proposed in [TBA13] to the CWW engine in order of doting it of the capability of updating *words* when they have drifted through time.

In Section 2 we discuss how current linguistic approaches have addressed semantic change through time; In Section 3 we dote the CWW engine with a drift detector needed to dynamically update the semantic when propper; in Section 4 presents the *Adaptive framework* (http://dev.toeska.cl/adaptive), a CWW-based framework to support reconfiguration decisions; Section 5 presents an illustrative example of re-evaluations using the *Adaptive framework*; and, Section 6 draws conclusions and future work.

2 Related work

To solve linguistic decision making problems, the resolution scheme of multi-criteria decision making problems was extended [HH00]. The classical resolution scheme had only two phases: (i) the aggregation phase, and the (ii) exploitation phase to select the best alternative. In the aggregation phase, users assess the alternatives and in the exploitation phase, they rank them and select the best one. Authors in [HH00] added two previous and additional stages: (1) the choice of the linguistic term set and its semantics, and (2) the choice of the aggregation operator of linguistic information. In the first stage, experts model each criteria as a linguistic variable whose linguistic values can be obtained by using models for dealing with linguistic information such as: the semantic model [DB88] or the symbolic model [DVV92]. In the second stage, experts define the appropriate aggregation operator of linguistic information for building the LDM model, which aggregates constraints over the linguistic values.

The initial proposal of resolution scheme of linguistic decision making problems using CWW [Bon80] had three stages: (1) an encoder that translated words into fuzzy sets, (2) a CWW engine that infered the output as a fuzzy set, and (3) a decoder that retranslated from fuzzy sets into linguistic results. Zadeh [Zad96] formalized the three main stages presented in this initial proposal [Bon80] as: (i) the translation, (ii) the granular computing, and (iii) the retranslation stage. The translation subprocess is the explicitation of the propositions into the Generalized Constraint Language (GCL). The granular computing is the inference subprocess, where constraints are propagated to obtain a constraint on a variable of interest. It uses rules of inference in fuzzy logic [Zad96] to propagate the rules governing the fuzzy constraints propagation process. In the last process, the output of the inference subprocess is retranslated in order to obtain a terminal dataset from which a proposition in natural language may be derived if needed. In the original conceptual structure of CWW, the explanatory database (ED) is not considered as dynamic, then it is not expected that the variables, and specifically their granules change over time.

Yager [Yag95] also presented a resolution scheme to make decisions under ignorance using linguistic values. The author considered that in many real problems, the information about the satisfaction associated to different alternatives may be at best expressed in terms of a linguistic scale. The author also considered the two basic stages of the resolution scheme (with an aggregation and an exploitation phase). Each alternative is evaluated in each criteria and then, depending upon the LDM model, alternatives are ranked. The author did not discuss how the changing semantic could invalidate their previous decisions.

Mendel [Men01] proposed the perceptual computer, an architecture for CWW, where perceptions (*words*) activate the perceptual computer (Per-C). The Per-C had an encoder and a decoder (similar to the translation and retranslation subprocesses [Zad96]), which need to transform perceptions into fuzzy sets and numbers into perceptions. Later [Men07], the same author proposed that the internal fuzzy logic system in the Per-C should return fuzzy sets instead of numbers, and only then, these fuzzy sets should be decoded back to perceptions that humans can understand. The Per-C is based on the codebook (the vocabulary) [Men01], in which every *word* is modeled as an interval type 2 fuzzy set. Independent of the representation, it is important to notice that Mendel did not discuss either how this architecture addressed or mitigated the change of perceptions that could affect the "meanings" of the *words*.

Concept drift occurs when the context shifts induce changes in the target concept [WK96]. The degree of change of the environment can be classified as random noise, random trends (gradual changes), random substitutions (abrupt changes), or systematic trends [Kun04]. Concept drift is a notion taken from the machine learning research community, in which most current techniques assume that data conforms to a stationary distribution. Unfortunately, they are not proper to address the drift on the meanings of linguistic values, because these meanings depends on humans' perceptions about the environment. In [TBA13] we introduced a technique to address the temporal uncertainty of *words* in CWW, by determining the degree of drift between time-consecutive fuzzy sets representations of a *word*. This technique reused the similarity index used on the fuzzy clustering community to reduce the number of "repeated" concepts [LZK09].

3 Proposal: addressing the drift of the linguistic values

Let A and B be two fuzzy sets [Zad65] representing the same *word* but at different times (t_A and t_B, where $t_B > t_A$). Each fuzzy set is represented by a fuzzy number [Zad75], i.e. $\{\langle x, \mu(x)\rangle | x \in \mathscr{X}\}$, where $\mu(x)$ is called the membership function (MF) and it is mathematically expressed as:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{c-a} & \text{if } a \leq x \leq c \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{if } c < x \leq b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

where $|(c-a)|$ is the support of the fuzzy set, a and c stand for the lower and upper values of the support of $\mathscr{A}$, and c is its modal value. Let $S_{AB} = Degree(A \subseteq B \; and \; B \subseteq A) = \frac{M(A \cap B)}{M(A)+M(B)-M(A \cap B)}$ be the similarity degree (mutual subsethood) between these two fuzzy sets, where $\cap$ and $\cup$ denote the intersection and union of fuzzy sets A and B, respectively, $M(\cdot)$ is the size of the fuzzy set, and $0 \leq S_{AB} \leq 1$. The more A and B similar are, the higher the S_{AB}. Let $Drift_{AB} = \kappa(1 - S_{AB})$ be the degree of drift between these two fuzzy sets, where the variable κ takes the value 1 if

the center of the kernel of the fuzzy set A is located at the left side of the center of the kernel of the fuzzy set B and takes the value -1 in the inverse case. If the centers of the kernels of the fuzzy sets A and B are located at the same position then the variable κ takes the value 0. The sign of the drift index gives the information if the fuzzy set A is moving to the left or to the right side. Figure 1 shows the similarity degree and the drift index for six different cases of two fuzzy sets with triangular shapes.

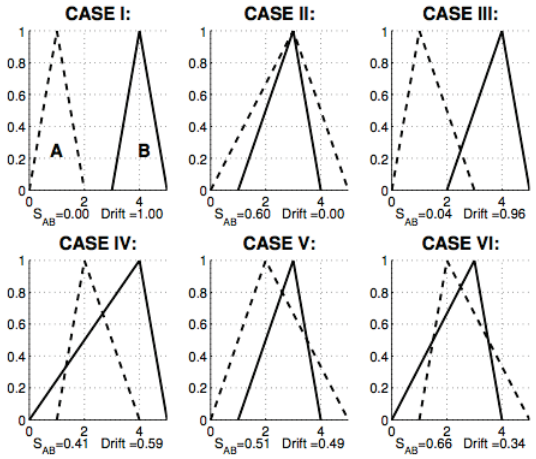
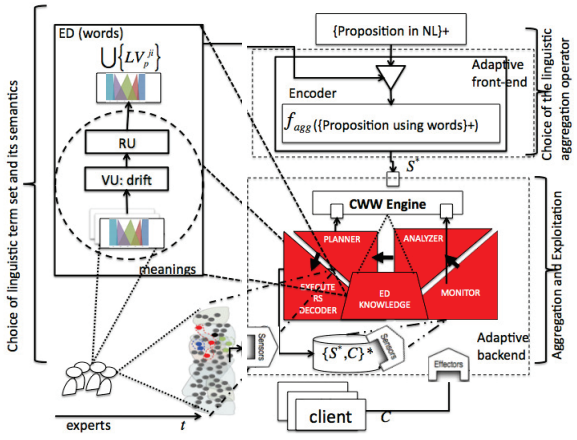


Figure 1: Six different cases to calculate the similarity of two fuzzy set with triangular shape



(a) Dynamic ED (b) ADAPTIVE

Figure 2: Subfigure 2(a) shows the drift detector inside of the ED, which is responsible to regularly inform to the RU the new meanings of the *words* with enough evidence of drift. Subfigure 2(b) shows the *Adaptive framework*, a recommender reconfiguration systems for service-based systems.

In subfigure 2(a), we can see the ED, which inside has a Vigilance Unit (VU) or drift detector and a Regulation Unit (RU). Periodically, experts observing the changing environment, update the meanings of those *words* because according to experts' perceptions they have changed. These time-based meanings sequence are required by the VU, whose responsibility is to determine by each *word* if there is enough evidence that it has drifted (discarding fluctuations). To this aim, in step 2 of Algorithm 1, the VU retrieves the Δ previous fuzzy sets (specifically the MF's parameters). Then, based on that, from step 3 to step 7 of Algorithm 1 it computes by each *word* drift's symptoms between consecutive fuzzy sets. From step 8 to step 12 of Algorithm 1 it computes which *words* have more drift's symptoms than the allowed (*tolerance*). For those *words*, the VU computes the "stable" MFs (in this work we are using the latter one but conscious of the lack of robustness, as part of our ongoing work we are studying different aggregation functions). Then, the RU which is informed of these "stable" *words*' meanings, updates the ED as we can see in the step 13 of Algorithm 1. It is important to notice that each *word* is updated independently from the others.

Algorithm 1 Dynamic updating of the *words*' meanings inside of the ED

Require: Δ: window size of previous meanings to be retrieved.
Require: *tolerance*: number of drift symptoms allowed by each *word*.
Require: $(\nu)_{(n\times P)\times\Delta}$.
Ensure: Update the $(\mu)_{n\times P}$ of ED.

1: **for** each linguistic value $LV_p^{(j)}$ **do**
2: Obtain the temporal sequence of MFs $(\nu_p^{(j)})_\Delta$: $(\nu_p^{(j)})_\tau \succ (\nu_p^{(j)})_{\tau-1} \succ \ldots \succ (\nu_p^{(j)})_{\tau-\Delta+1}$.
3: **for** $i = \tau-\Delta$ to $i = \tau-1$ **do**
4: The VU computes the similarity between the two temporal fuzzy sets i and $i+1$
5: The VU computes κ
6: The VU computes the drift's symptom between fuzzy sets i and $i+1$
7: **end for**
8: **for** each $LV_p^{(j)}$ **do**
9: **if** the consecutive number of times that a *word* presents drift symptoms during the latest Δ times is major than the *tolerance* **then**
10: The VU computes a new "stable" fuzzy set and inform it to the RU
11: **end if**
12: **end for**
13: The RU updates the informed *words*
14: **end for**

4 The *Adaptive framework*

In this Section, we present the *Adaptive framework*, a CWW-based framework to support reconfiguration decisions, which implements both, a linguistic resolution scheme given in [HH00] and our technique which makes it capable of mitigates transparently the models obsolescence as well as mitigating premature reconfiguration decisions.

The initial stage of any linguistic resolution scheme is the choice of the linguistic term set and its semantics as subfigure 2(a) shows. The ED's linguistic term set is comprised of *words*, whose meanings are regularly maintained updated by experts observing the NFPs' values of the alternatives.

Let LV^j be a linguistic variable representing the j-th non-functional property $G^{(j)}$ of the functionally-equivalent set of services alternatives capable to provide the functionality k. Let $\{LV_1^j,\ldots,LV_P^j\}$ be the P possible linguistic values of the linguistic variable LV^j. Let $ED = \{LV_1^j,...,LV_p^j,...,LV_P^j\}$ the linguistic term set or "words" available in the ED (as the top of subfigure 2(a) shows). Each linguistic value LV_p^j is a fuzzy set.

To model the user's requirement (as subfigure 2(b) shows: from *{Proposition in NL}+* to *{proposition using words}+*). In this work we use unary ordering-based modifiers "*at least*" ($\mathscr{L}$) and "*at most*" ($\mathscr{M}$) to manage the minimum acceptable level of satisfaction for the user about the non-functional property $G^{(j)}$ (the non-functional constraint). Bodenhofer [Bod08] defined these modifiers as follows. Let the fuzzy linguistic variable LV^j composed of an ordered set of linguistic values $LV_p^j, p = 1..P$. Then for a given labels set l_p related to the linguistic value LV_p^j (p fixed), the fuzzy sets *"at least l_p"* and *"at most l_p"*, abbreviated as $\mathscr{L}(l_p)$ and $\mathscr{M}(l_p)$, respectively, are defined as

$$\mathscr{L}(l_p)(x) = \sup\{LV_p^j(y) \text{ such that } y \in \mathscr{X} \text{ and } y \preceq x\}$$

$$\mathscr{M}(l_p)(x) = \sup\{LV_p^j(y) \text{ such that } y \in \mathscr{X} \text{ and } x \preceq y\}$$

where $\preceq$ is a crisp ordering on $\mathscr{X}$.

On the other hand, in this work, we compute the degree of fulfillment of the alternative A^i to the user requirements S^* with a weighted averaging (WA) operator. The WA operator of dimension n is a mapping given by the following equation

$$SCORE(A^i) = \sum_{j=1}^{n} W^j \phi(x_i^{(j)})$$

where x_i^j correspond to the evaluated performance of the non-functional property $G^{(j)}$ of the alternative A^i. The vector of weights is $W = [W^1,....,W^n]$ with $0 \leq W^j \leq 1$ and $\sum_{j=1}^{n} W^j = 1$. Moreover, the function $\phi(x)$ is the evaluation of either the *"at least l_p"* modifier ($\phi(x) = \mathscr{L}(l_p)(x)$) or the *"at most l_p"* modifier ($\phi(x) = \mathscr{M}(l_p)(x)$), depending on the type of non-functional property, i.e., increasing or decreasing order of perception's level respectively. It is important to notice that the $f_{agg}(\cdot)$ in subfigure 2(b) is the $SCORE(\cdot)$ function.

4.1 Decision making at design time: selecting a configuration C to implement users' requirements

Algorithm 2 describe how the alternative $\tilde{A}^1$ (in this case $\tilde{A}^1$ is an architectural configuration C) whose SCORE is highest is selected; i.e. the aggregation and exploitation phases in subfigure 2(b).

Algorithm 2 Design time decision algorithm

Require: Set of alternatives to be assessed $A^1,...,A^m$ and their performance measurements $(x_i^{(1)}...,x_i^{(n)})$ respectively. User-defined weights of the attributes W.

Ensure: The alternative $\tilde{A}^1$ with the highest satisfaction degree (SCORE) is recommended.

1: From the ED obtain the needed $\{\mu_p^{(j)}\}$
2: **for** each alternative A^i **do**
3: Evaluate $SCORE(A^i) = \sum_{j=1}^{n} W^j \phi(x_i^{(j)})$ assessing the alternative's aspects using the MF of the corresponding linguistic values $LV_p^{(j)}$
4: **end for**
5: Rank the alternatives $A^1,...,A^m$ according to the score $SCORE_{A^i}$ to obtain the permuted ordered set $\tilde{A}^1 \succeq \tilde{A}^2 \succeq .... \succeq \tilde{A}^m$.
6: Recommend the alternative $\tilde{A}^1$

Afterwards, once the alternative was recommended, it is stored with its user's requirement (linguistic representation of R), as $\{S^* = LDM, C = \tilde{A}^1\}$ as the bottom part of subfigure 2(b) shows. As we can see in the right bottom part of subfigure 2(b), the decision making process of selecting an alternative is part of the aggregation and exploitation phases (see [HH00]). During the aggregation, all the assessment values of the decision makers by each alternative are collected. Then, during the exploitation phase the alternative $\tilde{A}^1$ is selected.

4.2 Decisions re-evaluation during runtime: selecting replacements to reconfigure a system

An alternative may cease to satisfy a model basically by two reasons: (1) the alternative drops its quality of service or, (2) other functionally-equivalent alternatives have improved enough to make experts observing them to change their perceptions about the meaning of the *words*. Subfigure 2(b) schematizes the Algorithm 3 in which the *Adaptive framework* supports decision makers on

recommending replacement alternatives. This framework implements the MAPE-K (monitoring-analyzer-planner-executer-knowledge) feedback loop.

Algorithm 3 The *Adaptive framework* recommending replacement decisions

Require: $\alpha(\%)$, β, *window*.
Require: The set of pairs $\{LDM, A^1\}$ to monitor
Ensure: For each client (1) returns nothing if $\tilde{A}^1$ still satisfies its *LDM* or (2) return the new best alternative $\hat{A}^1$.

```
for each LDM_k in the do
    The monitor component retrieves the current properties' measurements of Ã^1, (x_t^(1)...,x_t^(n))
    The monitor component obtains the stable MFs from the ED i.e. {μ_p^(j)}.
    The monitor component evaluates the current satisfaction of Ã^1 to LDM as SCORE(Ã^1) = Σ_{j=1}^{n} W^j φ(x_i^(j))
    if Ã^1 has droped its satisfaction in α% then
        The analyzer component retrieves the last window registers to determine if there are at least beta consecutive violations symptoms
        if Ã^1 has supered the number of allowed violations (β − 1) then
            The planner component obtains an alternative replacement using the Algorithm 2
            The execute component sends to the decision maker as bottom part of subfigure 2(b) shows, C' = Â^1.
            The older contract {LDM, Ã^1} is replaced by the new one {LDM, Â^1}.
        end if
    end if
end for
```

5 Case study

"Golden age" is an internet-of-things application who monitors different aspects of their subscribers using sensors (e.g. heart rate, GPS, to name a few) in order to minimize the time between their patients start suffering an episode and that their families are notified or/and the "golden age" ambulance assists them. Our client requires that the application "Golden age" calls automatically to the patient's relatives using a service highly available and fast. This call will use a pre-recorded notification asking confirmation or rejection by pressing a telephone number button. Depending on how severe is the emergency, "Golden age" may notify all relatives at once and assigns immediately the ambulance or it may notify relatives one by one until one confirms that he/she can assist the patient.

The service market has approximately 1300 services of 59 different functional categories. They have been crawled from programmableweb[1], an open web catalog of APIs where only SOAP services have been considered. We consider two quality attributes: *response_time* and *availability*. Both metrics have been initially certified, whose values were observed by the experts to set up initially the parameters of the MFs of each linguistic value of the ED. Let $\mathscr{A}$ be the set of 27 from 1300 alternatives capable to provide $\{Telephony\}$, which is comprised on this example by $\mathscr{A} = \{Alianza, CallfireVoiceBroadcast, \ldots, Voxbone\}$. Let $G = \{G^{(1)} = response_time, G^{(2)} = availability\}$ be the two attributes under consideration, both equally important ($W^{response_time}$ =0.5, $W^{availability}$ =0.5). Thus, the linguistic variables under consideration are: $\{LV^{response_time}, LV^{availability}\}$. "Golden age" architects have agreed to use five linguistic values ($P = 5$) for each linguistic variable. For the *response_time* the linguistic labels are $\{very_fast, fast, medium, slow, very_slow\}$, meanwhile for the *availability* the linguistic labels are $\{poor, fair, good, very_good, excellent\}$. Architects also agree upon the constraints that the selected alternative should satisfy: *"The selected alternative should have a* response_time *at least a very_fast and* availability *at least excellent"*. The fuzzy numbers at setup time are: $\mu_{very_fast}^{response_time}(a = (0,1), b = (700,1), c = (970,0))$, $\mu_{excellent}^{availability}(a = (91,0), b = (94,1), c = (100,1))$.

At deployment time, the *Adaptive framework* obtains the ranked set of alternatives and recommends to its client the one with highest rank: $\{\tilde{A}^1 = \{CallfireVoiceBroadcast = 1.0\} \succ \tilde{A}^2 = \{CallfireHostedCallCenter = 0.5\} \succ \tilde{A}^3 = \{AngelOutBound = 0.5\} \succ \tilde{A}^4 = \{AcrossCommunications = 0.5\} \succ \tilde{A}^5 = \{PushBug = 0.5\} \succ \tilde{A}^6 = \{TelenorClicktoCall = 0.5\} \succ \tilde{A}^7 = \{DIDWW = 0.5\} \succ \ldots\}$ Assuming that "Golden age" accepts to use the *CallfireVoiceBroadcast* service, then the pair $\{LDM, \tilde{A}^1\}$ is stored in order to monitor violation symptoms. The alternative $\tilde{A}^1 = \{CallfireVoiceBroadcast = 1.0\}$ has a *response_time* of 661 milliseconds and an *availability* of 96%.

Let $\alpha = 25\%$ be the maximum allowed degradation of any selected alternative to its corresponding *LDM*; let $\beta = 1$ be the maximum number of allowed violations symptoms before to trigger a replacement. For this experiment, we (1) generate synthetical certifications (values are randomly improved or degraded between 20% and 40% excepting those who are selected in a contract) each hour by each service, (2) run a data-driven algorithm (fuzzy c-means) to compute the current MFs' parameters (simulating the experts behavior of updating the meanings of linguistic values) and, (3) run the Algorithm 1 with $\Delta = \infty$ (which means that it starts when the last drift was detected) and $tolerance = 1$ (which means that MFs will

[1] http://www.programmableweb.com

be replaced when two consecutive drift symptoms are detected). After ten iterations, the "experts that are observing the world" have changing their perceptions about the *words* "very_fast" *response_time* and "excellent" *availability* of the functional category *Telephony* more than once. Most of them have been fluctuating functions. But, in the iteration 9 and 10, the *response_time word* under observation has drifted with a positive trend two times, which means that the VU has informed to the RU the new MF's parameters: $\mu_{very_fast}^{response_time}(a=(0,1),b=(540,1),c=(601,0))$. As we said before, the measurements values of those services which are currently selected by a contract have been "frozen"; thus, $\tilde{A}^1 = \{CallfireVoiceBroadcast = 1.0\}$ still has a *response_time* of 661 milliseconds. In other words, the *monitoring component* detects that the contract $\tilde{A}^1$ has degraded its satisfaction on at least a 50% ($50\% > \alpha$) and therefore the *analyzer component* triggers a replacement (immediately because $\beta = 1$). The *planner component* obtains a new ranked list, where other service has now the first place. Thus, a new contract considering now $\hat{A}^1$ is generated and therefore subscribed to monitoring. After five iterations more, we can appreciate that the triangle has been moved again but in the other direction. Moreover, we can see that if we would not make the previous decision of replacing $\tilde{A}^1$ by $\hat{A}^1$, now, $\tilde{A}^1$ would satisfy its LDM. Therefore, using the tolerance parameter, we can tun successfully our approach in order to prevent premature decisions meanwhile less needed adaptations are missed.

6 Conclusions

In this paper we have presented a proposal to maintain transparently alive during runtime the design-time models by addressing the drift of the linguistic values of the ED. We extended the linguistic resolution scheme for supporting decisions re-evaluation through time by adding a background process that adjusts the semantic of the linguistic term set each time there is enough evidence that experts' perceptions about it have shifted. We also have presented the *Adaptive framework*, a service reconfiguration framework to support software engineers to replace services when there is enough evidence that they are violating requirements meanwhile premature decisions are mitigated by tuning the tolerance parameter. Currently, we are implementing on the *Adaptive framework* a linguistic ordered weighted operator to replace the current weighted operator and we are assessing different aggregation functions to compute stable MFs. As future work, we would like to validate our approach with humans and extend the *Adaptive framework* to other kind of problems.

References

[Bod08] U. Bodenhofer. Ordering of fuzzy sets based on fuzzy orderings. part i: The basic approach. *Mathware & Soft Computing*, (15):201–218, 2008.

[Bon80] Piero P. Bonissone. A fuzzy sets based linguistic approach: Theory and applications. In *Proceedings of the 12th conference on Winter simulation*, WSC '80, pages 99–111, Piscataway, NJ, USA, 1980. IEEE Press.

[DB88] Rosanna Degani and Giovanni Bortolan. The problem of linguistic approximation in clinical decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2(2):143 – 162, 1988.

[DVV92] M. Delgado, J. L. Verdegay, and M. A Vila. Linguistic decision-making models. *International Journal of Intelligent Systems*, 7:479 –492, 1992.

[HH00] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(1):67–82, 2000.

[Kun04] LudmilaI. Kuncheva. Classifier ensembles for changing environments. In *Multiple Classifier Systems*, volume 3077 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–15. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[LZK09] Gang Leng, Xiao-Jun Zeng, and John A. Keane. A hybrid learning algorithm with a similarity-based pruning strategy for self-adaptive neuro-fuzzy systems. *Applied Soft Computing*, 9(4):1354–1366, September 2009.

[Men01] Jerry Mendel. The perceptual computer: An architecture for computing with words. In *2001 IEEE International Fuzzy Systems Conference*, pages 35–38. IEEE, 2001.

[Men07] Jerry M. Mendel. Computing with words and its relationships with fuzzistics. *Information Science*, 177(4):988–1006, February 2007.

[MRH10] L. Martinez, D. Ruan, and F. Herrera. Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4):382–395, October 2010.

[TBA13] R. Torres, N. Bencomo, and H. Astudillo. Addressing the QoS drift in specification models of self-adaptive service-based systems. In *Proceedings of the Workshop on Realizing Artificial Intelligence Synergies in Software Engineering RAISE'13*, 2013.

[Tor13] R. Torres. Mitigating the obsolescence of specification models of service-based systems. In *35th International Conference on Software Engineering*, pages 1462–1464, San Francisco, CA, USA, May 2013.

[WK96] G. Widmer and M. Kubat. Learning in the presence of concept drift and hidden context. *Machine Learning*, 23:69–101, 1996.

[Yag95] Ronald R. Yager. An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12(3–4):237 – 261, 1995.

[Zad65] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.

[Zad75] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - i. *Information Sciences*, 8(3):199–249, 1975.

[Zad96] L. A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 4(2):103–111, May 1996.

ALGUNAS INTERPRETACIONES DEL MODELO LINGÜÍSTICO COMPUTACIONAL BASADO EN NÚMEROS BORROSOS DISCRETOS

Sebastia Massanet[1], **Juan Vicente Riera**[1], **Joan Torrens**[1]

[1]*Departamento de Matemáticas y Informática, Universidad de las Islas Baleares, Ctra. de Valldemossa, Km.7.5, 07122 Palma de Mallorca, España*, {s.massanet,jvicente.riera,jts224}@uib.es

Resumen

En este trabajo se ofrecen algunas posibles interpretaciones del modelo computacional basado en números borrosos discretos. En particular, se analizan las similitudes de este modelo con el modelo lingüístico basado en términos lingüísticos dudosos. Finalmente, se propone un modelo lingüístico de toma de decisiones basado en este tipo de subconjuntos borrosos.

Palabras Clave: Número borroso discreto, evaluación subjetiva, conjunto de términos lingüísticos borrosos dudosos, toma de decisiones multicriterio.

1 INTRODUCCIÓN

La presencia de incertidumbre es un denominador común que caracteriza un amplio rango de problemas reales relacionados con la toma de decisiones. Así, por ejemplo, un grupo de expertos debe decidir la viabilidad de una operación financiera a partir de una información que en muchos casos es vaga o incompleta, o, similarmente cuando un equipo médico debe emitir un diagnóstico a partir de unas pruebas preliminares. En muchos casos, la incertidumbre aparece al utilizar valoraciones no necesariamente cuantitativas, sino que se utilizan términos o información cualitativa a la hora de tomar la decisión. Por esta razón, las aproximaciones borrosas lingüísticas han emergido como una herramienta que permite modelar y tratar adecuadamente la información cualitativa. En esta dirección, cabe mencionar entre otros, el *modelo lingüístico simbólico* basado en escalas ordinales (en el que se considera un orden entre las diferentes etiquetas lingüísticas) [4, 16]; *el modelo lingüístico basado en las 2-tuplas* [5], que introduce el concepto de traslación simbólica; *el modelo lingüístico basado en representaciones de conjuntos borrosos tipo 2* [13], donde la semántica de los términos lingüísticos se modela usando las funciones de pertenencia de este tipo de subconjuntos borrosos; o *el modelo de 2-tuplas proporcional* [15], que extiende el modelo de 2-tuplas citado anteriormente mediante el uso de dos términos lingüísticos con su proporción para modelar la información. Una característica común de muchos de estos modelos es que los expertos deben expresar sus valoraciones eligiendo un único nivel lingüístico asociado a la variable lingüística. Este tipo de información cualitativa es interpretada habitualmente usando una escala lingüística como esta,

$$\mathscr{L} = \{\text{EM,MM,M,R,B,MB,EB}\} \qquad (1)$$

donde los términos lingüísticos *"extremadamente malo", "muy malo", "malo", "regular", "bueno", "muy bueno"* y *"extremadamente bueno"* se corresponden respectivamente con cada una de las etiquetas de la escala anterior. Sin embargo, en muchas ocasiones las opiniones de los expertos no se corresponden exactamente con un determinado término lingüístico, sino que utilizan expresiones del tipo *"mejor que bueno"* o *"entre regular y muy bueno"*. Recientemente, V. Torra [12] introduce los subconjuntos borrosos dudosos como una posible generalización de los subconjuntos borrosos clásicos. Recogiendo esta idea, diferentes autores [10, 11] han propuesto un nuevo modelo lingüístico computacional basado en etiquetas lingüísticas borrosas dubitativas, permitiendo con este método que el experto pueda dar su valoración no solo con un único término de la cadena lingüística considerada, sino que puede asignar un subintervalo de la cadena como evaluación aumentando la flexibilización de la misma. Por otra parte, los autores [1, 2, 7, 8, 9] han propuesto otro método lingüístico computacional basado en números borrosos discretos [14] que también permite interpretar la información cualitativa de una manera más flexible y posibilita agregar la información expresada a partir de este tipo de subconjuntos borrosos de manera directa.

El objetivo del presente trabajo es investigar posibles conexiones entre el modelo lingüístico computacional basado en etiquetas lingüísticas dubitativas y el modelo basado

en números borrosos discretos. Para ello, después de esta introducción, en la sección 2, se introducen los preliminares necesarios para el buen seguimiento del artículo. En la sección 3, se exponen las principales características del modelo lingüístico basado en números borrosos discretos, comparando el mismo con el modelo basado en conjuntos de términos lingüísticos borrosos dudosos. Al final de esta sección se propone además un modelo de toma de decisiones multicriterio basado en este tipo de subconjuntos borrosos, dando un ejemplo ilustrativo del mismo. La última sección está dedicada a exponer unas conclusiones de nuestra investigación así como unas posibles líneas de investigación futuras.

2 PRELIMINARES

En esta sección, recordaremos las nociones y resultados más importantes sobre números borrosos discretos, así como expondremos la noción de conjunto borroso dudoso.

2.1 NÚMEROS BORROSOS DISCRETOS

En primer lugar, recordamos las principales definiciones y conceptos sobre números borrosos discretos que utilizaremos después. Por subconjunto borroso, entendemos una función $A : \mathbb{R} \to [0,1]$. Para cada subconjunto borroso A, $A^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq \alpha\}$, para cada $\alpha \in (0,1]$, denotará el α-conjunto de nivel (o α-corte). Por $supp(A)$ denotaremos el soporte de A, es decir, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$. Por A^0, entenderemos la clausura del conjunto $supp(A)$.

Definición 2.1 *[14] Un subconjunto borroso A de $\mathbb{R}$ con función de pertenencia $A : \mathbb{R} \to [0,1]$ será llamado* número borroso discreto *si su soporte es finito, es decir, existen $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2 < ... < x_n$ tales que $supp(A) = \{x_1,...,x_n\}$, y existen números naturales s,t con $1 \leq s \leq t \leq n$ tales que:*

1. *$A(x_i) = 1$ para cada número natural i con $s \leq i \leq t$ (*núcleo o core de *A)*
2. *$A(x_i) \leq A(x_j)$ para cada número natural i, j con $1 \leq i \leq j \leq s$*
3. *$A(x_i) \geq A(x_j)$ para cada número natural i, j con $t \leq i \leq j \leq n$*

Si el subconjunto borroso A es un número borroso discreto entonces su soporte coincide con su clausura, es decir, $supp(A) = A^0$.

A partir de ahora, el conjunto de números borrosos discretos, cuyo soporte es un intervalo contenido en la cadena finita $L_n = \{0,1,\cdots,n\}$, será denotado por $\mathscr{A}_1^{L_n}$. Funciones de agregación definidas sobre L_n han sido extendidas al retículo acotado $\mathscr{A}_1^{L_n}$ (ver por ejemplo [1, 8]) de acuerdo con el siguiente resultado.

Teorema 1 *[1, 8] Consideremos una función de agregación binaria F definida sobre la cadena finita L_n. La operación binaria $\mathscr{A}_1^{L_n}$ definida de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : \mathscr{A}_1^{L_n} \times \mathscr{A}_1^{L_n} &\longrightarrow \mathscr{A}_1^{L_n} \\ (A,B) &\longmapsto \mathscr{F}(A,B) \end{aligned}$$

siendo $\mathscr{F}(A,B)$ el número borroso discreto cuyos α-conjuntos de nivel vienen dados por

$$\{z \in L_n \mid \min F(A^\alpha, B^\alpha) \leq z \leq \max F(A^\alpha, B^\alpha)\},$$

para cada $\alpha \in [0,1]$, es una función de agregación sobre $\mathscr{A}_1^{L_n}$. Esta función será llamada la extensión de la función de agregación discreta F a $\mathscr{A}_1^{L_n}$. *En particular, si F es una t-norma, una t-conorma, una uninorma o una nulnorma su extensión $\mathscr{F}$ también lo será sobre dicho retículo borroso.*

2.2 CONJUNTOS BORROSOS DUDOSOS

La noción de conjunto borroso dudoso fue introducida por V. Torra [12] como una posible extensión o generalización de los conjuntos borrosos clásicos. Formalmente,

Definición 2.2 *[12] Sea X un conjunto de referencia. Un conjunto borroso dudoso sobre X es una función h que devuelve para cada elemento $x \in X$ un subconjunto del intervalo unidad $[0,1]$.*

Equivalentemente, es posible construir un conjunto borroso dudoso a partir de una familia finita de k funciones de pertenencia definidas sobre X, esto es,

Definición 2.3 *[12] Si $M = [\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k]$ es un conjunto de k-funciones de pertenencia sobre X, entonces a partir de ellas podemos construir un conjunto dudoso que viene dado por la expresión $H_M(x) = \cup_{\mu \in M}\{\mu(x)\}$.*

Diferentes operaciones de conjuntos borrosos dudosos tales como la unión, intersección, complemento, etc, pueden hallarse en [12].

2.3 CONJUNTO DE TÉRMINOS LINGÜÍSTICOS BORROSOS DUDOSOS

En este apartado recordamos la noción de términos lingüísticos borrosos dudosos (*CTLDD*) [11] y algunas operaciones derivadas de la misma, que permiten modelar expresiones lingüísticas comparativas generadas mediante una gramática libre de contexto.

Definición 2.4 *[11] Sea $S = \{s_0, \cdots, s_n\}$ un conjunto de términos lingüísticos, un CTLDD, H_S, se define como un subconjunto finito ordenado de términos lingüísticos de S.*

Con la finalidad de realizar comparaciones entre términos lingüísticos, se introduce en [11] el concepto de envoltura de un *CTLDD* que permitirá comparar dos *CTLDD*.

Definición 2.5 *[11] La envoltura de un CTLDD, $env(H_S)$. es un intervalo lingüístico cuyos límites son obtenidos mediante el límite superior e inferior de H_S:*

$$env(H_S) = [H_{S^-}, H_{S^+}] \tag{2}$$

siendo $H_{S^-} = \text{mín}\{s_i \mid s_i \in H_S\}$ *y* $H_{S^+} = \text{máx}\{s_i \mid s_i \in H_S\}$.

Las expresiones lingüísticas, *ll*, serán generadas mediante una gramática libre de contexto, G_H y representadas mediante *CTLDD* (ver [11]). Las expresiones lingüísticas generadas mediante las reglas de producción de la gramática libre de contexto, G_H, son transformadas en *CTLDD* mediante una función de transformación de diferentes formas:

$$\begin{array}{ll} E_{G_H}(s_i) & = \{s_i \mid s_i \in S\} \\ E_{G_H}(\text{menor que } s_i) & = \{s_j \mid s_j \in S \text{ y } s_j \leq s_i\} \\ E_{G_H}(\text{mayor que } s_i) & = \{s_j \mid s_j \in S \text{ y } s_j \geq s_i\} \\ E_{G_H}(\text{entre } s_i \text{ y } s_j) & = \{s_k \mid s_k \in S \text{ y } s_i \leq s_k \leq s_j\} \end{array} \tag{3}$$

para todo $0 \leq i, j \leq n$.

3 MODELO LINGÜÍSTICO BASADO EN NÚMEROS BORROSOS DISCRETOS

En esta sección, presentamos el modelo lingüístico basado en números borrosos discretos cuyo soporte es un intervalo de la cadena finita $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$. Además comparamos este modelo lingüístico con el descrito en la sección anterior y analizamos diferentes similitudes de estas dos interpretaciones lingüísticas.

Nota 1 *Notar que es posible considerar una aplicación biyectiva entre la escala ordinal $\mathfrak{L} = \{s_0, \cdots, s_n\}$ y la cadena finita L_n que conserva el orden. Además, cada subconjunto borroso normal convexo definido sobre la escala ordinal $\mathfrak{L}$ puede ser considerado como un número borroso discreto perteneciente a $\mathscr{A}_1^{L_n}$, y viceversa.*

Por ejemplo, si consideramos la escala lingüística

$$\mathfrak{L} = \{EM, MM, M, R, B, MB, EB\} \tag{4}$$

donde cada nivel está ordenado en orden creciente :

$$EM \prec MM \prec M \prec R \prec MB \prec N \prec MB \prec EB$$

y la cadena finita L_6, el número borroso discreto $A = \{0.6/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5\} \in \mathscr{A}_1^{L_6}$ puede ser expresado como $A = \{0.6/MM, 0.7/R, 1/B, 0.8/MB\}$. Notemos además que estos subconjuntos borrosos pueden interpretarse como posibles flexibilizaciones de las etiquetas lingüísticas. Así por ejemplo, el subconjunto borroso A anterior puede ser interpretado como una flexibilización de la etiqueta lingüística B (Bueno) (ver la figura 1).

Definición 3.1 *Sea $L_n = \{0, \cdots, n\}$ una cadena finita. Llamaremos evaluación subjetiva a cada número borroso discreto que pertenezca al retículo acotado $\mathscr{A}_1^{L_n}$.*

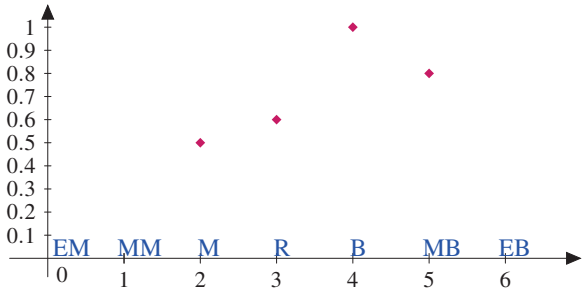


Figura 1: Representación gráfica del número borroso discreto *A*, considerado en la nota 1, que tiene por soporte el intervalo $[2, 5]$.

Nota 2 *De acuerdo con la nota 1, una evaluación subjetiva A puede ser interpretada equivalentemente como un subconjunto borroso normal convexo definido sobre la escala ordinal $\mathfrak{L}$.*

Similarmente a como se ha representado una flexibilización de la etiqueta lingüística *B* (ver figura 1) es posible definir diferentes *flexibilizaciones* de expresiones lingüísticas expresadas mediante reglas de producción de la gramática libre de contexto *GH* tal como se presenta en (3).

De esta forma definimos las siguientes expresiones lingüísticas interpretadas como evaluaciones subjetivas:

$$\begin{array}{rl} \text{Entre } s_i \text{ y } s_j & = \{A \in \mathscr{A}_1^{L_n} \mid core(A) = [s_i, s_j]\} \\ \text{Peor que } s_i & = \{A \in \mathscr{A}_1^{L_n} \mid core(A) = [s_0, s_{i-1}]\} \\ \text{Mejor que } s_i & = \{A \in \mathscr{A}_1^{L_n} \mid core(A) = [s_{i+1}, s_n]\} \end{array} \tag{5}$$

para todo $0 \leq i, j \leq n$.

Ejemplo 1 *Las figuras 2, 3 y 4 representan las evaluaciones subjetivas*

$$\begin{aligned} A &= \{0.2/M, 1/R, 1/B, 0.8/MB\} \\ B &= \{1/EM, 1/MM, 0.7/M, 0.2/R, 0.1/B\} \\ C &= \{0.2/M, 0.3/R, 0.9/B, 1/MB, 1/EB\} \end{aligned}$$

que pueden interpretar respectivamente expresiones lingüísticas del tipo entre regular y bueno, peor que malo *y* mejor que bueno.

Nota 3 *Notar que las expresiones lingüísticas anteriores no son únicas y nos permiten describir de una manera más flexible las diferentes interpretaciones que puedan tener los expertos a la hora de realizar una evaluación cualitativa. De esta forma la flexibilización que pueda dar un experto asignando valores fuera del core dependerá de la seguridad que tenga sobre su evaluación. Cuando el experto no dude sobre el conjunto de posibles etiquetas lingüísticas a elegir, estaríamos en el caso en que la evaluación subjetiva verifica que el soporte de la misma coincide con su*

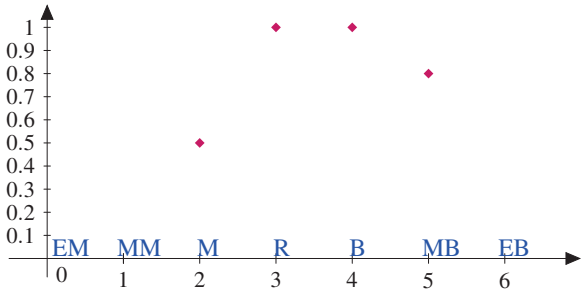


Figura 2: Representación gráfica de una posible evaluación subjetiva comparativa que interprete la expresión lingüística *"entre regular y bueno"*.

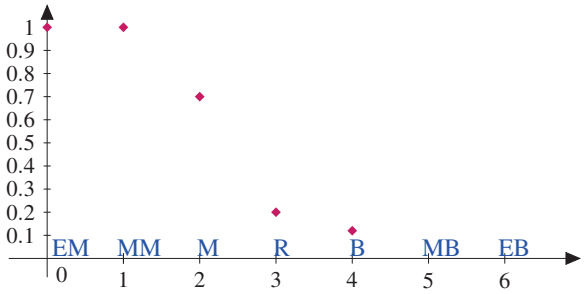


Figura 3: Representación gráfica de una posible evaluación subjetiva que interprete la expresión lingüística *"peor que malo"*.

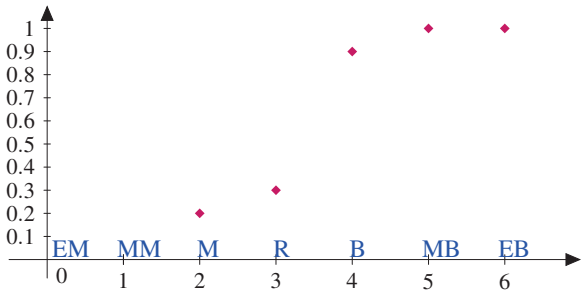


Figura 4: Representación gráfica de una posible evaluación subjetiva que interprete la expresión lingüística *"mejor que bueno"*.

*core. En este último caso, se daría una coincidencia entre la interpretación dada en [10] y la propuesta en este trabajo (ver figura 5). En cambio, en la figura 4 se puede ver una interpretación de la expresión lingüística "*mejor que bueno*" en la que el experto no descarta la posibilidad de valorar fuera del core, permitiendo así una mayor flexibilización de dicha expresión lingüística y por consiguiente de su evaluación.*

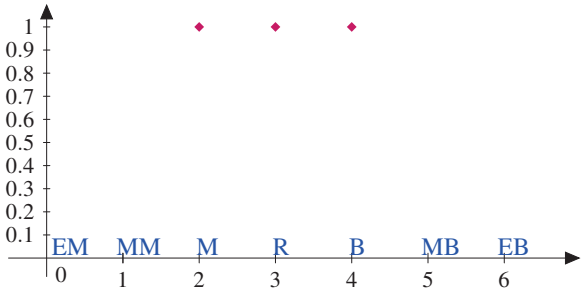


Figura 5: Representación gráfica de una posible evaluación subjetiva que interprete la expresión lingüística *"entre malo y bueno"*.

Otro aspecto interesante de la interpretación lingüística basada en evaluaciones subjetivas (simples o comparativas) es que no es necesario efectuar transformaciones previas a la hora de agregar dicha información. Cada evaluación subjetiva es interpretada directamente como un número borroso discreto de $\mathscr{A}_1^{L_n}$ dado por un experto y por tanto se puede manipular directamente a partir de funciones de agregación de acuerdo con el Teorema 1.

3.1 MODELO LINGÜÍSTICO DE TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO BASADO EN EVALUACIONES SUBJETIVAS

En [10, 11] se presenta un modelo lingüístico de toma de deciones multicriterio basado en modelos computacionales simbólicos, que permite a los expertos expresar sus valoraciones mediante expresiones lingüísticas comparativas o términos lingüísticos simples. De manera semejante, en esta sección presentamos un modelo basado en evaluaciones subjetivas y realizamos una comparativa de los dos métodos.

Siguiendo las ideas de [11], el modelo que proponemos tendrá las siguientes fases:

1. *Definición de la semántica y establecimiento de las valoraciones*: Fijada una escala lingüística $\mathfrak{L}$, cada experto realiza sus valoraciones usando evaluaciones subjetivas definidas sobre dicha escala.

2. *Agregación de las valoraciones representadas mediante evaluaciones subjetivas*: A través de operadores de agregación obtenidos de acuerdo con el teorema

1 se obtiene una evaluación subjetiva para cada alternativa.

3. *Fase de explotación:* Se elige un método para ordenar evaluaciones subjetivas y se utiliza el mismo para elegir la mejor alternativa.

Cabe destacar que

- En nuestro caso no hay ningún proceso de transformación tal como se da en el caso del modelo lingüístico basado en expresiones lingüísticas comparativas [11].
- En el caso de que todos los expertos consideraran evaluaciones subjetivas en las que el soporte coincidiera con el core, como por ejemplo la representada en la figura 5, se tendría que los dos modelos podrían obtener los mismos resultados siempre que se eligieran por funciones de agregación aquellas que son extensiones de funciones de agregación discretas y que se utilizara el mismo método en la fase de explotación.

Ejemplo 2 *Supongamos que tenemos un conjunto de alternativas* $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ *y un conjunto de criterios* $C = \{c_1, c_2, c_3\}$. *Sea* $\mathscr{L} = \{EM, MM, M, R, B, MB, EB\}$ *la escala lingüística considerada en (1). En la tabla 1 se pueden ver las valoraciones efectuadas en nuestro problema de decisión.*

Tabla 1: Valoraciones lingüísticas del problema de decisión.

	c_1	c_2	c_3
x_1	entre MM y R	entre B y MB	B
x_2	entre M y R	R	menor que R
x_3	mayor que B	entre MM y M	mayor que B

De acuerdo con la tabla 1, las evaluaciones subjetivas que representarán dichas valoraciones lingüísticas serán:

- *Para la alternativa* x_1 *y criterios* c_1,c_2 *y* c_3 *tenemos respectivamente:*

$$\begin{aligned} \textit{Entre MM y R} &= \{0.5/0, 1/1, 1/2, 1/3, 0.6/4\} \\ \textit{Entre B y MB} &= \{0.5/2, 0.8/3, 1/4, 1/5, 0.7/6\} \\ B &= \{0.6/2, 0.7/3, 1/4, 0.8/5\} \end{aligned}$$

- *Para la alternativa* x_2 *y criterios* c_1,c_2 *y* c_3 *tenemos respectivamente:*

$$\begin{aligned} \textit{Entre MM y R} &= \{0.6/0, 0.7/1, 1/2, 1/3, 0.8/4\} \\ B &= \{0.8/3, 1/4, 0.7/5, 0.6/6\} \\ \textit{Menor que M} &= \{1/0, 1/1, 0.8/2, 0.7/3\} \end{aligned}$$

- *Para la alternativa* x_1 *y criterios* c_1,c_2 *y* c_3 *tenemos respectivamente:*

$$\begin{aligned} \textit{Mayor que B} &= \{0.6/3, 0.8/4, 1/5, 1/6\} \\ \textit{Entre MM y M} &= \{0.8/0, 1/1, 1/2, 0.7/3\} \\ \textit{Mayor que B} &= \{0.7/3, 0.9/4, 1/5, 1/6\} \end{aligned}$$

El siguiente paso es agregar las valoraciones representadas mediante evaluaciones subjetivas. Para ello, elegiremos la extensión de la función de agregación kernel [6]

$$F(x,y,z) = \text{máx}(\text{mín}(x,y,z), \text{máx}(x,y,z) - 3) \qquad (6)$$

Este tipo de funciones de agregación discretas presentan interesantes propiedades, entre ellas la de ser compensativas, y han sido estudiadas recientemente en [6].

Aplicando la extensión de la función kernel anterior, obtenemos que las agregaciones para cada alternativa son:

- *Para la alternativa* x_1

$$A_{x_1} = \{0.5/0, 1/1, 1/2, 1/3, 0.6/4\}$$

- *Para la alternativa* x_2

$$A_{x_2} = \{0.8/0, 1/1, 0.8/2, 0.7/3\}$$

- *Para la alternativa* x_3

$$A_{x_3} = \{0.6/0, 0.8/1, 1/2, 1/3\}$$

Finalmente en la fase de explotación, ordenaremos las evaluaciones subjetivas anteriores para decidir cual es la mejor alternativa de las tres obtenidas anteriormente. Para ello, elegiremos el método de ordenación propuesto por L. Chen y H. Lu en [3]. Así obtenemos que

$$A_{x_1} > A_{x_3} > A_{x_2}$$

y por tanto la mejor alternativa es x_1.

Nota 4 *Notar que en la función de agregación kernel dada por la expresión (6), en lugar del parámetro 3 hubiéramos podido considerar cualquier otro valor* $k \in [0,5]$. *Valores próximos a cero nos darían evaluaciones subjetivas más optimistas. Y al contrario, valores próximos a 5 nos darían evaluaciones subjetivas menos optimistas.*

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se han analizado diferentes conexiones entre el modelo lingüístico computacional basado en números borrosos discretos y el basado en etiquetas lingüísticas dubitativas. Además hemos visto que ciertos casos particulares de números borrosos discretos, aquellos que su soporte

coincide con el core, pueden ser interpretados como etiquetas lingüísticas dubitativas. Finalmente, hemos propuesto un ejemplo ilustrativo de toma de decisiones multicriterio usando extensiones de funciones de agregación discretas kernel.

Como trabajo futuro se pretende estudiar si existen relaciones entre el conjunto números borrosos discretos y los subconjuntos borrosos dudosos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos MTM2009-10962 y MTM2009-10320, ambos con ayuda de fondos FEDER.

Referencias

[1] J. Casasnovas, J.V. Riera: Extension of discrete t-norms and t-conorms to discrete fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 167(1), pp. 65–81, 2011.

[2] J. Casasnovas and J.V. Riera: Weighted means of subjective evaluations. In R. Seising and V. Sanz, editores, Soft Computing in Humanities and Social Sciences, volume 273 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pp. 323–345. Springer-Verlag, Berlin, 2012.

[3] L.H. Chen, H.W. Lu: An approximate approach for ranking fuzzy numbers based on left and right dominance, *Computers and Mathematics with Applications*, 41(12), pp. 1589–1602, 2001.

[4] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J. L. Verdegay: Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79, pp. 175–190, 1994.

[5] F. Herrera, L. Martínez: A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8(6), pp. 746–752, 2000.

[6] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens: Kernel aggregation functions on finite scales, Constructions from their marginals, *Fuzzy sets and systems* (2013), http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2013.04.005

[7] S. Massanet, J.V. Riera, J. Torrens, E. Herrera-Viedma: A new linguistic computational model based on discrete fuzzy numbers for computing with words, *Information Sciences*(2013), http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2013.06.055

[8] J.V. Riera, J. Torrens: Aggregation of subjective evaluations based on discrete fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 191, pp. 21–40, 2012.

[9] J.V. Riera, J. Torrens: Aggregation functions on the set of discrete fuzzy numbers defined from a pair of discrete aggregations,*Fuzzy sets and systems*(2013), http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2013.09.001

[10] R. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera: Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1), pp. 109–119, 2012.

[11] R. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera: A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets, *Information Sciences*, 241, pp. 28–42, 2013.

[12] V. Torra: Hesitant fuzzy sets. *Int. J. Intell. Syst.*, 25(6), pp. 529–539, 2010.

[13] I. Türksen: Type 2 representation and reasoning for CWW. *Fuzzy Sets and Systems*, 127(1), pp. 17–36, 2002.

[14] W. Voxman: Canonical representations of discrete fuzzy numbers: *Fuzzy Sets and Systems*, 118(3), pp. 457–466, 2001.

[15] J.-H. Wang, J. Hao: A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3), pp. 435–445, 2006.

[16] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - part III. *Information Sciences*, 9(1), pp. 43–80, 1975.

Modelo de consenso basado en estructuras de decisión dinámicas

Luis Escobar-Ramírez[1], **Pedro J. Sánchez**[2], **Luis Martínez**[2]

[1]*Departamento de Informática y Computación. Universidad Tecnológica Metropolinana. Chile*, luisescobarramirez@gmail.com
[2]*Departamento de Informática. Universidad de Jaén. España*, {pedroj,luis.martinez}@ujaen.es

Resumen

Los problemas de Toma de Decisiones en Grupo vienen definidos por la participación de múltiples expertos que aportan sus opiniones para encontrar en común la mejor solución a un problema compuesto por un conjunto de alternativas. Una posibilidad, en este tipo de problemas, es establecer un proceso de consenso donde los diferentes expertos acercarán sus posturas antes de alcanzar una solución. Así el proceso de consenso se llevará a cabo mediante una serie de rondas, con el objeto de que los expertos puedan cambiar sus preferencias y así acercar sus opiniones. En ocasiones, puede darse el caso que alguno de los expertos no pudiera participar en alguna ronda o que se incorporasen nuevos expertos al proceso una vez iniciado. En estos casos es necesario establecer algún mecanismo donde las opiniones de los expertos, que no participan en todas las rondas del proceso de consenso, puedan ser recordadas, lo que nos llevará a proponer un modelo de consenso que utilice estructuras de decisión dinámicas que nos permitirá almacenar la información de las diferentes rondas en el proceso de consenso. En esta contribución se presentarán las modificaciones que tendrán que realizarse a un modelo de consenso clásico para dotarle de un carácter dinámico.

Palabras Clave: Toma de decisión en grupo, consenso, información dinámica

1 Introducción

En los problemas de Toma de Decisión en Grupo (TDG) se selecciona la mejor solución a un problema compuesto por un conjunto de alternativas por parte de un grupo de diferentes expertos aunando sus opiniones [5]. Para ello, los expertos valorarán las diferentes alternativas que pueden ser la solución del problema [4]. Clásicamente, en los problemas de TDG la solución se alcanza después de un proceso de selección entre las diferentes alternativas que componen el problema. Este proceso de selección ocasiona que en la solución alcanzada se considere la opinión mayoritaria de los expertos participantes, por lo que las opiniones de los expertos más alejados de la solución no serán tenidas en cuenta. Esto puede hacer que algunos expertos consideren que sus opiniones no han sido suficientemente atendidas y por tanto pueden rechazar la solución [1]. Para intentar solucionar este tipo de situaciones surgen los procesos de consenso [10], en los que los expertos acercarán sus opiniones para alcanzar un nivel de acuerdo mayor antes de tomar la decisión final del problema mediante la discusión.

Clásicamente, en los problemas de TDG en los que se establecen procesos de consenso, el número de expertos que participan en las diferentes rondas de discusión es el mismo. Sin embargo, pueden darse situaciones en los que algunos expertos no puedan participar en alguna de las rondas del proceso de consenso, siendo deseable que sus opiniones sean tenidas en cuenta en la solución final del problema. Tambien pueden darse procesos de consenso donde el número de participantes sea muy elevado gracias al aumento de la importancia de las redes sociales o la e-democracia [7], en estos problemas podemos encontrarnos con una participación variable en las diferentes rondas de consenso pero es importante que todos los posibles participantes puedan aportar sus opiniones de la forma más flexible posible.

Los modelos clásicos de los procesos de consenso no serán aplicables para poder garantizar que todas las opiniones sean tenidas en cuenta en la obtención de la solución final y por tanto deberemos buscar alternativas para poder recordar esas opiniones mediante estructuras de decisión dinámicas [2] que nos evitan la necesidad de recordar todas las opiniones que han dado los expertos en las diferentes rondas del proceso de consenso. En esta contribución se propondrá un modelo de consenso basado en estructuras de decisión dinámicas y para ello partiremos de un mode-

lo clásico [10] donde incluiremos las estructuras de decisión dinámicas [2] en la fase donde se establece el grado de consenso así como en la fase donde el moderador indicará las recomendaciónes que realizará a los expertos para que acerquen sus posturas.

El trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 se introducen los preliminares necesarios para entender nuestra propuesta. En la Sección 3 se presenta la propuesta de nuestro modelo de consenso para trabajar con estructuras de decisión dinámicas. Por último en la Sección 4 se recogerán los comentarios finales.

2 Preliminares

En esta sección revisaremos los conceptos básicos sobre los problemas de TDG, los Procesos de Consenso y, para terminar, el marco de decisión dinámico multicriterio propuesto en [2] donde se presenta las estructuras de decisión dinámica que utilizaremos en nuestra propuesta.

2.1 Toma de Decisión en Grupo

La TDG se caracteriza por la participación de varios decisores o expertos que tienen que tomar una decisión conjunta, de cara a la solución de un problema. Un proceso de toma de decisión en el que participan diferentes expertos, cada uno de ellos aportando sus valoraciones, dará como resultado, en ciertos contextos, una decisión mejor que la que pudiera aportar un único experto [5].

Formalmente, un problema de TDG se caracteriza por [4]:

- La existencia de un problema a resolver.
- Un conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}, (n >= 2)$, de *alternativas* o posibles soluciones entre las que escoger.
- Un conjunto $E = \{e_1, \ldots, e_m\}, (m >= 2)$, de decisores o *expertos* que aportan sus valoraciones o preferencias sobre el conjunto de alternativas.

Los expertos utilizan alguna estructura de preferencia para expresar sus opiniones de las alternativas. Una de las estructuras de preferencia más utilizadas en problemas de TDG bajo incertidubre es la *relación de preferencia difusa* [3, 4, 6]. Una relación de preferencia difusa P_i del experto e_i se caracteriza por una función de preferencia: $\mu_{P_i} : X \times X \rightarrow [0,1]$, cuya representación para el conjunto de alternativas es una matriz de dimensión $n \times n$:

$$P_i = \begin{pmatrix} {p_i}^{11} & \ldots & {p_i}^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {p_i}^{n1} & \ldots & {p_i}^{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde cada valoración ${p_i}^{lk} = \mu_{P_i}(x_l, x_k)$ representa el grado de preferencia de la alternativa x_l sobre x_k según el experto e_i, de forma que ${p_i}^{lk} > 0.5$ indica la preferencia de x_l sobre x_k, ${p_i}^{lk} < 0.5$ indica la preferencia de x_k sobre x_l, y ${p_i}^{lk} = 0.5$ indica la indiferencia entre x_l y x_k.

Clásicamente, el proceso de selección de alternativas para resolver un problema de TDG se compone de dos fases [9] (ver Figura 1):

1. *Fase de Agregación*: Se combinan las preferencias de los expertos.
2. *Fase de Explotación*: Se obtiene una alternativa o conjunto de alternativas que den solución al problema de toma de decisión.

Figura 1: Proceso clásico para la resolución de problemas de TDG

2.2 Proceso de Consenso

Cuando se aplica el proceso de selección de alternativas en un problema de TDG, puede ocurrir que uno o varios expertos sientan que sus opiniones no han sido tenida en cuenta para alcanzar la solución, lo que puede implicar que no estén de acuerdo con la misma. Dado que existen situaciones en las que es necesario un alto nivel de acuerdo entre los expertos participantes, surge la necesidad de aplicar un *proceso de consenso*, añadiéndose así una nueva fase al proceso de TDG con el objetivo de que los expertos lleguen a un alto nivel de acuerdo antes de tomar la decisión.

El consenso puede definirse como el acuerdo producido por consentimiento mutuo entre todos los miembros de un grupo o entre varios grupos [1, 10]. Se trata de un proceso dinámico e iterativo, coordinado por una figura humana conocida como moderador, encargada de supervisar y guiar a los expertos durante dicho proceso. La Figura 2 muestra un esquema general del proceso de consenso, cuyas principales fases son [6]:

1. *Expresión y Recopilación de preferencias*: Cada experto e_i proporciona sus preferencias sobre el conjunto de alternativas X (ej. mediante una relación de preferencia difusa P_i).
2. *Determinar el grado de consenso*: El moderador calcula el nivel de acuerdo alcanzado en el grupo, cr, como un valor en el intervalo $[0,1]$ (donde un valor de

1 indica acuerdo unánime de todos los expertos sobre todas las alternativas). Para ello, se utilizan medidas de consenso, normalmente basadas en diferencias de similitud y operadores de agregación [4, 6].

3. *Control de consenso*: Se compara cr con un valor umbral de consenso mínimo deseado, $\gamma \in [0,1]$, establecido a priori por el moderador. Si $cr > \gamma$, se ha alcanzado el consenso y se pasa al proceso de selección; en caso contrario, se procede a la siguiente fase de discusión.

4. *Generación de recomendaciones*: El moderador calcula la preferencia colectiva del grupo, P_c, mediante la agregación de las preferencias individuales de los expertos. En base a P_c, se identifican a aquellos expertos e_i, y valoraciones p_i^{lk} que se encuentran más alejados del consenso, y recomienda a dichos expertos su modificación (aumentar o disminuir el valor de la valoración), para aumentar el grado de acuerdo alcanzado en la siguiente ronda. Cada recomendación de cambio generada consiste en una terna $(e_i, (x_l, x_k), Dirección)$, que indica que el experto e_i, debe modificar la preferencia p_i^{lk}, en la dirección dada por $Dirección \in \{Aumentar, Disminuir\}$.

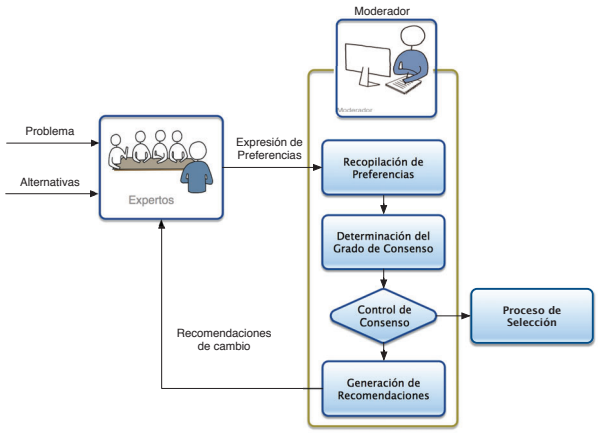


Figura 2: Proceso clásico para la resolución de problemas de TDG

El proceso de consenso normalmente implica la necesidad de que los expertos revisen y modifiquen sus opiniones, en base a las recomendaciones recibidas, con el objeto de acercarlas a las del resto del grupo. No obtante, en procesos de consenso puede darse que alguno de los expertos que participan en la misma no estén disponibles para la ronda en curso o que se añadan expertos una vez iniciadas las rondas. Por tanto el esquema general presentado en la Figura 2 tendrá que adaptarse en alguna de sus fases para añadir estructuras dinámicas que nos permita gestionar esta eventualidad. En la Sección 3 se presentarán en detalle las diferentes fases de nuestro modelo de consenso basado en estructuras de decisión dinámicas.

2.3 Marco de Decisión Dinámico Multiciriterio

En un problema de toma de decisión dinámico multicriterio [2] se define un número positivo discreto de periodos de decisión $T = \{1,2,\ldots\}$, siendo A_t el conjunto de alternativas disponibles en el momento $t \in T$. En cada periodo de tiempo t, para cada alternativa disponible $a \in A_t$, una puntuación no dinámica es calculada $R_t(a) \in [0,1]$, utilizando un operador de agregación $Agg_1 : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ que combina las valoraciones del conjunto de criterios $C_t = \{c_1, \ldots, c_n\}$ expresadas en el intervalo unidad.

La información involucrada en el problema de decisión sobre el conjunto de alternativas a lo largo del tiempo es llevada a cabo a través de una iteración entre el periodo actual y el histórico de los periodos previos que es definido como: $H_0 = \emptyset$; $H_t = \bigcup_{t'<t} A'_t$; $t, t' \in T$.

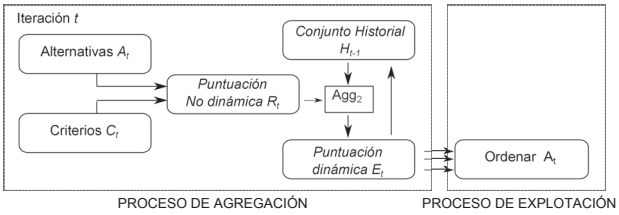


Figura 3: Marco de decisión dinámico multicriterio

La naturaleza dinámica del proceso de decisión (ver Figura 3) es soportada por una función de evaluación $E_t(a)$ que es definida para cada $t \in T$ como: $E_t(a) : H_t \longrightarrow [0,1]$.

$$E_t(a) = \begin{cases} R_t(a), & a \in A_t \setminus H_{t-1} \\ Agg_2(E_{t-1}(a), R_t(a)), & a \in A_t \cap H_{t-1} \\ E_{t-1}(a), & a \in H_{t-1} \setminus A_t \end{cases} \quad (2)$$

Definiéndose $Agg_2 : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ como un operador de agregación asociativo que puede aplicar diferentes tipos de refuerzo para el conjunto de alternativas, considerando la actitud en el proceso de toma de decisión (ver [8]). Así, pueden utilizarse como operadores de agregación aquellos que están basados en t-normas y t-conormas [11], ya que cumplen la propiedad asociativa, cumpliendo tambien la propiedad de compensación [12]:

$$min(x_1, \ldots, x_m) \leqslant Agg_2(x_1, \ldots, x_m) \leqslant max(x_1, \ldots, x_m)$$

3 Modelo de Consenso Basado en Estructuras Dinámicas

En esta sección se presentará el modelo de consenso basado en estructuras dinámicas que estará compuesto por las siguientes fases, basadas en un proceso de consenso clásico [10]:

1. Recopilación de preferencias.
2. Determinación del grado de consenso.
3. Control del consenso.
4. Generación de recomendaciones.

A continuación, se describirá con mayor detalle aquellas que dotan de carácter dinámico al proceso de consenso.

3.1 Recopilación de preferencias

Los expertos que participan en una de las rondas del proceso de consenso deberán expresar sus preferencias sobre las alternativas del problema mediante una relación de preferencia difusa. Una definición formal sería como sigue: sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}, (n >= 2)$ el conjunto finito de alternativas sobre las que un conjunto $E = \{e_1, \ldots, e_m\}, (m >= 2)$ de expertos deberán proporcionar sus valoraciones. Cada experto e_i dará su opinión sobre X por medio de una relación de preferencia difusa $P_i : X \times X \rightarrow [0,1]$ que estará caracterizada por una función de pertenencia $\mu_{P_i} : X \times X \rightarrow [0,1]$, cuya representación ya ha sido presentada en la equación 1.

La particularidad de nuestro modelo es que el conjunto E de expertos no será el mismo para las diferentes rondas del proceso de consenso, pudiendo participar diferentes expertos en cada una de las rondas del proceso.

3.2 Determinación del grado de consenso

Una vez que los expertos participantes en la ronda t del proceso de consenso han suministrado sus preferencias debemos determinar el grado de consenso cr que posteriormente será utilizado para saber si hemos concluido con las rondas de consenso. Este proceso estará compuesto por los siguientes pasos (ver Figura 4):

1. *Cálculo de las matrices de similaridad entre expertos* $SM_{i,j}$: Para cada par de expertos, (e_i, e_j) deberemos calcular cómo de próximas están sus opiniones mediante la matriz de similaridad $SM_{i,j}$. Para ello utilizaremos alguna función de similaridad como las presentadas en [4, 6] para las preferencias suministradas por los expertos e_i (P_i) y e_j (P_j) para cada par de alternativas (x_l, x_k) presentes en el problema de decisión.

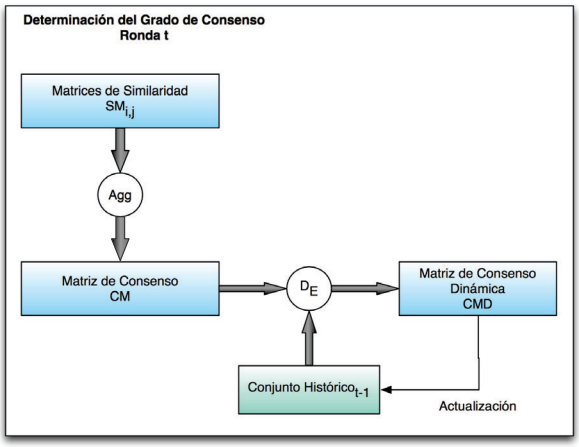


Figura 4: Cálculo de la matriz de consenso dinámica

2. *Cálculo de la matriz de consenso no dinámica CM*: Una vez que tenemos calculadas todas las matrices de similaridad pasaremos a calcular la matriz de consenso no dinámica para la ronda t. Esta matriz computará el grado de acuerdo que existe en esta ronda entre los expertos que han participado en la misma. Para ello utilizaremos algún operador de agregación, Agg, como los presentado en [4, 6] y que tendrá como resultado la matriz de consenso no dinámica CM.

3. *Cálculo de la matriz de consenso dinámica CMD*: Como los expertos que participan en una ronda de consenso puede que no participen en la siguiente hay que utilizar estructuras dinámicas que nos permitan recordar las opiniones que éstos dieron en rondas anteriores. Para ello se utilizará un operador de agregación D_E, siendo adecuado el uso de una t-norma o t-conorma [11], ya que cumplen la propiedad asociativa.

   La ventaja de los operadores de agregación asociativos es que no será necesario recordar toda la información de las rondas previas y por tanto tan solo neceritaremos almacenar la información de la ronda anterior $t-1$.

$$CMD_t = \begin{cases} CM_t & t = 1 \\ D_E(CMD_{t-1}, CM_t) & t > 1 \end{cases} \quad (3)$$

Cuando ya tenemos la matriz de consenso dinámica para la ronda t podemos obtener el valor de consenso cr mediante un operador de agregación como se muestra en [4, 6]

3.3 Control del consenso

En esta fase se estudia si se ha alcanzado el suficiente grado de consenso para dar por finalizado el proceso de consenso

y pasar a la selección de la alternativa o conjunto de alternativas que será la solución al problema de decisión. Para ello se comparará el grado de consenso, cr, con el valor mínimo de consenso que ha sido fijado con anterioridad al inicio de las rondas de consenso, γ, y habrá finalizado la discursión si $cr >= \gamma$.

3.4 Generación de recomendaciones

Si no se ha alcanzado el nivel de consenso deseado el moderador deberá establecer las recomendaciones para los expertos que han participado en la ronda de consenso. Para ello deberemos calcular la matriz de preferencia colectiva dinámica como se muestra en la Figura 5. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

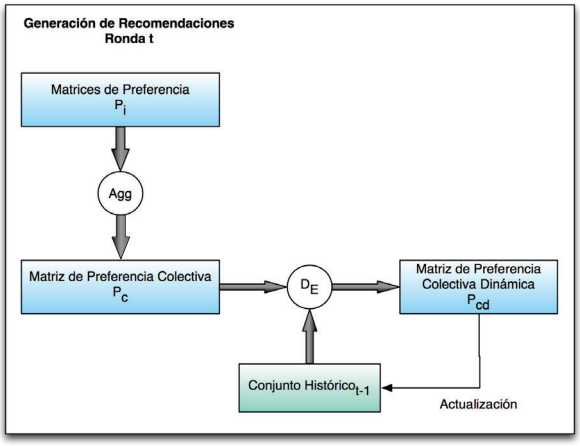


Figura 5: Cálculo de la matriz de preferencia colectiva dinámica

1. *Cálculo de la matriz de preferencia colectiva no dinámica P_c*: Para que el moderador sea capaz de determinar que expertos están más alejados en relación al colectivo se deberá calcular la matriz de preferencia colectiva para los expertos que han participado en la ronda t del proceso de consenso. Para ello utilizaremos algún operador de agregación *Agg* como los presentados en [6].

2. *Cálculo de la matriz de preferencia colectiva dinámica P_{cd}*: Una vez calculada la matriz anterior deberemos añadir las preferencias que tenemos en el histórico de expertos que no hayan participado en la ronda de consenso actual. Para ello se utilizará un operador de agregación D_E, siendo adecuado el uso de una t-norma o t-conorma [11], ya que cumplen la propiedad asociativa. De esta forma la matriz de preferencia colectiva dinámica P_{cdt} para la ronda t se calculará como sigue:

$$P_{cdt} = \begin{cases} P_{ct} & t = 1 \\ D_E(P_{cdt}, P_{ect}) & t > 1 \end{cases} \quad (4)$$

En este punto el moderador ya tiene la información necesaria para identificar aquellos expertos e_i que han participado en la ronda t y cuyas valoraciones p_i^{lk} que se encuentran más alejados del consenso y puede proceder a realizar las recomendaciones (aumentar o disminuir) como en el modelo clásico presentado en la Figura 2.

4 Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto un modelo de consenso basado en estructuras de decisión dinámicas que permite tener presente las opiniones de los expertos que participan el proceso de consenso aunque no puedan participar en todas las rondas del mismo, además también el modelo permite la incorporación de nuevos expertos una vez iniciado el proceso de consenso. Para ello se utilizan estructuras dinámicas que almacenarán las opiniones de los expertos a lo largo del tiempo mediante t-normas y t-conormas, que cumplen con la propiedad asociativa, como operadores de agregación por lo que no será necesario recordar todas las valoraciones que han proporcionado los expertos a lo largo del proceso de consenso.

Agradecimientos

Este artículo ha sido realizado con la ayuda del proyecto TIN2012-31263.

Referencias

[1] C. Butler and A. Rothstein. *On Conflict and Consensus: A Handbook on Formal Consensus Decision Making*. Takoma Park, 2006.

[2] G. Campanella and R.A. Ribeiro. A framework for dynamic multiple-criteria decision making. *Decision Support Systems*, 52(1):52–60, 2011.

[3] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 32(3):394–402, 2002.

[4] J. Kacprzk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(2):105–118, 1986.

[5] J. Liu, G. Zhang, and F. Wu D. Ruan. *Multi-Objetive Group Decision Making*. Imperial College Press, 2006.

[6] F. Mata, L. Martínez, and E. Herrera-Viedma. An adaptative consensus support model for group decision making problems in a multigranular fuzzy linguistic context. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(2):279–290, 2009.

[7] I. Palomates, L. Martínez, and F. Herrera. A consensus model to detect and manage non-cooperative behaviors in large scale group decision making. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, page In Press. DOI:10.1109/TFUZZ.2013.2262769.

[8] R.A. Ribeiro, T.C. Pais, and L.F. Simoes. Benefits of full-reinforcement operators for spacecraft target landing. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 257:353–367, 2010.

[9] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:199–206, 1997.

[10] S. Saint and J.R. Lawson. *Rules for Reaching Consensus. A Modern Approach to Decision Making*. Jossey-Bass, San Francisco, 1994.

[11] Ronald R. Yager and Alexander Rybalov. Uniform aggregarion operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 80(1):37–51, 1996.

[12] H.J Zimmermann and P Zysno. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 4(1):37 – 51, 1980.

S-PISNA: UNA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS PARA GRAFOS DIFUSOS BASADA EN COMPUTACIÓN CON PALABRAS PARA LA MEJORA DE RECOMENDACIÓN A GRUPOS.

Jorge Castro Gallardo[1], **Salud Jiménez Zafra**[1], **Manuel J. Barranco García**[1], **Luis Martínez López**[1]

[1]*Universidad de Jaén, Campus Las Lagunillas, 23071, Jaén*, jcastro@ujaen.es, saludmjimenez@gmail.com, martin@ujaen.es, barranco@ujaen.es

Resumen

Los sistemas de recomendación a grupos se utilizan para realizar recomendaciones a grupos de usuarios de forma que satisfagan sus necesidades como grupo de entre un conjunto sobrecargado de alternativas. El análisis de las necesidades del grupo puede enfocarse de distintas formas atendiendo a la formación y relación del mismo. Una posibilidad es usar una representación del mismo, como si de una red social se tratase, mediante grafos difusos y así aplicar el Paradigma de Análisis Inteligente de Redes Sociales (*Paradigm of Intelligent Social Network Analysis*, PISNA) para analizar dichas necesidades. En esta contribución se presenta una herramienta software S-PISNA que implementa distintas funciones de PISNA basada en computación con palabras, que nos ayudará a mejorar procesos futuros de la recomendación a grupos.

Palabras Clave: recomendación a grupos, computación con palabras, análisis de redes sociales.

1 INTRODUCCIÓN

Continuamente nos encontramos en situaciones en las que tenemos que elegir una alternativa de entre un gran conjunto de opciones, como por ejemplo, qué película ver [1] o en qué restaurante cenar [2]. El gran número de alternativas disponibles hace que resulte interesante aplicar técnicas que ayuden a los usuarios en su búsqueda del producto más adecuado. Para ello, se utilizan los Sistemas de Recomendación (SR) [2], que personalizan los contenidos que se presentan al usuario atendiendo sus necesidades y preferencias concretas.

[1]www.netflix.com
[2]www.yelp.com

Los sistemas de recomendación descritos anteriormente calculan recomendaciones individuales, es decir, destinadas a un único usuario, pero existen actividades de cierto carácter social en los que resulta interesante obtener recomendaciones para grupos de usuarios [9] como, por ejemplo, la recomendación de películas para un grupo de amigos [11], de actividades turísticas para un grupo de viajeros [5], de noticias [7] o de música [4]. Todas estas actividades tienen en común que los miembros del grupo tienen intereses u objetivos en un momento determinado que han de tenerse en cuenta a la hora de hacer la recomendación.

Es claro que en la recomendación a grupos el éxito de las recomendaciones dependerá de una correcta identificación de las relaciones existentes entre los miembros del grupo. El análisis de las mismas puede ayudar a descubrir patrones de comportamiento en el grupo que permitan mejorar posteriormente las recomendaciones dirigidas al mismo, como por ejemplo que exista un claro líder [10] o que los miembros sean muy similares entre sí [1]. Dichas relaciones pueden representarse mediante un grafo difuso tal que, la intensidad de una relación entre individuos se corresponde con el peso de la arista que los une en el grafo. Este grafo difuso puede ser analizado de forma similar a como han sido analizadas las redes sociales en [13]. En esta contribución modelaremos el grupo de usuarios que demanda una recomendación como un grafo difuso que representa las relaciones entre ellos, de forma similar a las relaciones en una red social (por lo que utilizaremos indistintamente ambos términos). Así, dicha representación puede ser explotada posteriormente aplicando conceptos formales utilizados en el análisis de redes sociales, destacando características interesantes de la misma. Tradicionalmente, los métodos numéricos para análisis de redes sociales dan buenos resultados, pero su interpretabilidad es baja, por lo que el uso de información lingüística para los términos de análisis del grafo difuso facilita la comprensión de los conceptos, de los resultados y el ajuste de las técnicas.

Por ello, en el análisis inteligente de redes sociales [13] (en inglés *Paradigm for Intelligent Social Network Analysis, PISNA*) se utilizan términos lingüísticos. Este paradigma

permite establecer un puente entre la forma de comunicación y razonamiento de los seres humanos, mediante términos lingüísticos, y la de las máquinas, mediante símbolos formales, aplicando computación con palabras [15]. Una característica de este paradigma es que permite reinterpretar las relaciones entre los individuos del grupo aplicando términos lingüísticos, lo que dota a los sistemas que adopten este paradigma en el análisis de redes sociales un grado de flexibilidad mayor. A partir de este análisis se caracteriza el grupo para el que se pretende recomendar, lo que permite aplicar modelos más ajustados a las características concretas del mismo y mejorar las recomendaciones.

En esta contribución se presenta un prototipo de una herramienta para facilitar el análisis basado en PISNA, que permite visualizar la red social del grupo a analizar, reinterpretar dicha red para ajustar las relaciones entre los individuos mediante la computación con palabras, aplicar distintos términos formales para la caracterización de usuarios dentro de la misma e interactuar con los valores de sus parámetros para extraer conocimiento del grupo y así poder mejorar los procesos de recomendación posteriormente.

El resto de esta contribución se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se hace una revisión de los conceptos necesarios, presentando los conceptos utilizados de de sistemas de recomendación a grupos, de grafos difusos, de redes sociales y PISNA. Posteriormente, se presenta la herramienta desarrollada para facilitar el análisis con PISNA. Tras esto, se detalla cómo se puede aplicar PISNA a la mejora de recomendación a grupos. Para finalizar, se detallan las conclusiones y trabajo futuro de esta contribución.

2 PRELIMINARES

En esta sección se exponen los conceptos básicos de recomendación a grupos y posteriormente los conceptos utilizados en el análisis de redes sociales con PISNA.

2.1 Sistemas de recomendación a grupos

En los sistemas de recomendación tradicionales, se utilizan tres fuentes de información distintas: el conjunto de los usuarios ($U = \{u_1, \ldots, u_n\}$), el conjunto de productos ($I = \{i_1, \ldots, i_n\}$) y el conjunto de valoraciones de preferencia de los usuarios sobre los productos ($P \subseteq U \times I \rightarrow D$ con $D = \{1,2,3,4,5\}$). De especial interés es esta última (ver Tabla 1), que describe en qué medida los usuarios se sienten satisfechos con los productos que han valorado.

El problema de la recomendación consiste en encontrar el producto (o conjunto de productos) que maximice la utilidad para el usuario al que se desea recomendar:

$$recomendar(I,u) = \arg\max_{i_j \in I} utilidad(i_j, u) \qquad (1)$$

En recomendación a grupos se añade el concepto de grupo, que es un subconjunto de usuarios del sistema, llamados miembros del grupo ($G = \{m_1, \ldots, m_r\} \subseteq U$). De esta manera, en recomendación a grupos, se pueden utilizar las preferencias individuales de los miembros para generar la recomendación para el grupo.

Tabla 1: Valoraciones de preferencia de los usuarios sobre los productos.

	i_1	$\ldots$	i_j	$\ldots$	i_m
u_1	p_1^1	$\ldots$	p_j^1	$\ldots$	p_m^1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
u_n	p_1^n	$\ldots$	p_j^n	$\ldots$	p_m^n

El problema de la recomendación a grupos consiste en encontrar el producto (o conjunto de productos) que maximizan la utilidad para el grupo:

$$recomendarGrupo(I,G) = \arg\max_{i_j \in I} [utilidad(i_j, G)] \qquad (2)$$

Dependiendo de cómo el sistema de recomendación a grupos utilice las preferencias individuales de los miembros podemos diferenciar distintas formas de calcular las recomendaciones a grupos [9]:

- Agregar las preferencias individuales para formar un perfil de grupo y recomendar como si se tratase de valoraciones individuales,
- Calcular recomendaciones individuales y agregarlas,
- Construir un modelo asociado al grupo.

2.2 Análisis de redes sociales

Dado que queremos aplicar modelos y conceptos propios de las redes sociales para analizar los grupos, en esta sección revisamos distintos conceptos básicos, su representación mediante grafos difusos y la extracción de conocimiento aplicando PISNA.

A) Redes sociales

Las redes sociales se definen como una estructura que contiene enlaces entre individuos, en la que dichos enlaces representan las relaciones interpersonales que se dan entre los individuos de la misma [6, 12]. Las redes sociales pueden ser aplicadas en problemas en los que la información se puede modelar mediante una estructura de red.

Tradicionalmente, las redes sociales han sido una herramienta para la extracción de conocimiento sobre los individuos y sus relaciones [8]. Analizando una red social se pueden obtener características interesantes, como la obtención de los líderes de la misma (usuarios influyentes) o la cohesión de un grupo de individuos de la misma.

B) Representación: Grafos difusos

Como se ha comentado anteriormente, entre los miembros de un grupo existen relaciones que pueden ser de mayor o menor intensidad, por lo que para modelarlas, una representación adecuada son los grafos difusos [13]. Un grafo difuso se compone de nodos, que corresponderán con individuos (miembros del grupo) y de aristas que unen dichos nodos, que representan las relaciones entre los mismos. Dichas aristas tienen asociado un valor en el intervalo [0,1] que representa la intensidad de la relación entre los nodos, es decir, la intensidad de la relación entre miembros. Formalmente un grafo difuso es una tupla $G =< V, E, R >$, en la que V es el conjunto de nodos del grafo, E es el conjunto de aristas del grafo y R es una relación $R : V \times V \rightarrow [0,1]$, que representa la intensidad de la relación entre dos nodos. Cuando la relación entre dos nodos es mayor que cero, se dice que los nodos están conectados.

Un concepto frecuentemente utilizado en grafos son los caminos. Un camino consiste en una sucesión de nodos que conecta el nodo inicial con el nodo final. Una propiedad interesante de estos es la longitud de un camino, que en un grafo difuso se define como:

$$\rho = v_1, v_2, \ldots, v_r \tag{3}$$

$$Longitud(\rho) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{R(x_j, x_{j+1})}, R(x_j, x_{j+1}) > 0 \tag{4}$$

donde ρ es la sucesión de nodos y $R(x_j, x_{j+1})$ es la intensidad de la relación entre el nodo x_j y x_{j+1}.

Entre dos nodos x_i y x_j se puede calcular la distancia, como la longitud del camino más corto que los une.

Una operación interesante en grafos difusos es la composición de relaciones (ver Ecuación 5). Como la composición de relaciones es asociativa, se puede generalizar el concepto a la composición de la relación R consigo misma k veces (ver Ecuación 6), por lo que la composición de relaciones en grafos difusos resulta útil para conocer la intensidad de la relación entre dos individuos (teniendo en cuenta un número dado de saltos entre los individuos). En un grafo difuso, el valor de $R^k(x_i, x_j)$ es la intensidad máxima de los posibles caminos, de hasta k enlaces, entre x_i y x_j.

$$R_1 \diamond R_2(x,y) = \max_{y \in V} [\min(R_1(x,y), R_2(y,z)] \quad x,y,z \in V \tag{5}$$

$$R^k = \overbrace{R \diamond R \diamond \cdots \diamond R}^{k \text{ veces}} \tag{6}$$

Otro concepto utilizado en redes sociales es la detección de líderes. Se puede calcular de distintas formas, una de ellas es calculando la centralidad de los nodos. Cuanto mayor sea el valor de centralidad de un nodo, más relaciones y más fuertes serán sus relaciones con el resto de nodos, por lo que dicho nodo será un líder en la red social. Usando la representación con un grafo difuso de la red social, se puede calcular el valor de centralidad (ver Ecuación 7), que se puede generalizar teniendo en cuenta el número de enlaces (k) que se consideran en su cómputo (ver Ecuación 8)).

$$C(x_i) = \sum_{j \neq i}^{n} R(x_i, x_j) \tag{7}$$

$$C^k(x_i) = \sum_{j \neq i}^{n} R^k(x_i, x_j) \tag{8}$$

C) Paradigma de Análisis Inteligente de Redes Sociales

R. R. Yager [13] presentó PISNA para facilitar el análisis de redes sociales a través de técnicas de computación con palabras. En la Figura 1 se muestra el esquema que este paradigma sigue, sirviendo como puente entre la definición mediante la teoría de conjuntos de los conceptos de análisis de redes sociales y una representación lingüística de los mismos que facilite la comprensión de los conceptos, de los resultados y su ajuste. Mediante la computación con palabras se permite introducir cierta flexibilidad a los conceptos utilizados en el análisis, dando como resultado la obtención de conceptos formales más sencillos de entender y ajustables, a través de la aplicación de términos lingüísticos. A continuación se explican los términos lingüísticos representados según el enfoque lingüístico difuso [14].

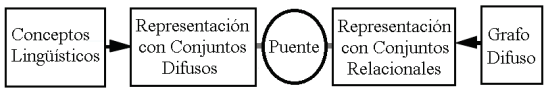


Figura 1: Paradigma de Análisis Inteligente de Redes Sociales (PISNA)

De entre los conceptos lingüísticos definidos en PISNA podemos destacar la intensidad de la relación entre nodos, que se puede definir con término *"Fuerte"*, que indica en qué medida una relación entre nodos satisface el término *"Fuerte"*. Este término define su semántica usando los parámetros α y β, que pueden ser modificados para hacer el término más o menos restrictivo (Ver Figura 2).

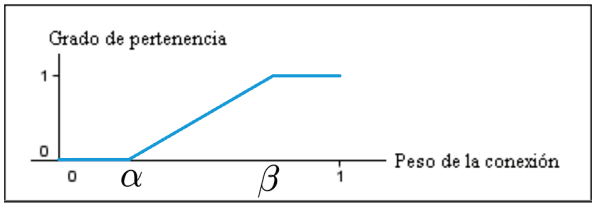


Figura 2: Representación del término *"Fuerte"*, aplicado sobre la intensidad de la relación entre dos nodos.

Así, si aplicamos este término lingüístico, el concepto de

centralidad de un nodo (ver Ecuación 8) queda como sigue:

$$C^k(x_i) = \sum_{j \neq i}^{n} S(R^k(x_i, x_j)) \quad (9)$$

Otra propiedad interesante de los grafos a definir lingüísticamente es la longitud de un camino. Por lo tanto, un término lingüístico interesante será el término *"Corto"*, cuya semántica puede definirse como se muestra en la Figura 3, para analizar la longitud de los caminos.

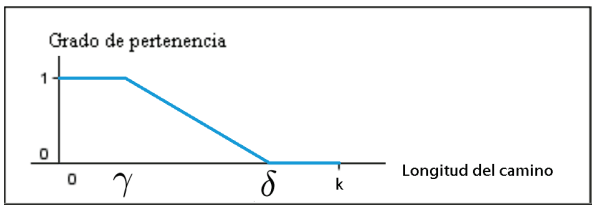


Figura 3: Representación del término *"Corto"*, aplicado sobre la longitud de un camino.

Ambos términos lingüísticos pueden ser usados conjuntamente para buscar el camino más fuerte y corto entre dos nodos. Así, este concepto se define como:

$$C_1(x_i, x_j) = \max_{k=1 \ to \ t} [SH(k) \wedge S(R^k(x_i, x_j))] \quad (10)$$

3 S-PISNA

Los conceptos revisados anteriormente se pueden aplicar en el análisis de grupos para mejorar sus recomendaciones. Por lo que, para facilitar el análisis y comprobar su funcionamiento, hemos desarrollado S-PISNA, un prototipo inicial de un software basado en PISNA que permite analizar grupos siguiendo este paradigma (ver Figura 1), visualizando los datos iniciales y los resultados intermedios.

A continuación, se detalla la arquitectura de la herramienta y las funcionalidades principales que proporciona.

3.1 ARQUITECTURA

Para la implementación del prototipo de S-PISNA se ha utilizado el lenguaje de programación Java[3], por su portabilidad entre distintas plataformas. En la Figura 4 se muestra la arquitectura del mismo. La interfaz gráfica de usuario ha sido implementada con Swing y para el manejo y, concretemente para la visualización de grafos difusos, se ha utilizado la biblioteca *Java Universal Network/Graph Framework* JUNG[4]. Se ha utilizado una base de datos MySQL para almacenar los datos de los miembros del grupo.

[3] www.oracle.com/technetwork/java

[4] jung.sourceforge.net/

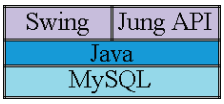


Figura 4: Arquitectura de S-PISNA

3.2 FUNCIONALIDAD

S-PISNA implementa los conceptos de PISNA para el análisis de grupos, por lo que facilita la definición de conceptos lingüísticos, el cálculo de caminos entre individuos y la obtención de los líderes de la red. A continuación se detalla cada una de estas funcionalidades.

A) DEFINICIÓN DE CONCEPTOS

Una característica que ofrece la herramienta es la posibilidad de definir los términos lingüísticos que se aplican a las propiedades relevantes del grafo.

Sobre la intensidad de la relación entre miembros se define el concepto *"Fuerte"* (ver Figura 2) con los valores de α y β que se desee experimentar. El concepto *"Fuerte"* definido modificará la intensidad de la relación entre los individuos para reinterpretarla de manera que se mantendrán aquellas relaciones con una intensidad que se considere *"Fuerte"*, según los valores de α y β. En la interfaz de S-PISNA, se puede definir el concepto *"Fuerte"*, en el panel A de la Figura 5. De manera similar se puede definir el concepto *"Corto"* sobre la longitud de los caminos entre miembros, en el panel B de la Figura 5.

Una vez hecho esto, en la parte superior derecha de la interfaz se muestra el grafo original y en la parte inferior derecha, el grafo cuyos pesos han sido modificados por el término *"Fuerte"*. Dicho grafo modificado se utiliza para calcular los líderes (ver Ecuación 9), cuyos parámetros se especifican en la parte izquierda de la interfaz. En la parte inferior izquierda, se muestra un resumen del cálculo, mostrando el valor de centralidad de los líderes calculados.

B) CAMINOS

La herramienta también facilita el cálculo de caminos entre nodos de la red. Estas funcionalidades hacen uso de los conceptos *"Fuerte"* y *"Corto"*, definidos anteriormente. El prototipo pone dispone de tres formas de calcular caminos entre individuos: cálculo de camino mínimo, camino más fuerte y camino mínimo más fuerte (ver Ecuación 10). Por medio de estas funcionalidades se puede analizar el grupo de una forma más ligada a cada individuo, estudiando si hay conexión con otros miembros y sus características.

En los paneles C, D y E de la Figura 5 se puede realizar el cálculo del camino mínimo, camino más fuerte y camino mínimo más fuerte, respectivamente. Para calcular los caminos se debe especificar el nodo inicial y final, y la herra-

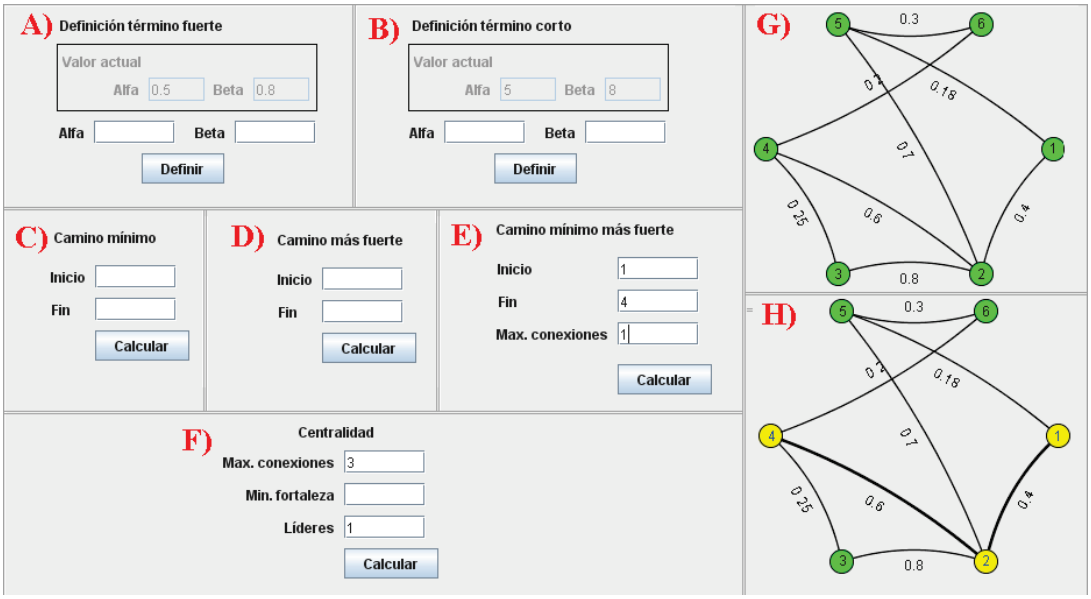


Figura 5: Interfaz de S-PISNA, que permite la visualización de redes y resultados intermedios de PISNA.

mienta calcula todos los caminos posibles. Una vez hecho esto, los ordena según su longitud, según su fortaleza o según la Ecuación 10, dependiendo del cálculo que se desee realizar. Para este último, se debe especificar también el número máximo de conexiones que el camino puede tener. El camino que más se ajusta al cálculo especificado se muestra sobre el grafo mostrado en el panel H de la Figura 5.

C) LÍDER

En el análisis de la red para recomendación a grupos se pueden aplicar métodos de detección de líderes. En la herramienta se permite analizar el grafo para mostrar el nodo con mayor valor de centralidad (ver Ecuación 9), que corresponderá con el líder del grupo.

Como se ha comentado anteriormente, se puede modificar la definición de los conceptos. Para el concepto *"Fuerte"*, se han elegido los valores $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.8$. La definición del término fuerte es utilizada por el cálculo de líderes, que se encuentra en el panel F de la Figura 5. Para el cálculo de líderes es necesario especificar el número máximo de conexiones a tener en cuenta (corresponde con el valor k de la Ecuación 9), la fortaleza mínima de las conexiones y el número de líderes que se desea mostrar en el grafo del panel H de la Figura 5.

4 APLICACIÓN EN RECOMENDACIÓN A GRUPOS

En esta sección se muestra la idea de como se pretende usar PISNA y S-PISNA para el análisis de grupos en sistemas de recomendación.

4.1 INTEGRACIÓN DE PISNA EN SISTEMAS DE RECOMENDACIÓN A GRUPOS

En la Figura 6 se muestra un diagrama de la arquitectura que se utilizará para la mejora de la recomendación a grupos (ver Tabla 1). A partir de la información del grupo, se calcula su grafo difuso, que es analizado para extraer características del grupo. El sistema de recomendación a grupos utiliza las preferencias individuales de los usuarios, el conjunto de usuarios que componen el grupo, su grafo difuso y las características del mismo para recomendar.

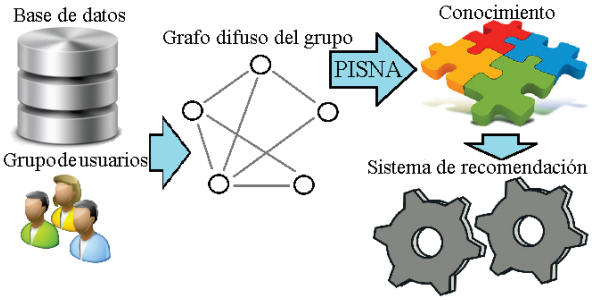


Figura 6: Sistema de recomendación a grupos con PISNA.

4.2 RECOMENDACIÓN A GRUPOS CON PISNA

El conocimiento extraído por PISNA describe las características concretas del grupo, por lo que puede ser utilizado

para la mejora de la recomendación a grupos. Una manera de utilizar esta información es aplicarla para ajustar los parámetros del sistema de recomendación a grupos que se utiliza para recomendar, de manera que puedan ajustarse las recomendaciones a cada grupo, atendiendo a sus características. Por ejemplo, se pueden utilizar distintas técnicas de recomendación a grupos atendiendo a la cohesión del mismo [1], ya que la cohesión indicará cómo de parecidas son las preferencias de los miembros del grupo.

Otro ejemplo de aplicación es diseñar un sistema que permita detectar si en el grupo existe un claro líder que tenga una estrecha relación con el resto de miembros. Aprovechando esta característica, se puede simplificar el proceso de recomendación, transformando el problema en un cálculo de recomendación a individuos [3, 10] calculando las recomendaciones para el líder y presentándola como recomendación para el grupo.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado S-PISNA, un prototipo de herramienta software que implementa el paradigma de análisis inteligente de redes sociales. S-PISNA permite analizar interactivamente el grafo difuso asociado a un grupo, lo que ayudará a ajustar la recomendación a grupos por medio del análisis de sus características concretas.

También se ha presentado el modelo que se utilizará para aplicar PISNA en la mejora de la recomendación a grupos. Inicialmente, se tienen las valoraciones individuales de los miembros del grupo de usuarios que desean obtener recomendaciones. A partir de dicha información, se calcula la red social de los mismos comparando sus preferencias y ésta es analizada para obtener características que permitan definir cómo calcular las recomendaciones al grupo de manera que se ajusten más a sus características concretas.

Como trabajo futuro, se pretende seguir la arquitectura propuesta para aplicar PISNA a la recomendación a grupos, utilizando el prototipo presentado (S-PISNA) para el análisis de los grupos y mejorar el proceso de recomendación con el conocimiento extraido. También se pretende presentar un sistema de recomendación a grupos que siga esta arquitectura, evaluando la mejora aportada sobre las técnicas de recomendación a grupos actuales.

Agradecimientos

Esta contribución está financiada por los proyectos de investigación TIN2012-31263, AGR-6581 y UJA2011/12/23.

Referencias

[1] L. Ardissono, A. Goy, G. Petrone, M. Segnan, P. Torasso: Intrigue: personalized recommendation of tourist attractions for desktop and hand held devices. Applied Artificial Intell. 17, no. 8-9 : 687-714 (2003).

[2] J. Bobadilla, F. Ortega, A. Hernando, A. Gutiérrez: Recommender systems survey. Knowledge-Based Systems, 46: 109-132 (2013)

[3] B. Cédric, A. Brun, A. Aghasaryan, M. Bouzid, J. Picault, C. Senot: Topology of communities for the collaborative recommendations to groups. Information Systems and Economic Intelligence (2010).

[4] D. L. Chao, J. Balthrop, S. Forrest: Adaptive Radio: Achieving consensus using negative preferences. Technical Report TR-CS-2004-08, Dept. of Computer Science, The University of New Mexico (2004).

[5] I. García, L. Sebastia, E. Onaindia: On the design of individual and group recommender systems for tourism. Expert Systems with Applications 38.6: 7683-7692 (2011).

[6] C. Kadushin: Understanding Social Networks: Theories, Concepts, and Findings. Oxford University Press, USA (2011).

[7] J. K. Kim, H. K. Kim, H. Y. Oha, Y. U. Ryub: A group recommendation system for online communities. International Journal of Information Management, 30: 211-219 (2010)

[8] D. Knoke, S. Yang: Social network analysis. Vol. 154. Sage, 2008.

[9] J. Masthoff: Group recommender systems: Combining individual models. In Recommender Systems Handbook, pp. 677-702. Springer US, 2011.

[10] L. Morris, L. Hulbert, D. Abrams: An experimental investigation of group members' perceived influence over leader decisions. Group Dynamics: Theory, Research, and Practice 4, no. 2: 157 (2000).

[11] M. O'connor, D. Cosley, J. A. Konstan, and J. Riedl: PolyLens: a recommender system for groups of users. In ECSCW 2001, pp. 199-218. Springer, NL (2002).

[12] P. O'Reilly: Methodological issues in social support and social network research. Social Science and Medicine 26, 863-873 (1988).

[13] R. R. Yager: Intelligent social network analysis using granular computing. Int. Journal of Intelligent Systems, 23: 1197-1219. doi: 10.1002/int.20314 (2008).

[14] L. A. Zadeh: Fuzzy logic and approximate reasoning. Synthese 30, no. 3-4: 407-428 (1975).

[15] L. A. Zadeh: Fuzzy logic = computing with words. Fuzzy Sys., IEEE Trans. on 4, no. 2 (1996): 103-111.

Aplicación del uso de valoraciones *hesitant* lingüísticas para una consultora de inmuebles

Rosana Montes[1], **Ana Mª Sanchez**[1], **Pedro Villar**[1], **Francisco Herrera**[2]

[1]*Dpto. Lenguajes y Sistemas Informáticos. ETS. Ingeniería de Informática y Telecomunicación. Universidad de Granada*, {rosana,amlopez,pvillarc}@ugr.es

[2]*Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. ETS. Ingeniería de Informática y Telecomunicación. Universidad de Granada*, herrera@decsai.ugr.es

Resumen

En este trabajo aplicamos el modelo lingüístico 2-tuplas con *hesitant fuzzy linguistict term sets* (HFLTS) para evaluar un sistema de toma de decisiones lingüístico que puede implementarse online. Partiendo de la evaluación objetiva y profesional que un determinado número de agentes inmobiliarios pueden realizar sobre los pisos y casas que se muestran para venta o alquiler en un sitio web inmobiliario, se podría ofertar al usuario un sistema que ordene su selección en base a los criterios ponderados elegidos por él mismo y las valoraciones lingüísticas colectivas de los expertos.

Palabras Clave: computación con palabras, conjuntos difusos *hesitant*, problemas de decisión lingüística.

1 INTRODUCCIÓN

La toma de decisiones es una actividad diaria, que va desde la decisión más insignificante hasta la más complicada. En ocasiones no somos conscientes de la complejidad implícita en un problema, salvo cuando intentamos realizar la toma de decisiones con modelos computacionales. En este contexto se han propuesto modelos que permiten operar con información lingüística [7, 8]. Esto ofrece una ventaja a las personas que utilizan este tipo de aplicaciones: cuando los expertos evalúan el potencial de cada alternativa, pueden hacerlo mediante valores cualitativos en lugar de cuantitativos. Esto mejora la experiencia del experto que usa el modelo, puesto que en ocasiones no nos expresamos con valores exactos sino de manera más próxima al lenguaje natural. Por ejemplo, decimos que el ruido es alto, no que percibimos un valor superior a los 60 dB. Recientemente se ha habilitado en problemas de Toma de Decisiones la posibilidad de proporcionar valoraciones poco precisas [9].

En este trabajo utilizaremos un modelo lingüístico basado en *hesitant* para la toma de decisiones aplicado a una consultora del sector inmobiliario. El sistema oferta a su cliente la posibilidad de comparar y seleccionar el inmueble que mejor se le ajuste para su posterior decisión de compra o alquiler. Se toma como base las evaluaciones hechas por agentes del sector. Por lo general el inmueble se describe cuantitativamente: se ofrece una ficha descriptiva y un conjunto de fotos, que obliga al cliente a visitar el inmueble para tener una verdadera valoración de su situación, estado y otras características que, por su naturaleza, se describen cualitativamente. Nosotros añadimos valoraciones cualitativas de expertos proporcionando más información que lo que actualmente se muestra en portales del sector inmobiliario. Se hace uso de HFLTS para modelar situaciones en donde los expertos no pueden determinar con exactitud cual es la mejor valoración. Por tanto los usuarios de este modelo serán dos: los agentes inmobiliarios que actuarán de expertos y los usuarios online que participan como clientes con capacidad de expresar qué criterios se deben usar preferentemente sobre otros.

En la Sección 2 describimos conceptos preliminares y descriptivos de un problema multicriterio de decisión lingüística. La Sección 3 plantea un problema enmarcado en la Toma de Decisiones Lingüística (TDL) y sus restricciones y aplica el modelo para la consecución de sus resultados. Finalizamos con conclusiones y trabajos futuros.

2 PROBLEMA DE DECISIÓN LINGÜÍSTICA MULTIEXPERTO-MULTICRITERIO

En el ámbito de la toma de decisiones definida bajo incertidumbre, se usa el Enfoque Lingüístico Difuso (ELD) que se basa en la Teoría de Conjuntos Difusos y para modelar la información se hace uso de modelos lingüísticos. La aplicación de la metodología de Computación con Palabras para enriquecer los Modelos de Decisión Lingüísticos –computing with words (CW) [7, 8, 12]– nos permite que en lugar de manipular información cuantitativa, nos apro-

ximemos más a un modelo humano de pensamiento. Nos referimos a seguir un proceso mental que se basa en información de naturaleza cualitativa, así como en semánticas comparativas (ej. esta primavera llueve más que la del pasado año), y que además permite expresar situaciones con incertidumbre en las premisas.

El modelado lingüístico de preferencias consiste en representar las preferencias de un problema mediante etiquetas lingüísticas de un conjunto de posibles etiquetas $S^g = \{s_0, \ldots, s_g\}$. Se tienen N distintas decisiones posibles (o alternativas) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ y un conjunto de P expertos en la temática, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_P\}$. Cada experto realizará una valoración para cada variable lingüística y se obtendrá como resultado un vector de utilidad, en el que hay un valor de preferencia y_{ij} para cada una de las alternativas:

$$e_i \rightarrow (y_{i1}, \ldots, y_{iN}),\ y_{ij} \in S^g. \quad (1)$$

Todas las valoraciones de los expertos se combinarán en un proceso denominado agregación, haciendo uso de la Computación con Palabras para obtener un conjunto final de soluciones. Las alternativas se evalúan de acuerdo a un conjunto de M criterios, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_M\}$, que pueden tener igual importancia o ser ponderados. Por tanto, cada experto proporciona un vector de utilidad para cada criterio y es necesario construir un orden global de preferencias.

De forma general para resolver un problema de decisión lingüística hay que considerar tanto los aspectos de representación de la información, como los del tratamiento de estos datos.

2.1 REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

El Enfoque Lingüístico Difuso usa palabras o frases definidos en un lenguaje natural que permite expresar información imprecisa con variables lingüísticas menos precisas y mas flexibles que las numéricas (según la definición dada por Zadeh [11]). Más formalmente en [12], una variable lingüística se define por la quíntupla $\langle L, T(L), U, S, M\rangle$, siendo L el nombre de la variable, $T(L)$ el conjunto de palabras o valores posibles que puede tomar la variable lingüística, U el universo de discurso, S la regla sintáctica que genera términos en $T(L)$ y M la regla semántica que asocia significado a un valor lingüístico. Pues bien, cada valor de la variable lingüística es un conjunto difuso que varía a lo largo del universo de discurso, de ahí el uso de la Teoría Clásica de Conjuntos Difusos para modelar la información.

Recientemente se han empleado también los conjuntos difusos HFS –del anglosajón Hesitant Fuzzy Sets [10]– en donde un conjunto de valores puede estar en la propia definición de función de pertenencia de un elemento. En [9] estos conjuntos difusos *hesitant*[1] han sido aplicados en la definición del conjunto de términos lingüísticos (Hesitant Fuzzy Linguistic Term Set - HFLTS), permitiendo el uso de gramáticas libres de contexto, la creación de expresiones lingüísticas en las evaluaciones de los expertos, y por ende, haciendo más flexible el proporcionar información relacionada con el problema de toma de decisiones.

A continuación extendemos la idea del uso de *hesitant fuzzy linguistic term sets* para el conjunto de etiquetas lingüísticas. Sea $S^g = \{s_0, ..., s_g\}$ el conjunto ordenado finito de $g+1$ términos, o valores posibles de una variable lingüística ϑ. Sea H_S un subconjunto ordenado finito de términos de S^g. Según [9], la gramática libre de contexto G_H que produce expresiones gramaticales ll resultantes en H_S mediante la función E_{G_H}, nos permite tener expresiones lingüísticas para evaluar alternativas. Por ejemplo, para para $N = 4$ y $S = \{nulo, bajo, medio, alto, completo\}$ las valoraciones del experto e_i se transformarían en HFLTS de la siguiente manera:

- y_{i1} = inferior a bajo, siendo ll_1: menor o igual que s_1 y por tanto $H_S = \{s_0, s_1\}$.
- y_{i2} = superior a la media, siendo ll_2: mayor o igual que s_3 y por tanto $H_S = \{s_3, s_4\}$.
- y_{i3} = normal, siendo ll_3: entre s_2 y s_4 y por tanto $H_S = \{s_2, s_3, s_4\}$.
- y_{i4} = media, siendo $ll_4 = s_2$ y por tanto $H_S = \{s_2\}$.

Los modelos lingüísticos clásicos son dos: el modelo semántico o basado en el principio de extensión y el uso de funciones miembro, y el modelo simbólico. A este último grupo pertenece el modelo lingüístico 2-tuplas que mejora la precisión y la interoperatibilidad de los datos, sobre todo en los casos en que se usen funciones triangulares de pertenencia y S se distribuya homogéneamente. La representación lingüística 2-tuplas [4, 6] se basa en la definición de traslación simbólica α, valor que corresponde a la diferencia de información entre un valor resultante de un operador simbólico, $\beta \in [0, g]$, y un valor i de índice con correspondencia directa al término lingüístico que se espera como resultado. Usando esta representación la información se expresa con el par (s_i, α), esto es, etiqueta lingüística y valor numérico de traslación simbólica. Las operaciones de transformación de esta representación son dos:

- La función $\Delta : [0, g] \rightarrow \langle S\rangle$, asigna una 2-tupla asociada a S y definida como $\langle S\rangle = S \times [-0.5, 0.5)$:

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha),\ con\ i = round(\beta), \alpha = \beta - i. \quad (2)$$

- La función $\Delta^{-1} : \langle S\rangle \rightarrow [0, g]$, identifica una 2-tupla de $\langle S\rangle$ con un valor numérico en el intervalo $[0, g]$:

$$\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta \quad (3)$$

[1] A pesar de que *hesitant* puede traducirse por vacilante, vago o dudoso, preferimos usar en este trabajo el término en anglosajón puesto que su aparición en bibliografía es reciente y no está clara su traducción.

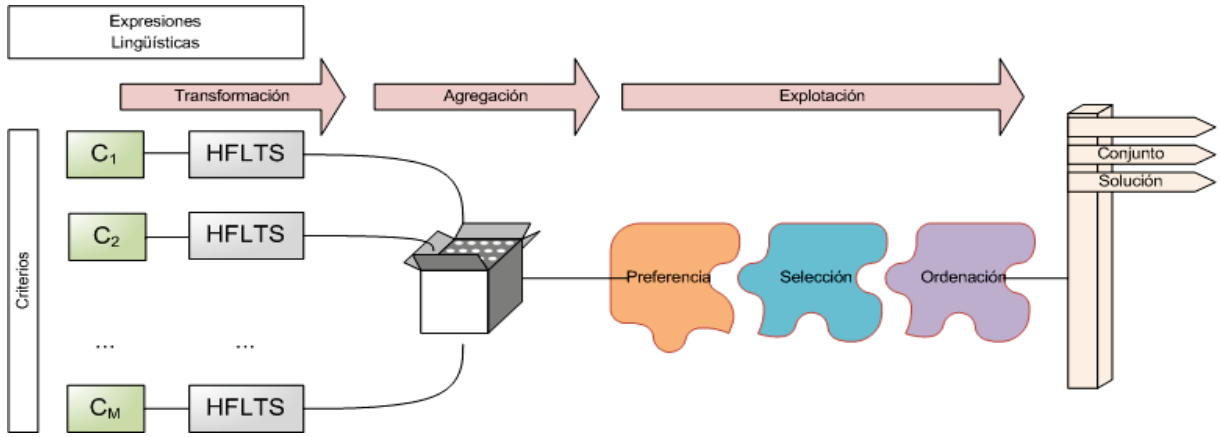


Figura 1: Proceso de toma de decisión para la resolución de un problema lingüístico basado en el modelo lingüístico 2-tuplas con HFLTS.

2.2 PROCESO DE COMPUTACIÓN

El proceso clásico de toma de decisines lingüística para problemas multicriterio suele desglosarse en dos fases: agregación y explotación. Sin embargo en [4] se advierte de la conveniencia de emplear otras dos fases previas. Si además en la definición del conjunto de etiquetas lingüísticas se hace uso de expresiones lingüísticas representadas mediante HFLTS el proceso global se representa mejor mediante la Figura 1. Estas fases son:

1. Selección del conjunto de términos lingüísticos, su granularidad y su semántica. De esta forma se define el dominio en el que se expresan los expertos.
2. Tranformación de las evaluaciones de los expertos dentro de un conjunto HFLTS con E_{G_H}. Esto implica unificarlas a conjuntos de $H_S^j(a_i)$.
3. Agregación de las evaluaciones de cada experto con respecto a todos los criterios del problema. Se obtiene la actuación colectiva para las alternativas. Previamente se ha debido elegir el tipo de operador de agregación.
4. Explotación del valor de actuación colectiva. Se obtiene un ranking de valores de forma que las alternativas son ordenadas.
5. Resultado: conjunto de soluciones $X_{ND} = \{...\}$.

Para resolver las fases de agregación y explotación, el modelado lingüístico implica el uso de técnicas computacionales para realizar procesos de computación con palabras, definiendo operaciones tales como la agregación, la negación, comparación, etc. sobre datos lingüísticos. Cuando se expresa un problema de decisión lingüística multicriterio utilizando variables lingüísticas *hesitant*, representados mediante 2-tuplas lingüísticas, los operadores habituales deben ser extendidos para esta representación. Podemos extender operadores habituales de agregación simbólica, como LOWA, o bien, los habituales en la agregación numérica. Esto es, disponemos como agregación lingüística de 2-tuplas del operador de media aritmética y el de media aritmética ponderada.

Sea $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\} = \{\beta_0, \ldots, \beta_n\}$ un conjunto de valores representados como 2-tuplas lingüísticas, W un vector de pesos y W' la normalización de los anteriores (tal que $\sum_{i=0}^{n} w_i' = 1$), se define la media aritmética ponderada extendida $\bar{x}^e$ como sigue:

$$\bar{x}^e(x) = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}\right) = \Delta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i'\right). \quad (4)$$

3 CONSULTORA DE INMUEBLES

Se tiene un sistema web que almacena ofertas de compraventa y alquiler de inmuebles. Los clientes consultan la ficha del inmueble pero reconocen que la información descriptiva de la vivienda no es suficiente para decidirse ya que existen otros factores a considerar que no aparecen explícitamente. Esto es así porque la descripción de la vivienda viene dada por el vendedor o arrendador, que considerará que su inmueble es el mejor de todos (soleado, bien situado, etc.) y por supuesto al mejor de los precios. La realidad del mercado es distinta y quien mejor la conoce es el propio agente inmobiliario.

Una mejora a estos servicios puede venir por el hecho de añadir un sistema de ayuda a la decisión que recomiende uno o varios inmuebles al comprador/arrendatario. Este sistema se basaría en un conjunto de criterios ponderados por

el cliente, ya que habrá situaciones en las que sea más importante para el cliente el espacio de la vivienda, o su estado, y en otros casos lo será el número de servicios públicos existentes en la zona. Muchas de estas apreciaciones se expresan mejor con variables lingüísticas que con valores numéricos. Si el sistema permite que a la descripción habitual del inmueble se le añada la valoración de varios expertos, sería viable implementar un sistema de ayuda a la toma de decisiones que recomiende uno o varios inmuebles al comprador según sus propios criterios y su ponderación.

Los expertos son agentes inmobiliarios que conocen la zona y la situación actual del mercado, y por su actividad diaria tienen una visión más amplia de cómo caracterizar el inmueble, por lo que su valoración sobre éste enriquecerá en gran medida los datos que el vendedor o arrendatario haya añadido al dar de alta el inmueble en el portal anunciante.

3.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE SOLUCIÓN

El inmueble, que suele ser caracterizado mediante atributos numéricos (nº de habitaciones, m^2) o lógicos (ej. plaza de garaje sí/no), debe ahora ser adicionalmente valorado cualitativamente por varios expertos, atendiendo a los criterios que se listan en la Tabla 1. Esta información quedará almacenada en la ficha del inmueble. El modelo aquí propuesto trabajará únicamente con las expresiones lingüísticas representadas mediante HFLTS y realizará los procesos computacionales mediante el modelo lingüístico computacional 2-tupla.

El cliente tras realizar una búsqueda en el portal anunciante, debería poder hacer una selección de los inmuebles que les son más interesantes (el conjunto de alternativas), así como de su lista de características imprescindibles: lista de criterios y pesos asociados a dichos criterios. Como resultado obtendría el conjunto de inmuebles candidatos seleccionados por los expertos según los criterios del usuario. Este esquema de toma de decisiones puede verse reflejado en la Figura 2.

Tenemos un caso de uso que parte de una selección de $N = 3$ inmuebles que han sido evaluados por un conjunto de expertos registrados en el sistema. Para el propósito de este ejemplo, tomaremos $P = 3$ expertos que consideramos de igual relevancia, por lo que confiamos por igual en sus evaluaciones. Cada evaluación ha considerado los $M = 9$ criterios lingüísticos que se listan en la Tabla 1. El usuario online, pondera los criterios mediante pesos $\{w_1, \ldots, w_M\}$. Para este ejemplo usaremos $Q = 2$ clientes que nos aportarán dos vectores de pesos para los criterios y por tanto nos mostrarán como obtener valoraciones diferentes de acuerdo al peso que los usuarios den a los criterios considerados. Siendo éste un problema multi-criterio y multi-experto, el vector de utilidad de alternativas definido en Eq. 1, dado por el experto e_i, se extiende a una matríz $N \times M$:

$$e_i \rightarrow \begin{pmatrix} y_{i,11} & y_{i,21} & \cdots & y_{i,N1} \\ y_{i,12} & y_{i,22} & \cdots & y_{i,N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i,1M} & y_{i,2M} & \cdots & y_{i,NM} \end{pmatrix}, \; donde \; y_{i,jk} \in S^6. \quad (5)$$

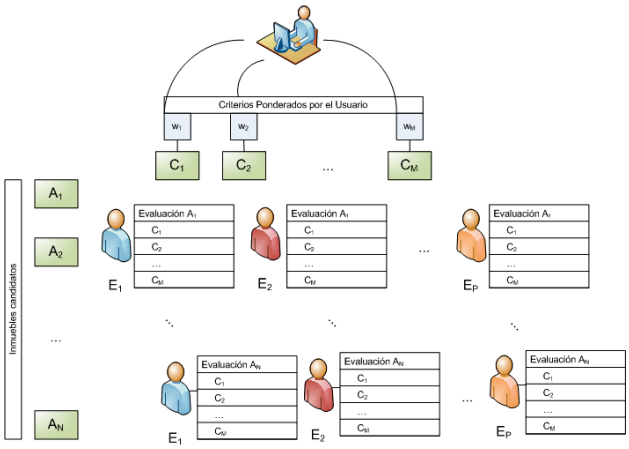


Figura 2: Ejemplo del proceso de decisión.

	A_1			$H_S(A_1)$		
ll	E_1	E_2	E_3	E_1	E_2	E_3
c_1	m-a	a	a-ma	{m,a}	{a}	{a,ma}
c_2	b-m	m	b	{b,m}	{m}	{b}
c_3	a-ma	a	m-a	{a,ma}	{a}	{m,a}
c_4	ma	a-ma	m	{ma}	{a,ma}	{m}
c_5	p	≥a	ma	{p}	{a,ma,p}	{ma}
c_6	m	b-m	a	{m}	{b,m}	{a}
c_7	ma	≥m	≥a	{ma}	{m,a,ma,p}	{a,ma,p}
c_8	b-m	m-a	m	{b,m}	{m,a}	{m}
c_9	ma	a	p	{ma}	{a}	{p}

Tabla 2: Expresiones lingüísticas dadas por los expertos sobre la alternativa A_1. En esta tabla $s_i - s_j$ representa la expresión *entre* s_i *y* s_j. Transformación de cada expresión lingüística en HFLTS para el inmueble A_1.

3.2 SOLUCIÓN AL CASO DE ESTUDIO

A continuación describimos los pasos a seguir en el modelo propuesto. Primeramente se recogen las evaluaciones de los expertos mediante el sistema web indicado, y el uso de expresiones lingüísticas tomando un conjunto de etiquetas de 7 términos: $S = \{$Nada (n), Muy Bajo (mb), Bajo (b), Medio (m), Alto (a), Muy Alto (ma), Perfecto (p)$\}$. Posteriormente, y según el proceso mostrado en la Figura 1, se debe efectuar una transformación a conjuntos HFLTS. En

	Criterio	Descripción
c_1	Calidad / Precio	Representa el precio de venta del inmueble no como un valor absoluto sino como un valor condicionado al beneficio que se consigue con la disposición (alquiler o compra) de éste.
c_2	Estado del inmueble	Determina la necesidad de reforma frente a la posibilidad de ocupar el inmueble de forma inmediata. Indirectamente representa el esfuerzo económico que hay que añadir a los gastos directos y el tiempo que será necesario invertir antes de poder disfrutar del bien en cuestión.
c_3	Luminosidad	Evalúa de forma conjunta el número de planta(s) que ocupa el inmueble, si las habitaciones son exteriores o no, la proximidad y altura de los inmuebles cercanos y también la orientación.
c_4	Molestia acústica	La existencia de fábricas, comercios o de servicios como un parque de bomberos puede incrementar el umbral de ruido acústico exterior.
c_5	Servicios básicos	Considera la oferta de servicios públicos (colegios, hospitales, ...) accesibles para el usuario de a pie.
c_6	Ocio y comercio	Considera la oferta de servicios relacionados con el ocio (cine, restaurantes, gimnasios) y comercios en general (peluquería, ferretería, talleres de reparación, etc) accesibles para el usuario de a pie.
c_7	Transporte público	Describe la oferta conjunta de transporte público en la zona (taxis, autobús, metro, etc.).
c_8	Comunicaciones	Indica la cercanía con puntos de acceso a autovía o carreteras de la red viaria nacional.
c_9	Otros gastos	Gastos asociados como cuota de la comunidad, portero o IBI.

Tabla 1: Criterios sobre los inmuebles que deberán ser valorados por los expertos.

la Tabla 2 se muestra esta primera acción de transformación para el caso del inmueble A_1. La expresiones completas y todos los datos de este ejemplo están disponibles en un Anexo web[2]. El siguiente paso consiste en agregar las opiniones de los expertos de forma que consigamos un valor colectivo que exprese la información de un conjunto de valores. Partimos de un vector de utilidad como el dado por los expertos para A_1 y c_1: $(\{m,a\},\{a\},\{a,ma\})$. Primero calculamos el límite superior $H^J_{S^+}(Ai)$ y posteriormente seleccionamos el mínimo $H_{S^+_{min}}$ para cada HFLTS, empleando el operador *min_upper* [9]. Esto es, con $(\{a\},\{a\},\{ma\})$, seleccionamos $\{a\}$. Seguidamente calculamos el límite inferior $H^J_{S^-}(Ai)$ para cada HFLTS, y nos quedamos con el máximo $H_{S^-_{max}}$ haciendo uso del operador *max_lower* [9]. Esta vez tenemos $(\{m\},\{a\},\{a\})$, lo que nos deja $\{a\}$. El intervalo lingüístico resultante se define por $H_{S^+_{min}}$ y $H_{S^-_{max}}$, siendo $[a,a]$ en el ejemplo. Para los demás criterios, los intervalos lingüísticos resultantes de este proceso de agregación quedan expresados en la Tabla 3.

A continuación, agregamos la información proporcionada por los diferentes expertos para cada criterio y alternativa. Sea el intervalo lingüístico $[s_i,s_j]$ con $s_i,s_j \in S$, su representación lingüística 2-tuplas según Eq. 2 es $[(s_i,0),(s_j,0)]$. Representando los valores de la Tabla 3 de esta forma, obtenemos intervalos lingüísticos 2-tuplas. Sean $W_{U_1} = \{1,1,0.5,0.8,0.7,0.7,1,0.8,0.4\}$ los pesos dados por un usuario del sistema, U_1, y que corresponden a la importancia que le da el cliente a cada criterio. Utilizando el operador promedio ponderado $\bar{x}^e$ de Eq. 4 por separado para los límites superiores e inferiores del intervalo se calcula el intervalo colectivo. Para A_1 dicho intervalo es $[(s_4,-0.260),$

[2]http://lsi.ugr.es/rosana/estylf14

Criterios	A_1	A_2	A_3
c_1	[a,a]	[m,a]	[m,a]
c_2	[b,m]	[a,ma]	[m,a]
c_3	[a,a]	[a,a]	[a,a]
c_4	[m,ma]	[a,a]	[b,b]
c_5	[ma,p]	[m,m]	[m,m]
c_6	[m,a]	[b,b]	[m,m]
c_7	[ma,ma]	[m,m]	[b,m]
c_8	[m,m]	[m,a]	[a,ma]
c_9	[a,p]	[b,m]	[m,a]

Tabla 3: Intervalos lingüísticos resultantes de la evaluación de los expertos.

$(s_4,0.318)]$. El siguiente paso sería ordenar cada alternativa.

La determinación del conjunto solución, pasa por la selección de un criterio de ordenación, y la tranformación inversa de la 2-tupla con Eq. 3 a una etiqueta lingüística. Para la ordenación hemos usado:

- Criterio pesimista: ordena por el valor más alto de todos los intervalos inferiorees.
- Criterio optimista: ordena por el valor más alto de todos los intervalos superiores.
- Promedio: ordena por el valor medio de los intervalos.
- Agregación *hesitant*: emplea el grado de no-dominancia entre las alternativas [9].

Si introdujeramos otro usuario, los cálculos de la fase de

agregación serían los mismos, y tan solo variaría el resultado de la fase de explotación. Por ejemplo, sea $W_{U_2} = \{0.8, 0.5, 1, 0.6, 1, 0, 0.3, 0.4, 1, 0.5\}$, la 2-tupla resultante para A_1 es [(s_4,0.019), (s_5,0.411)]. Los resultados totales aparecen expresados en la Tabla 4 y muestran la alternativa A_1 como predominante según la selección y ponderación dada por el usuario U_1. El mismo resultado se obtiene para el usuario U_2 aunque hay que notar que el conjunto solución es diferente, y por tanto ante una misma evaluación de expertos, los pesos que el cliente aplica a cada criterio pueden resultar decisivos.

H'_{U_1}	Pesimista		Optimista		Promedio		Agr. *hesitant*	
	β	#	β	#	β	#	β	#
A_1	3.739	1	4.318	1	4.028	1	1	1
A_2	3.173	2	3.637	2	3.405	2	0.025	2
A_3	2.927	3	3.536	3	3.231	3	0	3
H'_{U_2}	Pesimista		Optimista		Promedio		Agr. *hesitant*	
	β	#	β	#	β	#	β	#
A_1	4.019	1	5.411	1	4.715	1	1	1
A_2	2.686	3	4.254	3	3.470	3	0.158	3
A_3	2.901	2	4.411	2	3.656	2	0.270	2

Tabla 4: Ordenación de las alternativas que resultan para los usuarios U_1 y U_2 dados los intervalos lingüísticos H' y la agregación para cada criterio. Leyenda de ordenación (#): 1 - preferente, 3 - el menos preferente.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo hemos aplicado la representación lingüística 2-tuplas con HFLTS a un problema real de toma de decisiones, como es el caso de la busqueda de inmuebles, pisos o casas para alquiler o compra dentro de un mercado real. Si bien existen sistemas de apoyo a la decisión para sistemas web y móvil, ninguno de los portales inmobiliarios oferta en la actualidad un servicio al usuario similar a un sistema de decisión basado en modelos lingüísticos. Como hemos explicado en este trabajo, este problema de apoyo a la toma de decisiones multiexperto-multicriterio es resoluble y el uso de *hesitant* es fundamental para modelar en situaciones de incertidumbre las evaluaciones cualitativas de los agentes inmobiliarios. Además, el modelo de solución puede ampliarse con la inclusión de un factor de confianza en los agentes expertos.

Finalmente comentar que el sistema puede ser implementado en una plataforma online de una inmobiliaria o asociaciones de éstas, por lo que su uso por parte de expertos y su oferta a clientes es plausible.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de investigación TIN2011-28488 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias

[1] C. Alsina, E. Trillas: On the symmetric difference of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 153, pp. 181–194, 2005.

[2] D. Dubois, H. Prade: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Kluwer Academic, New York, 1980.

[3] P.C. Fishburn: *Utility Theory for Decision Making*. Wiley, Nueva York, 1970.

[4] F. Herrera, F., E. Herrera-Viedma: Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115, pp. 67–82, 2000.

[5] F. Herrera, L. Martínez: A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6), pp. 746–752, 2000.

[6] F. Herrera, L. Martínez: The 2-tuple linguistic computational model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency. *International Journal of Uncertainty, fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9, pp. 33–48, 2001.

[7] F. Herrera, S. Alonso, F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, Computing With Words in Decision Making: Foundations, Trends and Prospects. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8:4, 2009.

[8] L. Martínez, D. Ruan, F. Herrera, Computing with Words in Decision support Systems: An overview on Models and Applications. International Journal of Computational Intelligence Systems, 3:4 (2010)

[9] R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera: Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol.10(1), pp. 109–118, 2012.

[10] V. Torra, Y. Narukawa: On hesitant fuzzy sets and decision, *Fuzzy Systems IEEE International Conference*, pp. 1378–1382, 2009.

[11] L.A. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, 8,8,9: pp. 199–249,pp. 301–357,pp. 43–80, 1975.

[12] L.A. Zadeh: Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 94(2), pp. 103–111, 1996.

FLINTSTONES: UNA SUITE PARA LA TOMA DE DECISIONES LINGÜÍSTICAS BASADA EN 2-TUPLA LINGÜÍSTICAS Y EXTENSIONES

Francisco Javier Estrella[1], **Macarena Espinilla**[1], **Luis Martínez**[1]

[1] *Universidad de Jaén, Campus Las Lagunillas, 23071, Jaén*, {estrella,mestevez,martin}@ujaen.es

Resumen

En esta contribución nos centramos en la Toma de Decisiones Lingüística (TDL), la cual emplea valoraciones expresadas en variables lingüísticas para modelar la incertidumbre en los problemas de TD. En la TDL es necesario llevar a cabo procesos de computación con palabras (CWW, Computing With Words) para operar sobre las valoraciones lingüísticas, por ello se han propuesto en la literatura diferente modelos y herramientas para realizar dichos procesos. El modelo lingüístico basado en 2-tupla permite realizar los procesos de CWW sin pérdida de información, posibilitando además hacer frente a marcos de decisión complejos a través de sus extensiones. Tanto el modelo lingüístico basado en 2-tupla como sus extensiones han sido ampliamente utilizados en diversas aplicaciones. Sin embargo, no existe ninguna herramienta software que los implemente para abordar problemas de TDL definidos en marcos complejos. En esta contribución se presenta la arquitectura y funcionalidad de FLINTSTONES, una suite de herramientas software para la resolución de problemas de TDL basada en el modelo lingüístico 2-tupla y sus extensiones. Además, es también presentado el sitio web desarrollado para FLINTSTONES, el cual incluye un repositorio de casos de estudio para diferentes problemas de TDL.

Palabras Clave: Suite de herramientas software, Toma de decisiones, 2-tupla lingüística, Información lingüística, Computación con palabras.

1 INTRODUCCIÓN

La Toma de Decisiones (TD) es el proceso mediante el cual seleccionamos la mejor alternativa de entre un conjunto dado [10]. De forma general, es posible descomponer el esquema de resolución de un problema de TD en 6 fases, las cuales se muestran en la Figura 1.

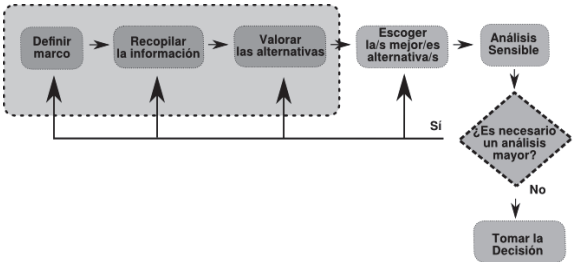


Figura 1: Esquema de un proceso de TD

Para llevar a cabo esta selección, en las distintas fases del esquema se fija el marco de decisión donde se establecen los elementos que intervienen en el problema y se recogen las diferentes valoraciones sobre las alternativas que son agregadas a fin de obtener una valoración agregada de cada alternativa. En función de dichas valoraciones, se seleccionarán la alternativa o conjunto de alternativas que constituyen la solución del problema.

A menudo, los problemas de TD están definidos en un contexto de incertidumbre que tiene un carácter no probabilístico por lo que es adecuado el uso de términos lingüísticos cercanos al modo en el que se expresan habitualmente los expertos. La lógica difusa y el enfoque lingüístico difuso [12] brindan un conjunto de herramientas para modelar y gestionar la incertidumbre por medio de variables lingüísticas, lo cual proporciona una mejora en la flexibilidad y fiabilidad de los modelos de decisión en múltiples campos [9].

El uso de variables lingüísticas en los procesos de TD (TDL, Toma de Decisión Lingüística) implica la realización de procesos de computación con palabras (CWW, Computing With Words) como la comparación, la negación o la agregación de variables lingüísticas [11]. En estos procesos, los cálculos son realizados sobre palabras o frases en lenguaje natural a fin de obtener resultados en el dominio de expresión lingüístico original que faciliten su interpretación. Debido a la naturaleza de la información con la que trabajamos en los procesos de CWW, es necesario aplicar

una fase de traslación que nos permita operar computacionalmente y una fase de retraslación en la que los resultados son convertidos al dominio de expresión lingüístico original (Véase Figura 2) [11].

Figura 2: Esquema de CWW

Si bien el modelado de las valoraciones lingüísticas y los procesos de CWW nos permiten resolver convenientemente ciertos tipos de problemas de TDL, en el mundo real, gran cantidad de problemas de TDL se encuentran definidos en marcos más complejos donde para valorar las alternativas es necesario utilizar también dominios numéricos e intervalares, o con múltiples escalas lingüísticas o escalas lingüísticas no balanceadas. Al utilizar diferentes dominios de expresión, en estos marcos la fase de traslación indicada en el esquema de la Figura 2 se corresponde con una *unificación* de las valoraciones, en la cual, toda la información es unificada en un mismo dominio de expresión que permita posteriormente realizar la fase de manipulación.

El modelo de representación lingüístico 2-tupla [4], el cual está basado en el enfoque lingüístico difuso, es un modelo flexible y adaptable para resolver problemas de TDL en todo tipo de marcos decisión, habiendo sido ampliado con diferentes extensiones para llevar a cabo procesos de CWW en marcos de decisión complejos como los anteriores.

En la literatura podemos encontrar diversos ámbitos en los que el modelo lingüístico 2-tupla y sus extensiones han sido aplicados con éxito [9] entre los que se encuentran evaluación del riesgo, sistemas de recomendación y desarrollo de nuevos productos. A pesar de ello, no existen herramientas software que implementen estos modelos y que permitan llevar a cabo los procesos de CWW para resolver problemas de TD lingüísticos y en marcos complejos.

En esta contribución se presenta FLINTSTONES (Fuzzy LINguisTic deciSion TOols eNhancEment Suite)[1], una suite de herramientas software para la resolución de problemas de TDL basada en el modelo lingüístico 2-tupla y sus extensiones. FLINTSTONES permite abordar problemas de TDL definidos en marcos complejos bajo un enfoque unificado que automatiza, simplifica y optimiza el proceso de resolución de los mismos. A fin de poner de manifiesto de forma clara todas las posibilidades que brinda la suite, vamos a presentar la arquitectura de la misma así como sus funcionalidades más relevantes, además del sitio web desarrollado para la suite, el cual alberga diversos recursos adicionales.

Esta contribución se estructura del siguiente modo: la Sección 2 realiza una breve revisión de los conceptos teóricos necesarios. La Sección 3 presenta FLINTSTONES, exponiendo su arquitectura y funcionalidad. Por último, la Sección 4 detalla las conclusiones y trabajos futuros de esta contribución.

[1] http://serezade.ujaen.es/flinstones

2 PRELIMINARES

En la suite de herramientas software que se presenta en esta contribución se emplea el modelo lingüístico basado en la representación 2-tupla para realizar los procesos de CWW. En esta sección se revisan los fundamentos básicos de dicho modelo así como sus diferentes extensiones desarrolladas para tratar con marcos complejos.

2.1 MODELO LINGÜÍSTICO 2-TUPLA

En el modelo lingüístico 2-tupla, los procesos de CWW se realizan sobre información lingüística expresada mediante 2-tupla, permitiendo trabajar en un dominio de expresión lingüístico, pero tratándolo como un universo continuo, siendo los resultados obtenidos valores lingüísticos 2-tupla. Al considerar el dominio de expresión lingüístico como un universo continuo, no se presenta pérdida de precisión.

El modelo de representación lingüístico 2-tupla se basa en el concepto de traslación simbólica [4].

Definición 1 Sea $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor en el intervalo de granularidad de S. La traslación simbólica de un término lingüístico s_i es un número valorado en el intervalo $[-.5, .5)$ que expresa la diferencia de información entre una cantidad de información expresada por el valor $\beta \in [0, g]$ obtenido en una operación simbólica y el valor entero más próximo, $i \in \{0, ..., g\}$, que indica el índice de la etiqueta lingüística (s_i) más cercana en S.

En este modelo, la representación de la información se realiza mediante un par de valores denominado *2-tupla*, (s_i, α), donde $s_i \in S$ es la etiqueta lingüística y $\alpha \in [-.5, .5)$ la traslación simbólica de la misma.

El modelo define un conjunto de funciones que permite operar sobre 2-tupla sin perdida de información.

Definición 2 Sea $S = \{s_0, ..., s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor que representa el resultado de una operación simbólica. El conjunto de 2-tupla asociado a S es definido como $\langle S \rangle = S \times [-0.5, 0.5)$ y la función $\Delta_S : [0, g] \longrightarrow \langle S \rangle$ es dada por:

$$\Delta_S(\beta) = (s_i, \alpha), \text{ con } \begin{cases} i = \text{round}(\beta), \\ \alpha = \beta - i, \end{cases} \quad (1)$$

donde *round* es un operador de redondeo, s_i es la etiqueta con índice más cercano a β y α es el valor de la traslación simbólica.

El modelo de representación basado en 2-tupla lingüísticas

define un modelo computacional asociado en el que se definen operadores para la comparación y negación de valoraciones lingüísticas 2-tupla así como un amplio conjunto de operadores de agregación 2-tupla [4].

2.2 EXTENSIONES DEL MODELO LINGÜÍSTICO 2-TUPLA PARA MARCOS COMPLEJOS

En algunas ocasiones, los problemas de TD se encuentran definidos en marcos complejos. El modelo lingüístico 2-tupla ha sido ampliado con diferentes extensiones que permiten llevar a cabo los procesos de CWW en varios de estos marcos (ver Tabla 1). A continuación, detallamos los marcos complejos que pueden ser abordados empleando las extensiones del modelo lingüístico 2-tupla:

- *Marcos heterogéneos* en los que las valoraciones pueden expresarse en diferentes dominios de expresión, como dominios intervalares, numéricos o lingüísticos en función de la naturaleza del criterio a valorar.
- *Marcos lingüísticos multigranulares* en los que las valoraciones del problema están representadas en múltiples escalas lingüísticas en función del grado de conocimiento de cada experto sobre el problema.
- *Marcos lingüísticos no balanceados* en los que las valoraciones están representadas en una escala lingüística no uniforme ni simétricamente distribuida.

Tabla 1: Extensiones basadas en 2-tupla lingüística

Marco	Extensión
Lingüístico	2-Tuple linguistic representation model [4]
Heterogéneo	Fusion for heterogeneous information [7]
Multigranular	Fusion-approach for managing multi-granular linguistic information [5] Linguistic Hierarchies [6] Extended Linguistic Hierarchies [2]
No balanceado	Methodology to deal with unbalanced linguistic term sets [8]

3 FLINTSTONES

Una vez revisados los conceptos teóricos básicos, pasamos a presentar en esta sección la suite de herramientas software FLINTSTONES. Para ello, expondremos inicialmente la arquitectura de esta suite para, seguidamente, realizar una descripción de la funcionalidad de la misma. Finalmente se presenta el sitio web de FLINTSTONES, el cual alberga información adicional así como un repositorio de casos de estudio que contiene diferentes problemas de TDL.

3.1 ARQUITECTURA

FLINTSTONES está desarrollada como una aplicación *Eclipse Rich Clien Platform* (Eclipse RCP)[2]. Eclipse RCP es una plataforma para el desarrollo de aplicaciones ricas de escritorio creada por IBM y mantenida por la comunidad Eclipse destinada al desarrollo de aplicaciones de escritorio que puedan ser ampliadas, modificadas y reutilizadas con facilidad. Eclipse RCP hace uso de una *arquitectura basada en componentes* la cual intenta paliar algunos de los problemas más comunes en el desarrollo del software como son la reutilización, el mantenimiento, la ampliación o la modificación.

Al emplear una arquitectura basada en componentes es necesario asegurar que los diferentes componentes que conforman la aplicación pueden interoperar. Para ello es establecido un *modelo de componentes* que fija el estándar a seguir en el desarrollo. Han sido propuestos varios modelos, siendo algunos de los más extendidos el modelo CORBA de OMG, el modelo EJB de Sun, el modelo COM+ de Microsoft y el modelo OSGi de OSGi Alliance. En nuestro caso, hacemos uso del modelo OSGi, al ser éste el empleado en Eclipse RCP.

Para el desarrollo de FLINTSTONES se han implementado varios componentes OSGi, los cuales pueden ser agrupados en cuatro tipos básicos: interfaz (GUI), soporte a los procesos de TD (bibliotecas), operadores de agregación (operadores) y métodos de resolución lingüísticos que implementan las diferentes extensiones 2-tupla (métodos).

Para la implementación de los diversos componentes, se han empleado diferentes tecnologías, siendo las más destacadas las recogidas a continuación.

- *Eclipse RCP*: plataforma de desarrollo de aplicaciones de escritorio orientadas a componentes.
- *Java*[3]: lenguaje de programación orientado a objetos multiplataforma.
- *jExcelApi*[4]: biblioteca para la generación y lectura de hojas de cálculo Excel.
- *jFreeChart*[5]: biblioteca para la generación de gráficas.

La Figura 3 muestra el diagrama de arquitectura de FLINTSTONES donde, por motivos de visualización, únicamente se recogen algunos de los componentes implementados.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LA SUITE

El objetivo central de FLINTSTONES es proporcionar una suite de herramientas software que permita la resolución de los problemas de TDL definidos en marcos complejos, empleando para ello el modelo lingüístico 2-tupla y sus extensiones. En esta sección se describen los problemas de TD que resuelve FLINTSTONES y el esquema de resolución que sigue.

3.2.1 Problemas de TD

FLINTSTONES resuelve problemas de decisión multiatributo, es decir, aquellos en los que las alternativas están caracterizadas por un conjunto de elementos denominados

[2] http://www.eclipse.org/home/categories/rcp.php

[3] http://www.java.com/

[4] http://jexcelapi.sourceforge.net/

[5] http://www.jfree.org/jfreechart/

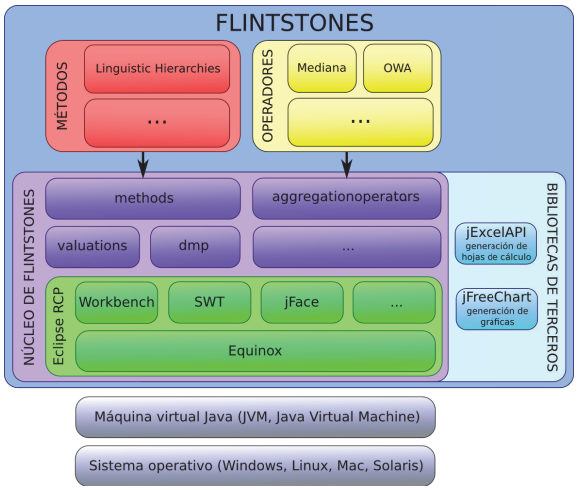


Figura 3: Arquitectura de FLINTSTONES

atributos, los cuales tienen asignado un peso, y donde se requiere la asignación de valoraciones individuales para cada atributo de cada una de las alternativas posibles. La suite permite resolver problemas de TD en grupo donde participan múltiples expertos que aportan sus valoraciones sobre las alternativas.

Los métodos de resolución implementados en la suite están basados en el modelo aditivo (WSM, Weighted Sum Model) [3], permitiendo la suite incorporar otros métodos de resolución alternativos como los basados en distancias a la solución ideal [1].

3.2.2 Esquema de Resolución

Para la resolución de problemas de TD definidos en marcos lingüísticos y marcos complejos, FLINTSTONES se basa en las fases principales del esquema de resolución presentado en la Figura 1, esto es: i) Definición del Marco ii) Recopilación de la información y iii) Valoración de las alternativas, sirviendo la valoración de las alternativas de apoyo al resto de las fases a realizar en el proceso de TD. Vamos a detallar estas fases junto con las funcionalidades más relevantes de la suite.

Definición del Marco

En FLINTSTONES se define el marco del problema de TD desde la perspectiva *Framework* especificando i) los expertos que participan en el problema, ii) las alternativas a valorar, iii) los atributos que caracterizan a las alternativas y iv) los dominios de expresión donde los expertos valorarán los atributos definidos para las alternativas (Véase Figura 4).

La suite permite definir grupos de expertos y de atributos así como indicar si un atributo dado es de coste o beneficio. Además, es posible crear dominios de expresión de diferente naturaleza de modo que los expertos puedan emplear el dominio más adecuado para expresar sus valoraciones atendiendo a la naturaleza de los atributos a valorar o a su conocimiento del problema. Concretamente se permite crear dominios lingüísticos, numéricos e intervalares, proporcionándose asistentes con los que generar fácilmente dominios lingüísticos simétricos y uniformemente distribuidos así como dominios lingüísticos no balanceados. Opcionalmente, pueden ser fijados los dominios de expresión empleados por los expertos para valorar los atributos definidos para las diferentes alternativas.

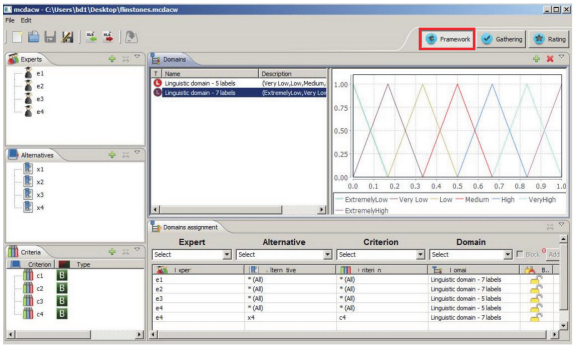


Figura 4: Marco de un problema de decisión

Recopilación de la Información

Definido el marco se pasa a la siguiente fase, la recopilación de la información, en la cual cada experto proporciona sus valoraciones para cada una de las alternativas valorando para ello los diferentes atributos definidos para cada alternativa. En FLINTSTONES esta fase es realizada desde la perspectiva *Gathering*, mostrándose un ejemplo de la misma en la Figura 5.

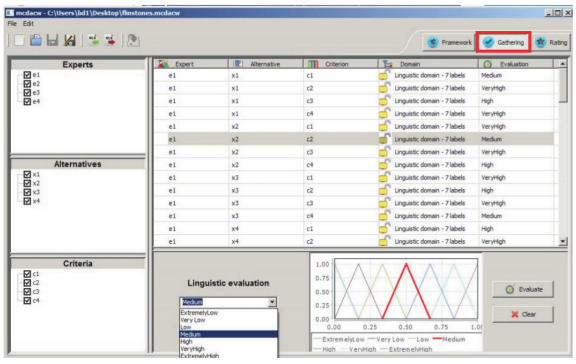


Figura 5: Recopilación de la información

A fin de facilitar la recopilación de la información, FLINTSTONES también permite realizar esta fase desde hojas de cálculo Excel (Véase Figura 6), que son generadas de forma automática. Para facilitar su uso, las hojas de cálculo generadas cuentan con diversos mecanismos de ayuda como la separación de experto por pestañas, el au-

tocompletado, ayuda contextual sobre las valoraciones permitidas, control de valores erróneos, bloqueo de celdas, etc.

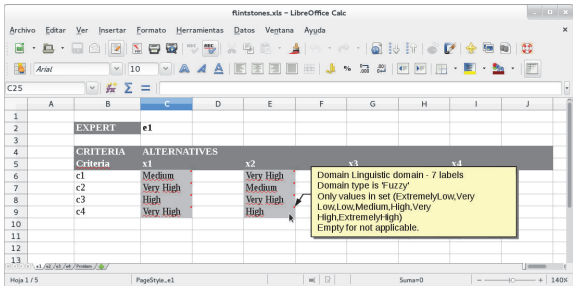


Figura 6: Hoja de cálculo generada

Valoración de las alternativas

En esta última fase es calculada la valoración colectiva de cada una de las alternativas mediante el método de resolución basado en el modelo aditivo a través del modelo lingüístico 2-tupla y sus extensiones.

FLINTSTONES implementa todas las extensiones indicadas en la Tabla 1 para resolver problemas de TDL definidos en marcos complejos. Cabe notar que, independientemente de la extensión utilizada, todos las valoraciones globales de las alternativas son expresadas en valores lingüísticos 2-tupla para facilitar su comprensión.

FLINTSTONES es capaz de indicar aquella extensión más adecuada para resolver el problema de TD a partir de un algoritmo de selección que toma como parámetros de entrada las características del problema de decisión. Además, FLINTSTONES puede detectar si una extensión puede ser empleada en un problema concreto o no, indicando en tal caso el motivo que impide su uso (Véase Figura 7).

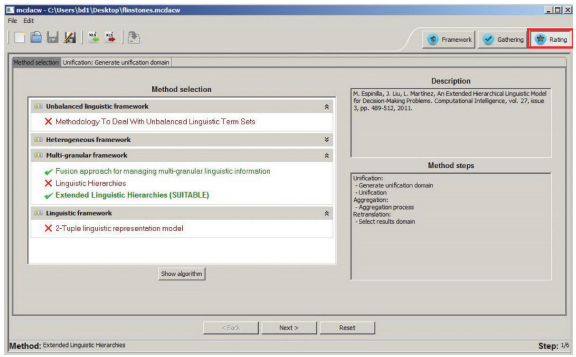


Figura 7: Selección del método de resolución

La valoración de las alternativas es llevada a cabo siguiendo las tres etapas indicadas en el esquema genérico de los procesos de CWW mostrado en la Figura 2. En función de la extensión seguida en el método para resolver el problema de decisión, se llevarán a cabo las etapas que podrán estar divididas en un conjunto de pasos propios. Así, la valoración de las alternativas es calculada del siguiente modo:

1. *Proceso de unificación*. En caso de que sea utilizada una extensión, todas las valoraciones son unificadas en un mismo dominio lingüístico como valoraciones lingüísticas 2-tupla de modo que posteriormente pueda ser llevado a cabo el proceso de agregación.

2. *Proceso de agregación*. Se ofrece una batería de los operadores de agregación más habituales, los cuales cubren las necesidades más frecuentes de los diferentes problemas a resolver. Seleccionados los operadores de agregación a emplear son calculadas de forma automatizada las valoraciones colectivas de cada alternativa a partir de las valoraciones unificadas obtenidas en el proceso de unificación (Véase Figura 8). En la versión actual, la suite incorpora los operadores: *máximo*, *mínimo*, *mediana*, *media aritmética*, *media ponderada* y *media ponderada ordenada*.

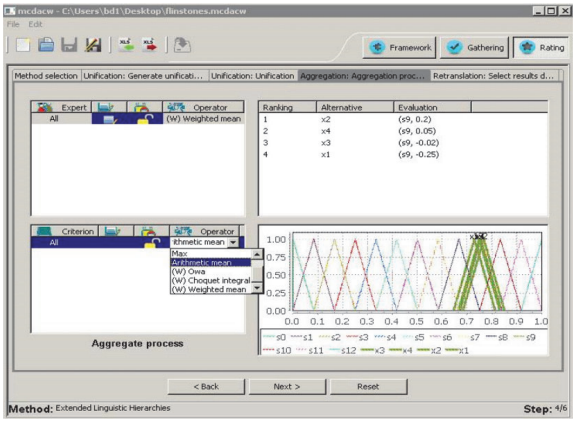


Figura 8: Proceso de agregación

3. *Proceso de retraslación*. Las valoraciones colectivas de cada alternativa son expresadas en un dominio lingüístico que pueda ser fácilmente interpretado.

3.3 SITIO WEB DE FLINTSTONES

A fin de facilitar la difusión de FLINTSTONES, se ha desarrollado un sitio web[6] en el que están disponibles diversos recursos que complementan la herramienta.

El sitio web se encuentra dividido en varias secciones, las cuales describimos brevemente a continuación:

- *Description (Descripción).* Se muestra una descripción de la suite y de sus principales fundamentos teóricos, como el paradigma de CWW o el modelo de representación lingüístico 2-tupla.

[6] http://serezade.ujaen.es/flinstones

- *Software Tool (Herramienta software).* Se encuentran las versiones publicadas de FLINTSTONES, las cuales se distribuyen bajo los términos de la General Public License (GNU)[7]. Están disponibles versiones de 32 y 64 bits para los sistemas operativos Windows y GNU/Linux con las que es posible crear, gestionar y resolver problemas de TD en marcos lingüísticos y complejos con un máximo de 4 expertos, 4 alternativas y 4 atributos.
- *Case Studies Repository (Repositorio de casos de estudio).* Se encuentran varios casos de estudio de diferentes problemas de TD en marcos lingüísticos y complejos que pueden ser resueltos con la suite. Cada caso de estudio está asociado con un dataset en el cual está definido el marco del problema de TD y las valoraciones realizadas por los expertos. Además, cada caso de estudio está asociado con la publicación en la cual el modelo de representación lingüístico 2-tupla o alguna de sus extensiones han sido aplicadas con éxito.
- *Video Tutorials (Vídeo tutoriales).* Diferentes vídeo tutoriales que pueden ser directamente reproducidos desde el sitio web muestran como utilizar la suite.

4 CONCLUSIONES

En esta contribución hemos presentado FLINTSTONES, una suite de herramientas software basada en el modelo lingüístico 2-tupla y sus extensiones destinada a la resolución de problemas de toma de decisión definidos en marcos lingüísticos y complejos. Para ello hemos descrito la arquitectura y funcionalidad básica de la suite así como el sitio web desarrollado para proporcionar soporte y albergar diversos recursos adicionales.

Como trabajo futuro, se pretende continuar con el desarrollo de la suite, incorporando un mayor número de operadores de agregación, de métodos de resolución lingüísticos y de funcionalidades adicionales que faciliten la resolución de problemas de toma de decisión.

Agradecimientos

Esta contribución está parcialmente financiada por los proyectos de investigación TIN2012-31263 y AGR-6487.

Referencias

[1] C.T. Chen. Extensions of the TOPSIS for group decision–making under fuzzy environment. Fuzzy Sets and Systems, vol. 114, issue 1, pp. 1-9, 2000.

[2] M. Espinilla, J. Liu, L. Martínez. An Extended Hierarchical Linguistic Model for Decision-Making Problems. Computational Intelligence, vol. 27, issue 3, pp. 489-512, 2011.

[7] http://www.gnu.org

[3] P.C. Fishburn. Letter to the Editor–Additive Utilities with Incomplete Product Sets: Application to Priorities and Assignments. Operations Research, 15(3), 537-542. 1967.

[4] F. Herrera, L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8 (6), 746-752., 2000.

[5] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez. A Fusion Approach for Managing Multi-Granularity Linguistic Term Sets in Decision Making. Fuzzy Sets and Systems, vol. 114, issue 1, pp. 43-58, 2000.

[6] F. Herrera, L. Martínez. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in Multiexpert Decision-Making. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics, vol. 31, issue 2, pp. 227-234, 2001.

[7] F. Herrera, L. Martínez, P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. European Journal of Operational Research 166 (1), 115-132, 2005.

[8] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez. A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 16 (2), 354-370, 2008.

[9] L. Martínez, F. Herrera. An overview on the 2-tuple linguistic model for Computing with Words in Decision Making: Extensions, applications and challenges. Information Sciences, vol. 207, issue 1, pp. 1-18, 2012.

[10] W. Pedrycz, P. Ekel, R. Parreiras. Fuzzy Multicriteria Decision–Making: Models, Methods and Applications. John Wiley & Sons, Ltd. Chichester, UK. 2010.

[11] R.R. Yager. On the retranslation process in zadeh's paradigm of computing with words. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on 34 (2), 1184-1195, 2004.

[12] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Information Sciences, Part I, II, III 8,8,9, 199-249,301-357,43-80, 1975.

IMPLICACIONES RESIDUADAS DEFINIDAS A PARTIR DE UNINORMAS DISCRETAS

Margarita Mas[1], **Miquel Monserrat**[1], **Joan Torrens**[1]

[1] *Universidad de las Islas Baleares*
Carretera de Valldemossa, km. 7,5
07122 Palma de Mallorca,
{mmg448,mma112,jts224}@uib.es

Resumen

El estudio de operadores definidos sobre una cadena finita, usualmente llamados operadores discretos, es un campo de creciente interés por sus aplicaciones en la agregación cualitativa y la computación con palabras. En esta comunicación introducimos las implicaciones residuadas obtenidas a partir de uninormas discretas, vemos sus propiedades más interesantes y damos su caracterización axiomática.

Palabras Clave: Operadores discretos, uninormas, implicaciones residuadas, cadena finita.

1 INTRODUCCIÓN

Tanto en la lógica borrosa como en muchos otros ámbitos, la escala de valores que se utiliza habitualmente es el intervalo unidad $[0,1]$. Sin embargo, en la vida real solo se opera con un número finito de valores y el ser humano suele trabajar también con una escala de valores lingüísticos básica del tipo *Nada(N), Muy Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy Alto(MA), Todo(T).* Este tipo de términos están siempre ordenados en forma creciente formando una cadena finita

$$\mathscr{L} = \{N \prec MB \prec B \prec M \prec A \prec MA \prec T\}.$$

Por este motivo, muchos autores han estado trabajando en los últimos años con operadores definidos sobre cadenas finitas, en especial t-normas y t-conormas [5, 19, 20], uninormas y nulnormas [4, 7, 11], cópulas [18], diversos tipos de funciones de agregación [10, 15, 16] y también operadores de implicación [12, 13].

Algunos de los operadores más extensamente estudiados en el campo de la lógica borrosa son las funciones de implicación, que se usan tanto para modelar condicionales borrosos como para realizar inferencias en cualquier sistema basado en reglas borrosas, [2, 17]. Hay diversas formas de generar funciones de implicación como son las R-implicaciones o implicaciones residuadas, las (S,N)-implicaciones, las QL-implicaciones, las D-implicaciones y las implicaciones de Yager, entre otras. De entre estos operadores, las implicaciones residuadas son el tipo de implicaciones más estudiado debido a sus propiedades. Habitualmente se obtienen a partir de t-normas vía residuación mediante la expresión:

$$I(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leq y\}, \quad x,y \in [0,1]. \quad (1)$$

Se han usado también otros tipos de funciones de agregación para derivar implicaciones residuadas. Por ejemplo, uninormas en [3, 14, 21, 22] o funciones de agregación en [6, 23].

Sin embargo, en el contexto de las cadenas finitas solo unos pocos trabajos sobre implicaciones discretas han aparecido [12, 13] y siempre tratando con implicaciones derivadas de t-normas y t-conormas discretas. En este trabajo queremos realizar estudios similares a los hechos en el caso del intervalo [0,1] para implicaciones residuadas derivadas de uninormas discretas.

2 PRELIMINARES

Supondremos conocida la teoría básica de operadores lógicos y funciones de agregación. Para todo lo referente a t-normas y t-conormas ver [9], para funciones de implicación [2, 17], para t-normas y uninormas discretas [4, 11, 20] y para implicaciones residuadas discretas derivadas de t-normas [12]. En este apartado recordaremos simplemente la notación mínima que se utilizará durante el trabajo.

Dado que para nuestros propósitos cualquier cadena finita con el mismo número de elementos es equivalente (ver [20]), trabajaremos con la más sencilla posible de $n+1$ elementos, esto es,

$$L_n = \{0,1,2,\ldots,n\}.$$

Los operadores definidos sobre L_n se conocen habitualmen-

te como operadores discretos y han sido estudiados por diversos autores [5, 10, 11, 15, 16, 20]. Es común en todos ellos usar la condición de suavidad que recordamos a continuación.

Definición 1 *Una función $f : L_n \to L_n$ se dice que es* suave *cuando $\mid f(x) - f(x-1) \mid \leq 1$ para todo $x \in L_n$ tal que $x \geq 1$.*

Definición 2 *Una operación binaria $F : L_n^2 \longrightarrow L_n$ se dice que es* suave *cuando sus secciones verticales y horizontales, $F(x,-)$ y $F(-,y)$, lo son.*

Diversos tipos de operaciones con condiciones de suavidad en L_n han sido caracterizadas. Así por ejemplo, se demuestra en [20] que existe una única negación fuerte sobre L_n que viene dada por

$$N(x) = n - x \qquad \text{para todo} \quad x \in L_n \tag{2}$$

Otro ejemplo es la caracterización de las t-normas y t-conormas discretas suaves ([20]) como sumas ordinales de t-normas y t-conormas de Łukasiewicz. Por otra parte, de entre las uninormas discretas, están estudiadas las uninormas de $U_{\text{mín}}$ y $U_{\text{máx}}$ en [11] y las uninormas idempotentes (tales que $U(x,x) = x$ para todo $x \in L_n$) en [4]. Detallamos a continuación su estructura por ser los operadores que más manejaremos a lo largo del trabajo. Las uninormas discretas de $U_{\text{mín}}$ estan caracterizadas en el siguiente resultado.

Teorema 1 *([11]) Una operación binaria U sobre L_n con elemento neutro $0 < e < n$ es una uninorma discreta de $U_{\text{mín}}$ si viene dada por*

$$U(x,y) = \begin{cases} T(x,y) & si\ x,y \in [0,e] \\ S(x,y) & si\ x,y \in [e,n] \\ \text{mín}(x,y) & en\ cualquier\ otro\ caso, \end{cases} \tag{3}$$

donde T es una t-norma discreta sobre la cadena $[0,e]$ y S es una t-conorma discreta sobre la cadena $[e,n]$.

Una uninorma U de $U_{\text{mín}}$ con elemento neutro $0 < e < n$ y t-norma y t-conorma asociadas T y S respectivamente, la denotaremos por $U = (T,e,S)$.

Teorema 2 *([4]) Una operación binaria U sobre L_n con elemento neutro $0 < e < n$ es una uninorma discreta idempotente si y solo si existe una función $g : [0,e] \to [e,n]$ decreciente con $g(e) = e$ de forma que*

$$U(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & si\ y \leq \overline{g}(x)\ y\ x \leq \overline{g}(0) \\ \text{máx}(x,y) & en\ cualquier\ otro\ caso, \end{cases} \tag{4}$$

donde $\overline{g}$ es la única extensión de g simétrica respecto de la diagonal principal y viene dada por

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \leq e \\ \text{máx}\{z \in [0,e] \mid g(z) \geq x\} & si\ e < x \leq g(0) \\ 0 & si\ x > g(0). \end{cases} \tag{5}$$

En estos casos se dice que g es la función asociada a la uninorma idempotente U. Una uninorma U con elemento neutro $0 < e < n$ y función asociada g la denotaremos por $U = (e,g)$.

Otros operadores discretos básicos son las funciones de implicación.

Definición 3 *Una operación binaria $I : L_n^2 \longrightarrow L_n$ se dice que es una función de implicación o simplemente una* implicación*, cuando verifica:*

1. *$I(x,z) \geq I(y,z)$ para todos $x,y,z \in L_n$ con $x \leq y$.*
2. *$I(x,y) \leq I(x,z)$ para todos $x,y,z \in L_n$ con $y \leq z$.*
3. *$I(0,0) = I(n,n) = n$ y $I(n,0) = 0$.*

En el ámbito de [0,1], las implicaciones residuadas se consideran principalmente a partir de t-normas (y uninormas) continuas por la izquierda, ya que en ese caso se verifica la condición de residuación

$$T(x,y) \leq z \quad \Longleftrightarrow \quad I_T(x,z) \geq y$$

obteniendo la estructura de retículo residuado (ver [8]). En particular, en estos casos el supremo en la expresión (1) puede sustituirse por el máximo.

En L_n la implicación residuada derivada de una t-norma cualquiera T (a menudo suave) se define de forma análoga como en (1), aunque en este caso el supremo puede ser sustituido siempre, de forma obvia, por el máximo:

$$I_T(x,y) = \text{máx}\{z \in L_n \mid T(x,z) \leq y\}, \quad x,y \in L_n,$$

obteniendo propiedades análogas al caso [0,1]. Las implicaciones residuadas derivadas de t-normas discretas han sido ya estudiadas con detalle. Puede hallarse su caracterización en [12], Teorema 2, así como su estructura en el caso suave en [12], Proposición 13.

3 RU-IMPLICACIONES DISCRETAS

Siguiendo la misma línea, podemos definir las implicaciones residuadas derivadas de uninormas discretas, o RU-implicaciones discretas como sigue.

Definición 4 *Dada una uninorma discreta $U : L_n^2 \to L_n$, definimos su operador residuado $I_U : L_n^2 \to L_n$ por*

$$I_U(x,y) = \text{máx}\{z \in L_n \mid U(x,z) \leq y\}, \quad x,y \in L_n. \tag{6}$$

En general no siempre el operador residuado I_U es una implicación, de hecho ahí radica una primera diferencia entre el caso discreto y el caso [0,1]. Mientras que en el caso [0,1] existen uninormas no conjuntivas de las que se derivan implicaciones, en el caso discreto tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3 *Dada una uninorma discreta $U : L_n^2 \to L_n$, su operador residuado I_U es una implicación si y solo si U es conjuntiva, i.e., si y solo si $U(n,0) = 0$.*

Algunas propiedades de las implicaciones residuadas derivadas de uninormas discretas aparecen listadas en la siguiente proposición.

Proposición 4 *Sea $U : L_n^2 \to L_n$ una uninorma discreta conjuntiva con elemento neutro $0 < e \leq n$ y sea I_U su implicación residuada. Se verifican las siguientes propiedades para cualesquiera valores de $x, y, z \in L_n$.*

1. $I_U(e,y) = y$.
2. $I_U(x,y) \geq e \iff x \leq y$, *propiedad que denotaremos por* (OP_e).
3. $U(x,y) \leq z \iff I_U(x,z) \geq y$.
4. $I_U(x,U(x,y)) \geq y$.
5. $U(x,I_U(x,y)) \leq y$, *que es una adecuación al ámbito discreto de la regla del* modus ponens.
6. $I_U(U(x,y),z) = I_U(x,I_U(y,z))$, *conocida como la ley de importación, o* (LI_U).
7. $I_U(x,I_U(y,z)) = I_U(y,I_U(x,z))$, *conocida como el principio de intercambio, o* (EP).

Observación 1 *Recordemos que, en el caso [0,1], las propiedades 2 y 3 (y también la propiedad 5) solo se verifican para uninormas (conjuntivas) continuas por la izquierda. En general, las implicaciones $\Longleftarrow$ fallan en ambos casos y, por ejemplo, las RU-implicaciones derivadas de uninormas de $U_{\text{mín}}$ no verifican estas propiedades. En el caso discreto, la proposición anterior demuestra que se verifican para todo tipo de uninormas conjuntivas y, en particular, también para las de $U_{\text{mín}}$.*

En el ámbito discreto existen dos familias de uninormas conjuntivas bien conocidas: las uninormas de $U_{\text{mín}}$ y las uninormas idempotentes cuya función asociada g verifica $g(0) = n$. Dedicamos una sección a estudiar la estructura de las implicaciones residuadas obtenidas a partir de cada una de estas clases de uninormas.

3.1 A partir de uninormas de $U_{\text{mín}}$

Este tipo de uninormas, en el caso [0,1], no son continuas por la izquierda y por tanto sus RU-implicaciones pierden algunas de las propiedades, aún así han sido estudiadas en [3]. Recordemos que en el caso discreto esto no ocurre y no se pierde ninguna de las propiedades anteriormente expuestas.

En la siguiente proposición se muestra la estructura general de las implicaciones residuadas derivadas de uninormas de $U_{\text{mín}}$.

Proposición 5 *Sea $U = (T,e,S)$ con $0 < e \leq n$ una uninorma discreta de $U_{\text{mín}}$ y sea I_U su implicación residuada. En este caso I_U viene dada por*

$$I_U(x,y) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0,e) \text{ con } x \leq y \\ I_T(x,y) & \text{si } x \in [0,e] \text{ con } x > y \\ y & \text{si } y < e < x \\ e-1 & \text{si } e \leq y < x \\ I_S(x,y) & \text{si } x,y \in [e,n] \text{ con } x \leq y \end{cases} \tag{7}$$

En particular, cuando T y S son suaves, I_T e I_S son fácilmente calculables y obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 6 *Sea $U = (T,e,S)$ con $0 < e \leq n$ una uninorma discreta de $U_{\text{mín}}$ con T y S suaves y sea I_U su implicación residuada. Supongamos que los elementos idempotentes de U vienen dados por*

$$Idemp_U = \{0 = a_0 < \ldots < a_r = e = b_0 < \ldots < b_s = n\}.$$

En este caso I_U viene dada por

$$I_U(x,y) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0,e) \text{ con } x \leq y \\ y - x + a_{i+1} & \text{si } a_i \leq y < x \leq a_{i+1},\ i < r \\ e-1 & \text{si } e \leq y < x \\ y - x + b_j & \text{si } b_j \leq x \leq y < b_{j+1},\ j < s \\ y & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{8}$$

Recordemos que, para cada subconjunto fijado de elementos de L_n que contenga $\{0,n\}$, existe una única t-norma (t-conorma) suave cuyos elementos idempotentes son los que forman dicho subconjunto. De esta forma, existe también una única uninorma de $U_{\text{mín}}$ con T y S suaves con un subconjunto de elementos idempotentes fijado y cada una de ellas tiene (según la proposición anterior) una implicación residuada I_U diferente. De aquí se deduce el siguiente corolario

Corolario 7 *Sea $e \in L_n$ con $0 < e \leq n$. Sobre L_n existen exactamente 2^{n-2} implicaciones residuadas derivadas de uninormas de $U_{\text{mín}}$ con elemento neutro e y t-norma y t-conorma asociadas suaves. En total, $(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}$ RU-implicaciones derivadas de uninormas con T y S suaves, incluyendo el caso $e = n$ (R-implicaciones derivadas de t-normas suaves).*

Ejemplos 1 *Tomemos por ejemplo una uninorma U con neutro $0 < e < n$.*

a) Consideremos el caso en que U tiene como idempotentes únicamente los triviales, es decir, $Idemp_U = \{0,e,n\}$. Este caso corresponde a la uninorma con t-norma y t-conorma asociadas las de Łukasiewicz y su RU-implicación viene dada por:

$$I_U(x,y) = \begin{cases} n & \text{si } y = n, \text{ o } x \in [0,e) \text{ con } x \leq y \\ e-1 & \text{si } e \leq y < x \\ y & \text{si } y < e < x \\ y - x + e & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La estructura de esta implicación puede verse en la Figura 1.

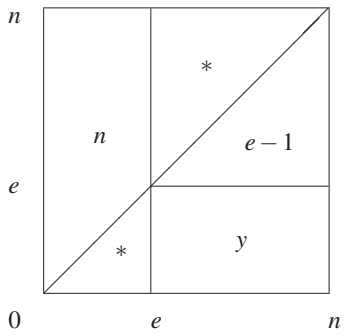


Figura 1: Estructura de la implicación del Ejemplo 1-a), donde $*$ viene dada por $y - x + e$.

b) Si tomamos como idempotentes todos los elementos de L_n obtenemos la única uninorma idempotente de $U_{\text{mín}}$ que corresponde a tomar T el mínimo y S el máximo. En este caso la RU-implicación correspondiente viene dada por:

$$I_U(x,y) = \begin{cases} n & si\ x \in [0,e)\ con\ x \le y \\ e-1 & si\ e \le y < x \\ y & en\ cualquier\ otro\ caso, \end{cases}$$

cuya estructura puede verse en la Figura 2.

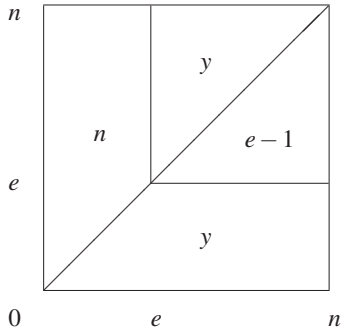


Figura 2: Estructura de la implicación del Ejemplo 1-b).

3.2 A partir de uninormas idempotentes

Entre este tipo de uninormas, podemos hallar de nuevo ejemplos que en el caso [0,1] no son continuas por la izquierda, para las cuales las propiedades 2 y 3 de la Proposición 4 no se verifican. En el caso discreto seguimos manteniendo estas propiedades y la estructura general de las RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes se da en la siguiente proposición.

Proposición 8 *Sea $U = (e,g)$ con $0 < e < n$ una uninorma idempotente con $g(0) = n$ e I_U su implicación residuada. Entonces I_U viene dada por*

$$I_U(x,y) = \begin{cases} \text{máx}(\overline{g}(x),y) & si\ x \le y \\ \text{mín}(\overline{g}(x),y) & si\ x > y, \end{cases} \tag{9}$$

o, de forma equivalente,

$$I_U(x,y) = \begin{cases} g(x) & si\ x < e\ con\ x \le y < g(x) \\ \overline{g}(x) & si\ x > e\ con\ \overline{g}(x) \le y < x \\ y & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases} \tag{10}$$

Notemos que, en el caso de uninormas idempotentes, las RU-implicaciones discretas verifican además las siguientes propiedades que se deducen de forma inmediata de su estructura dada en la proposición anterior.

Proposición 9 *Sea $U = (e,g)$ con $0 < e < n$ una uninorma idempotente con $g(0) = n$ e I_U su implicación residuada. Entonces I_U verifica las siguientes propiedades:*

1. $I_U(x,x) = \text{máx}(x,\overline{g}(x))$.
2. $I_U(x,e) = \overline{g}(x)$.
3. $I_U(x,\overline{g}(x)) = \overline{g}(x)$.

De nuevo podemos contar el número de implicaciones que podemos obtener por residuación respecto de uninormas idempotentes discretas. Puesto que cada uninorma idempotente sobre L_n con elemento neutro e y $g(0) = n$ define una única implicación residuada y esta correspondencia es biyectiva, tenemos el siguiente resultado basado en el número de uninormas idempotentes discretas (ver [4]).

Corolario 10 *Sea $e \in L_n$ con $0 < e \le n$. Sobre L_n existen exactamente $\binom{n-1}{e-1}$ implicaciones residuadas derivadas de uninormas idempotentes con elemento neutro e. En total, 2^{n-1} RU-implicaciones derivadas de uninormas idempotentes (incluyendo el caso $e = n$ que corresponde a la t-norma mínimo).*

Ejemplos 2 *a) Si tomamos la única uninorma idempotente de $U_{\text{mín}}$ ya hemos visto su RU-implicación derivada en el Ejemplo 1-b). Notemos que esta uninorma corresponde al caso en que la función $g : [0,e] \to [e,n]$ y su extensión $\overline{g} : L_n \to L_n$ vienen dadas por*

$$g(x) = \begin{cases} n & si\ x < e \\ e & si\ x = e \end{cases} \quad y \quad \overline{g}(x) = \begin{cases} n & si\ x < e \\ e & si\ x \ge e. \end{cases}$$

b) Otros posibles ejemplos vendrían dados por las uninormas idempotentes de la forma

$$U(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & si\ y \le n - x \\ \text{máx}(x,y) & si\ y > n - x. \end{cases} \tag{11}$$

Cuando n es par el elmento neutro de U es $n/2$ y la función g y su extensión $\overline{g}$ vienen dadas por la propia negación $\overline{g}(x) = n - x$. En cambio, cuando n es impar, el neutro es $\frac{n+1}{2}$ y la función g correspondiente a la uninorma dada en la ecuación (11) viene dada por

$$g(x) = \begin{cases} n-x & si\ x < \frac{n+1}{2} \\ \frac{n+1}{2} & si\ x = \frac{n+1}{2} \end{cases}$$

y su extensión $\overline{g}$ por

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} n-x & si\ x \neq \frac{n+1}{2} \\ \frac{n+1}{2} & si\ x = \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

En la Figura 3 se puede ver la función $\overline{g}$ anterior y la RU-implicación derivada de la uninorma idempotente U dada en (11) para el caso $n = 5$.

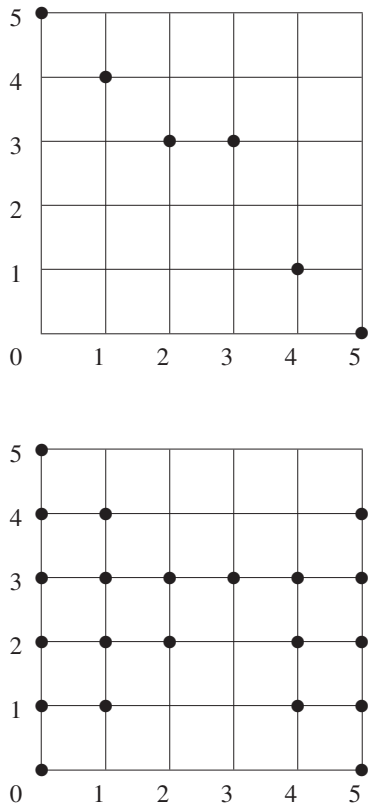


Figura 3: Arriba: Gráfica de la función $\overline{g}$ dada en el Ejemplo 2-b) para el caso $n = 5$. Abajo: Estructura de la RU-implicación I_U derivada de la uninorma correspondiente, donde I_U toma el valor $I_U(x,y) = \overline{g}(x)$ en los puntos dibujados con los círculos gruesos y toma el valor $I_U(x,y) = y$ en los demás.

3.3 Caracterización de las RU-implicaciones discretas

En esta sección queremos estudiar una caracterización axiomática de las RU-implicaciones derivadas de uninormas discretas. En el caso discreto la caracterización es muy similar al caso [0,1] para RU-implicaciones derivadas de uninormas continuas por la izquierda (ver [1]). La única diferencia es que dicha continuidad lateral no es necesaria en nuestro caso.

Proposición 11 *Sea $I : L_n^2 \to L_n$ una aplicación y $e \in L_n$ con $e > 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *I es una RU-implicación derivada de una uninorma discreta conjuntiva U con elemento neutro e,*
2. *I es creciente respecto de la segunda variable, verifica el principio de intercambio (EP) y la propiedad (OP_e).*

Además, en este caso la uninorma U para la cual $I = I_U$ viene dada por

$$U(x,y) = \min\{z \in L_n \mid I(x,z) \geq y\}.$$

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se han estudiado las implicaciones residuadas derivadas de uninormas discretas, llamadas RU-implicaciones discretas. Se ha demostrado que la uninorma ha de ser conjuntiva, se han visto algunas de las propiedades de las RU-implicaciones discretas, se ha dado su caracterización axiomática y se ha establecido su estructura en los dos casos de uninormas discretas conjuntivas conocidos: las uninormas de $U_{\min}$ y las idempotentes con $g(0) = n$.

Dentro de los siguientes objetivos está el estudiar las (U,N)-implicaciones discretas (de la forma $I_{U,N}(x,y) = U(N(x),y)$ siendo N la negación y U una uninorma disyuntiva sobre L_n) y sus posibles intersecciones con las RU-implicaciones discretas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto MTM2009-10320 con fondos FEDER.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens. A characterization of residual implications derived from left-continuous uninorms. *Information Sciences*, 180, pp. 3992–4005, 2010.

[2] M. Baczyński, B. Jayaram. *Fuzzy Implications*. En: Studies in Fuzziness and Soft Computing, 231, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[3] B. De Baets, J. C. Fodor. Residual operators of uninorms. *Soft Computing*, 3, pp. 89–100, 1999.

[4] B. De Baets, J. Fodor, D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, Idempotent uninorms on finite ordinal scales. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17, pp. 1-14, 2009.

[5] B. De Baets and R. Mesiar, Discrete triangular norms. En: S. Rodabaugh and E.-P. Klement, (eds.), *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets, A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets*, Trends in Logic **20**, Kluwer Academic Publishers, pp. 389–400, 2003.

[6] F. Durante, E. Klement, R. Mesiar, C. Sempi. Conjunctors and their residual implicators: Characterizations and construction methods. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 4, pp. 343–356, 2007.

[7] J.C. Fodor, Smooth associative operations on finite ordinal scales. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 8, pp. 791–795, 2000.

[8] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono. *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at substructural Logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 151, Elsevier, 2007.

[9] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, in the collection: "Trends in Logic - Studi Logica Library", 8. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[10] A. Kolesárová, G. Mayor, R. Mesiar, Weighted ordinal means. *Information Sciences*, 177, pp. 3822-3830, 2007.

[11] M. Mas, G. Mayor and J. Torrens, $t-$Operators and uninorms on a finite totally ordered set. *Int. J. of Intelligent Systems*, 14, pp. 909–922, 1999.

[12] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, S-implications and R-implications on a finite chain. *Kybernetica*, 40, pp. 3–20, 2004.

[13] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, On two types of discrete implications. *International Journal of Approximate Resoning*, 40, pp. 262–279, 2005.

[14] M. Mas, M. Monserrat, and J. Torrens. Two types of implications derived from uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 158, pp. 2612–2626, 2007.

[15] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, Smooth aggregation functions on finite scales. En: Hüllermeier, E., Kruse, T., Hoffmann, F., (eds.), *LNAI* 6178, Dortmund, pp. 398–407, 2010.

[16] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, Kernel aggregation functions on finite scales. Constructions from their marginals. *Fuzzy Sets and Systems*, http://dx.doi.org/10.1016/j.fss.2013.04.005, 2013.

[17] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas, A survey on Fuzzy Implications Functions. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 15, pp. 1107–1121, 2007.

[18] G. Mayor, J. Suñer and J. Torrens, Copula-like operations on finite settings. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 13, pp. 468–477, 2005.

[19] G. Mayor and J. Torrens, On a class of operators for expert systems. *Int. J. of Intelligent Systems*, 8, pp. 771–778, 1993.

[20] G. Mayor and J. Torrens, Triangular norms in discrete settings. En: E.P. Klement and R. Mesiar, (eds.), *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, Elsevier, Amsterdam, pp. 189–230, 2005.

[21] D. Ruiz, J. Torrens. Residual implications and coimplications from idempotent uninorms. *Kybernetika*, 40, pp. 21–38, 2004.

[22] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens. R-implications and S-implications from uninorms continuous in $]0;1[^2$ and their distributivity over uninorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 160, pp. 832–852, 2009.

[23] Y. Ouyang. On fuzzy implications determined by aggregation operators. *Information Sciences*, 193, pp. 153–162, 2012.

NUEVAS CONTRAPOSITIVACIONES DE IMPLICACIONES BORROSAS RESPECTO DE NEGACIONES FUERTES

Isabel Aguiló[1], **Jaume Suñer**[1], **Joan Torrens**[1]

[1] *Universidad de las Islas Baleares*
Carretera de Valldemossa, km. 7,5
07122 Palma. España,
{isabel.aguilo,jaume.sunyer,jts224}@uib.es

Resumen

La propiedad de contraposición respecto de una negación (usualmente fuerte) es una de las más estudiadas en la teoría de funciones de implicación borrosas. En la literatura se han introducido algunos métodos para modificar una implicación dada con el objetivo de que dicha implicación verifique esta propiedad, métodos que se conocen como *contrapositivación*. En esta comunicación presentamos un nuevo método de contrapositivación respecto de una negación fuerte cualquiera y estudiamos las propiedades que preserva.

Palabras Clave: Implicación borrosa, contraposición, negación fuerte, contrapositivación.

1 INTRODUCCIÓN

Las funciones de implicación borrosas son operadores clave en el control borroso y el razonamiento aproximado, como también en todos los campos donde se aplican estas teorías. Todo ello ha propiciado que muchos autores se dediquen al estudio de las implicaciones borrosas tanto desde el punto de vista teórico como aplicado, convirtiéndolas en un campo de investigación por sí mismas, hecho que corroboran el artículo recopilatorio [13] e incluso la publicación de libros exclusivamente dedicados a este tema (ver [3, 4]).

Debido al gran número de aplicaciones que tienen, existen muchos modelos diferentes de implicaciones borrosas para responder al problema concreto que deben de modelar. La definición más aceptada de implicación es bastante general y requiere solo las condiciones de monotonía, así como la condición de que sobre los valores 0 y 1 coincida con la implicación clásica. De este modo, muchos de los estudios realizados con funciones de implicación tratan sobre propiedades adicionales que en cada caso o contexto puedan ser deseables. La mayoría de ellas provienen de tautologías en la lógica clásica que, traducidas al ámbito de la lógica borrosa, se convierten en sendas ecuaciones funcionales. La resolución de dichas ecuaciones funcionales deriva en tipos de implicaciones que verifican las propiedades algebraicas requeridas. En [14], se indica que las caracterizaciones a través de propiedades algebraicas son esenciales para comprender el comportamiento de los diferentes modelos de implicaciones borrosas. Así, por ejemplo, las (S,N) (excepto cuando la negación N no es continua) y las R-implicaciones están caracterizadas completamente (ver [2] y [7] respectivamente), mientras que las QL y las D-operaciones sólo lo están en algunos casos particulares ([12]).

Una de las propiedades más estudiadas en este ámbito es la llamada *ley de contraposición* respecto de una negación N que se escribe como

$$I(N(y),N(x)) = I(x,y) \quad \text{para todos } x,y \in [0,1]. \qquad (1)$$

Esta propiedad ya fue estudiada por Trillas-Valverde en 1981 ([15]) y Fodor en 1995 ([8]) para los casos en que la negación N es fuerte y recuperada después por Jenei en 2000 ([9]) y Balasubramaniam en 2006 ([5]). La ecuación (1) proviene de la ley de contraposición clásica y juega un papel muy importante en aplicaciones como razonamiento aproximado, sistemas deductivos y en métodos formales de demostración. Para más detalles ver la sección 1.5 en [3] donde se ven casos más generales con negaciones no necesariamente fuertes.

Sin embargo, en muchos casos no se cumple la ley de contraposición y eso ha dado lugar al estudio de diversas formas de modificar una implicación dada con el objetivo de que cumpla la contraposición. Estos métodos son conocidos como *métodos de contrapositivación* y existen en la literaratura varios de ellos con respecto a negaciones fuertes. Así por ejemplo, tenemos la contrapositivación máxima o *upper* y la mínima o *lower*, introducidas en [6] y estudiadas en detalle en [8]. Cabe destacar que fruto del estudio de la

contrapositivación de las implicaciones residuadas realizado en [8] apareció la t-norma *Mínimo nilpotente* que fue la primera t-norma continua por la izquierda (no continua) en conocerse y que dió lugar después al estudio tan importante como prolífico de las t-normas continuas por la izquierda (ver por ejemplo [10]). Otro ejemplo es la contrapositivación media o *medium*, introducida en [5] (ver también la sección 7.1 del libro [3]).

En este trabajo, presentamos un nuevo método de contrapositivación respecto de una negación fuerte N que presenta muy buenas propiedades. En particular, nuestro método no solo preserva las propiedades habituales (preservadas también por los métodos ya existentes), como la propiedad de orden y el principio de identidad, sino que preserva además el principio de neutralidad y otras propiedades adicionales.

2 PRELIMINARES

En esta sección se darán algunas definiciones básicas y propiedades de las implicaciones, así como también algunas técnicas de contrapositivación. Más detalles y ejemplos sobre implicaciones pueden hallarse en [3] y sobre negaciones en [11].

Definición 1 *Diremos que una función $N : [0,1] \to [0,1]$ es una negación borrosa si es decreciente con $N(0) = 1$ y $N(1) = 0$. Diremos que una negación borrosa N es:*

- estricta *cuando es estrictamente decreciente y continua*
- fuerte *cuando es una involución, es decir, $N(N(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$.*

Definición 2 *Diremos que un operador binario $I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ es una implicación si satisface las propiedades siguientes:*

I1) I es decreciente respecto de la primera variable y creciente respecto de la segunda. Es decir, para todo $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in [0,1]$,

$$\text{si } x_1 \leq x_2, \text{ entonces } I(x_1, y) \geq I(x_2, y)$$

y

$$\text{si } y_1 \leq y_2, \text{ entonces } I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$$

I2) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ y $I(1,0) = 0$.

De la definición podemos deducir que $I(0,x) = 1$ y $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$. Sin embargo, los valores de $I(x,0)$ y $I(1,x)$ no se pueden deducir de la definición.

A continuación recordamos una lista de propiedades de las implicaciones.

i) Contraposición respecto a una negación borrosa N, ($CP(N)$):

$$I(x,y) = I(N(y), N(x)), \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0,1].$$

ii) Principio de Intercambio, (EP):

$$I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)), \quad \text{para todos} \quad x, y, z \in [0,1].$$

iii) Principio de neutralidad por la izquierda, (NP):

$$I(1,y) = y \qquad \text{para todo} \quad y \in [0,1].$$

iv) Propiedad del orden, (OP):

$$x \leq y \iff I(x,y) = 1 \quad \text{para todos} \quad x, y \in [0,1].$$

v) Principio de la negación fuerte, (SN):

$$I(x,0) \quad \text{es una negación fuerte.}$$

vi) Principio de Identidad, (IP):

$$I(x,x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in [0,1].$$

Definición 3 *Sea I una implicación y N una negación borrosa. Definimos el N-recíproco de I con respecto a N y lo denotaremos por I_N a la implicación definida como*

$$I_N(x,y) = I(N(y), N(x)) \qquad x, y \in [0,1]$$

Definición 4 *Sea I una implicación borrosa. La negación borrosa N_I definida por $N_I(x) = I(x,0)$ para todo $x \in [0,1]$ se llama la negación natural inducida por I.*

A continuación recordamos algunas técnicas de contrapositivación propuestas en [3].

Definición 5 *Sea I una implicación y N una negación. Las funciones I_N^u, I_N^l, $I_N^m : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ están definidas como:*

- *Contrapositivación superior:*

$$I_N^u(x,y) = \text{máx}(I(x,y), I_N(x,y)), \quad x, y \in [0,1].$$

- *Contrapositivación inferior:*

$$I_N^l(x,y) = \text{mín}(I(x,y), I_N(x,y)), \quad x, y \in [0,1].$$

- *Contrapositivación media:*

$$I_N^m(x,y) = \text{mín}(I(x,y) \vee N(x), I(N(y), N(x)) \vee y)$$

para todos $x, y \in [0,1]$.

Proposición 1 *Sea I una implicación y N una negación. Las funciones I_N^u, I_N^l y I_N^m son implicaciones. Además, si N es una negación fuerte, las tres implicaciones satisfacen $CP(N)$.*

3 CONTRAPOSITIVACIÓN RESPECTO DE NEGACIONES FUERTES

En esta sección queremos presentar una nueva forma de contrapositivación a partir de una negación fuerte N, que permite transformar una implicación cualquiera (que no verifica la contraposición respecto de N) en otra que sí la verifica. Empezamos con la definición general respecto de una negación cualquiera no necesariamente fuerte.

Definición 6 *Dada una implicación I y una negación N, definimos la N-contrapositivación de I como el operador binario I_N^c sobre [0,1] dado por,*

$$I_N^c(x,y) = \begin{cases} I(x,y) & \text{si y} \geq \text{N(x)} \\ I(N(y),N(x)) & \text{si y} < \text{N(x)} \end{cases}$$

En la Figura 1 se muestra la estructura de la N-contrapositivación de una implicación I, respecto de una negación cualquiera (aunque en la figura se represente una negación fuerte por simplicidad del dibujo).

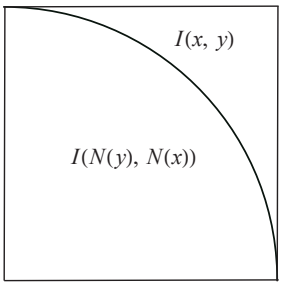


Figura 1: Estructura de la N-contrapositivación de una implicación I.

La idea de esta definición surgió de la implicación

$$I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si x} \leq \text{y} \\ 1-x+y & \text{si x} > \text{y} \geq \text{N(x)} \\ 1-N(y)+N(x) & \text{si x,N(x)} > \text{y} \end{cases} \quad (2)$$

que aparece en [1] como la (S,N)-implicación obtenida a partir de una negación fuerte N y la función de agregación $G(x,y) = 1 - \text{máx}(0, N(x \wedge y) - x \vee y)$, donde $\wedge$ indica mínimo y $\vee$ indica máximo. Notemos que dicha aplicación viene dada en realidad como la implicación de Łukasiewicz en los puntos (x,y) con $y \geq N(x)$ y como su N-recíproca en los puntos por debajo de la negación.

Ejemplo 1 *Consideremos la implicación de Łukasiewicz, $I(x,y) = I_Ł(x,y) = \text{mín}(1, 1-x+y)$, y una negación fuerte N. Entonces $I_N^c(x,y)$ resulta ser la implicación dada por la ecuación (2).*

Ejemplo 2 *Consideremos en este caso la implicación de Goguen, $I(x,y) = I_{GG}(x,y) = \text{mín}(1, \frac{y}{x})$, y una negación fuerte N. Entonces $I_N^c(x,y)$ viene dada por*

$$I_N^c(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si x} \leq \text{y} \\ \frac{y}{x} & \text{si x} > \text{y} \geq \text{N(x)} \\ \frac{N(x)}{N(y)} & \text{si x,N(x)} > \text{y} \end{cases}$$

que resulta ser de nuevo una (S,N)-implicación obtenida a partir de la negación fuerte N y la función de agregación

$$G(x,y) = \text{mín}\left(1, \frac{x \vee y}{N(x \wedge y)}\right),$$

ver [1].

Sin embargo, podemos ver que el operador I_N^c no tiene por qué ser siempre una implicación, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 *Consideremos la implicación de Reichenbach, $I_{RC}(x,y) = 1-x+xy$ y la negación*

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x} = 0 \\ a & \text{si } 0 < \text{x} < 1 \\ 0 & \text{si x} = 1 \end{cases}$$

donde $a \in (0,1)$.

Sean $x,y \in [0,1]$ tales que $y < a < x$. Entonces $(I_{RC})_N^c(x,y) = I(N(y),N(x)) = I(a,a) = 1-a+a^2$, mientras que $(I_{RC})_N^c(x,a) = I(x,a) = 1-x+xa < 1-a+a^2$. Por tanto, I_N^c no es una implicación. La negación N anterior, así como la estructura de la correspondiente N-contrapositivación puede verse en la Figura 2.

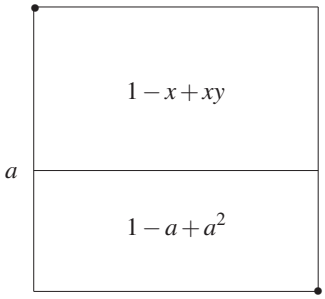


Figura 2: La N-contrapositivación de la implicación de Reichenbach a partir de la negación del ejemplo 3.

Así pues, no cualquier negación sirve si queremos obtener siempre implicaciones. Veamos que, en el caso de considerar negaciones fuertes N, obtenemos que la N-contrapositivación de cualquier implicación I es siempre una implicación.

Proposición 2 *Sea N una negación fuerte e I una implicación. Entonces I_N^c es una implicación.*

Los ejemplos siguientes prueban que no es necesario que N sea una negación fuerte para obtener una implicación en ciertos casos.

Ejemplos:

1) Sea I una implicación y N_0 la negación más pequeña:

$$N_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si x} > 0 \\ 1 & \text{si x} = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$I^c_{N_0}(x,y) = \begin{cases} I(x,y) & \text{si x} > 0 \\ 1 & \text{si x} = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $I_{N_0} = I$ y es, así, una implicación. En cambio, si la implicación inicial no verifica $CP(N_0)$, tampoco la verifica su N_0-contrapositivación.

2) Sea I una implicación y N_1 la negación más grande:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x} < 1 \\ 0 & \text{si x} = 1 \end{cases}$$

Entonces

$$I^c_{N_1}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si x} < 1 \\ I(1,y) & \text{si x} = 1, \end{cases}$$

que es siempre una implicación, pero que en general no verifica $CP(N_1)$.

Incluso se puede hallar toda una familia de negaciones no fuertes (ni siquiera estrictas) de forma que la N-contrapositivación de cualquier implicación I es también implicación.

Proposición 3 *Dado un número real a con* $0 < a < 1$*, sea* N_a *la negación dada por,*

$$N_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x} = 0 \\ N'_a(x) & \text{si } 0 < \text{x} \leq \text{a} \\ 0 & \text{si a} < \text{x} \leq 1, \end{cases}$$

siendo N'_a *una negación fuerte cualquiera sobre el intervalo* $(0,a)$*. Entonces la* N_a*-contrapositivación de cualquier implicación I,* $I^c_{N_a}$*, es una implicación.*

Observemos que I^c_N, aún siendo una implicación, no tiene porque satisfacer la propiedad de contrapositivación $CP(N)$. De hecho, eso es lo que ocurre en general con las contrapositivaciones respecto de las negaciones introducidas en la proposición anterior. En el ejemplo siguiente se muestra el caso en que la involución N'_a viene dada por $N'_a(x) = a - x$.

Ejemplo 4 *Sea I una implicación y N la negación*

$$N_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x} = 0 \\ a - x & \text{si } 0 < \text{x} \leq \text{a} \\ 0 & \text{si a} < \text{x} \leq 1. \end{cases}$$

La proposición 3 prueba que I^c_N *es siempre una implicación. Sin embargo, en general no satsiface* $CP(N)$ *(basta considerar implicaciones I tales que* $I(x,y) \neq 1$ *para* $x, y > a$*.*

La estructura de la N_a-contrapositivación de una implicación I respecto de la negación N_a introducida en el ejemplo anterior puede verse en la Figura 3.

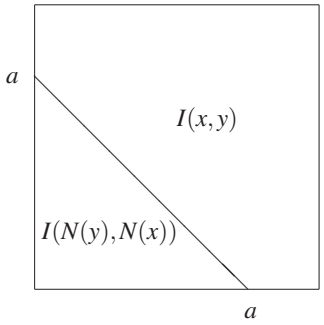


Figura 3: La N_a-contrapositivación de una implicación I a partir de la negación del ejemplo 4.

Veamos en cambio que, en el caso de utilizar negaciones fuertes N, sí se garantiza que la N-contrapositivación verifica $CP(N)$.

Proposición 4 *Sea I una implicación y N una negación fuerte. Entonces* I^c_N *satisface* $CP(N)$*.*

De hecho, solo las negaciones fuertes tienen esta propiedad. Es decir, se puede demostrar que la N-contrapositivación de cualquier implicación I es siempre una implicación verificando $CP(N)$ si y solo si N es fuerte.

Proposición 5 *Sea N una negación. La N-contrapositivación de cualquier implicación I,* I^c_N*, es una implicación que satisface* $CP(N)$ *si y solo si N es fuerte.*

El resto de la sección lo dedicamos a estudiar las propiedades de la N-contrapositivación, I^c_N, cuando N es una negación fuerte. Como primer resultado, resulta obvio que, si partimos de una implicación I que ya verifique $CP(N)$, entonces la N-contrapositivación de I es ella misma, esto es, en estos casos $I^c_N = I$.

Por otra parte, se puede ver que existe una determinada relación entre I^c_N y la contraposición superior I^u_N (ver preliminares). Concretamente, hay casos en los que ambas contrapositivaciones coinciden. Por ejemplo, si consideramos la implicación de Gödel

$$I_{\mathbf{GD}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si x} \leq \text{y} \\ y & \text{si x} > \text{y} \end{cases},$$

para cualquier negación fuerte se obtiene dicha coincidencia (en realidad basta con que la negación N sea estricta para que se verifique).

Proposición 6 *Sea I la implicación de Gödel. Entonces, se satisface $I_N^c = I_N^u$ para cualquier negación fuerte N y esta implicación viene dada por*

$$I_N^c(x,y) = I_N^u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si x} \leq \text{y} \\ \text{máx}(N(x),y) & \text{si x} > \text{y} \end{cases}$$

Observación: Notemos que, según la proposición anterior, la N-contrapositivación (así como la contrapositivación superior) de la implicación de Gödel respecto de cualquier negación fuerte N, coincide con la implicación de Fodor, que es la implicación residuada obtenida a partir de la t-norma mínimo nilpotente.

La Figura 4 muestra la estructura de esta implicación.

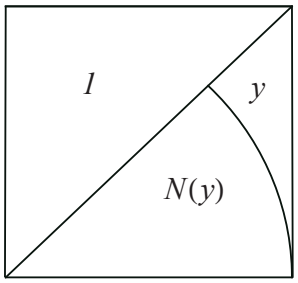


Figura 4: La N-contrapositivación de la implicación de Gödel respecto de una negación fuerte N, que coincide con la contrapositivación superior I_N^u.

Veamos ahora que las propiedades de orden (OP) y de identidad (IP), que son preservadas por las contrapositivaciones ya existentes, también lo son por la N-contrapositivación.

Proposición 7 *Sea I una implicación y N una negación fuerte.*

1) *Si I satisface la propiedad (OP), entonces I_N^c también la satisface.*
2) *Si I satisface la propiedad (IP), entonces I_N^c también la satisface.*

Pero, en nuestro caso, el comportamiento es aún mejor porque también preserva otras propiedades que, para las contrapositivaciones ya existentes no se preservan siempre. Veámoslo mediante las dos proposiciones siguientes.

Proposición 8 *Sea N una negación fuerte e I una implicación. Entonces la negación asociada a la N-contrapositivación de I viene dada por*

$$N_{I_N^c}(x) = I(1,N(x)) \quad \textit{para todo} \quad x \in [0,1].$$

Proposición 9 *Sea N una negación fuerte e I una implicación que verifica la propiedad (NP). Entonces*

1) *I_N^c también satisface (NP).*
2) *Se verifica además que $N_{I_N^c} = N$ y por lo tanto, I_N^c también satisface (SN).*

Observación: Se puede ver que en general, aún cuando I verifica la propiedad (SN), su N-contrapositivación mediante una negación fuerte N no tiene por qué verificarla. En cambio, según el resultado anterior, si I verifica (NP), entonces I_N^c verifica (SN) independientemente de que lo haga o no la propia I inicial.

Sin embargo, por lo que respecta al principio de intercambio (EP), la N-contrapositivación no lo preserva tal y como ya sucede con las contrapositivaciones superior, inferior y media. El siguiente ejemplo muestra que la propiedad (EP) no se preserva, en general.

Ejemplo 5 *Consideremos la implicación de Reichenbach, $I_{RC}(x,y) = 1 - x + xy$. Sabemos que I_{RC} satisface la propiedad (EP). Sea $N = N_a$ la negación considerada en el ejemplo 4, donde $a \in (0,1)$. En este caso, la N-contrapositivación de I es $(I_{RC})_N^c(x,y) =$*

$$\begin{cases} 1 - x + xy & \text{si x} \in [0,\text{a}), \text{y} \geq \text{a} - \text{x} \\ & \text{o x} \in [\text{a},1] \\ 1 - N(y) + N(x) \cdot N(y) & \text{si x} \in [0,\text{a}), \text{y} < \text{a} - \text{x} \end{cases}$$

Tomando $a = 1/2, x = 1/4, y = 1/8$ y $z = 1/4$, un cálculo sencillo prueba que $(I_{RC})_N^c$ no satisface la propiedad (EP).

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Con objeto de obtener nuevas implicaciones que verifiquen la propiedad de contraposición respecto de una negación fuerte N, se introduce en este trabajo un nuevo método de contrapositivación que llamamos N-contrapositivación. Se ve que este método es adecuado únicamente para el caso de negaciones fuertes y que preserva la mayoría de propiedades básicas de implicaciones, salvo el principio de intercambio (que tampoco se preserva mediante las contrapositivaciones ya existentes). Se incluyen además un buen número de ejemplos ilustrando el método.

Como trabajo futuro, pretendemos seguir estudiando propiedades adicionales de este método de contrapositivación y también su relación con los diversos tipos de implicaciones existentes. En especial con las (S,N)-implicaciones y las implicaciones residuadas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos MTM2009-10962 y MTM2009-10320, ambos con fondos FEDER.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Suñer, J. Torrens, Dual representable aggregation functions and their derived S-implications, in: E. Hüllermeier, R. Kruse, and F. Hoffmann (Eds.), IPMU 2010, LNAI 6178, Springer-Verlag, pp. 408–417, 2010.

[2] M. Baczyński, B. Jayaram: On the characterization of (S,N)-implications. *Fuzzy Sets and Systems* 58, pp. 1713–1727, 2007.

[3] M. Baczyński, B. Jayaram: *Fuzzy Implications*. En: Studies in Fuzziness and Soft Computing, 231, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[4] M. Baczyński, G. Beliakov, H. Bustince-Sola, A. Pradera (Eds.): *Advances in Fuzzy Implication Functions*. En: Studies in Fuzziness and Soft Computing, 300. Springer, Heidelberg, 2013.

[5] J. Balasubramaniam: Contrapositive symmetrization of fuzzy implications - revisited. *Fuzzy Sets and Systems* 57, pp. 2291–2310, 2006.

[6] W. Bandler, L.J. Kohout: Semantics of implication operators and fuzzy relational products. *International Journal of Man-Machine Studies* 12, pp. 89–116, 1979.

[7] J.C. Fodor, M. Roubens: *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, Kluwert, Dordrecht, 1994.

[8] J.C. Fodor: Contrapositive symmetry of fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems* 69, pp. 141–156, 1995.

[9] S. Jenei: New family of triangular norms via contrapositive symmetrization of residuated implications. *Fuzzy Sets and Systems* 110, pp. 157–174, 2000.

[10] S. Jenei: A survey on left-continuous t-norms and pseudo t-norms. En: E.P. Klement, R. Mesiar (Eds.), *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, Elsevier, Amsterdam, pp. 113–142, 2005.

[11] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap: *Triangular Norms*, in la colección: "Trends in Logic - Studi Logica Library", 8. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[12] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens: Ql versus D-implications. *Kybernetika* 42, pp. 351–366, 2006.

[13] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, E. Trillas: A survey on Fuzzy Implications Functions. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 15, pp. 1107–1121, 2007.

[14] E. Trillas, M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens: On the representation of fuzzy rules. *International Journal of Approximate Reasoning* 48, pp. 583–597, 2008.

[15] E. Trillas, L. Valverde: On some functionally expressable implications for fuzzy set theory. En: *proceedings of the 3rd International Seminar on Fuzzy Set Theory*, Linz (Austria), pp. 137-190, 1981.

SOBRE IMPLICACIONES POLINÓMICAS

Sebastia Massanet, **Juan Vicente Riera**, **Daniel Ruiz-Aguilera**

Universitat de les Illes Balears, Cra. Valldemossa, km 7.5. Palma (Illes Balears),
{s.massanet, jvicente.riera, daniel.ruiz}@uib.es

Resumen

En esta comunicación, se introduce la familia de las implicaciones polinómicas, aquellas cuya expresión viene dada por un polinomio de dos variables. Se determinan algunas propiedades que tienen que satisfacer los coeficientes de dicho polinomio para obtener implicaciones borrosas y se caracterizan completamente todas las implicaciones polinómicas de grado menor o igual que 3. Entre las implicaciones obtenidas, se encuentran implicaciones conocidas como la implicación de Reichenbach.

Keywords: Implicación borrosa, implicación polinómica, (S,N)-implicación, principio de intercambio.

1 INTRODUCCIÓN

Las implicaciones borrosas se han convertido en una de las operaciones más importantes en la lógica borrosa. Su importancia radica en el hecho de que desarrollan una función similar a la de la implicación clásica en la lógica binaria. Las implicaciones borrosas generalizan las clásicas en el sentido que restringidas a $\{0,1\}^2$ coinciden con la implicación clásica. Hoy en día, estos operadores se modelan mediante funciones $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ monótonas que satisfacen las condiciones de frontera exigidas. En los últimos años, un gran número de investigadores han dedicado sus esfuerzos a investigar estos conectivos lógicos. En este sentido cabe destacar el artículo recopilatorio [8] y los monográficos [2] y [3]. El creciente interés en las implicaciones borrosas proviene del amplio rango de aplicaciones donde se usan estos operadores. Las implicaciones juegan un papel esencial en el razonamiento aproximado, el control borroso, la morfología matemática borrosa y en otros campos donde se aplican estas teorías.

Todas estas aplicaciones llevan asociada la necesidad de usar muchos modelos diferentes para modelar la implicación borrosa. La razón principal es que toda regla del tipo "Si-Entonces" puede ser interpretada mediante una implicación borrosa y por lo tanto, dependiendo del contexto, y de la misma regla y su comportamiento, diferentes implicaciones pueden ser adecuadas en cada caso. Además, las implicaciones borrosas se usan para implementar inferencias hacia adelante y hacia atrás. Así, la elección de la implicación borrosa no puede ser independiente de la regla de inferencia que se vaya a modelar. Consecuentemente, en [11] se remarca la importancia de tener muchos modelos distintos de implicaciones borrosas, determinando que el significado y el comportamiento de cada uno de estos modelos son aspectos a tener en cuenta en su elección en una aplicación concreta.

Para responder a la mencionada necesidad de un gran número de modelos de implicación borrosa, se han introducido diversas familias de implicaciones borrosas. Existen dos estrategias principales a la hora de obtener nuevas familias. La primera se basa en el uso de funciones de agregación (t-normas, t-conormas, uninormas o funciones de agregación en general) y conectivos lógicos, como las negaciones borrosas. Ejemplos de esta estrategia, son las R y las (S,N)-implicaciones o las QL y las D-operaciones, entre muchas otras (ver [3]). Por otra parte, una segunda estrategia se basa en el uso de funciones generadoras de una variable, obteniendo así las conocidas como implicaciones de Yager o las h-implicaciones. Una vista completa de las diversas familias de implicaciones borrosas se puede encontrar en [10].

Las implicaciones obtenidas a partir de las estrategias mencionadas pueden tener expresiones muy diversas, que dependerán básicamente de las expresiones de las funciones de agregación o de los generadores utilizados en su construcción. Sin embargo, la expresión final de la implicación borrosa es importante para su uso en cualquier aplicación. Es bien conocido que determinadas expresiones de funcio-

nes son más exigentes a la hora de computar sus valores y más propicias a propagar posibles errores surgidos por aproximaciones numéricas de las entradas. Así, operadores con expresiones polinómicas o racionales son más deseables que aquellos que tienen una expresión más compleja desde un punto de vista computacional. A partir de este hecho, en [1] y [7], se caracterizan todas las t-normas arquimedianas continuas racionales. Esta familia de t-normas es la conocida como familia de Hamacher y está formada por las t-normas dadas por la expresión

$$T_\alpha(x,y) = \frac{xy}{\alpha+(1-\alpha)(x+y-xy)}, \quad x,y \in [0,1]$$

con $\alpha \geq 0$. Notar que la única t-norma polinómica es la t-norma producto $T_P(x,y) = xy$. Por otro lado, en [5], se caracterizan las uninormas racionales como aquellas cuya expresión viene dada por

$$U_e(x,y) = \frac{(1-e)xy}{(1-e)xy+e(1-x)(1-y)}$$

en $(x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$ y, o bien $U(1,0) = U(0,1) = 0$, o bien $U(0,1) = U(1,0) = 1$. Notar que en este caso no existen uninormas polinómicas ya que no existe ninguna uninorma continua.

Así, después de introducir unos preliminares necesarios para el buen seguimiento de la comunicación, el objetivo de este trabajo es introducir las implicaciones borrosas polinómicas como aquellas implicaciones cuya expresión viene dada por un polinomio de dos variables. Se determinarán condiciones necesarias sobre los coeficientes de un polinomio para que pueda representar una implicación borrosa y se caracterizarán completamente todas las implicaciones borrosas polinómicas de grado menor o igual a 3. A continuación, se estudiarán qué propiedades satisfacen estas implicaciones y a partir de ellas, se analizará su relación con las (S,N)-implicaciones y las implicaciones f-generadas de Yager. El trabajo acaba con unas conclusiones y el trabajo futuro que se quiere desarrollar.

2 PRELIMINARES

Recordemos algunos conceptos y resultados que se usarán en el resto del trabajo. En primer lugar, sigue la definición de negación borrosa.

Definición 2.1 ([6, Definición 1.1]). *Una función decreciente $N : [0,1] \to [0,1]$ se dice que es una* negación borrosa*, si $N(0) = 1$ y $N(1) = 0$. Una negación borrosa N es*

(i) estricta*, si es continua y estrictamente decreciente.*

(ii) fuerte*, si es una involución, i.e., $N(N(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$.*

A continuación, se recuerda la definición de implicación borrosa.

Definición 2.2 ([6, Definición 1.15]). *Un operador binario $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice que es una* implicación borrosa*, si satisface:*

(I1) $I(x,z) \geq I(y,z)$ *cuando* $x \leq y$*, para todo* $z \in [0,1]$.

(I2) $I(x,y) \leq I(x,z)$ *cuando* $y \leq z$*, para todo* $x \in [0,1]$.

(I3) $I(0,0) = I(1,1) = 1$ *e* $I(1,0) = 0$.

Observar que de la definición se deriva que $I(0,x) = 1$ e $I(x,1) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ mientras que los valores simétricos $I(x,0)$ e $I(1,x)$ no quedan determinados. Algunas propiedades de las implicaciones borrosas que se usarán posteriormente son las siguientes:

- El *principio de neutralidad por la izquierda*,

$$I(1,y) = y, \quad y \in [0,1]. \qquad \textbf{(NP)}$$

- El *principio de intercambio*,

$$I(x,I(y,z)) = I(y,I(x,z)), \quad x,y,z \in [0,1]. \qquad \textbf{(EP)}$$

- La *ley de importación* con una t-norma T,

$$I(T(x,y),z) = I(x,I(y,z)), \quad x,y,z \in [0,1]. \qquad \textbf{(LI)}$$

- La *propiedad de orden*,

$$x \leq y \Longleftrightarrow I(x,y) = 1, \quad x,y \in [0,1]. \qquad \textbf{(OP)}$$

Definición 2.3 ([3, Definición 1.4.15]). *Sea I una implicación borrosa. La función N_I definida como $N_I(x) = I(x,0)$ para todo $x \in [0,1]$, se dice que es la* negación natural *asociada a I.*

Finalmente, se recuerdan las definiciones de las (S,N)-implicaciones y las implicaciones f-generadas de Yager.

Definición 2.4 ([3, Definición 2.4.1]). *Una función $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice que es una* (S,N)-implicación *si existen una t-conorma S y una negación borrosa N tales que*

$$I_{S,N}(x,y) = S(N(x),y), \quad x,y \in [0,1].$$

Definición 2.5 ([3, Definición 3.1.1]). *Sea $f : [0,1] \to [0,\infty]$ una función continua y estrictamente decreciente con $f(1) = 0$. La función $I_f : [0,1]^2 \to [0,1]$ definida por*

$$I_f(x,y) = f^{-1}(x \cdot f(y)), \quad x,y \in [0,1],$$

entendiendo que $0 \cdot \infty = 0$, se dice que es una implicación f-generada*. La función f es un f-generador de la implicación I_f.*

3 IMPLICACIONES POLINÓMICAS

En esta sección se introducirá el concepto de implicación polinómica y se determinarán algunas condiciones necesarias sobre los coeficientes de un polinomio para que éste pueda ser la expresión de alguna implicación borrosa.

Nota 1. *Aunque en la introducción se han recordado las caracterizaciones de las t-normas arquimedianas continuas racionales y de las uninormas racionales (entendiendo una función racional como una fracción de dos polinomios), en este trabajo no se estudiarán las implicaciones borrosas racionales y el estudio se limitará a las implicaciones borrosas polinómicas. Esta limitación viene provocada por la propia definición de implicación borrosa ya que mientras las uninormas y las t-normas son operadores asociativos y por lo tanto, existe una propiedad bastante restrictiva en su definición, las implicaciones borrosas tienen una definición mucho más flexible. Esta flexibilidad permite que exista ya una gran cantidad de implicaciones polinómicas y por lo tanto, su estudio reviste interés.*

En este punto, la siguiente definición introduce el concepto de implicación polinómica.

Definición 3.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Un operador binario $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice que es una* implicación borrosa polinómica de grado *n si es una implicación borrosa y viene dado por la siguiente expresión*

$$I(x,y) = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\leq n}} a_{ij}x^i y^j$$

para todo $x,y \in [0,1]$ donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y existen $0 \leq i,j \leq n$ con $i+j=n$ tal que $a_{ij} \neq 0$.

El siguiente ejemplo muestra que existen implicaciones borrosas polinómicas de cualquier grado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.

Ejemplo 1. *Consideremos la familia parametrizada de negaciones borrosas dada por $N_n(x) = 1 - x^n$ para todo $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ y la t-conorma suma probabilística, que tiene por expresión $S_P(x,y) = x + y - xy$ para todo $x,y \in [0,1]$. Es fácil comprobar que la suma probabilística pertenece a la familia de t-conormas de Hamacher (las t-conormas duales de las t-normas de Hamacher) y es la única t-conorma polinómica. Entonces, considerando estos dos operadores, podemos construir la siguiente familia parametrizada de (S,N)-implicaciones*

$$I_{S_P,N_{n-1}}(x,y) = S_P(N_{n-1}(x),y) = 1 - x^{n-1} + x^{n-1}y$$

para todo $x,y \in [0,1]$ y $n \geq 2$. Como se puede observar, son implicaciones polinómicas de grado n. Además, satisfacen (LI) con $T_P(x,y) = xy$ y son por tanto, implicaciones f-generadas de Yager con $f(x) = \sqrt[n-1]{1-x}$.

Una primera propiedad directa que se deriva de la definición es la de continuidad.

Proposición 1. *Toda implicación borrosa polinómica es una implicación continua.*

Nota 2. *Es conveniente remarcar que no se considerarán como implicaciones polinómicas algunas implicaciones usuales cuya expresión es polinómica a trozos. Así, por ejemplo, entre otras, las implicaciones siguientes no son polinómicas al no satisfacer los requerimientos de la definición 3.1:*

$$I_{GD}(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y, \\ y & si\ x > y, \end{cases}$$

$$I_{LK}(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x \leq y, \\ 1-x+y & si\ x > y, \end{cases}$$

$$I_{WB}(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x < 1, \\ y & si\ x = 1. \end{cases}$$

Como se puede observar, las implicaciones de la nota anterior tienen todas una región 1 no trivial. Este hecho no es casualidad como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2. *Toda implicación borrosa polinómica I tiene una región 1 trivial, es decir, $I(x,y) = 1$ si, y sólo si, $x = 0$ o $y = 1$.*

La propiedad obtenida en la proposición previa es estudiada en detalle en [4] donde se demuestra que esta propiedad es esencial para la construcción de los índices de equivalencia fuertes. Además, en particular, las implicaciones polinómicas no satisfacen nunca (OP). En cambio, sí pueden satisfacer (EP) y en ese caso, son (S,N)-implicaciones.

Proposición 3. *Sea $I(x,y) = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\leq n}} a_{ij}x^i y^j$ una implicación polinómica de grado n. Si I satisface (EP), entonces I es una (S,N)-implicación generada a partir de la negación borrosa estricta $N(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{i0}x^i$ y la t-conorma $S(x,y) = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\leq n}} a_{ij}(N^{-1}(x))^i y^j$.*

Sin embargo, queda pendiente la cuestión de qué polinomios pueden ser implicaciones borrosas polinómicas. El problema reside en caracterizar cuáles son los coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$ que generan un polinomio $p(x,y)$ que satisface las condiciones de la definición 2.2. Se resolverá parcialmente esta cuestión en general para polinomios de grado n. En primer lugar, el siguiente resultado determina las condiciones necesarias y suficientes que tiene que satisfacer un polinomio para ser la expresión de una implicación polinómica borrosa.

Teorema 1. *Un polinomio $p(x,y) = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\leq n}} a_{ij}x^i y^j$ de grado n es una implicación polinómica borrosa si, y sólo si, las siguientes propiedades se satisfacen:*

1. *$p(0,y) = p(x,1) = 1$ para todo $x,y \in [0,1]$.*

2. $p(1,0) = 0$.
3. $\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} \leq 0$ *para todo* $x, y \in [0,1]$.
4. $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} \geq 0$ *para todo* $x, y \in [0,1]$.
5. $0 \leq p(1,y), p(x,0) \leq 1$.

Las dos primeras propiedades del teorema anterior proporcionan inmediatamente condiciones sobre los coeficientes a_{ij} del polinomio $p(x,y)$.

Proposición 4. *Dado un polinomio* $p(x,y) = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\leq n}} a_{ij}x^i y^j$ *de grado n, se tiene que:*

1. $p(0,y) = 1$ *si, y sólo si,* $a_{00} = 1$ *y* $a_{0j} = 0$ *para todo* $0 < j \leq n$.
2. $p(x,1) = 1$ *si, y sólo si,* $\sum_{j=0}^{n} a_{0j} = 1$ *y* $\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} = 0$ *para todo* $0 < i \leq n$.
3. $p(1,0) = 0$ *si, y sólo si,* $\sum_{i=0}^{n} a_{i0} = 0$.

Así, el siguiente resultado proporciona condiciones necesarias sobre los coeficientes de las implicaciones polinómicas borrosas.

Corolario 1. *Sea* $I(x,y) = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n \\ i+j\leq n}} a_{ij}x^i y^j$ *una implicación polinómica de grado n. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. $a_{00} = 1$.
2. $a_{0j} = 0$ *para todo* $0 < j \leq n$.
3. $\sum_{j=0}^{n} a_{0j} = 1$ *y* $\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} = 0$ *para todo* $0 < i \leq n$.
4. $\sum_{i=1}^{n} a_{i0} = -1$.

Sin embargo, el trasvase de las propiedades 3-5 del Teorema 1 a propiedades sobre los coeficientes del polinomio es mucho más complejo para polinomios de grado n. Por lo tanto, y con el objetivo de caracterizar algunas implicaciones polinómicas, se limitará el estudio a partir de ahora a implicaciones polinómicas de grado menor o igual a 3.

3.1 GRADO MENOR QUE 2

En primer lugar, se estudiará la existencia de implicaciones polinómicas de grado menor que 2, es decir, implicaciones borrosas de la forma

$$\begin{aligned} I(x,y) &= a_{00}, && \text{con } a_{00} \in \mathbb{R}, \\ I(x,y) &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y, && \text{con } a_{10} \neq 0 \text{ o } a_{01} \neq 0. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar a partir del corolario 1 que en el primer caso, se tendría que cumplir que $a_{00} = 0$ y $a_{00} = 1$. Por lo tanto, no existen implicaciones borrosas polinómicas de grado menor que 1. Recordar nuevamente que sí existen implicaciones borrosas constantes a trozos, como son por ejemplo, las implicaciones mínima I_{Lt} y máxima I_{Gt} definidas como sigue

$$\begin{aligned} I_{Lt}(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \\ I_{Gt}(x,y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \text{ y } y = 0, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por otro lado, tampoco existen implicaciones polinómicas borrosas de grado 1. En este caso, el corolario 1 indica que los coeficientes deberían satisfacer $a_{00} = 1, a_{01} = 0, a_{10} = 0$ y también $a_{10} = -1$ y por lo tanto, el sistema es incompatible. Como ejemplos de implicación borrosa definida a trozos por polinomios de grado menor que 2, se tienen entre muchas otras las implicaciones de la nota 2. Así, a partir de las observaciones previas, el siguiente resultado es inmediato.

Proposición 5. *No existen implicaciones polinómicas de grado menor que 2.*

3.2 GRADO 2

En esta subsección, el objetivo será caracterizar todas las implicaciones polinómicas de grado 2, es decir, aquellas de la forma

$$I(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$$

con $a_{20}^2 + a_{11}^2 + a_{02}^2 \neq 0$. En primer lugar, aplicando el corolario 1, se obtiene que sólo existe un posible valor para cada coeficiente, concretamente $a_{00} = 1, a_{10} = -1, a_{11} = 1$ y $a_{01} = a_{20} = a_{02} = 0$. Sustituyendo estos valores en la expresión del polinomio, se tiene que

$$p(x,y) = 1 - x + xy = I_{RC}(x,y),$$

es decir, se obtiene la implicación de Reichenbach. Al ser una de las implicaciones borrosas conocidas, satisface el resto de condiciones del teorema 1. Por lo tanto, existe una única implicación borrosa polinómica de grado 2.

Proposición 6. *Existe una única implicación borrosa polinómica de grado 2, la implicación de Reichenbach* $I(x,y) = 1 - x + xy$.

Notar que la implicación I_{RC} es una (S,N)-implicación obtenida a partir de la construcción expuesta en el ejemplo 1 como I_{S_P,N_1}. Como sabemos, esta implicación es también una implicación f-generada de Yager obtenida a partir de $f(x) = 1 - x$.

3.3 GRADO 3

Finalmente, en esta sección, se estudiarán las implicaciones borrosas polinómicas de grado 3. Estas implicaciones

tienen la expresión siguiente

$$I(x,y) = \sum_{\substack{0\le i,j\le 3\\ i+j\le 3}} a_{ij}x^i y^j$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y existen $0 \le i,j \le 3$ con $i+j=3$ tal que $a_{ij} \neq 0$. El corolario 1 en este caso nos proporciona algunas relaciones entre los distintos coeficientes.

Corolario 2. *Sea* $I(x,y) = \sum_{\substack{0\le i,j\le 3\\ i+j\le 3}} a_{ij}x^i y^j$ *una implicación polinómica de grado 3. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

- $a_{00} = 1$.
- $a_{01} = a_{02} = a_{03} = a_{30} = 0$.
- $a_{12} = -a_{10} - a_{11}$.
- $a_{20} = -1 - a_{10}$.
- $a_{21} = 1 + a_{10}$.
- $a_{10} \neq -1$ *o* $a_{10} \neq -a_{11}$.

El resultado anterior reduce los polinomios candidatos a ser expresión de una implicación polinómica a

$$p(x,y) = \begin{array}{l} 1 + a_{10}x + (-1-a_{10})x^2 + a_{11}xy + \\ (1+a_{10})x^2y + (-a_{10}-a_{11})xy^2 \end{array} \quad (1)$$

con $a_{10} \neq -1$ o $a_{10} \neq -a_{11}$. Sin embargo, no todos estos polinomios satisfacen las propiedades 3-5 del teorema 1 y no todos son implicaciones borrosas. El siguiente resultado caracteriza completamente todas las implicaciones borrosas polinómicas de grado 3.

Teorema 2. *Sea* $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *un operador binario. Entonces I es una implicación borrosa polinómica de grado 3 si, y sólo si, I viene dada por la expresión* $I(x,y) =$

$$1 + \alpha x + (-1-\alpha)x^2 + \beta xy + (1+\alpha)x^2y + (-\alpha-\beta)xy^2 \quad (2)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, $\alpha \neq -\beta$, *y se cumple alguno de los casos siguientes:*

- $-2 \le \alpha \le -1$ *y* $-1-\alpha \le \beta \le 2$.
- $-1 < \alpha < 0$ *y* $0 \le \beta \le -2\alpha$.
- $\alpha = \beta = 0$.

En primer lugar, estudiemos algunas de las propiedades de estas implicaciones, y después estudiaremos a qué familia de implicaciones pertenecen las implicaciones polinómicas de grado 3.

Proposición 7. *Sea I una implicación borrosa polinómica de grado 3 dada por la expresión (2). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *I satisface (EP).*
- *I satisface (NP).*
- $\alpha = -\beta$ *con* $-2 \le \alpha \le 0$.

En este caso, la implicación I viene dada por

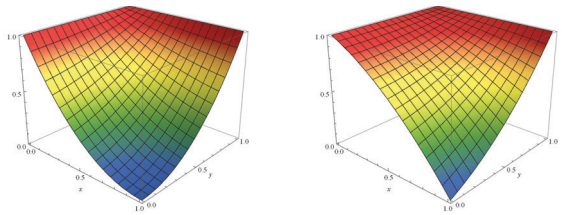
$$I(x,y) = 1 + \alpha x + (-1-\alpha)x^2 - \alpha xy + (1+\alpha)x^2y. \quad (3)$$

Proposición 8. *Sea I una implicación borrosa polinómica de grado 3 dada por la expresión (2). Entonces su negación natural es estricta y viene dada por* $N_I(x) = 1 + \alpha x + (-1-\alpha)x^2$ *con* $-2 \le \alpha \le 0$.

Como las familias de implicaciones más habituales satisfacen (NP), existen implicaciones borrosas polinómicas de grado 3 que no son (S,N), R, QL o D-implicaciones. Por ejemplo, las siguientes implicaciones borrosas polinómicas no satisfacen (NP)

$$\begin{array}{ll} I_1(x,y) & = 1 - 2x + x^2 + xy - x^2y + xy^2, \\ I_2(x,y) & = \frac{1}{2}(2 - x - x^2 + x^2y + xy^2). \end{array}$$

Estas implicaciones están representadas en la figura 1.



(a) I_1 (b) I_2

Figura 1: Algunas implicaciones polinómicas borrosas de grado 3 que no satisfacen (NP).

Sin embargo, utilizando la proposición 3, las implicaciones borrosas polinómicas de grado 3 que sí satisfacen (EP) son (S,N)-implicaciones obtenidas a partir de la única t-conorma polinómica S_P.

Teorema 3. *Sea* $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *un operador binario, S una t-conorma y N una negación borrosa. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *I es una implicación borrosa polinómica de grado 3 y una (S,N)-implicación obtenida a partir de S y N.*
2. $S = S_P$ *y* $N(x) = 1 + \alpha x + (-1-\alpha)x^2$ *con* $-2 \le \alpha \le 0$.

Finalmente y usando la reciente caracterización de las implicaciones f-generadas de Yager en [9], el siguiente resultado determina qué implicaciones borrosas polinómicas de grado 3 son implicaciones de Yager.

Teorema 4. *Sea* $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ *un operador binario. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *I es una implicación borrosa polinómica de grado 3 y una implicación f-generada de Yager.*

2. *I es una implicación borrosa polinómica de grado 3 que satisface (LI) con $T_P(x,y) = xy$.*

3. *$I(x,y) = 1 - x^2 + x^2 y$, la implicación f-generada a partir de $f(x) = \sqrt{1-x}$.*

Como se podía esperar, la implicación obtenida pertenece a la familia construida en el ejemplo 1 tomando I_{S_P,N_2}.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En esta comunicación, se ha iniciado el estudio de las implicaciones borrosas en base a su expresión final en lugar del habitual estudio sobre las estrategias de construcción de estos operadores a partir de funciones de agregación o funciones de una variable. Como primer paso se han estudiado las implicaciones borrosas polinómicas, dando algunos resultados para implicaciones polinómicas de grado n cualquiera y se han caracterizado todas las implicaciones polinómicas de grado menor o igual a 3. La familia de implicaciones polinómicas tiene intersección con las (S,N)-implicaciones y las implicaciones f-generadas, aunque se ha probado también que existen implicaciones de esta familia que no pertenecen a ninguna de las familias más conocidas de implicaciones. De los resultados obtenidos, han quedado abiertas algunas cuestiones. En primer lugar,

Problema abierto 1. *Caracterizar las implicaciones borrosas polinómicas de grado n cualquiera.*

Para ello, será un requisito imprescindible determinar qué condiciones sobre los coeficientes del polinomio implican las propiedades 3-5 del teorema 1. Finalmente, de los resultados obtenidos en la proposición 6 y el teorema 3, se tiene que cualquier implicación polinómica de grado 2 o 3 que sea una (S,N)-implicación, verifica que $S = S_P$. Este hecho induce la siguiente cuestión:

Problema abierto 2. *¿Existe alguna implicación borrosa polinómica que sea una (S,N)-implicación obtenida a partir de $S \neq S_P$?*

Se pretende como trabajo futuro abordar estas cuestiones y empezar el estudio de las implicaciones borrosas (OP)-polinomiales, es decir, aquellas cuya expresión viene dada por

$$I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ p(x,y) & \text{si } x > y, \end{cases}$$

donde $p(x,y)$ es un polinomio de grado n y por otra parte, de las implicaciones borrosas racionales, aquellas cuya expresión es un cociente de polinomios.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto MTM2009-10320 y MTM2009-10962, ambos con fondos FEDER.

Referencias

[1] C. Alsina, M. Frank, and B. Schweizer. *Associative functions. Triangular norms and copulas*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 2006.

[2] M. Baczyński, G. Beliakov, H. Bustince, and A. Pradera. *Advances in Fuzzy Implication Functions*, volume 300 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing Series*. Springer-Verlag GmbH, 2013.

[3] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[4] H. Bustince, J. Fernandez, J. Sanz, M. Baczyński, and R. Mesiar. Construction of strong equality index from implication operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 211:15–33, 2013.

[5] J. Fodor. On rational uninorms. In *Proceedings of the First Slovakian–Hungarian Joint Symposium on Applied Machine Intelligence*, pages 139–147, Herlany, Slovakia, February 2003.

[6] J. C. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[7] H. Hamacher. *Über logische Aggregationen nicht binär explizierter Entscheidungskriterien*, chapter Ein axiomatischer Beiitrag zur normativen Entscheidungstheorie. Verlag, Frankfurt, 1978.

[8] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens, and E. Trillas. A survey on fuzzy implication functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1107–1121, 2007.

[9] S. Massanet and J. Torrens. On the characterization of Yager's implications. *Information Sciences*, 201:1–18, 2012.

[10] S. Massanet and J. Torrens. An overview of construction methods of fuzzy implications. In M. Baczyński, G. Beliakov, H. Bustince, and A. Pradera, editors, *Advances in Fuzzy Implication Functions*, volume 300 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pages 1–30. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[11] E. Trillas, M. Mas, M. Monserrat, and J. Torrens. On the representation of fuzzy rules. *Int. J. Approx. Reasoning*, 48(2):583–597, 2008.

El problema del orden en las implicaciones intervalo-valoradas

María J. Asiain, **Humberto Bustince**, **Laura De Miguel**, **Fco. Javier Fernández**, **Ana Pradera**

Universidad Pública de Navarra, {asiain,bustince,fcojavier.fernandez}@unavarra.es, demiguel.81238@e.unavarra.es

Universidad Rey Juan Carlos, ana.pradera@urjc.es

Resumen

Las funciones de implicación definidas en intervalos están directamente relacionadas con las negaciones en intervalos (en lógica la proposición $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$) y éstas con el orden establecido. No siempre es sencillo encontrar una negación para un orden dado y en ocasiones no es posible conseguir que la negación sea fuerte (autodual), lo que dificulta e incluso imposibilita lograr implicaciones que verifiquen la propiedad $I(X,Y) = 1 \Leftrightarrow X \leq Y$.

1 Introducción

En un retículo $(A, \wedge, \vee)$ con mínimo 0 y máximo 1 una función $I : A^2 \to A$ es una función de implicación si es una función decreciente en la primera componente y creciente en la segunda tal que $I(1,1) = I(0,1) = I(0,0) = 1$ e $I(1,0) = 0$ ([1, 4, 7]). Si el retículo es complementado (tiene una negación) podemos también considerar que $I(X,Y) = \neg(X \wedge \neg Y)$, o $I(X,Y) = \neg X \vee Y$, y así estudiar las funciones de implicación mediante el orden dado, una negación compatible con dicho orden y funciones de agregación (que se comportan como $\wedge$ y $\vee$).

Los intervalos aparecen frecuentemente en problemas relacionados con conjuntos borrosos, como estudiando el grado de pertenencia, definiendo características asociadas a un determinado intervalo o considerando medidas ([3]). Si consideramos funciones monótonas en intervalos, como la monotonía de la función viene dada en referencia al orden, parece interesante estudiar un orden que sea orden total y una negación compatible con dicho orden ([5]).

No existe un método universal para encontrar una negación compatible con un orden dado ([1]) y la negación que se encuentra no es autodual en casi ningún caso porque las negaciones fuertes en intervalos vienen definidas mediante negaciones fuertes de los puntos extremos del intervalo y el orden $\leq$ de $\mathbb{R}$ no es compatible, en general, con el orden total dado en los intervalos.

El trabajo se organiza presentando en los preliminares definiciones y resultados básidos ya conocidos, analizando órdenes admisibles y centrando el trabajo en encontrar una negación compatible con el orden total de Xu y Yager que nos permite definir funciones de implicación. La novedad reside, sobre todo, en la forma de encontrar las implicaciones, que no busca definir directamente una función de implicación sino partir de una función de negación compatible con un orden total dado en intervalos.

2 Preliminares

2.1 Órdenes y negaciones en intervalos

Definición 1 *Si $[a,b]$ es un intervalo en el conjunto de los números reales, denotamos*

$$L([a,b]) = \{[x,y] \mid a \leq x \leq y \leq b\}$$

Como $[x,y] = [a + \alpha(b-a), a + \beta(b-a)]$ con $\alpha \leq \beta$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$, estudiamos

$$L([0,1]) = \{[x,y] \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

Llamamos

$$X = [\underline{X}, \overline{X}]$$

Si en $L([0,1])$ definimos una relación de orden parcial, por ejemplo:

$$[a,b] \leq_L [c,d] \Leftrightarrow a \leq c \text{ y } b \leq d,$$

$L([0,1])$ adquiere estructura de retículo con el $0_L = [0,0]$ como elemento minimal y el $1_L = [1,1]$ como elemento maximal.

Definición 2 *Sea $(L([0,1]), \leq_L, 0_L = [0,0], 1_L = [1,1])$ un retículo acotado. Una función $N : L([0,1]) \to L([0,1])$ es una negación si es una función decreciente respecto del orden $\leq_L$ tal que $N(0_L) = 1_L$ y $N(1_L) = 0_L$. La negación N se dice fuerte si $N(N([\underline{X}, \overline{X}])) = [\underline{X}, \overline{X}]$.*

Proposición 1 *(teorema 2 de [2]) Si* $n:[0,1]\to[0,1]$ *es una negación en* $[0,1]$*, entonces* $N:L([0,1])\to L([0,1])$ *definida por*

$$N(X)=[n(\overline{X}),n(\underline{X})]$$

es una negación en $L([0,1])$ *siempre que el orden* $\leq$ *en* $[0,1]$ *sea compatible con el orden* $\leq_L$ *en* $L([0,1])$*, es decir:*

$$[a,b]\leq_L[c,d]\Leftrightarrow\begin{cases}a\leq c\\ b\leq d\end{cases}$$

Nota 1 *Con el orden de Xu y Yager ([8]) en intervalos:*

$$[a,b]\leq_L[c,d]\Leftrightarrow\begin{cases}a+b<c+d\\ a+b=c+d\ y\ b-a\leq d-c\end{cases}$$

y el orden $\leq$ *en* $[0,1]$ *la función* $N:L([0,1])\to L([0,1])$ *dada por* $N([a,b])=[1-b,1-a]$ *no es una negación porque no es una función decreciente:* $[1/2,1/2]<[0,1]$ *y* $N([1/2,1/2])=[1/2,1/2]<N([0,1])=[0,1]$.

2.2 Funciones de agregación e implicación

Definición 3 *Una función de agregación en el retículo acotado* $(L([0,1]),\leq_L,0_L=[0,0],1_L=[1,1])$ *es una función* $M:L([0,1])^2\to L([0,1])$ *que verifica:*

1. $M(0_L,0_L)=0_L=[0,0]$.
2. $M(1_L,1_L)=1_L=[1,1]$.
3. $M(X,Y)$ *es creciente respecto del orden elegido en* $L([0,1])$.

Proposición 2 *Si* A *es una función de agregación en* $[0,1]$*, entonces la función* $M_A:L([0,1])^2\to L([0,1])$ *dada por*

$$M_A([\underline{X},\overline{X}],[\underline{Y},\overline{Y}])=[A(\underline{X},\underline{Y}),A(\overline{X},\overline{Y})],$$

es una función de agregación en $L([0,1])$ *con el orden*

$$[a,b]\leq_L[c,d]\Leftrightarrow a\leq c\ y\ b\leq d.$$

Además, si $A,B:[0,1]^2\to[0,1]$ *son dos funciones de agregación tales que* $A(x,y)\leq B(x,y)$*, entonces*

$$M_{A,B}([\underline{X},\overline{X}],[\underline{Y},\overline{Y}])=[A(\underline{X},\underline{Y}),B(\overline{X},\overline{Y})],$$

es una función de agregación en $L([0,1])$.

Ejemplo 1 *Son funciones de agregación con el orden*

$$[a,b]\leq_L[c,d]\Leftrightarrow a\leq c\ y\ b\leq d:$$

- $M([a,b],[c,d])=[(ac)^2,(bd)^2]$.
- $M([a,b],[c,d])=[(ac)^{1/2},(b+d)/2]$.

Definición 4 *Sea* $(L([0,1]),\leq_L,1_L,0_L)$ *un retículo acotado y sean* M *una función de agregación verificando* $M(1_L,0_L)=M(0_L,1_L)=0_L$ *y* N *una negación en* $L([0,1])$*, ambas respecto del mismo orden,, definimos la función*

$I_M:L([0,1])^2\to L([0,1])$ *por* $I_M(X,Y)=N(M(X,N(Y)))$.

Proposición 3 *Si* $M:L([0,1])^2\to L([0,1])$ *es una función de agregación y* N *es una negación en las condiciones de la definición 4, entonces* $I_M(X,Y)$ *es una función de implicación, esto es:*

1. $I_M(X,Y)$ *es una función decreciente en la primera componente y creciente en la segunda.*
2. $I_M(0_L,0_L)=I_M(0_L,1_L)=I_M(1_L,1_L)=1_L$.
3. $I_M(1_L,0_L)=0_L$.

Las funciones de implicación pueden verificar las siguientes propiedades relevantes ([4]):

· $[P_1]:\ I(X,Y)=0_L\Leftrightarrow X=1_L$ e $Y=0_L$.

· $[P_2]:\ I(X,Y)=1_L\Leftrightarrow X=0_L$ o $Y=1_L$.

· [I6, NP]: $I(1_L,Y)=Y\quad\forall Y\in L([0,1])$.

· [I7, EP]: $I(X,I(Y,Z))=I(Y,I(X,Z))$.

· [I8, OP]: $I(X,Y)=1\Leftrightarrow X\leq Y$.

· [I9, SN]: $C(X)=I(X,0)$ es una negación fuerte.

· [I10]: $I(X,Y)\geq Y$.

· [I11, IP]: $I(X,X)=1$.

· [I12, CP]: $I(X,Y)=I(N(Y),N(X))$.

· [I13]: $I(X,Y)$ es una función continua.

· [I14]: $I(X,N(X))=N(X)$.

Ejemplo 2 *Consideramos en* $L([0,1])$ *el orden:*

$$[a,b]\leq_L[c,d]\Leftrightarrow a\leq c\ y\ b\leq d.$$

Sea $I_G(X,Y)=N(G(X,N(Y)))$ *con* $G(X,Y)=[\underline{XY},\overline{XY}]$ *y* $N(X)=[1-\overline{X},1-\underline{X}]$*, luego*

$$I_G(X,Y)=[1-\overline{X}+\overline{X}\underline{Y},1-\underline{X}+\underline{X}\overline{Y}].$$

Entonces I_G *cumple las propiedades:*

$P_1:\ I_G(X,Y)=0_L\Leftrightarrow X=1_L\ y\ Y=0_L$,

$P_2:\ I_G(X,Y)=1_L\Leftrightarrow X=0_L\ o\ Y=1_L$.

Ejemplo 3 *Sea* $I_G(X,Y)=N(G(X,N(Y)))$ *con*

$$G(X,Y)=\left[\frac{2\underline{XY}}{\underline{X}+\underline{Y}},\frac{2\overline{XY}}{\overline{X}+\overline{Y}}\right],$$

N negación fuerte y el orden

$$[a,b] \leq_L [c,d] \Leftrightarrow a \leq c \text{ y } b \leq d.$$

Así, I verifica la propiedad I14: $I(X,N(X)) = N(X)$ *porque*

$$I(X,N(X)) = N(G(X,X)) = N(X).$$

Además, I verifica P_1 *y* P_2.

Esta función de implicación no verifica las siguientes propiedades:

[I6, NP] $I(1_L,X) = N(G(1_L,N(X))) = \left[\frac{\underline{X}}{2-\underline{X}}, \frac{\overline{X}}{2-\overline{X}},\right]$ si $N(X) = [1-\overline{X}, 1-\underline{X}]$, luego, $I([1,1],[1/2,1/2]) = [1/3,1/3] \neq [1/2,1/2]$.

[I7, EP] Si $N(X) = [1-\overline{X}, 1-\underline{X}]$, entonces se tiene que
$I([1/2,1/2],I([1/3,1/3],[1/2,1])) =$
$I([1/2,1/2],[3/5,1]) = [5/9,1] \neq$
$I([1/3,1/3],I([1/2,1/2],[1/2,1])) =$
$I([1/3,1/3],[1/2,1]) = [3/5,1]$.

[I8, OP] Si $N(X) = [1-\overline{X}, 1-\underline{X}]$ entonces: $[1/3,1] < [1/2,1]$ y $I([1/3,1],[1/2,1]) = [1/3,1] \neq [1,1]$.

[I9, SN] Si $N(X) = [(1-\overline{X}^2)^{1/2}, (1-\underline{X}^2)^{1/2}]$, como $C(X) = I(X,0) = N(G(X,1))$, entonces $C(C([2/3,1])) = C([0,3/5]) = [7^{1/2}/4,1] \neq [2/3,1]$.

[I10] Si $N(X) = [1-\overline{X}, 1-\underline{X}]$ entonces se tiene que $I([1,1],[1/2,1/2]) = [1/3,1/3] < [1/2,1/2]$.

[I11, IP] Si $N(X) = [1-\overline{X}, 1-\underline{X}]$ entonces $I(X,X) = N(G(X,N(X)))$. Así tenemos que $I([1/2,1/2],[1/2,1/2]) = [1/2,1/2] \neq [1,1]$.

Teorema 1 *Sean en* $L([0,1])$ *M una función de agregación y N una negación fuerte verificando las condiciones de la definición 4 y sea* $I_M(X,Y) = N(M(X,N(Y)))$. *Entonces:*

$$M(X,Y) \leq Y \;\Rightarrow\; I10 : I(X,Y) \geq Y.$$

Si además M es una función simétrica, se tiene que $I6 : I(1_L,X) = X \;\Rightarrow\; I9 : I(X,0_L)$ *es negación fuerte.*

3 Funciones de agregación admisibles

Definición 5 *Diremos que dos funciones de agregación* $A_1, A_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ *son admisibles en* $[0,1]$ *si las funciones* A_1, A_2 *verifican:*

$$\begin{cases} A_1(a,b) = A_1(c,d) \\ A_2(a,b) = A_2(c,d) \end{cases} \Rightarrow a = c \text{ y } b = d.$$

Nota 2 *Si* $A_1, A_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ *son dos funciones de agregación admisibles podemos definir una relación de orden en los intervalos de* $L([0,1])$ *asignando a cada intervalo* $[a,b] \in L([0,1])$ *los valores* $A_1(a,b)$ *y* $A_2(a,b)$ *y comparando los valores asignados a los intervalos con la relación* $\leq$ *en* $\mathbb{R}$.

Ejemplo:

Si $A_1(a,b) = (a+b)/2$ y $A_2(a,b) = (a \cdot b)^{1/2}$, podemos definir la relación de orden de Xu y Yager como

$$[a,b] \leq_L [c,d] \Leftrightarrow \begin{cases} A_1(a,b) < A_1(c,d) \\ \quad \text{o} \\ A_1(a,b) = A_1(c,d) \text{ y } A_2(a,b) \geq A_2(c,d). \end{cases}$$

El concepto de funciones de agregación admisibles puede extenderse a pares de intervalos que también permiten definir nuevos órdenes en ellos:

Definición 6 *Dos funciones de agregación* $M_1, M_2 : L([0,1])^2 \to L([0,1])$ *son admisibles respecto de un orden en* $L([0,1])$ *si las funciones* M_1, M_2 *verifican:*

$$\begin{cases} M_1(X,Y) = M_1(Z,W) \\ \quad y \\ M_2(X,Y) = M_2(Z,W) \end{cases} \Rightarrow X = Z \text{ y } Y = W.$$

Ejemplo 4 *Si*

$$M_\alpha([\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]) = [\alpha\underline{a} + (1-\alpha)\underline{b}, \alpha\overline{a} + (1-\alpha)\overline{b}],$$

y $\alpha, \beta \in [0,1]$, *entonces el par* (M_α, M_β) *es admisible.*

Proposición 4 *Si* $n : [0,1] \to [0,1]$ *es una negación fuerte, y la función*

$$N : L([0,1]) \to L([0,1]) \text{ tal que } N([\underline{X},\overline{X}]) = [n(\overline{X}), n(\underline{X})]$$

es una negación respecto de la relación de orden $\leq_L$ *en* $L([0,1])$ *entonces dicha relación de orden es parcial.*

Demostración: Si la relación de orden $\leq_L$ fuese una relación de orden total, entonces dos intervalos de la forma

$X = [\underline{X}, \overline{X} = n(\underline{X})]$ e $Y = [\underline{Y}, \overline{Y} = n(\underline{Y})]$ son comparables y $[X = [\underline{X}, \overline{X} = n(\underline{X}) \leq_L Y = [\underline{Y}, \overline{Y} = n(\underline{Y})]$ si y sólo si $N(X) = X \geq N(Y) = Y = [0,1]$.

Es decir: si la relación de orden $\leq_L$ es una relación de orden total, entonces una negación respecto de dicho orden en $L([0,1])$ no puede venir definida mediante una negación fuerte de los extremos del intervalo. En particular, no existe negación fuerte en $(L([0,1]), \leq_L, 1_L, 0_L)$ con dos elementos distintos X, Y tales que $X = N(X)$ e $Y = N(Y)$. □

4 Ejemplos con un orden dado

Teorema 2 *La función* $N([a,b])$ *definida por:*

$$\begin{cases} N([0,0] = [1,1] \\ N([a,b]) = [\frac{1-a}{2}, 1-\frac{b}{2}], [0,0] \neq [a,b] \neq [1,1] \\ N([1,1]) = [0,0] \end{cases}$$

es una negación respecto del orden

$$[a,b] \leq_L [c,d] \Leftrightarrow \begin{cases} a+b < c+d \\ a+b = c+d \ y \ b-a \leq d-c \end{cases}$$

Demostración: Es claro que si $a+b<c+d$, entonces

$$\frac{1-a}{2}+1-\frac{b}{2} = \frac{3-(a+b)}{2} > \frac{3-(c+d)}{2} = \frac{1-c}{2}+1-\frac{d}{2}$$

y si $a+b=c+d$ y $b-a \leq d-c$, entonces

$$\frac{2-b}{2}-\frac{1-a}{2} = \frac{1-(b-a)}{2} \geq \frac{1-(d-c)}{2} = \frac{2-d-(1-c)}{2}$$

y por tanto

$$[a,b] \leq [c,d] \rightarrow N([a,b]) \geq N([c,d]). \square$$

Proposición 5 *Para todo $\alpha \in [0,1]$ la función de agregación*

$$M_\alpha([\underline{a},\overline{a}],[\underline{b},\overline{b}]) = [\alpha\underline{a}+(1-\alpha)\underline{b}, \alpha\overline{a}+(1-\alpha)\overline{b}]$$

es compatible con el orden

$$[a,b] \leq_L [c,d] \Leftrightarrow \begin{cases} a+b < c+d \\ a+b = c+d \ y \ b-a \leq d-c \end{cases}$$

Demostración: Si $[a,b] \leq_L [c,d]$, entonces se tiene que

$$M_\alpha([x,y],[a,b]) \leq_L M_\alpha([x,y],[c,d])$$

porque

$$M_\alpha([x,y],[a,b]) = [\alpha x+(1-\alpha)a, \alpha y+(1-\alpha)b],$$

$$M_\alpha([x,y],[c,d]) = [\alpha x+(1-\alpha)c, \alpha y+(1-\alpha)d] \text{ y :}$$

$$\alpha(x+y)+(1-\alpha)(a+b) < \alpha(x+y)+(1-\alpha)(c+d),$$

$$\alpha(x+y)+(1-\alpha)(a+b) = \alpha(x+y)+(1-\alpha)(c+d)$$
$$\alpha(y-x)+(1-\alpha)(b-a) \leq \alpha(y-x)+(1-\alpha)(d-c).$$

De igual forma se prueba que

$$M_\alpha([a,b],[x,y]) \leq_L M_\alpha([c,d],[x,y]). \square$$

Esta función no verifica que $M_\alpha(0_L,1_L) = 0 = M_\alpha(1_L,0_L)$, para definir la implicación redefinimos la función $M^*_\alpha([a,b],[c,d])$ como

$$\begin{cases} [\alpha a+(1-\alpha)c, \alpha b+(1-\alpha)d], & [a,b] \neq 0_L \neq [c,d] \\ [0,0], & [a,b] = 0_L \text{ o } [c,d] = 0_L \end{cases}$$

Proposición 6 *La función*

$$I_\alpha([\underline{A},\overline{A}],[\underline{B},\overline{B}]) = N(M^*_\alpha([\underline{A},\overline{A}],N([\underline{B},\overline{B}])))$$

es una función de implicación con el orden y la función negación del teorema 2.

Demostración: La prueba es directa. $\square$

Nota 3 *(1) Si $[0,0] \neq [a,b] \neq [1,1] \neq [c,d]$, entonces la función $I_\alpha([a,b],[c,d])$ es $[\underline{X},\overline{X}]$ con:*

$$\underline{X} = \frac{2\alpha(1-a)+(1-\alpha)(1+c)}{4},$$

$$\overline{X} = \frac{2\alpha(2-b)+(1-\alpha)(2+d)}{4}.$$

(2) La negación $N([a,b])$ dada en el teorema 2:

$$\begin{cases} N([0,0]) = [1,1] \\ N([a.b]) = [\frac{1-a}{2}, 1-\frac{b}{2}], [0,0] \neq [a,b] \neq [1,1] \\ N([1,1]) = [0,0] \end{cases}$$

no es una negación fuerte:

$$N(N([a,b])) = \left[\frac{1+a}{4}, \frac{2+b}{4}\right] \quad [0,0] \neq [a,b] \neq [1,1],$$

por ello un buen número de propiedades de funciones de implicación no se verifican.

(3) Para todo $\alpha \in [0,1]$ tenemos definida una nueva negación que no es negación fuerte:

$$C_\alpha([a,b]) = I_\alpha([a,b],[0,0]) = N(M^*_\alpha([a,b],[1,1]))$$

$$C_\alpha([a,b]) = N([\alpha a+1-\alpha, \alpha b+1-\alpha]) =$$

$$= \begin{cases} [1,1] & [a,b] = [0,0] \\ \left[\frac{\alpha(1-a)}{2}, \frac{1+\alpha(1-b)}{2}\right] & [0,0] \neq [a,b] \neq [1,1] \\ [0,0] & [a,b] = [1,1] \end{cases}$$

(4) Si $\alpha = 1$, entonces

$$I_1(X,Y) = N(X) = \begin{cases} [1,1], X = 0_L \\ [\frac{1-\underline{X}}{2}, 1-\frac{\overline{X}}{2}], 0_L \neq X \neq 1_L \\ [0,0], X = 1_L \end{cases}$$

y si $\alpha = 0$, entonces

$$I_0(X,Y) = N(N(Y)) = \begin{cases} [1,1], Y = 1_L \\ [\frac{1+\underline{Y}}{4}, \frac{2+\overline{Y}}{4}], 0_L \neq Y \neq 1_L \\ [0,0], Y = 0_L \end{cases}$$

Proposición 7 *Para todo $\alpha \in (0,1)$, I_α verifica*

$$P_1 : I_\alpha(X,Y) = 0_L \Leftrightarrow X = 1_L \ e \ Y = 0 \ y$$
$$P_2 : I_\alpha(X,Y) = 1_L \Leftrightarrow X = 0_L \ o \ Y = 1_L.$$

Demostración: Como $I_\alpha(X,Y) = 0_L \Leftrightarrow M^*_\alpha(X,N(Y)) = 1_L$ y $M^*_\alpha(X,N(Y)) = 1_L \Leftrightarrow X = N(Y) = 1_L$, entonces se tiene:

$$I_\alpha(X,Y) = 0_L \Leftrightarrow X = 1_L \text{ e } Y = 0_L.$$

De $I_\alpha(X,Y) = 1_L \Leftrightarrow M^*_\alpha(X,N(Y)) = 0_L$, como $M^*_\alpha(X,N(Y)) = 0_L \Leftrightarrow X = 0_L$ o $N(Y) = 0_L$ se deduce que

$$I_\alpha(X,Y) = 1_L \Leftrightarrow X = 0_L \text{ o } Y = 1_L. \square$$

Nota 4 *La función de implicación*

$$I_\alpha(X,Y) = N(M^*_\alpha(X,N(Y)))$$

no verifica las siguientes propiedades:

- *[I6, NP]* $I_\alpha([1,1],[0,1]) = N([(1+\alpha)/2,(1+\alpha)/2]) =$
$[(1-\alpha)/4,(3-\alpha)/4] \neq [0,1]$.

- *[I7, EP]* $I_\alpha([1/2,1/2],I_\alpha([0,1],[0,1])) =$
$I_\alpha([1/2,1/2],[(1+\alpha)/4,(3-\alpha)/4]) =$
$[(5-\alpha^2)/16,(11+\alpha^2)/16] \neq$
$I_\alpha([0,1],I_\alpha([1/2,1/2],[0,1])) = I_\alpha([0,1],[1/4,3/4]) =$
$[(5+3\alpha)/16,(11-3\alpha)/16]$ *si* $\alpha \neq 0$.

- *[I8, OP] Tenemos que* $[1/2,1/2] < [0,1]$ *y sin embargo*

$$I_\alpha([1/2,1/2],[0,1]) = N([1/2,1/2]) = [1/4,3/4] \neq [1,1].$$

- *[I9, SN] Como se indica en el punto* 3 *de la nota* 2, $C(X) = I_\alpha(X,0)$ *no es negación fuerte:*

$$C(C([0,1])) = C\left(\left[\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{2\alpha-\alpha^2}{4},\frac{2+\alpha}{4}\right] \neq [0,1].$$

- *[I10]* $I_\alpha([1/2,1/2],[0,1])) = [1/4,3/4] < [0,1]$.

- *[I11, IP]* $I_\alpha([0,1],[0,1]) = [(1+\alpha)/4,(3-\alpha)/4] \neq [1,1]$.

- *[I12, CP] Como* $N([0,1]) = [1/2,1/2]$,

$$I_\alpha([0,1],[0,1]) = [(1+\alpha)/4,(3-\alpha)/4] \neq$$

$$I_\alpha([1/2,1/2],[1/2,1/2])) = [(3-\alpha)/8,(5+\alpha)/8].$$

- *[I14]* $I_\alpha([0,1],[1/2,1/2]) = [(3+\alpha)/8,(5-\alpha)/8]$
$\neq [1/2,1/2]$ *si* $\alpha \neq 1$.

Teorema 3 *La función negación considerada:*

$$\begin{cases} N([0,0] = [1,1] \\ N([a,b]) = [\frac{1-a}{2}, 1-\frac{b}{2}],\ [0,0] \neq [a,b] \neq [1,1] \\ N([1,1]) = [0,0] \end{cases}$$

es también una negación respecto de los órdenes lexicográficos:

$$[a,b] \leq_{Lex1} [c,d] \Leftrightarrow \begin{cases} a < c \\ a = c \ y \ b \leq d \end{cases}$$

$$y\ [a,b] \leq_{Lex2} [c,d] \Leftrightarrow \begin{cases} b < d \\ b = d \ y \ a \leq c \end{cases}$$

Demostración: Como $N([a,b]) = [\frac{1-a}{2}, \frac{2-b}{2}]$ y se tiene:

1. si $a < c$ entonces $\frac{1-a}{2} > \frac{1-c}{2}$
2. si $a = c$ y $b \leq d$, entonces $\frac{1-a}{2} = \frac{1-c}{2}$ y $\frac{2-b}{2} \geq \frac{2-d}{2}$.

concluimos:

$$[a,b] \leq_{Lex1} [c,d] \Rightarrow N([a,b]) \geq_{Lex1} N([c,d]).$$

De igual forma,

$$[a,b] \leq_{Lex2} [c,d] \Rightarrow N([a,b]) \geq_{Lex2} N([c,d]). \square$$

5 Conclusiones

En este trabajo hemos considerado el problema del orden a la hora de definir implicaciones intervalo-valoradas. A partir de la definición de implicaciones vía agregaciones y negaciones, hemos estudiado la relación entre algunas propiedades de aquellas y de éstas.

Referencias

[1] Bedregal, B. y Beliakov, G. y Bustince, H. y Fernández, J. y Pradera, A. y Reiser, R.: (S,N)-Implications on Bounded Lattices. *Advances in Fuzzy Implication Functions*, vol 300, pp. 101–124, 2013.

[2] Bustince, H. y Barrenechea, E. y Pagola, M.: Generations of Interval-Valued Fuzzy and Atanassov's Intuicionistic Fuzzy Connectives and from K_α Operators: Laws for Conjunctions and Disjunctions, Amplitude. *International journal of intelligent systems*, vol 23, pp. 680–714, 2008.

[3] Bustince, H. y Barrenechea, E. y Pagola, M. y Fernandez, J. Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: application to edge detection, *F*uzzy Sets and Systems, vol. 160, pp. 1819ñ-1840, 2009.

[4] Bustince, H. y Burillo, P. y Soria, F. Automorphisms, negations and implication operators, *Fuzzy Sets and Systems*, vol 134, pp. 209–229, 2003.

[5] Bustince, H. y Fernandez, J. y Kolesárová, A. y Mesiar, R.: Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. *Fuzzy set and systems*, vol 220, pp. 69–77, 2013.

[6] Bustince, H. y Barrenechea, E. y Pagola, M.: Restricted equivalence functions. *Fuzzy Sets and Systems*, vol 157, pp. 2333–2346, 2006.

[7] Fodor, J. On fuzzy implication operators, *Fuzzy Sets and Systems* , vol. 42, pp. 293–300, 1991.

[8] Xu, Z.S. and Yager, R.R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, *International Journal of General Systems*, vol. 35 pp.417ñ-433, 2006.

A note on generalized convexity and fuzzy optimization

Antonio Rufián-Lizana[1], **Rafaela Osuna-Gómez**[1], **Yurilev Chalco-Cano**[2]

[1]*Departamento de Estadística e I.O., Universidad de Sevilla, Spain*, {rufian,rafaela}@us.es
[2]*Instituto de Alta Investigación, Universidad de Tarapacá, Casilla 7D, Arica-Chile*, ychalco@uta.cl

Abstract

This article makes a comprehensive study on the relationship between differentiable and convex fuzzy function and diverse concepts of generalized convex fuzzy functions. Moreover, we discuss the connection of those concepts with fuzzy optimization.

Keywords: Convex fuzzy functions, Generalized convex fuzzy function, Fuzzy optimization.

1 Introduction

The convex functions play an important role in the search for optimal conditions for solutions to the mathematical programming problem. The fundamental property of a differentiable convex function $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is its characterization by the inequality

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)(x-y), \tag{1}$$

where $x, y \in K$. As consequence of (1), in a convex optimization problem we have that stationary points are global minima. In this result, the convexity is a sufficien optimality condition, but not neccesary.

Invex functions were introduced by M.A. Hanson [11], as a generalization of differentiable convex functions. In fact, a differentible function $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is invex if for all $x, y \in K$ there exist $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ such that

$$f(x) - f(y) \geq \nabla f(y)\eta(x,y). \tag{2}$$

Note that $x-y$ in (1) is being replace by $\eta(x,y)$ in (2). Consequently, these functions are more general than the convex ones. The type of invex function is equivalent to the type of function whose stationary points are global minima. This result justifie the existence of invex functions [11].

In fuzzy optimization different efforts have been made in the direction of definin analogous concepts to establish necessary and sufficien conditions of optimality. The characterizations of convex fuzzy mappings, with and without differenciability, other generalized convexity concepts and their applications to fuzzy nonlinear programming were studied by several authors (see, [6], [8], [10],[13],[16],[17],[18], [19], [20],[21], [22], [23]).

In this article, we show that a differentiable and convex fuzzy function does not necessarily verify the property (1). We show that the class of invex fuzzy function introduced in [15, 20] as a generalization of the relation (2) is very restictive. Also, we show that some characterizations of generalized convex functions are not valid for generalized convex fuzzy functions. Finally, we discuss the connection of these concepts and fuzzy optimization.

2 Preliminares

We denote by $\mathscr{K}_C$ the family of all bounded closed intervals in $\mathbb{R}$, i.e.,

$$\mathscr{K}_C = \{[\underline{a}, \overline{a}] \ / \ \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R} \text{ and } \underline{a} \leq \overline{a}\},$$

Given two intervals $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ and $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ we defin the distance between A and B by

$$H(A,B) = \max\left\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|\right\}.$$

A fuzzy set on $\mathbb{R}^n$ is a mapping $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$. For each fuzzy set u, we denote $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n | u(x) \geq \alpha\}$ for any $\alpha \in (0,1]$ its α-level set. By $supp\, u$ we denote the support of u, i.e. $\{x \in \mathbb{R}^n | \, u(x) > 0\}$. By $[u]^0$ we defin the closure of $supp\, u$.

Definition 1 *A compact and convex fuzzy set u on $\mathbb{R}^n$ is a fuzzy set with the following properties:*

1. *u is normal, i.e. there exists $x_0 \in \mathbb{R}^n$ such that $u(x_0) = 1$;*
2. *u is an upper semi-continuous function;*

3. $u(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq min\{u(x),u(y)\}$, $x,y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0,1]$*; i.e. u is quasiconcave;*

4. $[u]^0$ *is compact.*

Let $\mathscr{F}_C$ denotes the family of all fuzzy intervals, i.e $\mathscr{F}_C$ denotes the family of all compact and convex fuzzy sets on $\mathbb{R}$. Obviously, $[u]^\alpha$ is a nonempty compact and convex subset of $\mathbb{R}$ (denoted by $[\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha]$) for any $u \in \mathscr{F}_C$ and $\alpha \in [0,1]$.

For fuzzy intervals $u,v \in \mathscr{F}_C$ represented by $[\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha]$ and $[\underline{v}_\alpha, \overline{v}_\alpha]$, respectively, and for any real number λ, we def ne the addition $u+v$ and scalar multiplication λu as follows:

$$(u+v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\{u(y),v(z)\}$$

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u\left(\frac{x}{\lambda}\right), & \text{if} \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{if } \lambda = 0. \end{cases}$$

It is well known that, for every $\alpha \in [0,1]$

$$[u+v]^\alpha = [(\underline{u+v})_\alpha, (\overline{u+v})_\alpha] = [\underline{u}_\alpha + \underline{v}_\alpha \, , \, \overline{u}_\alpha + \overline{v}_\alpha]$$

$$\begin{aligned} [\lambda u]^\alpha &= \left[(\underline{\lambda u})_\alpha, (\overline{\lambda u})_\alpha\right] \\ &= [\min\{\lambda \underline{u}_\alpha, \lambda \overline{u}_\alpha\}, \max\{\lambda \underline{u}_\alpha, \lambda \overline{u}_\alpha\}]. \end{aligned}$$

If for $u,v \in \mathscr{F}_C$, there exists $\omega \in \mathscr{F}_C$ such that $u = v+\omega$, then we say the Hukuhara difference between u and v to exist. So, ω is the H-difference between u and v and we denote by $u -_H v = \omega$. It is obvious that if the H-difference $u -_H v$ exists, then $(\underline{u -_H v})(\alpha) = \underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha)$, $(\overline{u -_H v})(\alpha) = \overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha)$.

Given $u,v \in \mathscr{F}_C$ we def ne the distance between u and v by

$$\begin{aligned} D(u,v) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} H([u]^\alpha, [v]^\alpha) \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|\underline{u}_\alpha - \underline{v}_\alpha|, |\overline{u}_\alpha - \overline{v}_\alpha|\}. \end{aligned}$$

So, $(\mathscr{F}_C, D)$ is a complete metric space [9].

3 Differentiable fuzzy functions

Henceforth, K denotes an open subset of $\mathbb{R}^n$ and let $T = (a,b)$ be an open interval in $\mathbb{R}$.

A function $F : K \to \mathscr{F}_C$ is said to be a fuzzy function. For each $\alpha \in [0,1]$, associate to F, we def ne the family of interval-valued functions $F_\alpha : K \to \mathscr{K}_C$ given by $F_\alpha(x) = [F(x)]^\alpha$. For any $\alpha \in [0,1]$, we denote

$$F_\alpha(x) = \left[\underline{f}_\alpha(x), \overline{f}_\alpha(x)\right].$$

Here, for each $\alpha \in [0,1]$, the endpoint functions $\underline{f}_\alpha, \overline{f}_\alpha : K \to \mathbb{R}$ are called upper and lower functions of F, respectively.

Next we present the concept of G-differentiable fuzzy functions def ned on $T = (a,b) \subset \mathbb{R}$.

Definition 2 *([1, 2]) Given $F : T \to \mathscr{F}_C$ a fuzzy function, we say that F is strongly generalized differentiable (G-differentiable, for short) at $t_0 \in T$ if exists an element $F'(t_0) \in \mathscr{F}_C$ such that:*
(i) for all $h > 0$ sufficiently small, $\exists\, F(t_0+h) -_H F(t_0)$, $F(t_0) -_H F(t_0-h)$ and the limits (in the metric D)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0+h) -_H F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_H F(t_0-h)}{h} = F'(t_0)$$

or
(ii) for all $h > 0$ sufficiently small, $\exists\, F(t_0) -_H F(t_0+h)$, $F(t_0-h) -_H F(t_0)$ and the limits (in the metric D)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_H F(t_0+h)}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0-h) -_H F(t_0)}{-h} = F'(t_0).$$

or
(iii) for all $h > 0$ sufficiently small, $\exists\, F(t_0+h) -_H F(t_0)$, $F(t_0-h) -_H F(t_0)$ and the limits (in the metric D)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0+h) -_H F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0-h) -_H F(t_0)}{-h} = F'(t_0)$$

or
(iv) for all $h > 0$ sufficiently small, $\exists\, F(t_0) -_H F(t_0+h)$, $F(t_0) -_H F(t_0-h)$ and the limits (in the metric D)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_H F(t_0+h)}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) -_H F(t_0-h)}{h} = F'(t_0).$$

We say that F is G-differentiable on T if F is G-differentiable at each point $t_0 \in T$.

Remark 1 *Note that the G-differentiability in the first form (i) of the Definition 2 is coincident with the H-differentiability (differentiability in the sense of Hukuhara introduced by Puri and Ralescu [14] as a generalization of the Hukuhara derivative for set-valued mapping [12]). Thus, the G-differentiability is a concept of differentiability for fuzzy mapping more general than the H-differentiability.*

Similar to Def nition 2 we have the G-derivative for an interval-valued mappings [5]. More precisely, an interval-valued mapping $F : T \to \mathscr{K}_C$ is G-differentible at $t_0 \in T$, with G-derivative $F'(t_0) \in \mathscr{K}_C$, if any item (i) or (ii) or (iii) or (iv) of the Def nition 2 is verif ed. In this case, the limit is taken in the metric space $(\mathscr{K}_C, H)$ and the H-difference is considered between intervals.

Theorem 1 *([6]) Let $F : T \to \mathscr{F}_C$ be a fuzzy mapping. If F is G-differentiable in the first form (i) ((ii), (iii), (iv), respectively) then the interval-valued function $F_\alpha : T \to \mathscr{K}_C$ is G-differentiable in the first form (i) ((ii), (iii), (iv), respectively) for each $\alpha \in [0,1]$. Moreover*

$$\left[F'(t)\right]^\alpha = F'_\alpha(t). \tag{3}$$

Example 1 *([6]) We consider the fuzzy mapping $F:\mathbb{R}\to\mathscr{F}_C$ defined by $F(t)=C\cdot t$, where C is a fuzzy interval defined via its α-levels by $[C]^\alpha=[1+\alpha,2(3-\alpha)]$. Then*

$$F_\alpha(t)=\begin{cases}[(1+\alpha)t,2(3-\alpha)t] & \text{if} \quad t\geq 0;\\ [2(3-\alpha)t,(1+\alpha)t] & \text{if} \quad t<0.\end{cases}$$

We can see that the endpoint functions $\underline{f}_\alpha$ and $\overline{f}_\alpha$ are not differentiable at $t=0$. However F is G-differentiable on $\mathbb{R}$ and $F'(t)=C$ for all $t\in\mathbb{R}$. In this case, F is G-differentiable in sense (iii) at $t=0$.

In general we have the following result on the connection between the G-differentiability of F and its endpoint functions $\underline{f}_\alpha$ and $\overline{f}_\alpha$.

Theorem 2 *([6]) Let $F:T\to\mathscr{F}_C$ be a fuzzy function. If F is G-differentiable at $t_0\in T$, then we have the following cases:*

(a) If F is G-differentiable at $t_0\in T$ in the first form (i) then, for each $\alpha\in[0,1]$, $\underline{f}_\alpha$ and $\overline{f}_\alpha$ are differentiable functions at t_0 and

$$F'_\alpha(t_0)=\left[\left(\underline{f}_\alpha\right)'(t_0)\,,\,\left(\overline{f}_\alpha\right)'(t_0)\right]$$

(b) If F is G-differentiable at $t_0\in T$ in the second form (ii) then , for each $\alpha\in[0,1]$, $\underline{f}_\alpha$ and $\overline{f}_\alpha$ are differentiable functions at t_0 and

$$F'_\alpha(t_0)=\left[\left(\overline{f}_\alpha\right)'(t_0)\,,\,\left(\underline{f}_\alpha\right)'(t_0)\right]$$

(c) If F is G-differentiable at $t_0\in T$ in the third form (iii) then there are the lateral derivatives $(\underline{f}_\alpha)'_{+/-}$ and $(\overline{f}_\alpha)'_{+/-}$ at t_0 and

$$\begin{aligned}F'_\alpha(t_0) &= \left[(\underline{f}_\alpha)'_+(t_0)\,,\,(\overline{f}_\alpha)'_+(t_0)\right]\\ &= \left[(\overline{f}_\alpha)'_-(t_0)\,,\,(\underline{f}_\alpha)'_-(t_0)\right]\end{aligned}$$

(d) If F is G-differentiable at $t_0\in T$ in the fourth form (iv) then there are the lateral derivatives $(\underline{f}_\alpha)'_{+/-}$ and $(\overline{f}_\alpha)'_{+/-}$ at t_0 and

$$\begin{aligned}F'_\alpha(t_0) &= \left[(\overline{f}_\alpha)'_+(t_0)\,,\,(\underline{f}_\alpha)'_+(t_0)\right]\\ &= \left[(\underline{f}_\alpha)'_-(t_0)\,,\,(\overline{f}_\alpha)'_-(t_0)\right]\end{aligned}$$

We are now going to def ne the partial derivative for a fuzzy function F def ned on $K\subset\mathbb{R}^n$, i.e., $F(x)=F(x_1,...,x_n)\in\mathscr{F}_C$ for each $x=(x_1,...,x_n)\in K$. For this, given a fuzzy mapping $F:K\to\mathscr{F}_C$, we denote the fuzzy interval $F(x)$ by $F(x)=(\underline{f}(x),\overline{f}(x))$ and, for each $\alpha\in[0,1]$,

$$F_\alpha(x)=\left[\underline{f}_\alpha(x),\overline{f}_\alpha(x)\right]=\left[\underline{f}(\alpha,x),\overline{f}(\alpha,x)\right].$$

Definition 3 *Let F be a fuzzy function defined on $K\subset\mathbb{R}^n$ and let $x_0=\left(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)$ be an element of K fixed. We consider the fuzzy function $h_i(x_i)=F(x_1^{(0)},...,x_{i-1}^{(0)},x_i,x_{i+1}^{(0)},...,x_n^{(0)})$. If h_i is G-differentiable at $x_i^{(0)}$, then we say that F has the ith partial G-derivative at $\mathbf{x}_0$ (denotes by $(\partial F/\partial x_i)(x_0)$) and $(\partial F/\partial x_i)(x_0)=(h_i)'\left(x_i^{(0)}\right)$.*

Definition 4 *Let F be a fuzzy function defined on K and let $x_0=\left(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)\in K$ be fixed. We say that F is G-differentiable at x_0 if all the partial G-derivatives $(\partial F/\partial x_1)(x_0)$,..., $(\partial F/\partial x_n)(x_0)$ exist on some neighborhoods of x_0 and are continuous at x_0.*

Note that if F is G-differentiable at x_0, then $(\partial F/\partial x_i)(x_0)$ is a fuzzy interval. So, for each $\alpha\in[0,1]$, we denote

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0)\right]^\alpha=\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}(x_0)=\left[\frac{\partial \underline{F_\alpha}}{\partial x_i}(x_0),\frac{\partial \overline{F_\alpha}}{\partial x_i}(x_0)\right].$$

We obtain $\left(\partial\underline{F_\alpha}/\partial x_i\right)(x_0)$ and $\left(\partial\overline{F_\alpha}/\partial x_i\right)(x_0)$ from Theorem 2.

Note that in [13, 20, 21, 22, 23] the authors have used H-differentiable fuzzy function for obtainung some results on fuzzy optimization. However, this concept possesses the property that the diameter of the support $len(F_0(t))$ (length of $F_0(t)\in\mathscr{K}_C$) is nondecreasing as t increases. Therefore this concept of differentiability is very restrictive. The following example shows this fact.

Example 2 *Consider the fuzzy function $F:\mathbb{R}^2\to\mathscr{F}_C$ defined via its α-levels by*

$$[F(x_1,x_2)]^\alpha=F_\alpha(x_1,x_2)=\left[x_1^2\,,\,x_1^2+(1-\alpha)x_2^2\right].$$

Then

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right]^\alpha=\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_1}(x_1,x_2)=[2x_1\,,\,2x_1],$$

for any $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ and $\alpha\in[0,1]$. Also,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}[0\,,\,2(1-\alpha)x_2] & \text{if} \quad x_1\in\mathbb{R},\ x_2\geq 0\\ [2(1-\alpha)x_2\,,\,0] & \text{if} \quad x_1\in\mathbb{R},\ x_2<0,\end{cases}$$

for all $\alpha\in[0,1]$. Since both $(\partial F/\partial x_1)(x_1,x_2)$ and $(\partial F/\partial x_2)(x_1,x_2)$ are continuous then F is G-differentiable. However F is not H-differentiable.

Proposition 1 *([7]) Let $F:K\to\mathscr{F}_C$ be a fuzzy function. If F is G-differentiable at $x_0\in K$ then, for each $\alpha\in[0,1]$, the real-valued function $\underline{f}_\alpha+\overline{f}_\alpha:K\to\mathbb{R}$ is differentiable at x_0. Moreover,*

$$\frac{\partial \underline{F_\alpha}}{\partial x_i}(x_0)+\frac{\partial \overline{F_\alpha}}{\partial x_i}(x_0)=\frac{\partial\left(\underline{f}_\alpha+\overline{f}_\alpha\right)}{\partial x_i}(x_0). \qquad (4)$$

Given the interval-valued function F, the gradient of F at x_0, denoted by $\tilde{\nabla}F(x_0)$, is def ned by

$$\tilde{\nabla}F(x_0) = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)(x_0), ..., \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)(x_0)\right), \qquad (5)$$

where $(\partial F/\partial x_j)(x_0)$ is the jth partial G-derivative of F at x_0.

In [23] the concept of level-wise differentiable (L-differentiable, for short) fuzzy functions was introduced. This concept is based on the differentiability of endpoint functions. More precisely, $F : K \to \mathscr{F}_C$ is a L-differentiable fuzzy function if and only if $\underline{f}_\alpha$ and $\overline{f}_\alpha$ are differentible functions for all $\alpha \in [0,1]$. We can see the concept of G-differentiability is more general than L-differentiability [1, 2, 5].

4 Generalized convexity for differentiable fuzzy functions

The following convention for inequalities between two intervals $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ and $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ elements of $\mathscr{K}_C$ will be used troughout this paper.

$$B \preceq A, \quad \text{iff} \quad \underline{b} \leq \underline{a} \text{ and } \overline{b} \leq \overline{a}$$

$$B \prec A, \quad \text{iff} \quad B \preceq A \text{ and } B \neq A,$$

Let u and v be two fuzzy intervals. Then $[u]^\alpha = [\underline{u}_\alpha, \overline{u}_\alpha]$ and $[v]^\alpha = [\underline{v}_\alpha, \overline{v}_\alpha]$ are two elements of $\mathscr{K}_C$ for all $\alpha \in [0,1]$. We write $u \preceq v$ if and only if $[u]^\alpha \preceq [v]^\alpha$ for all $\alpha \in [0,1]$, or equivalently, $\underline{u}_\alpha \leq \underline{v}_\alpha$ and $\overline{u}_\alpha \leq \overline{v}_\alpha$ for all $\alpha \in [0,1]$.

Now we write $u \prec v$ if and only if $[u]^\alpha \preceq [v]^\alpha$ for all $\alpha \in [0,1]$ and there exists $\alpha^* \in [0,1]$ such that $[u]^{\alpha^*} \prec [v]^{\alpha^*}$, i.e.

$$\begin{cases} \underline{u}_{\alpha^*} < \underline{v}_{\alpha^*} \\ \overline{u}_{\alpha^*} \leq \overline{v}_{\alpha^*} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \underline{u}_{\alpha^*} \leq \underline{v}_{\alpha^*} \\ \overline{u}_{\alpha^*} < \overline{v}_{\alpha^*} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \underline{u}_{\alpha^*} < \underline{v}_{\alpha^*} \\ \overline{u}_{\alpha^*} < \overline{v}_{\alpha^*} \end{cases}$$

The following def nition of convexity for fuzzy mapping is well-known in the literature, for instance see [9, 13, 16, 17, 18, 20, 22, 23].

Definition 5 *([16]) A fuzzy function $F : K \to \mathscr{F}_C$ is said to be convex on a convex set $K \subset \mathbb{R}^n$ if for any $x, y \in K$, $\lambda \in [0,1]$,*

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \preceq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y).$$

The previous concept of convexity for a fuzzy function is equivalent to convexity of its endpoint functions.

Proposition 2 *Let $F : K \to \mathscr{F}_C$ be a fuzzy function. Then, F is convex if and only if the endpoint functions $\underline{f}_\alpha$ and $\overline{f}_\alpha$ are convex functions for all $\alpha \in [0,1]$.*

For a convex fuzzy function the property (1), in fuzzy context, is not necessarily valid, i.e a G-differentiable and convex fuzzy function does not necessarily verify the folllowing inequality

$$F(x) \succeq \tilde{\nabla}F(y)(x-y) + F(y), \qquad (6)$$

for all $x, y \in K$. The following example shows this fact.

Example 3 *We consider the fuzzy function$F : (0,\infty) \to \mathscr{F}_C$ defined by*

$$F(x)(t) = \begin{cases} -\frac{t}{x} + 2 & \text{if} \quad t \in [x, 2x]; \\ 0 & \text{if} \quad t \in [x, 2x]. \end{cases}$$

So, for each $\alpha \in [0,1]$, $[F(x)]^\alpha = \left[\underline{f}_\alpha(x), \overline{f}_\alpha(x)\right] = [x, (2-\alpha)x]$. Clearly, F can be rewritten as being $F(x) = u \cdot x$, where u is the fuzzy interval given by $[u]^\alpha = [1, 2-\alpha]$, i.e F is a fuzzy function generate of a linear function.

Since $\underline{f}_\alpha$ and $\overline{f}_\alpha$ are convex function then F is a convex fuzzy function. Also, F is H-differentiable and consequently G-differentiable. However, F does not verify (6). In fact, for $x = 1$ and $y = 2$ we have

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{\nabla}F(y)(x-y) + F(y)\right]^\alpha \\ = \; & [1, 2-\alpha](1-2) + [2, (2-\alpha)2] \\ = \; & [-(2-\alpha), -1] + [2, 2(2-\alpha)] \\ = \; & [\alpha, 3-2\alpha], \end{aligned}$$

and $[F(x)]^\alpha = [1, 2-\alpha]$. Thus, $F(x) \not\succeq \tilde{\nabla}F(y)(x-y) + F(y)$

An alternative to overcome this would be replacing $x - y$ in (6) by an adequate $\eta(x,y)$. So, we have the following def nition.

Definition 6 *([15]) A G-differentiable fuzzy function $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathscr{F}_C$ is called invex with respect to a function $\eta : K \times K \to \mathbb{R}^n$, if for all $x, y \in K$*

$$F(x) \succeq \tilde{\nabla}F(y)\eta(x,y) + F(y). \qquad (7)$$

Note that initiality in [20] was used H-differentiable fuzzy functions for introducing invex fuzzy functions.

The following examples show convex fuzzy function which do not satisfy the property (6) however these are invex.

Example 4 *Let F be a fuzzy function defined as in Example 3. If we define η as being $\eta(x,y) = 0$ for $x \geq y$ and $\eta(x,y) = 2(x-y)$ for $x < y$. Then F is an invex fuzzy function.*

Example 5 *We consider the fuzzy function $F : K \to \mathscr{F}_C$, with $K = (0,\infty)$, defined by*

$$F(x)(t) = \begin{cases} \frac{t}{x} + 1, & \text{if} \quad t \in [-x, 0]; \\ 1 - \frac{t}{x^2}, & \text{if} \quad t \in [0, x^2]; \\ 0, & \text{if} \quad t \notin [-x, x^2]. \end{cases}$$

Then, for each $\alpha \in [0,1]$ *we have*

$$[F(x)]^{\alpha} = \left[(\alpha-1)x, (1-\alpha)x^2\right].$$

Clearly, F is H-differentiable with $[F'(x)]^{\alpha} = [\alpha-1, 2(1-\alpha)x]$ *and it is convex. Also, we can show that (6) does not verify. But, F is an invex fuzzy function respect to* η *defined by*

$$\eta(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2+x-y}{2} & \text{if} \quad (x,y) \in A, \\ \frac{-x^2+y^2-x+y}{2} & \text{if} \quad (x,y) \in B; \end{cases}$$

where
$A = \{(x,y) \in K \times K \,/\, (x \geq y,\ x+y \geq 1) \text{ or } (x \leq y,\ x+y \leq 1)\}$
and
$B = \{(x,y) \in K \times K \,/\, (x < y,\ x+y \geq 1) \text{ or } (x > y,\ x+y \leq 1)\}$.

Next we show a convex fuzzy function which is not invex.

Example 6 *We consider the fuzzy functionF* $: (1,\infty) \to \mathscr{F}_C$ *defined by*

$$F(x)(t) = \begin{cases} \frac{t-x^2}{1-x^2}, & \text{if} \quad t \in [1,x^2]; \\ 0, & \text{if} \quad t \notin [1,x^2]. \end{cases}$$

For each $\alpha \in [0,1]$ *we have* $[F(x)]^{\alpha} = [1, \alpha + (1-\alpha)x^2]$. *Clearly, F is a H-differentiable and convex fuzzy mapping. However, F is not invex. For instance, if* $x = 2$ *and* $y = 4$ *then inequality* $[1, \alpha+(1-\alpha)4] \succcurlyeq [0, \alpha+(1-\alpha)8]\eta(2,4) + [1, \alpha+(1-\alpha)16]$ *does not verify for any real number* $\eta(2,4)$. *In fact, for* $\alpha = 0$, *if* $\eta(2,4) \geq 0$ *then* $1 \geq 0+1$ *and* $4 \geq 8\eta(2,4)+16$, *which is a contradiction. Moreover, if* $\eta(2,4) < 0$ *then* $1 \geq 8\eta(2,4)+1$ *and* $4 \geq 16$, *which is a contradiction.*

From previous examples we can see that convex fuzzy functions are not necessarily invex fuzzy functions like it occurs in the classical theory. Moreover, the classical theory of convex optimization can not be generalized into fuzzy optimization in a natural form.

Other class important of functions in optimization are pseudoinvex functions. In fuzzy context, pseudoinvex fuzzy function are more general than convex and invex fuzzy functions.

Definition 7 *Sea* $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathscr{F}_C$ *a G-differentiable fuzzy function defined on the open subset K. Then, F is said pseudoinvex-I if there exists a function* $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *such that for all* $x, y \in K$

$$F(x) \prec F(y) \Rightarrow \tilde{\nabla} F(y)\eta(x,y) \prec 0.$$

Proposition 3 *Let* $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathscr{F}_C$ *be a G-differentiable fuzzy function. If F is invex with respect to a function* η *then F is pseudoinvex-I.*

Proof We suppose that $F(x) \prec F(y)$. Since F is invex then

$$F(x) \succeq \tilde{\nabla} F(y)\eta(x,y) + F(y) \succ \tilde{\nabla} F(y)\eta(x,y) + F(x).$$

Thus $\tilde{\nabla} F(y)\eta(x,y) \prec 0$.□

Proposition 4 *Let* $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathscr{F}_C$ *be a L-differentiable fuzzy function. If F is convex then F is pseudoinvex-I.*

Proof From convexity of F we have that the endpoint functions $\underline{f}_{\alpha}$ and $\overline{f}_{\alpha}$ are convex functions for all $\alpha \in [0,1]$. So, for each $\alpha \in [0,1]$

$$\underline{f}_{\alpha}(x) < \underline{f}_{\alpha}(y) \Rightarrow \nabla \underline{f}_{\alpha}(y)(x-y) < 0$$

and

$$\overline{f}_{\alpha}(x) < \overline{f}_{\alpha}(y) \Rightarrow \nabla \overline{f}_{\alpha}(y)(x-y) < 0.$$

Now, if $F(x) \prec F(y)$ then $\underline{f}_{\alpha}(x) < \underline{f}_{\alpha}(y)$ and $\overline{f}_{\alpha}(x) < \overline{f}_{\alpha}(y)$. Thus,

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{\nabla} F(y)\eta(x,y)\right]^{\alpha} \\ = & \left[\min\left\{\nabla \underline{f}_{\alpha}(y)(x-y), \nabla \overline{f}_{\alpha}(y)(x-y)\right\}, \right. \\ & \left. \max\left\{\nabla \underline{f}_{\alpha}(y)(x-y), \nabla \overline{f}_{\alpha}(y)(x-y)\right\}\right] \\ \prec & \ 0, \end{aligned}$$

for all $\alpha \in [0,1]$. Therefore F is pseudoinvex-I.□

Now we consider the following optimization problem with fuzzy-valued objective function

$$(\mathbf{FO}) \qquad \begin{array}{ll} \min & F(x) \\ \text{subject to} & g_i(x) \leq 0, \ \ i = 1, \ldots, m \end{array}$$

where g_i, $i = 1, \ldots, m$ are real-valued functions def ned on $\mathbb{R}^n$.

What is a solution of the fuzzy optimization problem (FO)?. Since "$\preceq$" is a partial ordering on $\mathscr{F}_C$, we may follow the similar solution concept (the non-dominated solution) used in multiobjective programming problem.

Definition 8 *Let* x^* *be a feasible solution of (FO), i.e.,* $x^* \in X$. *We say that* x^* *is a non-dominated solution of problem (FO) if there exists no* $x \in X/\{x^*\}$ *such that* $F(x) \prec F(x^*)$.

Recently, in [6] was presented KKT optimality conditions for non-dominated solutions of the problem (FO) using the concept of convexity.

Theorem 3 *([6]) Suppose that the fuzzy function* $F : \mathbb{R}^n \to \mathscr{F}_C$ *is convex and continuously G-differentiable at* $\mathbf{x}^*$. *We also assume that each* $\nabla g_j(x^*)$ *has the same sign for* $j = 1, \ldots, m$. *If there exist nonnegative fuzzy numbers (nonnegative fuzzy Lagrange multipliers)* $u_i \in \mathscr{F}_C$, $j = 1, \ldots, m$ *such that the following KKT conditions hold*

(i) $\tilde{\nabla} F(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_i \nabla g_i(x^*) = 0$;

(ii) $u_j g_j(x^*) = 0$ *for all* $j = 1, \ldots, m$,

then x^* *is a non-dominated solution of problem (FO).*

In a future work we are going to show that Theorem 3 holds replacing the convexity by pseudoinvex-I, generalizing the result given in [11]. Also, it is interesting to study other optimality conditions for fuzzy optimization using pseudoinvex-I.

Acknowledgements

This article was supported by Fondecyt-Chile through of project 1120665 and Ministerio de Ciencia e Innovación, Spain, through grant MTM2010-15383.

References

[1] B. Bede, S.G. Gal: Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equation. *Fuzzy Sets and Systems* 151, pp. 581–599, 2005.

[2] B. Bede: *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, 295 (2013).

[3] B. Bede, S.G. Gal: Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability. *Commun. Math. Anal.* 9, pp. 22–41, 2010.

[4] B. Bede, L. Stefanini: Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems* 230, pp. 119–141, 2013.

[5] Y. Chalco Cano, H. Román-Flores, M.D. Jiménez-Gamero: Generalized derivative and π-derivative for set-valued functions. *Information Sciences* 181, pp. 2177–2188, 2011.

[6] Y. Chalco Cano, W. A. Lodwick, H. Román-Flores: The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for a class of fuzzy optimization problems using strongly generalized derivative. *Proceedings of IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting*, Edmonton (Canada), 2013.

[7] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores: A note on generalized convexity for fuzzy mappings through a linear ordering. *Fuzzy Sets and Systems* 231, pp. 70–83, 2013.

[8] M. Delgado, J. Kacprzyk, J.L. Verdegay and Vila M.A. (Eds.): *Fuzzy Optimization: Recent Advances*. Physica-Verlag, New York, 1994.

[9] P. Diamond, P. Kloeden: *Metric Spaces of Fuzzy Sets*. World Scientif c, Singapore, 1994.

[10] N. Furukawa: Convexity and local Lipschitz continuity of fuzzy-valued mappings. *Fuzzy Sets and Systems* 93, pp. 113–119, 1998.

[11] M.A. Hanson: On Suff ciency of Kuhn-Tucker Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 80, pp. 545–550, 1981.

[12] M. Hukuhara: Intégration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj* 10, pp. 205–223, 1967.

[13] M. Panigrahi, G. Panda, S. Nanda: Convex fuzzy mapping with differentiability and its applicaction in fuzzy optimization. *European Journal of Operational Research* 185, pp.47–62, 2008.

[14] M. Puri, D. Ralescu: Differential of fuzzy functions. *J. Math. Anal. Appl.* 91, pp. 552–558, 1983.

[15] A. Ruf án-Lizana, Y. Chalco-Cano, R. Osuna-Gómez and G. Ruiz-Garzón: On invex fuzzy mappings and fuzzy variational-like inequalities. *Fuzzy Sets and Systems* 200, pp. 84–98, 2012.

[16] Y.R. Syau: On convex and concave fuzzy mappings. *Fuzzy Sets and Systems* 103, pp. 163–168, 1999.

[17] Y.R. Syau: Some properties of convex fuzzy mappings. *Journal Fuzzy Mathematics* 7, pp. 151–160, 1999.

[18] Y.R. Syau: Differentiability and convexity of fuzzy mappings. *Computer Mathematics with Applications* 41, pp. 73–81, 2001.

[19] C.X. Wang, C.X. Wu: Derivatives and subdifferential of convex fuzzy mappings and application in convex fuzzy programming. *Fuzzy Sets and Systems* 138, pp. 559–591, 2003.

[20] Z. Wu, J. Xu: Generalized convex fuzzy mappings and fuzzy variational-like inequality. *Fuzzy Sets and Systems* 160, pp. 1590–1619, 2009.

[21] H-C. Wu: The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function. *European Journal of Operational Research* 176, pp. 46–59, 2007.

[22] H-C. Wu: Evaluate fuzzy optimization problems based on biobjective programming problems.*Computers and Mathematics with Applications* 47, pp. 893–902, 2004.

[23] H-C. Wu: The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions. *European Journal of Operational Research* 196, pp. 49–60, 2009.

PLANIFICACIÓN DE RUTAS ORIENTADA A LA CALIDAD DEL SERVICIO CON TIEMPOS DIFUSOS

J. Brito[1], **A. Expósito**[1], **J.A. Moreno**[1], **J.L. Verdegay**[2]

[1]*I.U.D.R. Universidad de La Laguna, E-38271 La Laguna, Spain*, {jbrito,aexposito,jamoreno}@ull.es
[2]*Dpto. CCIA Universidad de Granada, E-18071 Granada, Spain*, verdegay@decsai.ugr.es

Resumen

El tiempo de desplazamiento para ir de un cliente a otro se encuentra entre la información que presenta más incertidumbre e imprecisión en la planificación logística. En este trabajo, resolvemos un modelo de planificación de rutas de vehículos con ventanas de tiempo que integra como objetivo la calidad de servicio, asociado con servir a los clientes lo antes posible, en el cual los tiempos son expresados en términos difusos. El modelo formulado incluye coeficientes difusos en las restricciones y en la función objetivo. La metodología de la soft computing propuesta para resolver este modelo integra métodos de optimización difusa con una metaheurística bioinspirada basada en una versión discreta de la optimización por enjambre de partículas.

Palabras Clave: Problema de rutas de vehículos con ventanas de tiempo, Optimización difusa, Optimización por enjambre de partículas.

1 INTRODUCCIÓN

La planificación de rutas es uno de las actividades estratégicas dentro de la gestión del transporte de mercancías, entre otras razones porque permite mejorar la calidad del servicio, aumentar la satisfacción de los clientes y reducir los costes operativos. El Problema de Rutas de Vehículos (VRP-Vehicle Routing Problems) es un problema bien conocido cuya finalidad es encontrar el mejor conjunto de rutas para una flota de vehículos que sirva la demanda de bienes de un conjunto de clientes geográficamente dispersos [11]. Un objetivo estándar de este problema es determinar el conjunto de rutas factibles para los vehículos disponibles que minimice el coste total de operaciones de la flota, en general expresados en distancias o tiempos. El Problema de Rutas de Vehículos con Ventanas de Tiempo (VRPTW-Vehicle Routing Problem with Time Windows) es una variante del VRP donde cada cliente tiene que ser servido por un vehículo dentro de unos límites de tiempo establecidos.

La alta competitividad de los mercados actuales está poniendo el foco de atención en la calidad y satisfacción de la prestación de servicios al cliente. En general los clientes perciben una mayor calidad y servicio si los tiempos de entrega son más reducidos. La planificación de rutas debe considerar entres sus objetivos este criterio, reducir los tiempos de servicio a cada cliente. En el caso de que el cliente haya establecido una ventana de tiempo para ser servido, una referencia lógica podría ser que el tiempo en el que vehículo llega al cliente para servirle sea lo antes posible dentro de estos límites.

En este trabajo consideramos un VRPTW cuyo objetivo están asociado a la calidad del servicio al cliente. La calidad del servicio es evaluada como el total de las diferencias entre el tiempo en el que el vehículo llega a servir al cliente y el cierre de su ventana de tiempo. Esta variante la vamos a denominar como VRPTW orientado a la calidad del servicio (QSVRPTW-Quality Service-oriented VRPTW). En la literatura podemos encontrar modelos del VRP con objetivos similares cuya finalidad es responder con prioridad a la satisfacción de las necesidades de los clientes. Entre otros modelos podemos encontrar, el problema del viajante de reparaciones con multiples rutas (m-TVRP, m-Traveling Repairman Problem) cuyo objetivo es minimizar el tiempo total de latencia, retardo o llegada a un cliente [5]; el problema de rutas de autobuses escolares [2] entre cuyos objetivos está el minimizar las medias de distancia de viaje, o la media de tiempo utilizado por los escolares en llegar al centro educativo; y el problema de rutas de vehículos capacitado y el acumulativo (CCVRP-Cumulative Capacitated Vehicle Routing Problem), cuyo objetivo es minimizar la suma de los tiempos en los que el vehículo llega a servir a cada cliente [9] aplicado en contextos de ayuda humanitaria y emergencias.

En los problemas reales de transporte de mercancías, la in-

formación disponible sobre los tiempos de desplazamiento de los vehículos a través de la red viaria son imprecisos e incompletos. Las causas de esta imprecisión son en general las condiciones de las carreteras y del tráfico. En consecuencia es necesario abordar estos problemas con una aproximación que permita tratar este tipo de incertidumbre. El uso de métodos de la soft computing y técnicas difusas permiten dar respuestas apropiadas. En este trabajo utilizamos números difusos para representar los tiempos imprecisos. El problema de optimización propuesto QSVRPTW, puede ser formulado como un problema de programación lineal y tiene que ser considerado como un problema de Programación Lineal Difusa (PLD), donde alguna de sus componentes son difusas [3], [12]. En particular, dado que los tiempos de desplazamiento son difusos, un modelo del VRPTW con coeficientes difusos en la función objetivo y en las restricciones

En la literatura nos encontramos modelos del VRP con componentes con vaguedad e imprecisión que aplican la Teoría de Conjuntos Difusos. La mayoría de las referencias asumen que la imprecisión se encuentra en la demanda o pedidos realizados por los clientes como en [7] y [6]. Otras referencias incluyen tiempos de desplazamiento y/o servicio difusos como en [4],o en [10] donde lo son las ventanas de tiempo. También otras referencias de modelos del VRP con información difusa son resueltos con otras aproximaciones como en [13].

Nuestro enfoque de la Soft Computing, utiliza un método aproximado para encontrar soluciones al QSVRPTW, dada la incapacidad de las aproximaciones exactas para resolver problemas de rutas de vehículos de mediana y larga escala. Esta investigación considera la aplicación de una versión discreta de la Optimización por Enjambre de Partículas (PSO, Particle Swarm Optimization) denominada Optimización por el Salto de la Rana (JFO, Jumping Frog Optimization) [8], [1].

El resto de este artículo está organizado a continuación como sigue. La siguiente sección describe el modelo propuesto, el QSVRPTW con tiempos difusos. La sección 3 describe el método propuesto para abordar el problema de optimización difusa. En las sección 4 presentamos la metaheurística JFO implementada para encontrar soluciones al modelo propuesto. En la sección 5 describimos los resultados de la experimentación llevada a cabo. Finalmente, la sección 6 se proponen algunas conclusiones y líneas de futuros trabajos.

2 VRPTW ORIENTADO A LA CALIDAD DEL SERVICIO CON TIEMPOS DIFUSOS

El problema de rutas de vehículos,VRP o VRP con capacidad limitada (CVRP, Capacitated VRP) consiste en, teniendo una flota de vehículos con capacidad limitada que tiene que servir la demanda a un conjunto geográficamente disperso de clientes, determinar el conjunto de m rutas cuyo coste total sea mínimo tal que: (a) cada cliente es visitado exactamente una vez por un solo vehículo asignado a la ruta, (b) cada ruta comienza y finaliza en un único depósito o almacén, y (c) el total de la demanda de los clientes servida por una ruta no excede de la capacidad del vehículo Q_k.

Una de las variantes más extendidas del VRP se origina al incluir periodos de tiempo limitados durante los cuales realizar el servicio a los clientes. En concreto el VRPTW es un VRP con la restricción adicional que asocia una ventana de tiempo a cada cliente en la que solo está dispuesto a recibir los bienes o servicios. Si un vehículo llega al cliente antes de tiempo el vehículo debe esperar, si llega en el intervalo de la ventana de tiempo, el vehículo suministra la demanda en el momento de la llegada y si llega con posterioridad el cliente queda sin atender. Consideramos los siguientes índices y parámetros del modelo:

- Los índices de los vehículos son: $k \in [1..m]$;
- Los índices de los clientes son: $i \in [1..n]$;
- El índice del depósito es: $i = 0$;
- La cantidad de demanda del cliente i es q_i, $i \in [1..n]$;
- La capacidad del vehículo k es Q_k , $k \in [1..m]$;
- Los costes de ir del cliente i (o depósito 0) a j es c_{ij}, $i, j \in [0..n]$.
- El tiempo de viaje desde el cliente i a j es t_{ij}, $i, j \in [0..n]$.
- El tiempo de descarga al cliente i es u_i , $i \in [1..n]$;
- La ventana de tiempo del cliente i es $[e_i, l_i]$; $i \in [1..n]$;

Las variables de decisión son:

- Las variables binarias x_{ij}^k, $i, j \in [1..n]$, $k \in [1..m]$, donde $x_{ij}^k = 1$ si el vehículo k va de i a j y $x_{ij}^k = 0$ en otro caso.
- Las variables continuas r_i^k representando la carga del vehículo k cuando alcanza el cliente i. Si el vehículo k va del cliente i al cliente j ($x_{ij}^k = 1$) entonces $r_j^k = r_i^k - q_i$.
- Las variables continuas s_i^k que representan el tiempo en el que el vehículo k inicia el servicio a cada cliente i. Análogamente, si $x_{ij}^k = 1$ entonces $s_j^k = \text{máx}\{e_j, s_i^k + u_i + t_{ij}\}$.

En el modelo que proponemos, el QSVRPTW, introducimos un objetivo que evalúa la calidad del servicio, utilizando para ello el criterio, que el cliente desea ser atendido lo antes posible dentro de su ventana de tiempo. El objetivo es formulado como el tiempo total que llegan los vehículos antes de que cierre la ventana de tiempo de los clientes.

La formulación QSVRPTW con coeficientes difusos en las restricciones y en la función objetivo, afectadas por el tiempo de desplazamiento difuso es la siguiente:

$$\text{máx}\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n}(l_i - \tilde{s}_i^k)\} \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^k = 1, \;\; j \in [1..n] \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} x_{ji}^k = 1, \;\; j \in [1..n] \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij}^k = \sum_{i=0}^{n} x_{ji}^k = 1, \;\; j \in [1..n], k \in [1..m] \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{0i}^k = 1, \;\; k \in [1..m] \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^k = 1, \;\; k \in [1..m] \tag{6}$$

$$r_j^k - q_i - r_i^k \leq M(1 - x_{ij}^k), \;\; i \in [0..n], j \in [1..n], k \in [1..m] \tag{7}$$

$$r_0^k \leq Q_k, \;\; k \in [1..m] \tag{8}$$

$$\tilde{s}_i^k + u_i + \tilde{t}_{ij} \leq \tilde{s}_j^k + M(1 - x_{ij}^k), i, j \in [1..n], k \in [1..m] \tag{9}$$

$$\begin{array}{rl} e_i \leq \tilde{s}_i^k, & j \in [1..n], k \in [1..m] \\ \tilde{s}_i^k + u_i \leq l_i, & j \in [1..n], k \in [1..m]. \end{array} \tag{10}$$

La función objetivo (1) refleja el criterio de maximizar la calidad del servicio. Las restricciones (2) y (3) aseguran que cada cliente es servido exactamente una vez. Las restricciones (4) establecen las condiciones de conservación del flujo y la continuidad de la ruta. Las restricciones (5) y (6) establecen que cada vehículo parte del depósito y acaba en él, garantizando que ningún vehículo es usado más de una vez. El conjunto de restricciones (7), donde M es una constante suficientemente grande, establecen las relaciones entre las variables r_i^k para clientes consecutivos de cada ruta y las restricciones (8) garantizan que la carga de los vehículos no superan su capacidad. El conjunto de restricciones (9) utiliza M como una constante suficientemente grande para establecer las relaciones entre los tiempos de servicio para clientes consecutivos de cada ruta. Por último las restricciones (10) establecen que cada cliente tiene que ser servido respetando su ventana de tiempo. Nótese que en la formulación, los tiempos de viaje y los tiempos de servicio al cliente son cantidades imprecisas y denotadas $\tilde{t}_{ij}$ y $\tilde{s}_i^k$.

3 OPTIMIZACIÓN DIFUSA DEL QSVRPTW CON TIEMPOS DIFUSOS

En la sección anterior hemos formulado un modelo del problema QSVRPTW como un problema Programción Lineal Difusa (PLD) que tiene coeficientes difusos en las restricciones y en la función objetivo. En el modelo todas las restricciones (2–8) son precisas, salvo las restricciones afectadas por los tiempos de viaje, que contienen términos difusos (9) y (10). Esta restricciones dado que contienen cantidades difusas tienen que ser consideradas difusas también. El resto de cantidades crisp que incluyen pueden considerarse como un caso particular de números difusos.

La metodología propuesta consiste en primer lugar en resolver el problema de encontrar soluciones factibles, es decir resolver el modelo de optimización con coeficientes difusos en las restricciones y en segundo lugar, una vez obtenidas soluciones factibles, resolver el problema de optimización con coeficientes difusos en la función objetivo.

Así, desde un punto de vista operativo procedemos del modo siguiente. Una solución factible es dada por una asignación de valores a las variables x_{ij}^k que satisface las restricciones (2–8), que caracterizan el problema de rutas con capacidades, el VRP. Resta por comprobar que se satisfacen las restricciones (9) y (10), específicas del VRPTW. Con objeto de evitar el inconveniente de considerar las $\tilde{s}_i^k$ como variables del modelo de optimización, lo que presenta dificultades formales importantes por su naturaleza difusa, operamos de la siguiente forma con cada solución del VRP para determinar su factibilidad en VRPTW.

Para cada vehículo k, los tiempos de servicio $\tilde{s}_i^k$ en los que sirven a los clientes que visita se obtienen de forma recurrente. Primero se toma $\tilde{s}_0^k = 0$ y $i = 0$. Una vez calculado $\tilde{s}_i^k$, si $x_{ij}^k = 1$ entonces

$$\tilde{s}_j^k = e_j \vee \tilde{s}_i^k + u_i + \tilde{t}_{ij} \tag{11}$$

y se toma $i = j$ para calcular el siguiente $\tilde{s}_i^k$. Esta operación se repite hasta que i vuelva a ser 0. La fórmula recurrente (11) tiene la siguiente justificación: si el vehículo llega al cliente antes de que pueda ser servido en su ventana de tiempo, espera hasta que su ventana de tiempo se inicie. De esta forma se cumplirá siempre la primera parte de la restricción (10) correspondiente al limite inferior de las ventanas de tiempo. Por tanto, la solución es factible si los tiempos de servicio calculados de esta forma permiten atender al cliente dentro de la correspondiente ventana de tiempo. Así es necesario comprobar, para cada cliente i, si

$$\tilde{s}_i^k + u_i \leq l_i \tag{12}$$

Si consideramos que los tiempos de viaje $\tilde{t}_{ij}$ son números difusos triangulares, los tiempos de servicio $\tilde{s}_i^k$ obtenidos por la aplicación de (11) son también números difusos triangulares. Los tiempos de descarga u_i y los tiempos de inicio e_i y final l_i de las ventanas de tiempo de los clientes son números reales no difusos (*crisp*). En las fórmulas (11) y las comparaciones (15) se deben considerar como casos particulares de números difusos triangulares en los que los números que los definen son iguales.

Aplicando la aproximación propuesta en [3] para el modelo de restricciones con coeficientes difusos, un problema de Optimización Difusa formulado de la siguiente forma:

$$\text{máx}\{z = cx/A^f x \leq_f b^f, x \geq 0\}. \quad (13)$$

se resuelve, sustituyendo el conjunto de restricciones en (13) por un conjunto difuso convexo, obteniéndose un nuevo modelo como sigue:

$$\text{máx}\{z = cx/a_i^f x \leq_g b_i^f + \tau_i^f(1-\alpha), i = 1,..,m, \\ x \geq 0, \alpha \in [0,1]\}. \quad (14)$$

donde el símbolo $\leq_g$ establece una relación de comparación entre números difusos.

Aplicando este enfoque, nuestro modelo se reduce a evaluar si los límites superiores de la ventana de tiempo de los clientes se satisfacen, es decir comprobar:

$$\tilde{s}_i^k + u_i^k \leq_g l_i + \tilde{\tau}_i(1-\alpha),\ i \in [1..n] \quad (15)$$

donde $\tilde{\tau}_i$ es la tolerancia difusa del decisor para la ventana de tiempo del cliente i. Tanto u_i como l_i son considerados casos particulares de difusos triangulares con valores iguales. La relación $\leq_g$ representa la comparación de números triangulares difusos, utilizando una función ordenadora g para tal fin. Para comprobar la factibilidad de las soluciones, comprobamos que se cumple las restricciones (15)y para ello simplemente utilizamos alguno de los métodos de comparación de números difusos, de los cuales existe una larga lista que proporcionan diferentes ordenaciones de los mismos. En la experimentación propuesta utilizamos, como función ordenadora, el Tercer Índice de Yager, donde si $\tilde{u} = Tr(u_1,u_2,u_3)$ es un número triangular, $g(\tilde{u}) = u_1 + 2u_2 + u_3$.

Téngase en cuenta que al utilizar la suma de número difusos triangulares, que es un número difuso triangular, podemos obtener como resultado acumulativo el incremento de la imprecisión. Esta imprecisión puede llegar a tener una dimensión inviable desde el punto de vista práctico. Para evitar este resultado durante el proceso de adicción para obtener los tiempos de servicio, acotamos dicha imprecisión en una cantidad razonable propuesta por el decisor.

Una vez resuelto este modelo el cual permiten encontrar soluciones factibles, tenemos que resolver un modelo en el que la función objetivo tiene coeficientes difusos. En particular dado que los tiempos de viaje t_{ij}^k son números triangulares difusos, los tiempos de servicio s_i^k también lo son. El símbolo Σ en la función objetivo hace referencia en este caso a la suma de números difusos y l_i lo podemos considerar un caso particular de número triangular difuso. Mediante la aproximación propuesta en [12] este modelo difuso puede ser transformado en un simple modelo auxiliar. Esta aproximación hace uso de una función de ordenación g de números difusos, denotada por $\leq_g$) que facilita minimizar la función objetivo, es decir:

$$\text{máx}\{z = g(c^f x)/Ax \leq b, x \geq 0\}. \quad (16)$$

Por tanto para cada solución factible, existe un valor difuso el cual es obtenido aplicando la función objetivo. En orden a obtener la solución optimal, hacemos uso de algún método de ordenación de los números difusos obtenidos desde la función objetivo. Así de acuerdo a la función ordenadora g utilizada, diferentes modelos auxiliares para resolver 16 pueden ser obtenidos, en nuestro caso el Tercer Índice de Yager. Aplicando esta aproximación nuestro modelo QSVRPTW puede ser resuelto, sustituyendo (1) por:

$$\text{máx}\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n}(g(l_i) - g(\tilde{s}_i^k)\}. \quad (17)$$

4 METAHEURÍSTICA JFO

En este artículo utilizamos una versión discreta de la PSO, denominada JFO para encontrar soluciones, utilizando la metodología propuesta en la sección anterior. El algoritmo utilizado que representa esta versión es el que se describe en la Figura 1 (más detalles en [1]).

La posición de cada partícula del enjambre es una solución del problema. La solución inicial es generada con un algoritmo constructivo mejorado, que inserta los clientes en la mejor posición de la ruta hasta completar la capacidad del vehículo o no se cumpla las restricciones de ventana de tiempo.

Las partículas del enjambre se mueven por medio de cuatro tipo de movimientos, dependiendo de qué partícula actúa como atractora en cada caso. Para seleccionar cual de los cuatro movimientos aplicar a cada partícula, se divide el intervalo [0,1] en cuatro sub-intervalos c_i, $i = 1,2,3,4$, de tamaño variable igual a la probabilidad asignada por el usuario a cada movimiento. Se genera un número aleatorio ξ con distribución $U[0,1]$ y la partícula se moverá a una nueva posición dependiendo del valor de ξ, como sigue:

- Si $\xi \in c_1$, no existe partícula atractora y la partícu-

JFO (PSO discreto):

1. Inicalizar S:
   - Obtener posición aleatoria $x_i, \forall i \in S$.
   - Obtener los valores iniciales de b_i, g_i y g^*.
2. Repetir hasta $CriterioParada()$
   (a) Para cada $i \in S$:
   $\xi \in rand[0,1]$
   $\xi \in c_1$ entonces $x_i \leftarrow RandomMove(x_i)$
   $\xi \in c_2$ entonces $x_i \leftarrow SocialMove(x_i, g_i)$
   $\xi \in c_3$ entonces $x_i \leftarrow PropioMove(x_i, b_i)$
   $\xi \in c_4$ entonces $x_i \leftarrow GlobalMove(x_i, g^*)$

   (b) Para cada $i \in S$: Actualizar
   Si $F(x_i) < F(b_i)$ entonces $b_i \leftarrow x_i$ // Mejor Propio
   $\forall i \in N_j$: Si $F(x_i) < F(g_j)$ entonces $g_j \leftarrow x_i$ // Mejor entorno
   Si $F(x_i) < F(g^*)$ entonces $g^* \leftarrow x_i$// Mejor Global

Figura 1: Jumping Discrete PSO

la realiza un movimiento aleatorio con respecto a su posición actual. Este *movimiento aleatorio* tiene como finalidad explorar el área alrededor de la posición de la partícula. Se hace uso del $\lambda - intercambio$ (con $\lambda = 1$) que intercambia la posición de dos clientes en diferentes sub-rutas.

- Si $\xi \in c_2$, la partícula se mueve hacia la mejor posición alcanzada por las partículas de su vecindario, denotada g_i. Este *movimiento social* aplica un procedimiento de intercambio de sub-rutas, que consiste en copiar de manera aleatoria una sub-ruta de la partícula atractora a la seguidora, eliminando los clientes de la partícula seguidora que se encuentran en la sub-ruta copiada.

- Si $\xi \in c_3$, el movimiento se basa en la mejor posición encontrada hasta el momento para la partícula actual, denotada b_i. La partícula actual en su posición intercambia una sub-ruta con la mejor posición encontrada hasta ese momentos. Este *movimiento cognitivo* ayuda a la partícula a explorar estructuras similares a ella misma en su mejor posición en beneficio de mejorar su posición actual.

- Si $\xi \in c_4$, la partícula atractora es la mejor posición que globalmente ha tenido el enjambre hasta el momento, denotada g^*. Se realiza así mediante un procedimiento de intercambio de sub-rutas, un intercambio entre la mejor partícula y la actual. Este *movimiento global* utiliza parte de la mejor partícula encontrada hasta el momento para diseñar mejores soluciones.

Además en el procedimiento propuesto, después de encontrar una nueva solución, se aplica una búsqueda local para mejorar la calidad de la solución encontrada.

5 EXPERIMENTACIÓN

Esta sección describe los resultados obtenidos en la experimentación computacional realizada. La finalidad de la experimentación ha sido evaluar la aproximación metodológica de la Soft Computing propuesta para resolver el QSVRPTW.

Para la experimentación hemos utilizado una instancia real de una empresa de distribución de mercancías en Canarias. En concreto utilizamos una instancia de 71 clientes correspondiente a los clientes a servir la demanda en un día específico. Estas instancias contienen datos imprecisos de los tiempos de desplazamiento facilitados por los propios conductores de los vehículos. En el modelo auxiliar que resuelve el modelo con coeficientes difusos en las restricciones hemos utilizado un nivel de tolerancia de 900 segundos (15 minutos) y esta misma cantidad es la utilizada para acotar la impresición en el cálculo de los tiempos de servicio. Los resultados experimentales han sido obtenidos ejecutando la metodología propuesta con un PC con procesador Intel CORE 2 Duo (2.26GHz) y 4GB de memoria RAM.

Se han utilizado en la JFO un tamaño de enjambre de 50 partículas y 10 para el vecindario. Para dada una de los resultados obtenidos se han llevado a cabo 50 generaciones. Utilizamos una combinación de los valores de $c_i = 20, 20, 30, 30$ que representan el peso de los cuatro tipos de movimientos (aleatorio, cognitivo, social y global) dándole un mayor peso a los movimientos social y global. La Tabla 1 contiene los mejores resultados obtenidos para cada valor α. Junto con los valores del objetivo de calidad del servicio, figuran los valores medios para este objetivo sobre el total de iteraciones, y de esta mejor solución para el objetivo de calidad, el número de rutas o vehículos y la distancia total recorrida por los vehículos con esta solución. Algunas consecuencias que podemos observar son: la obtención de una variedad de soluciones diferentes para cada valor de α, con la experimentación realizada la mejor solución es obtenida con la menor toleracia y las mejores soluciones en el objetivo de calidad obtienen distancia mayores.

En la Figura 2. se muestra la evolución de la función objetivo, de las mejores soluciones encontradas en cada iteración, para cada uno de los valores de α.

Tabla 1: Resultados obtenidos

Valor α	Objetivo	Media	NRutas	Distancia
$\alpha = 0.0$	5398220	4825165	10	873,3
$\alpha = 0.4$	5408480	4797977	10	898,4
$\alpha = 0.6$	5365130	4801989	10	771,0
$\alpha = 1.0$	5452650	4844715	10	841,1

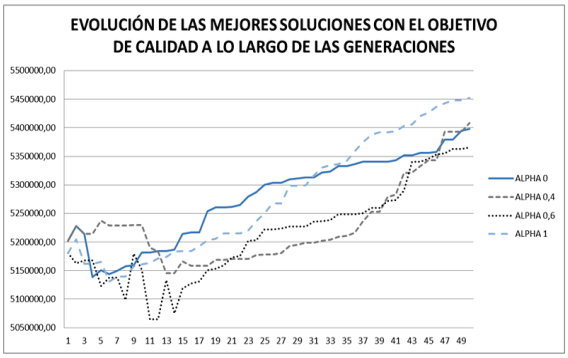


Figura 2: Evolución del objetivo de calidad

6 CONCLUSIONES

En esta investigación, presentamas una aproximación de optimización difusa para abordar un nuevo modelo del VRPTW cuando los tiempos de desplazamiento son difusos. Este nuevo modelo QSVRPTW utiliza en su objetivo el criterio de lograr la máxima satisfacción de los clientes asociada a que los vehículos alcancen y sirvan al cliente lo antes posible dentro de su ventana de tiempo. Para resolver este problema hemos utilizado una metaheurística para problemas discretos, basada en el PSO, el JFO.

La experimentación computacional confirma la aproximación de Soft Computing propuesta como viable para resolver este nuevo modelo. Los resultados experimentales revelan que el procedimiento propuesto ayuda a resolver estos modelos con ventanas de tiempo y objetivos centrados en la calidad del servicio. Aplicando la metodología propuesta se obtiene un conjunto de soluciones diferentes en consonancia con la condición de soluciones difusas. Futuros trabajos serán, ampliar la experimentación con otras instancias y generaciones para estudiar el comportamiento de la aproximación propuesta, incorporando algunas mejoras en la metaheurística implementada, evaluar otras posibles formulaciones del objetivo y estudiar el modelo multiobjetivo.

Referencias

[1] S. Consoli and J.A. Moreno-Perez. and K. Darby-Dowman and N. Mladenovic. Discrete Particle Swarm Optimization for the minimum labelling Steiner tree problem. *Natural Computing*, 9 (1), pp. 29-46, 2010.

[2] A. Corberan, E. Fernández and M. Laguna. Heuristic solutions to the problem of routing school buses with multiple objectives. *Journal Operational Research Society*, 53 (4), pp. 427-435, 2002.

[3] M. Delgado, J.L. Verdegay and M.A. Vila. A general model for fuzzy linear programming. *Control and Cybernet*, 16 (2), pp. 113-121, 1989.

[4] J. Jia, N. Liu and R.Wang. Genetic algorithm for fuzzy logistics distribution vehicle routing problem. *In: Proceeding International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics*, pp. 1427-1432, 2008.

[5] R. Jothi and B. Raghavachari. Approximating the k-traveling repairman problem with repairtimes. *Journal of Discrete Algorithms*, 5 (2), pp. 293-303, 2007.

[6] C-S. Liu and M-Y. Lai. The vehicle routing problem with uncertain demand at nodes. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 5 (4), pp. 517-524, 2009.

[7] P. Lucic and D. Teodorovic. Vehicle routing problem with uncertain demand at nodes: The Bee System and fuzzy logic Approach. En: J. L. Verdegay (Eds.)*Fuzzy Sets Based Heuristics for Optimization*,126, pp. 67-82, Springer Verlag 2003.

[8] J.A. Moreno-Perez, J.P. Castro-Gutierrez, F.J. Martinez-Garcia, B. Melian, J.M. Moreno-Vega and J. Ramos. Discrete Particle Swarm Optimization for the p-median problem. *In: Proceedings of the 7th Metaheuristics International Conference*, 2007.

[9] S. U. Ngueveu, C. Prins and R. Wolfler-Calvo. An effective memetic algorithm for the cumulative capacitated vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 37 (11), pp. 1877-1885, 2010.

[10] J. Tang, Z. Pan, R. Fung and H. Lau. Vehicle Routing Problem with Fuzzy Time Windows. *Fuzzy Sets and Systems*, 160, pp. 683-695, 2009.

[11] P. Toth, D.Vigo. The vehicle routing problem. *Monographs on Discrete Mathematics and Applications*, Vol. 9, SIAM, 2002.

[12] J.L. Verdegay. Fuzzy optimization: models, methods and perspectives. *6thIFSA-95 World Congress*, pp. 39-71, 1995.

[13] Y. Zheng, B. Liu. Fuzzy Vehicle Routing Model with Credibility Measure and its Hybrid Intelligent Algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 176(2), pp. 673-683, 2006.

Modelos fuzzy para la selección de carteras socialmente responsables

Clara Calvo, **Carlos Ivorra**, **Vicente Liern**

Dep. de Matemáticas para la Economía y la Empresa. Universitat de València. Av. Tarongers s/n, 46022-Valencia,
clara.calvo@uv.es, carlos.ivorra@uv.es, vicente.liern@uv.es

Resumen

Presentamos un modelo fuzzy de selección de carteras en el que a los objetivos financieros de maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo se añade un tercer objetivo sobre responsabilidad social. La característica principal es que el proceso de selección no descarta inversiones buenas desde el punto de vista estrictamente financiero, de modo que el inversor es siempre consciente de aquello a lo que renuncia por favorecer el objetivo de responsabilidad social. Para ilustrar el método mostramos un ejemplo sencillo con fondos de inversión resuelto con métodos exactos de optimización.

Palabras Clave: Selección de carteras, responsabilidad social, optimización fuzzy.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha aumentado notablemente el interés por introducir criterios de responsabilidad social, RS, en las inversiones [1, 2, 8, 14]. Esto significa no atender únicamente a los objetivos financieros tradicionales de rentabilidad y riesgo de las inversiones[10, 12, 13], sino también a criterios éticos y sociales referentes al respeto al medio ambiente, al gobierno corporativo, a la transparencia en la información, etc. [17].

Las técnicas habituales para incorporar estos nuevos objetivos consisten en introducir a los modelos clásicos nuevas restricciones, nuevos objetivos ponderados adecuadamente con los tradicionales, o incluso emplear métodos interactivos que van obteniendo soluciones intermedias en las que se mejora uno u otro objetivo según las preferencias del inversor [1, 2]. Todos estos métodos tienen en común que, de un modo u otro, descartan soluciones sin que el inversor sea realmente consciente de cuál es el coste de fomentar unos objetivos frente a otros.

Nuestra propuesta permite al inversor elegir hasta qué punto está dispuesto a alejarse de la frontera eficiente para mejorar la responsabilidad social de su inversión. También hay que tener presente que la valoración de la RS de una inversión es un problema en sí mismo, debido a que, aun partiendo de un buen conocimiento de la naturaleza y características de las inversiones, hay una gran componente subjetiva en la valoración de los aspectos que deben ser más destacados en la medida de la RS de una inversión. Por ello, en este trabajo aplicamos modelos de decisión basados en soft computing en un doble sentido: para reflejar las preferencias del inversor respecto a lo que considera RS, así como a las referentes al peso que se quiere dar a la RS frente a los objetivos financieros. Más aún, la realidad es que en este contexto no puede suponerse que el inversor parte de unos datos objetivos a la hora de valorar la RS, sino que también hay una componente de la valoración, que debe ser realizada por expertos, en la que también es natural aplicar técnicas fuzzy.

El método que presentamos está basado en el modelo clásico de Markowitz [12, 13] al que hemos añadido restricciones duras de diversificación y en el que los aspectos fuzzy se introducen combinando técnicas fuzzy de optimización y de ordenaciones de conjuntos fuzzy valorados con intervalos [3, 5, 7].

2 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

Nuestro punto de partida será el modelo de rentabilidad-riesgo de Markowitz [12, 13] al que le hemos añadido restricciones de cardinalidad y de semicontinuidad en el modelo original. Las de cardinalidad imponen cotas inferiores y superiores al número de activos que forman la cartera y las de semicontinuidad que el peso de los activos que realmente aparecen en la cartera permanecen en cierto intervalo. Así, se tiene el modelo siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{CP}_r) & \text{Min.} & x^t V x \\
& \text{s.t.} & ex \geq r \\
& & 1x = 1 \\
& & m \leq \sum_i y_i \leq M \\
& & l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i, \qquad i = 1,\ldots,N \\
& & x_i \geq 0,\ y_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,N
\end{array}
$$

donde V es la matriz de varianzas-covarianzas, e es el vector de rentabilidades esperadas, las variables x_i representan el peso de cada activo en la cartera y la variable binaria y_i toma el valor 1 si el activo i-ésimo aparece en la cartera. Las constantes m y M representan número mínimo y máximo de activos de la cartera y $[l_i, u_i]$ el intervalo fuera del cuál no se debe invertir en el activo x_i.

Recordamos que la frontera eficiente del problema de selección de carteras es el conjunto de pares eficientes (es decir no dominados) de rentailidades y riesgos. Esta frontera determina una función, $R_{ef}(r)$ (definida en intervalos adecuados) que proporciona el mínimo riesgo que podemos garantizar con una rentabilidad esperada de al menos r, es decir el valor óptimo de (CP_r).

En este trabajo, nuestro interés es construir un modelo fuzzy cuyo conjunto de soluciones posibles contenga carteras “poco alejadas" de un determinado punto de la frontera eficiente (obtenida con las preferencias iniciales de los inversores sobre el riesgo y el rendimiento) pero que sean "suficientemente buenas" para un segundo objetivo de responsabilidad social, SRI, que no aperece en el modelo (CP_r).

De acuerdo con las propuestas de Zimmermann [18] y Delgado, Verdegay y Vila [6]), para llegar a un problema de optimización fuzzy partimos de un conjunto factible fuzzy $\tilde{C}$ y de un conjunto fuzzy para el objetivo $\tilde{G}$, obteniendo un conjunto de decisión fuzzy $\tilde{D} = \tilde{C} \cap \tilde{G}$ (donde la función de pertenencia de la intersección normalmente viene dada por el mínimo entre las dos funciones de pertenencia).

En nuestro caso, tomamos como conjunto factible $\tilde{C}$ de (FP) un conjunto fuzzy cuyo conjunto de referencia es

$$
\begin{aligned}
X = \quad & \{(x,y) \in [0,1]^n \times \{0,1\}^n \mid \textstyle\sum_i x_i = 1, m \leq \sum_i y_i \leq M, \\
& l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i\},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

de manera que cada cartera parcialmente factible debe satisfacer las restricciones duras del problema. Las carteras totalmente factibles serán aquellas que el inversor está dispuesto a aceptar en cuanto a rentabilidad esperada y el riesgo. El grado de factibilidad (es decir, el grado de pertenencia del conjunto factible $\tilde{C}$) es cero cuando el par (r,R) de rentabilidad-riesgo resulta inaceptable. Nótese que no exigimos ni total o ni parcialmente que las carteras factibles sean eficientes. All contrario, una cartera no eficiente puede ser aceptable o incluso preferible para el inversor si es lo suficientemente buena con respecto a un objetivo de responsabilidad social.

El conjunto factible se expresa como $\tilde{C} = \tilde{C}_r \cap \tilde{C}_R$, donde las funciones de pertenencia $\tilde{C}_r$ y $\tilde{C}_R$ están dadas por:

$$
\mu_{\tilde{C}_r}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \geq r_0, \\ \frac{r - r_0 + s_r}{s_r} & \text{if } r_0 - s_r < r < r_0, \\ 0 & \text{if } r \leq r_0 - s_r, \end{cases} \tag{2}
$$

$$
\mu_{\tilde{C}_R}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } R \leq R_0, \\ \frac{R_0 + s_R - R}{s_R} & \text{if } R_0 < R < R_0 + s_R, \\ 0 & \text{if } R \geq R_0 + s_R, \end{cases} \tag{3}
$$

donde r y R son la rentabilidad y el riesgo esperados para la cartera (x,y) y los valores r_0, R_0, s_r y s_R están determinados por las preferencias del decisor (r_0 y R_0 son completamente aceptables para el decisor, mientras que s_r y s_R representa las tolerancias que estaría dispuesto a aceptar).

Definimos un conjunto fuzzy para el objetivo $\tilde{G}$ a partir de dos conjuntos fuzzy $\tilde{E}$ y $\tilde{S}$, el primero representa las carteras “suficientemente eficientes " y el segundo las carteras “suficientemente resposables" (siempre de acuerdo con las preferencias del inversor). El conjunto $\tilde{E}$ expresará lo que estamos perdiendo al aceptar una cartera no eficiente, por lo tanto, las carteras eficientes serán ahora las carteras totalmente eficientes, es decir, las que tienen grado de pertenencia de $\tilde{E}$ igual a 1.

Primero definimos la eficiencia desde el punto de vista de la rentabilidad, $\tilde{E}$, mediante dos conjuntos fuzzy, $\tilde{E}_r$ y $\tilde{E}_R$.

$$
\mu_{\tilde{E}_r}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{r_{\mathrm{ef}}(R) - r}{t_r} & \text{if } r \geq r_{ef}(R) - t_r, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{4}
$$

$$
\mu_{\tilde{E}_R}(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{R - R_{\mathrm{ef}}(r)}{t_R} & \text{if } R \leq R_{ef}(r) + t_R, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{5}
$$

donde t_r y t_R son tolerancias para la rentabilidad y el riesgo determinadas por el inversor. Entonces, definimos $\tilde{E} = \tilde{E}_r \cap \tilde{E}_R$, donde la función de pertenencia se define como $\mu_{\tilde{E}}(x,y) = \mu_{\tilde{E}_r}(x,y) \cap \mu_{\tilde{E}_R}(x,y)$.

Para introducir el objetivo de responsabilidad social, aceptamos que está dado por un conjunto fuzzy $\tilde{S}$, cuyo grado de pertenencia indica “lo responsable" que es una cartera. Entonces, el objetivo fuzzy de nuestro problema se expresa como

$$
\mu_{\tilde{G}}(x,y) = w\mu_{\tilde{S}}(x,y) + (1-w)\mu_{\tilde{E}}(x,y), \tag{6}
$$

donde el peso w indica la importancia que se le concede a la responsabilidad social de la cartera. Con esto, el problema fuzzy de selección de carteras que tiene en cuenta ambos objetivos es

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{FP}) & \text{Max.} & \min\{\mu_{\tilde{C}}(x,y), w\mu_{\tilde{S}}(x,y) + (1-w)\mu_{\tilde{E}}(x,y)\} \\
& \text{s.t.} & 1x = 1 \\
& & m \leq \sum_i y_i \leq M \\
& & l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i, \qquad i = 1,\ldots,N \\
& & x_i \geq 0,\ y_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,N
\end{array}
$$

3 VALORACIÓN DE LA RESPONSABILIDAD SOCIAL DE LA INVERSIÓN

Las principales herramientas de Inversión Socialmente Responsable, en la actualidad y en la mayoría de países, son los fondos de inversión. La principal estrategia de inversión de los fondos socialmente responsables es el denominado *filtrado*, que puede ser positivo y/o negativo. Consiste en la evaluación de los fondos basándose en criterios sociales, medioambientales, de gobierno corporativo e incluso éticos. El filtrado positivo supone la inversión en empresas que, siendo ante todo las más rentables, realicen contribuciones positivas útiles para la sociedad. Por otro lado, el filtrado negativo evita la inversión en aquellos productos o empresas cuyas prácticas son perjudiciales para los individuos, comunidades y/o el medio ambiente (http://www.eiris.org).

El concepto de responsabilidad social de los fondos de inversión está pues estrechamente ligado al concepto de la Responsabilidad Social Corporativa de las empresas en las que invierten los fondos. Sin embargo, y a pesar de la abundancia de la investigación en torno a este concepto [1, 14], es un concepto dinámico e impreciso que no cuenta con una definición universalmente aceptada. Consecuentemente, tampoco hay un consenso en la forma de medir el desempeño social de las empresas. Académicos y profesionales utilizan un amplio conjunto de indicadores de responsabilidad social tanto cuantitativos como cualitativos [1].

Distintas agencias de rating independientes han intentado dar solución al problema de la diversidad de indicadores de responsabilidad social tratando de proporcionar información transparente y fidedigna sobre el desempeño social, laboral y medioambiental de las empresas de todo el mundo. Algunos ejemplos son KLD, Ethibel, Vigeo, Innovest, Oekom Research, SAM, Jantzi, , EthicScan o EIRIS.

Actualmente, la principal fuente de información en este sentido es MSCI ESG STATS (conocida como KLD Research & Analytics Inc.) [11]. Esta base de datos evalúa con variables binarias a las empresas en 7 dimensiones sociales de naturaleza incierta, ambigua y/o imprecisa de los criterios responsabilidad. Esta característica hace que su evaluación sea complicada, de ahí que los conjuntos fuzzy proporcionen una herramienta muy útil que, además, permite incorporar conocimiento de expertos [15].

En este trabajo mediremos la responsabilidad social de los fondos (en concreto la responsabilidad medioambiental) en dos niveles: en el nivel de la empresa (Responsabilidad Social Corporativa) y en el nivel del fondo (calidad de la gestión socialmente responsable) [14].

3.1 Descripción del método

Consideramos n fondos $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ y cada uno de ellos, F_i, está formado por varias empresas $\{f_k^i\}_{k=1}^l$. Todas las empresas se han evaluado en m criterios medioambientales $\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$. Como los criterios se describen de forma imprecisa y en términos lingüísticos, el decisor tiene dificultades para evaluarlos y muchas veces debe basar su valoración en criterios subjetivos y la opinión de expertos. Una forma de facilitar la baremación es darla con intervalos, dando lugar así a funciones de pertenencia intervalares.

Esta generalización de los conjuntos fuzzy, conocida como conjuntos fuzzy valorados con intervalos, fue introducida por R. Sambuc en 1975 [16] y puede expresarse [3] de la forma siguiente:

Definición 1 Dado un conjunto de referencia X, un conjunto fuzzy valorado con intervalos (IVFS) en X está dado por

$$\tilde{A}^{\Phi} = \left\{ \left(x,\ \mu_{\tilde{A}}^{\Phi}(x)\right),\ x \in X \right\}, \tag{7}$$

donde la función $\mu_{\tilde{A}}^{\Phi} : X \to D[0,1]$, dada por $\mu_{\tilde{A}}(x) = \left[a_x^L,\ a_x^U\right] \in D[0,1]$, define el grado de pertenencia de x y $D[0,1]$ representa el conjunto de todos los subintervalos cerrados de $[0,1]$.

Cuando el conjunto de referencia es finito, $X = \{c_1, c_2, ..., c_P\}$, los IVFS se pueden expresar como

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A}^{\Phi} & = & \left\{ \left(c_r,\ \mu_{\tilde{A}}(c_r)\right),\ 1 \le r \le P \right\} \\ & = & \left\{ \left(c_j,\ \left[a_r^L,\ a_r^U\right]\right),\ 1 \le r \le P \right\}. \end{array} \tag{8}$$

Si tomamos como conjunto de referencia el conjunto de los criterios de responsabilidad social $X = \{s_j\}_{j=1}^m$, al evaluar cada empresa $\{f_k^i\}_{k=1}^l$ con un intervalo en $[0,1]$ en cada criterio, se tienen los siguientes IVFS:

$$\tilde{s}_{kj}^{\Phi} = \left\{ (s_{kj}, [b_{kj}^L, b_{kj}^U]), 1 \le j \le m \right\}, \quad 1 \le k \le l, \tag{9}$$

donde $[b_{kj}^L, b_{kj}^U] \subseteq [0,1]$, representa el grado de pertenencia al criterio s_j de la empresa k-ésima.

Una vez evaluadas todas las empresas, necesitamos agregar la información teniendo en cuenta el peso de de cada empresa en el fondo F_i, es decir

$$[b_i^L, b_i^U] = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k^i [b_{kj}^L, b_{kj}^U], \quad 1 \le i \le n, \tag{10}$$

donde $\alpha_k^i \in [0,1]$ representa el peso de la empresa k en el fondo i.

El paso siguiente consiste en asignar un grado de verdad a la información de los gestores de los fondos (calidad de la descripción, existencia de análisis externo hecha por investigadores de Responsabilidad Social, auditorías externas periódicas, etc.) basándonos, normalmente en el juicio

de expertos:

$$\tilde{w}_i^{\Phi} = \left\{(s_{kj}, [b_{w_i}^L, b_{w_i}^U])\right\}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{11}$$

Estos pesos también son conjuntos discretos para cada fondo de inversión en los que los intervalos representan la función de pertenencia del peso del fondo considerado como un IVFS.

Una vez establecidos los pesos, el problema consiste en agregar esta información para construir una medida global de la responsabilidad social de cada fondo. Así, para cada F_i, definimos su grado de responsablidad medioambiental fuzzy, $\widetilde{ERD}_i$, como:

$$\widetilde{ERD}_i = \tilde{w}_i \tilde{s}_i, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{12}$$

y teniendo en cuenta (10) y (11), su función de pertenencia es

$$\begin{aligned} \mu_{\widetilde{ERD}_i}(F_i) &= [ERD_i^L, ERD_i^U] = [b_{w_i}^L, b_{w_i}^U] * [b_i^L, b_i^U] \\ &= [b_{w_i}^L b_i^L, b_{w_i}^U b_i^U], 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{13}$$

Finalmente, la forma con la que introduciremos el grado de responsabilidad medioambiental fuzzy de cada fondo en nuestra decisión será utilizando sus valores esperados [9]:

$$EV(\widetilde{ERD}_i) = \tfrac{1}{2}(ERD_i^L + ERD_i^U) = \tfrac{1}{2}(b_{w_i}^L b_i^L + b_{w_i}^U b_i^U) \quad 1 \leq i \leq n. \tag{14}$$

3.2 Apectos computacionales

Con el fin de ilustrar el procedimiento descrito, consideramos un conjunto formado por fondos de inversión en renta variable convencionales y fondos auto-denominados socialmente responsables. Los fondos de inversión autodenominados socialmente responsables (5 fondos) son una muestra de fondos que pertenecen al Social Investment Forum (SIF). Los fondos convencionales (5 fondos) representan una muestra de fondos de la base de datos de Morningstar Ltd.

Las evaluaciones fuzzy de los criterios de Responsabilidad Social Corporativa se han construido a partir de las puntuaciones crisp de la KLD e incorporando el conocimiento experto del analista. En este ejemplo, y con el fin de facilitar los cálculos, nos fijaremos sólo en la dimensión medioambiental aunque nuestro modelo permite incorporar todas las dimensiones de la responsabilidad social.

En la tabla 1 mostramos los criterios medioambientales utilizados por la KLD que, como se puede observar, resultan muy imprecisos (los expresamos con conjuntos fuzzy $\tilde{s}_i$). Para ello, en primer lugar se calcula el grado de responsabilidad corporativa medioambiental de todos los fondos. Nótese que, en última instancia, lo que diferencia a un fondo de inversión convencional de uno socialmente responsable, es únicamente la existencia de un compromiso explícito y público de inversión siguiendo un proceso de filtrado de empresas.

Tabla 1: Criterios medioambientales utilizados por la agencia KLD.

	Screen
$\tilde{s}_1$	Servicios y productos beneficiosos
$\tilde{s}_2$	Prevención de la contaminación
$\tilde{s}_3$	Reciclado
$\tilde{s}_4$	Uso de energías limpias
$\tilde{s}_5$	Sistemas de gestión
$\tilde{s}_6$	Otras fortalezas
$\tilde{s}_7$	Desechos peligrosos
$\tilde{s}_8$	Problemas de regulación
$\tilde{s}_9$	Productos químicos que dañan la capa de ozono
$\tilde{s}_{10}$	Emisiones contaminantes
$\tilde{s}_{11}$	Productos químicos agrícolas
$\tilde{s}_{12}$	Cambio climático
$\tilde{s}_{13}$	Otras debilidades

Fuente: KLD (2008)

El segundo paso consiste en la evaluación de la calidad de la información proporcionada por los gestores de los fondos y relativa al proceso de "filtrado". Hemos de tener en cuenta que los fondos convencionales no siguen ninguna política explícita de inversión socialmente responsable por lo que no llevan a cabo ningún filtro basado en criterios no financieros. Por este motivo, la evaluación de la calidad de esta información toma valor cero para estos fondos (ver tabla 2). De la información provista por los fondos de inversión y publicada en la página web del SIF (www.ussif.org) se obtienen las valoraciones difusas expertas que aparecen recogidas en la tabla 2.

La mayor parte de los fondos socialmente responsables estudiados justifican, en mayor o menor medida, sus decisiones de filtrado de empresas. Es interesante observar cómo en el caso de filtrado negativo la exclusión se produce de manera restringida, es decir, no excluyen totalmente inversiones en empresas relacionadas con ciertas actividades, sino solamente aquellas empresas que siendo menos rentables estén directamente involucradas en estas actividades controvertidas. Con respecto al proceso de investigación, casi todos los fondos confían en su propio equipo deanalistas a la hora de estudiar el comportamiento de las empresas desde un punto de vista de su Responsabilidad Social Corporativa. Aunque algunos fondos completan sus informes con bases de datos externos de agencias de calificación, muy pocos indican explícitamente el proceso y la metodología seguidos para el análisis de las empresas y ninguno de los considerados se somete a auditorías externas no financieras de manera periódica.

La tabla 2 muestra la evaluación de la responsabilidad medioambiental de los fondos considerados.

Tabla 2: Grado de responsabilidad medioambiental de los fondos.

SR	Fondo	$b^L_{s_i}$	$b^U_{s_i}$	$b^L_{w_i}$	$b^U_{w_i}$	ERD^L_i	ERD^U_i	$EV(ERD_i)$
Y	F1	0.3574	1.795	0.2	0.4	0.0715	0.6527	0.3621
Y	F2	0.295	1.6667	0.2	0.4	0.059	0.6061	0.3325
Y	F3	0.746	2.727	0.3	0.5	0.224	1.736	0.98
Y	F4	0.274	2.185	0.1	0.4	0.082	0.993	0.538
Y	F5	0.25	1.649	0.3	0.4	0.025	0.6	0.312
N	F6	0.224	1.692	0	0	0	0	0
N	F7	0.752	2.61	0	0	0	0	0
N	F8	0.249	1.952	0	0	0	0	0
N	F9	0.315	1.943	0	0	0	0	0
N	F10	0.339	1.995	0	0	0	0	0

4 EJEMPLO NUMÉRICO

Para comparar las soluciones que proporcionan el modelo fuzzy (FP) y el modelo de selección de carteras (CP_r), en esta sección analizamos una instancia pequeña del problema. Esto nos permite mostrar mucha más información que si trabajásemos un problema real. Para resolver una instancia mayor de (FP) podemos resolver el problema con cualquier procedimiento heurístico estándar capaz de abordar los problemas de selección de cartera (por ejemplo, algoritmos genéticos). La única dificultad que presenta evaluar la función objetivo de (FP) es calcular las parametrizaciones $R_{ef}(R)$ y $R_{ef}(r)$ de la frontera eficiente, pero en [4] ofrecemos un procedimiento para obtener una definición explícita de $R_{ef}(r)$ como una función cuadrática a trozos, cuya función inversa $r_{ef}(R)$ se puede deducir fácilmente.

Consideramos datos semanales desde 31-12-2006 hasta 31-12-2007 de los 10 fondos que aparecen el la tabla 3, entre los que hay 5 socialmente responsables y 5 que no lo son. Imponemos que la cartera contenga un mínimo de 3 y un máximo de 6 fondos y que la inversión en un fondo no tenga un peso inferior a 0.05. Además fijamos una cota superior de inversión en cada fondo socialmente responsable de 0.25 y de 0.15 para los que no lo son. Estos pesos permiten una inversión de hasta un 75% en fondos convencionales y hasta 100% en fondos socialmente responsables en cada cartera factible.

Conociendo la frontera eficiente, por ejemplo a partir de un gráfico, el inversor puede elegir la zona de riesgo-rentabilidad en la que está interesado, con lo que determina el conjunto $\tilde{C}$. En nuestro caso fijamos $(r_0, R_0) = (0.26, 1.98)$ con tolerancias $(s_r, s_R) = (0.01, 0.02)$.

Para definir el conjunto fuzzy $\tilde{E}$ de las carteras parcialmente eficientes, debemos fijar las tolerancias (t_r, T_r). En ausencia de un inversor concreto para adoptar un criterio más específico, una opción por defecto podría ser tomar como t_r la distancia máxima desde la frontera eficiente hasta el extremo de la región factible, y análogamente para T_r . En nuestro caso: $t_r = 0.2785 - 0.25 = 0.0285$ y $t_R = 2 - 1.9093 = 0.0907$.

Tabla 3: Diez fondos con su grado de responsabilidad social (SRD)

		SRD
1	Calvert Large Cap Growth A	0.3621
2	Calvert Social Investment Equity A	0.33256
3	Domini Social Equity I	0.98
4	MMA Praxis Core Stock Fund A	0.538
5	Neuberger Berman Socially Resp Inv	0.312
6	MassMutual Select Large Cap Value A	0
7	Westcore Blue Chip	0
8	Rydex Dynamic NASDAQ-100 2X Strategy H	0
9	Wells Fargo Advantage Growth I	0
10	Transamerica Focus P	0

Tabla 4: Las seis mejores soluciones para diferentes composiciones de las carteras

	N1	N2	N3	N4	N5	N6
x_1	0.23187	0.20585	0.25	0.16669	0.16803	0.25
x_2	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
x_3	0.21813	0	0.15	0	0	0.15
x_4	0	0.25	0.05	0.23331	0.23197	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0.05	0	0.05
x_7	0	0	0	0	0.05	0
x_8	0	0	0	0	0	0
x_9	0.1	0.14415	0.15	0.15	0.15	0.15
x_{10}	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\mu_{\tilde{D}}$	0.6262	0.6250	0.6185	0.5913	0.5818	0.5803
SRD	0.3808	0.2922	0.3476	0.2690	0.2688	0.3207
Rent.	0.268	0.264	0.272	0.26	0.26	0.273
Riesgo	1.98	1.931	1.973	1.924	1.926	1.978

Para determinar una instancia del problema (FP) completamente, debemos fijar el peso w para el SRD en la función objetivo. Vamos a dar un valor alto, $w = 0.8$ para favorecer la selección de carteras socialmente responsables.

La solución óptima de (FP) es la cartera N1 de la tabla 4, cuyo grado de pertenencia al conjunto de decisión es 0.6262. Con esta solución, el inversor obtiene un rendimiento esperado $r = 0.258$, con un riesgo $R = 1.98$ y un SRD de $s = 0.3808$. Es interesante comparar esta solución óptima con otras alternativas, así en la tabla 4 mostramos las seis carteras mejores que son óptimas con respecto a las carteras con la misma composición. Desde luego, esto no significa que N2 sea la segunda mejor solución de (FP), ya que hay un número infinito de carteras cerca de N1 que son mejores que N2. Lo que sí podemos asegurar es que, si buscamos una cartera con una composición diferente a la de N1, la mejor posibilidad es N2, y así sucesivamente.

La cartera N2 es completamente eficiente. Cuando se com-

para con N1, ésta tiene un rendimiento esperado similar, con un riesgo sustancialmente mejor, pero con un grado de responsabilidad social significativamente menor. Por el contrario, la cartera N3 es de nuevo una buena solución con respecto a la responsabilidad social (tiene le segundo mejor SRD), pero es peor que N1 debido a su SRD, y peor que N2, debido a su grado menor de la eficiencia.

En general, cuando se aplica un procedimiento heurístico para la resolución de una instancia mayor de (FP), es útil presentar no sólo la mejor cartera a lo largo del proceso de búsqueda, sino la mejor cartera encontrado para cada composición. Por lo tanto, al final podemos presentar al inversor no sólo la cartera óptima, sino una lista de alternativas para diferentes composiciones ordenadas *a priori* de acuerdo a sus propias preferencias. De esta manera, será el propio inversor quien tenga la última palabra.

Ahora está claro que, con esta propuesta, el inversor sabe exactamente lo que falta con respecto a los objetivos financieros al aceptar la solución de (FP), y si se considera excesivo el coste financiero, tiene la posibilidad de elegir una alternativa más conservadora en la lista propuesta, o incluso se puede resolver de nuevo (FP) con un valor más bajo para el peso del grado la responsabilidad social.

5 CONCLUSIONES

Hemos presentado un método que resulta adecuado como herramienta de decisión en cuanto que proporciona al inversor información adecuada para valorar las ventajas y desventajas de exigir un cierto nivel de responsabilidad social en sus inversiones, con criterios muy fieles a sus preferencias. Desde un punto de vista computacional, las técnicas empleadas pueden ser incorporadas fácilmente a cualquier procedimiento heurístico que no requiera calcular derivadas en las funciones objetivo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia e Innovación con los proyectos TIN2008-06872-C04-02 y ECO2011-28927.

Referencias

[1] Ballestero, E., Bravo, M., Pérez-Gladish, B., Arenas-Parra, M. y Pla-Santamaria, D. (2012). Socially responsible investment: A multicriteria approach to portfolio selection combining ethical and financial objectives. European Journal of Operational Research, 216, 487–494.

[2] Bilbao-Terol, A., Arenas-Parra, M. y Cañal, V. (2012b). A fuzzy multi-objective approach for sustainable investments. Expert Systems with Applications, 39, 10904-10915.

[3] Burillo, P. y Bustince, H. (1996). Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 78, 305 – 316.

[4] Calvo, C., Ivorra, C. y Liern, V. (2012). On the computation of the efficient frontier of the portfolio selection problem. Journal of Applied Mathematics, doi: 10.1155/2012/105616.

[5] Canós, L. y Liern, V. (2004). Some Fuzzy Models for Human Resources Management. International Journal of Technology, Policy and Management, 4, 291–308.

[6] Delgado, M., Verdegay, J.L. y Vila, M.A. (1994). Fuzzy linear programming: from classical methods to new applications, in M. Delgado, J. Kacprzyk, J.L. Verdegay and M.A. Vila (eds.) Fuzzy optimization: recent advances. Heidelberg: Physica Verlag.

[7] Gil-Aluja, J. (1998). The Interactive Management of Human Resources in Uncertainty. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[8] Hallerbach, W., Ning, H., Soppe, A. y Spronk, J. (2004). A framework for managing a portfolio of socially responsible investments. European Journal of Operational Research, 153, 517-529.

[9] Heilpern, S. (1992). The expected value of a fuzzy number. Fuzzy Sets and Systems, 47, 81–86.

[10] Jansen, D.W., Koedijk, K.G. y de Vries, C.G. (2000). Portfolio selection with limited downside risk. Journal of Empirical Finance, 7, 247–269.

[11] KLD (2008). Getting started with KLD STATS and ratings definitions" KLD Research & Analytics, Inc. (http://cdnete.lib.ncku.edu.tw/93cdnet/english/lib/Getting_Started_With_KLD_STATS.pdf)

[12] Markowitz, H.M. (1952). Portfolio selection, Journal of Finance, 7, 79–91.

[13] Markowitz, H.M. (1959). Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments. New York: John Wiley.

[14] Pérez-Gladish, B., Méndez-Rodríguez, P., M'Zali, B. y Lang, P. (2013). Mutual Funds Efficiency Measurement under Financial and Social Responsibility Criteria. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 20, 109-125.

[15] Pérez-Gladish, B., Méndez-Rodríguez, P., García-Bernabeu, A., & Balaguer, R. (2013). A Compromise Programming Model for Mutual Funds' Socially Responsible Portfolio Selection with Fuzzy Data. INFOR. Information Systems and Operational Research, (en prensa).

[16] Sambuc, R. (1975). Functions ϕ-flous. Aplication a l'aide au diagnostic en pathologie thyroïdienne, Ph. D. Thesis, Université de Marseille, France.

[17] SIF. (2012). 2012 Report on Socially Responsible Investing Trends in the United States. Social Investment Forum: Washington DC.

[18] Zimmermann, H. J. (1997). Fuzzy mathematical programming, in T. Gal and H.J. Greenberg (eds.) Advances in sensitivity analysis and parametric programming. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

BAGIM-OFP: PARTICIONAMIENTO FUZZY DE ATRIBUTOS DESDE DATOS IMPERFECTOS EN DATASETS CON POCOS EJEMPLOS

José Manuel Cadenas[1], **Maria del Carmen Garrido**[1], **Raquel Martínez**[1], **Antonio Muñoz-Ledesma**[2]

[1]*Dpto. de Ingeniería de la Información y las Comunicaciones, Facultad de Informática, Universidad de Murcia, España*, {jcadenas,carmengarrido,raquel.m.e}@um.es

[2]*Dpto. de Educación, Facultad de Educación, Universidad de Murcia, España*, amledesma@um.es

Resumen

Los datos numéricos son predominantes en aplicaciones del mundo real pero desde el punto de vista del usuario lo más útil es el uso de particiones de dichos valores numéricos. También, muchos de los métodos de aprendizaje supervisado se limitan a los atributos discretos y no pueden utilizar los datos numéricos directamente. Además, debemos tener en cuenta que debido a la capacidad y rapidez de almacenamiento de la tecnología, se suele recopilar mucha información relevante (número de atributos) con respecto al número de ejemplos y la información almacenada puede contener datos imperfectos o de baja calidad. Centrándonos en estos temas, hemos propuesto un método de particionamiento fuzzy a través de la introducción de un proceso de bagging y medidas para tratar con datos imperfectos.

Palabras Clave: Particionamiento Fuzzy, Bagging, Datos Imperfectos, Data Mining.

1 INTRODUCCIÓN

Los métodos de Data Mining se utilizan para comprender los patrones presentes en los datos y construir modelos con el propósito de predecir el comportamiento futuro. El problema de clasificación, como una forma de aprendizaje supervisado automático, tiene como objetivo inducir un modelo a partir de un dataset de entrenamiento etiquetado con el fin de predecir las etiquetas de la clase para nuevos ejemplos. Por tanto, el problema de clasificación implica la selección de un dataset de entrenamiento con etiquetas de clase, la construcción de un modelo, y la evaluación de la calidad de predicción de dicho modelo. Establecer una relación exacta entre la probabilidad de los errores de clasificación, el número de ejemplos de entrenamiento, el número de atributos y los verdaderos parámetros de las densidades condicionales para la clase es muy difícil, pero se han sugerido algunas directrices. Como regla general, se requiere un número mínimo de $10 \cdot |A| \cdot |C|$ ejemplos de entrenamiento para un problema de clasificación $|A|$-dimensional de $|C|$ clases, [12]. Siguiendo esta regla, cuando los datasets tienen pocos ejemplos con respecto al número de atributos (que denominaremos datasets de tamaño pequeño) debemos tener en cuenta en el algoritmo de aprendizaje alguna medida con el fin de construir mejores modelos para obtener una buena precisión en la clasificación, [10, 13].

Por otro lado, el particionamiento (discretización) de dominios continuos supone un problema importante en Data Mining y Soft Computing debido a que determinar estos intervalos puede afectar profundamente al rendimiento de las técnicas de clasificación, [8, 15]. Aunque hay una gran cantidad de métodos de particionamiento, la mayoría de ellos no considera que a veces la información disponible para la construcción de la partición no es tan precisa y exacta como se desea. En general, la información imperfecta (de baja calidad) aparece inevitablemente en dominios y situaciones reales. Cuando tenemos datos imperfectos, es necesario incorporar, en los métodos de particionamiento, diversos mecanismos para poder manipularlos, [2, 6, 16].

Este trabajo se centra en la clasificación supervisada y en los modelos que se obtienen a partir de datasets de tamaño pequeño y que puedan contener valores imperfectos. En concreto nos centramos en el particionamiento de atributos numéricos, paso crucial en los problemas de aprendizaje debido a que hay clasificadores que no pueden hacer frente a los atributos numéricos, o que presentan un mejor rendimiento cuando se particionan estos atributos. El particionamiento reduce el número de valores de atributos numéricos, lo que permite un aprendizaje más rápido y preciso [1]. Para ello, presentamos un método, que denmominamos BAGIM-OFP (Particionamiento Fuzzy Optimizado con BAGging a partir de datos IMperfectos), que obtiene particiones fuzzy a partir de información imperfecta y con datasets de tamaño pequeño. Este método incorpora la gestión de los valores imperfectos (valores intervalares, fuzzy

o missing) e introduce un control para los tratar los datasets de tamaño pequeño. Por tanto, el trabajo está organizado como sigue: en la Sección 2 describimos el método de particionamiento; en la Sección 3 presentamos algunos resultados experimentales para ilustrar el rendimiento del método; y por último, en la Sección 4 presentamos algunos comentarios y conclusiones.

2 EL MÉTODO BAGIM-OFP

El método BAGIM-OFP sigue los pasos de un proceso de particionamiento top-down [14]. El método está compuesto de dos fases: La primera utiliza un árbol de decisión fuzzy para encontrar los posibles puntos de corte para los distintos atributos. A partir de estos puntos de corte, la segunda fase optimiza y construye las particiones fuzzy finales. El objetivo de estas particiones es obtener un buena precisión en clasificación, teniendo en cuenta los datasets de tamaño pequeño y con valores imperfectos.

Las particiones fuzzy serán del tipo fuertes y completas (no habrá valores del dominio fuera de la partición y $\forall x \in \Omega_i$, $\sum_{f=1}^{F_i} \mu_{B_f}(x) = 1$ donde $B_1,\ldots,B_{F_i}$ son los F_i conjuntos fuzzy para la partición del atributo numérico i con dominio Ω_i y con funciones de pertenencia $\mu_{B_f}(x)$).

2.1 ELEMENTOS PARA EL TRATAMIENTO DE INFORMACIÓN IMPERFECTA

En esta subsección presentamos un conjunto de elementos que trabajan sobre información imperfecta y que son necesarias para diseñar el método BAGIM-OFP.

2.1.1 Grado de pertenencia a un nodo de un ábol

Cuando un ejemplo e_j pertenece únicamente a un conjunto o nodo N entonces lo denotaremos por $\chi_N(e_j) = 1$. Cuando este conjunto o nodo N se divide en subconjuntos al utilizar el atributo i como test, puede ocurrir que este valor se modifique en tres situaciones:

- Si el ejemplo e_j tiene un valor missing en el atributo i, este desciende a cada nodo hijo N_h, $h = 1,\ldots,H_i$ con un valor proporcional al peso de cada nodo hijo.
$$\chi_{N_h}(e_j) = \chi_N(e_j) \cdot \frac{T\chi_{N_h}}{T\chi_N}$$
donde $T\chi_N$ es la suma de los pesos de los ejemplos en nodo nodo N con valor conocido en el atributo i y $T\chi_{N_h}$ es la suma de los pesos de los ejemplos en cada nodo N_h con valor conocido en el atributo i.
- Si el ejemplo e_j se compara con los diferentes conjuntos fuzzy de las particiones cuando el test de un nodo N está basado en el atributo i el cual es continuo, este desciende a los nodos hijos con pertenencia mayor de 0 ($\mu_{B_f}(e_j) > 0; f = 1,\ldots,F_i$). El ejemplo puede descender como mucho a dos nodos hijos.
$$\chi_{N_h}(e_j) = \chi_N(e_j) \cdot \mu_{B_f}(e_j);\ \forall f|\ \mu_{B_f}(e_j) > 0;\ h = f$$

2.1.2 Función de similaridad

- Si el ejemplo e_j tiene un valor fuzzy o intervalar en el atributo i utilizado como test en el nodo N, este desciende a cada nodo hijo en función del grado de pertenencia del ejemplo a los conjunto fuzzy de las particiones. Para obtener este grado necesitamos extender la función que mide este grado de pertenencia con estos tipos de datos. Esta función la demoninaremos como $\mu_{simil}(e_j)$. En este caso,
$$\chi_{N_h}(e_j) = \chi_N(e_j) \cdot \mu_{simil}(e_j)$$

La función $\mu_{simil}(e_j)$ está definida como, para $f = 1,\ldots,F_i$:

$$\mu_{simil}(e_j) = \frac{\int(\text{mín}\{\mu_{e_j}(x), \mu_f(x)\})dx}{\sum_{f=1}^{F_i}\int(\text{mín}\{\mu_{e_j}(x), \mu_f(x)\})dx}$$

donde

- $\mu_{e_j}(x)$, función de pertenencia del valor fuzzy o intervalar del ejemplo e_j en el atributo i.
- $\mu_f(x)$, función de pertenencia del conjunto fuzzy de la partición del atributo i.
- F_i, cardinalidad de la partición del atributo i.

2.1.3 Ganancia de Información con información imperfecta

La ganancia de información se suele utilizar para medir la cantidad de información que se necesita para hacer una clasificación antes y despues de dividir un dataset según un atributo test. Si el nodo o conjunto N se divide en subconjuntos cuando hemos utilizado el atributo i como test, definimos la ganacia de información G_i^N como sigue:

$$G_i^N = I^N - I^{S_{V_i}^N}$$

donde:

- $I^N = -\sum_{k=1}^{|C|} \frac{P_k^N}{P^N} \cdot \log \frac{P_k^N}{P^N}$
  a) $P_k^N = \sum_{j=1}^{|E|} \chi_N(e_j) \cdot \mu_k(e_j)$, para cada clase $k = 1,\ldots,|C|$, siendo $\chi_N(e_j)$ el grado de pertenencia del ejemplo e_j al nodo N y $\mu_k(e_j)$ el grado de pertenencia del ejemplo e_j a la clase k.
  b) $P^N = \sum_{k=1}^{|C|} P_k^N$
- $I^{S_{V_i}^N} = I_1^{S_{V_i}^N} \cdot I_2^{S_{V_i}^N} \cdot I_3^{S_{V_i}^N}$
  a) $I_1^{S_{V_i}^N} = 1 - \frac{P^{N_{m_i}}}{P^N}$, donde $P^{N_{m_i}}$ es el peso de los ejemplos en N con valores missing en el atributo i.
  b) $I_2^{S_{V_i}^N} = \frac{1}{\sum_{h=1}^{H_i} P^{N_h}}$, donde H_i es el numero de descendientes de N cuando lo dividimos por el atributo i y P^{N_h} es el peso de los ejemplos asociados con cada uno de los descendientes.
  c) $I_3^{S_{V_i}^N} = \sum_{h=1}^{H_i} P^{N_h} \cdot I^{N_h}$.

2.1.4 Arbol de Decisión desde información imperfecta

Definimos un proceso de aprendizaje de un árbol de decisión fuzzy, ADF, a partir de un dataset E descrito por atributos que contengan valores crisp (nominales o continuos), intervalos y fuzzy, donde al menos un atributo nominal actue como clase. Este proceso se refleja en el Algoritmo 1.

Algorithm 1 - aprendiendo ADF

FuzzyTreeLearning($in: E, FP$; $out: Fuzzy\ Tree$)
begin

1. Inicializar:
   1.1 $M_N = A$ donde los atributos numéricos se particionan según la partición fuzzy FP
   1.2 $E_N = E$
2. Para cada ejemplo e_j, $\chi_{root}(e_j) = 1$ con $j = 1,\ldots,|E|$
3. Seleccionar un atributo de M_N como test en el nodo N:
   3.1 Para cada atributo i, calcular G_i^N, $i = 1,\ldots,|M_N|$
   3.2 Escoger el atributo i_{best} con G_i^N máxima
   3.3 Dividir N en H_i nodos de acuerdo al atributo i_{best}
4. Para cada nodo hijo N_h con $h = 1,\ldots,H_i$:
   4.1 $M_{N_h} = M_N - i_{best}$
   4.2 Obtener E_{N_h} desde E_N
   4.3 Ir al paso 3 si la condición de parada no se satisface en el nodo N_h haciendo $M_N = M_{N_h}$ y $E_N = E_{N_h}$

end

El criterio de parada está definido por la primera condición que se alcance: (a) nodo puro, (b) no hay más atributos para seleccionar, (c) alcanzar el número mínimo de ejemplos en el nodo.

Una vez aprendido el árbol fuzzy, éste se utiliza para inferir la clase desconocida de un nuevo ejemplo e. El proceso de inferencia es el siguiente:

- Inicialmente, el ejemplo e con valor $\chi_{root}(e) = 1$.
- Atravesar el árbol desde el nodo raiz hasta las hojas.
- Para cada hoja alcanzada calcular el soporte para cada clase. El soporte para una clase k en el nodo hoja N se obtiene mediante P_k^N.
- Finalmente, obtener la decisión del árbol, c, a partir de la información proporcionada por las hojas y por los valores χ.

2.2 CONSTRUYENDO BAGIM-OFP

Vamos a mostrar los detalles de las dos fases del método BAGIM-OFP. La Figura 1 muestra, a modo ilustrativo, el proceso completo del método.

2.2.1 Primera fase: puntos de corte

Esta primera fase utiliza un árbol de decisión fuzzy como método base para obtener los posibles puntos de corte los cuales nos servirán para construir la partición fuzzy. Los datasets de entrada para el árbol fuzzy serán los datasets

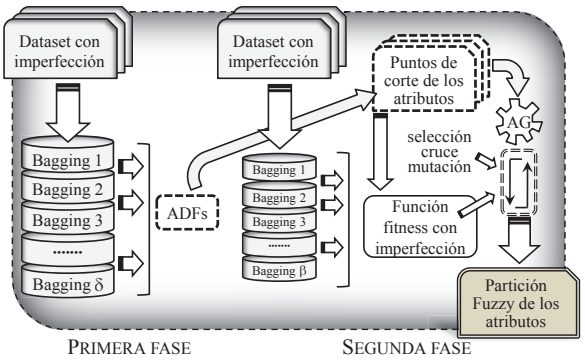


Figura 1: Método BAGIM-OFP

obtenidos mediante un proceso bagging ([4, 5]) sobre el dataset original.

Cuando el atributo es numérico y no está particionado, el proceso es similar al proceso de aprendizaje de un árbol de decisión C4.5. Los umbrales seleccionados en cada nodo del árbol para estos atributos serán los puntos de corte que delimitan los intervalos. Para otros tipos de atributos, el proceso seguido es el mismo que el presentado en el Algoritmo 1. Este algoritmo incorpora una cola de prioridad que se utiliza para ordenar los nodos del árbol, dependiendo del número de ejemplos. Esta cola nos permite analizar en primer lugar los nodos con más cantidad de ejemplos (contendrán más información sobre los puntos de corte).

El Algoritmo 2 describe todo el proceso de obtención de puntos de corte los cuales serán la entrada para la segunda fase.

2.2.2 Segunda fase: construyendo particiones fuzzy

La segunda fase utiliza un algoritmo genético (AG) para obtener los conjuntos fuzzy que componen la partición de los atributos no particionados. Estos algoritmos son muy potentes y robustos, y se suelen utilizar normalmente en problemas que no tienen técnicas especializadas o incluso en los problemas en los que existe una técnica, esta se combina con un AG para obtener algoritmos híbridos que mejoran los resultados [9].

El AG tomará de entrada los puntos de corte que se han obtenido en la primera fase, pero es importante mencionar que este algoritmo decidirá qué puntos de corte son más importantes para la construcción de las particiones fuzzy, por lo que es posible que muchos puntos de corte no se utilicen para obtener las particiones fuzzy óptimas. Si en la primera fase se obtienen F_i puntos de corte para el atributo i, el AG puede obtener como mucho $F_i + 1$ particiones fuzzy para este atributo. Sin embargo, si el AG considera que el atributo i no tiene mucha relevancia en el dataset, no se particiona este atributo.

Algorithm 2 - Obteniendo los puntos de corte

FindingCutPoints(*in* : E; *out* : *Cut points*)
begin

- Inicializar el conjunto de puntos de corte de cada atributo numérico k, $CPS_k = \emptyset$, y tamaño del bagging, δ.
- Para j=1 hasta δ
  1. Obtener el dataset BA_j de tamaño $|E|$ ejemplos seleccionados aleatoriamente con reemplazamiento desde E.
  2. Obtener el árbol de decisión fuzzy a partir de BA_j:
     - Comenzar con el nodo raiz, que se coloca en la cola de prioridad. Inicialmente el nodo raiz contiene el dataset BA_j con un peso inicial.
     - Extraer el primer nodo de la cola de prioridad.
     - Seleccionar el mejor atributo para dividir este nodo mediante la ganancia de información.
     - Introducir todos los descendientes en la cola. Si el atributo seleccionado es nominal, se genera un descendiente para cada valor posible de ese atributo. Si el atributo seleccionado (SA) es numérico entonces obtenemos el correspondiente corte $cut - point$ y se generan dos descendientes. En este caso, CPS_{SA} se calcula como: $CPS_{SA} = CPS_{SA} \bigcup \{cut - point\}$
     - Ir al paso 2 para continuar la construcción del árbol hasta que no queden nodos en la cola o hasta otra condición de parada.
- Devolver los conjuntos CPS_k para cada atributo numérico k.

end

Algorithm 3 - Función Fitness

Fitness(*in* : E, *out* : $FinalFitness$)
begin

- Inicializar el tamaño del bagging β y $ValueFitness = 0$
- Para j=1 to β
  1. Obtener el dataset BA_j mediante bagging.
  2. Para cada atributo $i = 1, \ldots, |A|$:
     2.1 Para cada conjunto $f = 1, \ldots, F_i$ del atributo i
     Para cada clase $k = 1, \ldots, |C|$, calcular
     $$P_{ifk} = \frac{\sum_{e \in BA_{jk}} \mu_{if}(e)}{\sum_{e \in BA_j} \mu_{if}(e)}$$
     2.2 Para cada clase $k = 1, \ldots, |C|$, calcular
     $$P_{ik} = \sum_{f=1}^{F_i} P_{ifk}$$
     2.3 Para cada $f = 1, \ldots, F_i$, calcular $P_{if} = \sum_{k=1}^{|C|} P_{ifk}$
     2.4 Para cada $f = 1, \ldots, F_i$, calcular
     $$I_{if} = \sum_{k=1}^{|C|} P_{ifk} \cdot \log_2 \frac{P_{ifk}}{P_{ik} \cdot P_{if}}$$
     2.5 Para cada $f = 1, \ldots, F_i$, calcular
     $$H_{if} = -\sum_{k=1}^{|C|} P_{ifk} \cdot \log_2 P_{ifk}$$
     2.6 Calcular I y H total del atributo i
     $I_i = \sum_{f=1}^{F_i} I_{if}$ y $H_i = \sum_{f=1}^{F_i} H_{if}$
  3. Calcular el fitness como:
     $$ValueFitness = ValueFitness + \frac{\sum_{i=1}^{|A|} I_i}{\sum_{i=1}^{|A|} H_i}$$
- $FinalFitness = ValueFitness/\beta$
- Devolver $FinalFitness$

end

Los elementos que componen este AG son los siguientes:

Codificación. Utilizamos una codificación real. El tamaño será la suma del número de puntos de corte proporcionados. Cada gen representa la cantidad que se suma y resta a cada punto de corte para formar la partición fuzzy. Además, a cada gen se le asocia un valor booleano que nos indica si este gen debe seleccionarse. El dominio de cada gen es un intervalo definido por $[0, min(\frac{p_r - p_{r-1}}{2}, \frac{p_{r+1} - p_r}{2})]$ donde p_r es el r-ésimo punto de corte del atributo i, excepto para el primero (p_1) y el último (p_u) punto de corte cuyos dominios son, respectivamente $[0, min(p_1, \frac{p_2 - p_1}{2}]$ y $[0, min(\frac{p_u - p_{u-1}}{2}, 1 - p_u]$.

Inicialización. En primer lugar, se determinan los genes activos. Después de calcular el dominio de cada gen, se inicializa aleatoriamente con un valor de su dominio.

Función Fitness. La función fitness de cada individuo se define a partir de la ganancia de información. El valor fitness de un individuo es un valor fitness medio obtenido a partir de diferentes bagging del dataset original. De esta manera, el algoritmo obtiene un función fitness más robusta y fiable para cada individuo debido a que el valor fitness medio nos proporcionará una visión más general a través de los diferentes subconjuntos de datos. El Algoritmo 3 describe la función fitness.

En el algoritmo, $\mu_{if}(\cdot)$ es la función de pertenencia correspondiente al conjunto fuzzy f del atributo i. Esta función fitness, basada en la ganancia de información, indica el grado de dependencia de los atributos con respecto a la clase, es decir, cómo son de discriminatorias las particiones de cada atributo. Si el valor fitness para cada individuo está cerca de cero, nos indica que los atributos son totalmente independientes de las clases, lo que significa que los conjuntos fuzzy obtenidos no discriminan clases. Por otra parte, cuanto más alejado de cero está el valor fitness nos indica que las particiones obtenidos son más aceptables y pueden discriminar las clases con una buena precisión.

Selección. La selección de un individuo se realiza mediante torneo, tomando subconjuntos de tamaño 2. Hay que tener en cuenta que el mejor individuo siempre será seleccionado mediante elitismo.

Cruce. Dos individuos de cruzan por un punto. No todos los cruces son válidos, ya que una de las restricciones impuestas es que el individuo no debe tener todos sus genes inactivos. Si al cruzar dos individuos se produce esta situación, el cruce no es válido, y los individuos permanecen en la población sin cruzarse. Si el cruce es válido, el dominio para cada gen se actualiza en los individuos generados.

Mutación. Cuando un gen se marca para mutarse, entonces tendremos dos opciones:

1. Activar o desactivar el gen y
2. Modificar la cantidad que se suma o resta.

El método aplica para la primera opción el 50 % de la veces y la segunda opción otro 50 % de las veces.

Parada. La condición de parada está determinada por el número de generaciones.

3 EXPERIMENTOS

Analizamos el rendimiento de BAGIM-OFP utilizando 8 datasets disponibles en el repositorio UCI, [11]. Estos datasets se utilizan en los artículos [8, 15], entre otros, obteniendo muy buenos resultados.

- **FSGA**: En [8], Choi et al. desarrollan una AG para obtener una partición fuzzy. La partición obtenida está representada por intervalos superpuestos. La función fitness es una red neuronal que clasifica un subconjunto del conjunto de datos. Para evaluar la partición obtenida, utilizan C4.5 (denotado por $\text{FSGA}_{C4.5}$).

- **NFDT**: En [15], Myles et al. proponen un método para construir árboles de decisión fuzzy. Durante este proceso, se genera una partición fuzzy de los atributos.

En esta sección comparamos los resultados de BAGIM-OFP con los obtenidos por los métodos propuestos en [8, 15], y además, los comparamos con los resultados de BAGIM-OFP pero aplicados a los datasets con imperfección. Para ello, primero, mostramos los detalles del marco experimental; segundo presentamos los datos utilizados y describimos la configuración de los experimentos; y finalmente, presentamos y analizamos los resultados obtenidos.

3.1 DATASETS Y CONFIGURACIÓN DE EXPERIMENTOS

Los datasets utilizados se resumen en la Tabla 1. En esta tabla se muestra el número de ejemplos ($|E|$), el número de atributos ($|A|$) y el número de clases ($|C|$). "Abr" nos indica la abreviatura del dataset que usaremos en los experimentos. Todos los atributos son numéricos expecto el dataset AUS que tiene seis atributos numéricos y ocho nominales. En la última columna "regla" mostramos si el dataset verifica la condición $|E| \geq 10 \cdot |A| \cdot |C|$. Además, y adicionalmente, a cada una de ellas se le ha incorporado un 5 % de valores fuzzy y 5 % de valores intervalares.

Tabla 1: Datasets

Datasets	Abr	|E|	|A|	|C|	regla
Australian credit	AUS	690	14	2	YES
Iris Plant	IRP	150	4	3	YES
Glass	GLA	214	9	7	NO
Ionosphere	ION	351	34	2	NO
Sonar	SON	208	60	2	NO
SPECTF	SPE	267	44	2	NO
Wis. D. Breast C.	WDB	569	31	2	NO
Wine	WIN	178	13	3	NO

Para evaluar las distintas particiones obtenidas por el método BAGIM-OFP utilizaremos el clasificador Fuzzy Random Forest (FRF) [3, 7] (que denotaremos BAGIM-OFP_{FRF}). Los parámetros experimetales son los siguientes:

- Parámetros del clasificador FRF.
  - Tamaño de FRF: 500 ADFs.
- Parámetros para el AG.
  - Número de individuos: 100; Número de generaciones: 250; Probabilidad de cruce: 0.8; Probabilidad de mutación: 0.1
- Parámetros para el método BAGIM-OFP.
  - Primera fase - tamaño del bagging, δ: 20; Segunda fase - tamaño del bagging, β: 30

3.2 ESTIMACIÓN DE CLASIFICACIÓN

Para analizar los resultados, utilizaremos la precisión como medida de rendimiento (número de ejemplos clasificados correctamente con respecto al total). Más específicamente, la precisión media obtenida como la media de las precisiones de un 3×5-fold cross-validation.

3.3 EVALUACIÓN DE CLASIFICACIÓN

Para evaluar el rendimiento del método BAGIM-OFP realizamos los siguientes experimentos: 1) Obtenemos las particiones para los datasets mostrados en la Tabla 1; evaluamos dichas particiones con el clasificador FRF; con estos experimentos analizamos el comportamiento del método con datasets de tamaño pequeño. 2) Realizamos el mismo experimento anterior pero con los datasets cuando se le han introducido valores imperfectos; intentamos analizar el comportamiento del método con datasets de tamaño pequeño y con valores imperfectos.

En la Tabla 2 mostramos los resultados obtenidos y los mejores resultados obtenidos con los métodos [8, 15]. En ella mostramos el porcentaje de precisión media en clasificación tanto para los datasets de train y de test (media y desviación típica). En la Tabla 2 se observa que el comportamiento del clasificador ante la imperfección en los datasets es muy estable. Además, los resultados obtenidos sin imperfección son muy similares (o mejores) a los obtenidos en la literatura para estos datasets.

- Globalmente, al analizar los resultados para los distintos datasets se puede concluir que el método BAGIM-OFP es robusto cuando trabaja con datasets de tamaño pequeño y con valores imperfectos.

Desde el punto de vista computacional, la introducción de bagging (un proceso iterativo) en ambas fases aumenta el tiempo de ejecución del método. Sin embargo, bagging puede ser computacionalmente eficiente ya que puede implementarse de una manera paralela o distribuida.

Tabla 2: Resultados al utilizar distintas particiones

	SIN Imperfección				CON Imperfección	
	FSGA$_{C4.5}$-NFDT		**BAGIM-OFP$_{FRF}$**		**BAGIM-OFP$_{FRF}$**	
	training	test	training	test	training	test
AUS	$86.12_{0.6}$	$85.46_{2.4}$	$100.0_{0.0}$	$86.81_{3.1}$	$99.82_{0.1}$	$86.18_{3.5}$
IRP	$96.28_{1.3}$	$95.33_{4.9}$	$98.98_{0.6}$	$96.22_{3.2}$	$97.67_{0.7}$	$96.22_{2.2}$
GLA	$73.03_{2.7}$	$68.24_{7.5}$	$100.0_{0.0}$	$73.38_{6.7}$	$100.0_{0.0}$	$75.08_{5.7}$
ION	$94.75_{0.8}$	$92.17_{2.7}$	$100.0_{0.0}$	$94.11_{2.0}$	$100.0_{0.0}$	$93.92_{1.9}$
SON	$83.69_{3.6}$	$72.04_{6.3}$	$100.0_{0.0}$	$83.68_{4.7}$	$100.0_{0.0}$	$83.97_{6.4}$
SPE	$86.75_{4.1}$	$79.83_{6.0}$	$100.0_{0.0}$	$81.78_{4.6}$	$100.0_{0.0}$	$82.02_{4.4}$
WDB	$96.61_{0.5}$	$93.91_{1.5}$	$100.0_{0.0}$	$95.49_{1.7}$	$100.0_{0.0}$	$96.37_{2.0}$
WIN	$95.29_{1.5}$	$93.37_{4.6}$	$100.0_{0.0}$	$97.57_{1.8}$	$100.0_{0.0}$	$98.13_{2.1}$

4 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un método de particionamiento con el fin de obtener buenas particiones y buena precisión en la tarea de clasificación cuando utilizan datasets de tamaño pequeño y con valores imperfectos. El método se divide en dos fases: en la primera, se utiliza un árbol de decisión fuzzy para buscar los posibles puntos de corte de los dominios; y en la segunda, se utiliza un algoritmo genético para construir las particiones fuzzy a partir de los puntos de corte obtenidos en la primera fase.

En general, el método introduce el tratamiento de información imperfecta utilizando un árbol de decisión fuzzy y el diseño de distintos elementos que manipulan esta información, e introduce un proceso de bagging para mejorar la precisión de los clasificadores inestables y así controlar los datasets de tamaño pequeño. Hemos presentado varios experimentos para mostrar el comportamiento del método propuesto ante distintos datasets.

Agradecimientos

Soportado por el proyecto TIN2011-27696-C02-02 del Ministerio de Economía y Competitividad de España. Gracias también a la Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia (España) por la beca FPI de Raquel Martínez.

Referencias

[1] M. Antonelli, P. Ducange, B. Lazzerini, F. Marcelloni: Learning knowledge bases of multi-objective evolutionary fuzzy systems by simultaneously optimizing accuracy, complexity and partition integrity. *Soft Computing* 15, pp. 2335–2354, 2011.

[2] P. P. Bonissone: Approximate reasoning systems: handling uncertainty and imprecision in information systems. En: A. Motro, Ph. Smets (Eds.), *Uncertainty Management in Information Systems: From Needs to Solutions*, Kluwer Academic, pp. 369–395, 1997.

[3] P. P. Bonissone, J. M. Cadenas, M. C. Garrido, R. A. Díaz-Valladares: A fuzzy random forest. *Int. J. Approx. Reas.* 51(7), pp. 729–747, 2010

[4] L. Breiman: Bagging predictors. *Maching Learning* 24(2), pp. 123–140, 1996a.

[5] L. Breiman: Heuristics of instability and stabilization in model selection. *Annals of Statistics* 24(6), pp. 2350–2383, 1996b.

[6] M. Garrido, J.M. Cadenas, P. Bonissone: A classification and regression technique to handle heterogeneous and imperfect information. *Soft Computing* 14(11), pp. 1165–1185, 2010.

[7] J. M. Cadenas, M. C. Garrido, R. Martínez, P. P. Bonissone: Extending information processing in a fuzzy random forest ensemble. *Soft Computing* 16(5), pp. 845–861, 2012.

[8] Y. S. Choi, B. R. Moon: Feature Selection in Genetic Fuzzy Discretization for Pattern Classification Problems. *IEICE-Transactions on Information and Systems* E90-D(7), pp. 1047–1054, 2007

[9] E. Cox: *Fuzzy Modeling and Genetic Algorithms for Data Mining and Exploration*. Morgan Kaufmann Publishers, New York, USA, 2005.

[10] L. Der-Chiang, C. Chien-Chih, C. Che-Jung, L. Wu-Kuo: A tree-based-trend-diffusion prediction procedure for small sample sets in the early stages of manufacturing systems. *Expert Systems with Applications* 39, pp. 1575–1581, 2012.

[11] A. Frank, A. Asuncion: *UCI Machine Learning Repository*. University of California, Irvine, School of Information and Computer Sciences, 2010.

[12] A. K. Jain: Statistical pattern recognition: A review. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22, pp. 4–37, 2000.

[13] K. Kianmehr, M. Alshalalfa, R. Alhajj: Fuzzy clustering-based discretization for gene expression classification. *Knowledge and Information Systems* 24, pp. 441–465, 2010.

[14] H. Liu, F. Hussain, C. Tan, M. Dash: Discretization: an enabling technique. *Journal of Data Mining and Knowledge Discovery* 6(4), pp. 393–423, 2002.

[15] A. J. Myles, S. D. Brown: Induction of Decision Trees Using Fuzzy Partitions. *Journal of Chemometrics* 17, pp. 531–536, 2003

[16] A. M. Palacios, L. Sánchez, I. Couso: Diagnosis of dyslexia with low quality data with genetic fuzzy systems. *Int. J. Approx. Reas.* 51, pp. 993–1009, 2010.

PROBLEMAS LOGÍSTICOS DEL LADO DEL MAR CON DATOS IMPRECISOS

Christopher Expósito Izquierdo[1], **Eduardo Lalla Ruiz**[1], **Teresa Lamata Jiménez**[2], **Belén Melián Batista**[1], **J. Marcos Moreno Vega**[1]

[1]*Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación, Universidad de La Laguna*, {cexposit, elalla, mbmelian, jmmoreno}@ull.es

[2]*Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada*, mtl@decsai.ugr.es

Resumen

El principal objetivo de las terminales marítimas de contenedores es servir a los barcos portacontenedores que arriban a puerto. Esto significa que deben ser atracados en el muelle de forma que un subconjunto de grúas pueda realizar las operaciones de transbordo de contenedores. En este trabajo se aborda el Problema Táctico de Asignación de Atraques, en el que hay que establecer las posiciones de atraque para un conjunto de barcos, y el Problema de Planificación de Grúas, en el cual se determina la planificación de las grúas asignadas a los mismos. Dada la naturaleza del entorno portuario, existe conocimiento impreciso acerca de los barcos y el servicio referente a los mismos, por lo que los citados problemas son tratados considerando tanto los tiempos de llegada de los barcos como los tiempos de procesamiento de las grúas como imprecisos.

Palabras Clave: Lógica Difusa, Terminal de Contenedores, Problema Táctico de Asignación de Atraques, Problema de Planificación de Grúas

1 INTRODUCCIÓN

El principal objetivo de una terminal de contenedores es servir a aquellos barcos que arriban al puerto. En este sentido, el servicio de un barco puede desglosarse en varios pasos. En primer lugar, se requiere proporcionar una posición de atraque a lo largo del muelle y un tiempo de atraque para cada barco de acuerdo a sus características particulares (dimensiones, tiempo de servicio estimado, calado, tiempo de llegada, etc.) y acuerdos contractuales [7]. A continuación, se ha de asignar un subconjunto de grúas a cada barco para la realización de las tareas de carga y descarga de contenedores establecidas mediante su plan de estiba [2]. Finalmente, se deben definir las planificaciones de trabajo de las grúas empleadas [1].

Las decisiones de planificación citadas anteriormente pueden ser modeladas como problemas de optimización. El Problema Táctico de Asignación de Atraques (PTAA) busca determinar la posición de atraque, tiempo de atraque y grúas asignadas a cada uno de los barcos que llegan al puerto a lo largo de un horizonte temporal dado. Por otro lado, el Problema de Planificación de Grúas (PPG) determina las planificaciones de trabajo de las grúas asignadas a un barco. Cabe señalar que la resolución simultánea del PTAA y el PPG proporciona una planificación de servicio completa para una terminal marítima de contenedores.

Los algoritmos y formulaciones para la resolución del PTAA y el PPG asumen que los datos son conocidos de forma precisa. Sin embargo, en aplicaciones reales esto no suele ser cierto. Este hecho es particularmente problemático en la representación de la llegada de los barcos y los tiempos de realización de las operaciones de transbordo, los cuales no pueden ser estimados de forma precisa. Esto debe ser tenido en cuenta por los decisores en situaciones reales.

La imprecisión inherente en los datos involucrados en problemas reales puede tener diferente naturaleza: aleatoria, subjetiva, vaga, etc. Cuando el objetivo es tratar los problemas sin alterar su naturaleza, lo que parece más lógico es considerar la aproximación que se ajuste más adecuadamente al origen de la imprecisión, pudiendo ser ésta estocástica, basada en intervalos o difusa. Entre estas posibilidades, la imprecisión que se considera en este trabajo es lingüística y, por tanto, vaga (por ejemplo, “el tiempo de procesamiento será mayor”). Aunque la información vaga aparece en estas aplicaciones reales, hasta donde conocemos, éste es uno de los pocos trabajos que considera esta naturaleza de imprecisión en la resolución del PTAA y el PPG. Los conjuntos difusos proporcionan un marco teórico para tratar la incertidumbre, permitiendo resolver problemas de diferentes áreas de investigación [9], [10] con un alto grado de eficacia y eficiencia. En este trabajo estamos particularmente interesados en la resolución del PTAA con tiempos de llegada difusos de los barcos y el PPG con tiempos de procesamiento difusos para las operaciones de

carga y descarga de contenedores. Con el propósito de resolver estos problemas, presentamos modelos matemáticos en los que algunos coeficientes no son conocidos de forma precisa. En ambos casos, con el fin de resolver los problemas de optimización derivados de estas situaciones, haremos uso de modelos ampliamente conocidos en el área de la Programación Matemática Difusa [3], [5].

El resto de este trabajo se estructura como sigue. La Sección 2 presenta los problemas logísticos surgidos en el lado del mar de una terminal de contenedores. La Sección 3 describe los coeficientes difusos usados en las formulaciones matemáticas para el PTAA y el PPG. Por último, la Sección 5 presenta las principales conclusiones extraídas del trabajo.

2 OPERACIONES DEL LADO DEL MAR

Las operaciones denominadas del lado del mar son aquellas relativas al servicio de los barcos llegados a puerto. Tal como se indica en [12], el tiempo de estancia de los barcos constituye el principal indicador de la competitividad de las terminales marítimas de contenedores. Por tanto, los gestores portuarios están particularmente interesados en reducir los tiempos de servicio y maximizar el uso de los recursos disponibles: atraques y grúas.

2.1 PROBLEMA TÁCTICO DE ASIGNACIÓN DE ATRAQUES

El Problema Táctico de Asignación de Atraques (PTAA) persigue determinar la posición y tiempo de atraque, así como la asignación de grúas a los barcos que arriban al puerto a lo largo de un horizonte temporal conocido. En el PTAA se dispone de un conjunto de barcos N, un conjunto de atraques M y un conjunto de perfiles de grúa P_i por cada barco $i \in N$. Cada barco $i \in N$ debe ser asignado a un atraque $k \in M$ dentro de su ventana de tiempo y de la ventana de tiempo del atraque $[a_i, b_i]$ y $[a^k, b^k]$, respectivamente. La posición de atraque de un barco debería ser lo más cercana posible a la posición de partida de sus contenedores con el objetivo de reducir los costes derivados del movimiento de contenedores entre atraques. Por otro lado, para servir a cada barco $i \in N$, se utiliza el perfil de grúa, $p \in P_i$, que determina la distribución de grúas asignadas. Q denota el número de grúas en la terminal. El tiempo de servicio de un barco depende del perfil de grúa asociado. Cada perfil, $p \in P_i$, tiene un determinado valor, v_i^p, que refleja el uso de las grúas.

El objetivo del PTAA es maximizar el valor de los perfiles de grúas usados para servir a los barcos y minimizar los costes de gestión interna derivados del transbordo de contenedores entre atraques.

La Figura 1 muestra un ejemplo para el PTAA. El ejemplo consta de 3 barcos, 3 atraques y un máximo de 8 grúas. Por

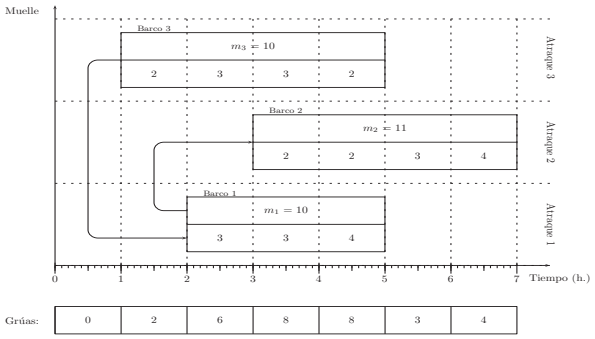


Figura 1: Ejemplo para el PTAA con 3 barcos y 3 atraques

cada barco $i \in N$, se tiene el número de horas de grúa requeridos para realizar sus operaciones de carga y descarga, m_i. Los perfiles asignados a los barcos determinan la distribución de grúas y su tiempo de servicio. Por ejemplo, el barco 3 es servido por 2, 3, 3 y 2 grúas y su tiempo de servicio es de 4 horas. Es importante destacar que, a pesar de que los barcos 1 y 3 requieren el mismo número horas de grúa, sus tiempos de servicio son diferentes porque se les han asignado diferentes perfiles. En este sentido, el perfil asignado al barco 1 es más caro que el asignado al barco 3.

Con el fin de hacer este artículo autocontenido, esta subsección describe la formulación lineal entera mixta propuesta en [4]. Se emplea la siguiente notación:

- N, Conjunto de barcos
- M, Conjunto de atraques
- H, Conjunto de instantes de tiempo
- P_i, Conjunto de perfiles de grúa para el barco $i \in N$
- t_i^p, Tiempo de servicio del barco $i \in N$ empleando el perfil de grúa $p \in P_i$
- v_i^p, El valor de servir el barco $i \in N$ con el perfil de grúa $p \in P_i$
- Q^h, Máximo número de grúas disponible en el instante de tiempo $h \in H$
- q_i^{pu}, Número de grúas asignado al barco $i \in N$ en el perfil $p \in P_i$ durante el instante $u \in H$
- f_{ij}, Flujo de contenedores intercambiados entre los barcos $i, j \in N$
- d_{kw}, Costes de gestión interna por contenedor entre atraques $k, w \in M$
- $[a_i, b_i]$, [comienzo, fin] de la ventana de tiempo del barco $i \in N$
- $[a^k, b^k]$, [comienzo, fin] de la ventana de tiempo del atraque $k \in M$

- $[a^h, b^h]$, [comienzo, fin] del instante de tiempo $h \in H$

Para cada $k \in M$ se genera un grafo $G^k = (V^k, A^k)$, donde $V^k = N \cup \{o(k), d(k)\}$, con $o(k)$ y $d(k)$ vértices adicionales representando los atraques k y $A^k \subseteq V^k \times V^k$. Las variables de decisión se muestran a continuación:

- $x_{ij}^k \in \{0,1\}$, $\forall\, k \in M$, $\forall\, (i,j) \in A^k$, fijada a 1 si el barco j está planificado después del barco i en el atraque k, y 0 en otro caso.
- $y_i^k \in \{0,1\}$, $\forall\, k \in M$, $\forall\, i \in N$, fijada a 1 si el barco i es asignado al atraque k, y 0 en otro caso.
- $z_{ij}^{kw} \in \{0,1\}$, $\forall\, k,w \in M$, $\forall\, i,j \in N$, fijada a 1 si $y_i^k = y_j^w$, y 0 en otro caso.
- $\gamma_i^h \in \{0,1\}$, $\forall\, h \in H$, $\forall\, i \in N$, fijada a 1 si el barco i llega en el instante de tiempo h, y 0 en otro caso.
- $\lambda_p^i \in \{0,1\}$, $\forall\, p \in P_i$, $\forall\, i \in N$, fijada a 1 si el barco i es servido mediante el perfil de grúa p, y 0 en otro caso.
- $\rho_i^{ph} \in \{0,1\}$, $\forall\, p \in P_i$, $\forall\, h \in H$, $\forall$ i$\in N$, fijada a 1 si el barco i es servido mediante el perfil de grúa p y llega en el instante de tiempo h, y 0 en otro caso.
- $T_i^k \geq 0$, $\forall\, k \in M$, $\forall$ i$\in N$, tiempo de atraque del barco i en el atraque k.
- $T_{o(k)}^k \geq 0$, $\forall\, k \in M$, $\forall\, i \in N$, instante de inicio de las operaciones del atraque k.
- $T_{d(k)}^k \geq 0$, $\forall\, k \in M$, $\forall\, i \in N$, instante de fin de las operaciones del atraque k.

La formulación para el PTAA es la siguiente:

$$\text{máx} \sum_{i\in N}\sum_{p\in P_i} \lambda_i^p v_i^p - \frac{1}{2}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in M}\sum_{w\in M} f_{ij} d_{kw} z_{ij}^{kw} \quad (1)$$

$$\sum_{k\in M} y_i^k = 1 \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j\in N\cup\{d(k)\}} x_{o(k)j}^k = 1 \quad \forall k \in M \quad (3)$$

$$\sum_{i\in N\cup\{o(k)\}} x_{id(k)}^k = 1 \quad \forall k \in M \quad (4)$$

$$\sum_{j\in N\cup\{d(k)\}} x_{ij}^k - \sum_{j\in N\cup\{o(k)\}} x_{ji}^k = 0 \quad \forall k \in M,\ \forall i \in N \quad (5)$$

$$\sum_{j\in N\cup\{d(k)\}} x_{ij}^k = y_i^k \quad \forall k \in M,\ \forall i \in N \quad (6)$$

$$T_i^k + \sum_{p\in P_i} t_i^p \lambda_i^p - T_j^k \leq (1 - x_{ij}^k) M1 \quad \forall k \in M \forall i \in N,\ \forall j \in N \cup \{d(k)\} \quad (7)$$

$$T_{o(k)}^k - T_j^k \leq (1 - x_{o(k)j}^k) M2 \quad \forall k \in M,\ \forall j \in N \quad (8)$$

$$a_i y_i^k \leq T_i^k \quad \forall k \in M, \forall i \in N \quad (9)$$

$$T_i^k \leq b_i y_i^k \quad \forall k \in M, \forall i \in N \quad (10)$$

$$a^k \leq T_{o(k)}^k \quad \forall k \in M \quad (11)$$

$$T_{d(k)}^k \leq b^k \quad \forall k \in M \quad (12)$$

$$\sum_{p\in P_i} \lambda_i^p = 1 \quad \forall i \in N \quad (13)$$

$$\sum_{h\in H^s} \gamma_h^i = \sum_{p\in P_i^s} \lambda_i^p \quad \forall i \in N,\ \forall s \in S \quad (14)$$

$$\sum_{k\in M} T_i^k - b^h \leq (1 - \gamma_i^h) M3 \quad \forall h \in H,\ \forall i \in N \quad (15)$$

$$a^h - \sum_{k\in M} T_i^k \leq (1 - \gamma_i^h) M4 \quad \forall h \in H,\ \forall i \in N \quad (16)$$

$$\rho_i^{ph} \geq \lambda_i^p + \gamma_i^h - 1 \quad \forall h \in H,\ \forall i \in N,\ \forall p \in P_i \quad (17)$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{p\in P_i}\sum_{u=max(h-t_i^p+1;1)}^{h} \rho_i^{pu} q_i^{p(h-u+1)} \leq Q^h \quad \forall h \in H^{\bar{s}} \quad (18)$$

$$\sum_{k\in M}\sum_{w\in M} z_{ij}^{kw} = g_{ij} \quad \forall i,j \in N \quad (19)$$

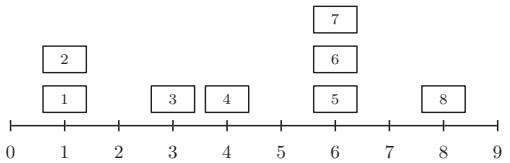
$$z_{ij}^{kw} \leq y_i^k \quad \forall i,j \in N \quad \forall k,w \in M \quad (20)$$

$$z_{ij}^{kw} \leq y_j^w \quad \forall i,j \in N \quad \forall k,w \in M \quad (21)$$

En este modelo $M1$, $M2$, $M3$ y $M4$ representan constantes suficientemente grandes. La función objetivo (1) maximiza la suma de los valores de los perfiles de grúa asignados a los barcos y, al mismo tiempo, minimiza los costes de gestión interna generados por los flujos de contenedores intercambiados entre los barcos. Las restricciones (2) establecen que cada barco debe ser asignado a uno y solo a un atraque. Las restricciones (3) y (4) definen los flujos entrantes y salientes de los barcos, mientras que la conservación de flujo para los restantes vértices es asegurada mediante los restricciones (5). Las restricciones (6) establecen la conexión entre las variables x_{ij}^k, mientras que las relaciones de precedencia en cada secuencia son aseguradas mediante las restricciones (7) y (8). Las ventanas de tiempo de los barcos están definidas a través de las restricciones (9) y (10), mientras que las ventanas de tiempo de los atraques están aseguradas mediante las restricciones (11) y (12). Las restricciones (13) aseguran que uno y solo un perfil de grúa puede ser asignado a cada barco. Las restricciones (14) definen la conexión entre variables γ_i^h y λ_i^p, mientras que las restricciones (15) y (16) conectan las variables γ_i^h y T_i^k. Las variables ρ_i^{ph} se relacionan con las variables λ_i^p y γ_i^h a través de las restricciones (17). Finalmente, las restricciones (18) garantizan que, en cada instante de tiempo, el número total de grúas asignadas no excede el número máximo de grúas disponible. Las restricciones (19), (20) y (21) se incluyen para linealizar la función objetivo cuadrática.

2.2 PROBLEMA DE PLANIFICACIÓN DE GRÚAS

El PPG es un problema NP-duro [8] que persigue definir las secuencias de operaciones de transbordo realizadas por un conjunto de grúas para la realización de la carga y descarga de contenedores asociados a un barco portacontenedores



Tarea, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Posición, l_t	1	1	3	4	6	6	6	8
T. Procesamiento, p_t	10	8	10	15	7	6	5	10

Figura 2: Ejemplo de instancia de PPG con 8 tareas

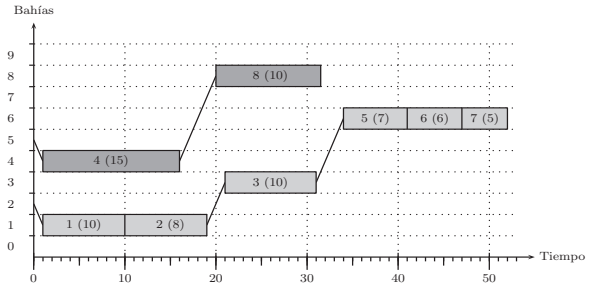


Figura 3: Planificación con 2 grúas para el ejemplo mostrado en la Figura 2

atracado en el puerto. Los datos de entrada para el PPG son el conjunto de tareas $\Omega = \{1,...,n\}$ y el conjunto de grúas $Q = \{1,...,m\}$ asignadas al barco. Cada tarea $t \in \Omega$ representa un conjunto de contenedores con similares características (peso, dimensiones, puerto de destino, etc.) ubicados de forma adyacentes entre sí en la misma bahía, l_t. El tiempo de procesamiento de la tarea $t \in \Omega$ se denota como p_t. Se consideran dos tareas ficticias 0 y T con $p_0 = p_T = 0$ con el objetivo de representar el comienzo y el final del servicio del barco, respectivamente. Además, se define el conjunto $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{0,T\}$. La estructura del barco impone limitaciones en el orden de realización de las operaciones de transbordo [6]. Por ejemplo, las operaciones de descarga deben ser realizadas antes que las operaciones de carga. Las relaciones de precedencia entre tareas ubicadas en la misma bahía vienen definidas mediante el conjunto Φ, de tal manera que, $(i,j) \in \Phi$ si y solo si la tarea i debe ser finalizada antes del comienzo de la tarea j. Por otro lado, cada grúa $q \in Q$ está ubicada en la bahía l_0^q y disponible después del instante r^q. El tiempo requerido por la grúa $q \in Q$ para moverse entre las bahías en que las tareas $i,j \in \Omega$ están ubicadas se denota como t_{ij}^q. Por razones de seguridad, las grúas deben mantener una distancia mínima entre ellas, δ (medida en bahías). La distancia de seguridad da lugar a que algunos pares de tareas no puedan ser realizados de forma simultánea debido a que se encuentran muy próximas entre sí. Estos pares de tareas se recogen en el conjunto Ψ.

El criterio de optimización del PPG es minimizar el *makespan* de la planificación, esto es, el tiempo de finalización de la última tarea realizada por alguna grúa, c_T.

La Figura 2 muestra un ejemplo para el PPG. El ejemplo está compuesto de 8 tareas. En cada bahía, las tareas están ordenadas de acuerdo a sus relaciones de precedencia. La ubicación y tiempo de procesamiento de cada tarea se muestran en la tabla asociada. Una planificación con 2 grúas se muestra en la Figura 3. En este caso, el *makespan* es de 52 unidades de tiempo.

A continuación se presenta la formulación matemática propuesta por [1] para el PPG. La siguiente notación es empleada en la formulación:

- Δ_{ij}^{vw}. Mínimo lapso temporal a transcurrir entre la realización de las tareas i y j por parte de las grúas v y w, respectivamente.
- Θ. Conjunto de combinaciones de tareas y grúas que dan lugar a potenciales interferencias entre grúas.

Las variables de decisión del modelo son:

- $x_{ij}^k \in \{0,1\}$, fijada a 1 si las tareas i y j son realizadas consecutivamente por la grúa k, 0 en otro caso.
- $z_{ij} \in \{0,1\}$, fijada a 1 si la tarea j comienza después de la finalización de la tarea i, 0 en otro caso.

La formulación matemática es como sigue:

$$Minimizar\ c_T \tag{22}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in \Omega^T} x_{0j}^k = 1, \forall k \in Q \tag{23}$$

$$\sum_{j \in \Omega^0} x_{jT}^k = 1, \forall k \in Q \tag{24}$$

$$\sum_{k \in Q} \sum_{j \in \Omega^T} x_{ij}^k = 1, \forall i \in \Omega \tag{25}$$

$$\sum_{j \in \Omega^0} x_{ji}^k - \sum_{j \in \Omega^T} x_{ij}^k = 0, \forall i \in \Omega, \forall \in Q \tag{26}$$

$$c_i + t_{ij} + p_j - c_j \leq M(1 - x_{ij}^k), \forall i,j \in \bar{\Omega}, \forall k \in Q \tag{27}$$

$$c_i + p_j - c_j \leq 0, \forall (i,j) \in \Phi \tag{28}$$

$$c_i + p_j - c_j \leq M(1 - z_{ij}), \forall i,j \in \Omega \tag{29}$$

$$c_j - p_j - c_i \leq M z_{ij}, \forall i,j \in \Omega \tag{30}$$

$$z_{ij} + z_{ji} = 1, \forall (i,j) \in \Psi \tag{31}$$

$$\sum_{u \in \Omega^0} x_{ui}^v + \sum_{u \in \Omega^0} x_{uj}^w \leq 1 + z_{ij} + z_{ji}, \forall (i,j,v,w) \in \Theta \tag{32}$$

$$c_i + \Delta_{ij}^{vw} + p_j - c_j \leq M(3 - z_{ij} - \sum_{u \in \Omega^0} x_{ui}^v - \sum_{u \in \Omega^0} x_{uj}^w), \quad \forall (i,j,v,w) \in \Theta \tag{33}$$

$$c_j + \Delta_{ij}^{vw} + p_i - c_i \leq M(3 - z_{ji} - \sum_{u \in \Omega^0} x_{ui}^v - \sum_{u \in \Omega^0} x_{uj}^w), \quad \forall (i,j,v,w) \in \Theta \tag{34}$$

$$r^k + t^k_{0j} + p_j - c_j \leq M(1 - x^k_{0j}), \forall j \in \Omega, \forall k \in Q \quad (35)$$

$$c_i \geq 0, \forall i \in \bar{\Omega} \quad (36)$$

La minimización del *makespan* es modelado mediante (22). Cada una de las grúas comienza realizando la tarea 0 y finaliza realizando la tarea T. Esto es modelado mediante las restricciones (23) y (24), respectivamente. Todas las tareas no ficticias deben ser realizadas exactamente una vez tal como se modela mediante las restricciones (25) y tienen una tarea previa y una tarea siguiente, restricciones (26). Las restricciones (27) establecen el tiempo de finalización de cada tarea. Las restricciones (28) aseguran las relaciones de precedencia entre tareas. Los valores de las variables z_{ij} son establecidos a través de las restricciones (29) y (30). Las restricciones (31) aseguran la no simultaneidad de las tareas. La interferencia entre grúas es evitada mediante las restricciones (32)-(34). Los tiempos de disponibilidad de las grúas son gestionados a través de las restricciones (35). Finalmente, el dominio de los tiempos de finalización de las tareas se define mediante las restricciones (36).

3 COEFICIENTES DIFUSOS PARA EL PTAA

En el PTAA, los tiempos de llegada a_i de cada barco $i \in N$ pueden ser considerados datos imprecisos. Para modelar la imprecision de valores en estos parámetros, se procede a considerarlos como números difusos. En este sentido, independientemente del amplio rango de los distintos modelos que pueden ser utilizados, el PTAA puede ser abordados con el siguiente modelo:

$$\text{máx}\{cx / A^f x \leq_I b^f, x \geq 0\},$$

donde A^f y b^f se refieren al hecho de que son considerados números difusos en los coeficientes que definen las restricciones (por lo tanto permitiendo, como en el caso trivial, que estos sean números reales cuando no hay ambigüedades). El símbolo $\leq_I$ muestra la forma de comparar ambos miembros en la desigualdad, que por coherencia formal, esto debe ser llevado a cabo mediante el uso de una relación para ordenar números difusos. Esta relación comparativa $\leq_I$ puede ser escogida de una lista disponible [11], lo cual permite al que toma la decisión tener un mayor grado de libertad a la hora de establecer preferencias. En términos más específicos, con el objetivo de proporcionar un modelo teórico, se hará referencia brevemente a los diferentes índices utilizados para la comparación de números difusos presentes en la literatura [11]. De entre los diferentes enfoques, en aras de la simplicidad, este trabajo solo se ocupará del que deriva de la utilización de los índices para la comparación. Por lo tanto, se denota como F(R) el conjunto de números difusos, si

$$I : F(R) \to [0,1]$$

es un índice de comparación para este tipo de números, entonces

$$\forall P^f, Q^f \in F(R), P^f \leq_I Q^f \Leftrightarrow I(P^f) \leq I(Q^f)$$

por lo que, de acuerdo con el índice utilizado I, los diferentes modelos auxiliares se pueden obtener para resolver de manera efectiva los problemas descritos anteriormente desde un punto de vista práctico. Por lo tanto, en general, los modelos auxiliares que se utilizan para resolver estos problemas desde una perspectiva práctica, serían de la siguiente forma,

$$\text{máx}\{cx / I(A^f x) \leq I(b^f), x \geq 0\}.$$

La selección del índice I u otro depende del usuario, y por consiguiente, qué indice I escoger no estará entre los objetivos del presente trabajo. Por otra parte, para ilustrar mejor este enfoque, a forma de ejemplo trivial, considérense dos números difusos triangulares $P^f, Q^f \in F(R)$, denominados generalmente como $P^f = (P, P_i, P_d)$ y $Q^f = (Q, Q_i, Q_d)$, y como forma de comparación, la dada por el primer índice de Yager [11],

$$P^f \leq_I Q^f \Leftrightarrow (1/3)(P + P_i + P_d) \leq (1/3)(Q + Q_i + Q_d)$$

Entonces, el modelo anterior tiene la forma de funcionamiento siguiente,

$$\text{máx}\{cx / (A + A_i + A_d)x \leq (b + b_i + b_d), x \geq 0\}.$$

Como establece el modelo del PTAA descrito anteriormente, los tiempos de llegada de los barcos $a_i, i \in N$, no pueden ser estimados de forma precisa y aparecen como coeficientes en las restricciones. Por tanto, la metodología descrita en esta sección puede ser usada para proporcionar soluciones adecuadas a los gestores de una terminal.

4 RESTRICCIONES DIFUSAS PARA EL PPG

Por otro lado, en el PPG, los tiempos de procesamiento para realizar las operaciones de carga/descarga , p_t, de las distintas tareas $t \in \Omega$ pueden ser también considerados datos imprecisos. En este caso, consideramos que las resctricciones del modelo son difusas y, por tanto, es posible escribir el problema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{mín } z = cx \\ s.t.: \\ \quad (Ax)_i \leq^f b_i, i \in I \\ \quad x_j \geq 0, x_j \in \mathbf{N}, j \in J \end{array} \quad (37)$$

donde el símbolo "$\leq^f$" significa que el decisor permite violaciones en el cumplimiento de las restricciones y considera restricciones difusas definidas por las funciones de pertenencia siguientes:

$$\mu_i : \mathbf{R}^n \to (0,1], i \in I.$$

Cada función de pertenencia proporcionará el grado de satisfacción con el que cualquier $x \in \mathbf{R}^n$ cumple la restricción difusa correspondiente sobre la que está definido. Este grado es igual a 1 cuando la restricción se cumple sin violación, y decrece a cero según violaciones mayores. En el

caso lineal, las funciones de pertenecia pueden ser formuladas como sigue:

$$\mu_i(x,b_i) = \begin{cases} 1 & (Ax)_i \leq b_i \\ 1-((Ax)_i - b_i)/d_i) & b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \\ 0 & (Ax)_i > b_i + d_i \end{cases}$$

Si aplicamos la metodología propuesta por Herrera y Verdegay [5], el modelo original con restricciones difusas puede ser resuelto mediante el siguiente modelo paramétrico auxiliar de programación lineal entera:

$$\begin{array}{l} \min z = cx \\ s.t.: \\ \quad (Ax)_i \leq b_i + d_i(1-\alpha), i \in I \\ \quad x_j \geq 0, x_j \in \mathbf{N}, j \in J, \alpha \in (0,1] \end{array} \tag{38}$$

En la aplicación particular al PPG, b_i se corresponde con los tiempos de procesado de las grúas y para d_i consideramos que la mayor desviación posible en los tiempos de procesado es igual a $25\% \times b_i$.

5 CONCLUSIONES

Las terminales marítimas de contenedores son grandes infraestructuras destinadas a servir buques portacontenedores que arriban a las mismas. Para ello, a cada barco se le tiene que asignar una posición y hora de atraque. Una vez atracado, se le asignarán un conjunto de grúas para realizar las respectivas operaciones de carga y descarga asociados a los contenedores que el buque trae consigo. En este contexto, se destacan dos problemas logísticos: el Problema Táctico de Asignación de Atraques (PTAA) y el Problema de Planificación de Grúas (PPG). Desafortunadamente, debido a la incertidumbre inherente en los entornos portuarios donde estos problemas tienen lugar, los datos que intervienen en los mismos puedan ser imprecisos. Este hecho, empuja a los gestores de las terminales a estar particularmente interesados en la solución de los mismos considerando la imprecisión o incertidumbre en estos entornos.

En este trabajo se aborda el PTAA y PPG bajo escenarios imprecisos. Para ello, se consideran dos modelos difusos de la literatura que tratan la incertidumbre de la hora de llegada de los barcos y del tiempo de procesamiento de las grúas encargadas de atender a los mismos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad (proyecto TIN2012-32608). Eduardo Lalla Ruiz y Christopher Expósito Izquierdo agraceden al Gobierno de Canarias el apoyo financiero que reciben a través de sus becas de posgraduado.

Referencias

[1] Christian Bierwirth and Frank Meisel. A fast heuristic for quay crane scheduling with interference constraints. *Journal of Scheduling*, 12(4):345–360, 2009.

[2] Christian Bierwirth and Frank Meisel. A survey of berth allocation and quay crane scheduling problems in container terminals. *European Journal of Operational Research*, 202(3):615 – 627, 2010.

[3] J.M. Cadenas and J.L. Verdegay. A primer on fuzzy optimization models and methods. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 3(1):1–21, 2006.

[4] G. Giallombardo, L. Moccia, M. Salani, and I. Vacca. Modeling and solving the tactical berth allocation problem. *Transportation Research Part B: Methodological*, 44(2):232–245, 2010.

[5] F. Herrera and J.L. Verdegay. Three models of fuzzy integer linear programming. *European J. of Operational Research*, 83(3):581 – 593, 1995.

[6] Kap Hwan Kim and Young-Man Park. A crane scheduling method for port container terminals. *European Journal of Operational Research*, 156(3):752–768, 2004.

[7] Eduardo Lalla-Ruiz, Belén Melián-Batista, and J. Marcos Moreno-Vega. Artificial intelligence hybrid heuristic based on tabu search for the dynamic berth allocation problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(6):1132 – 1141, 2012.

[8] Marcello Sammarra, Jean-François Cordeau, Gilbert Laporte, and Maria Flavia Monaco. A tabu search heuristic for the quay crane scheduling problem. *Journal of Scheduling*, 10(4-5):327–336, 2007.

[9] A. Tiwari, J. Knowles, E. Avineri, K. Dahal, and R. Roy. *Applications of Soft Computing : Recent Trends (Advances in Soft Computing Series)*. Springer, 2006.

[10] J.L. Verdegay. *Fuzzy Sets based Heuristics for Optimization. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, 2003.

[11] X. Wang and E. Kerre. On the classification and the dependencies of the ordering methods. In D. Ruan, editor, *Fuzzy Logic Foundation and Industrial Applications. International Series in Intelligent Technologies*, pages 73–90. Kluwer, 1996.

[12] Bart W. Wiegmans, Piet Rietveld, and Peter Nijkamp. Container terminal services and quality. Serie Research Memoranda 0040, VU University Amsterdam, Faculty of Economics, Business Administration and Econometrics, 2001.

Programación por metas borrosas: Un nuevo enfoque mediante programación por metas estándar

Mariano Jiménez [1], Amelia Bilbao [2], Mar Arenas[2]

[1]*Dpto. de Economía Aplicada I, Universidad del País Vasco (UPV/EHU), Plaza Oñati 1. 20018 San Sebastián*
mariano.jimenez@ehu.es
[2]*Dpto. de Economía Cuantitativa, Universidad de Oviedo, Avda. del Cristo s/n. 33006 Oviedo*
{ameliab, mariamar}@uniovi.es

Resumen

Abordamos en este trabajo la resolución de problemas de programación por metas borrosas en los que el agente decisor propone umbrales de tolerancia incompatibles entre sí, lo que daría lugar a un problema infactible. Proponemos una formulación alternativa, en la cual las funciones de pertenencia de las metas borrosas no están definidas a trozos. Esto nos permite plantear modelos capaces de proporcionar soluciones, aunque algún umbral de tolerancia sea violado. Los valores objetivo que no violan su correspondiente umbral son evaluados positivamente, de acuerdo con el grado en que satisfacen su meta borrosa, y, por su parte, aquellos que violan el umbral son penalizados, de acuerdo con su desviación no deseada respecto del umbral. Así, nuestro modelo utiliza conjuntamente el enfoque borroso y el enfoque estándar, lo que permite, además, incorporar, en el mismo problema, metas borrosas y metas nítidas. Se resuelve un problema numérico para ilustrar el procedimiento propuesto.

Palabras clave: Programación por metas estándar, Programación por metas borrosas, Problema infactible, Función de pertenencia, Desviaciones no deseadas

1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La Programación por Metas (Goal Programming-GP), es una de las técnicas más utilizadas para resolver problemas de decisión multicriterio. Está basada en el concepto de solución satisfaciente, introducido por el Premio Nobel de Economía Herbert Simon en 1956, que conjetura que en problemas decisionales complejos el centro decisor no está en condiciones de optimizar los objetivos, teniendo que conformarse con obtener soluciones satisfacientes, eligiendo para ello un nivel de aspiración para cada atributo relevante del problema (véase por ejemplo[10]).Con objeto de alcanzar una solución aceptable se penaliza la desviación no deseada (la negativa, la positiva o ambas) respecto del correspondiente nivel de aspiración.

Los modelos de GP pueden clasificarse de acuerdo con la forma de la función que sirve para agregar las desviaciones no deseadas [11]. A esta función se le llama *función de logro*. En este trabajo nos centraremos en una de las variantes más utilizada: la Programación por Metas Ponderadas (Weighted Goal Programming-WGP), en la que se minimiza la suma ponderada de las desviaciones no deseadas. Además asumiremos que la función de logro es lineal. Así, la expresión analítica de un modelo general de WGP es la siguiente (véase por ejemplo [7]):

(M1)

$$\text{Min} \quad \sum_{q=1}^{Q}\left(\frac{u_q n_q}{k_q}+\frac{v_q p_q}{k_q}\right)$$

$$\text{Subjeto a} \quad f_q(x)+n_q-p_q=b_q \quad q=1,\ldots,Q$$

$$x\in F$$

$$n_p, p_q \geq 0 \qquad q=1,\ldots,Q$$

Donde los coeficientes u_q, v_q son los pesos preferenciales, que indican a la importancia relativa que el decisor asigna a la minimización de cada desviación. Si una variable de desviación es no deseada, entonces, tiene un peso preferencial positivo, en caso contrario su peso es cero. k_q es una constante de normalización asociada con la meta q-ésima. F es el conjunto de soluciones factibles. En la formulación del modelo M1 está implícita la condición $n_q \times p_q = 0$ [2].

Sin embargo en los problemas reales suelen aparecer factores de imprecisión o incertidumbre que hacen que el decisor no sea capaz de establecer de manera nítida los niveles de aspiración de los atributos ni/o los límites de

algunas restricciones. Para modelar esta situación resulta adecuado utilizar la lógica borrosa. Supondremos pues que los niveles de aspiración y los límites de algunas restricciones son borrosos. La forma general de un modelo Borroso de Programación por Metas (Fuzzy Goal Programming-FGP) en el que los coeficientes son nítidos y las metas borrosas es la siguiente [1, 15]:

(M2)

$$\begin{aligned} &\text{Hallar} \quad x \\ &\text{tal que} \quad f_q(x) \tilde{\geq} b_q \quad q \in Q_1 \\ &\qquad\quad f_q(x) \tilde{\leq} b_q \quad q \in Q_2 \\ &\qquad\quad x \in F \end{aligned}$$

Donde $\tilde{\geq}$ representa la versión borrosa de $\geq$ y podría corresponderse con la expresión lingüística "sustancialmente mayor que…". Similarmente $\tilde{\leq}$ podría interpretarse mediante la expresión lingüística "sustancialmente menor que…". Q_1 es el conjunto ordenado de subíndices correspondientes a metas del tipo $\tilde{\geq}$. Q_2 es el conjunto ordenado de subíndices correspondientes a metas del tipo $\tilde{\leq}$.

Cada una de las inecuaciones borrosas de M2 puede representarse mediante un conjunto borroso cuya función de pertenencia proporciona el grado en el cual el vector de decisión x satisface la desigualdad. Para construir cada función de pertenencia el decisor debe proporcionar un umbral de tolerancia b'_q a partir del cual el grado de satisfacción es nulo. El grado de satisfacción aumenta monótonamente entre 0 y 1, desde el umbral b'_q hasta que el nivel de aspiración b_q es totalmente alcanzado [3]. Suponiendo que este incremento es lineal, tendremos las siguientes funciones de pertenencia:

a) En el caso de metas (o restricciones) del tipo $\tilde{\geq}$:

$$\mu_q\left(f_q(x)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_q(x) \leq b'_q \\ \dfrac{f_q(x) - b'_q}{b_q - b'_q} & \text{si } b'_q \leq f_q(x) \leq b_q \\ 1 & \text{si } f_q(x) \geq b_q \end{cases} \quad (1)$$

cuya representación gráfica puede verse en la figura 1.

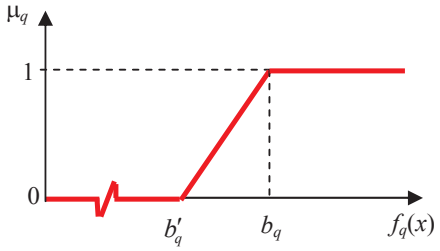


Fig. 1. Conjunto borroso $f_q(x) \tilde{\geq} b_q$

b) En el caso de metas (o restricciones) del tipo $\tilde{\leq}$:

$$\mu_q\left(f_q(x)\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_q(x) \leq b_q \\ \dfrac{b'_q - f_q(x)}{b'_q - b_q} & \text{si } b_q \leq f_q(x) \leq b'_q \\ 0 & \text{si } f_q(x) \geq b'_q \end{cases} \quad (2)$$

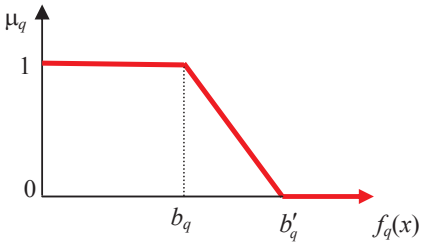


Fig. 2. Conjunto borroso $f_q(x) \tilde{\leq} b_q$

El procedimiento más habitual para resolver un problema FGP del tipo M2, consiste en transformarlo en un programa matemático convencional. Existen diversos enfoques en la literatura para hacer esto [8], sin embargo, como ya hemos dicho, de entre las diversas variantes de la programación por metas estándar, en este trabajo nos centramos en la programación por metas ponderadas. Para formular el problema convencional equivalente al modelo borroso M2 seguiremos la propuesta de Tiwari [12], cuyo objetivo es maximizar la suma ponderada de los grados de satisfacción de las metas borrosas:

(M3)

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \sum_{q=1}^{Q} w_q \mu_q \\ &\text{s. a.} \quad \mu_q = \frac{f_q(x) - b'_q}{b_q - b'_q} \qquad \text{para todo } q \in Q_1 \\ &\qquad\quad \mu_q = \frac{b'_q - f_q(x)}{b'_q - b_q} \qquad \text{para todo } q \in Q_2 \\ &\qquad\quad x \in F \\ &\qquad\quad 0 \leq \mu_q \leq 1 \qquad \text{para todo } q \in Q \end{aligned}$$

Sin embargo, en nuestra opinión, este último modelo M3, tiene algunos inconvenientes que pasamos a detallar:

1- Puesto que $\mu_q \geq 0$, los umbrales de tolerancia no se pueden sobrepasar, es decir hay implícitas las siguientes restricciones duras:
$f_q(x) \geq b'_q, \forall q \in Q_1$ y $f_q(x) \leq b'_q, \forall q \in Q_2$.

Lo que podría tener las siguientes consecuencias:

En algunos problemas reales de programación por metas los niveles de aspiración son elegidos subjetivamente por el decisor [4]. En un problema con un número relativamente elevado de objetivos podría dar-

se el caso de que el decisor fijase algún umbral inaccesible, lo que daría lugar a que el modelo M3 fuese infactible. Esta circunstancia puede llevar, a veces, a la elección de umbrales excesivamente pesimistas, que no reflejan el verdadero sentir del decisor. Algunos autores [9] proponen no permitir al decisor elegir los niveles de aspiración borrosos, sino generarlos automáticamente mediante la solución ideal y la antiideal del correspondiente objetivo. Sin embargo, con este enfoque la solución no se basa en la lógica satisfaciente de la programación por metas, sino en su proximidad al punto ideal, con lo que el problema, en realidad, se trataría como un problema de programación compromiso.

2- Puesto que $\mu_q \le 1$, no se permiten soluciones que alcancen los niveles de aspiración con holgura. Por lo que hay implícitas las siguientes restricciones duras: $f_q(x) \le b_q, \forall q \in Q_1; f_q(x) \ge b_q, \forall q \in Q_2$.

   Es decir que se están eliminando posibles soluciones factibles, $x \in F$, que dominen paretianamente a las del modelo M3.

3- El modelo M3 no permite tratar en el mismo problema niveles de aspiración borrosos y niveles de aspiración nítidos. Deben ser todos borrosos.

   Si alguno fuera nítido su correspondiente función de pertenencia solo podría tomar valores 0 ó 1. Lo que representaría que cualquier falta de logro sería absolutamente rechazada, es decir esta meta se convertiría en una restricción dura.

En el presente trabajo proponemos una nueva formulación de las funciones de pertenencia (1) y (2), que nos permitirá reformular el modelo M3con una expresión algebraica que evita los anteriores inconvenientes.

Algunos autores [5, 13, 14] han propuesto modelos que subsanan el segundo de los inconvenientes arriba descritos. Sin embargo el modelo de Tiwari sigue siendo utilizado en la literatura para aplicaciones prácticas, por ello nos centramos en él en el presente artículo. Dejamos para futuros trabajos el análisis de los modelos mencionados.

2 UNA FORMULACIÓN ALTERNATIVA DE LAS FUNCIÓNES DE PERTENENCIA

Los problemas que acabamos de describir se deben fundamentalmente a que, en las expresiones (1) y (2), las funciones de pertenencia están definidas a trozos, de manera que su representación algebraica cambia dependiendo de la zona de la recta real en que caiga el valor objetivo $f_q(x)$. Nosotros vamos a proponer una nueva representación que no es a trozos. La cual va a estar referida a las desviaciones negativas, n_q, n'_q, y positivas, p_q, p'_q, respecto del correspondiente nivel de aspiración b_q y de su umbral de tolerancia b'_q:

$$\begin{aligned} f_q(x) + n_q - p_q &= b_q \\ f_q(x) + n'_q - p'_q &= b'_q \end{aligned} \quad (3)$$

LEMA 1: La siguiente expresión (4) representa la función de pertenencia del conjunto borroso $f_q(x) \tilde{\ge} b_q$.

$$\mu_q\left(f_q(x)\right) = \frac{p'_q - p_q}{b_q - b'_q} \quad (4)$$

Es decir, es equivalente a (1).

Demostración (véase la figura 1):

- Si $f_q(x) < b'_q$, por (3) y por ser $b'_q < b_q$, se verifica que $p_q = p'_q = 0$ luego en (4) tenemos que $\mu_q\left(f_q(x)\right) = 0$.
- Si $b'_q \le f_q(x) \le b_q$, se verifica que $p_q = 0$, luego en (4) tenemos que,

$$\mu_q\left(f_q(x)\right) = \frac{p'_q}{b_q - b'_q} = \frac{f_q(x) - b'_q}{b_q - b'_q}$$

- Si $f_q(x) \ge b_q$, se verifica que $p'_q - p_q = b_q - b'_q$, luego en (4) tenemos que $\mu_q\left(f_q(x)\right) = 1$. □

LEMA 2: La siguiente expresión (5) representa la función de pertenencia del conjunto borroso $f_q(x) \tilde{\le} b_q$.

$$\mu_q\left(f_q(x)\right) = \frac{n'_q - n_q}{b'_q - b_q} \quad (5)$$

Es decir, es equivalente a (2).

Demostración (véase la figura 2):

- Si $f_q(x) \le b_q$, se verifica que $n'_q - n_q = b'_q - b_q$, luego en (5) tenemos que $\mu_q\left(f_q(x)\right) = 1$.
- Si $b_q \le f_q(x) \le b'_q$, se verifica que $n_q = 0$, luego en (5) tenemos que,

$$\mu_q\left(f_q(x)\right) = \frac{n'_q}{b'_q - b_q} = \frac{b'_q - f_q(x)}{b'_q - b_q}$$

- Si $f_q(x) < b_q$, por (3) y por ser $b_q < b'_q$, se verifica que $n_q = n'_q = 0$ luego en (5) tenemos que $\mu_q\left(f_q(x)\right) = 0$.

□

En el siguiente apartado proponemos una nueva formulación del modelo M3, en la cual utilizamos las representaciones alternativas (4) y (5) de las funciones de pertenencia.

3 UN NUEVO MODELO DE PROGRAMACIÓN POR METAS BORROSAS

Supongamos que en el modelo M3representamos las funciones de pertenencia mediante sus nuevas formulaciones (4) y (5). Proponemos entonces la siguiente expresión algebraica:

(M4)

$$\text{Max} \sum_{q\in Q_1} w_q\left(\mu_q - \frac{n'_q}{\mathrm{k}_q}\right) + \sum_{q=Q_2} w_q\left(\mu_q - \frac{p'_q}{\mathrm{k}_q}\right) \qquad (6)$$

$$\text{s.a.} \quad \mu_q = \frac{p'_q - p_q}{b_q - b'_q} \quad \text{para todo } q \in Q_1 \qquad (7)$$

$$\mu_q = \frac{n'_q - n_q}{b'_q - b_q} \quad \text{para todo } q \in Q_2 \qquad (8)$$

$$f_q(x) + n_q - p_q = b_q \quad \text{para todo } q \in Q \qquad (9)$$

$$f_q(x) + n'_q - p'_q = b'_q \quad \text{para todo } q \in Q \qquad (10)$$

$$x \in F$$

En la función de logro (6) de este modelo M4, al igual que en el modelo M3, maximizamos el grado de satisfacción de las metas borrosas pero, en el caso de que algún umbral no se alcance, lo que se hace es minimizar la desviación no deseada respecto de dicho umbral, en lugar de obtener un problema infactible como ocurriría con M3.Es decir, que en nuestro enfoque los umbrales de tolerancia no representan restricciones duras, sino un deseo expresado por el decisor de que, a ser posible, no se violen. De esta forma nuestro modelo podría interpretarse como un modelo GP estándar con niveles de aspiración borrosos.

Obsérvese que, si ningún umbral de tolerancia es violado, ni ningún nivel de aspiración es satisfecho con holgura entonces, por los Lemas 1 y 2, el modelo M4 es idéntico al M3.

Además el modelo M4 evita los tres posibles inconvenientes del modelo M3, descritos en el epígrafe 1, a saber:

1- Si algún umbral de toleranciano pudiera alcanzarse, entonces el modelo M3 es infactible, sin embargo el modeloM4debido a las ecuaciones (9) y (10) es factible, verificándose además, como es preceptivo, que $\mu_i\left(f_i(x_0)\right) = 0$. En este caso M4 minimiza la falta de logro del citado umbral.

2- Es factible obtener soluciones que verifiquen una meta con holgura. Por ejemplo sea $x_0 \in F$ y $f_i(x_0) > b_i; i \in Q_1$, entonces x_o en el modelo M3 es infactible. Sin embargo, debido a las ecuaciones (9) y (10), en M4 x_0 es factible. Verificándose además, como es preceptivo, que $\mu_i\left(f_i(x_0)\right) = 1$.

3- Si algún nivel de aspiración es nítido, basta con no considerar para él las ecuaciones (7) y (8), entonces el modelo M4 trata este objetivo como se haría en la programación por metas estándar, es decir minimizando su desviación no deseada.

Advertencia: En la función de logro (6) del modelo M4 hay coeficientes negativos, lo cual hace [7, pag. 59] que si se resuelve con un paquete informático estándar, pueda ser considerado, incorrectamente, como no acotado, con una violación de la condición implícita $n_q \times p_q = 0$. Esto puede solucionarse añadiendo explícitamente estas condiciones o recurriendo a algún paquete informático con una rutina de restricción de base [6]. Así pues, en la resolución práctica del modelo M4, podría ser necesario añadir las siguientes restricciones no lineales:

$$\begin{aligned} n_q \times p_q &= 0 \quad \text{para todo } q \in Q \\ n'_q \times p'_q &= 0 \quad \text{para todo } q \in Q \end{aligned} \qquad (11)$$

O alternativamente, si se quiere mantener la linealidad, añadiendo algunas variables binarias, s_q, s'_q, mediante las siguientes restricciones, las cuales garantizan las condiciones (11):

$$\begin{aligned} &n_q - Ms_q \le 0, && \text{para todo } q \in Q \\ &p_q - M\left(1 - s_q\right) \le 0, && \text{para todo } q \in Q \\ &n'_q - Ms'_q \le 0, && \text{para todo } q \in Q \\ &p_q - M\left(1 - s'_q\right) \le 0, && \text{para todo } q \in Q \end{aligned}$$

Donde M es un número suficientemente grande.

A continuación exponemos un ejemplo para ilustrar el procedimiento propuesto.

4 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Consideremos el siguiente problema multiobjetivo, propuesto por Li el al. [9]:

$$\begin{aligned} \max \quad & z_1(x) = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 \\ \max \quad & z_2(x) = 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 11x_4 \\ \max \quad & z_3(x) = 9x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \min \quad & z_4(x) = 1.5x_1 + 2x_2 + 0.3x_3 + 3x_4 \\ \min \quad & z_5(x) = 0.5x_1 + x_2 + 0.7x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 3x_1 + 4.5x_2 + 1.5x_3 + 7.5x_4 = 150 \\ & x_i \ge 0, \ i = 1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

Supondremos que todas las metas tienen el mismo peso relativo.

Li et al resuelven este problema mediante lo que ellos llaman, programación compromiso borrosa, para ello calculan los valores ideal y antiideal de cada función objetivo y con ellos construyen las funciones de pertenencia de las metas borrosas. A continuación

resuelven el correspondiente modelo M3. Obteniendo el siguiente resultado, que puede considerarse como una solución compromiso:

x^*=(0, 0, 100, 0); Z^*=(700, 300, 100, 30, 70)

En esta solución el decisor ha intervenido muy poco, por lo que puede que no se ajuste a sus deseos. Para mejorar esto supongamos que el decisor propone los siguientes niveles de aspiración: " z_1 debería ser mayor que 600 y, a ser posible, no menor que 525", "z_2 debería ser mayor que 350 y, a ser posible, no menor que 300", "z_3 debería ser mayor que 180 y no menor, a ser posible, que 165", "z_4 debería ser menor que 25 y no mayor, a ser posible, que 30" y "z_5 debería ser menor que 55 y, a ser posible, no mayor que 65".

Si intentamos resolver este problema de programación por metas borrosas mediante el método de Tiwari [12],es decir generando el correspondiente modelo M3, encontraremos que el mismo es infactible, ya que algunos umbrales de tolerancia no se pueden alcanzar.

Sin embargo resolviendo el problema mediante nuestro método, es decir formulando el correspondiente modelo M4, obtenemos la siguiente solución:

x^*=(11.43, 0, 77.143, 0);

Z^*=(562.86,277.14,180,40.29, 59.71);μ^*=(0.50, 0, 1, 0, 0.53)

Obsérvese que los umbrales de la segunda meta ($\geq$300) y de la cuarta meta ($\leq$ 35) se violan. No obstante, nuestro modelo da la solución que mejor se ajusta a las metas borrosas proporcionadas por el decisor. Esta información puede ser útil al decisor, que puede aceptar esta solución o, a la vista de la misma, proponer nuevos niveles de aspiración.

Supongamos que se proponen los siguientes cambios:

"z_1 debería ser mayor que 625,con un umbral de tolerancia igual a 550", "z_2 debería ser mayor que 300, con un umbral de tolerancia iguala 250", "z_3 debería ser mayor que 130, con un umbral de tolerancia iguala 115", "z_4 debería ser menor que 30, con un umbral de tolerancia igual a 40" y "z_5 debería ser menor que 65, con umbral de tolerancia igual a 70".

En este caso el modelo de Tiwari (M3) proporciona la siguiente solución:

x^*=(4.54, 0, 87.90, 0.60);
Z^*=(625, 288.50, 130, 35, 65.01) (12)
μ^*=(1, 0.77, 1, 0.5, 1)

Nuestro modelo (M4), por su parte, llega a la siguiente solución:

x^*=(5.56, 0, 88.89, 0);
Z^*=(633.33, 288.89, 138.89, 35, 65) (13)
μ^*=(1, 0.78, 1, 0.5, 1)

Puede observarse que la solución (13), proporcionada por nuestro modelo, domina a la solución (12), la del modelo de Tiwari. Esto se debe a que en (13) las metas 1 y 3 se alcanzan con holgura, lo cual no está permitido en el modelo de Tiwari, como ya comentamos en el epígrafe 3.

5 CONCLUSIONES

En un problema de programación por metas borrosas, el decisor debe determinar los umbrales de tolerancia de cada objetivo, los cuales no se pueden sobrepasar. Pero en un problema complejo puede ocurrir que se proporcionen umbrales incompatibles, entre sí o con las restricciones del problema, lo cual daría lugar a un problema no factible. En este trabajo hemos presentado una nueva expresión algebraica para problemas de programación por metas borrosas, que permite que los umbrales de tolerancia se sobrepasen. De esta manera, aunque algún umbral sea violado, podemos conocer la solución que mejor se ajusta los niveles de aspiración, lo que proporciona una información muy valiosa. Además nuestro modelo puede proporcionar soluciones que verifiquen con holgura los niveles de aspiración y contemplar, en el mismo problema, niveles de aspiración borrosos y niveles de aspiración nítidos. Nuestro modelo podría considerarse como un modelo de programación por metas estándar que admite niveles de aspiración borrosos.

Referencias

[1] A. Baykasoglu, T. Göcken, A review and classification of fuzzy mathematical programs. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 19, pp. 205-229, 2008.

[2] A. Charnes, W.W. Cooper: Goal programming and multiple objective optimization. Part I *European Journal of Operational Research* 1, pp. 39-54, 1977.

[3] M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila: Fuzzy linear programming: From classical methods to new applications. En: M. Delgado, J. Kacprzyk, J.L. Verdegay, M.A. Vila (Eds.), *Fuzzy Optimization*: *Recent advances*. Physica-Verlag. Heidelberg, pp. 111-134, 1994.

[4] E.L. Hannan: Linear programming with multiple fuzzy goals. *Fuzzy Sets and Systems* 6, pp. 235-248, 1981.

[5] M. Jiménez, M.V. Rodríguez Uría, M. Arenas Parra, A. Bilbao Terol: On considering constraints of different importance in goal programming problems. En: T. Trzaskalik, J. Michnik (Eds.), *Advances in soft Computing: Multiple Objective and Goal Programming. Recent Developments*. Physica-Verlag. Heilderberg, pp. 101-114, 2002.

[6] D.F. Jones, M. Tamiz, S.K. Mirrazavi: Intelligent solution and analysis of goal programmes: The GPSYS system. *Decision support System* 23, pp. 329-332, 1998.

[7] D.F. Jones, M. Tamiz: *Practical Goal Programming,* Springer, New York, 2010.

[8] G. Li: Fuzzy goal programming – A parametric approach. *Information Sciences* 195, pp. 287-295, 2012.

[9] X. Li, B. Zhang, H. Li: Computing efficient solutions to fuzzy multiple objective linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems* 157, pp. 1328-1332, 2006.

[10] C. Romero: *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, tecnicas y aplicaciones*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1993.

[11] C. Romero: A general structure of achievement function for a goal programming model, *European Journal of Operational Research* 153**,** pp. 675-686, 2004.

[12] R.N. Tiwari, S.D. Harmar, J.R. Rao: Fuzzy goal programming-an additive model, *Fuzzy Sets and Systems* 24, pp. 39-53, 1987.

[13] M.A. Yaghoobi, M. Tamiz: On improving a weighted additive model for fuzzy goal programming problems. *International Review of Fuzzy Mathematics* 1, pp. 115-129, 2006.

[14] M.A. Yaghoobi, D.F. Jones, M. Tamiz: Weighted additive models for solving fuzzy goal programming problems. *Asia-Pacific Journal of Operational research* Vol.25 No. 5, pp. 715-733, 2008.

[15] H.J. Zimmermann: Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems* 1, pp. 45-55, 1978.

FORTALEZAS DE LOS MOMENTOS POSIBILISTICOS

José D. Bermúdez, **Enriqueta Vercher**

Dep. Estadística e Investigación Operativa, Universitat de València, {bermudez,vercher}@uv.es

Resumen

En este trabajo presentamos dos propuestas de modelización del problema de selección de carteras basados en las medidas de posibilidad y de credibilidad, respectivamente. La incertidumbre del rendimiento de cada cartera se aproxima mediante números difusos de tipo LR. El riesgo y rendimiento esperado de una cartera se modelizan mediante diferentes operadores esperanza sobre las variables difusas de tipo LR. Se analiza la relación entre dos definiciones del operador esperanza, estableciendo los resultados que permiten confirmar la importancia y robustez de los momentos posibilisticos basados en los intervalos de medias.

Palabras Clave: Teoria de la posibilidad, Números difusos, Distribución de credibilidad, Momentos posibilísticos, Selección de carteras.

1 INTRODUCCIÓN

En modelización financiera se utilizan parámetos, objetivos, metas y restricciones cuyos valores y características son imprecisos o inciertos. Este conocimiento impreciso puede ser introducido mediante números difusos de diferentes formas, permitiendo también transformar los problemas de decisión bajo incertidumbre en problemas de optimización difusa, que pueden resolverse mediante técnicas de Soft Computing [22, 7, 24].

De entre los diferentes problemas de planificación financiera que podríamos abordar vamos a centrar este trabajo en el problema de seleccionar una cartera de valores, es decir, ha de determinarse que activos arriesgados deberían formar parte de la cartera, asumiendo que sus rendimientos futuros son inciertos y que el inversor tiene aversión al riesgo. La primera formulación matemática de este problema es debida a Markowitz [15], quien plantea determinar una cartera estableciendo un cierto equilibrio entre el rendimiento esperado y el riesgo de la inversión. En el modelo de media-varianza (MV) el rendimiento de cualquier cartera se calcula a partir de su esperanza probabilista, mientras que el riesgo se mide con la varianza, de modo que para determinar la cartera óptima con un rendimiento dado ha de resolverse un problema de programación cuadrática. Desde la publicación de este trabajo, que se considera el origen de la teoria moderna de la selección de carteras, podemos encontrar en la literatura una gran cantidad de modelos, que utilizan diferentes medidas del rendimiento y riesgo y que plantean diferentes aproximaciones al problema con el objetivo de seleccionar la cartera óptima, para unas condiciones de mercado e inversores determinados [16, 10, 11, 20].

La resolución de los problemas de optimización asociados a los diferentes modelos de cartera también presenta una variada casuística, que incluye la programación convexa (lineal o cuadrática), la programación entera, la decisión multiobjetivo y las aproximaciones heurísticas [17, 21, 19].

En este manuscrito trabajamos bajo la hipótesis de que el conocimiento impreciso de los rendimientos futuros de los activos financieros puede aproximarse mediante números difusos. La modelización con números difusos puede ser interpretada no solamente como una distribución de posibilidad sobre los valores que dichos rendimientos podrían tomar, sino también como una distribución de credibilidad sobre estos mismos rendimientos, mediante la información proporcionada por la correspondiente función de pertenencia [30, 22, 13]. En particular, la incertidumbre sobre el rendimiento de cada cartera se modeliza con números difusos de tipo LR (esta aproximación ha sido también utilizada en [27, 23, 1]). La Figura 1 representa la función de pertenencia de un número difuso de tipo LR, con funciones de referencia de la familia de potencias.

Para cuantificar la incertidumbre asociada al riesgo de la inversión y al rendimiento futuro utilizamos diferentes operadores esperanza basados en la teoría de la posibilidad y

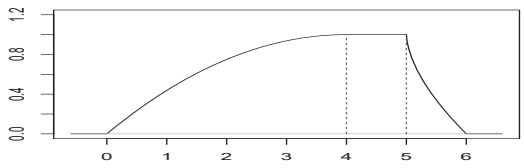


Figura 1: Función de pertenencia del número difuso de tipo LR: $Q = (0,4,5,6)_{L_2R_{0.6}}$.

en medidas de credibilidad.

En cuanto al procedimiento de optimización que debería utilizarse para seleccionar carteras óptimas y/o eficientes con los modelos que proponemos, cabe destacar que son fuertemente dependientes de las hipótesis establecidas sobre los números difusos (que cuantifican la incertidumbre) y de las condiciones impuestas por el inversor sobre diversificación y tamaño de la cartera, pero podrían clasificarse fundamentalmente como técnicas de Soft Computing [28].

2 MEDIDAS DE POSIBILIDAD Y CREDIBILIDAD

La teoría de la posibilidad fue propuesta por Zadeh [30] en el contexto de la teoría de conjuntos difusos para modelizar y caracterizar situaciones que involucran incertidumbre. Un número difuso Q se define mediante una función de pertenencia μ_Q de modo que $\mu_Q(y)$ representa el grado de posibilidad de que "Q tome el valor y", para $y \in \Re$; de tal manera que los números difusos pueden ser considerados una clase especial de distribuciones de posibilidad [6, 22]. Asociada con cada medida de posibilidad hay una medida de necesidad que es su medida dual.

La posibilidad y necesidad de un suceso difuso puede ser evaluada a partir de los valores de la función de pertenencia. En particular, para $y \in \Re$, respectivamente:

$$\text{Pos}\{Q \geq y\} = \sup_{t \geq y} \mu_Q(t), \tag{1}$$

y

$$\text{Nec}\{Q \geq y\} = 1 - \sup_{t < y} \mu_Q(t). \tag{2}$$

Liu and Liu [14] han introducido el concepto de medida de credibilidad de un suceso difuso como la media aritmética de sus medidas de posibilidad y necesidad:

$$\text{Cr}\{Q \geq y\} = \frac{1}{2}(\text{Pos}\{Q \geq y\} + \text{Nec}\{Q \geq y\}). \tag{3}$$

La medida de credibilidad puede considerarse como una medida alternativa de la incertidumbre de un suceso difuso, es la base de la teoría de la credibilidad y tiene la interesante propiedad de ser auto-dual:

$$\text{Cr}\{Q \geq y\} = 1 - \text{Cr}\{Q < y\}. \tag{4}$$

2.1 Distribución de credibilidad

Veamos algunas definiciones y resultados sobre variables difusas y distribuciones de credibilidad, que hemos obtenido del excelente artículo de revisión de Liu [13].

Definición 1. Una variable difusa es una función de un espacio de credibilidad $(\Theta, P(\Theta), \text{Cr})$ a la recta real $\Re$, siendo Θ un conjunto no vacio y $P(\Theta)$ el conjunto de las partes de Θ.

Definición 2. Sea ξ una variable difusa, su distribución de credibilidad $\Phi_\xi : \Re \to [0,1]$ se define como:

$$\begin{aligned} \Phi_\xi(x) &= \text{Cr}\{\theta \in \Theta : \xi(\theta) \leq x\} = \\ &= \tfrac{1}{2}(\sup_{y \leq x} \mu_\xi(y) + 1 - \sup_{y > x} \mu_\xi(y)), x \in \Re. \end{aligned} \tag{5}$$

Siendo $\mu_\xi(y)$ la función de pertenencia de ξ definida sobre el espacio de credibilidad $(\Theta, P(\Theta), \text{Cr})$, que viene dada por:

$$\mu_\xi(y) = \min(1, 2\ \text{Cr}\{\xi = y\}), \text{ para } y \in \Re. \tag{6}$$

Asimismo, el concepto de variable difusa está asociado con una distribución de credibilidad de una manera análoga a como lo están las variables aleatorias con las distribuciones de probabilidad, lo que ha permitido introducir el concepto de valor crítico de una variable difusa ξ, en el sentido siguiente:

Definición 3. Sea ξ una variable difusa y $\gamma \in (0,1]$. El valor γ-optimista de ξ se define como:

$$\xi_{\sup}(\gamma) = \sup\{r : \text{Cr}\{\xi \geq r\} \geq \gamma\}. \tag{7}$$

Este valor crítico es fundamental para evaluar el Valor-en-Riesgo difuso (FVaR) de una cartera cuyo rendimiento haya sido aproximado mediante una variable difusa [29].

Finalmente, dado que cualquier número difuso ξ es un conjunto convexo con una función de pertenencia normalizada, μ_ξ, dicho número difuso ξ puede ser considerado como una variable difusa con una distribución de credibilidad dada por la Definición 2.

En particular, sea $\xi = (a, A, B, b)_{L_\alpha R_\beta}$ una variable difusa de tipo LR, con función de referencia de la familia de potencias con parámetros positivos α y β, con soporte acotado [a,b] y núcleo [A,B], la distribución de credibilidad de ξ viene dada por:

$$\Phi_\xi(x) = \mathrm{Cr}\{\xi \le x\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \frac{1}{2}[1-(\frac{A-x}{A-a})^\alpha] & \text{si } a \le x \le A \\ \frac{1}{2} & \text{si } A \le y \le B \\ \frac{1}{2}[1+(\frac{x-B}{b-B})^\beta] & \text{si } B \le x \le b \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8)$$

La Figura 2 muestra la distribución de credibilidad de la variable difusa ξ, cuya función de pertenencia coincide con la del número difuso que hemos representado en la Figura 1.

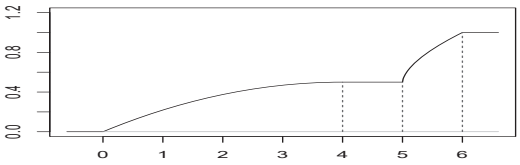


Figura 2: Distribución de credibilidad de la variable difusa $\xi = (0,4,5,6)_{L_2R_{0.6}}$.

Notar que tanto los números difusos triangulares como los trapezoidales son casos particulares de los números difusos de tipo LR con función de referencia de la familia de potencias, lo mismo ocurre en el caso de las correspondientes variables difusas.

3 MOMENTOS

Para las variables difusas se propuso el siguiente operador esperanza en base a su distribución de credibilidad [14]:

Definición 4. Sea ξ una variable difusa, el valor esperado de ξ viene dado por:

$$E(\xi) = \int_0^{+\infty} (1-\Phi_\xi(x))dx - \int_{-\infty}^{0} \Phi_\xi(x)dx \quad (9)$$

si al menos una de estas dos integrales es finita.

Veamos cual es la relación de este operador esperanza con el de valor esperado posibilístico, $M(Q)$, basado en el concepto de intervalos de medias de Dubois y Prade [5]:

Definición 5. Sea Q un número difuso y sean $Q^\gamma = [Q^\gamma_-, Q^\gamma_+]$ sus conjuntos de nivel superior para $\gamma \in [0,1]$. El intervalo de medias de Q se define como:

$$\tilde{E}(Q) = [\tilde{E}_*(Q), \tilde{E}^*(Q)] \quad (10)$$

donde $\tilde{E}_*(Q) = \int_0^1 Q^\gamma_- d\gamma$ y $\tilde{E}^*(Q) = \int_0^1 Q^\gamma_+ d\gamma$ son los valores medios probabilistas inferior y superior de Q, respectivamente.

3.1 Rendimiento esperado

Es habitual utilizar como aproximación rígida del intervalo de medias (Eq. 10) su punto medio: que se conoce como valor esperado posibilístico y denotamos por $M(Q)$. Puede probarse la equivalencia entre el valor esperado de una variable difusa de tipo LR (Def. 4) y el valor esperado posibilístico de su numero difuso asociado Q.

Proposition 1 [26]. Sea ξ una variable difusa de tipo LR con función de pertenencia $\mu_\xi(x)$ dada por el número difuso $Q = (a,A,B,b)_{LR}$. El valor esperado de la variable difusa, $E(\xi)$, coincide con el valor esperado posibilístico de Q:

$$E(\xi) = \frac{1}{2}(\tilde{E}_*(Q) + \tilde{E}^*(Q)) = M(Q) \quad (11)$$

Este resultado refuerza la versatilidad y aplicabilidad de los problemas de optimización difusa que han sido modelados utilizando esperanzas en el sentido de intervalos de medias de Dubois y Prade. En particular, en modelos de selección de carteras donde uno de los objetivos primarios del problema de optimización es maximizar la ganancia o rendimiento esperado. Cabe resaltar además que:

- El intervalo de medias $\tilde{E}(Q)$ es la aproximación intervalar más cercana al número difuso Q con respecto a la métrica introducida en [9],
- La amplitud del intervalo de medias de Q coincide con la amplitud de Q en el sentido de Chanas [3].
- El valor esperado, $E(Q) = M(Q)$ coincide con el valor del número difuso Q en el sentido de Delgado et al [4], para una función de reducción constante.

El concepto de intervalo de medias (Def. 5) ha sido también extendido para incorporar la importancia de los γ-conjuntos de nivel mediante la introducción del concepto de esperanza posibilística ponderada [2, 8], que permite asociar pesos a los conjuntos de nivel mediante diferentes tipo de funciones (veáse, también, [18]).

3.2 Riesgo de la inversión

La modelización del riesgo de la inversión suele hacerse a partir de la varianza asociada al rendimiento medio de una cartera dada, tal y como sugería el modelo de media-varianza (MV). Se han propuesto otras medidas del riesgo de una cartera que involucran el cálculo de la semivarianza, de la desviación media absoluta o de diferentes momentos de orden parcial o superior [16, 10, 11, 20]. En lo que respecta a los momentos centrales de una variable difusa cuya función de pertenencia corresponde a la de un número difuso de tipo LR, puede demostrarse que:

Proposición 2 [26]. Sea $E^{(k)}(\xi) = E((\xi - E(\xi))^k)$, el k-ésimo momento central de la variable difusa de tipo LR ξ, para $k = 2,3,....$ Entonces, todos los momentos centrales de ξ existen, y coinciden con el k-ésimo valor esperado posibilístico, $M^k(Q)$, de un número difuso Q con la misma función de pertenencia.

En consecuencia, la varianza y la asimetría (medidas a partir del segundo y tercer momento centrales) de la variable difusa que aproxime la incertidumbre sobre el rendimiento futuro de una cartera, coincidirán con las correspondientes varianza y asimetría posibilisticas del número difuso cuya función de pertenencia sea la misma que la de la variable difusa. Lo que evidencia la aplicabilidad de dichas aproximaciones rígidas de los momentos centrales posibilísticos.

Notar que este resultado sólo se ha establecido para el punto medio -valor esperado posibilístico, $M^k(Q)$- de los intervalos de medias centrales con peso unitario de todos los γ-conjuntos de nivel y con variables difusas de tipo LR, con soporte acotado.

En cuanto a los modelos de selección de carteras que utilizan medidas absolutas del riesgo de la inversión: desviación media absoluta (MAD) y semi-desviación media absoluta (que solo penaliza las desviaciones negativas respecto del rendimiento esperado) se han establecido los siguientes resultados.

Para un número difuso $Q = (a,A,B,b)_{LR}$, tal que $M(Q) = e$, su riesgo lateral se define como la semi-desviación media absoluta $D = max\{0, e - Q\}$, y aplicando Def. 5 el intervalo de medias del riesgo lateral es [25]:

$$\tilde{E}(D) = [0, (B-A) + (A-a)\int_0^1 L(t)dt + (b-B)\int_0^1 R(t)dt] \tag{12}$$

El riesgo lateral posibilístico, $w(Q)$, se mide mediante la amplitud del intervalo $\tilde{E}(D)$ [27]. En cuanto a las relaciones que existen entre los momentos absolutos de las variables difusas de tipo LR y los valores esperados posibilísticos para los correspondientes números difusos de tipo LR:

Proposición 3 [26]. La desviación media absoluta de una variable difusa de tipo LR ξ, cuya función de pertenencia μ_ξ viene dada por $(a,A,B,b)_{LR}$ es la siguiente:

$$\text{MAD}(\xi) = E(|\xi - e|) = \begin{cases} (A-a)\int_{\frac{A-e}{A-a}}^1 L(t)dt & \text{si } a \le e \le A \\ \frac{1}{2}w(\xi) & \text{si } A \le e \le B \\ (b-B)\int_{\frac{e-B}{b-B}}^1 R(t)dt & \text{si } B \le e \le b \end{cases} \tag{13}$$

donde $E(\xi) = e$ es el valor esperado y siendo:

$$w(\xi) = (B-A) + (A-a)\int_0^1 L(t)dt + (b-B)\int_0^1 R(t)dt. \tag{14}$$

En consecuencia, se tiene que:

- $w(\xi)$ coincide con el valor del riesgo lateral posibilístico de $(a,A,B,b)_{LR}$.
- La ambigüedad del número $(a,A,B,b)_{LR}$ coincide con la semi-amplitud de su intervalo de medias (veáse [4]).
- Si el valor esperado posibilístico e está en el núcleo de la función de pertenencia, $[A,B]$, la ambigüedad coincide con la desviación media absoluta.
- Si el valor esperado posibilístico e del número difuso $(a,A,B,b)_{LR}$ se alcanza fuera del núcleo [A,B], la medida de incertidumbre del riesgo aumenta.

Las relaciones que hemos establecido entre los momentos posibilísticos y los momentos basados en la distribución de credibilidad de un número difuso de tipo LR, refuerzan la importancia de las formulaciones de los problemas de optimización difusa que han optado por aproximaciones que transforman las variables difusas (números difusos, respectivamente) en valores esperados en términos de las medidas de credibilidad (valores esperados posibilísticos). Además, dichas aproximaciones son fundamentalmente equivalentes cuando trabajamos con cantidades difusas modelizadas a partir de funciones de pertenencia de tipo LR con soporte acotado, luego habría que poner más énfasis en una adecuada modelización de la incertidumbre a partir de los datos o información disponibles.

4 MODELOS DE SELECCIÓN DE CARTERAS CON RENDIMIENTOS DIFUSOS

Consideremos un mercado de valores en el que cotizan las acciones de n compañias que ofreceran rendimientos inciertos en el futuro. Un inversor desea seleccionar una cartera en la que invertirá todo su capital y para ello ha de saber que cantidad x_i ha de invertir en cada uno de los n activos. Para cuantificar la incertidumbre del rendimiento futuro de una determinada cartera $X = (x_1,...,x_n)$ utilizaremos los datos de los rendimientos históricos de los activos, que nos permitirán establecer las caracerísticas de las variables difusas asociadas. El inversor puede imponer condiciones de diversificación (acotando la cantidad máxima que puede invertirse en uno o varios de los activos) y de cardinalidad de la cartera, que ha de constar de k activos.

4.1 Modelo posibilístico de media-varianza-asimetría

La formulación matemática del modelo posibilístico de media-varianza-asimetría mediante una aproximación multi-objetivo es la siguiente:

$$\begin{array}{lll} (\textbf{MVS}) & \max & E(\xi_X) \\ & \min & E^{(2)}(\xi_X) \\ & \max & E^{(3)}(\xi_X) \\ & \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & & 0 \leq x_j \leq u_j \ j = 1,\ldots,n \\ & & k_l \leq k \leq k_u \end{array} \tag{15}$$

siendo ξ_X el número difuso LR que aproxima la incertidumbre sobre el rendimiento futuro de la cartera X. El tercer momento central permite medir el comportamiento asimétrico de los rendimientos de la cartera, siendo preferible para el inversor que la asimetría sera positiva.

Notar que si no se consideran las restricciones de diversificación y cardinalidad tenemos un modelo equivalente al (MVS) propuesto en [12] para variables difusas. Los autores aplican un esquema de simulación difusa y un algoritmo genético para resolver los tres problemas escalares asociados, asignando cotas sobre los otros objetivos, resolviéndolos para variables difusas triangulares. En este caso, las formulaciones basadas en distribuciones de credibilidad de los rendimientos de los activos son equivalentes a las correspondientes propuestas posibilísticas.

Por otra parte, la inclusión de la restricción de cardinalidad convierte estos problemas de optimización en problemas NP-duros, que pueden resolverse mediante procedimientos heurísticos [19, 1].

4.2 Modelo posibilístico de media-riesgo lateral-asimetría

En [25] planteamos un modelo posibilístico de media-riesgo lateral-asimetría (MDRS), en el que la aversión al riesgo se mide mediante la función $w(\xi_X)$, en tanto que la asimetría se evalúa mediante el coeficiente posibilístico de asimetría:

$$S(\xi_X) = \frac{E^{(3)}(\xi_X)}{w(\xi_X)^3}. \tag{16}$$

La formulación multi-objetivo del problema es la siguiente:

$$\begin{array}{lll} (\textbf{MDRS}) & \max & E(\xi_X) \\ & \min & w(\xi_X) \\ & \max & S(\xi_X) \\ & \text{s.a.} & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & & 0 \leq x_j \leq u_j \ j = 1,\ldots,n \\ & & k_l \leq k \leq k_u \end{array} \tag{17}$$

El problema de seleccionar carteras eficientes para el modelo (MDRS) se ha resuelto bajo un esquema biobjetivo, acotando inferiormente el rendimiento esperado o el coeficiente de asimetría, respectivamente, y aplicando un algoritmo evolutivo. Los resultados obtenidos sugieren que para obtener carteras con mayores rendimientos (también con mayor riesgo) es mejor considerar la asimetría como restricción que como objetivo del problema de optimización.

4.3 Modelo credibilístico de media-desviación absoluta

Finalmente, planteamos un modelo credibilístico de selección de carteras en el que el riesgo de la inversión se mide utilizando la desviación media absoluta (Eq. 13). La consideración de la desviación media absoluta como medida del riesgo de la inversión fue sugerida en [10], donde se proponía una aproximación lineal del problema de selección de carteras, lo que permitió resolver instancias que involucraban un gran número de activos, cuyos rendimientos históricos habían sido evaluados durante largos periodos de tiempo. Nuestra propuesta consiste en formular el modelo credibilístico de media-desviación absoluta como un problema biobjetivo no lineal, en el que la asimetria se considera como una restricción del problema:

$$\begin{array}{lll} (\textbf{CMAD}) & \max & E(\xi_X) \\ & \min & E(|\xi_X - E(\xi_X)|) \\ & \text{s.a.} & E^{(3)}(\xi_X) \geq \rho \\ & & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & & 0 \leq x_j \leq u_j \ j = 1,\ldots,n \\ & & k_l \leq k \leq k_u \end{array} \tag{18}$$

En [26] resolvemos este problema aplicando una estrategia evolutiva en diferentes etapas. Por otra parte, la modelización de la incertidumbre mediante variables difusas nos ha permitido incorporar el Valor-en-Riesgo difuso (FVaR) de una cartera:

$$FVaR_{100*\gamma\%} = -100 * \sup\{r : \mathrm{Cr}\{\xi_X \leq r\} \leq \gamma\} \tag{19}$$

Por ejemplo, el $\mathrm{VaR}_{5\%}$ difuso es el valor 0.05-optimista de la variable difusa $\eta = -100 * \xi_X$, que representa la incertidumbre sobre el porcentaje de pérdida en un horizonte temporal. Estableciendo cotas sobre el porcentaje de pérdida de la inversión con un determinado nivel de confianza $(100 * (1-\gamma)\,\%)$ podemos determinar las mejores carteras eficientes.

Referencias

[1] J.D. Bermúdez, J.V. Segura, E. Vercher: A multi-objective genetic algorithm for cardinality constrained fuzzy portfolio selection. *Fuzzy Sets and Systems* 188, pp. 16-26, 2012.

[2] C. Carlsson, R. Fullér: On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 122, pp. 315–326, 2001.

[3] S. Chanas: On the interval approximation of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems* 122, pp. 353–356, 2001.

[4] M. Delgado, M.A. Vila, W. Voxman: On a canonical representation of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems* 93, pp. 125-135, 1998.

[5] D. Dubois, H. Prade: The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems* 24, pp. 279–300, 1987.

[6] D. Dubois, H. Prade: Fuzzy numbers: an overview. En J. Bezdek (Ed.), *Analysis of Fuzzy Information*, CRC Press, Boca Raton, pp. 3–39, 1988.

[7] Y. Fang, K.K. Lai, S. Wang: *Fuzzy Portfolio Optimization*. Springer, Berlin, 2008.

[8] R. Fullér, P. Majlender: On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 136, pp. 363–374, 2003.

[9] P. Grzegorzewski: Nearest interval approximation of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems* 130, pp. 321–330, 2002.

[10] H. Konno, H. Yamazaki: Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo Stock Market. *Management Science* 37, pp. 519–531, 1991.

[11] T. Lai: Portfolio selection with skewness: a multiple-objective approach. *Review of the Quantitative Finance and Accounting* 1, pp. 293–305, 1991.

[12] X. Li, Z. Qin, S. Kar: Mean-Variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns. *European Journal of Operational Research* 202, pp. 239-247, 2010.

[13] B. Liu: A survey of credibility theory. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 5, pp. 387–408, 2006.

[14] B. Liu, Y-K. Liu: Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10, pp. 445–450, 2002.

[15] H. M. Markowitz: Portfolio selection. *Journal of Finance* 7, pp. 77–91, 1952.

[16] H. M. Markowitz: *Portfolio selection: Efficient diversification of Investments*, Wiley, New York, 1959.

[17] C. Papahristodoulou, E. Dotzauer: Optimal portfolios using linear programming models. *Journal of Operational Research Society* 55, pp. 1169–1177, 2004.

[18] A. Saedifar, E. Pasha: The possibilistic moments of fuzzy numbers and their applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 223, pp. 1028-1042, 2009.

[19] H. Soleimani, H. R. Golmakani, M. H. Salimi: Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications* 36, pp. 5058–5063, 2009.

[20] M.G. Speranza: Linear programming model for portfolio optimization. *Finance* 14, pp. 107–123, 1993.

[21] R.E. Steuer, Y. Qi, M. Hirschberger: Suitable-portfolio investors, nondominated frontier sensitivity, and the effect of multiple objectives on standard portfolio selection. *Annals of Operations research* 152, pp. 297–317, 2007.

[22] H. Tanaka, P. Guo: *Possibilistic Data Analysis for Operations Research*. Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.

[23] E. Vercher: Portfolios with fuzzy returns: selection strategies based on semi-infinite programming. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 217, pp. 381–393, 2008.

[24] E. Vercher, J.D. Bermúdez: Fuzzy Portfolio Selection Models: A Numerical Study. En: M. Doumpos, C. Zopounidis, P. M Pardalos (Eds.), *Financial Decision Making Using Computational Intelligence*, Springer, New York, pp. 245–272, 2012.

[25] E. Vercher, J.D. Bermúdez: A possibilistic Mean-Downside Risk-Skewness model for efficent portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 21(3), pp. 585–595, 2013.

[26] E. Vercher, J.D. Bermúdez: Generating efficient portfolios with credibility mean-absolute deviation models. Technical Report: TR Departament Estadística i Investigació Operativa, Universitat de València, 2013.

[27] E. Vercher, J.D. Bermúdez, J.V. Segura: Fuzzy portfolio optimization under downside risk measures. *Fuzzy Sets and Systems* 158, pp. 769–782, 2007.

[28] J.L. Verdegay, R.R. Yager, P.P. Bonissone: On heuristics as a fundamental constituent of soft computing. *Fuzzy Sets and Systems* 159, pp. 846–855, 2008.

[29] B. Wang, S. Wang, J. Watada: Fuzzy Portfolio Selection Models with Value-at-Risk. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 19(4), pp. 758–769, 2011.

[30] L.A. Zadeh: Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems* 1, pp. 3–28, 1978.

La ordenación de unidades productivas en Análisis de Datos Envolvente Difuso

Teresa León Mendoza[1], **Inmaculada Sirvent Quilez**[2]

[1]*Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universitat de Valéncia*, teresa.leon@uv.es
[2]*Centro de Investigación Operativa. Universidad Miguel Hernández*, isirvent@umh.es

Resumen

Existen en la literatura varios modelos para evaluar la eficiencia técnica de un conjunto de unidades productivas (DMUs) utilizando el Análisis de Datos Envolvente Difuso (FDEA). En algunos modelos, además, se propone un criterio para ordenar dichas unidades en función de su eficiencia, que suele ser un número difuso. Habitualmente se procede eligiendo un método para odenar números difusos y aplicándolo para las eficiencias. A esta metodología se le puede plantear la misma objección que surge en el caso del DEA clásico y es que las DMUs no deberían ser ordenadas según su eficiencia por no ser un criterio objetivo. Es bien sabido que en DEA cada DMU es evaluada de la manera más favorable posible para ella, por tanto las eficiencias no son comparables entre sí al no estar basadas en una regla común. La evaluación de la eficiencia cruzada se introdujo como una extensión del DEA para ordenar DMUs. Si se tienen n DMUs, el método de las eficiencias cruzadas utiliza todos los multiplicadores obtenidos en el modelo de los multiplicadores del DEA para generar n puntuaciones para cada DMU. Así cada DMU es evaluada usando los mismos vectores de multiplicadores consiguiendose una puntuación final (puede ser su promedio) que puede considerarse como más objetiva para posteriormente ordenar las DMUs. Hemos revisado diferentes propuestas de medidas de eficiencia difusa para plantear un método de eficiencia cruzada difuso. Fundamentalmente nos hemos centrado en aquellos modelos basados en el modelo de los multiplicadores por permitir una definición más directa. En particular discutiremos los resultados obtenidos al considerar el modelo de Guo y Tanaka.

Palabras Clave: Análisis Envolvente de Datos Difuso, Eficiencia Cruzada, Ordenación.

1. EL ANÁLISIS DE DATOS ENVOLVENTE Y LA EFICIENCIA CRUZADA

El DEA es una metodología dedicada al análisis de fronteras de producción y a la medición de la eficiencia productiva. Un modelo DEA proporciona medidas de la eficiencia relativa de una unidad en lo referente al uso de m inputs para producir s outputs. Una DMU se evalúa como eficiente si, y sólo si, el comportamiento de otras DMUs no muestra que alguno de sus inputs o outputs pueda ser mejorado sin empeorar alguno de los restantes inputs o outputs. Si sólo hubiera un input y un output todo sería muy sencillo: para cada DMU podríamos calcular el cociente entre el output y el input. El mejor comportamiento lo tendría aquella DMU cuyo cociente sea mayor (produce más con menos) y para calcular la eficiencia relativa se dividiría cada eficiencia entre la eficiencia máxima. En general se tienen múltiples inputs y outputs, así que la extensión natural del caso anterior consistiría en definir la eficiencia de una DMU como un cociente cuyo numerador es una suma ponderada de inputs y cuyo denominador es una suma ponderada de outputs. Esta medida para ser justa debería, en principio, usar el mismo conjunto de pesos para todas las DMUs. Pero esto no es nada fácil. Charnes, Cooper y Rhodes [1] propusieron que para cada DMU se elijan los pesos de manera que su eficiencia sea máxima (vemos a la DMU de la mejor manera posible) Esta flexibilidad en la elección de los pesos es una debilidad y un punto fuerte. Debilidad porque una buena elección de los pesos puede hacer aparecer como eficiente a cierto tipo de DMUs (las que tienen una puntuación muy alta en un output aunque en los demás es baja), pero también es cierto que cuando una DMU resulta ineficiente es difícil argumentar lo contrario.

La evalución de la eficiencia cruzada surgió como una extensión del DEA que permitía ordenar DMUs ([2], [10]). La idea fundamental es evaluar cada DMU utilizando no sólo sus pesos sino los de todas las demás por ejemplo hayando el promedio de todas las eficiciencias cruzadas. De esta manera es posible obtener una ordenación de

las DMUs basada en un criterio objetivo. Supongamos n DMUs que usan m inputs para producir s outputs descritos en términos de los vectores $\{(X_j, Y_j), j = 1, \ldots, n\}$. Para evaluar la eficiencia cruzada se utiliza el modelo CCR ([1]) que proporciona una medida de la eficiencia relativa de una unidad dada DMU_0 mediante la solución del problema siguiente:

$$\begin{array}{lll} (P0) & \text{Max} & z = \frac{\mu^t Y_0}{\nu^t X_0} \\ & \text{s.a.} & \frac{\mu^t Y_j}{\nu^t X_j} \leq 1, \text{ j=1, } \ldots \text{ n} \\ & & \nu \geq 0_m, \mu \geq 0_s \end{array}$$

Este problema fraccionario puede transformarse en un problema lineal que recibe el nombre de formulación de los multiplicadores:

$$\begin{array}{lll} (P1) & \text{Max} & z = \mu^t Y_0 \\ & \text{s.a.} & \nu^t X_0 = 1 \\ & & \mu^t Y_j - \nu^t X_j \leq 0, \text{ j=1, } \ldots \text{ n} \\ & & \nu \geq 0_m, \mu \geq 0_s \end{array}$$

Se plantea y se resuelve un problema para cada una de las n DMUs, las n soluciones óptimas obtenidas $\{(\mu_d, \nu_d)\}_{d=1,\ldots,n}$ proporcionan los pesos que se usarán para calcular la eficiencia cruzada de cada una de ellas. En particular para evaluar la unidad j-esima con los pesos de la unidad d-ésima se utiliza la fórmula :

$$E_{dj} = \frac{\mu_d^t Y_j}{\nu_d^t X_j}, \text{ d = 1, } \ldots \text{, n} \qquad (1)$$

La eficiencia cruzada de la j-ésima DMU se obtiene agregando las eficiencias E_{dj}, por ejemplo hallando su media:

La posible existencia de soluciones óptimas alternativas cuando se resuelve el modelo CCR para alguna DMU es una dificultad a tener en cuenta en el cálculo de las eficiencias cruzadas. Se ha propuesto como solución la utilización de objetivos secundarios para elegir entre los pesos óptimos alternativos. Dos de los procedimientos más conocidos son los que utilizan respectivamente la conocida como *formulación benevolente* y la conocida como *formulación agresiva* ([2], [10]). Para obtener la eficiencia cruzada de una unidad la formulación benevolente selecciona el conjunto de pesos que mantiene el valor de la eficiencia de dicha unidad y al mismo tiempo beneficia lo máximo posible a las demás DMUs mientras que, si se utiliza la formulación agresiva, se mantiene el valor de la eficiencia de dicha unidad pero se busca disminuir las eficiencias cruzadas de las demás.

El problema dual del problema lineal $(P1)$ es

$$\begin{array}{lll} (P2) & \text{Min} & \theta \\ & \text{s.a.} & \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq \theta X_0 \\ & & \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_0 \\ & & \lambda \geq 0_n \end{array}$$

Este modelo recibe al nombre de modelo de Farrel o formulación de envoltura. Es fácil comprobar que para todas las DMU's su valor óptimo es finito. Aplicando el teorema de dualidad de la Programación Lineal ambos problemas tienen el mismo valor óptimo y los multiplicadores asociados a cada DMU en el cálculo de su eficiencia pueden obtenerse también como los valores de las variables duales en el óptimo del modelo de envoltura. Por tanto, también las eficiencias cruzadas se pueden calcular a partir de esta formulación.

2. EVALUACIÓN DE LA EFICIENCIA DIFUSA Y LA EFICIENCIA CRUZADA DIFUSA

La metodología clásica requiere un conocimiento preciso tanto de los inputs como de los outputs de las DMUs. Sin embargo, en numerosas aplicaciones, este conocimiento es impreciso o vago por lo que se han propuesto numerosos métodos que resuelven problemas de programación difusa para manejar esta incertidumbre.

La propuesta de Sengupta es la primera que hemos encontrado en la literatura [9], el autor considera difusos tanto la función objetivo como las restricciones y analiza el modelo resultante mediante el método de Zimmermann [13]. Kao and Liu [6] desarrollan un método para hallar las funciones de pertenencia de las puntuaciones de eficiencia que se obtienen cuando algunas de las observaciones son números difusos. La idea está basada en los α- cortes y el principio de extensión de Zadeh [12]. El enfoque de Hougaard [5] permite combinar los valores de la eficiencia técnica con otras fuentes de información como por ejemplo las opiniones de expertos. Las propuestas de Guo y Tanaka [3] y Lertworasirikul y otros [8], usan programación posibilística explotando la formulación de los multiplicadores a diferencia de la de León y otros [7] basada en una formulación de tipo envoltura (concretamente un modelo BCC con orientación input, que esencialmente es como el (P1) al que se le añade la restricción de que la suma de las variables λ_i sea igual a 1). En el artículo de Hatami y otros [4] se puede encontrar una revisión bastante exhaustiva y reciente de la literatura.

Cuando nos planteamos por primera vez abordar una definición de eficiencia cruzada difusa pensamos en trabajar con el modelo de de León y otros [7] sin embargo lo descartamos porque no proporciona directamente los vectores de multiplicadores y obtenerlos no es, ni mucho menos, tan directo como en el caso de la Programación Lineal clásica. La cuestión es que, en la práctica, la eficiencia de una DMU se obtiene resolviendo una sucesión de problemas lineales (de tipo envoltura) definidos en función del nivel de posibilidad y la obtención de un conjunto de pesos consistente es más que dudosa. Nótese que para cada nivel de posibilidad se obtendría *al menos una* solución óptima para el dual del correspondiente problema lineal.

Los modelos basados en la formulación de los multiplicadores que no permiten la definición de la eficiencia como un cociente entre una suma ponderada de inputs y una suma ponderada de outputs tampoco eran los candidatos naturales a ser extendidos para obtener eficiencias cruzadas consistentes con la definición de eficiencia relativa que proporciona el correspondiente modelo. Por ejemplo en el modelo de Lertworasirikul y otros [8] la eficiencia posibilistica $\bar{f}$ de una DMU a un cierto nivel de posibilidad α (α es un vector que especifica los niveles de posibilidad para cada restricción) se calcula resolviendo un problema posibilístico que, bajo unas condiciones fácilmente asumibles, se transforma en un problema (lineal o no lineal según el tipo de funciones de pertenencia de los parámetros difusos). Finalmente $\bar{f}$ acaba obteniéndose como una suma ponderada de los límites superiores de los α-cortes de los outputs. Sin embargo los límites superior e inferior de los α-cortes de los inputs aparecen en la restricción de normalización por lo que no queda claro qué denominador debería escogerse para definir la eficiencia cruzada.
Incluso los modelos de DEA difusos basados en la formulación *tipo cociente* podían presentar dificultades a la hora de definir las eficiencias cruzadas de manera consistente. Por ejemplo, el modelo de Kao y Liu [6] usa diferentes fronteras para calcular cada uno de los límites de los α-cortes de las puntuaciones de eficiencia difusos. Por tanto podrían usarse diferentes combinaciones de pesos y límites de los α-cortes para obtener los límites de los α-cortes de las eficiencias cruzadas aunque ninguno de ellos nos pareció que proporcionase un resultado satisfactorio.
Finalmente optamos por extender el modelo de Guo y Tanaka [3] (basado en una formulación de multiplicadores) porque, aunque había que resolver alguna cuestión técnica, encontramos una forma de definir las eficiencias cruzadas consistente y que respetaba el espíritu del modelo original.

2.1. EL MODELO DE GUO Y TANAKA

Vamos a resumir brevemente la propuesta de estos autores aunque se recomienda la lectura del trabajo original [3] a los lectores interesados. Se considera que los inputs y los outpus son números triangulares simétricos.
Un número triangular se denota como $A = (c_l, a, c_r)$ siendo a el centro, $a - c_l$ es el extremo inferior y $a + c_r$ el extremo superior. Cuando $c_l = c_r$ se dice que A es un numero triangular simétrico.
Considerando un conjunto de n DMUs descritas mediante m inputs y s outputs triangulares simétricos, Guo y Tanaka se basan en el modelo CCR para plantear su modelo difuso que denotaremos (FP1):

$$\begin{array}{lll} (FP1) & \text{Max} & \mu^t Y_0 \\ & \text{s.a.} & \nu^t X_0 \approx \tilde{1} \\ & & \mu^t Y_j \lesssim \nu^t X_j, \text{ j=1, ... n} \\ & & \nu \geq 0_m, \mu \geq 0_s \end{array}$$

donde $X_j = (x_j, c_j)$ es el vector m-dimensional difuso de inputs e $Y_j = (y_j, d_j)$ es el vector s-dimensional difuso de outputs de la DMUj $j = 1, \ldots, n$, y $\tilde{1}$ denota al número difuso triangular $(1, e)$ donde $e < 1$ se obtiene como

$$e = max_{j=1,\ldots,n}(max_{i=1,\ldots,m} \frac{c_{ij}}{x_{ij}}) \tag{2}$$

Además se asume que $x_j - c_j > 0$ y $y_j - d_j > 0$ porque solo se consideran inputs y outputs positivos. Los autores justifican que (FP1) puede reescribirse como:

$$\begin{array}{lll} (Ph) & \text{Max} & \mu^t y_0 - (1-h)\mu^t d_0 \\ & \text{s.a.} & \nu^t c_0 \geq g_0 \\ & & \nu^t x_0 - (1-h)\nu^t c_0 = 1 - (1-h)e \\ & & \nu^t x_0 + (1-h)\nu^t c_0 = 1 + (1-h)e \\ & & \mu^t y_j - (1-h)\mu^t d_j \leq \nu^t x_j - (1-h)\nu^t c_j, \ \forall j \\ & & \mu^t y_j + (1-h)\mu^t d_j \leq \nu^t x_j + (1-h)\nu^t c_j, \ \forall j \\ & & \nu \geq 0_m, \mu \geq 0_s \end{array}$$

siendo $h \in [0,1]$ un nivel de posibilidad prefijado por el decisor y g_0 el valor óptimo de un problema lineal auxiliar que se resuelve para encontrar ν tal que $\nu^t X_0 \approx \tilde{1}$.
Definen la puntuación de eficiencia de la DMU_0 como un número triangular no simétrico $E = (\omega_l, \eta, \omega_r)$ como sigue:

$$\eta = \frac{\mu^{*t} y_0}{\nu^{*t} x_0}, \tag{3}$$

$$\omega_l = \eta - \frac{\mu^{*t}(y_0 - d_0(1-h))}{\nu^{*t}(x_0 + c_0(1-h))} \tag{4}$$

$$\omega_r = \frac{\mu^{*t}(y_0 + d_0(1-h))}{\nu^{*t}(x_0 - c_0(1-h))} - \eta \tag{5}$$

siendo ν^* y μ^* las soluciones óptimas de (Ph).

2.2. UNA PROPUESTA PARA LA DEFINICIÓN DE LAS EFICIENCIAS CRUZADAS

Definimos las eficiencias cruzadas de las diferentes DMUs de la siguiente manera:
Si (ν_d, μ_d) es una solución óptima de (Ph) para la DMU_d , entonces la eficiencia cruzada difusa de la DMU_j, $1 \leq j \leq n$ obtenida con los pesos de la DMU_d se define como el número triangular no simétrico $E_{dj} = (\omega^l_{dj}, \eta_{dj}, \omega^r_{dj})$

$$\eta_{dj} = \frac{\mu_d^t y_j}{\nu_d^t x_j}, \tag{6}$$

$$\omega^l_{dj} = \eta_{dj} - \frac{\mu_d^t(y_j - d_j(1-h))}{\nu_d^t(x_j + c_j(1-h))} \tag{7}$$

$$\omega^r_{dj} = \frac{\mu_j^t(y_j + d_j(1-h))}{\nu_j^t(x_j - c_j(1-h))} - \eta_{dj} \tag{8}$$

La puntuación de eficiencia cruzada $\bar{E}_j$ de la DMU_j, $1 \leq j \leq n$ se calcularía como el promedio de las eficiencias

cruzadas difusas. Aplicando la aritmética de los números triangulares tendríamos que $\bar{E}_j = (\bar{\omega}_j^l, \bar{\eta}_j, \bar{\omega}_j^r)$ donde

$$\bar{\eta}_j = \frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}\eta_{dj},\ \bar{\omega}_j^l = \frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}\omega_{dj}^l,\ \bar{\omega}_j^r = \frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}\omega_{dj}^r \quad (9)$$

Hay una cuestión que no tuvieron en cuenta Guo y Tanaka y es que el problema (Ph) puede tener óptimos alternativos como mostramos en el ejemplo de la última sección. Esto significa que, para tener cuenta estos casos, tanto la definición de eficiencia y como la de eficiencia cruzada tienen que modificarse. En el DEA tradicional para elegir entre los óptimos alternativos se utiliza un objetivo secundario, en nuestro caso proponemos que los pesos se elijan de manera que *favorezcan* a las DMUs (formulación benevolente). En lugar de (Ph) se resuelve el problema (FBh):

Min $\sum_{j=1,j\neq d}^{n}\alpha_j$
sujeto a:
$v_d^t y_d - (1-h)v_d^t d_d = \beta_d$
$v_d^t c_d \geq g_d$
$v_d^t x_d - (1-h)v_d^t c_d = 1-(1-h)e$
$v_d^t x_d + (1-h)v_d^t c_d = 1+(1-h)e$
$\mu_d^t y_j - (1-h)\mu_d^t d_j \leq v_d^t x_j - (1-h)v_d^t c_j, \forall j$
$\mu_d^t y_j + (1-h)\mu_d^t d_j \leq v_d^t x_j + (1-h)v_d^t c_j, \forall j$
$\mu_d^t y_j - (1-h)\mu_d^t d_j - v_d^t x_j - (1-h)v_d^t c_j + \alpha_j = 0, j \neq d$
$v_d \geq 0_m, \mu_d \geq 0_s$
$\alpha_j \geq 0,\ \forall j \neq d$

siendo β_d el valor óptimo del problema (Ph)

Nótese que minimizar la suma de las variables α_j implica de alguna manera maximizar la suma de los límites inferiores de las eficiencias cruzadas de las DMUs. Y dado que Guo y Tanaka entienden por maximizar una variable triangular al nivel h el maximizar el límite inferior del correspondiente *h*-corte, esta formulación iría en consonancia con el modelo original.
Una vez obtenidas las puntuaciones de las eficiencias cruzadas, es necesario elegir un criterio para ordenarlas. Al tratarse de números triangulares muchos de los índices basados en la *defuzzificación* dan los mismos resultados. Podemos utilizar un índice propuesto por Yager [11] que al particularizarlo para un número triangular $A = (c_l, a, c_r)$ queda:

$$Y_2 = a + \frac{1}{4}(c_r - c_l) \quad (10)$$

2.2.1. Ejemplo numérico

Los datos utilizados en este ejemplo pueden encontrarse en la Table 4 del artículo de Guo y Tanaka [3] y hacen referencia a 5 DMUs con 2 inputs y 2 outputs.
En primer lugar queremos hacer énfasis en que Se puede comprobar que tanto $(v_{1D}, v_{2D}, \mu_{1D}, \mu_{2D}) = (0{,}243902, 0, 0, 0{,}160853)$ como $(v_{1D}, v_{2D}, \mu_{1D}, \mu_{2D}) = (0{,}243902, 0, 0{,}228242, 0{,}0052050)$ son soluciones óptimas de (Ph) cuando se evalúa la eficiencia relativa de la DMU D para h=0.4 y lo mismo ocurre para ese nivel y para la DMU B con los pesos $(v_{1B}, v_{2B}, \mu_{1B}, \mu_{2B}) = (0, 0{,}0623306, 0{,}114942, 0{,}160853)$ y $(v_{1B}, v_{2B}, \mu_{1B}, \mu_{2B}) = (0, 0{,}0623306, 0{,}407982, 0)$. Así pues, se pone de manifiesto la necesidad de utilizar un segundo objetivo.
Las eficiencias cruzadas de las DMUs A, B, C, D y E para h=0.8 obtenidas mediante la formulación benevolente son respectivamente:
$\bar{E}_A = (0{,}030, 0{,}837, 0{,}031)$, $\bar{E}_B = (0{,}012, 0{,}990, 0{,}013)$, $\bar{E}_C = (0{,}047, 0{,}840, 0{,}050)$, $\bar{E}_D = (0{,}035, 0{,}963, 0{,}037)$, $\bar{E}_E = (0{,}041, 0{,}881, 0{,}043)$.

Sus valores del índice de Yager son respectivamente: 0,838, 0,990, 0,840, 0,963 y 0,881 luego si ordenamos de mayor a menor los índices de las DMUs (a nivel h=0.8) aparecería la siguiente ordenación: B, D, E, C y A. Es decir B sería la más eficiente y A la menos eficiente.

Haciendo los cálculos para otros niveles de posibilidad h, se obtiene esa misma ordenación excepto en el caso de $h = 1$ en el que se produce *un empate* en el primer puesto entre B y E quedando en segundo lugar D, en tercero C y finalmente A.

3. CONCLUSIONES

Tanto los modelos DEA clásicos como los difusos proporcionan una clasificación de las DMUs en dos grupos: eficientes e ineficientes. Sin embargo en numerosas aplicaciones los decisores tienen interés en ordenar las DMUs según su eficiencia. Hemos visto que no es *tan sencillo* extender al caso difuso el concepto de eficiencia cruzada y no parece que pueda haber una definición única válida para cualquier modelo DEA difuso. Aplicando el método descrito en el trabajo para calcular las eficiencias cruzadas y ordenando según el índice de Yager podemos ordenar DMUs cuando se utiliza el modelo de Guo y Tanaka con sus ventajas y limitaciones (por ejemplo solo permite trabajar con inputs y outputs triangulares simétricos).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Proyectos de investigación TIN2009-1432-C02-01 y MTM2009-10479.

Referencias

[1] A. Charnes, W. Cooper, E. Rhodes : Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research* 2, pp. 429–444, 1978.

[2] J.R. Doyle, R. H. Green: Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses,

Journal of the Operational Research Society 45(5), pp. 567–578, 1994.

[3] P. Guo, H. Tanaka: Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems* 119, pp. 149–160, 2001.

[4] A. Hatami-Marbini, A. Emrouznejad , M. Tavana: A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European Journal of Operational Research* 214, pp. 457–472, 2011.

[5] J.L. Hougaard: Fuzzy scores of technical efficiency. *European J. Oper. Res.* 115, pp. 529–541, 1999.

[6] C. Kao, S.T. Liu : Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems* 119, pp 149–160, 2000.

[7] T. Leon, V. Liern, J.L. Ruiz, I. Sirvent : A Fuzzy Mathematical Programming Approach to the Assessment of Efficiency with DEA Models. *Fuzzy Sets and Systems* 139(2), pp. 407–419, 2003.

[8] S. Lertworasirikul, S-C. Fang, J.A. Joines, H.L.W. Nuttle: Fuzzy data envelopment analysis (DEA): a possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems* 139, pp. 379–394, 2003.

[9] J.K. Sengupta: A fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Comput. Math. Appl.* 24, pp 259–266, 1992.

[10] T.R. Sexton, R.H. Silkman, A.J. Hogan : Data envelopment analysis: Critique and extensions,*New directions for evaluation*. Special Issue: Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis 32, pp. 73–105, Winter 1986.

[11] R. R. Yager: A procedure for ordering fuzzy sets of the unit interval. *Inf. Sci* 24, pp. 143–161, 1981.

[12] L.A. Zadeh : Fuzzy Sets. *Information and Control* 8, pp. 338–353, 1965.

[13] H.J. Zimmermann: Description and optimization of fuzzy systems. *Internat. J. General System* 2, pp. 209–216, 1976.

Manejo de incertidumbre en el Problema de Localización de Cobertura Máxima: Una revisión con énfasis en el enfoque difuso

Virgilio Guzmán[1,2], **Antonio D. Masegosa**[1,2], **David Pelta**[1,2], **José Luis Verdegay**[1,2]

[1]*Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, E.T.S. de Ingeniería Informática, Universidad de Granada, 18071, Granada, España*, {admase,dpelta,verdegay}@decsai.ugr.es

[2]*Centro de Investigación en Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones (CITIC), Universidad de Granada, 18071, Granada, España*, vir7609@correo.ugr.es

Resumen

La gestión de la incertidumbre en los problemas de localización de cobertura máxima (PLCM) es muy importante debido a la naturaleza imprecisa de algunos elementos de estos problemas en el mundo real. La demanda generada en los nodos, la distancia entre nodos, la disponibilidad del servicio y el radio de cobertura son los parámetros que comúnmente se pueden considerar inciertos. Los enfoques probabilísticos y los enfoques difusos han sido los más utilizados para modelar la incertidumbre en el PLCM, pero los de corte difuso no están estructurados o sistematizados. Por eso en este artículo se presenta una revisión de los trabajos que han abordado el PLCM con incertidumbre de tipo difuso, como paso previo para el planteamiento sistemático de modelos y soluciones para el mismo.

Palabras Clave: PLCM, Incertidumbre, Estocástico, Probabilístico, Difuso.

1 INTRODUCCIÓN

Los problemas de localización con cobertura tratan de ubicar las instalaciones o servidores teniendo en cuenta que la distancia desde una instalación a un nodo de demanda sea razonable. El problema de localización de cobertura de conjuntos (PLCC) y el de localización de cobertura máxima (PLCM) son los modelos comúnmente utilizados para abordar estos problemas. El PLCC trata de encontrar un número mínimo de instalaciones que cubran todos los nodos, mientras que el PLCM maximiza la demanda cubierta por un número fijo de instalaciones conocido a priori.

El PLCM ha sido ampliamente estudiado y aplicado en numerosas situaciones, principalmente en aquellas donde se intenta cubrir la mayor demanda posible. Este problema fue introducido por Church y Revelle [7] y su objetivo consiste en, dado un conjunto de instalaciones y un conjunto discreto de puntos de demanda, encontrar las mejores ubicaciones para las instalaciones, de tal manera que se maximice la demanda cubierta con una distancia o tiempo crítico predefinido.

Aunque la mayor parte de las aplicaciones del PLCM han usado un enfoque determinista, es decir, se conocen con certeza los parámetros del problema, podemos encontrar muchas situaciones reales en las que este problema presenta dinamismo o incertidumbre en sus elementos. Los elementos que presentan una mayor incertidumbre o imprecisión en este problema son la demanda generada en los nodos, la distancia entre nodos, la disponibilidad del servicio y el radio de cobertura. Cabe aclarar que en algunos problemas se considera distancia física y en otros, distancia en tiempo. Esta diferenciación hace que el radio de cobertura se denomine tiempo de respuesta en algunos trabajos en los que la distancia se mide en tiempo.

En general, podemos distinguir dos tipos de enfoques para modelar la incertidumbre en el PLCM: el enfoque probabilístico y el enfoque basado en técnicas difusas. El primero modela los datos inciertos mediante distribuciones de probabilidad, mientras que el segundo usa conjuntos difusos.

Aunque existen trabajos de revisión sobre el tratamiento de la incertidumbre en problemas de localización [18, 22, 29], hasta donde sabemos no existe ninguna para el caso concreto del PLCM. Por este motivo, en este artículo pretendemos hacer una revisión de los trabajos que abordan el PLCM con manejo de incertidumbre, haciendo un especial énfasis en aquellos que han usado un enfoque difuso.

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma: en la segunda sección se describe con mayor profundidad el PLCM y se proporciona la formulación matemática para las versiones determinista y con manejo de la incertidumbre. En la sección 3 se presenta la revisión de la literatura relativa al manejo de la incertidumbre en el MCLP mediante conjuntos difusos. Finalmente, las conclusiones obtenidas en este trabajo se dan en la última sección.

2 EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE COBERTURA MÁXIMA (PLCM)

El PLCM considera un conjunto discreto de puntos o nodos y un peso asociado a cada punto, el cual representa su nivel de importancia. Se considera también un conjunto discreto de puntos donde se pueden localizar las instalaciones o servidores. El objetivo es encontrar las mejores ubicaciones para un número p de instalaciones de manera que se maximice la demanda cubierta con una distancia predefinida.

El PLCM se formula como sigue:

Notación:

i, I - índice y conjunto de los nodos de demanda.

j, J - índice y conjunto de las localizaciones potenciales para las instalaciones.

N_i - $\{j | d_{ij} \leq S\}$ conjunto de ubicaciones potenciales que pueden cubrir al nodo i dentro del tiempo o distancia S. d_{ij} es la distancia entre el nodo i y la ubicación potencial para la instalación j.

x_j - 1 si una instalación está ubicada en j, 0 en otro caso.

y_i - representa la cobertura del nodo i, 1 si está cubierta $(\exists_j | x_j = 1 \wedge j \in N_i)$, 0 en otro caso.

w_i - valor entre 0 y 1 que representa el peso asociado al nodo i.

S - distancia máxima para responder a una demanda.

p - Número fijo de instalaciones a ubicar.

Formulación:

$$Maximizar \quad Z = \sum_{i \in I} w_i y_i \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq y_i \qquad \forall i \in I \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \tag{3}$$

$$x_j = \{0,1\} \quad \forall j \in J; \qquad y_i = \{0,1\} \quad \forall i \in I \tag{4}$$

En esta formulación, la función objetivo (1) maximiza la demanda cubierta por el conjunto de instalaciones. La restricción (2) establece que una o más instalaciones estarán localizadas dentro la distancia predefinida S a partir del nodo de demanda i. La restricción (3) asegura que el número de instalaciones a ubicar sea p. Por último, las restricciones de (4) indican el carácter binario de las variables.

Como dijimos anteriormente, los elementos del PLCM que puede presentar incertidumbre son la demanda o el peso de los nodos (w_i), la distancia entre los nodos (d_{ij}), el radio de cobertura(S) y la disponibilidad del servicio (f_{ij}), donde f_{ij} indica la disponibilidad del servidor j en el momento de realizar una petición desde el nodo i. Dado que en la formulación original todos los valores se suponen perfectamente conocidos y los servidores siempre disponibles, esta no es válida para el caso en el que alguno de los anteriores elementos presente incertidumbre o la disponibilidad de los servidores no es total. Así, la formulación del PLCM que tiene en cuenta ambos factores sería la siguiente (los elementos que pueden presentar incertidumbre están marcados con $\sim$):

Formulación:

$$Maximizar \quad Z = \sum_{i \in I} \widetilde{w}_i \widetilde{y}_i \tag{5}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in J} x_j = p \tag{6}$$

$$\widetilde{y}_i = \sum_{j \in J} x_j \widetilde{F}(\widetilde{f}_{ij}, \widetilde{d}_{ij}, \widetilde{S}) \qquad \forall i \in I \wedge j \in J \tag{7}$$

$$x_j = \{0,1\} \qquad \forall j \in J \tag{8}$$

$\widetilde{F}(\widetilde{f}_{ij}, \widetilde{d}_{ij}, \widetilde{S})$ es una función genérica que indica en qué grado el nodo de demanda i está cubierto por el servidor j, y que depende de la disponibilidad del servidor, de la distancia a este y del radio de cobertura. Esta función podría corresponder por ejemplo a la probabilidad de que la demanda del nodo i sea cubierta por la instalación j o al grado de pertenencia de la cobertura del nodo i. También puede devolver un valor con incertidumbre, puesto que puede ocurrir que no se conozca con certeza el grado de cobertura del nodo de demanda i por parte de j. De esta manera, la cobertura de un nodo $(\widetilde{y}_i)$, vendría dada por la cobertura agregrada que recibe de todos los servidores.

3 MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE Y SU APLICACIÓN EN EL PLCM

La incertidumbre es inherente a muchos de los problemas de localización de instalaciones y, por tanto, al PLCM, ya que a la hora de resolver este problema podemos tener valores o parámetros desconocidos o imprecisos. Por ello, y en base a la información disponible, puede ser necesario aproximar estos valores con una estimación de los mismos, una medición no exacta de su valor esperado o mediante la opinion de un experto. Además, estos datos pueden depender de factores como el tráfico, el clima o las condiciones

actuales de la carretera. Por este motivo, considerar la incertidumbre en este modelo proporciona una aproximación más realista a la solución del problema en cuestión.

Como se dijo en la introducción, los dos enfoques más usados para abordar la incertidumbre en el PLCM son el enfoque probabilístico y el difuso. El enfoque probabilístico fue el primero usado en la literatura, en modelos como el *Maximun Expected Covering Location Problem* (MEXCLP), planteado por Daskin en [9]. Este trabajo se considera dentro del contexto de los sistemas de emergencia. Su objetivo principal es ubicar de manera óptima un número fijo de p vehículos, maximizando la probabilidad de que cualquier llamada de emergencia sea atendida. Para ello considera una fracción de tiempo de ocupación media en los vehículos. Una variación de este modelo es el TIMEXCLP [24], el cual considera diferentes fracciones de ocupación media a lo largo del día.

Otra variación del MEXCLP es el *Adjusted-MEXCLP* (AMEXCLP) propuesto por Batta et al. [4]. En este trabajo se aplica un factor de ajuste a la función objetivo para considerar que los vehículos de emergencia no operan de forma independiente.

Además del MEXCLP y sus variaciones, Revelle et al. [25] plantearon el *Maximum Availability Location Problem* (MALP). Este modelo busca maximizar la demanda cubierta que encontrará un servidor disponible con un nivel de confianza α, asumiendo una fracción de ocupación igual para todas las localizaciones potenciales.

Dado que los modelos probabilísticos requieren de una distribución de probabilidad, resultan inadecuados cuando no se cuenta con suficientes datos históricos o cuando el proceso de recopilación de los mismos no es fiable o factible. Considerando esta situación, algunos investigadores han planteado la aplicación de la lógica difusa como una técnica apropiada para modelar la incertidumbre en los problemas de localización. Moreno et al. [20] afirman que la vaguedad en los problemas de localización puede ser modelada adecuadamente usando redes con valores difusos que describen los nodos, los pesos o importancia de nodos, las longitudes de los caminos, etc. Bajo este supuesto, podríamos formular el modelo difuso mediante la incorporación de definiciones verbales de los parámetros de entrada. Por ejemplo, podríamos estimar la demanda definiéndola como “aproximadamente 30 peticiones por día" o estimar el tiempo de respuesta expresándolo como “aproximadamente en 5 minutos", etc.

Debido al creciente interés en estos dos enfoques para el manejo de la incertidumbre en el PLCM y motivados por la ausencia, hasta donde sabemos, de una revisión en la que se expongan características relevantes de los modelos desarrollados bajo estos enfoques, en este trabajo hemos revisado la investigación realizada en la última década acerca de los modelos difusos y probabilistos aplicados al PLCM que consideran la incertidumbre.

Con este fin, se realizó una búsqueda en los repositorios científicos Scopus, ScienceDirect y Google Scholar, usando los términos “Maximal covering location problem AND Uncertainty”, “MCLP AND Uncertainty”, “Maximal covering location problem AND fuzzy", “MCLP AND fuzzy”, “Maximal covering location problem AND (stochastic OR probabilistic)” y “MCLP AND (stochastic OR probabilistic)”. Los elementos de los trabajos donde se ha realizado la búsqueda han sido el título, el resumen y las palabras claves y, hemos considerado tanto artículos en revista como artículos en congresos.

En la Figura 1 se muestra un diagrama de barras con la producción científica que hemos encontrado según los criterios de búsqueda definidos anteriormente. Las barras corresponden a los años considerados en la revisión, y sus alturas representan el número total de los artículos que se han publicado en dicho año. El color azul corresponde a los trabajos que se han desarrollado con un enfoque difuso, mientras que el color gris a los que usaron un enfoque probabilístico. En la gráfica se observa que en los primeros 5 años de la década el foco estaba principalmente en el enfoque probabilístico ya que hay una amplia mayoría de papers sobre este tema. Sin embargo a partir de 2009 esta tendencia cambia al crecer el interés en el enfoque difuso, equiparándose el número de publicaciones de ambos enfoques.

La Figura 2 muestra una clasificación de los trabajos encontrados en función del enfoque que usan (difuso o probabilístico) y de los parámetros en los que aplican dicho enfoque para abordar la incertidumbre. Estos parámetros son la demanda generada en los nodos, el tiempo de respuesta, la disponibilidad del servidor y el radio de cobertura. Aquellos círculos que se solapan indican que en dichos trabajos se ha considerado incertidumbre en más de un parámetro. Cuando se considera un sólo parámetro, la demanda y la distancia son los más utilizados. Así mismo, cuando se

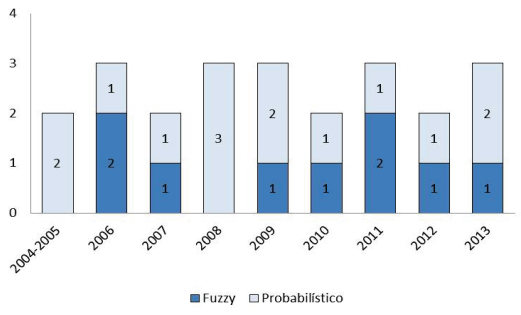


Figura 1: Diagrama de barras con el número de artículos por año que abordan la incertidumbre en el PLCM usando un enfoque difuso (azul) o probabilístico (gris)

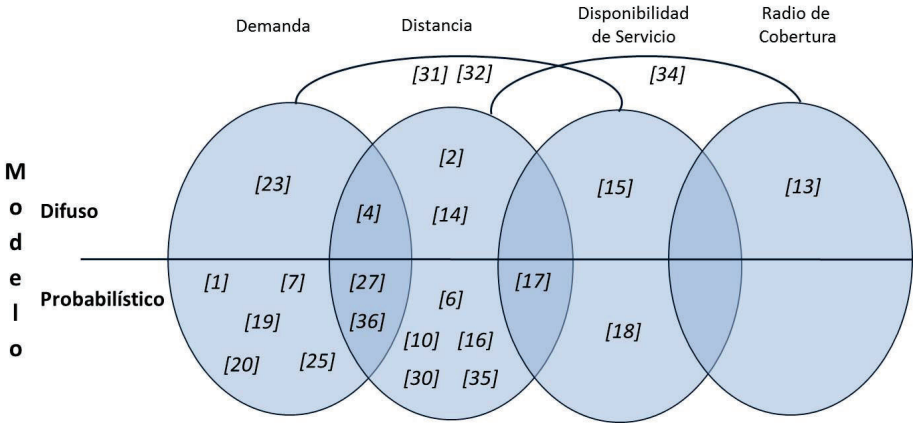


Figura 2: Clasificación de los trabajos tratan la incertidumbre en el PLCM en función del enfoque (difuso o probabilístico) y del/los elemento/s en los que se considera la incertidumbre: demanda, distancia, disponibilidad del servicio y radio de cobertura

considera incertidumbre en más de un parámetro, la combinación de la demanda junto con la distancia y, la demanda junto a la disponibilidad del servicio son las más usuales.

Dado el creciente interés en los últimos años en la aplicación de un enfoque difuso para tratar la incertidumbre en el PLCM, en este trabajo vamos a hacer un especial énfasis en ellos. Por este motivo, en la siguiente sección se describirán los trabajos que se encuentran en la parte superior de la Figura 2.

3.1 MODELOS DIFUSOS PARA EL MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE EN EL PLCM

En esta sección describiremos las características más importantes de los distintos trabajos del PLCM que han modelado la incertidumbre bajo un enfoque difuso, agrupados de acuerdo a los elementos imprecisos que se consideran en ellos y que se muestran en la Figura 2.

Modelos con demanda difusa. Lu et al. [19] utilizan conjuntos difusos para desarrollar un modelo de localización de cobertura máxima basado en colas para determinar las ubicaciones de las unidades de servicios que darán asistencia a la demanda generada por emergencias a gran escala, tales como, terremotos, ataques terroristas, etc. Mediante números difusos triangulares representan la demanda generada en los nodos. Ellos proponen un algoritmo de optimización basada en colonias de hormigas(ACO) para resolver el problema.

Modelos con distancia difusa. Araz et al. [2] abordan el problema de la localización de vehículos de servicios de emergencias y proponen un modelo de localización multiobjetivo basado en la programación por metas difusas para resolverlo. Los tres objetivos considerados para medir la calidad del servicio son la maximización de la población cubierta por un vehículo, la maximización de la población con cobertura adicional y la minimización de la distancia total de viaje desde localizaciones a una distancia mayor que una distancia predefinida.

Davari et al.[11] presentan una versión difusa del PLCM donde los tiempos de viaje entre cualquier par de nodos de la red son considerados como números difusos triangulares. Utilizan la teoría de la posibilidad para modelar el problema y aplican una metaheurística de enfriamiento simulado para estimar la cobertura de la demanda esperada. La demanda de los nodos es generada aleatoriamente con una distribución uniforme con valores entre [0,100].

Modelos con disponibilidad de servicios difusa. Ding [12] considera que la calidad y la confiabilidad en los servicios de emergencias tienen una naturaleza incierta. Mediante números difusos representa la cantidad máxima de clientes que puede atender cada servidor y el tiempo de ocupación que implica atender un servicio. Utiliza la teoría de la posibilidad para desarrollar un modelo de localización de cobertura máxima difuso basado en colas. Aplica un algoritmo de evolución diferencial para resolver el problema.

Modelos con radio de cobertura difuso. Davari et al. [10] consideran el radio de cobertura como un número difuso triangular. Señalan que su modelo podría ser aplicado al problema de la instalación de redes inalámbricas de internet, donde la cobertura depende del tráfico de la red, de las condiciones del clima, de la topografía de la zona y de algunos otros factores que varían con el tiempo. En este trabajo se implementa una metaheurística de búsqueda por entornos variable (VNS) para resolver el problema.

Modelo con demanda y distancia difusa. Batanović, et al. [3] modelan el PLCM en redes considerando un ambiente con incertidumbre. Describen los pesos relacionados a la demanda mediante etiquetas lingüísticas que son representadas por conjuntos difusos triangulares. Además, amplían el concepto de cobertura al suponer que las fronteras entre el subconjunto de nodos cubiertos y el subconjunto de nodos no cubiertos son inexactas. Los algoritmos implementados en este trabajo se basan en la búsqueda de los nodos potenciales para las instalaciones mediante la aplicación de operaciones de comparación de conjuntos difusos discretos.

Modelos con demanda y disponibilidad de servicios difusa. Shavandi et al. [27] utilizan los conjuntos difusos junto a la teoría de colas para desarrollar un modelo difuso para el PLCM para la localización de centros de servicios de emergencias. Ellos consideran parámetros de colas y restricciones difusas en su modelo. El problema se resuelve usando un algoritmo genético. Bajo el mismo esquema de este trabajo, Shavandi et al. [28] formulan otro modelo de localización difuso en el que los parámetros del modelo son representados mediante números difusos triangulares y los nodos de demanda son asignados a los servidores en función de la distancia existente entre ellos, vista como grados de pertenencia. Esta situación genera que los nodos de demanda sean cubiertos de manera gradual por los servidores.

Modelos con distancia y radio de cobertura difuso. Takaĉi et al. [30] presentan un modelo de localización de cobertura máxima difuso. En este modelo, tanto los tiempos de viaje como el radio de cobertura son considerados como números difusos. Con esta representación difusa, se define un grado de cobertura para los nodos de demanda, donde no existe un corte nítido entre los nodos cubiertos y los no cubiertos. Usan un método de optimización por enjambre de partículas (PSO) para resolver el problema.

4 CONCLUSIONES

En este artículo se ha realizado una revisión de los trabajos que tratan la incertidumbre en el problema de localización de cobertura máxima (PLCM). Los parámetros que se suelen considerar como inciertos en el PLCM son la demanda generada en los nodos, la distancia entre nodos, la disponibilidad del servidor y el radio de cobertura. En este artículo hemos intentado clasificar los distintos trabajos encontrados de acuerdo a estos parámetros.

En esta revisión hemos observado que aunque los primeros modelos que abordaron la incertidumbre en el PLCM usaron un enfoque probabilístico, en los últimos años, se hace notable la aplicación del enfoque que proporcionan los conjuntos y sistemas difusos como una técnica eficaz, aceptada por los investigadores para modelar este problema. Esto se debe, en gran medida, a la necesidad de modelar situaciones que reproduzcan cuanto más mejor el comportamiento de los seres humanos, con una importante componente lingüística-cualitativa difícil de modelar con herramientas probabilísticas. Por este motivo, en este trabajo nos centramos en mayor medida en aquellos trabajos que usaban este enfoque.

Al analizar dichos trabajos, comprobamos que las etiquetas lingüísticas y los números difusos, son las técnicas más comúnmente utilizados para modelar la incertidumbre en los distintos parámetros del PLCM bajo un enfoque difuso. Además en la mayoría de ellos se usan metaheurísticas para resolver el problema de optimización subyacente.

Agradecimientos
Este trabajo ha sido financiado por el proyecto TIN2011-27696-C02-01 del Ministerio de Economía y Competitividad, P11-TIC-8001 de la Junta de Andalucía y Fondos FEDER. El primer autor posee una beca otorgada por el PROMEP, México, establecida en el convenio PROMEP/103.5/12/6059.

Referencias

[1] O.I Alsalloum and G. K. Rand. Extensions to emergency vehicle location models. *Computers & Operations Research*, 33:2725–2743, 2006.

[2] C. Araz, H. Selim, and I. Ozkarahan. A fuzzy multi-objective covering-based vehicle location model for emergency services. *Computers & Operations Research*, 34:705–726, 2007.

[3] V. Batanović, D. Petrović, and R. Petrović. Fuzzy logic based algorithms for maximum covering location problems. *Information Sciences*, 179:120–129, 2009.

[4] R. Batta, J.M. Dolan, and N.N. Krishnamurthy. The maximal expected covering location problem revisited. *Transportation Science*, 23:277–287, 1989.

[5] O. Berman, I. Hajizadeh, and D. Krass. The maximum covering problem with travel time uncertainty. *IIE Transactions*, 45:81–96, 2013.

[6] O. Berman and J. Wang. The probabilistic 1-maximal covering problem on a network with discrete demand weights. *Journal of the Operational Research Society*, 59(10):1398–1405, 2008.

[7] R. Church and C. Revelle. The maximal covering location problem. *Papers of the Regional Science Association*, 32:101–118, 1974.

[8] F.D.A. Corrêa, L.A.N. Lorena, and G.M. Ribeiro. A decomposition approach for the probabilistic maximal covering location-allocation problem. *Computers & Operations Research*, 36(10):2729–2739, 2009.

[9] M.S. Daskin. A maximum expected covering location problem: formulation, properties and heuristic solution. *Transportation Science*, 17:48–70, 1983.

[10] S. Davari, M. H.F. Zarandi, and I.B. Turksen. A greedy variable neighborhood search heuristic for the maximal covering location problem with fuzzy coverage radii. *Knowledge-Based Systems*, 41:68–76, 2013.

[11] S. Davari, M.H. Fazel Zarandi, and A. Hemmati. Maximal covering location problem (MCLP) with fuzzy travel times. *Expert Systems with Applications*, 38:14535–14541, 2011.

[12] S. Ding. An uncertain location-allocation model. *Advanced Materials Research*, 204:449–452, 2011.

[13] E.T. Erdemir, R. Batta, P.A. Rogerson, A. Blatt, and M. Flanigan. Joint ground and air emergency medical services coverage models: A greedy heuristic solution approach. *European Journal of Operational Research*, 207:736–749, 2010.

[14] E. Erkut, A. Ingolfsson, T. Sim, and G. Erdoğan. Computational comparison of five maximal covering models for locating ambulances. *Geographical Analysis*, 41(1):43–65, 2009.

[15] R. D. Galvão, F. Y Chiyoshi, and R. Morabito. Towards unified formulations and extensions of two classical probabilistic location models. *Computers & Operations Research*, 32:15–33, 2005.

[16] H. Jia, F. Ordóñez, and M. M. Dessouky. Solution approaches for facility location of medical supplies for large-scale emergencies. *Computers and Industrial Engineering*, 52(2):257–276, 2007.

[17] O. Karasakal and E.K. Karasakal. A maximal covering location model in the presence of partial coverage. *Computers & Operations Research*, 31:1515–1526, 2004.

[18] F.V. Louveaux. Stochastic location analysis. *Location Science*, 1:127–154, 1993.

[19] X. Lu, Y. Hou., and S. Qiang. A fuzzy queuing facility location model with ant colony optimization algorithm for large-scale emergencies. pages 55–60, 2010.

[20] J.A. Moreno, J.M. Moreno Vega, and J.L. Verdegay. Fuzzy location problems on networks. *Fuzzy Sets and System*, 142:393–405, 2004.

[21] P. Murali, F. Ordóñez, and M.M. Dessouky. Facility location under demand uncertainty: response to a large-scale bio-terror attack. *Socio-Economic Planning Sciences*, 46:78–87, 2012.

[22] S.H. Owen and M.S. Daskin. Strategic facility location: a review. *European Journal of Operational Research*, 111:423–447, 1998.

[23] R. Rahmaniani and M.A. Shafia. A study on maximum covering transportation network design with facility location under uncertainty. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 30(2):78–93, 2013.

[24] J.F. Repede and J.J. Bernardo. Developing and validating a decision support system for locating emergency medical vehicles in Louisville, Kentucky. *European Journal of Operational Research*, 74:567–581, 1994.

[25] C. ReVelle and K. Hogan. The maximum availability location problem. *Transportation Science*, 23:192–200, 1989.

[26] K. Shahanaghi and V. R. Ghezavati. Efficient solution procedure to develop maximal covering location problem under uncertainty (using GA and simulation). *International Journal Of Industrial Engineering And Production Research*, 19:21–29, 2008.

[27] H. Shavandi and H. Mahlooji. A fuzzy queuing location model with a genetic algorithm for congested systems. *Applied mathematics and computation*, 181:440–456, 2006.

[28] H. Shavandi, H. Mahlooji, K. Eshghi, and S. Khanmohammadi. A fuzzy coherent hierarchical location-allocation model for congested systems. *Scientia Iranica*, 13:14–24, 2006.

[29] L. V. Snyder. Facility location under uncertainty: a review. *IIE Transactions*, 38:547–564, 2006.

[30] A. Takaĉi, M. Marić, and D. Drakulić. The role of fuzzy sets in improving maximal covering location problem (MCLP). *10th EEE Jubilee International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, SISY 2012*, pages 103–106, 2012.

[31] R. Tavakkoli-Mogahddam, V. R. Ghezavati, A. Kaboli, and M. Rabbani. An efficient hybrid method for an expected maximal covering location problem. *Studies in Computational Intelligence*, 134:289–298, 2008.

[32] X. Wang, D. Li, C. Ma, and M. Chen. Emergency resource location and allocation under uncertainty of disaster degree. *ICIC Express Letters*, 5(2):311–316, 2011.

Price analysis for prefabricated houses with imprecise data

Ricardo Coelho[1], **Carlos Cruz**[2]

[1]*Institute of Science and Technology, Federal University of São Paulo, rua Talim, 330, 12231-280, São José dos Campos, SP, Brazil*, ricardo.coelho@unifesp.br

[2]*Department of Computer Science and Artificial Intelligence, University of Granada, E-18071, Granada, Spain*, {carloscruz,verdegay}@decsai.ugr.es

Abstract

Regression analysis find out a relationship between variables, i.e, to describe how a dependent variable is related with independent variables. In this work we consider regression analysis with imprecise parameters which are natural in real-life situations. It can be formulated as a fuzzy optimization problem and we apply a novel parametric quadratic programming approach in the transformed problem.

Keywords: Fuzzy logic, Fuzzy quadratic optimization.

1 INTRODUCTION

Regression analysis, which includes any techniques for modeling and analyzing several variables, is a statistical tool that focus in finding a relationship between a dependent variable and one or more independent variables. When this relationship is found, some values of parameters are determined which help a function to best fit in a set of data observations. In regression analysis, it is also interesting to characterize the variation of the depend variable around the independent ones. Regression analysis is widely used for prediction and forecasting, where its use has substantial overlap with the field of machine learning. It is also used to understand, which among the independent variables are relates to the dependent one, and to explore the forms of these relationships. The performance of regression analysis in proactive depends on the form of the data-generating process, and how it relates to the regression approach being used. However, it is more natural that given data are imprecise and vague because they are observations that are subjective. In this context, some technique to deal with these imprecise data must be used, and one of these techniques is fuzzy regression analysis, which is more considered in systems where human estimations is influential.

In [12], fuzzy regression analysis is classified in two categories that are possibilistic regression analysis, which is based on possibility concepts, and least squares method, which minimizes errors between the given outputs and the estimated ones. The first work about possibilistic regression analysis was proposed by Tanaka *et al.* [13], in which is used a fuzzy linear system as a regression model. In [11] and [12], a interval regression analysis, which is a simplest version of possibilistic regression, based on quadratic programming is shown. It is an approach that unify the possibility and necessity regression analysis. Other proposals based on the use of possibility concepts can be found in [1, 7, 8, 14]. Another direction of fuzzy regression is fuzzy least squares approaches and some approaches can be found in [5, 9]. In [6], an approach that uses quadratic programming is shown and it integrates the two categories from fuzzy regression analysis, where it reconciles the minimization of estimated deviations of the central tendency with the minimization of estimated deviations in the spreads of membership functions.

A regression problem can be formulated as a mathematical programming problem, where the objective is to minimize the difference between the estimated values and the observed values. These data lack this kind of exact knowledge, and only approximate, vague and imprecise values are known. Moreover, these imprecise values can be dealt with fuzzy logic. In this case, the concept of fuzzy mathematical programming emerges when it is used. In this work, the input and output data are real numbers and the coefficients of these data are fuzzy numbers.

With this in mind, the goal of this paper is to apply our proposed method, described in [10], in the fuzzy regression analysis. This method is used to solve quadratic programming problems with fuzzy costs in the objective function.

The paper is organized as follows: Section 2 briefly shows about fuzzy linear regression and how transforming a regression problem into mathematical programming problem with fuzzy costs. In this section, a novel approach is shown that solves quadratic programming problems with

fuzzy costs where these are transformed into parametrical quadratic multiobjective programming problems. To clarify the above developments, numerical examples are analyzed in section 3. Finally, conclusions are presented in Section 4.

2 FUZZY REGRESSION BY QUADRATIC PROGRAMMING

In this section, an brief introduction about fuzzy linear regression, which is used extensively in practical applications, is shown that has been based on linear programming when introduced by Tanaka *et al.* [13]. A approach that solves quadratic programming problems with fuzzy costs, where these are transformed into parametrical quadratic multiobjective programming problems, is also described in this section.

2.1 Fuzzy linear regression

Fuzzy linear regression was the first type of regression analysis to be studied because models which depend linearly on their unknown parameters are easier to fit than models which are non-linearly related to their parameters. Fuzzy linear regression models are often fitted using the least squares approach, which is used in this work, or possibilistic regression analysis.

In fuzzy linear regression, the model is a linear combination of the parameters, which are represented by fuzzy numbers, and independent variables that determines the dependent variable. In Table 1, the independent variable, x_{ij}, represents the jth input for the ith sample, when the dependent variable, $\hat{y}_i$, is an estimated value of the output, y_i, that is an observation for the ith sample.

Samples	Output	Inputs
1	y_1	$x_{11},\ldots,x_{1n}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
m	y_m	$x_{m1},\ldots,x_{mn}$

Table 1: Input-output data.

The goal is to find the fuzzy parameters out that obtain the best estimation of the regression problem. Thus, the problem of fuzzy regression can be formulated by a straight line as

$$\tilde{y}_i = \tilde{A}_0 + \sum_{i=1}^{m} \tilde{A}_i x_i \tag{1}$$

where $\tilde{A}_0$ is a fuzzy coefficient and $\tilde{A}_i (i = 1,\ldots,m)$ is a vector of fuzzy coefficients. Each fuzzy coefficient is characterized by a function membership defined by decision maker. The membership function can be defined as

$$\mu_{\tilde{A}_j} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad j \in \{0,1,\ldots,m\}$$

In particular these membership functions will be supposed as:

$$\mu_{\tilde{A}_j}(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } A_j^U \leq y \text{ or } y \leq A_j^L \\ h_{\tilde{A}_j}(y) & \text{if } A_j^L \leq y \leq A_j \\ g_{\tilde{A}_j}(y) & \text{if } A_j \leq y \leq A_j^U \end{cases} \quad j \in \mathbb{J} \tag{2}$$

As the target is to minimize the difference between the observations and the estimations,

$$y_i - \tilde{y}_i = \varepsilon_i \tag{3}$$

where ε_i is the residual, which is a random variable with zero mean. Thus, according to [13] the fuzzy regression analysis by using least square model can be transformed into a fuzzy quadratic programming problem as

$$\begin{aligned} \min \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \tilde{A}_0 - \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_j x_{ij} \right)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^t \mathbf{x}_j + \mathbf{A}^{\mathbf{U}t} |\mathbf{x}_j| \geq y_j \\ & \mathbf{A}^t \mathbf{x}_j - \mathbf{A}^{\mathbf{L}t} |\mathbf{x}_j| \leq y_j \\ & c_i \geq 0, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad j = 1,\ldots,m \end{aligned} \tag{4}$$

2.2 Fuzzy quadratic programming

An optimization problem that is described with a quadratic objective function subject to linear constraints is called a "Quadratic Programming" problem. QP can be viewed both as a special case of the nonlinear programming and a generalization of the linear programming. In the real world problems have parameters that are seldom known exactly and have to be estimated by desision maker. Hence, the $n \times n$ symmetric matrix $\mathbf{Q}$ and the n vector $\mathbf{c}$ have fuzzy numbers in these components. A fuzzy quadratic programming problem can be formulated as

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}} \mathbf{x} + \tfrac{1}{2} \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

where the fuzzy numbers are characterized by membership functions that are defined by decision makers. The membership functions can be defined as

$$\mu_j, \mu_{ij} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad i,j \in \mathbb{J} = \{1,2,\ldots,n\}$$

In particular these membership functions will be supposed as:

$$\mu_j(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } c_j^U \leq y \text{ or } y \leq c_j^L \\ h_j(y) & \text{if } c_j^L \leq y \leq c_j \\ g_j(y) & \text{if } c_j \leq y \leq c_j^U \end{cases} \quad j \in \mathbb{J} \tag{6}$$

and

$$\mu_{ij}(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } q_{ij}^U \le y \text{ or } y \le q_{ij}^L \\ h_{ij}(y) & \text{if } q_{ij}^L \le y \le q_{ij} \\ g_{ij}(y) & \text{if } q_{ij} \le y \le q_{ij}^U \end{cases} \qquad i,j \in \mathbb{J} \tag{7}$$

where $\mathbf{h}(\cdot)$ and $\mathbf{g}(\cdot)$ are assumed to be strictly increasing and decreasing continuous functions, respectively, $h_j(c_j) = g_j(c_j) = 1,\ j \in \mathbb{J}$ and $h_{ij}(q_{ij}) = g_{ij}(q_{ij}) = 1,\ i,j \in \mathbb{J}$.

A multi-objective approach to solve a linear programming problem with imprecise costs is described in [3, 4]. As the linear problem is a particular case of quadratic problem, this approach can be extended to solve quadratic programming problems with fuzzy costs.

The quadratic objective function can be divided into two parts, where the first one is a linear term and the second one is a quadratic term. According to this, the fuzzy costs can only be in the first part or only the second part or in both. In this section, these three ways will be presented separately.

The linear problem considered in [3] used trapezoid membership functions for the costs but here, for the sake of simplicity, they will be supposed to be like (6) and (7).

Then, by considering the $(1-\alpha)$-cut of every cost, $\alpha \in [0,1]$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \mu_j(x) \ge 1-\alpha \Leftrightarrow h_j^{-1}(1-\alpha) \le x \le g_j^{-1}(1-\alpha),$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \mu_{ij}(x) \ge 1-\alpha \Leftrightarrow h_{ij}^{-1}(1-\alpha) \le x \le g_{ij}^{-1}(1-\alpha),$$

where $i,j \in \mathbb{J} = \{1,2,\ldots,n\}$.

Thus, according to the parametric transformations shown above, a fuzzy solution to (5) may be found from the parametric solution of the multiobjective parametric quadratic programming problem

$$\begin{aligned} \min\ & \left[(\mathbf{c^1})^\mathbf{t}\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t}\mathbf{Q^1}\mathbf{x}, (\mathbf{c^2})^\mathbf{t}\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t}\mathbf{Q^1}\mathbf{x}, \ldots,\right. \\ & \ldots, (\mathbf{c^{2^n}})^\mathbf{t}\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t}\mathbf{Q^1}\mathbf{x}, (\mathbf{c^1})^\mathbf{t}\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t}\mathbf{Q^2}\mathbf{x}, \ldots, \\ & \left.\ldots, (\mathbf{c^{2^n}})^\mathbf{t}\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t}\mathbf{Q^2}\mathbf{x}, \ldots, (\mathbf{c^{2^n}})^\mathbf{t}\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x^t}\mathbf{Q^{2^{n^2}}}\mathbf{x}\right] \\ \text{s.t.}\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b},\ \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \\ & \mathbf{c^k}, \mathbf{Q^p} \in \mathbb{E}(1-\alpha),\ \ \alpha \in [0,1], \\ & k = 1,2,\ldots,2^n \text{ and } p = 1,2,\ldots,2^{n^2}, \end{aligned} \tag{8}$$

where $\mathbb{E}(1-\alpha)$, for each $\alpha \in [0,1]$, is the set of vectors in $\mathbb{R}^n$ such that each of its components is either in the lower bound, $h_j^{-1}(1-\alpha)$, or in the upper bound, $g_j^{-1}(1-\alpha)$, of the respective $(1-\alpha)$-cut, that is, $\forall\ k = 1,2,\ldots,2^n$, and $\forall\, i,j \in \mathbb{J}$

$$c^k = (c_1^k, c_2^k, \ldots, c_n^k) \in \mathbb{E}(1-\alpha) \Leftrightarrow c_j^k = \begin{cases} h_j^{-1}(1-\alpha) \\ g_j^{-1}(1-\alpha). \end{cases} \quad \text{or}$$

and

$$\mathbf{Q^k} = (q_{11}^k, \ldots, q_{1n}^k, \ldots, q_{nn}^k) \in \mathbb{E}(1-\alpha) \Leftrightarrow q_{ij}^k = \begin{cases} h_{ij}^{-1}(1-\alpha) \\ g_{ij}^{-1}(1-\alpha). \end{cases} \quad \text{o}$$

The obtained parametrical solutions for any of multi-objective models above, to the different α values, generate a set of solutions and then we use the Representation Theorem to integrate all of these particular alpha-solutions.

3 NUMERICAL EXAMPLE

In this section, a kind of data sets that represents the price mechanism of prefabricated houses is analyzed. The input and output data shown in Table 2 are obtained from the catalogue issued by some corporations, as described in [12]. The computational results and a comparative analysis of the linear and quadratic parametric approaches responses will be presented.

NO.	y_j	x_1	x_2	x_3
1	606	1	38.09	36.43
2	710	1	62.10	26.50
3	808	1	63.76	44.71
4	826	1	74.52	38.09
5	865	1	75.38	41.10
6	852	2	52.99	26.49
7	917	2	62.93	26.49
8	1031	2	72.04	33.12
9	1092	2	76.12	43.06
10	1203	2	90.26	42.64
11	1394	3	85.70	31.33
12	1420	3	92.27	27.64
13	1601	3	105.98	27.64
14	1632	3	79.25	66.81
15	1699	3	120.50	32.25

Table 2: Data related to prefabricate houses.

The tests were all performed on a PC with 2.26GHZ Intel® Core™ 2 Duo processor, 4GB RAM running Ubuntu 9.10 operational system. All the problems presented in this work were resolved using NSGA-II evolutionary algorithm [2] which was implemented in MATLAB® 7.8.0 program. The evolutionary algorithm parameter are 100 generations and 100 individuals in the population, while the crossover and mutation index are 0.6 and 0.3, respectively.

Figure 1 shows that the observations, which are represented by diamonds, are inside of the interval formed by the obtained solutions for the linear formulation. The objective function of this formulation is described for $\min \sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \tilde{A}_0 - \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_j x_{ij} \right|$ subject to the same constraints presented in Problem (4). The upper and lower box-and-whisker diagram, which shows the spread of the

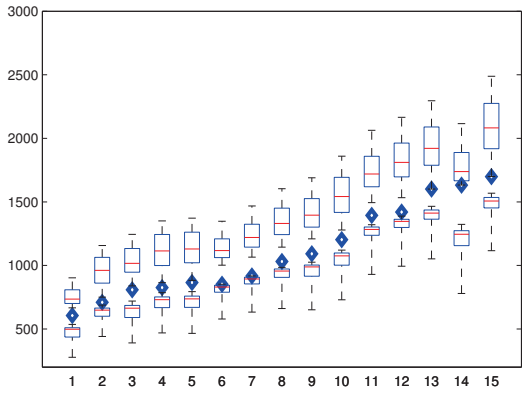


Figure 1: Fuzzy regression model by linear programming for house price data.

data, represent upper and lower values, respectively, of each one fuzzy number of the population of obtained optimal solutions. The box lies between the upper and lower quartiles, and the median can also be indicated by dividing the box into two. The whiskers are straight line extending from the end of the box to the maximum and minimum extreme values.

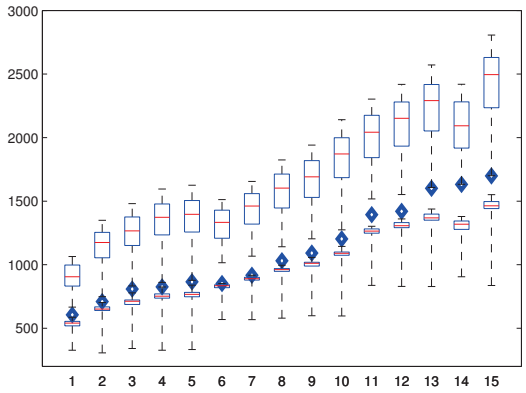


Figure 2: Fuzzy regression model by quadratic programming for house price data.

Figure 2 shows that the observations, which are represented by diamonds, are also inside of the interval formed by the obtained solutions for the quadratic formulation. It is easy to see that the quadratic formulation obtains an interval closer than the linear formulation. Another point is that the most of the lower values are more concentrate and some minimum extreme values are more distant for the lower quartile. Therefore, the quadratic formulation obtains parameters that fit better to the observed values.

4 CONCLUSION

Quadratic Programming problems are very important in a variety of both theoretical and practical areas. When real-world applications are considered, the vagueness appears in a natural way, and hence it makes perfect sense to think in Fuzzy Quadratic Programming problems. In contrast to what happens with Fuzzy Linear Programming problems, unfortunately until now no solution method has been found for this important class of problems. In this context this paper has presented an operative and novel method for solving Fuzzy Quadratic Multi-Objective Programming problems which is carried out by performing two phases which finally provide the user with a fuzzy solution. The obtained solutions allow the authors to follow along this research line trying to solve real problems in practice, in such a way that oriented Decision Support Systems involving Fuzzy Quadratic Programming problems can be built.

An evolutionary algorithm called NSGA-II was used and it produces a sequence of points according to a prescribed set of instructions, together with a termination criterion. Usually we look for a sequence that converges to a set of efficient solutions, but in many cases however we have to be satisfied with less favorable solutions. Then the procedure may stop either 1) if a point belonging to a prefixed set (the solution set) is reached, or 2) if some prefixed condition for satisfaction is verified. In any case, assuming that a solution set is prefixed, the algorithm would stop if a point in that solution set is reached. Frequently, however, the convergence to a point in the solution set is not easy because, for example, of the existence of local optimum points. Hence we must redefine some rules to finish the iterative procedure.

Hence the control rules of the algorithms solving convex programming problems could be associated to the solution set, and to the criteria for terminating the algorithm. As it is clear, fuzziness could be introduced in both points, not assuming it as inherent in the problem, but as help for obtaining, in a more effective way, some solution for satisfying the decision-maker's wishes. This mean that the decision maker might be more comfortable obtaining a solution expressed in terms of satisfaction instead of optimization, as it is the case when fuzzy control rules are applied to the processes.

References

[1] A. BARDOSSY. Note on fuzzy regression. *Fuzzy Sets and Systems*, 37:65–75, 1990.

[2] K. DEB. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. Chichester, UK: John Wiley &

Sons, LTD, 2001.

[3] M. DELGADO, J.L. VERDEGAY, and M.A. VILA. Imprecise costs in mathematical programming problems. *Control and Cybernetics*, 16(2):113–121, 1987.

[4] M. DELGADO, J.L. VERDEGAY, and M.A. VILA. Relating different approaches to solve linear programming problems with imprecise costs. *Fuzzy Sets and Systems*, 37:33–42, 1990.

[5] P. DIAMOND. Fuzzy least squares. *Information Sciences*, 46:141–157, 1988.

[6] S. DONOSO, N. MARÍN, and M. A. VILA. Fuzzy regression with quadratic programming: an application to financial data. *Lecture Notes in Computational Sciences*, 4224:1304–1311, 2006.

[7] G. PETERS. Fuzzy linear regression with fuzy interval. *Fuzzy Sets and Systems*, 63:45–55, 1994.

[8] D. T. REDDEN and W. H. WOODALL. Properties of certain fuzzy linear regrssion methods. *Fuzzy Sets and Systems*, 64:361–375, 1994.

[9] D. SAVIC and W. PEDRYCZ. Evaluation of fuzzy linear regression models. *Fuzzy Sets and Systems*, 39:51–63, 1991.

[10] R. C. SILVA, C. CRUZ, and A. YAMAKAMI. A parametric method to solve quadratic programming problems with fuzzy costs. *IFSA 2009*, 2009.

[11] H. TANAKA, K. KOYAMA, and H. LEE. Interval regression analysis based on quadratic programming. *IEEE*, pages 325–329, 1996.

[12] H. TANAKA and H. LEE. Interval regression analysis by quadratic programming approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(4):473–481, 1998.

[13] H. TANAKA, S. UEJIMA, and K. ASAI. Linear regression analysis with fuzzy model. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 12(6):903–907, 1982.

[14] H. TANAKA and J. WATADA. Possibilistic linear systems and their application to the linear regression model. *Fuzzy Sets and Systems*, 27:275–289, 1988.

HACIA UNA CARACTERIZACIÓN DE LAS UNINORMAS DISCRETAS CON OPERADORES SUBYACENTES SUAVES

Daniel Ruiz-Aguilera, **Joan Torrens**

Universitat de les Illes Balears
Carretera de Valldemossa, km. 7,5
07122 Palma. España,
{daniel.ruiz,jts224}@uib.es

Resumen

En este trabajo se estudian las uninormas discretas cuyas t-norma y t-conorma subyacentes son suaves. Se caracterizan en primer lugar los casos combinando las t-normas mínimo y de Łukasiewicz con las t-conormas máximo y de Łukasiewicz, y se da en cada caso el número total de uninormas con estos operadores subyacentes. Finalmente se caracterizan los casos generales cuando la t-norma y/o la t-conorma son sumas ordinales, obteniendo también el número total de uninormas con operadores subyacentes suaves.

Palabras Clave: Uninormas discretas, cadena finita, suavidad, t-normas, t-conormas.

1 INTRODUCCIÓN

Las uninormas son una clase especial de funciones de agregación binarias que generalizan tanto las t-normas como las t-conormas. Han demostrado su utilidad en muchas aplicaciones diferentes y ello ha llevado a un estudio intensivo de las uninormas desde el punto de vista puramente teórico. Uno de los puntos más interesantes en este campo consiste en la caracterización de las diferentes clases de uninormas que se conocen. Principalmente las uninormas de $\mathscr{U}_{\text{mín}}$ y $\mathscr{U}_{\text{máx}}$ [7], las uninormas idempotentes [1, 16, 11], las representables [2, 7, 15], las que son continuas en el cuadrado abierto unidad [8, 5], las compensatorias [4], e incluso aquellas uninormas cuyas t-norma y t-conorma subyacentes son continuas [6].

Las uninormas son operaciones habitualmente definidas sobre el intervalo $[0,1]$, pero pueden ser generalizadas a muchos otros dominios. En particular, las uninormas definidas sobre una cadena finita han sido estudiadas por diversos autores.

El interés de los operadores definidos sobre una cadena finita radica en su aplicabilidad en los casos en que se trabaja con información cualitativa. Cuando los datos son cualitativos, la mejor herramienta para modelizar la información es probablemente el uso de etiquetas lingüísticas borrosas. En este caso, los términos cualitativos que usan los expertos son representados mediante variables lingüísticas en lugar de usar valores numéricos. Así, se interpreta a menudo que dichas variables lingüísticas toman valores en una escala totalmente ordenada de la forma

$$\mathscr{L} = \{\textit{Fatal, Muy Mal, Mal, Regular, Bien, Muy Bien, Excelente}\}.$$

A nivel práctico, solamente el número de elementos de dicha cadena es relevante por lo que, generalmente, se usa la cadena finita más simple posible, esto es, $L_n = \{0,1,\ldots,n\}$.

Debido a ello, han ido apareciendo en los últimos años numerosos artículos dedicados al estudio de operadores definidos sobre la cadena L_n, habitualmente llamados operadores discretos. Al trabajar con este tipo de operadores, como contrapartida en el caso discreto de la continuidad, se utiliza habitualmente la condición de suavidad. De hecho, en el caso discreto esta propiedad es equivalente tanto a la divisibilidad como a la condición de Lipschitz. De esta manera, diversas clases de funciones de agregación con alguna condición de suavidad han sido estudiadas y caracterizadas. Por ejemplo, en [13, 14] se puede hallar la caracterización de las t-normas y t-conormas discretas suaves, en [12] la de las nulnormas y las uninormas de $\mathscr{U}_{\text{mín}}$ y $\mathscr{U}_{\text{máx}}$, la caracterización de las uninormas idempotentes discretas se puede hallar en [3] y un estudio sobre las medias ponderadas discretas en [10].

Con respecto a las uninormas, es conocido que no existen uninormas suaves sobre L_n. En concreto, la condición de suavidad solo es posible en algunas regiones de L_n^2, como pasa en los casos mencionados de uninormas discretas de $\mathscr{U}_{\text{mín}}$ y $\mathscr{U}_{\text{máx}}$ y uninormas discretas idempotentes. Sin embargo, el caso general de uninormas discretas con operadores subyacentes suaves no ha sido investigado todavía y este es el objetivo principal de esta comunicación. El ar-

tículo está organizado como sigue. En la sección 2 se dan algunos preliminares que se van a usar a lo largo del artículo, mientras que en la sección 3 se presentan los principales resultados. En concreto, dado que las t-normas suaves (y las t-conormas) vienen dadas por el mínimo, la t-norma de Łukasiewicz (el máximo, la t-conorma Łukasiewicz) o sumas ordinales de estos dos tipos de operadores, se ha dividido la section 3 en diversas subsecciones dedicando una de ellas a cada posible combinación de t-norma y t-conorma suaves. En todos los casos en los que no intervienen sumas ordinales, se da la caracterización de las posibles uninormas y el número total de las mismas. En el caso de sumas ordinales, se ve su comportamiento y se conjetura un teorema general de caracterización. Finalmente, en la sección 4 se establecen las conclusiones y el posible trabajo futuro.

2 PRELIMINARES

Supondremos al lector familiarizado con las nociones y resultados básicos sobre uninormas y sus clases, que pueden hallarse por ejemplo en [4, 7, 8, 11, 16].

En estos preliminares recordaremos únicamente algunas nociones y resultados básicos sobre uninormas definidas sobre una cadena finita. En estos casos, las escala concreta que se use no es relevante, siéndolo solo el número de elementos de la misma (ver [14]). De este modo, dado un entero positivo n, trabajaremos a partir de ahora con la cadena finita

$$L_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Utilizaremos de forma indistinta la notación en forma de intervalo $L_n = [0,n]$ y también las notaciones usuales $[0,e]$ y $[e,n]$ con $e \in L_n$ para los correspondientes subconjuntos de L_n.

Definición 1. *Una* uninorma *sobre L_n, llamada también una* uninorma discreta*, es una operación binaria $U : L_n^2 \to L_n$ asociativa, conmutativa, creciente con cada variable y tal que existe un elemento $e \in L_n$, llamado* elemento neutro*, tal que $U(e,x) = x$ para todo $x \in L_n$.*

Resulta obvio que en el caso $e = n$ la correspondiente uninorma U es en realidad una t-norma y que, en el caso $e = 0$, U es en realidad una t-conorma. Para cualquier uninorma U sobre L_n se tiene $U(n,0) \in \{0,n\}$ y llamaremos *conjuntiva* a toda uninorma U con $U(n,0) = 0$ y *disyuntiva* a toda uninorma con $U(n,0) = n$. La estructura de una uninorma U sobre L_n con elemento neutro $0 < e < n$ es siempre de la forma siguiente. Viene dada por una t-norma T sobre el intervalo $[0,e]$, por una t-conorma S sobre el intervalo $[e,n]$ y toma valores entre el mínimo y el máximo en los demás casos, esto es, en la región:

$$A(e) = [0,e[\times]e,n] \cup]e,n] \times [0,e[.$$

Definición 2. *Una función $f : L_n \to L_n$ se dice que es* suave *cuando $\mid f(x) - f(x-1) \mid \leq 1$ para todo $x \in L_n$ tal que $x \geq 1$.*

Definición 3. *De la misma forma, una operación binaria $F : L_n^2 \longrightarrow L_n$ se dice que es* suave *cuando sus secciones verticales y horizontales, $F(x,-)$ y $F(-,y)$, lo son.*

Para la relación entre las propiedades de divisibilidad, suavidad y la condición de Lipschitz para t-normas, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. *Dada una t-norma T sobre L_n, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *T es divisible (para todos $x,y \in L_n$ con $x \leq y$, existe $z \in L_n$ tal que $x = T(y,z)$).*
- *T es suave.*
- *T satisface la condición de Lipschitz.*

La relación entre la propiedad arquimediana ($T(x,x) < x$ para todo $x \in L_n \setminus \{0,n\}$) y la propiedad de suavidad para t-normas (y t-conormas) sobre L_n se estudió en [13] (véase [14] para la versión actual).

Proposición 2 ([14])**.** *Las únicas t-norma y t-conorma arquimedianas suaves sobre L_n son, respectivamente, la t-norma Łukasiewicz*

$$T_{\mathbf{L}}(x,y) = \max(0, x+y-n) \quad \textit{para todos } x,y \in L_n,$$

y la t-conorma Łukasiewicz

$$S_{\mathbf{L}}(x,y) = \min(n, x+y) \quad \textit{para todos } x,y \in L_n.$$

Las t-normas suaves fueron caracterizadas en [13] y [14], obteniendo que son el mínimo, la t-norma de Łukasiewicz o una suma ordinal de t-normas de esas dos clases.

Teorema 1 ([14])**.** *Una t-norma T sobre L_n es suave si y sólo si existe un número natural r con $0 \leq r \leq n-1$ y un subconjunto J de L_n, $J = \{0 = a_0 < \cdots < a_{r+1} = n\}$ tal que T viene dada por $T(x,y) =$*

$$\begin{cases} \max(a_i, x+y-a_{i+1}), & \textit{si } (x,y) \in [a_i, a_{i+1}]^2, 0 \leq i \leq r, \\ \min(x,y), & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Existe un resultado dual para t-conormas suaves que afirma que las únicas son el máximo, la de Łukasiewicz o bien sumas ordinales de ellas [14].

Respecto a las uninormas sobre L_n, las clases de $\mathscr{U}_{\min}$ y de $\mathscr{U}_{\max}$ son las únicas que han sido esudiadas y caracterizadas bajo condiciones parciales de suavidad en [12]. Específicamente, estos tipos de uninormas son como siguen.

Definición 4 ([12])**.** *Una operación binaria $U : L_n^2 \longrightarrow L_n$ es una* uninorma en $\mathscr{U}_{\min}$ *con elemento neutro $0 < e < n$ si y sólo si existe una t-norma T sobre $[0,e]$ y una t-conorma S sobre $[e,n]$ tal que U viene dada por*

$$U(x,y) = \begin{cases} T(x,y), & \textit{si } (x,y) \in [0,e]^2, \\ S(x,y), & \textit{si } (x,y) \in [e,n]^2, \\ \min(x,y), & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

A las uninormas de $\mathscr{U}_{\text{mín}}$ con elemento neutro e las denotaremos por $U \equiv \langle T,e,S\rangle_{\text{mín}}$.

Definición 5 ([12]). *Una operación binaria $U : L_n^2 \longrightarrow L_n$ es una uninorma de $\mathscr{U}_{\text{máx}}$ con elemento neutro $0 < e < n$ si y sólo si existe una t-norm T sobre $[0,e]$ y una t-conorma S sobre $[e,n]$ tal que U viene dada por*

$$U(x,y) = \begin{cases} T(x,y), & si\ (x,y) \in [0,e]^2, \\ S(x,y), & si\ (x,y) \in [e,n]^2, \\ \text{máx}(x,y), & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

A las uninormas de $\mathscr{U}_{\text{máx}}$ con elemento neutro e las denotaremos por $U \equiv \langle T,e,S\rangle_{\text{máx}}$.

También las uninormas discretas idempotentes, aquellas que cumplen $U(x,x) = x$ para todo $x \in L_n$ fueron caracterizadas en [3]. Por completitud en el desarrollo del presente trabajo, citaremos el resultado en la sección 3.1, en lugar de en estos preliminares. Únicamente recordaremos aquí algunos conceptos necesarios para dar dicha caracterización.

Definición 6 ([3]). *Dada una función decreciente $g : L_n \to L_n$, definimos su* grafo completo *F_g como el subconjunto de L_n^2 definido como:*

$$F_g = (\{0\} \times [g(0),n]) \cup (\{n\} \times [0,g(n)]) \cup \{(x,y) \in [0,n-1] \times [0,n] \mid g(x+1) \le y \le g(x)\}.$$

Definición 7 ([3]). *Un subconjunto F de $(L_n)^2$ se llama* Id-simétrico *si para todo $(x,y) \in (L_n)^2$ se cumple que*

$$(x,y) \in F \iff (y,x) \in F.$$

La definición anterior expresa que un subconjunto F de L_n^2 es simétrico respecto a la diagonal $\{(x,x) \mid x \in L_n\}$. Una noción similar de simetría se introduce para una función decreciente $g : L_n \to L_n$.

Definición 8 ([3]). *Una función decreciente $g : L_n \to L_n$ es* Id-simétrica *si su grafo completo F_g es Id-simétrico.*

3 UNINORMAS DISCRETAS CON OPERADORES SUBYACENTES SUAVES

Empezaremos con algunos resultados generales sobre uninormas discretas, que usaremos en las subsecciones siguientes. El primer resultado se refiere a los valores que puede tomar la uninorma en los puntos (r,n) donde r es un elemento idempotente de U en el intervalo $]0,e[$.

Lema 1. *Sea $U \equiv \langle T,e,S\rangle$ una uninorma sobre L_n. Si r es un elemento idempotente de U, con $0 < r < e$, entonces $U(r,n) = r$ o $U(r,n) = n$.*

Del lema anterior, podemos deducir un caso particular. Se puede observar la situación en la Figura 1.

Lema 2. *Sea $U \equiv \langle T,e,S\rangle$ una uninorma sobre L_n. Si r es un elemento idempotente de U, con $0 < r < e$ y $U(r,n) = r$, entonces $U(k,m) = \text{mín}(k,m)$ para todo $(k,m) \in \{(i,j) | i \le r \le e \le j$ o $j \le r \le e \le i\}$.*

n	mín	mín	mín	r		n	n	n	n
$\vdots$	mín	mín	mín	r		$\vdots$			n
$e+1$	mín	mín	mín	r		$e+1$			n
e	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	e	$e+1$	$\cdots$	n
$\vdots$	0					$\vdots$			
r	0			r		r	r	r	r
$\vdots$	0					$\vdots$	mín	mín	mín
1	0					1	mín	mín	mín
0	0	0	0	0	0	0	mín	mín	mín
	0	1	$\cdots$	r	$\cdots$	e	$e+1$	$\cdots$	n

Figura 1: Uninorma discreta con elemento neutro e, elemento idempotente $0 < r < e$ y $U(r,n) = r$.

De manera similar a los lemas 1 y 2, los siguientes resultados se refieren al caso cuando el elemento idempotente r está en $]e,n[$.

Lema 3. *Sea $U \equiv \langle T,e,S\rangle$ una uninorma sobre L_n. Si r es un elemento idempotente de U, con $e < r < n$, entonces $U(r,0) = r$ o $U(r,0) = 0$.*

Lema 4. *Sea $U \equiv \langle T,e,S\rangle$ una uninorma sobre L_n. Si r es un elemento idempotente de U, con $e < r < n$ y $U(r,0) = r$, entonces $U(k,m) = \text{máx}(k,m)$ para todo $(k,m) \in \{(i,j) | i \le e \le r \le j$ o $j \le e \le r \le i\}$.*

A partir del teorema 1 y su dual para t-conormas, para clasificar todas las uninormas con operadores subyacentes suaves, podemos considerar diferentes posibilidades dependiendo de cómo son la t-norma y la t-conorma subyacentes.

3.1 El caso idempotente

En el caso en que $T = T_{\mathbf{M}}$ y $S = S_{\mathbf{M}}$, tenemos que U es una uninorma idempotente. Este caso se estudió en [3], obteniendo el resultado siguiente.

Teorema 2 ([3]). *Una operación binaria U sobre L_n con elemento neutro $0 < e < n$ es una uninorma discreta idempotente si y sólo si existe una función decreciente $g : [0,e] \to [e,n]$, con $g(e) = e$, tal que*

$$U(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y), & si\ y \le \overline{g}(x)\ y\ x \le \overline{g}(0), \\ \text{máx}(x,y), & en\ cualquier\ otro\ caso, \end{cases}$$

donde $\overline{g}$ es la única extensión simétrica de g, que viene

dada por

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} g(x), & si\ x \le e, \\ \max\{z \in [0,e] | g(z) \ge x\}, & si\ e \le x \le g(0), \\ 0, & si\ x > g(0). \end{cases} \quad (1)$$

Teorema 3. *(i) El número de uninormas discretas idempotentes sobre L_n, $n \ge 2$, con elemento neutro $e \in L_n$ es $I_{e,n} = \binom{n}{e}$.*

(ii) El número total de uninormas discretas idempotentes sobre L_n, para $n \ge 2$, es $I_n = \sum_{e=0}^{n} I_{e,n} = 2^n$.

3.2 El caso Łukasiewicz

Ahora daremos dos resultados generales sobre el caso en que la t-norma y la t-conorma subyacentes sean operadores de Łukasiewicz. en el caso en que $T = T_{\mathbf{L}}$ y la uninorma U sea conjuntiva, entonces U debe estar en la clase de $\mathscr{U}_{\min}$.

Proposición 3. *Sea $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ una uninorma conjuntiva sobre L_n. Si $T = T_{\mathbf{L}}$, entonces $U \in \mathscr{U}_{\min}$.*

Análogamente, si $S = S_{\mathbf{L}}$ y U es disyuntiva, la uninorma U debe ser de $\mathscr{U}_{\max}$.

Proposición 4. *Sea $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ una uninorma disyuntiva sobre L_n. Si $S = S_{\mathbf{L}}$, entonces $U \in \mathscr{U}_{\max}$.*

A partir de las proposiciones anteriores, habrá únicamente dos uninormas con operadores subyacentes $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$. La estructura de dichas uninormas se puede observar en la figura 2.

Corolario 1. *Sólo hay dos uninormas sobre L_n, $n \ge 2$, con elemento neutro e, $0 < e < n$, tales que sus operadores subyacentes son $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$:*

- *Si U es conjuntiva, $U \equiv \langle T_{\mathbf{L}}, e, S_{\mathbf{L}}\rangle_{\min}$.*
- *Si U es disyuntiva, $U \equiv \langle T_{\mathbf{L}}, e, S_{\mathbf{L}}\rangle_{\max}$.*

Teniendo en cuenta este resultado podemos calcular el número de uninormas con operadores subyacentes de Łukasiewicz variando el elemento neutro en L_n (incluyendo los casos $e = 0$, la t-conorma de Łukasiewicz y $e = 1$, la t-norma de Łukasiewicz).

Corolario 2. *El número total de uninormas sobre L_n, $n \ge 1$, tal que sus operadores subyacentes son $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$ es $2n$.*

3.3 Caso $T = T_{\mathbf{M}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$

En esta subsección trataremos las uninormas tales que sus operadores subyacentes son $T = T_{\mathbf{M}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$.

Notemos que, a partir del caso anterior, si la uninorma es disyuntiva y $S = S_{\mathbf{L}}$, entonces debe ser de $\mathscr{U}_{\max}$. Considerando que siempre existe $r \in L_n$ tal que $0 \le r \le e$, y

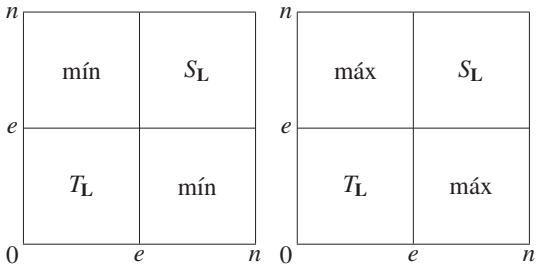


Figura 2: Estructura de las uninormas discretas con operadores subyacentes $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$, conjuntiva (izquierda) y disyuntiva (derecha).

$U(r,n) = n$, la uninorma U restringida a $[r,n]^2$ satisface la proposición 4. Teniendo esto en cuenta y el lemma 2, podemos deducir la estructura general de las uninormas con $T = T_{\mathbf{M}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$. Esta estructura se puede observar en la figura 3.

Proposición 5. *Sea $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ una uninorma sobre L_n tal que $T = T_{\mathbf{M}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$. Sea $0 \le r \le e$ el menor elemento tal que $U(r,n) = \max(r,n) = n$. Entonces U viene dada por*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & si\ (x,y) \in [0,e]^2, \\ S_{\mathbf{L}}(x,y), & si\ (x,y) \in [e,1]^2, \\ \max(x,y), & si\ (x,y) \in [r,e[\times]e,n]\ o \\ & (x,y) \in]e,n] \times [r,e[, \\ \min(x,y), & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

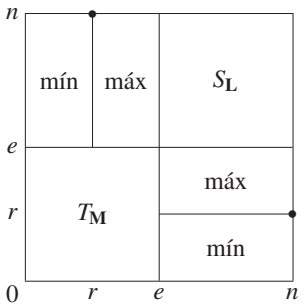


Figura 3: Estructura de una uninorma discreta con operadores subyacentes $T = T_{\mathbf{M}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$.

De nuevo, a partir de este resultado podemos contar el número total de uninormas en este caso.

Corolario 3. *(i) El número de uninormas $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ sobre L_n, $n \ge 2$ con elemento neutro $e \in L_n$, $e \ne n$, tal que sus operadores subyacentes son $T = T_{\mathbf{M}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$ viene dado por $ML_{e,n} = e + 1$. En el caso que $e = n$, tenemos que $ML_{n,n} = 1$.*

(ii) El número total de uninormas sobre L_n, $n \ge 1$, tal que sus operadores subyacentes son $T = T_{\mathbf{M}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$ es

$$ML_n = \sum_{e=0}^{n} ML_{e,n} = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

3.4 Caso $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{M}}$

Ahora estudiamos el caso de las uninormas discretas tales que sus operadores subyacentes son $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{M}}$. Este caso es muy similar al caso anterior, y se puede demostrar usando dualidad. La estructura de estas uninormas se puede observar en la figura 4.

Proposición 6. *Sea $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ tal que $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{M}}$. Sea $e \leq r \leq n$ el mayor elemento tal que $U(0,r) = \text{mín}(0,r) = 0$. Entonces U viene dada por*

$$U(x,y) = \begin{cases} T_{\mathbf{L}}(x,y), & si\ (x,y) \in [0,e]^2, \\ \text{máx}(x,y), & si\ (x,y) \in [e,1]^2, \\ \text{mín}(x,y), & si\ (x,y) \in [0,e[\times]e,r]\ or \\ & (x,y) \in]e,r] \times [0,e[\\ \text{máx}(x,y), & en\ cualquier\ otro\ caso. \end{cases}$$

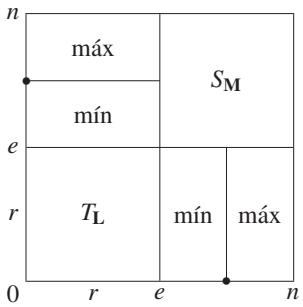


Figura 4: Estructura de las uninormas discretas con operadores subyacentes $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{M}}$.

En el siguiente corolario calculamos el número total de uninormas en este caso.

Corolario 4. *(i) El número de uninormas $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ sobre L_n, $n \geq 2$ con elemento neutro $e \in L_n$, $e \neq 0$ tal que sus operadores subyacentes son $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{M}}$ viene dado por*

$$LM_{e,n} = n - e + 1.$$

En el caso $e = 0$, tenemos que $LM_{0,n} = 1$.

(ii) El número total de uninormas sobre L_n, $n \geq 1$, tal que sus operadores subyacentes son $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{M}}$ es

$$LM_n = \sum_{e=0}^{n} LM_{e,n} = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Entonces, si agrupamos todos los resultados anteriores, podemos obtener el número de uninormas en cada uno de los casos considerados, que representamos en las tablas 1 (con un elemento neutro fijado e) y 2 (en general).

Nota 1. *Notemos que en dichas tablas hay algunos casos que estan contados dos veces. Por ejemplo, $T = T_{\mathbf{L}}$ está incluida en los casos siguientes: $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{L}}$, $T = T_{\mathbf{L}}$ y $S = S_{\mathbf{M}}$.*

T \ S	$S_{\mathbf{M}}$	$S_{\mathbf{L}}$
$T_{\mathbf{M}}$	$\binom{n}{e}$	$e+1$
$T_{\mathbf{L}}$	$n-e+1$	2

Tabla 1: Número de uninormas discretas $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ con elemento neutro $e \in L_n$, $0 < e < n$, dependiendo de cuáles son sus operadores subyacentes.

T \ S	$S_{\mathbf{M}}$	$S_{\mathbf{L}}$
$T_{\mathbf{M}}$	2^n	$\frac{n(n+1)}{2}+1$
$T_{\mathbf{L}}$	$\frac{n(n+1)}{2}+1$	$2n$

Tabla 2: Número total de uninormas discretas $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ sobre L_n, con T y S idempotentes o arquimedianas.

En vista de la nota anterior, obtenemos la proposición siguiente, que da el número total de uninormas consideradas en esta sección.

Proposición 7. *El número total de uninormas discretas sobre L_n, $n \geq 1$, tales que sus operadores subyacentes son idempotentes o arquimedianos viene dado por*

$$2^n + n(n+3) - 2.$$

3.5 Caso general: cuando T o S son sumas ordinales

Después de haber estudiado todos los casos para T y S idempotentes o arquimedianas, el caso que falta es cuando T y/o S son sumas ordinales. Para empezar con este caso, damos un resultado similar al lema 2.

Proposición 8. *Sea $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ una uninorma tal que T es suave y existen dos elementos idempotentes consecutivos de U, $r, s \in L_n$, $0 < r < s < e$ con $s \geq r+2$. Si $U(r,n) = r$, entonces $U(k,m) = \text{mín}(k,m)$ para todos $(k,m) \in [r,s[\times[e,n] \cup [e,n] \times [r,s[$.*

Por dualidad, tenemos un resultado similar al lema 4 para uninormas con elementos idempotentes mayores que el elemento neutro e de U.

Proposición 9. *Sea $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ una uninorma tal que S es suave y que existen dos elementos idempotentes consecutivos de U, $r, s \in L_n$, $e < r < s < n$ con $s \geq r+2$. Si $U(s,0) = s$, entonces $U(k,m) = \text{máx}(k,m)$ para todos $(k,m) \in]r,s] \times [0,e] \cup [0,e] \times]r,s]$.*

Notemos que en todos los casos estudiados existe una función decreciente $g : [0,e] \to [e,n]$ con punto fijo e, tal que la uninorma en la región $A(e)$ viene dada por el mínimo por

debajo del gráfico de g y por el máximo por encima de dicho gráfico. De hecho, se puede ver el siguiente resultado.

Teorema 4. *Sea $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ una uninorma sobre L_n con T y S suaves, J el subconjunto de L_n de elementos idempotentes de U, $J = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = e = b_0 < b_1 < \ldots < b_s = n\}$. Entonces, existe una función decreciente $g : [0,e] \to [e,n]$ con punto fijo e que cumple las siguientes condiciones:*

- *para todo $a_i \in J$, existe $b_j \in J$ tal que $g(a_i) = b_j$,*
- *si $x \in [a_i, a_{i+1}[$, $g(x) = g(a_i)$,*

de manera que U en la región $A(e)$ verifica que:

$$U(x,y) = \begin{cases} \text{mín}(x,y) & \text{si } y \leq \overline{g}(x), \\ \text{máx}(x,y) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

donde $\overline{g}$ es la única extensión simétrica de g dada por (1).

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se ha estudiado la estructura de las uninormas $U \equiv \langle T, e, S\rangle$ definidas sobre una cadena finita L_n, cuando los operadores subyacentes T y S son suaves, obteniendo una caracterización de los casos cuando estas operaciones son idempotentes o arquimedianas. También se ha calculado el número de operaciones con un elemento neutro fijado $e \in L_n$ así como el número total de uninormas sobre L_n tales que sus operadores subyacentes son suaves.

Para el caso en el que T o S son sumas ordinales, dada la uninorma y sus elementos idempotentes, se presenta la existencia de una función g decreciente, similar a la del caso idempotente, que determina los valores que ha toma la uninorma en la región $A(e)$.

Como trabajo futuro, nuestro objetivo será establecer el recíproco del resultado obtenido para el caso en el que T y S sean sumas ordinales, pudiendo presentar así la caracterización general de todas las uninormas con operaciones subyacentes suaves, y computar el número total de estas uninormas.

Agradecimientos.

Este trabajo ha sido subvencionado por el proyecto nacional MTM2009-10320 con el apoyo de fondos FEDER.

Referencias

[1] B. De Baets, Idempotent uninorms, *European Journal of Operational Research*, 118:631–642, 1999.

[2] B. De Baets and J. Fodor, A single-point characterization of representable uninorms, *Fuzzy Sets and Systems*, 202:89–99, 2012.

[3] B. De Baets, J. Fodor, D. Ruiz-Aguilera y J. Torrens, Idempotent Uninorms on Finite Ordinal Scales, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17:1–14, World Scientific, 2009.

[4] P. Drygaś, Discussion of the structure of uninorms, *Kybernetika*, 41:213–226, 2005.

[5] P. Drygaś, On the structure of continuous uninorms, *Kybernetika*, 43:183–196, 2007.

[6] J.C. Fodor, B. De Baets y T. Calvo, *Characterization of uninorms with given continuous underlying t-norms and t-conorms*, submitted.

[7] J. Fodor, R. Yager y A. Rybalov, Structure of uninorms, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 5:411–427, 1997.

[8] S. Hu y Z. Li, The structure of continuous uni-norms, *Fuzzy Sets and Systems*, 124:43–52, 2001.

[9] E. P. Klement, R. Mesiar y E. Pap, *Triangular norms.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[10] A. Kolesárová, G. Mayor y R. Mesiar, Weighted ordinal means, *Information Sciences*, 177 (2007) 3822-3830.

[11] J. Martín, G. Mayor y J. Torrens, On locally internal monotonic operations, *Fuzzy Sets and Systems*, 137:27–42, 2003.

[12] M. Mas, G. Mayor y J. Torrens, $t-$Operators and uninorms on a finite totally ordered set, *International Journal of Intelligent Systems*, 14:909–922, 1999.

[13] G. Mayor y J. Torrens, On a class of operators for expert systems, *International Journal of Intelligent Systems*, 8:771-778, 1993.

[14] G. Mayor y J. Torrens, Triangular norms in discrete settings. En E.P. Klement and R. Mesiar, editores, *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, páginas 189–230, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[15] D. Ruiz y J. Torrens, Distributivity and conditional distributivity of a uninorm and a continuous t-conorm, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14:180–190, 2006.

[16] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, B. De Baets y J. Fodor, Some Remarks on the Characterization of Idempotent Uninorms. En E. Hüllermeier, R. Kruse y F. Hoffmann, editores, proceedings of the 13^{th} *IPMU Conference 2010*, Lecture Notes in Computer Science 6178, pages 425-434, Springer-Verlag, 2010.

WHEN IS THE AGGREGATION OF WEIGHTABLE METRICS A WEIGHTABLE METRIC?

Sebastia Massanet, **Oscar Valero**

Universitat de les Illes Balears, Ctra. Valldemossa, km 7.5. Palma (Illes Balears),
{s.massanet, o.valero}@uib.es

Abstract

In 1994, S.G. Matthews introduced new metric notions, which are known as partial metrics and weightable metrics, in order to provide a mathematical framework to model certain computational processes in [8]. Motivated by the fact that J. Borsík and J. Doboš studied and solved the problem of how to combine, by means of a function that is called a metric aggregation function, a collection (not necessarily finite) of metrics in order to obtain a single one as output in [1], we posed the same problem for partial metrics in [6]. Thus, the notion of partial metric aggregation function was introduced, in such a way that it generalizes the same notion for metrics, and a characterization of this kind of functions was given in [6].

In this paper, we focus our study on the other sort of metric notion introduced by Matthews, the so-called weightable metrics. Thus, the problem of how to combine, by means of a function, a collection (not necessarily finite) of weightable metrics in order to obtain a single one as output is posed and solved. Specifically, we introduce the notion of weightable metric aggregation function which allows to merge a collection of weightable metrics into a single one and, in addition, extends the notion of metric aggregation function. Moreover, we solve the aggregation problem providing a characterization of such functions in terms of a functional equation.

Furthermore, a few connections between the problem of merging metrics, partial metrics and weightable metrics are given. Finally since every partial metric induces a type of metric known as quasi-metric, a relationship between the aggregation problem of partial metrics and the quasi-metric aggregation problem, solved by G. Mayor and O. Valero in [4] and [9], is also given.

Keywords: Weightable metric, partial metric, quasi-metric, metric, monotone function, subadditive function, aggregation function.

1 INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

In the last years there is a growing interest in the mathematical theory of information aggregation because of its wide range of applications to practical problems. For instance in image processing, decision making, control theory, medical diagnosis or biology, many processes arise where it is necessary to process incoming data that comes from sources of a different nature in order to obtain a conclusion. Usually in such processes the pieces of information are symbolized via some numerical values. As a consequence the fusion methods that are based on numerical aggregation operators play a central role in the theory of information aggregation. The problem of how to select the most suitable aggregation operator for the problem to be solved is often constrained in a wide class of techniques of aggregation. In general this constraint consists of considering only those operators that provide the output data with the same properties as the inputs. An example of this type of situation is given when one wants to merge metrics in order to obtain a new one. Since the notion of metric plays a distinguished role in applied research, J. Borsík and J. Doboš studied the general problem of merging a collection of metrics (not necessarily finite) into a single one in [1]. To this end, they introduced the so-called metric aggregation functions (metric preserving functions in [1]) and characterized such functions via the notion of triangle triplets. In order to introduce the Borsík and Doboš description of the metric aggregation functions, let us recall a few pertinent concepts.

Throughout this paper we shall use the letters $\mathbb{R}^+$ and $\mathbb{N}$ to denote the set of nonnegative real numbers and the set of positive integer numbers, respectively.

From now on, $\mathbb{R}_I^+$ denotes the set of all nonnegative functions defined on a (nonempty) set I of indexes. Given

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_I^+$ we will write x_i instead of $\mathbf{x}(i)$. Moreover, we will denote by $\mathbf{0}$ the element of $\mathbb{R}_I^+$ with $0_i = 0$ for all $i \in I$.

As usual, we will consider the set $\mathbb{R}_I^+$ ordered by the pointwise order relation $\preceq$, i.e. $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i$ for all $i \in I$.

We will say that a function $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ is monotone provided that $\Phi(\mathbf{x}) \leq \Phi(\mathbf{y})$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_I^+$ with $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$. In addition, a function $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ will be said to be subadditive if $\Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y})$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_I^+$. Furthermore, according to [1], we will denote by $\mathscr{O}_I$ the set of all functions $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying: $\Phi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Using the previous notation, we can recall the notion of metric aggregation function. Concretely, a function $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ is a metric aggregation function if the function $M_{d,\Phi} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ is a metric for every indexed family of metric spaces $\{(X_i, d_i)\}_{i \in I}$, where $X = \prod_{i \in I} X_i$ and $M_{d,\Phi}(x,y) = \Phi((d_i(x_i, y_i))_{i \in I})$ for all $x, y \in X$.

First of all, Borsík and Doboš gave some sufficient conditions on the function Φ in order to be a metric aggregation function. In particular they proved the next result.

Proposition 1. *Let $\Phi \in \mathscr{O}_I$. If Φ is monotone and subadditive, then Φ is a metric aggregation function.*

Unfortunately, the preceding proposition does not characterize metric aggregation functions because there are metric aggregation functions which are not monotone (see Example 10 in Section 3). So Borsík and Doboš fully characterized metric aggregation functions in terms of the so-called triangle triplets. In order to present such a characterization let us recall that, given $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, the triplet (a, b, c) forms a triangle triplet whenever $a \leq b + c$, $b \leq a + c$ and $c \leq b + a$. The aforementioned characterization can be stated as follows:

Theorem 2. *Let $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$. Then the below assertions are equivalent:*

(1) Φ is a metric aggregation function.

(2) Φ holds the following properties:

(2.1) $\Phi \in \mathscr{O}_I$.

(2.2) Let $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}_I^+$. If (a_i, b_i, c_i) is a triangle triplet for all $i \in I$, then so is $(\Phi(\mathbf{a}), \Phi(\mathbf{b}), \Phi(\mathbf{c}))$.

Inspired, in part, by the original work of Borsík and Doboš, the aggregation problem of a few kinds of generalized metrics has been studied by several authors in the last decade. Specifically E. Castiñeira, A. Pradera and E. Trillas have provided a solution to the aggregation of C-generalized metrics, S-generalized distances and pseudometrics in [10], [11] and [12], and several general techniques for merging a finite number of metrics into another one have been explored by J. Casasnovas and F. Rosselló in [2].

Following the original work of Borsík and Doboš and motivated by the utility of quasi-metrics in several fields of Artificial Intelligence and Computer Science, G. Mayor and O. Valero studied the aggregation problem posed by Borsík and Doboš in the quasi-metric framework. Thus they introduced the notion of quasi-metric aggregation function in [9] (asymmetric distance function in the quoted reference) and gave a characterization of such functions in the spirit of Theorem 2. It is worthy to point out that applications of quasi-metric aggregation functions to asymptotic complexity analysis of algorithms were given in [9] and [5].

With the aim to present such a characterization let us recall a few concepts about quasi-metrics.

Following [3], a quasi-metric (asymmetric distance in [9] and [4]) on a (nonempty) set X is a function $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ such that for all $x, y, z \in X$:

(i) $d(x,y) = d(y,x) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(ii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Note that a metric on a set X is a quasi-metric d on X satisfying, in addition, the following condition for all $x, y \in X$:

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$.

A quasi-metric space (asymmetric distance space in [9] and [4]) is a pair (X, d) such that X is a (nonempty) set and d is a quasi-metric on X.

According to [9] and [4], a function $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ is a quasi-metric aggregation function if the function $Q_{d,\Phi} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ is a quasi-metric for every indexed family of quasi-metric spaces $\{(X_i, d_i)\}_{i \in I}$, where $X = \prod_{i \in I} X_i$ and $Q_{d,\Phi}(x,y) = \Phi((d_i(x_i, y_i))_{i \in I})$ for all $x, y \in X$.

The characterization of quasi-metric aggregation functions given in [9] can be stated as follows:

Theorem 3. *Let $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$. Then the below assertions are equivalent:*

(1) Φ is a quasi-metric aggregation function.

(2) Φ holds the following properties:

(2.1) $\Phi \in \mathscr{O}_I$.

(2.2) Let $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}_I^+$. If $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b} + \mathbf{c}$, then $\Phi(\mathbf{a}) \leq \Phi(\mathbf{b}) + \Phi(\mathbf{c})$.

(3) $\Phi \in \mathscr{O}_I$, and Φ is subadditive and monotone.

Note that, contrary to the metric case, the preceding characterization states that every quasi-metric aggregation function is always monotone.

Moreover, it is worthy to mention that the problem of merging a collection of extended quasi-metrics (quasi-metrics which can take infinite values) was fully solved in [7].

In 1994, S.G. Matthews introduced two metric notions as a mathematical tool for modeling certain computational processes (see [8]). The aforementioned metrics are known as partial metrics and weightable metrics. In order to pose our main objective in the present paper, let us recall such notions and the foundations of the partial metric aggregation problem which was solved in [6].

A partial metric on a (nonempty) set X is a function $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ such that for all $x, y, z \in X$:

(i) $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y) \Leftrightarrow x = y.$
(ii) $p(x,x) \leq p(x,y).$
(iii) $p(x,y) = p(y,x).$
(iv) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y).$

Of course, a partial metric space is a pair (X,p) such that X is a (nonempty) set and p is a partial metric on X. Clearly, and similarly to the quasi-metric case, the notion of metric can be also retrieved as a particular case of the partial metric one. In particular, a metric on a set X is a partial metric p on X such that $p(x,x) = 0$ for all $x \in X$.

The problem of how to merge a collection (not necessarily finite) of partial metrics into a single one was solved in [6]. There, the notion of partial metric aggregation function and its characterization were presented. Namely, a function $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ is a partial metric aggregation function provided that the function $P_{p,\Phi} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ is a partial metric for every indexed family of partial metric spaces $\{(X_i, p_i)\}_{i \in I}$, where $X = \prod_{i \in I} X_i$ and for all $x, y \in X$

$$P_{p,\Phi}(x,y) = \Phi((p_i(x_i,y_i))_{i \in I}).$$

The characterization of partial metric aggregation functions given in [6] can be enunciated in the spirit of Theorem 2 in the following way:

Theorem 4. *Let $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$. Then the below assertions are equivalent:*

(1) Φ is a partial metric aggregation function.

(2) Φ holds the following properties for all $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}_I^+$:

(2.1) $\Phi(\boldsymbol{a}) + \Phi(\boldsymbol{b}) \leq \Phi(\boldsymbol{c}) + \Phi(\boldsymbol{d})$ whenever $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \preceq \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b} \preceq \boldsymbol{c}$ and $\boldsymbol{b} \preceq \boldsymbol{d}$.

(2.2) If $\boldsymbol{b} \preceq \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \preceq \boldsymbol{a}$ and $\Phi(\boldsymbol{a}) = \Phi(\boldsymbol{b}) = \Phi(\boldsymbol{c})$, then $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

Next we focus our study on the other class of metric notion introduced by Matthews, i.e., the so-called weightable metrics. According to [8], a metric d on a (nonempty) set X is weightable provided that there exists a function $w : X \to \mathbb{R}^+$, called the weight associated to d, such that

$$w(x) - w(y) \leq d(x,y)$$

for all $x, y \in X$. Of course a weightable metric space is a triple (X,d,w) such that (X,d) is a weightable metric on X and w is the weight associated to d.

A natural question that one can wonder is whether the fact that a metric is weightable is too much restrictive. However, every metric induced by a norm on a linear space is an example of weightable metric. Moreover, Matthews proved in [8] that every partial metric p on a nonempty set X induces in a natural way a weightable metric $p^s : X \times X \to \mathbb{R}^+$ defined by

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

for all $x, y \in X$, where its associated weight is given by $w(x) = p(x,x)$ for all $x \in X$.

The problem of how to aggregate a collection of weightable metrics in order to obtain a weightable metric has not been tackled so far. Therefore, inspired by the intense activity in the last years in the study of how to merge a few types of metrics, the statement of the weightable metric aggregation problem and its solution is going to be the main goal of this work.

Consequently, the paper is organized as follows. In Section 1 we recall how the problems of merging a collection of metrics, quasi-metrics and partial metrics have been solved. After that we recall the basics of weightable metrics. Later on, in Section 2, we pose and solve the problem of how to aggregate weightable metrics in the spirit of Borsík and Doboš. Hence we introduce the notion of weightable metric aggregation function and we provide the characterization of such functions in terms of a functional equation. Section 3 is devoted to provide several relationships between the problem of merging metrics, quasi-metrics, partial metrics and weightable metrics. The paper ends with some conclusions.

2 AGGREGATION OF WEIGHTABLE METRICS

As we have already mentioned, the metric aggregation prolem was solved completely via Theorem 2 in [1]. However, if we merge a collection of weightable metrics using a metric aggregation function, we can only assure that the single output will be a metric, not necessarily weightable. For this reason, this section is devoted to analyze what additional properties a metric aggregation function must hold in order to guarantee that a collection of weightable metrics is merged into a new single metric which is weightable too. With this aim, we need to introduce formally this new sort of aggregation functions.

Definition 5. A metric aggregation function $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ is a weightable metric aggregation function provided that for every indexed family of weightable metric spaces $\{(X_i, d_i, w_i)\}_{i \in I}$, the function $M_{d,\Phi} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ (as de-

fined in Section 1) is a weightable metric with associated weight function $W_{w,\Phi} : X \to \mathbb{R}^+$ given by

$$W_{w,\Phi}(\mathbf{x}) = \Phi((w_i(x_i))_{i\in I})$$

for all $x \in X = \prod_{i\in I} X_i$.

Before giving the characterization of the weightable metric aggregation functions, the next remark will be useful for our goal.

Remark 6. For every $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ such that $a \leq b+c$, there exists a partial metric space (X,p) in such a way that there exist $x,y \in X$ with $p(x,x) = a$, $p^s(x,y) = b$ and $p(y,y) = c$. Indeed, let us denote by $I(\mathbb{R})$ the set of all closed intervals in the real line $\mathbb{R}$. Next define the function $p_{I(\mathbb{R})}$ on $I(\mathbb{R})$ as follows:

$$p_{I(\mathbb{R})}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \max\{x_2,y_2\} - \min\{x_1,y_1\}$$

for all $[x_1,x_2],[y_1,y_2] \in I(\mathbb{R})$. It is straightforward to check that $p_{I(\mathbb{R})}$ is a partial metric on $I(\mathbb{R})$ (see [8]). Furthermore, an easy computation shows that the following intervals in $I(\mathbb{R})$ satisfy the required conditions:

$$x = [-a,0], \quad y = [-c+\frac{1}{2}(-a+b+c), \frac{1}{2}(-a+b+c)].$$

The next result determines when the aggregation of an indexed family of weightable metrics is, in fact, a weightable metric.

Theorem 7. *Let $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ a metric aggregation function. Then the below assertions are equivalent:*

(1) Φ is a weightable metric aggregation function.

(2) Φ holds the following property: Let $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_I^+$. If $\boldsymbol{a} \preceq \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ then $\Phi(\boldsymbol{a}) \leq \Phi(\boldsymbol{b}) + \Phi(\boldsymbol{c})$.

Proof. First of all, we will prove that if Φ satisfies Property (2), then it is a weightable metric aggregation function. Let us consider a family of weightable metric spaces $\{(X_i,d_i,w_i)\}_{i\in I}$. Since Φ is a metric aggregation function, the function $M_{d,\Phi}(x,y) = \Phi((d_i(x_i,y_i))_{i\in I})$ for all $x,y \in X = \prod_{i\in I} X_i$ is a metric. Now, let us check that $\Phi((w_i(x_i))_{i\in I})$ is the weight of $M_{d,\Phi}$. Since, for each $i \in I$, d_i is a weightable metric with weight w_i we have that $w_i(x_i) \leq d_i(x_i,y_i) + w_i(y_i)$ for all $i \in I$. Now applying Property (2) we immediately deduce that

$$\Phi((w_i(x_i))_{i\in I}) \quad \leq \Phi((d_i(x_i,y_i))_{i\in I}) + \Phi((w_i(y_i))_{i\in I}).$$

Hence we have that

$$W_{w,\Phi}(x) - W_{w,\Phi}(y) \leq M_{d,\Phi}(x,y)$$

for all $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$. Therefore we have shown that $(2) \to (1)$.

Reciprocally, let us suppose that Φ is a weightable metric aggregation function. Consider the family of the partial metric spaces $\{(X_i,p_i)\}_{i\in I}$ whith $X_i = I(\mathbb{R})$ and $p_i = p_{I(\mathbb{R})}$ for all $i \in I$ where $(I(\mathbb{R}), p_{I(\mathbb{R})})$ has been introduced in Remark 6. Since $\{(X_i,p_i^s)\}_{i\in I}$ is a weightable metric indexed family where every p_i^s has weight $w_i(x) = p_i(x,x)$ and, in addition, Φ is a weightable metric aggregation function, we can aggregate them obtaining the weightable metric function

$$M_{p^s,\Phi}(x,y) = \Phi((p_i^s(x_i,y_i))_{i\in I})$$

for all $x,y \in X = \prod_{i\in I} X_i$ with associated weight

$$W_{w,\Phi}(x) = \Phi((w_i(x_i))_{i\in I}) = \Phi((p_i(x_i,x_i))_{i\in I}).$$

Therefore, we have that

$$\Phi((p_i(x_i,x_i))_{i\in I}) \leq \Phi((p_i^s(x_i,y_i))_{i\in I}) + \Phi((p_i(y_i,y_i))_{i\in I}). \quad (1)$$

Consider now $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{R}_I^+$ such that $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}+\mathbf{c}$. Using Remark 6, there exist $x_i,y_i \in X_i = I(\mathbb{R}^+)$ with $p_i(x_i,x_i) = a_i$, $p_i^s(x_i,y_i) = b_i$ and $p(y_i,y_i) = c_i$ for all $i \in I$. Finally, from Equation (1), the result follows. So we have proved that $(1) \to (2)$. □

In the light of Theorem 2 and 7 we obtain the next characterization of weightable metric aggregation functions.

Corollary 8. *Let $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$. Then the below assertions are equivalent:*

(1) Φ is a is a weightable metric aggregation function.

(2) Φ holds the following properties:

(2.1) $\Phi \in \mathscr{O}_I$.

(2.2) Let $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_I^+$. If $\boldsymbol{a} \preceq \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ then $\Phi(\boldsymbol{a}) \leq \Phi(\boldsymbol{b}) + \Phi(\boldsymbol{c})$.

Proof. From Theorems 2 and 7 the result is straightforward taking into account that Property (2.2) implies the preservation of triangle triplets. □

3 SOME RELATIONSHIPS BETWEEN AGGREGATION FUNCTIONS FOR DIFFERENT CLASSES OF GENERALIZED METRICS

In this section we present a few connections between weightable metrics, metrics, partial metrics and quasi-metrics by means of aggregation functions. It seems natural to wonder what is the relationship between weightable metric aggregation functions and metric, partial metric and quasi-metric aggregation functions.

The first result states that there exist a close relationship between weightable metric and quasi-metric aggregation functions.

Proposition 9. *Let $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$. Then the below assertions are equivalent:*

(1) Φ is a weightable metric aggregation function.

(2) Φ is a quasi-metric aggregation function.

Proof. It is enough to check that Corollary 8 and assertion (2) of Theorem 3 includes exactly the same properties. □

From this result, it can be proved that there exist metric aggregation functions which are not weightable metric aggregation functions. For instance, the following example (Example 8 in [9]) shows this fact.

Example 10. Let $I = \mathbb{N}$. Consider the function $\Phi : \mathbb{R}_{\mathbb{N}}^+ \to \mathbb{R}^+$ given by $\Phi(\mathbf{0}) = 0$ and

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 & \alpha(\mathbf{x}) \in]0,1[, \\ 1 & \alpha(\mathbf{x}) \geq 1, \end{cases}$$

where $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ and $\alpha(\mathbf{x})$ denotes the value of the first term of the sequence $\mathbf{x}$ different to $\mathbf{0}$. In [9] it was proved that Φ is a metric aggregation function. However, Φ is not a quasi-metric aggregation function and thus, by Proposition 9, it is not a weightable metric aggregation function. Observe that Φ is not monotone. Indeed, let $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$ such that $x_i = \frac{1}{2}$ and $y_i = 1$ for all $i \in \mathbb{N}$. Then $\Phi(\mathbf{x}) = 2$, $\Phi(\mathbf{y}) = 1$ and $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$. Whence, by assertion (3) in statement of Theorem 3, we obtain that Φ is not a quasi-metric aggregation function.

Next, let us study the relationship between partial metric and weightable metric aggregation functions. First of all, the next example (which was provided as Example 12 in [6]) shows that there exist partial metric aggregation functions which are not weightable metric aggregation functions.

Example 11. Let $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Define $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ by $\Phi(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + 1$ for all $x \in \mathbb{R}_I^+$. It is clear that the function Φ holds conditions (2.1) and (2.2) in Theorem 4 and, thus, it is a partial metric aggregation function. Moreover it is clear that Φ is not a weightable metric aggregation function, since $\Phi \notin \mathscr{O}_I$.

In spite of the preceding example, with just a minimal property, we can assure that every partial metric aggregation function is a weightable metric aggregation function. To this end let us recall that every partial metric aggregation function $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ such that $\Phi_I(\mathbf{0}) = 0$ is a quasi-metric aggregation function (Proposition 13 in [6]).

Proposition 12. *Let $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ be a partial metric aggregation function such that $\Phi_I(\mathbf{0}) = 0$. Then Φ is a weightable metric aggregation function.*

Proof. By Proposition 13 in [6] we have that Φ is a quasi-metric aggregation function and, thus, by Proposition 9 we conclude that Φ is a weightable metric aggregation function. □

Furthermore, the next example (Example 15 in [6]) shows that there exists weightable metric aggregation functions which are not partial metric aggregation functions.

Example 13. Let $I = \mathbb{N}$. Consider the function $\Phi : \mathbb{R}_{\mathbb{N}}^+ \to \mathbb{R}^+$ defined by

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Since Φ is monotone, subadditive and $\Phi \in \mathscr{O}_{\mathbb{N}}$ we have, by Theorem 3, that it is a quasi-metric aggregation function. Thus, by Proposition 9, we have that Φ is a weightable metric aggregation function. However, Φ is not a partial metric aggregation function. Indeed, let $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}_{\mathbb{N}}^+$ such that $a_i = 2$ for all $i \in \mathbb{N}$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$ and $b_i = 1$ and $c_i = 0$ for all $i \in \mathbb{N}$ with $i \geq 2$. Then $\mathbf{b} \preceq \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \preceq \mathbf{a}$ and $\Phi(\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{c}) = 1$ but $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$. So, by statement (2) in Theorem 4, Φ is not a partial metric aggregation function.

In [8], Matthews proved the following interesting correspondence between weightable metrics and partial metrics.

Proposition 14. *Let (X, d, w) be a weightable metric space. Then the function $p_d : X \times X \to \mathbb{R}^+$, defined by $p_d(x,y) = \frac{w(x)+w(y)+d(x,y)}{2}$ for all $x, y \in X$, is a partial metric on X.*

Since every weightable metric induces a partial metric by the previous proposition, it seems natural to wonder what is the relationship between the aggregation of the partial metrics induced by an indexed family of weightable metrics and the partial metric induced by the weightable metric obtained via the aggregation of the aforesaid weightable metrics. The next result provides the answer to this new question.

Proposition 15. *Let $\{(X_i, d_i, w_i)\}_{i \in I}$ be an indexed family of weightable metric spaces and $\Phi : \mathbb{R}_I^+ \to \mathbb{R}^+$ a partial metric aggregation function such that $\Phi_I(\mathbf{0}) = 0$. Then the following assertions are equivalent:*

(1) $p_{M_{d,\phi}} = p_{p_d,\Phi}$.

(2) Φ holds the following property: Let $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_I^+$. If $\boldsymbol{a} \preceq \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ then $\frac{\Phi(\boldsymbol{a})+\Phi(\boldsymbol{b})+\Phi(\boldsymbol{c})}{2} = \Phi\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}\right)$.

Proof. Observe that, by Proposition 12, the function Φ is a weightable aggregation function. Assume that $p_{M_{d,\phi}} = p_{p_d,\Phi}$. Then

$$p_{M_{d,\phi}}(x,y) = \frac{\Phi((w_i(x_i))_{i\in I}) + \Phi((w_i(y_i))_{i\in I}) + \Phi((d_i(x_i,y_i))_{i\in I})}{2}$$

$$= \Phi\left(\left(\frac{w_i(x_i)+(w_i(y_i)+d_i(x_i,y_i)}{2}\right)_{i\in I}\right) = p_{p_d,\Phi}(x,y)$$

for all $x, y \in X = \prod_{i\in I} X_i$.

Consider $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}_I^+$ such that $\mathbf{a}\preceq\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Then, by Remark 6, we have guaranteed the existence of $x_i,y_i\in I(\mathbb{R})$ such that $p^s_{I(\mathbb{R})}(x_i,y_i)=b_i$, $p_{I(\mathbb{R})}(x_i,x_i)=a_i$ and $p_{I(\mathbb{R})}(y_i,y_i)=c_i$ for all $i\in I$. It follows that

$$\frac{\Phi(\mathbf{a})+\Phi(\mathbf{b})+\Phi(\mathbf{c})}{2}=$$

$$\frac{\Phi((p_{I(\mathbb{R})}(x_i,x_i))_{i\in I})+\Phi((p_{I(\mathbb{R})}(y_i,y_i))_{i\in I})+\Phi((p^s_{I(\mathbb{R})}(x_i,y_i))_{i\in I})}{2}=$$

$$\Phi\left(\left(\frac{p_{I(\mathbb{R})}(x_i,x_i)+p_{I(\mathbb{R})}(y_i,y_i)+p^s_{I(\mathbb{R})}(x_i,y_i)}{2}\right)_{i\in I}\right)=$$

$$\Phi((\tfrac{a_i+b_i+c_i}{2})_{i\in I})=\Phi\left(\tfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}\right).$$

So we have shown that $(1)\to(2)$.

Next we prove that $(2)\to(1)$. Since $w_i(x_i)\le d_i(x_i,y_i)+w_i(y_i)$ for all $i\in I$ we have that

$$\frac{\Phi((w_i(x_i))_{i\in I})+\Phi((w_i(y_i))_{i\in I})+\Phi((d_i(x_i,y_i))_{i\in I})}{2}=$$
$$\Phi((\tfrac{w_i(x_i)+w_i(y_i)+d_i(x_i,y_i)}{2})_{i\in I}).$$

It follows that $p_{M_{d,\phi}}(x,y)=p_{p_d,\Phi}(x,y)$ for all $x,y\in X$. □

In addition, we also know that every partial metric p generates the weightable metric p^s (see Section 1). Thus, again it is worthy to discuss the relationship between the weightable metric induced by the partial metric generated by the aggregation of an indexed family of partial metrics and the aggregation of the weightable metrics generated by the aforementioned partial metrics. However, this question was already answered in Proposition 22 in [6] where it was shown that the following property

$$\Phi(2\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})=2\Phi(\mathbf{a})-\Phi(\mathbf{b})-\Phi(\mathbf{c})$$

for all $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}_I^+$ with $\mathbf{b}\preceq\mathbf{a}$ and $\mathbf{c}\preceq\mathbf{a}$ was a necessary and sufficient condition in order to achieve the equality between the two aforesaid weightable metrics.

4 CONCLUSIONS

In this paper, we have continued the research line begun by J. Borsík and J. Doboš in [1]. Concretely, we have studied the problem of how to merge a (not necessary finite) collection of weightable metrics in order to obtain a single one as output. With this aim we have introduced the notion of weightable metric aggregation function, which extends the original notion given by Borsík and Doboš, and we have provided a description of such functions. Moreover, we have discussed what is the relationship between the problem of merging weightable metrics and the problems of merging quasi-metrics, studied and solved by G. Mayor and O. Valero in [9] and [4], and merging partial metrics, solved in [6].

Acknowledgements

The authors acknowledge the support of the Spanish Ministry of Science and Innovation and FEDER, grants MTM2009-10320 y MTM2009-10962.

References

[1] J. Borsik and J. Doboš. On a product of metric spaces. *Math. Slovaca*, pages 193–205, 1981.

[2] J. Casasnovas and F. Rosselló. Averaging fuzzy biopolymers. *Fuzzy Sets and Systems*, 152(1):139–158, 2005.

[3] H.-P. Künzi, H. Pajoohesh, and M. P. Schellekens. Partial quasi-metrics. *Theoretical Computer Science*, 365(3):237 – 246, 2006.

[4] J. Martín, G. Mayor, and O. Valero. On aggregation of normed structures. *Mathematical and Computer Modelling*, 54:815 – 827, 2011.

[5] J. Martín, G. Mayor, and O. Valero. On quasi-metric aggregation functions and fixed point theorems. *Fuzzy Sets and Systems*, 228:88–104, 2013.

[6] S. Massanet and O. Valero. New results on metrics aggregation. In *Proc. of the 17th Spanish Conference on Fuzzy Technology and Fuzzy Logic*, pages 558–563, Valladolid, Spain, 2012.

[7] S. Massanet and O. Valero. On aggregation of metric structures: the extended quasi-metric case. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 6(1):115–126, 2013.

[8] S. Matthews. Partial metric topology. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 728:183–197, 1994.

[9] G. Mayor and O. Valero. Aggregation of asymmetric distances in computer science. *Information Sciences*, 180(6):803–812, 2010.

[10] A. Pradera and E. Trillas. A note on pseudometrics aggregation. *International Journal of General Systems*, 31:41–51, 2002.

[11] A. Pradera, E. Trillas, and E. Castiñeira. On distances aggregation. In *Proc. Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems international Conference*, pages 693–700, Dortmund, Germany, 2000.

[12] A. Pradera, E. Trillas, and E. Castiñeira. On the aggregation of some classes of fuzzy relations. In B. Bouchon-Meunier et al., editor, *Technologies for constructing intelligent systems*. Physica-Verlag GmbH, 2002.

CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD EN OPERADORES DE AGREGACIÓN: Una aplicación al problema de datos perdidos.

Daniel Gómez[1], **Karina Rojas**[2], **Javier Montero**[2], **J.Tinguaro Rodríguez**[2], **Gleb Beliakov**[3]

[1]*Faculty of Statistics, Av. Puerta de Hierro s/n 28040, Madrid (Spain)*, dagomez@estad.ucm.es

[2]*Faculty of Mathematics, Plz. Ciencias s/n 28040, Madrid (Spain)*, {krpatuelli,monty,jtrodrig}@mat.ucm.es

[3]*School of Information Technology, Deakin University, 221 Burwood Hwy, Burwood, Victoria 3125, Australia*, gbeliako@gmail.com

Resumen

En este trabajo se analiza una cuestión clave respecto de la relación que debe existir entre operadores de una misma familia de operadores de agregación (FAO) $\{A_n\}$, a fin de comprender que ellos deben definir adecuadamente un todo *consistente*. Se extienden algunas de las ideas de estabilidad de una FAO con un enfoque más general, definiéndose formalmente las nociones de $i-L$ y $j-R$ *estabilidad estricta* para familias de operadores de agregación, e introduciendo la noción de estabilidad estricta de orden k. Finalmente, se muestra una aplicación de las condiciones de estabilidad estricta al problema de pérdida de datos en un proceso de agregación de información, utilizándose las familias de la media ponderada y de la media ponderada cuasi-aritmética.

Palabras Clave: Operadores de agregación, estabilidad, datos perdidos, self-identity, conjuntos borrosos.

1 INTRODUCCIÓN

Usualmente, un *operador de agregación* [1, 6, 3, 7, 8, 10] se define como una función real A_n tal que si se tienen n elementos $x_1,\ldots,x_n$ en $[0,1]$, A_n produce un valor agregado $A_n(x_1,...,x_n)$ en [0,1] (ver [5]). Ésta definición puede ser extendida a una familia de operadores para cualquier n en vez de un operador simple para un n determinado. Esto lleva a la definición estándar [5, 12] de una *familia de operadores de agragación* (*FAO*) como un conjunto $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$, entregando las instrucciones de cómo agregar una colección de n elementos. Esta secuencia de funciones de agregación $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es llamada por algunos autores [12, 6] como *funciones de agregación extendidas* (*EAF*). En este trabajo se estudian dos diferentes pero relacionadas problemáticas en relación a las *funciones de agregación extendidas* o *familias de operadores de agregación*.

En primer lugar, debemos destacar que en la práctica, a menudo algunos datos pueden perderse, eliminarse o incorporarse a un conjunto de datos que se debe agregar, y cada vez que un cambio de cardinalidad ocurre, un nuevo operador de agregación A_m tiene que ser utilizado para agregar la nueva colección de m elementos. Sin embargo, es importante hacer hincapié que no necesariamente existe una relación entre A_n y A_m en una familia de operadores de agregación, tal como se define en [5]. En este contexto, parece natural incorporar algunas propiedades que mantengan la *consistencia* lógica entre operadores de una misma *FAO* frente a cambios de cardinalidad, para lo cual se necesita ser capaz de definir una familia de operadores de agregación en términos de su consistencia lógica. En otras palabras, los operadores que componen una familia tienen que estar de alguna manera relacionados de modo que el proceso de agregación siga siendo el mismo ante posibles cambios en la dimensión del conjunto de datos. Por lo tanto, parece ser apropiado estudiar propiedades que le den sentido a la secuencia $A_2, A_3, A_4, \ldots$, ya que de otra forma sólo se tiene un conjunto de operadores desconectados. Bajo este objetivo, en [15, 16, 11] se presentan las nociones de *estabilidad* y *consistencia* basadas en la robustez de un proceso de agregación. En este sentido, la noción de *estabilidad* para una familia de operadores de agregación está inspirada en el concepto de *continuidad*, aunque nuestro enfoque se centra en la cardinalidad de los datos en lugar de en los datos en sí, permitiendo asegurar cierta robustez en el resultado del proceso de agregación a pesar de los posibles cambios de cardinalidad. En particular, sea $A_n(x_1,\ldots,x_n)$ un valor agregado desde el conjunto de datos n-dimensional $x_1,\ldots,x_n$. Supongamos que un nuevo elemento x_{n+1} será agregado. Si x_{n+1} es un valor que se encuentra cerca del valor agregado dado por $A_n(x_1,\ldots,x_n)$, entonces el resultado de la agregación de estos $n+1$ elementos no debiera diferir significativamente al resultado de la agregación de los n elementos. Siguien-

do con la idea de estabilidad para cualquier herramienta matemática, si $|x_{n+1} - A_n(x_1,\ldots,x_n)|$ es pequeña, entonces $|A_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) - A_n(x_1,\ldots,x_n)|$ debiera ser pequeña también. Es importante tener en cuenta que si la familia A_n no es simétrica, es decir, existe un n para el cual el operador de agregación A_n no es simétrica, entonces la posición de los nuevos elementos es relevante para el resultado final del proceso de agregación. A partir de esta observación, en [15, 16, 11] se presentan algunas definiciones de *estabilidad* que extienden la noción de $self - identity$ definida en [18].

Por otro lado, un problema que no ha recibido demasiada atención es cómo obtener una agregación cuando algunas de las variables que serán agregadas no tienen información. Si el operador de agregación A_n tiene una definición clara para el caso en el cual la dimensión es menor, entonces este problema se puede solucionar fácilmente, aunque no siempre es una tarea trivial. En este artículo se trata el problema de datos perdidos para algunas familias de operadores de agregación conocidas, basándose en la consistencia de las familias de agregación a través de la noción de estabilidad.

2 CONSISTENCIA DE FAMILIAS DE OPERADORES DE AGREGACIÓN

Tal como se ha señalado en la introducción, una *familia de operadores de agregación* es un conjunto de operadores $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$, que proporciona instrucciones sobre cómo agregar colecciones de elementos de cualquier dimensión n. En [12] se muestra que los operadores de una familia pueden estar relacionados por medio de un grupo de propiedades. Por ejemplo, continuidad, simetría u otras propiedades conocidas que usualmente se definen para una función de agregación A_n, y que puede ser definida en general para una familia de operadores de agregación, imponiendo que éstas propiedades tienen que ser satisfechas para todo n. Sin embargo, este tipo de propiedades no garantizan una coherencia en el proceso de agregación, en tanto no establecen ninguna restricción que conecten las diferentes funciones de agregación.

A pesar que pocas propiedades han sido estudiadas o definidas para una *FAO* en general (ver [16] para más detalle), es posible encontrar en la literatura algunas propiedades de operadores de agregación que pueden ser entendidas como propiedades de una familia como un todo, en tanto establecen alguna relación entre los diferentes operadores.

Un concepto que establece una relación entre operadores de diferente dimensión en una FAO es la noción de *recursividad*. La recursividad es introducida en [7] en el contexto de operadores de agregación *OWA*. A partir de [7], en [1, 8, 10, 4] es estudiada la recursividad de una FAO de manera más general y en conexión con la consistencia de un proceso de agregación. Es importante notar que la recursividad garantiza un tipo de consistencia de una *FAO* $\{A_n\}$, en tanto cada función A_n es construida tomando en cuenta las funciones previas A_{n-1}. De esta manera, la situación en la cual diferentes operadores A_n sin una relación entre si, no pueden ser recursivos. Otras propiedades que establecen algunas condiciones entre diferentes miembros de una misma familia son las de *descomponibilidad* (ver [5, 6] para más detalle) o *bisimetra* (ver [5, 6] para más detalle) entre otros.

A pesar que estas propiedades pueden ser consideradas como modelamiento de un tipo de consistencia en una familia de operadores de agregación, éstas se centran más en la construcción de un operador de agregación de dimensión n a partir de operadores de agregación de dimensiones más bajas, que es una idea particular de consistencia. Por otro lado, en la búsqueda de la idea de consistencia de una familia de operadores de agregación basados en la definición de $self - identity$ dada por Yager en [18], la noción de *estabilidad estricta* de una FAO fue definida en [15, 16, 11] en tres grados diferentes. Además, en [6], la propiedad de Yager y su propiedad dual fueron analizadas y estudiadas a fin de determinar una familia consistente de pesos para diferentes familias de operadores de agregación ponderados.

La idea es simple: en una familia de operadores de agregación, A_n y A_{n+1} deben estar estrechamente relacionados, en el sentido que si un nuevo elemento va a ser incorporado, y este nuevo elemento corresponde a la agregación de los n ítems anteriores, entonces el resultado de la agregación de estos $n+1$ elementos debe ser cercana a la agregación de los n anteriores. En otras palabras, si el operador de agregación A_{n+1} se diferencia demasiado de A_n, producirá una familia *inestable* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Teniendo en cuenta que las FAOs no son necesariamente simétricas, en [16] se analizaron dos posibilidades sobre la definición de estabilidad estricta (L- o left y R- o right estabilidad).

Definition 2.1. *([15, 16]) Sea* $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ *una familia de operadores de agregación. Entonces, diremos que:*

1. $\{A_n\}_n$ *es una familia R-estrictamente estable si* $\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $[0,1]$, *y* $\forall n \geq 3$, $A_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$ *coincide con:*

$$A_n(x_1,\ldots,x_{n-1},A_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})).$$

2. $\{A_n\}_n$ *es una familia L-estrictamente estable si* $\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $[0,1]$, *y* $\forall n \geq 3$, $A_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})$ *coincide con:*

$$A_n(A_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}),x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

A pesar que las definiciones anteriores pueden ser relajadas desde un punto de vista asintótico y probabilístico (ver [16]), este trabajo se enfoca en las condiciones de estabilidad estricta expuestas.

3 $i-L$ y $j-R$ ESTABILIDAD.

Las definiciones anteriores suponen que el nuevo elemento se incorpora en la primera o en la última posición, supuesto puede ser relajado, en tanto dicho elemento puede ser incorporado en cualquier posición del conjunto de datos. El concepto de j-L estabilidad estricta fue introducido en [2], en el cual se impone que el nuevo elemento se ubica en la j-ésima posición. Análogamente, es posible definir la i-R estabilidad estricta ubicando el elemento en la posición i-ésima desde la derecha. De este mismo modo, pueden ser definidas las nociones de j-L y i-R estabilidad estricta en términos asintóticos y probabilísticos.

Definition 3.1. *Sea* $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ *una familia de operadores de agregación, diremos que:*

1. $\{A_n\}_n$ *es una familia i-R-estrictamente estable si* $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $[0,1]$, *y* $\forall n \geq 3$, $A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$ *coincide con:*

$$A_n(x_1,...,x_{n-i},A_{n-1}(x_1...,x_{n-1}),\ldots,x_{n-1}).$$

2. $\{A_n\}_n$ *es una familia j-L-estrictamente estable si* $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $[0,1]$, *y* $\forall n \geq 3$, $A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1})$ *coincide con:*

$$A_n(x_1,...,x_{j-1},A_{n-1}(x_1,...,x_{n-1}),x_j,\ldots,x_{n-1}).$$

Notar que las nociones de j-L y i-R estabilidad estricta definidas anteriormente son equivalentes (para cualquier j y/o i) cuando la FAO es simétrica. Pero en general, es muy difícil que una FAO no simétrica satisfaga más de una condición de manera simultánea (ver [16] para más detalle). En nuestra opinión, las condiciones de estabilidad estricta que en general son satisfechas por las FAOs no simétricas, deben tener en cuenta la estructura del conjunto de datos que será agregado (además de la forma en la que esta familia es definida).

Similarmente, las FAOs simétricas imponen de manera implícita que la estructura del conjunto de datos no tiene un efecto en el resultado del proceso de agregación, es decir, el orden en la cual la información es agregada no es relevante, mientras que para las familias de operadores de agregación no simétricas, se asume que el conjunto de datos tiene una estructura inherente, y por tanto, la posición de los elementos del conjunto de datos es relevante. En este sentido, la estabilidad estricta debe tener en cuenta que el conjunto de datos presenta una estructura (ver [17, 13] para más detalle). En el capítulo siguiente, se presentan algunas definiciones de estabilidad estricta para FAOs no simétricas las cuales dependen de la estructura del conjunto de datos a ser agregado.

4 ESTAB. ESTRICTA DE ORDEN k.

Los tres niveles de estabilidad presentados en [16, 15] (*estricta*, *asintotica* y *casi segura*) establecen restricciones hacia la existencia de una relación entre los miembros de una FAO $\{A_n\}_n$, a fin de garantizar algún nivel de consistencia y robustez del proceso de agregación. Sin embargo, estas condiciones se centran en la relación entre dos elementos consecutivos, i.e. A_n y A_{n+1}. La noción de estabilidad estricta puede ser extendida imponiendo condiciones sobre la relación entre los operadores de agregación A_n y A_m cuando $|m-n| = k$. En este contexto, se presenta el concepto de estabilidad estricta de orden k con respecto a la posición $r_1,\ldots,r_k$. Como en el caso de estabilidad estricta de orden 1, se asume que x es un vector n-dimensional que será agregado por un operador A_n. Supongamos ahora que k elementos son adicionados a x, las cuales coinciden con la agregación $A_n(x)$. Entonces, la agregación del vector $n+k$-dimensional resultante al incorporar el valor $A_n(x)$ en la posición $r_1,\ldots,r_k$ coincide con $A_n(x)$. En nuestra opinión, para introducir este nuevo concepto es necesario especificar la siguiente notación:

Dado $n \in N$ y dada la secuencia de k posiciones $r_1,\ldots,r_k$ con $r_1 < r_2 \ldots < r_k \leq n+k$, se denota por $\xi^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k}$ la función

$$\xi^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k} : [0,1]^n \times [0,1] \longrightarrow [0,1]^{n+k}$$

en la cual, para un $x \in [0,1]^n$ dado y $\alpha \in [0,1]$, el vector x se transforma en un vector $[0,1]^{n+k}$ adicionando el valor α en la posición $r_1,\ldots,r_k \leq n+k$. Por ejemplo, sea $x = (x_1,\ldots,x_6)$ en $[0,1]^6$, entonces $\xi^6_{1,3,8}(x,\alpha)$ es el vector en $[0,1]^9$ que resulta de incluir el valor α en x en la posición 1, 3 y 8, i.e. $\xi^n_{1,3,8}(x,\alpha) = (\alpha,x_1,\alpha,x_2,x_3,x_4,x_5,\alpha,x_6)$.

Una vez ha sido introducida la notación, vemos la ecuación asociada a la j-L estabilidad estricta puede ser reformulada como:

$$A_{n+1}(\xi^n_j(x,\alpha)) = A_n(x) \;\; con\; \alpha = A_n(x)\; para\; x \in [0,1]^n.$$

Esto es posible introducirlo mediante la siguiente definición:

Definition 4.1. *Sea* $\{A_n : [0,1]^n \to [0,1], n \in \mathbb{N}\}$ *una familia de operadores de agregación. Entonces,* $\{A_n\}_n$ *es una familia* $r_1,\ldots,r_k$*-L-estrictamente estable para un valor dado* $r_1 < \ldots < r_k$ *si* $\forall n \geq r_k - k$ *y* $\forall x \in [0,1]^n$

$$A_{n+k}\left(\xi^n_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(x,A_n(x))\right) = A_n(x)$$

Del mismo modo se establecen algunas condiciones entre los miembros de una FAO cuando ellos difieren en un elemento (i.e. A_n y A_{n+1}). La definición anterior establece la relación entre los elementos de una FAO cuando ellos difieren en k su cardinalidad (i.e. A_n y A_{n+k}), tomando en cuenta la información agregada (i.e. la estructura del conjunto de datos). En las siguientes subsecciones, se analizan las consecuencias y los vínculos entre familias estrictamente estables de diferentes órdenes, diferenciando entre los casos simétricos y no simétricos.

4.1 El caso simétrico.

De manera similar ocurre con la j-L estabilidad estricta, cuando una *FAO* es simétrica (i.e. todos sus miembros son operadores simétricos), la posición $r_1,\ldots,r_k$ no es relevante en la definición de la estabilidad estricta de orden k. Un parámetro muy importante es el número k, en tanto representa el orden de la estabilidad impuesta, que puede ser definida $\forall n \geq 2$ y $\forall x \in [0,1]^n$ como:

$$A_{n+k}\left(\xi^n_{n+1,\ldots,n+k}(x,A_n(x))\right) = A_n(x)$$

La siguiente proposición analiza la relación que existe entre los diferentes órdenes de las familias estrictamente estables.

Proposition 4.1. *Sea $\{A_n\}_n$ una familia simétrica estrictamente estable. Entonces, $\{A_n\}$ es una familia estrictamente estable de orden k para cualquier $k \geq 2$.*

Dem. Sea $\{A_n\}_n$ una FAO simétrica estrictamente estable, y sea $k \geq 2$. Además, sea x un elemento de $[0,1]^n$. Entonces, tomando en cuenta que $\{A_n\}_n$ es una familia estrictamente estable, se tiene que:

$$A_n(x) = A_{n+1}(x,A_n(x)) = A_{n+2}(x,A_n(x),A_{n+1}(x,A_n))$$

$$= A_{n+2}(x,A_n(x),A_n(x)) = \ldots A_{n+k}(x,A_n(x),\ldots,A_n(x)),$$

se concluye la demostración.

Se observa que la situación opuesta no es necesariamente verdadera. Sea $\{A_n\}_n$ una FAO definida como:

$$A_n(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} Max\{x_1,\ldots,x_n\} & si\ n = 2m \\ Min\{x_1,\ldots,x_n\} & si\ n = 2m+1 \end{cases}$$

Es fácil de ver que $\{A_n\}_n$ es una familia estrictamente estable de orden 2, pero (como se muestra en [16]), $\{A_n\}_n$ no es una familia estrictamente estable de orden 1.

Corolario 1 Las FAOs

- $\{Min_n(x_1,\ldots,x_n) = Min\{x_1,\ldots,x_n\}\forall n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{Max_n(x_1,\ldots,x_n) = Max\{x_1,\ldots,x_n\}\forall n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{Av_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1,n} \frac{x_i}{n}\forall n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{G_n(x_1,\ldots,x_n) = (\prod_{i=1}^n x_i)^n \forall n \in \mathbb{N}\}$,
- $\{H_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1,n} x_i}\forall n \in \mathbb{N}\}$

son familias estrictamente estable de cualquier orden.

Dem. Todas estas familias son estrictamente estables (ver [16] para más detalle), y en base a la Proposición 1 también son familias estrictamente estables de orden k.

Se observa que una familia estrictamente estable de orden k en general no es estrictamente estable de orden 1 cuando $k \leq l$. En la siguiente proposición se establece un resultado para los casos en que esta implicación es verdadera.

Proposition 4.2. *Sea $\{A_n\}_n$ una familia simétrica estrictamente estable de orden k, y sea $k \leq l$. $\{A_n\}$ es una familia estrictamente estable de orden l si $l = mk$ para un entero m.*

Dem. Sea $\{A_n\}_n$ una FAO simétrica estrictamente estable de orden k, sea m un entero positivo y sea $l = mk$. Dado $x \in [0,1]^n$, se tiene que:

$$A_{n+l}\left(x_1,\ldots,x_n,\overbrace{A_n(x),\ldots,A_n(x)}^{l\ times}\right) = A_n(x)$$

Como $\{A_n\}_n$ es una familia estrictamente estable de orden k, entonces se cumple que:

$A_n(x) = A_{n+k}(x,\overbrace{A_n(x),\ldots,A_n(x)}^{k\ times})$, que es igual a:

$$A_{n+2k}\left(\xi^{n+k}_{n+k,\ldots,n+2k}(\xi_{n+1,\ldots,n+k}(x,A_n(x)),A_{n+k}(\xi_{n+1,\ldots,n+k}(x,A_n(x))))\right). \quad (1)$$

$A_n(x) = A_{n+k}\left(\xi_{n+1,\ldots,n+k}(x,A_n(x))\right)$, la expresión dada en (1) coincide con $A_{n+2k}(x,\overbrace{A_n(x),\ldots,A_n(x)}^{2k\ times})$. Por lo tanto, en estos casos se tiene una estabilidad estricta de orden k que implica una estabilidad estricta de orden $2k$. Siguiendo con esta secuencia, se concluye que:

$A_n(x) = A_{n+mk}(x,\overbrace{A_n(x),\ldots,A_n(x)}^{mk\ times})$, y entonces el resultado es demostrado.

4.2 El caso no simétrico.

Para concluir este capítulo, se presenta un resultado que establece algunas condiciones entre diferentes órdenes de

FAOs estrictamente estables no simétricas.

Proposition 4.3. *Sea $\{A_n\}_n$ una j-L una FAO estrictamente estable $\forall j \in \{r_1,\ldots,r_k\}$. Entonces $\{A_n\}$ es una $r_1,r_2,\ldots,r_k$ familia estrictamente estable.*

Dem. Sea $\{A_n\}_n$ una FAO j-L estrictamente estable para todo $j \in \{r_1,\ldots,r_k\}$. Sea $x \in [0,1]^n$ un vector n-dimensional, con $n > r_k - k$. Como $\{A_n\}_n$ es $r_1 - L$ una familia estrictamente estable, entonces se cumple lo siguiente:

$$A_n(x) = A_{n+1}\left(\xi^n_{r_1}(x, A_n(x))\right)$$

Pero como $\{A_n\}_n$ es una familia r_2-L estrictamente estable, la expresión aterior es igual a:

$$A_{n+2}\left(\xi^{n+1}_{r_2}\left(\xi^n_{r_1}(x,A_n(x)), A_{n+1}(\xi^n_{r_1}(x,A_n(x)))\right)\right),$$

la cual es igual a:

$$A_{n+2}\left(\xi^{n+1}_{r_2}\left(\xi^n_{r_1}(x,A_n(x)), A_n(x)\right)\right),$$

que a su vez coincide con:

$$A_{n+2}\left(\xi^n_{r_1,r_2}(x,A_n(x))\right).$$

Siguiendo un razonamiento similar, es posible demostrar de manera iterativa que $A_n(x)$ coincide con $A_{n+k}\left(\xi^n_{r_1,\ldots,r_k}(x,A_n(x))\right)$, con lo que se concluye la demostración.

Se observa que la situación opuesta no es necesariamente verdadera. Por ejemplo, la familia $\{A_n\}$ definida anteriormente como el máximo para $n = 2m$ y el mínimo para $n = 2m+1$ es una familia estrictamente estable de orden 2 para cualquier posición $r_1 < r_2$, pero no es una FAO r_1 o r_2 estrictamete estable.

5 GENERACIÓN DE PESOS CON DATOS PERDIDOS: Una aplicación de la Estabilidad.

Se introduce un ejemplo para ilustrar una interesante aplicación del concepto de estabilidad. Considere un curso de pregrado en el cual la evaluación final se calcula como; 30% para las evaluaciones parciales (3 evaluaciones de 10% cada una) y 70% para el exámen final (por lo que tenemos una media ponderada). Suponga que un estudiante realiza todas las evaluaciones excepto la primera, ya que se matriculó tarde en la asignatura. ¿Cómo se debe calcular su evaluación final de una manera justa y coherente con respecto al resto de sus compañeros de clase?. Esto constituye un problema de datos perdidos, y para nosotros una solución razonable es volver a ponderar la fórmula, por lo que los pesos de los elementos ponderados se aumentan proporcionalmente.

Recordemos una vez más que nuestro objetivo no es decidir cómo es el vector de pesos $w^4 = (w^4_1, w^4_2, w^4_3, w^4_4)$, sino que garantizar una cierta estabilidad o consistencia en el proceso de agregación con diferentes cardinalidades. Por ejemplo, será poco coherente para elegir $w^4 = (0.1, 0.1, 0.1, 0.7)$ cuando los datos sobre las cuatro evaluaciones mencionadas están disponibles, pero también elegir $w^3 = (0, 8, 0.2, 0)$ cuando la primera evaluación tiene un valor perdido, ya que la importancia relativa de las pruebas es claramente diferente de una situación a otra. Desde el punto de vista de la coherencia, esta evaluación no será estable.

En primer lugar, centremos nuestra atención en la familia de la agregación de medias ponderadas. Esta familia $\{W_n, n \in \mathbb{N}\}$, se define a través de un vector de pesos $w^n = (w^n_1, ..., w^n_n) \in [0,1]^n$ en la cual se tiene que $W_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} w^n_i x_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} w^n_i = 1$ y $(x_1, ..., x_n) \in [0,1]^n \ \ \forall n$. En la FAO dada por la media ponderada, los pesos asociados a los elementos que serán agregados representan la *importancia* de cada uno de los elementos en el proceso de agregación. Por esta razón, la media ponderada es seguramente uno de los operadores de agregación más relevantes y usados en muchas áreas diferentes (por ejemplo, en estadísticas, en los problemas de representación del conocimiento, en lógica difusa, decisiones de multicriterio, en toma de decisiones, etc), y uno de los problemas más estudiados en todas estas áreas es cómo determinar estas importancias *o pesos*. La estabilidad de esta familia se ha estudiado desde un punto de vista en [16]. Sin embargo, como se observa más adelante, este estudio puede no ser directamente aplicable al problema de valores perdidos en los problemas de agregación.

El problema de datos perdidos aparece cuando un elemento específico de $x = (x_1, \ldots, x_n)$, x_i, es un valor faltante. En el ejemplo anterior es $n = 4$, la información es agregada a través de $W_4(x_1, \ldots, x_4) = \sum_{i=1,4} w^4_i x_i$, y la importancia de los cuatro criterios se ha establecido a través del vector $4-$dimensional $w^4 = \left(w^4_1, w^4_2, w^4_3, w^4_4\right) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.7)$. Ahora, considere una alternativa x que presenta los valores de $x = (sin\ informacin, 0.3, 1, 1)$. ¿Cuál deberá ser el operador de agregación A_3 a utilizar?

Si decidimos utilizar la función de agregación de medias ponderadas para $n = 3$ (i.e. $A_3 = W_3$), el problema es determinar el vector de pesos w^3. Una posibilidad es imponer que W_3 y W_4 satisfagan las condiciones de estabilidad estricta. Sin embargo, se observa que las diferentes condiciones de estabilidad estricta (L, R, $i-L$ or $j-R$ para diferentes posiciones$i$ y j) entregan diferentes posibilidades y soluciones para el vector w^3. Entonces, ¿qué restricciones de estabilidad se debe elegir?. Teniendo en cuenta que el $1-$ésimo valor x_1 es el que falta, parece razonable imponer la condición de estabilidad estricta L (o equivalentemente, el

4−R o 1−L), es decir,

$$W_4(\xi_4^3(x_1,x_2,x_3,W_3(x_1,x_2,x_3))) =$$

$$W_4(W_3(x_2,x_3,x_4),x_2,x_3,x_4) = W_3(x_2,x_3,x_4)$$

para cualquier x_2, x_3 y x_4 en $[0,1]$

Respecto del ejemplo anterior, estas condiciones se satisfacen si y sólo si $w^3 = (\frac{1}{9},\frac{1}{9},\frac{7}{9})$. Se observa que este vector mantiene las proporciones relativas entre los pesos originales para los valores no perdidos en las posiciones 2, 3 y 4.

En el mismo ejemplo, la primera posición de la alternativa $x = (no\ evaluado, 0.3, 1, 1)$ es una valor perdido. Pero ¿cómo deberá ser la agregación si el valor que falta ocupa la segunda posición?. En general, la posición en la que aparecen los datos son relevantes para las FAOs no simétricas, si existe alguna información $x = (x_1,\ldots,x_n)$ que tiene que ser agregada y se tiene un valor perdido x_j, para encontrar las relaciones que deben existir entre las funciones de agregación A_n y A_{n+1}, se debe imponer la $j-$L estabilidad estricta o equivalentemente la $(n-(j+1))$-R estabilidad estricta en toda la familia. A continuación se presenta una propuesta que entrega las condiciones suficientes para asegurar $j-$L estabilidad estricta de la familia $\{W_n\}_n$. Otra demostración de esta afirmación se encuentra en [2] y también en [9], en los que se entregan conclusiones similares cuando se tiene que resolver los problemas de datos perdidos ante la familia de medias ponderada.

Proposition 5.1. *Sea $w^n = (w_1^n,\ldots,w_n^n) \in [0,1]^n, n \in \mathbb{N}$, una secuencia de pesos de una familia de medias ponderadas $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i^n = 1$ se satisface $\forall n \geq 2$. Entonces, la familia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia $j-L$-estrictamente estable si y solo si la secuencia de pesos satisface:*

$$\begin{cases} w_k^n = (1-w_j^n)\cdot(w_k^{n-1}) & para\ \ k = 1,\ldots,j-1 \\ w_{k+1}^n = (1-w_j^n)\cdot(w_k^{n-1}) & para\ \ k = j,\ldots,n-1 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Dem.

Es importante notar que para una FAO de medias ponderadas genérica $\{W_n\}_{n\in N}$, la propiedad de $j-$L estabilidad estricta puede ser re-escrita $\forall x_1,\ldots x_{n-1} \in [0,1]$ como:

$$\sum_{i=1}^{j-1}(w_i^n - (1-w_j^n)w_i^{n-1})x_i + \sum_{i=j}^{n-1}(w_{i+1}^n - (1-w_j^n)w_i^{n-1})x_i = 0$$

A partir de la ecuación anterior se concluye que la proposición se cumple.

5.1 Generalizando a un conjunto de datos perdidos.

A fin de concluir el estudio de operadores de agregación frente a valores perdidos desde el punto de vista de la estabilidad, a continuación se intenta extender los análisis anteriores a la situación en la cual existen más de un valor perdido. Suponga que se tienen valores perdidos en las posiciones $r < s$. Entonces se tiene:

$x = (x_1,\ldots,x_{r-1},perdido,x_{r+1},\ldots,x_{s-1},perdido,x_{s+1},\ldots,x_n)$.

Considerado la ecuación de $r-s-$L estabilidad estricta, es posible construir el operador de agregación A_{n-2} desde A_n para un n dado. Retomando el ejemplo de la evaluación del curso de pregrado para las cuatro pruebas. Se considera un estudiante que no tiene información en la segunda y tercera evaluación por inasistencia causada por enfermedad. Si se decide utilizar la media ponderada como función de agregación para $n = 2$ (i.e. $A_2 = W_2$), el problema en cuestión consiste en determinar el vector de pesos de w^2 y w^4 (que corresponde a las evaluaciones con información). Entonces, parece ser razonable imponer la condición de $2-3$-L estabilidad estricta a fin de encontrar los pesos asociados al operador de agregación W_2 i.e, para cualquier x_1, x_2 en $[0,1]$:

$$W_4(x_1,W_2(x_1,x_2),W_2(x_1,x_2),x_2) = W_2(x_1,x_2)$$

Por convención notacional, se denota por x_1 al valor que ocupa la primera variable y por x_2 al valor de la cuarta variable, por lo que el vector asociado es $x = (x_1,perdido,perdido,x_2)$. Entonces, la condición anterior se satisface si y sólo si $w^2 = (\frac{1}{8},\frac{7}{8})$. Se observa que este vector mantiene las proporciones relativas entre los pesos originales para los valores no perdidos de las posiciones 1 y 4.

Como se muestra más adelante para la estabilidad estricta de orden 1, se analizan las condiciones que la familia de pesos debiera satisfacer para garantizar la estabilidad esticta de orden 2 de la FAO de medias ponderadas. Será posible establecer la relación que debe existir entre pesos de diferentes dimensiones a fin de construir un proceso de agregación consistente bajo el problema de existencia de valores perdidos en más de una variable.

Proposition 5.2. *Sea $w^n = (w_1^n,\ldots,w_n^n) \in [0,1]^n, n \in N$ una secuencia de pesos de una familia de medias ponderadas $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que verifica $\sum_{i=1}^{n} w_i^n = 1\ \forall n \geq 2$. Entonces, la familia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia $r_1 - r_2-L$ estrictamente estable si y sólo si la secuencia de pesos satisface:*

$$\begin{cases} w_i^{n+2} = (1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n) & i = 1,\ldots,r_1-1 \\ w_{i+1}^{n+2} = (1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n) & i = r_1,\ldots,r_2-1 \\ w_{i+2}^{n+2} = (1-w_{r_1}^{n+2}-w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n) & i = r_2,\ldots,n \end{cases}$$

$\forall n \geq r_2 - 2 \in \mathbb{N}$.

Dem. Notar que para una FAO de medias ponderadas genérica $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con pesos w^n, $n\in\mathbb{N}$, la propiedad de r_1-r_2-L estabilidad estricta puede ser re-escrita como:

$$0 = |\sum_{i=1}^{r_1-1} x_i\left(w_i^{n+2} - (1-w_{r_1}^{n+2} - w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n)\right) + \ldots$$

$$\ldots \sum_{i=r_1 1}^{r_2-1} x_i\left(w_{i+1}^{n+2} - (1-w_{r_1}^{n+2} - w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n)\right) +$$

$$+ \sum_{i=r_2}^{n} x_i\left(w_{i+2}^{n+2} - (1-w_{r_1}^{n+2} - w_{r_2}^{n+2})\cdot(w_i^n)\right)|$$

.

A partir de la ecuación anterior se concluye que la proposición se satisface.

Proposition 5.3. *Sea $w^n = (w_1^n, ..., w_n^n) \in [0,1]^n, n\in\mathbb{N}$ una secuencia de pesos de la familia de medias ponderadas $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i^n = 1$ se satisface $\forall n \geq 2$. Entonces, la familia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia $r_1,\ldots,r_k-L$ estrictamente estable si y sólo si la secuencia de pesos satisface:*

$$w_{i+f}^{n+k} = (1 - \sum_{v=1}^{k} w_{r_v}^{n+k})\cdot(w_i^n),$$

para $f = 0,\ldots,k$ y $i = r_f,\ldots,r_{f+1}-1$, donde $r_0 = 1$ y $r_{k+1} = n+1$ por conveniencia notacional.

Dem. Similar a la demostración de la Proposición 6.

A fin de extender las propiedades anteriores a una clase más general de FAO, a continuación se analiza la estabilidad estricta de orden k para transformaciones de una FAO original, para lo cual primero se introduce las siguientes notaciones y definiciones.

Definition 5.1. *Sea $f : [0,1] \to A$ una función inyectiva y continua, y sea $\{\phi_n : A \to A,\ n\in\mathbb{N}\}$ una familia de operadores de agregación definida en el dominio A. Entonces, la familia de operadores de agregación transformada $\{M_f^{\phi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es definida como:*

$$M_f^{\phi_n}(x_1,\ldots,x_n) = f^{-1}\left(\phi_n\left(f(x_1),\ldots,f(x_n)\right)\right)$$

Se observa que si f es la funcion identidad, entonces la familia transformada coincide con la familia original. Si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la media o la media ponderada, entonces $M_f^{\phi_n}$ es llamada media cuasi-aritmética o media cuasi-aritmética ponderada. Las funciones dadas por la media cuasi-aritmética son muy importantes en muchos análisis de agregación. Algunas de las familias cuasi-aritméticas más comocidas son: la media geométrica (cuando $f(x) = log(x)$), la media armónica (cuando $f(x) = 1/x$) y la media de la potencia (cuando $f(x) = x^p$), entre otras. Es importante remarcar que algunas de las familias de operadores de agregación más conocidas (por ejemplo el productorio $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), no pueden ser transformadas o extendidas directamente. Por ejemplo si $f(x) = 5x$, entonces $A = [0,5]$, pero no es posible garantizar que para todo $n\in N$, $P_n(f(x_1),\ldots,f(x_n)) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ pertenece al intervalo $[0,5]$.

En el resultado que se muestra a continuación es analizada la propiedad de estabilidad estricta de diferentes órdenes para transformaciones de FAO originales. Particularmente, se muestra que la estabilidad estricta de orden k se mantiene con la transformación.

Proposition 5.4. *Sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{M_f^{\phi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de operadores de agregación y su extensión o agregación transformada. Entonces $\{M_f^{\phi_n}\}_{n\in N}$ es una familia $r_1,\ldots,r_k j-L$ estrictamente estable si y sólo si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia $r_1,\ldots,r_k j-L$ estrictamente estable en el dominio de A.*

Dem.: Tomando en cuenta que:

$$M_f^{\phi_{n+k}}\left(\xi_{r_1,\ldots,r_k}^n(x, M_f^{\phi_n}(x))\right)$$

puede ser re-escrito como:

$$f^{-1}\left(\phi_{n+k}\left(\xi_{r_1,\ldots,r_k}^n(f(x),\phi_n(x))\right)\right),$$

la condición de estabilidad estricta $r_1,\ldots,r_k j-$L para la FAO $\{M_f^{\phi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser formulada como:

$$f^{-1}\left(\phi_{n+k}\left(\xi_{r_1,\ldots,r_k}^n(f(x),\phi_n(x))\right)\right) = f^{-1}\left(\phi_n(f(x))\right).$$

Como f es una función inyectiva y contínua, una condición se satisface si y sólo si $\{\phi_n\}_n$ es una familia estictamente estable en A, con lo cual se concluye la demostración.

Corolario 2 La FAO dada por la media ponderada cuasi-aritmética es una familia $j-$L estrictamente estable si y sólo si la secuencia de sus pesos satisface $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} w_k^n = (1-w_j^n)\cdot(w_k^{n-1}) & para\ \ k = 1,\ldots,j-1 \\ w_{k+1}^n = (1-w_j^n)\cdot(w_k^{n-1}) & para\ \ k = j,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Corolario 3 La FAO dada por la media ponderada cuasi-aritmética es una familia $r_1,\ldots,r_k j-$L estrictamente estable si y sólo si la secuencia de sus pesos satisface:

$$w_{i+f}^{n+k} = (1 - \sum_{v=1}^{k} w_{r_v}^{n+k})\cdot(w_i^n),$$

para $f = 0,\ldots,k$ y $i = r_f,\ldots,r_{f+1}-1$, donde $r_0 = 1$ y $r_{k+1} = n+1$ por convención notacional.

6 COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se presentan anteriores desarrollos de los autores, todos relativos a la relación que debe existir entre los miembros de una familia de operadores de agregación, a fin de comprender que ellos deben definir adecuadamente un todo *consistente*. En particular, se aplican las nociones básicas de L y R estabilidad estricta de una familia de operadores de agregación presentadas en [16, 11, 15], pero con un enfoque más general que ha llevado a la definición de la $i-$L y $j-$R estabilidad estricta. Además, se introduce la noción de estabilidad estricta del orden k, que constituye una nueva extensión de dichos conceptos, en tanto permite relacionar los operadores de diferentes cardinalidades de manera arbitraria. Por otra parte, todas estos conceptos se han analizado con mayor detalle a partir de la familia dada por la media ponderada y por la media ponderada cuasi-aritmética. Finalmente, se presenta una interesante aplicación de estos conceptos de estabilidad estricta y sus condiciones o restricciones, a fin de hacer frente a los problemas de datos perdidos en el contexto de operadores de agregación.

Agradecimientos

Referencias

[1] A. Amo, J. Montero, E. Molina. Representation of consistent recursive rules. European Journal of Operational Research 130, 29-53, 2001.

[2] G. Beliakov, S. James. Stability of weighted penalty-based aggregation functions. Fuzzy Sets and Systems 226, 1-18, 2013.

[3] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo. Aggregation Functions, a Guide to Practitioners (Springer-Verlag, Berlin, 2007)

[4] H. Bustince, B. de Baets, J. Fernández, R. Mesiar, J. Montero: A generalization of the migrativity property of aggregation functions. Information Sciences 191:76-85 (2012).

[5] T. Calvo, A. Kolesarova, M. Komornikova, R. Mesiar. Aggregation operators, properties, classes and construction methods. In T. Calvo et al. (Eds.): Aggregation Operators New Trends and Aplications (Physica-Verlag, Heidelberg, 3-104, 2002).

[6] T. Calvo, G. Mayor, J. Torrens, J. Suñer, M. Mas and M. Carbonell. Generation of weighting triangles associated with aggregation fuctions. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 8(4) 417-451, 2000.

[7] V. Cutello, J. Montero. Recursive families of OWA operators. Proceedings FUZZ-IEEE Conference (IEEE Press, Piscataway, 1994), 1137-1141.

[8] V. Cutello, J. Montero. Recursive connective rules. International Journal of Intelligent Systems 14, 3-20, 1999.

[9] J. Dujmovic. The Problem of Missing Data in LSP Aggregation. Advances in Computational Intelligence Communications in Computer and Information Science Volume 299, 2012, pp 336-346. (2012)

[10] D. Gómez, J. Montero. A discussion on aggregation functions. Kybernetika 40, 107-120, 2004.

[11] D. Gómez, K. Rojas, J.T. Rodríguez, J. Montero. Stability in Aggregation Operators. S. Greco et al. (Eds.): IPMU 2012, Part III, CCIS 299, pp. 317-325, 2012Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012.

[12] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar and E. Pap. Aggregation Functions (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2009).

[13] J. Montero, D. Gómez, H. Bustince. On the relevance of some families of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 158, 2429-2442, 2007.

[14] J. Montero, V. López, D. Gómez. The role of fuzziness in decision making. Studies in Fuzziness and Soft Computing 215, 337-349, 2007.

[15] K. Rojas, D. Gómez, J.T. Rodríguez, J. Montero. Some properties of consistency in the families of aggregation functions. Advances in Intelligent and Soft Computing 107:169-176 (P. Melo-Pinto, P. Couto, C. Serodio, J. Fodor, B. De Baets, Eds.) Springer, Berlin (2011).

[16] K. Rojas, D. Gómez, J.T. Rodríguez, J. Montero. Strict Stability in Aggregation Operators. Fuzzy sets and Systems 228, 44-63, 2013.

[17] K. Rojas, D. Gómez, J.T. Rodríguez, J. Montero. A. Valdivia, F. Paiva. Development of child's home environment indexes based on consistent families of aggregation operators with prioritized hierarchical information. Fuzzy sets and Systems 2013. DOI: 10.1016/j.fss.2013.06.007

[18] R.R. Yager and A.Rybalov. Nonconmutative self-identity aggregation. Fuzzy Sets and Systems, 85:73-82, 1997.

ON WEAK MONOTONICITY OF SOME MIXTURE FUNCTIONS

Tomasa Calvo[1], **Gleb Beliakov**[2], **Tim Wilkin**[3]

[1] *Universidad de Alcalá, Spain*, tomasa.calvo@uah.es
[2,3] *Deakin University, Australia*, {gleb, tim.wilkin}@deakin.edu.au

Abstract

Monotonicity with respect to all arguments is fundamental to the definition of aggregation functions. Here we study means that are not necessarily monotone. Weak monotonicity was recently proposed as a relaxation of the monotonicity condition for averaging functions. We provide results for the weak monotonicity of some important classes of mixture functions. With these results we are able to extend and improve the understanding of this very important class of functions.

Keywords: Aggregation functions, monotonicity, means, penalty-based functions, mixture functions.

1 INTRODUCTION

Growing interest in the field of aggregation functions [3, 6] has led to the development of several new mathematical techniques, which has subsequently fostered the creation and analysis of new families of aggregation functions. One such technique is based on minimising penalties that describe disagreement between the inputs [5, 9], such that the output of an aggregation procedure is a value that is representative of the inputs in terms of the smallest penalty. All possible averaging functions can be represented as penalty based functions [5].

On the other hand the class of penalty based functions is broader and includes idempotent functions that are not monotone, for example the mode. In [12] a weaker condition of monotonicity of averaging aggregation functions was proposed, in which the value of aggregate does not decrease when all the inputs are increased by the same quantity. Two principal justifications for this weaker monotonicity were given: a) many important, existing averages are not actually monotone, but rather are weakly monotone (for example the mode and robust location estimators), and b) weak monotonicity is very useful when calculating representative values of clusters of data in the presence of outliers. Indeed, cluster structure may change when only some inputs are increased (or decreased), but it does not change when all inputs are changed by the same value. It was shown that location estimators [11] and some useful classes of means, like Lehmer means, certain mixture functions and the mode, are all weakly monotone.

In this work we extend the results of [12] to encompass mixture functions. Analysis of monotonicity of mixture and quasi-mixture functions has been performed recently in [7, 10]. Mixture functions are a subclass of Bajraktarevic means, which generalise quasi-arithmetic means [1,2,4]. In mixture functions the inputs are averaged as in a weighted mean, but the weights depend on the inputs. Weights can thus be chosen so as to emphasise, or de-emphasise, the small or large inputs. When applied to averaging functions measuring the distance between the inputs, such means allow for de-emphasising contributions from outliers. It was shown in [8] that mixture operators can be represented as penalty based functions.

However, as mixture functions are generally not monotone, the question of conditions on the weight functions which guarantee monotonicity of the aggregation become important. Several sufficient, but not necessary conditions for monotonicity were established in [7, 10]. These conditions are rather restrictive, as for example, the weight function must be monotone increasing. As weak monotonicity has been proposed as a relaxation on the definition of averaging aggregation functions, it makes sense to study sufficient conditions that guarantee the weak monotonicity of mixture functions. A better understanding of this class of functions will support their broader application and this study is precisely the goal of this paper.

This paper is organized as follows: Section 2 provides the necessary mathematical foundations of aggregation functions and means. The recent contribution of weak monotonicity and known properties are also presented. Within Section 3 we examine several non-monotone mixture func-

tions and prove conditions under which they are weakly monotone. Section 4 presents our conclusions.

2 PRELIMINARIES

2.1 AGGREGATION FUNCTIONS

In this article we make use of the following notations and assumptions. Without loss of generality we assume that the domain of interest is any closed, non-empty interval $\mathbb{I} = [a,b] \subseteq \bar{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$ and that tuples in $\mathbb{I}^n$ are defined as $\mathbf{x} = (x_{i,n} | n \in \mathbb{N}, i \in \{1,...,n\})$. We write x_i as the shorthand for $x_{i,n}$ such that it is implicit that $i \in \{1,...,n\}$. Furthermore, $\mathbb{I}^n$ is ordered such that for $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{I}^n$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ implies that each component of $\mathbf{x}$ is no greater than the corresponding component of $\mathbf{y}$, i.e., $x_i \leq y_i \forall i \in \{1,2,...,n\}$. Unless otherwise stated, a constant vector given as $\mathbf{a}$ is taken to mean $\mathbf{a} = a\underbrace{(1,1,...,1)}_{n \text{ times}} = a\mathbf{1}$, where n is implicit within the context of use.

The vector $\mathbf{x}_{\nearrow}$ denotes the result of permuting the vector $\mathbf{x}$ such that its components are in non-decreasing order, that is, $\mathbf{x}_{\nearrow} = \mathbf{x}_{\sigma}$, where σ is the permutation such that $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq x_{\sigma(n)}$. Similarly, the vector $\mathbf{x}_{\searrow}$ denotes the result of permuting $\mathbf{x}$ such that $x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \ldots \geq x_{\sigma(n)}$. We will make use of the common shorthand notation for a sorted vector, being $\mathbf{x}_{()} = \mathbf{x}_{\nearrow}$ or $\mathbf{x}_{()} = \mathbf{x}_{\searrow}$. In such cases the ordering will be stated explicitly and then $x_{(k)}$ represents the kth largest or smallest element of $\mathbf{x}$ accordingly.

Consider now the following definitions:

Definition 1. A function $F : \mathbb{I}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ is ***monotone non decreasing*** if and only if, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{I}^n, \mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ then $F(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{y})$.

Definition 2. A function $F : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ is an ***aggregation function*** in $\mathbb{I}^n$ if and only if F is monotone non-decreasing in $\mathbb{I}$ and $F(\mathbf{a}) = a$, $F(\mathbf{b}) = b$.

Thus the two fundamental properties defining an aggregation function are monotonicity with respect to all arguments and bounds preservation. Further properties of aggregation functions relevant within this article are:

Definition 3. A function F is called ***idempotent*** if for every input $\mathbf{x} = (t,t,\ldots,t), t \in \mathbb{I}$ the output is $F(\mathbf{x}) = t$.

The functions of most interest in this article are those that have averaging behaviour.

Definition 4. A function F has ***averaging behaviour*** (or is averaging) if for every $\mathbf{x}$ it is bounded by $\min(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}) \leq \max(\mathbf{x})$.

Due to monotonicity, aggregation functions that have averaging behaviour are idempotent and vice versa. Of particular relevance is the notion of shift-invariance. A constant change in every input should result in a corresponding change of the output.

Definition 5. A function $F : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ is ***shift-invariant*** (stable for translations) if $F(\mathbf{x} + a\mathbf{1}) = F(\mathbf{x}) + a$ *whenever* $\mathbf{x}, \mathbf{x} + a\mathbf{1} \in \mathbb{I}^n$ *and* $F(\mathbf{x}) + a \in \mathbb{I}$.

Definition 6. A function F is ***homogeneous*** (with degree one) if $F(a\mathbf{x}) = aF(\mathbf{x})$ for all $a\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ and $aF(\mathbf{x}) \in \mathbb{I}$

Aggregation functions that are shift-invariant and homogeneous are known as *linear aggregation functions*. Due to bounds preservation, idempotence follows from an aggregation function being shift-invariant, homogenous or both (i.e., linear). The canonical example of a linear aggregation function is the arithmetic mean.

Definition 7. The **φ-transform** of a function F is the function F^{φ} given by $F^{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(F(\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n)))$.

An important example of $\varphi-$transforms are the negations, with the standard negation being $\varphi(t) = 1 - t$.

2.2 MEANS

The term *mean* is used synonymously with averaging aggregation functions. Under monotonicity condition, averaging behaviour and idempotency are equivalent, but without monotonicity, idempotency does not imply averaging. We will use the term mean for idempotent averaging functions in this paper, which are not necessarily monotone.

Definition 8. *A function $M : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ is called a* ***mean*** *if and only if it is averaging (and hence idempotent).*

The basic examples of (monotone) means found within the literature include weighted arithmetic means, weighted quasi-arithmetic means, ordered weighted average (OWA), order statistics $S_k(\mathbf{x}) = x_{(k)}$, and its special cases the (lower,upper) medians.

The OWAs are special cases of the Choquet Integral [13]. There are many other interesting means that appear within the literature (e.g.: the logarithmic means, Heronian means, Bonferroni means, etc.) and a thorough consideration of the class of means can be found in [4].

An important class of means that are not always monotone are those expressed by the mean of Bajraktarevic [1, 2], which is a generalisation of the weighted quasi-arithmetic means.

Definition 9. *Let $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), ..., w_n(t))$ be a vector of weight functions $w_i : \mathbb{I} \to [0,\infty)$, and let $g : \mathbb{I} \to \bar{\mathbb{R}}$ be a strictly monotone function. The* ***mean of Bajraktarevic*** *is the function*

$$M_{\mathbf{w}}^{g}(\mathbf{x}) = g^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i) g(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i)}\right). \quad (1)$$

When $g(x_i) = x_i$ and all $w_i = w$, the Bajraktarevic mean is called a *mixture function* (or *mixture operator*) and is given by

$$M_w(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} w(x_i)}. \quad (2)$$

2.3 PENALTY BASED FUNCTIONS

In [5] it was demonstrated that averaging aggregation functions can be expressed as the solution of a minimisation problem of the form

$$F(\mathbf{x}) = \arg\min_{y} \mathscr{P}(\mathbf{x}, y) \quad (3)$$

where $\mathscr{P}(\mathbf{x}, y)$ is a penalty function satisfying the following definition:

Definition 10. ***Penalty function***. *The function $\mathscr{P} : \mathbb{I}^{n+1} \to \mathbb{R}$ is a penalty function if an only if it satisfies:*

1. $\mathscr{P}(\mathbf{x}, y) \geq c \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{I}^n, y \in \mathbb{I}$;
2. $\mathscr{P}(\mathbf{x}, y) = c$ if all $x_i = y$; and,
3. $\mathscr{P}(\mathbf{x}, y)$ is quasiconvex in y for any $\mathbf{x}$,

for some constant $c \in \mathbb{R}$ and any closed, non-empty interval $\mathbb{I}$. The first two conditions ensure that $\mathscr{P}$ has a strict minimum and that a consensus of inputs ensures minimum penalty, providing idempotence of $F(\mathbf{x})$. The third condition implies a unique minimum and is required for monotonicity. Since multiplication by, or addition of a constant to $\mathscr{P}$ will not change the minimisation, $\mathscr{P}$ may be shifted (if desired) so that $c = 0$. One can think of $\mathscr{P}$ as describing the dissimilarity or disagreement between the inputs $\mathbf{x}$ and the value y. It follows that F is a function that minimises the chosen dissimilarity. It is not necessary to explicitly state F, provided a suitable penalty function is given and the optimisation problem solvable. Subsequently it is sufficient to solve (3) to obtain the aggregate $F(\mathbf{x})$.

Non-monotone averaging functions can also be represented by a penalty function by relaxing condition 3. For penalty-based functions we have the following results due to [5].

Theorem 1. *Any idempotent function $F : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ can be represented as a penalty based function $\mathscr{P} : \mathbb{I}^{n+1} \to \mathbb{I}$ such that*

$$F(\mathbf{x}) = \arg\min_{y} \mathscr{P}(\mathbf{x}, y).$$

Theorem 2. *[9] Mixture functions can be written as a penalty function with*

$$\mathscr{P}(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)(x_i - y)^2.$$

It is apparent given the examples presented that many means are non-monotone and thus not aggregation functions according to Definition 2. In the next section we introduce weak monotonicity and consider some properties of weakly monotone aggregations.

2.4 WEAK MONOTONICITY

In [12] the authors introduced *weakly monotone* averaging aggregation functions. They were motivated by the following observations: first, that many means that appear in the literature are in fact non-monotone - the mode, Gini means, Bajraktarevic means [3,4] and mixture operators [7,10] are particularly well known cases; and, second, that some applications in fact require non-monotone averaging for good performance. For example, the robust estimators of location [11] and convolution-based image filters extensively use non-monotone averaging functions.

Monotonicity has an important interpretation in decision making problems: an increase in one criterion should not lead to the decrease of the overall score or utility. However monotonicity is a very strong condition for some other application areas. It is often accepted (and sometimes desired) that an increase in one input may lead to a decrease of a representative value of the inputs. However the same increase applied to all inputs should not lead to a decrease in the representative value. This is a weaker condition than shift-invariance, which is interpreted in the following way: a change in location of the origin should not affect the relative position of the estimator. The same applies to image processing: a representative intensity value of a subset of pixels should not change its value relative to the subset if the entire image is lightened or darkened.

To achieve these requirements we limit functions to those that have directional monotonicity in the direction of the vector $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$, which is obviously implied by shift-invariance, as well as by the standard monotonicity. This directional monotonicity will be referred to as weak monotonicity.

The authors of [12] proposed the following:

Definition 11. A function f is called ***weakly monotone*** non-decreasing (or directionally monotone) if $F(\mathbf{x}+a\mathbf{1}) \geq F(\mathbf{x})$ for any $a > 0$, $\mathbf{1} = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n \text{ times}}$, such that $\mathbf{x}, \mathbf{x}+a\mathbf{1} \in \mathbb{I}^n$.

For functions F that are directionally differentiable on $\mathbb{I}^n$ weak monotonicity is equivalent to non-negativity of the directional derivative $\mathrm{D}_{\mathbf{1}}(F)(\mathbf{x}) \geq 0$. Furthermore, it is self-evident that all monotone functions are weakly monotone and thus Definition 11 subsumes Definition 2 for functions F that are also bounds preserving.

2.5 BASIC PROPERTIES OF WEAKLY MONOTONE FUNCTIONS

The authors of [12] proved some useful properties of weakly monotone averaging aggregations. We present some of the results here that we later rely on.

Consider the function $F:\mathbb{I}^n\to\mathbb{I}$ formed by the composition $F(\mathbf{x})=A(B_1(\mathbf{x}),B_2(\mathbf{x}))$, where A,B_1 and B_2 are means.

Proposition 1. *If A is monotone and B_1,B_2 are weakly monotone, then F is weakly monotone.*

Proposition 2. *If A is weakly monotone and B_1,B_2 are shift invariant, then F is weakly monotone.*

Consider functions of the form $\varphi(\mathbf{x})=(\varphi(x_1),\varphi(x_2),...,\varphi(x_n))$ for all $\mathbf{x}$ of dimension $n\geq 1$.

Proposition 3. *If A is weakly monotone and φ is a linear function, then the $\varphi-$transform $A^{\varphi}(\mathbf{x})=\varphi^{-1}(A(\varphi(\mathbf{x})))$ is weakly monotone.*

Corollary 1. *The dual A^d of a weakly monotone function A is weakly monotone under standard negation.*

3 EXAMPLES OF WEAKLY MONOTONE MIXTURE FUNCTIONS

Let us consider mixture functions given by eqn. (2) and three sufficient conditions for producing a monotone non-decreasing function. If, in each case the weights $w:[0,1]\to[0,\infty[$, then:

1. $w\geq w'$ for any non-decreasing, piecewise differentiable weight function [7];
2. $w(x)\geq w'(x)(1-x)$ for all $x\in[0,1]$, [8,9]; or, if we fix the dimension n of the domain,
3. $\frac{w^2(x)}{(n-1)w(1)}+w(x)\geq w'(x)(1-x), x\in[0,1], n>1$, [8].

Analogous results have been obtained for non-increasing weight functions using duality. Taking the dual weight function $w^d(x)=w(1-x)$, the resulting mixture function is the dual to M_w; that is, $M_{w^d}=1-M_w$. Duality preserves both weak and standard monotonicity. We shall now look at some special but prototypical cases of the weight functions for mixture operators.

3.1 SOME SPECIAL CASES OF WEIGHTING FUNCTIONS

Proposition 4. *Let M_w be a mixture function defined by eqn. (2) and $w:[0,1]\to[0,\infty[$. For the following generators, the functions M_w are:*

1. $w(x)=e^{ax+b}$, $a\in[-1,1]$: *monotone;*
2. $w(x)=e^{ax+b}$, $a\in\mathbb{R}$: *shift-invariant and hence weakly monotone;*
3. $w(x)=\ln(1+x)$: *weakly monotone for $n=2$ and $x\geq 0.1117$, $n=3$ and $x\geq 0.2647$, etc., and $x\geq 0.4547$ for all n; and,*
4. $w(x)=1-\sqrt[r]{x}$: *weakly monotone for $n=2$ only.*

Proof. The first generator trivially satisfies the first condition above: for $a\in[0,1]$, $w'(x)\leq w(x)$, and for negative a the result is obtained using duality.

In the second case this generator fails conditions 1 and 2 for $a>1$. However

$$\begin{aligned} M_w(\mathbf{x}+t\mathbf{1}) &= \frac{\sum e^{ax_i+b+at}(x_i+t)}{\sum e^{ax_i+b+at}}=\frac{\sum e^{ax_i+b}(x_i+t)}{\sum e^{ax_i+b}} \\ &= M_w(\mathbf{x})+t. \end{aligned}$$

For the third generator we check the three conditions of monotonicity stated above. For the first condition $w(x)=\ln(1+x)\geq w'(x)=\frac{1}{1+x}$ when $x\geq LW(1)\approx 0.7632$ (LW is the Lambert W function). Thus the mixture function generated by $w(x)=\ln(1+x)$ is monotone in $[0.7632,\infty[$. For the second sufficient condition we obtain that the mixture operator is monotone in $[0.4547,1]$ and from the third condition we find that the mixture operator generated by $w(x)=\ln(1+x)$ is monotone in $[0.3708,1]$ for $n=2$.

Now, if we consider weak monotonicity, it turns out that the mixture function with such a weight is weakly monotone for such x that satisfy

$$\ln(2)-(n-1)(\ln(x+1)+\frac{x-1}{x+1})\geq 0.$$

This inequality follows from the fact that the directional derivative of M_w is proportional to the sum of partial derivatives of $F(\mathbf{x},y)=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i)(x_i-y)$, that $F_{x_{(1)}}\geq\ln(1+x_{(1)})$ and that all other partial derivatives achieve their minimum with respect to y when $y=x_{(1)}$. The directional derivative is the smallest when $x_{(1)}$ is the largest ($x_{(1)}=1$), from which the above inequality is derived. By solving this inequality for x numerically, for fixed n, we obtain that for $n=2$, $x\in[0.1117,1]$, for $n=3$, $x\in[0.2647,1]$, and so on. When $n\to\infty$ the smallest x approaches $0.4547\ldots$, which is consistent with standard monotonicity.

In the last case, let $F(\mathbf{x},y)=\mathscr{P}_y(\mathbf{x},y)$. The directional derivative of M_w is proportional to the sum $-\sum F_{x_i}(x_i,y)=\sum w'(x_i)(x_i-y)+w(x_i)$. Since $-F_{x_{(n)}}(x_{(n)},y)\geq 1-x_{(n)}^{1/r}\geq 0$, and $-F_{x_i}(x_i,y)\leq 1-x_i^{1/r}(1+\frac{1}{r})+\frac{1}{r}x_i^{1/r-1}x_{(n)}$, for weak monotonicity we need

$$1-x_{(n)}^{1/r}+(n-1)\left(1-x_i^{1/r}(1+\frac{1}{r})+\frac{1}{r}x_i^{1/r-1}x_{(n)}\right)\geq 0.$$

The left hand side is the smallest when all $x_i = 1$, hence the directional derivative of M_w is non-negative when $1 - x_{(n)}^{1/r} + \frac{n-1}{r}(x_{(n)} - 1) \geq 0$. By solving this inequality for n we get

$$n \leq r\frac{1-x_{(n)}^{1/r}}{1-x_{(n)}} + 1.$$

The expression on the right decreases when $x_{(n)} \to 1$, and the limit of the ratio is $\frac{1}{r}$. Therefore we have $n \leq r\frac{1}{r} + 1 = 2$. ∎

The next result is particularly interesting. It shows that if the weighting function is Gaussian, $w(x) = \exp(-(x-a)^2/b^2)$, weak monotonicity holds irrespective of the values a and b.

Proposition 5. *Let A be a mixture function defined by eqn.* (2) *with generator $w(x) = e^{-(\frac{x-a}{b})^2}$, then A is weakly monotone for all $a, b \in \mathbb{R}$.*

Proof. We need to show that the sum of the directional derivatives in the direction $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{n}}\{1,1,...,1\}$ is non-negative for all a, b, i.e., $D_{\mathbf{u}}(A) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} A_{x_i} \geq 0$, A_{x_i} being the partial derivative of A, so that we have

$$D_{\mathbf{u}}(A) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} A_{x_i} =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} w(x_i)\right)^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left((w_i + x_i w_i')\sum_{j=1}^{n} w_j - w_i'\sum_{j=1}^{n} x_j w_j\right)$$

From now on, we denote $w_i = w(x_i)$ and $w_i' = w'(x_i) = -2(\frac{x_i-a}{b^2})w_i$. To determine the sign of the directional derivative we need only consider the sign of the numerator of A_{x_i}.

Given that $w_i' = -\frac{2}{b^2}(x-a)w_i$, the above summations can be reorganised such that, up to a positive constant,

$$D_{\mathbf{u}}(A) \propto \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2 - \frac{2}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 w_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)$$

$$+2\frac{a}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\right)\sum_{i=1}^{n} w_i + \frac{2}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\right)^2$$

$$-2\frac{a}{b^2}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j w_j\right)\sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Cancelling the terms with the factor $\frac{2a}{b^2}$ gives

$$D_u(A) \propto \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2 - \frac{2}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 w_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) + \frac{2}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\right)^2.$$

Consider subsequently the following equalities:

1. $\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} w_i w_j$
2. $-\frac{2}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 w_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) =$
   $-\frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 w_i^2 - \frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} x_i^2 w_i w_j =$
   $-\frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 w_i^2 - \frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}(\frac{1}{2}x_i^2 + \frac{1}{2}x_j^2) w_i w_j$
3. $\frac{2}{b^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\right)^2 = \frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i w_i)^2 + \frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} x_i x_j w_i w_j$

Then, substituting the last equalities in the sum of the partial derivatives and simplifying we obtain that

$$D_u(A) \propto \sum_{i=1}^{n} w_i^2 + \frac{1}{b^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}(1-(x_i-x_j)^2) w_i w_j,$$

and this expression is non-negative for all $x_i, x_j \in [0,1]$, independently of a and b. ∎

Thus Gaussian weight functions become particularly important in the construction of mixture functions. By varying the parameters a and b we obtain various monotone increasing, monotone decreasing (both convex and concave) and unimodal quasi-concave weight functions.

3.2 LINEAR COMBINATIONS OF WEIGHTING FUNCTIONS

Proposition 6. *Let $w : [0,1] \to]0,\infty[$ be given by $w(x) = u(x) + v(x)$ where $u, v : [0,1] \to]0,\infty[$. Then the mixture operator M_w defined by eqn.* (2) *is weakly monotone if the mixture operators with generators u and v are also weakly monotone.*

Proof. Consider the penalty function $F^{(w)}(\mathbf{x}, z) = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)(x_i - y)$ of the mixture operator $M_{\mathbf{w}}$. Note that any partial derivative of $F^{(w)}(\mathbf{x}, z)$ is

$$\begin{aligned} F_{x_i}^{(w)} &= w'(x_i)(x_i - y) + w(x_i) \\ &= (u'(x_i) + v'(x_i))(x_i - y) + u(x_i) + v(x_i) \\ &= (u'(x_i)(x_i - y) + u(x_i)) + (v'(x_i)(x_i - y) + v(x_i)) \\ &= F_{x_i}^{(u)} + F_{x_i}^{(v)}. \end{aligned}$$

Hence, $F_{x_i}^{(w)} \geq 0$ if $F_{x_i}^{(u)} \geq 0$ and $F_{x_i}^{(v)} \geq 0$. Therefore, directional derivative of M_w will be non-negative if the directional derivatives of M_u and M_v are non-negative. ∎

Taking into account the last result, the mixture function M_w, with $w = \sum_{i=1}^{r} u_i$, is weakly monotone if the mixture functions M_{u_i} are also weakly monotone.

Proposisition 7. *Let $w : [0,1] \to]0,\infty[$ be a weight function given by $w(x) = x + b$, $b \in \mathbb{R}$, then the corresponding mixture operator M_w is weakly monotone if $b \geq \frac{n-2}{n} x_{(1)} \geq \frac{n-2}{n}$.*

Proof. We need to see that $D_u(M_w) \geq 0$. For that, we first calculate the partial derivative of $F(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)(x_i - y)$ to obtain the condition $F_{x_i} = w(x_i) + w'(x_i)(x_i - y) = (x_i + b) + (x_i - y) = 2x_i + b - y$. For $x_{\searrow}$, as $y \leq x_{(1)}$ we have that $F_{x_{(1)}} \geq 2x_{(1)} + b - x_{(1)}$ and $F_{x_i} \geq 0 + b - x_{(1)}$ for the rest of i, hence $D_u(M_w) \geq (2x_{(1)} + b - x_{(1)}) + (n-1)(b - x_{(1)}) = nb - (n-2)x_{(1)} \geq 0$ if and only if $b \geq \frac{n-2}{n} x_{(1)} \geq \frac{n-2}{n}$. ∎

Regarding the previous result, observe that, for $n = 2, 3$ or 5 we get $b \geq 0$, $b \geq \frac{1}{3}$ or $b \geq \frac{3}{5}$ respectively. Therefore, mixture functions of the mentioned dimensions are weakly monotone for $b \geq 0$, $b \geq \frac{1}{3}$ or $b \geq \frac{3}{5}$.

4 CONCLUSIONS

In this work we have extended the understanding of weakly monotone averaging aggregation functions. In particular, we have extended the study of mixture functions by identifying conditions for weak monotonicity and provided examples of weighting functions that lead to weakly monotone averaging functions.

Weakly monotone means encompass a larger class of averaging functions, including the mode, mixture functions and robust estimators of location. They are useful in filtering out outliers form the data, so that one ore more grossly erroneous values do not alter the end result. The concept of weakly monotone averaging functions brings the existing monotone averaging functions and many of the non-monotone means into the same framework.

Acknowlegements

The authors thank for the support of the projects TIN2012-32482 and MTM 2009-10962.

References

[1] Bajraktarević, M. Sur une èquation fonctionelle aux valeurs moyennes. Glasnik Mat.-Fiz. i Astronom. Drustvo Mat. Fiz. Hrvatske. Ser. II, 13, 243-248, 1958.

[2] Bajraktarević, M. Sur une genèralisation des moyennes quasilineaire. Publ. Inst. Math. Beograd. 17, 69–76, 1963.

[3] Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T. Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[4] Bullen, P. Handbook of Means and Their Inequalities. Kluwer, Dordrecht, 2003.

[5] Calvo, T., Beliakov, G. Aggregation functions based on penalties. Fuzzy Sets and Systems 161, 1420–1436, 2010.

[6] Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R., Pap, E. Aggregation Functions. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[7] Marques Pereira, R., Ribeiro, R. Aggregation with generalized mixture operators using weighting functions. Fuzzy Sets and Systems 137, 43–58, 2003.

[8] Mesiar, R., Spirkova, J. Weighted means and weighting functions. Kybernetika 42, 151–160, 2006.

[9] Mesiar, R., Spirkova, J., Vavrikova, L. Weighted aggregation operators based on minimization. Inform. Sci. 178, 113–140, 2008.

[10] Ribeiro, R., Marques Pereira, R. Generalized mixture operators using weighting functions. Europ. J. Oper. Research 145, 329–2, 2003.

[11] Rousseeuw, P., Leroy, A. Robust Regression and Outlier Detection. John Wiley and Sons, 1987.

[12] Wilkin, T., Beliakov, G. Weakly monotone averaging functions, under review, 2013.

[13] Yager, R. Generalized OWA aggregation operators. Fuzzy Optimization and Decision Making 3, 93–7, 2004.

AGGREGATION SYSTEMS IN COMPLEX ENVIRONMENTS WITH DISTANCE MEASURES

José M. Merigó

Manchester Business School, University of Manchester, Booth Street West, M156PB Manchester, UK,
jose.merigolindahl@mbs.ac.uk

Abstract

Distance measures are techniques for calculating the differences between different variables. When dealing with many variables, it is very useful to use aggregation operators in the representation of the information. This paper presents new aggregation systems when using distance measures. Their main advantage is that they are more flexible when dealing with complex environments. The distance unified aggregation operator is presented. It is able to include as many aggregation operators as needed in the specific problem considered. Thus, this formulation can consider the opinion of several experts, attributes and so on. Moreover, it can represent the information using different perspectives such as the weighted average, the expected value and the OWA operator. Some of its key properties and particular cases are presented. Several generalizations are presented by using quasi-arithmetic means.

Keywords: Weighted average; OWA operator; Probability; Distance measures; Unified aggregation operator.

1 INTRODUCTION

Distance measures are very common in the literature [4,6]. They are used for many purposes when calculating the differences between variables including clustering methods and fuzzy set theory. Some of the most common distance measures are the Hamming distance [5], the Euclidean distance [6] and the Minkowski distance [6]. Often, when calculating the distances it is useful to normalize the information by using an average. Usually, people use the simple average or the weighted average [1]. However, it is possible to use many other types of aggregation operators. Recently, many authors are studying the use of the ordered weighted average (OWA) [18,22]. It is an aggregation operator that provides a parameterized family of aggregation operators between the minimum and the maximum. By using it with distance measures, it becomes the OWA distance (OWAD) [13,17]. Thus, it is possible to analyse any distance between the minimum and the maximum one.

The OWAD operator has been extended and generalized by many authors. For example, Merigó and Casanovas [10] suggested the use of induced aggregation operators. They also suggested more general approaches by using the Euclidean distance [11] and the Minkowski distance [12]. Merigó and Gil-Lafuente [14] introduced a more general approach with immediate weights where it was possible to combine the OWA operator and the weighted average in the same formulation. Further extensions have been introduced by Zeng and collaborators when dealing with uncertain, fuzzy and linguistic information [23-24]. Merigó and Casanovas [9] also presented an approach when dealing with linguistic information. Recently, Merigó et al. [15] have introduced a distance measure that considers probabilities and OWA operators in the same formulation.

The aim of this paper is to present a more general framework that can adapt to many different types of environments. It is called the distance unified aggregation operator (DUAO). It unifies as many aggregation operators as needed by using a double aggregation process where the first part of the structure considers any aggregation operator needed in the problem and the second one unifies all of them in the same formulation considering the degree of importance that each concept has in the aggregation. One of its main advantages is that it is a very general aggregation process that includes many particular cases. Thus, it is very flexible being able to represent complex information in an efficient way.

Further extensions of the DUAO operator are introduced including the generalized DUAO (GDUAO) operator and the Choquet DUAO integral (CDUAOI). They provide more general formulations that include the DUAO operator as particular case and include many other cases. The GDUAO operator includes the Euclidean DUAO

(EDUAO) and the Minkowski DUAO (MDUAO) as particular cases.

The paper is organized as follows. Section 2 briefly reviews some basic preliminaries. Section 3 introduces the DUAO operator and studies a wide range of particular cases. Section 4 summarizes the main results and conclusions of the paper.

2 PRELIMINARIES

This Section briefly describes some basic concepts of the distance measures and the unified aggregation operator.

2.1 Distance measures

Distance measures are very popular in the scientific literature [4-6]. Basically, a distance measure has to accomplish the following properties.

- Non-negativity: $D(A_1, A_2) \geq 0$.
- Commutativity: $D(A_1, A_2) = D(A_2, A_1)$.
- Reflexivity: $D(A_1, A_1) = 0$.
- Triangle inequality: $D(A_1, A_2) + D(A_2, A_3) \geq D(A_1, A_3)$.

There are a wide range of distance measures. For example, the Hamming distance [5] is a very useful technique that calculates the absolute differences between two elements, two sets, two fuzzy sets or two intuitionistic fuzzy sets. For two lists $A = (a_1, \ldots, a_n)$ and $B = (b_1, \ldots, b_n)$, it can be defined as follows.

Definition 1. A weighted Hamming distance of dimension n is a mapping $WHD: [0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0, 1]$. Then:

$$WHD(A, B) = \sum_{i=1}^{n} w_i |a_i - b_i|, \quad (1)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Note that it is possible to generalize this definition to all the real numbers by using $R^n \times R^n \rightarrow R$. Note also that if $w_i = 1/n$, for all i, then, we get the normalized Hamming distance.

2.2 Unified aggregation operators

The unified aggregation operator (UAO) [7] is an aggregation operator that unifies a wide range of other aggregation operators in the same formulation and considering the degree of importance that each concept has in the aggregation. Its main advantage is that it can represent the information in a more complete way because it can deal with a wide range of aggregations that consider several sources of information. It can be defined as follows.

Definition 2. A unified aggregation operator of dimension m is a mapping $UAO: R^m \times R^n \rightarrow R$, that has an associated weighting vector C of dimension m representing concepts with a degree of importance of C_h, such that:

$$UAO(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{h=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} C_h w_i^h a_i, \quad (2)$$

where C_h is the degree of importance that each concept has in the aggregation with $C_h \in [0, 1]$ and $\sum_{h=1}^{m} C_h = 1$, w_i^h is the ith weight of the hth weighting vector W with $w_i^h \in [0, 1]$ and $\sum_{i=1}^{n} w_i^h = 1$.

The UAO operator is monotonic, bounded and idempotent. Note that if some of the aggregation operators used are not ordered according to i, then, we have to adapt the reordering of this aggregation to the initial one. Moreover, it is possible to specify the aggregation process to the space [0, 1].

3 DISTANCE MEASURES WITH UNIFIED AGGREGATION OPERATORS

New distance measures can be developed by using unified aggregation operators. Thus, it is possible to combine a wide range of distance aggregation operators in the same formulation and considering the degree of importance that each case has in the problem. A key feature of doing this is that the aggregation is very flexible and can adapt to a wide range of heterogeneities that can appear in the environment. For example, it is possible to combine different types of distance measures in the same formulation including Hamming and Euclidean distances and use various sources of information such as probabilities, weighted averages and OWA operators. We call this approach the distance unified aggregation operator (DUAO). It can be defined as follows for two lists $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ and $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Definition 3. A DUAO of dimension m is a mapping $DUAO: [0, 1]^m \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, that has an associated weighting vector C of dimension m representing concepts with a degree of importance of C_h, such that:

$$DUAO(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = \sum_{h=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} C_h w_i^h |x_i - y_i|, \quad (3)$$

where C_h is the degree of importance that each concept has in the aggregation with $C_h \in [0, 1]$ and $\sum_{h=1}^{m} C_h = 1$, w_i^h is the ith weight of the hth weighting vector W with $w_i^h \in [0, 1]$ and $\sum_{i=1}^{n} w_i^h = 1$.

Observe that if some of the aggregation operators have an ordering different to the initial one given by i, then, we have to adapt the reordering of this aggregation to the initial ordering. Note that this would be the case of the OWA operator and its generalizations. That is, with the OWA we should reorder the weights w_j according to the initial positions of the arguments i.

The DUAO operator accomplishes similar properties than any distance aggregation operators. Thus, it is monotonic, bounded and idempotent. It is idempotent because if $|x_i - y_i| = |x - y|$, for all i, then, $DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = |x - y|$. It is monotonic because if $|x_i - y_i| \geq |s_i - t_i|$, for all i, then, $DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) \geq DUAO\ (\langle s_1, t_1\rangle, \ldots, \langle s_n, t_n\rangle)$. It is bounded because the UAO aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. Note that $DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = DUAO\ (\langle y_1, x_1\rangle, \ldots, \langle y_n, x_n\rangle)$.

If the weighting vector W or C of the DUAO does not sum up to 1, the aggregation can be normalized as follows:

$$f(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = \frac{1}{\sum_{h=1}^{m} C_h} \sum_{h=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{C_h w_i^h a_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i^h}. \quad (4)$$

The DUAO can be extended under various frameworks including the use of induced aggregation operators [21], norms [20], moving averages [16] and generalized aggregation operators [19].

A key feature of this approach is that it includes a wide range of particular cases including the most classical aggregation operators such as the arithmetic mean, the weighted average and the OWA operator.

First, let us look into a representative aggregation operator that is included in this framework, the probabilistic OWA weighted averaging distance (POWAWAD) operator:

$$POWAWAD\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) =$$

$$= C_1 \sum_{i=1}^{n} w_i^1 |x_i - y_i| + C_2 \sum_{i=1}^{n} p_i^2 |x_i - y_i| + C_3 \sum_{j=1}^{n} w_j^3 |x_i - y_i|. \quad (5)$$

This formulation provides some interesting results by looking to extreme cases in the coefficients C.

- If $C_1 = 1$, we get the weighted Hamming distance.
- If $C_2 = 1$, we get the weighted probabilistic distance
- If $C_3 = 1$, we obtain the OWAD operator.
- If $C_1 = 0$, we form the probabilistic OWAD (POWAD) operator [15].
- If $C_2 = 0$, we get the OWA weighted averaging distance (OWAWAD) operator.
- If $C_3 = 0$, we form the probabilistic weighted averaging distance (PWAD) [8].

The DUAO operator can represent a wide range of complexities by considering more sub aggregations in the problem. In this context, it can also be seen as a hierarchical aggregation that aggregates according to different levels of analysis. In the following, let us look into some other particular cases. First, let us consider the same aggregation when using it several times because different sources of information are available. This can be done with the Hamming distance, the Euclidean distance and the Minkowski distance. If we use a double weighted Hamming distance (WHD) we get:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{WHD}_1 + C_2\mathrm{WHD}_2. \quad (6)$$

And if we use a triple one:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{WHD}_1 + C_2\mathrm{WHD}_2 + C_3\mathrm{WHD}_3. \quad (7)$$

A triple weighted Euclidean distance (WED) would look as follows:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{WED}_1 + C_2\mathrm{WED}_2 + C_3\mathrm{WED}_3. \quad (8)$$

And a triple weighted Minkowski distance (WMD) would be as:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{WMD}_1 + C_2\mathrm{WMD}_2 + C_3\mathrm{WMD}_3. \quad (9)$$

Similar aggregations could be developed with probabilities and OWA operators. For example, a triple probabilistic Hamming distance would be:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{PHD}_1 + C_2\mathrm{PHD}_2 + C_3\mathrm{PHD}_3. \quad (10)$$

And a triple probabilistic Minkowski distance:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{PMD}_1 + C_2\mathrm{PMD}_2 + C_3\mathrm{PMD}_3. \quad (11)$$

With the OWA operator, a triple OWAD would be as:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{OWAD}_1 + C_2\mathrm{OWAD}_2 + C_3\mathrm{OWAD}_3. \quad (12)$$

And a triple Minkowski OWAD:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{MOWAD}_1 + C_2\mathrm{MOWAD}_2 + C_3\mathrm{MOWAD}_3. \quad (13)$$

Next, let us look to some combinations of these aggregations. For example, let us look into a P2OWA2WA3D operator. That is, an aggregation operator that uses 2 probabilistic weighting vectors, two OWA weighting vectors and three weighted averages with a simple Hamming distance:

$$DUAO\ (\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) = C_1\mathrm{WHD}_1 + C_2\mathrm{WHD}_2 + C_3\mathrm{WHD}_3 + C_4\mathrm{PHD}_4 + C_5\mathrm{PHD}_5 + C_6\mathrm{OWAD}_6 + C_7\mathrm{OWAD}_7. \quad (14)$$

Following a similar methodology, we could develop more complex structures by using more aggregations such as a P6OWA7WA9D operator or more generally a P200OWA400WA500D operator. Moreover, it is also

possible to use different types of distances forming for example: PHD4PED3OWAD5EOWAD8WHD6WEAD4 operator.

Note that when dealing with the Euclidean distance, Eq. (3) would be converted in:

$$DUAO\left(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle\right) = \sum_{h=1}^{m} C_h \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^h \mid x_i - y_i \mid^2}, \quad (15)$$

And with the Minkowski distance:

$$DUAO\left(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle\right) = \sum_{h=1}^{m} C_h \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^h \mid x_i - y_i \mid^{\lambda}\right)^{1/\lambda}, \quad (16)$$

Observe that the DUAO operator represents a first step in the analysis of more complex structures. However, it is possible to develop more general frameworks that can adapt better to the real world.

For example, it is possible to consider the use of more sub-aggregation processes such as the use of the opinion of several experts in the analysis and other multi-aggregation processes. By using several experts in the aggregation we could develop the following aggregation:

$$f\left(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle\right) = \sum_{g=1}^{p} \sum_{h=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_g C_h^g w_i^{gh} \mid x_i - y_i \mid, \quad (17)$$

where v_g is the weighting vector of the experts such that $v_g \in [0, 1]$ and $\sum_{g=1}^{p} v_g = 1$.

More generally, we could allow the aggregation to consider as many issues as needed in the following way:

$$f\left(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle\right) = \sum_{e=1}^{q} \ldots \sum_{h=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_e \ldots C_h^g w_i^{gh} \mid x_i - y_i \mid, \quad (18)$$

where t_e is the last weighting vector considered and "…" indicates the different sub aggregation processes that could be used in the analysis.

In order to understand the calculation process of the DUAO operator, let us look into the following example.

Example 1. Assume an aggregation problem with the following arguments: $X = (40, 20, 80, 60)$ and $Y = (70, 30, 40, 50)$. Seven weighting vectors are used including three weighted averages, two probabilistic vectors and two OWAs represented in the following way.

$W_1 = (0.2, 0.4, 0.3, 0.1)$ $W_2 = (0.3, 0.3, 0.3, 0.1)$

$W_3 = (0.5, 0.3, 0.1, 0.1)$ $W_4 = (0.4, 0.2, 0.2, 0.2)$

$W_5 = (0.3, 0.2, 0.2, 0.3)$ $W_6 = (0.4, 0.2, 0.1, 0.3)$

$W_7 = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1)$

Note that W_6 and W_7 are OWA weights. It is assumed the following degrees of importance for each concept: $C = (0.2, 0.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 0.2)$. With this information the DUAO operator is calculated as follows:

DUAO = 0.2 × [0.2 × |40 – 70| + 0.4 × |20 – 30| + 0.3 × |80 – 40| + 0.1 × |60 – 50|] + 0.1 × [0.3 × |40 – 70| + 0.3 × |20 – 30| + 0.3 × |80 – 40| + 0.1 × |60 – 50|] + 0.1 × [0.5 × |40 – 70| + 0.3 × |20 – 30| + 0.1 × |80 – 40| + 0.1 × |60 – 50|] + 0.2 × [0.4 × |40 – 70| + 0.2 × |20 – 30| + 0.2 × |80 – 40| + 0.2 × |60 – 50|] + 0.1 × [0.3 × |40 – 70| + 0.2 × |20 – 30| + 0.2 × |80 – 40| + 0.3 × |60 – 50|] + 0.1 × [0.4 × |80 – 40| + 0.2 × |40 – 70| + 0.1 × |20 – 30| + 0.3 × |60 – 50|] + 0.2 × [0.3 × |80 – 40| + 0.4 × |40 – 70| + 0.2 × |20 – 30| + 0.1 × |60 – 50|] = 24.4.

Note that the DUAO operator can also be calculated integrating the weighting vectors into a single one before aggregating the information. In this case, the calculation process would be as follows. First, we integrate the weights by multiplying $C \times W$, being W^* the sum of all the weights:

Table 1: Weighting vectors

	$\lvert x_1 - y_1\rvert$	$\lvert x_2 - y_2\rvert$	$\lvert x_3 - y_3\rvert$	$\lvert x_4 - y_4\rvert$	C
W_1	0.2	0.4	0.3	0.1	0.2
W_2	0.3	0.3	0.3	0.1	0.1
W_3	0.5	0.3	0.1	0.1	0.1
W_4	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2
W_5	0.3	0.2	0.2	0.3	0.1
W_6	0.2	0.1	0.4	0.3	0.1
W_7	0.4	0.2	0.3	0.1	0.2
W^*	0.33	0.25	0.26	0.16	

Observe that the reordering of the individual distances in the OWA aggregations are adapted to the initial ordering. Next, we aggregate the arguments with the new weighting vector W^* as follows:

DUAO = 0.33 × |40 – 70| + 0.25 × |20 – 30| + 0.26 × |80 – 40| + 0.16 × |60 – 50|] = 24.4.

As we can see, both methods lead to the same result.

Finally, let us show two generalizations of great interest, the quasi-arithmetic DUAO (Quasi-DUAO) operator and the Choquet DUAO (CDUAOI) integral. As the name indicates, the Quasi-DUAO operator uses quasi-arithmetic means [3] in the UAO operator and it is formulated as follows:

$$Quasi\text{-}DUAO\left(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle\right) = \sum_{h=1}^{m} C_h f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^h f(\mid x_i - y_i \mid)\right), \quad (19)$$

It is interesting to see that it includes many particular cases by analyzing different expressions in the strictly continuous monotonic function including the DUAO itself

(Eq. (3)), the Minkowski DUAO (Eq. (16)) and the Euclidean DUAO (Eq. (15)).

The CDUAO operator integrates unified aggregation operators and Choquet integrals [2,10] in the same formulation in the following way:

$$CDUAO_m(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{h=1}^{m} C_h \left(\sum_{i=1}^{n} f_{(i)} \left[m(A_{(i)}^h) - m(A_{(i-1)}^h) \right] \right), \quad (20)$$

where $(\cdot)$ indicates a permutation on X such that $f_{(1)} \geq f_{(2)} \geq \ldots \geq f_{(n)}$, i.e. $f_{(i)}$ is the ith largest value in the set $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $A_{(i)} = \{x_{(1)}, \ldots, x_{(i)}\}$ $i \geq 1$, $A_{(0)} = \varnothing$, f is a positive real-valued function $f: X \rightarrow R^+$ and m a fuzzy measure on X.

Many other extensions and generalizations of the DUAO operator could be considered by using some other common techniques for dealing with aggregation operators including norms, induced aggregation operators and fuzzy information.

4 CONCLUSIONS

This paper has introduced the DUAO operator. It is an aggregation operator that provides a high degree of flexibility because it can adapt to different types of complex environments distinguishing between different sources of information and considering the degree of importance that each concept has in the formulation. Among others, it can use weighted averages, probabilities and OWA operators in its formulation. Moreover, it includes many classical approaches such as the weighted Hamming distance and the OWAD operator. Its flexibility has been proved by studying some complex particular cases at the level of the P20OWA40WA30D operator.

Further generalizations have been introduced by using generalized aggregation operators and the Choquet integral. These approaches have shown more general formulations that can represent the DUAO operator as a particular case and at the same time include other situations. An interesting result found with the GDUAO operator is the EDUAO and the MDUAO operator.

The applicability of these aggregation systems is very broad because they include the classical distances as particular cases. Thus, any study that uses the normalized or the weighted Hamming distance can be revised and extended with this new approach. Some practical applications where it could be used, has been discussed including decision making problems and aggregation problems where combinations of averages and distances are needed. Some real world examples where it could be useful are strategic and financial management and the representation of averages in economic variables such as the consumption, the demand and the price.

Acknowledgements

I would like to thank the anonymous reviewers for valuable comments that have improved the quality of the paper. Support from the European Commission through the project PIEF-GA-2011-300062 is gratefully acknowledged.

References

[1] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo: *Aggregation functions: A guide for practitioners*. Springer-Verlag: Berlin, 2007.

[2] G. Choquet: Theory of capacities. *Annals Institute Fourier* 5, pp. 131-295, 1953.

[3] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens: Characterization of the ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3, pp. 236-240, 1995.

[4] J. Gil-Aluja: *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[5] R.W. Hamming: Error-detecting and error-correcting codes. *Bell Systems Technical Journal* 29, pp. 147-160, 1950.

[6] A. Kaufmann: *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*. Academic Press, New York, 1975.

[7] J.M. Merigó: Decision making with probabilities, weighted averages and OWA operators. *IEEE – SSCI 2011 (FOCI 2011)*, Paris, France, 2011, pp. 122-129.

[8] J.M. Merigó: The probabilistic weighted averaging distance and its application in group decision making. *Kybernetes* 42, pp. 686-697, 2013.

[9] J.M. Merigó, M. Casanovas: Decision making with distance measures and linguistic aggregation operators. *International Journal of Fuzzy Systems* 12, pp. 190-198, 2010.

[10] J.M. Merigó, M. Casanovas: Decision making with distance measures and induced aggregation operators. *Computers & Industrial Engineering* 60, pp. 66-76, 2011.

[11] J.M. Merigó, M. Casanovas: Induced aggregation operators in the Euclidean distance and its application in financial decision making. *Expert Systems with Applications* 38, pp. 7603-7608, 2011.

[12] J.M. Merigó, M. Casanovas: A new Minkowski distance based on induced aggregation operators. *International Journal of Computational Intelligence Systems* 4, pp. 123-133, 2011.

[13] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente: New decision-making techniques and their application in the selection of financial products. *Information Sciences* 180, pp. 2085-2094, 2010.

[14] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente: Decision making techniques in business and economics based on the OWA operator. *SORT – Statistics and Operations Research Transactions* 36, pp. 81-102, 2012.

[15] J.M. Merigó, Y.J. Xu, S.Z. Zeng: Group decision making with distance measures and probabilistic information. *Knowledge-Based Systems* 40, pp. 81-87, 2013.

[16] J.M. Merigó, R.R. Yager: Generalized moving averages, distance measures and OWA operators. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 21, pp. 533-559, 2013.

[17] Z.S. Xu, J. Chen: Ordered weighted distance measures. *Journal of Systems Science and Systems Engineering* 17, pp. 432-445, 2008.

[18] R.R. Yager: On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* 18, pp. 183-190, 1988.

[19] R.R. Yager: Generalized OWA aggregation operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 3, pp. 93-107, 2004.

[20] R.R. Yager: Norms induced from OWA operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 18, pp. 57-66, 2010.

[21] R.R. Yager, D.P. Filev: Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 29, pp. 141-150, 1999.

[22] R.R. Yager, J. Kacprzyk, G. Beliakov: *Recent developments on the ordered weighted averaging operators: Theory and practice*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[23] S.Z. Zeng, J.M. Merigó, W.H. Su: The uncertain probabilistic OWA distance operator and its application in group decision making. *Applied Mathematical Modelling* 37, pp. 6266-6275, 2013.

[24] S.Z. Zeng, W. Su: Intuitionistic fuzzy ordered weighted distance operator. *Knowledge-Based Systems* 24, pp. 1224-1232, 2011.

DISTANCIAS Y MULTIDISTANCIAS DERIVADAS DE OPERADORES DE DIFERENCIA SIMÉTRICA

Isabel Aguiló, Javier Martín, Gaspar Mayor, Jaume Suñer

Universitat de les Illes Balears
Cra. de Valldemossa, km 7,5
07122 Palma (Illes Balears),
{isabel.aguilo,javier.martin,jaume.sunyer,gmayor}@uib.es

Resumen

Después de introducir de forma axiomática la diferencia simétrica de conjuntos borrosos y el concepto de operador de diferencia simétrica, se analizan diferentes modelos funcionales para dicha operación y, para cada uno de ellos, se estudia en qué condiciones definen distancias y multidistancias.

Palabras Clave: Diferencia simétrica, modelo funcional, intersección, unión, complemento, t-norma, t-conorma, negación fuerte, distancia, multidistancia.

1 INTRODUCCIÓN

L. A. Zadeh ([11]) introdujo en 1965 las operaciones de intersección, unión y complemento de conjuntos borrosos de la forma siguiente:

- $(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x))$,
- $(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x))$,
- $A^c(x) = 1 - A(x)$.

Estas operaciones, que permiten trasladar muchas propiedades de la teoría de conjuntos nítidos a la de conjuntos borrosos, han sido usadas desde entonces, y de forma mayoritaria, por los investigadores en este campo. Sin embargo, desde el principio se discutió sobre la conveniencia de la elección de tales operaciones hasta llegar a la utilización de t-normas, t-conormas y negaciones fuertes para describir de manera e funcional, tal como hizo Zadeh, las operaciones de intersección, unión y complemento de conjuntos borrosos ([5]). Por supuesto, la vía funcional tiene sus limitaciones cuando se quieren definir operaciones cuyo resultado dependa de la información completa que contienen los conjuntos borrosos involucrados, de manera que la operación no necesita estar expresada funcionalmente. Así, se pueden considerar operaciones definidas de manera axiomática ([6]) utilizando los axiomas aceptados para tales operaciones y siempre exigiendo que la restricción de la operación a conjuntos nítidos coincida con la correspondiente operación booleana.

En este trabajo consideramos como punto de partida la operación diferencia simétrica de conjuntos borrosos que, hasta no hace mucho, no habia sido estudiada a fondo ([3]) a pesar de su interés por la generación de métricas entre conjuntos borrosos y sus aplicaciones ([3] y las referencias en él). Para el desarrollo del trabajo se parte de una definición axiomática de diferencia simétrica con la intención de crear un marco general en el que estudiar varios modelos funcionales de dicha operación, centrando nuestra atención en aquellos que definen distancias y multidistancias. Partiendo de los artículos [2, 3] se han realizado recientemente trabajos en este campo (ver, por ejemplo, [9], y también [1]) y se completan ahora con el estudio de nuevos modelos.

Después de unos preliminares en los que se introducen las definiciones y resultados básicos para el posterior desarrollo del trabajo, se dedica la sección 3 a la definición axiomática de la operación diferencia simétrica de conjuntos borrosos y a la introducción de los operadores de diferencia simétrica. En la sección 4 se analiza la capacidad de cada uno de los modelos funcionales para definir distancias y, finalmente, en la sección 5 se estudia en qué condiciones sobre los modelos se pueden obtener multidistancias.

2 PRELIMINARES

En este apartado presentamos los conceptos básicos que utilizaremos a lo largo del presente trabajo.

Comenzaremos con las definiciones de t-norma, t-conorma, negación fuerte, terna de De Morgan y cópula. Repasaremos también algunas de sus propiedades y los ejemplos básicos (ver, por ejemplo, [4]).

Definición 1 *Sean* $T, S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *dos funciones. De-*

cimos que T es una t-norma *si cumple, para cualesquiera* $x,y,z \in [0,1]$,

- $T(x,1) = T(1,x) = x$ *(elemento neutro),*
- $T(x,y) \leq T(x',y')$ *si* $x \leq x'$, $y \leq y'$ *(monotonía),*
- $T(x,y) = T(y,x)$ *(conmutatividad),*
- $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$ *(asociatividad),*

y que S es una t-conorma *si cumple:*

- $S(x,0) = S(0,x) = x$ *(elemento neutro),*
- $S(x,y) \leq S(x',y')$ *when* $x \leq x'$, $y \leq y'$ *(monotonía),*
- $S(x,y) = S(y,x)$ *(conmutatividad),*
- $S(S(x,y),z) = S(x,S(y,z))$ *(asociatividad).*

Proposición 1 *Una t-norma continua T es arquimediana si y solo si tiene un generador aditivo, es decir, una función estrictamente decreciente y continua $f : [0,1] \to [0,\infty]$, con $f(1) = 0$, tal que*

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x)+f(y)),$$

donde $f^{(-1)} : [0,\infty] \to [0,1]$ es la llamada seudoinversa de f, definida por

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & si\ x \leq f(0), \\ 0 & en\ caso\ contrario. \end{cases}$$

La t-conorma dual de una t-norma T es la función definida por

$$T^*(x,y) = 1 - T(1-x,1-y).$$

Ejemplo 1 *Las cuatro t-normas básicas son, respectivamente, el mínimo M, la t-norma drástica Z, el producto Π, y la t-norma de Łukasiewicz W:*

$$\begin{array}{lcl} M(x,y) & = & \min(x,y), \\ Z(x,y) & = & \begin{cases} x & si\ y = 1, \\ y & si\ x = 1, \\ 0 & en\ otro\ caso; \end{cases} \\ \Pi(x,y) & = & xy, \\ W(x,y) & = & \max(x+y-1,0). \end{array}$$

Sus t-conormas duales son, respectivamente, el máximo M^*, la t-conorma drástica Z^*, la suma probabilística Π^*, y la t-conorma de Łukasiewicz (o suma acotada) W^*:

$$\begin{array}{lcl} M^*(x,y) & = & \max(x,y), \\ Z^*(x,y) & = & \begin{cases} x & si\ y = 0, \\ y & si\ x = 0, \\ 1 & en\ otro\ caso; \end{cases} \\ \Pi^*(x,y) & = & x+y-xy, \\ W^*(x,y) & = & \min(x+y,1). \end{array}$$

Definición 2 *Diremos que una función $N : [0,1] \to [0,1]$ es una* negación fuerte *si es decreciente e involutiva.*

Definición 3 *Se llama* terna de De Morgan *a una terna (T,S,N) formada por una t-norma T, una t-conorma S y una negación fuerte N tales que, para todos $x,y \in [0,1]$,*

$$S(x,y) = N(T(N(x),N(y))).$$

Otras operaciones binarias que trataremos, que tienen relación con las t-normas, son las cópulas.

Definición 4 *Una* cópula *es una función $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ que satisface las siguientes propiedades, para $x,y,x',y' \in [0,1]$:*

- $C(x,y)+C(x',y') \geq C(x,y')+C(x',y)$ *si* $x \leq x', y \leq y'$,
- $C(x,0) = C(0,x) = 0$,
- $C(x,1) = C(1,x) = x$.

La relación entre t-normas y cópulas viene dada por las siguientes caracterizaciones.

Proposición 2

- *Una cópula es una t-norma si y solo si es asociativa.*
- *Una t-norma es una cópula si y solo si satisface la condición Lipschitz con constante 1.*
- *Una t-norma arquimediana continua es una cópula si y solo si su generador aditivo es convexo.*

Recordemos que una función $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ se dice que satisface la condición de Lipschitz con constante 1 si

$$|F(x,y) - F(x',y')| \leq |x-x'| + |y-y'|,$$

para pares cualesquiera $(x,x'),(y,y') \in [0,1]^2$.

Recordamos también la definición de distancia.

Definición 5 *Una función $d : X \times X \to [0,\infty)$ es una* distancia *sobre el conjunto X si se cumplen las siguientes propiedades, para cualesquiera $x,y,z \in X$:*

1) $d(x,y) = 0$ *si y solo si* $x = y$,

2) $d(x,y) = d(y,x)$,

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

La generalización del concepto de distancia para medir la distancia entre más de dos puntos es la llamada multidistancia ([8]).

Definición 6 *Una función* $D : \bigcup_{n\geq 1} X^n \to [0,\infty)$ *es una* multidistancia *en* X *si se cumplen las siguientes propiedades, para cualesquiera* n, *y* $x_1,\ldots,x_n,z \in X$*:*

1) $D(x_1,\ldots,x_n) = 0$ *si y solo si* $x_1 = \cdots = x_n$,
2) $D(x_1,\ldots,x_n) = D(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)})$ *para cualquier permutación* π *de* $1,\ldots,n$,
3) $D(x_1,\ldots,x_n) \leq D(x_1,z)+\cdots+D(x_n,z)$.

Acabamos el apartado con la definición de función subaditiva y superaditiva.

Definición 7 *Una función* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es* subaditiva *si, para todos* $x,y \in [0,1]$ *tales que* $x+y \in [0,1]$,

$$f(x+y) \leq f(x)+f(y).$$

Cuando se da la desigualdad contraria, se dice que f *es* superaditiva.

3 DIFERENCIA SIMÉTRICA: DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

A continuación presentamos una definición de operación diferencia simétrica de conjuntos borrosos, con la intención de establecer un marco general para los diferentes modelos estudiados en la sección 4.

Definición 8 *Llamaremos* diferencia simétrica *(sobre* X*) a una aplicación* $\widetilde{\triangle} : [0,1]^X \times [0,1]^X \longrightarrow [0,1]^X$ *que satisface los siguientes axiomas:*

$\widetilde{\triangle}1)$ $A\widetilde{\triangle}B = B\widetilde{\triangle}A$.

$\widetilde{\triangle}2)$ *Si* $A,B \in \{0,1\}^X$ *son dos conjuntos nítidos, entonces para todo* $x \in X$,

$$(A\widetilde{\triangle}B)(x) = \begin{cases} 1 & si\ A(x) \neq B(x), \\ 0 & si\ A(x) = B(x). \end{cases}$$

$\widetilde{\triangle}3)$ $A\widetilde{\triangle}A = 0$, $A\widetilde{\triangle}0 = A$, $A\widetilde{\triangle}1 = A^c$, *siendo* c *un complemento sobre* X ($c : [0,1]^X \longrightarrow [0,1]^X$ *decreciente e involutiva), y* 0 *y* 1 *definidos por:* $0(x) = 0, 1(x) = 1$ *para todo* $x \in X$.

Definición 9 *Una diferencia simétrica* $\widetilde{\triangle}$ *se dice que es* funcionalmente expresable *si lo es su complemento* ($A^c(x) = N(A(x))$, *siendo* N *una negación fuerte) y si existe una función* $\triangle : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *tal que para cualesquiera* $A,B \in [0,1]^X$ *y todo* $x \in [0,1]$,

$$(A\widetilde{\triangle}B)(x) = \triangle(A(x),B(x)). \qquad (1)$$

Proposición 3 *Sea* $\triangle : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *tal que*

$\triangle 1)$ $\triangle(a,b) = \triangle(b,a)$,

$\triangle 2)$ $\triangle(1,0) = \triangle(0,1) = 1$, $\triangle(0,0) = \triangle(1,1) = 0$,

$\triangle 3)$ $\triangle(a,a) = 0$, $\triangle(a,0) = a$, $\triangle(a,1) = N(a)$, *siendo* N *una negación fuerte.*

Entonces $\widetilde{\triangle}$ *definida por* (1) *es una diferencia simétrica funcionalmente expresable mediante* $\triangle$, *con complemento funcionalmente expresable mediante* N.

Recíprocamente, si $\widetilde{\triangle}$ *es una diferencia simétrica funcionalmente expresable mediante* $\triangle : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$, *entonces satisface las condiciones anteriores con* N *la negación fuerte asociada al complemento de* $\widetilde{\triangle}$.

Definición 10 *Una función* $\triangle : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *es un* operador de diferencia simétrica *(ODS) si satisface las condiciones siguientes:*

$\triangle 1)$ $\triangle(a,b) = \triangle(b,a)$,

$\triangle 2)$ $\triangle(1,0) = \triangle(0,1) = 1$, $\triangle(0,0) = \triangle(1,1) = 0$,

$\triangle 3)$ $\triangle(a,a) = 0$, $\triangle(a,0) = a$, $\triangle(a,1) = N(a)$ *con* N *una negación fuerte.*

Ejemplo 2 *La distancia usual sobre* $[0,1]$,

$$\triangle(a,b) = |a-b|,$$

es un ODS. Observemos que $N(a) = |1-a| = 1-a$ *es la negación fuerte estándar de* $[0,1]$. *La diferencia simétrica correspondiente es*

$$(A\widetilde{\triangle}B)(x) = |A(x)-B(x)|.$$

En la figura 1 se puede ver, sombreada, esta diferencia simétrica.

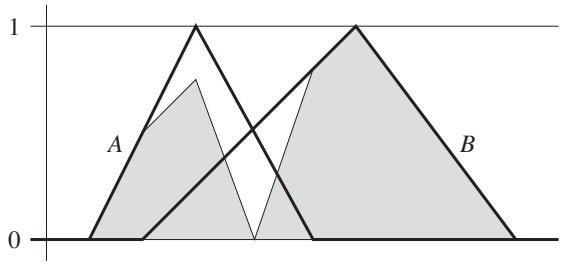


Figura 1: Diferencia simétrica $A\widetilde{\triangle}B$, con la distancia usual.

4 DIFERENTES MODELOS FUNCIONALES DE DIFERENCIA SIMÉTRICA Y DISTANCIAS DERIVADAS

4.1 Modelo $\triangle(a,b) = S(a,b) - T(a,b)$

Motivado por el ejemplo anterior, en el que se toma

$$\triangle(a,b) = |a-b| = \text{máx}(a,b) - \text{mín}(a,b),$$

se pueden considerar ODS más generales, de la forma

$$\triangle(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b, \\ S(a,b) - T(a,b) & \text{si } a \neq b, \end{cases}$$

con una t-norma T y una t-conorma S (ver [2, 9], y también [1]). En este caso es $N(x) = 1-x$. En [9] se dan una condición suficiente y una condición necesaria para que este tipo de ODS sean distancias.

Proposición 4 *Si T y S satisfacen la condición de Lipschitz con constante 1, entonces $\triangle$ es una distancia.*

Ejemplo 3

i) (M, M^*) es el único par a partir del cual deducimos la distancia euclidea:

$$\triangle_M(x,y) = |x-y|.$$

ii) El par (W, W^*) define la distancia (con $x \neq y$):

$$\triangle_W(x,y) = \begin{cases} x+y & si\ x+y \leq 1, \\ 2-(x+y) & si\ x+y \geq 1. \end{cases}$$

Proposición 5 *Si $\triangle$ es una distancia, entonces*

$$\triangle_M \leq \triangle \leq \triangle_W.$$

Por otra parte, en [1] se caracterizan aquellas t-normas T con región cero $R = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x+y \leq 1\}$ tales que $\triangle = T^* - T$ es una distancia:

Proposición 6 *Sea T una t-norma con región cero R. Entonces $\triangle = T^* - T$ es una distancia si y solo si $T \geq W$.*

4.2 Modelo $\triangle(a,b) = S(T(a,N(b)), T(N(a),b))$

La expresión

$$A \widetilde{\triangle} B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B),$$

siendo $\cap, \cup, ^c$ una intersección, una unión y un complemento, respectivamente, generaliza para conjuntos borrosos la conocida fórmula de la diferencia simétrica booleana. El modelo funcional para esta operación es

$$\triangle(a,b) = S(T(a,N(b)), T(N(a),b)), \qquad (2)$$

siendo T, S, N una t-norma, una t-conorma y una negación fuerte, respectivamente. Observemos que $\triangle$ es un ODS si y solo si $T(a,N(a)) = 0$ para todo $a \in [0,1]$, lo cual implica para una t-norma continua T que es arquimediana no estricta con una negación fuerte asociada N_T ($T(a,b) = 0 \Leftrightarrow b \leq N_T(a)$) tal que $N \leq N_T$.

Proposición 7 *Sea (T,S,N) una terna de De Morgan continua (T y S continuas) y sea $\triangle$ definida por (2). Entonces $\triangle$ es una distancia si y solo si*

i) T es arquimediana no estricta, con negación asociada $N_T = N$,

ii) La función $f^{-1}(1-id)$ es subaditiva, siendo f el generador aditivo normalizado de T.

Demostración:
Supongamos primero que $\triangle$ satisface *i* y *ii*.

La simetría es una propiedad inmediata de $\triangle$. Probemos ahora que

$$\triangle(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

De la definición de $\triangle$, tenemos que

$$\triangle(x,y) = 0 \Leftrightarrow T(x,N(y)) = T(N(x),y) = 0$$

y, a partir de la condición *i*, resulta que esto es equivalente a decir que $N(y) \leq N(x)$ e $y \leq N(N(x))$, es decir, $x \leq y$ e $y \leq x$, de donde $x = y$.

Para probar la desigualdad triangular, $\triangle(x,y) \leq \triangle(x,z) + \triangle(z,y)$ para todos $x,y,z \in [0,1]$, consideremos el generador aditivo normalizado f de T. Según la condición *i*, podemos escribir $\triangle(x,y)$ en función de f:

$$\triangle(x,y) = f^{-1}(1 - |f(x) - f(y)|),$$

y la desigualdad triangular resulta:

$$\begin{aligned} f^{-1}(1-|f(x)-f(y)|) \quad \leq \quad & f^{-1}(1-|f(x)-f(z)|) \\ & + f^{-1}(1-|f(z)-f(y)|). \end{aligned} \qquad (3)$$

Ahora, dados $x,y,z \in [0,1]$, se cumple

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(z)| + |f(z)-f(y)|.$$

de donde, por ser $f^{-1}(1-id)$ decreciente y subaditiva, resultará (3) y, por tanto, la desigualdad triangular de $\triangle$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\triangle$ es una distancia.

De $\triangle(x,x) = 0$, deducimos que $T(x,N(x)) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, lo cual implica que T es arquimediana no estricta con $N_T \geq N$ (N_T es la negación fuerte asociada a T). Y ahora, si existiese un x_0 tal que $N_T(x_0) > N(x_0)$, entonces podríamos encontrar un y_0 tal que $N(x_0) < y_0 \leq N_T(x_0)$, de donde $T(x_0,y_0) = T(N(x_0),N(y_0)) = 0$ y, finalmente,

$\triangle(x_0, N(y_0)) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $N_T = N$ y se cumple la condición *i*.

Para probar la condición *ii*, sean $a, b \in [0,1]$ tales que $a+b \in [0,1]$. Entonces existen $x, y, z \in [0,1]$ tales que $|f(x) - f(z)| = a$, $|f(z) - f(y)| = b$ y $|f(x) - f(y)| = a+b$. Por tanto, la expresión (3), equivalente a la desigualdad triangular de $\triangle$, da inmediatamente la condición *ii*. ♢

Ejemplo 4 *La terna $(W, W^*, 1-id)$ es la única terna de De Morgan continua tal que $\triangle$ definida por* (2) *es la distancia usual de* $[0,1]$.

Proposición 8 *Si el generador aditivo normalizado f de una t-norma continua T es cóncavo, entonces la función $h = f^{-1}(1-id)$ es subaditiva y, consecuentemente, la terna de De Morgan (T,S,N) con $N(x) = f^{-1}(1-f(x))$ define una distancia vía la expresión* (2).

Demostración:
Si f es cóncava, entonces también lo son f^{-1} y $h = f^{-1}(1-id)$. Al ser h cóncava y $h(0) = 0$, entonces es subaditiva. ♢

Sea f la inversa de la función polinómica

$$g(x) = -x^3 + x^2 - x + 1, x \in [0,1].$$

La función f no es cóncava (no lo es g) y, sin embargo, $f^{-1}(1-id) = g(1-id)$ es subaditiva. Así que la concavidad no es una condición necesaria para que se cumpla la citada condición.

Ejemplo 5 *Las funciones*

$$f(x) = (1-x)^\lambda, \ \ 0 < \lambda \leq 1,$$

son cóncavas, así que el ODS asociado:

$$\begin{array}{rcl} \triangle(a,b) & = & f^{-1}(1 - |\, f(a) - f(b)\,|) \\ & = & T(S(a,N(a)),1) \\ & = & 1 - (1 - |\,(1-a)^\lambda - (1-b)^\lambda\,|)^{\frac{1}{\lambda}} \end{array}$$

es una distancia. Las t-normas generadas por estas funciones forman una subfamilia de las llamadas t-normas de Yager $(\lambda > 0)$ ([7]).

4.3 Modelo $\triangle(a,b) = T(S(a,b), NT(a,b))$

La expresión

$$A \widetilde{\triangle} B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c,$$

siendo $\cap$, $\cup$, ^{c} una intersección, una unión y un complemento, respectivamente, generaliza para conjuntos borrosos la también conocida fórmula de la diferencia simétrica booleana. El modelo funcional para esta operación es

$$\triangle(a,b) = T(S(a,b), NT(a,b)) \qquad (4)$$

siendo T, S, N una t-norma, una t-conorma y una negación fuerte, respectivamente.

Proposición 9 *Para cualquier terna (T,S,N) la función $\triangle$ definida en* (4) *no es ni un ODS ni una distancia.*

Demostración:
Supongamos que $\triangle(a,a) = 0$ para todo $a \in [0,1]$. Podemos escribir

$$0 = \triangle(a,a) = T(S(a,a), N(T(a,a))) \geq T(a, N(a))$$

y, por tanto, $T(a,N(a)) = 0$ para todo $a \in [0,1]$.

Por otra parte,

$$\begin{array}{rcl} \triangle(a,N(a)) & = & T(S(a,N(a)), N(T(a,N(a)))) \\ & = & T(S(a,N(a)),1) \\ & = & S(a,N(a)). \end{array}$$

Si α es el punto fijo de N $(N(\alpha) = \alpha)$, tenemos

$$0 = \triangle(\alpha,\alpha) = \triangle(\alpha, N(\alpha)) = S(\alpha, N(\alpha)),$$

lo que implicaría la contradicción $S(\alpha,\alpha) = 0$.

Al no tener $\triangle$ la propiedad supuesta, no es ni un ODS ni una distancia. ♢

5 MULTIDISTANCIAS DERIVADAS DE LOS MODELOS FUNCIONALES DE DIFERENCIA SIMÉTRICA

A continuación estudiamos las extensiones naturales de los dos primeros modelos citados en la sección anterior. Para el tercer modelo no cabe plantearse ninguna extensión.

5.1 Modelo $\triangle(a,b) = S(a,b) - T(a,b)$

Si T es una t-norma y S una t-conorma, definimos sobre $\bigcup_{n\geq 1} [0,1]^n$ la función:

$$D(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = \cdots = x_n, \\ S(x_1, \ldots, x_n) - T(x_1, \ldots, x_n) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Proposición 10 *Si T y S satisfacen la condición de Lipschitz con constante 1, entonces D es una multidistancia.*

5.2 Modelo $\triangle(a,b) = S(T(a,N(b)), T(N(a),b))$

Sea (T,S,N) una terna de De Morgan continua. Definimos

$$D(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= S(T(x_1, N(x_2), \ldots, N(x_n)), \ldots, T(N(x_1), N(x_2), \ldots, x_n)).$$

En las condiciones de la proposición 7, D es una distancia para $n = 2$. En cambio, no es una multidistancia porque para $n = 3$ no se cumple la condición *1* de la definición 6. En efecto, tomando $x = y$ tales que $f(x) = 1/2$ y $z = 1$, resulta:

$$\begin{aligned} T(x,N(y),N(z)) &= T(x,N(y),0) = 0, \\ T(N(x),y,N(z)) &= T(N(x),y,0) = 0, \\ T(N(x),N(y),z) &= T(N(x),N(y)) \\ &= f^{(-1)}(f(N(x))+f(N(y))) \\ &= f^{(-1)}(1-f(x)+1-f(y)) \\ &= f^{(-1)}(2-1) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $D(x_1,x_2,x_3) = 0$ aunque $x = y \neq z$.

6 Conclusiones

En este trabajo se presenta un marco general para el estudio de distancias y multidistancias definidas mediante t-normas y t-conormas. Esto se consigue a partir del concepto de diferencia simétrica de conjuntos borrosos y de sus diferentes modelos funcionales.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos MTM2009-10962 y TIN2009-07901.

Referencias

[1] I. Aguiló, J. Martín, G. Mayor, J. Suñer: On distances derived from t-norms. *EUROFUSE 2013*.

[2] C. Alsina: On some metrics induced by copulas. En: Walter (Ed.), General Inequalities 4, p. 397, 1984.

[3] C. Alsina, E. Trillas: On the symmetric difference of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 153, pp. 181–194, 2005.

[4] C. Alsina, M.J. Frank, B. Schweizer: Associative Functions: Triangular Norms and Copulas. World Scientific Publishing Company, Singapur, 2006.

[5] C. Alsina, E. Trillas, L. Valverde: On non-distributive logical connectives for fuzzy sets theory. *Busefal* 3, pp. 18–29, 1980.

[6] E.P. Klement: Operations on Fuzzy Sets - An Axiomatic Approach. *Information Sciences* 27, pp. 221–232, 1982.

[7] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap: *Triangular Norms*, en la colección: "Trends in Logic - Studi Logica Library", 8. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] J. Martín, G. Mayor: Multi–argument Distances. *Fuzzy Sets and Systems* 167, pp. 92–100, 2011.

[9] J. Martín, G. Mayor: Constructing (multi)distances from t-norms. *CEDI2013*.

[10] Y. Ouyang: A note on metrics induced by copulas. *Fuzzy Sets and Systems* 191, pp. 122–125, 2012.

[11] L. Zadeh: Fuzzy sets. *Information and Control* 8, pp. 338–353, 1965.

Caracterización difusa de la trayectoria de un vehículo mediante el análisis de la codificación del movimiento en H264/AVC

Juan Giralt[1], **Juan Moreno García**[2], **Ester del Castillo**[1], **Luis Jiménez**[1], **Luis Rodríguez Benítez**[1]

[1]*Escuela Superior de Informática, Universidad de Castilla-la Mancha, Paseo de la Universidad s/n. 13071. Ciudad Real*, {juan.giralt, ester.castillo, luis.jimenez, luis.rodriguez}@uclm.es

[2]*Escuela de Ingeniería Industrial de Toledo, Universidad de Castilla-la Mancha, Avenida Carlos III s/n. 45071. Toledo*, juan.moreno@uclm.es

Resumen

En este trabajo se presenta una técnica que permite determinar la trayectoria de un vehículo en movimiento, tomando únicamente como entrada los vectores de movimiento generados por un codificador de vídeo H264/AVC. La secuencia de vídeo es capturada desde el propio vehículo en movimiento. El método propuesto obtiene en primer lugar, para cada frame de la secuencia, un valor numérico al realizar un análisis estadístico básico de la dirección de los ángulos de los vectores en movimiento presentes en dicha imagen. Posteriormente, dicho valor se transformará al dominio difuso permitiendo caracterizar la trayectoria del vehículo en cada frame individual con una o varias etiquetas lingüísticas. Finalmente, se ejecutará un proceso de agregación ponderada entre frames consecutivos de las etiquetas obtenidas previamente. Esto permitirá eliminar errores derivados del análisis individual de cada frame, al incorporar la información de frames vecinos y permitirá agrupar en estados aquellos frames consecutivos con trayectorias similares. Para la experimentación se han analizado tres secuencias de vídeo con características muy diferentes, dos son grabaciones propias y la tercera, es un vídeo con cámara a bordo de un vehículo participante en el campeonato mundial de rallies (WRC).

Palabras Clave: vectores de movimiento, H264/AVC, trayectoria del desplazamiento, ayuda a la conducción.

1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad, existe un gran interés en el desarrollo de sistemas de visión para ayuda a la conducción ya que estos permiten mejorar la seguridad de los vehículos [6]. Los sistemas de ayuda a la conducción necesitan detectar los objetos en movimiento en la escena, como pueden ser los peatones u otros vehículos. Para discriminar estos objetos en movimiento con respecto a aquellos que no lo tienen, es necesario estimar el ego-motion del vehículo, es decir, el movimiento del vehículo en el que está montada la cámara. El ego-motion detecta un conjunto de medidas por lo que puede considerarse algo más completo de lo que sería la simple detección de trayectorias que se plantea este trabajo. Pese a esto, consideramos que este trabajo se debe enmarcar entre aquellas técnicas que calculan el ego-motion. Existen dos tipos de sistemas para su cálculo, los basados en cámaras monoculares [8] y los basados en cámaras estéreo. Nuestro interés se centra en los primeros por ser más económicos. Además, se consideran las técnicas discretas o las diferenciales [1], dependiendo si se basan en la búsqueda de puntos característicos o se basan en el flujo óptico [2, 3, 5]. El campo de vectores de movimiento, es una aproximación dispersa e imprecisa del flujo óptico, por lo que podría considerarse que la técnica propuesta en este trabajo se enmarca dentro de las técnicas diferenciales.

De manera más genérica y sin entrar en la aplicación concreta de apoyo a la conducción, en [7] se hace una revisión de una gran cantidad de métodos existentes para el cálculo y la evaluación del ego-motion. Vinculado con la lógica difusa podemos encontrar el trabajo de Kang et al. [4], que estima el ego-motion para navegación de robots. En el mismo, en la etapa de segmentación se utiliza un método para extraer los objetos de la escena basado en conjuntos difusos tipo-2.

La estructura de esta trabajo es la siguiente: en la Sección 2 se introduce la noción de macrobloque y la de vector de movimiento H264. A continuación, en la Sección 3 se extraerá automáticamente un valor numérico, que pretende caracterizar la trayectoria del vehículo en cada frame, utilizando técnicas estadísticas básicas. En la Sección 4, la información se traslada al dominio difuso y se integra entre frames consecutivos mediante una agregación ponderada de las representaciones lingüísticas de las trayectorias. Finalmente en las Secciones 5 y 6 se presentan la experimen-

tación y las conclusiones más las líneas de trabajo futuras, respectivamente.

2 CARACTERIZACIÓN DE LOS VECTORES DE MOVIMIENTO H264/AVC

H.264 es un estándar para la compresión de vídeo que utiliza la compensación de movimiento basada en macrobloques a través de la información redundante entre frames consecutivos. Busca un patrón que captura el tipo de movimiento entre las imágenes. Este patrón está representado para cada macrobloque por un vector de movimiento de dos dimensiones y constituirá la información utilizada como entrada para el sistema descrito en este trabajo.

A los tamaños de macrobloque se les llama también modos de decisión, correspondiéndose los tamaños en píxeles de 8x8, 4x8, 8x4 y 4x4 con los modos de decisión 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Como entrada de datos se usarán únicamente los vectores asociados a macrobloques de tamaño 4x4, modo de decisión 4, ya que tal y como se puede observar en la Figura 1, mantienen casi toda la información de los otros modos y amplían la misma.

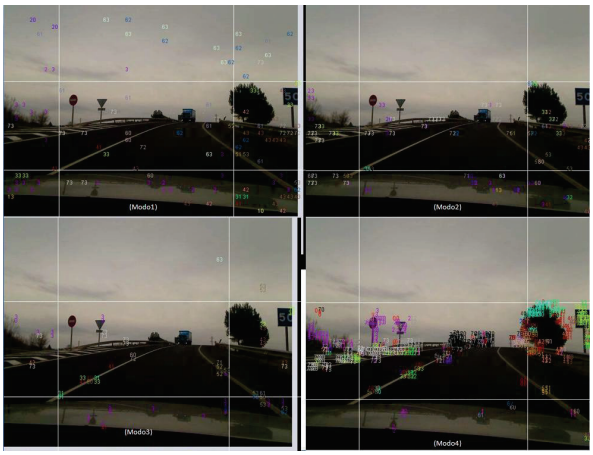


Figura 1: Vectores de movimiento proporcionados por los distintos modos de decisión. Modo 4, abajo a la derecha.

Para tener una idea de la cantidad aproximada de datos que se toman como entrada, en la Tabla 1 se muestra el número medio de vectores analizados por frame en los tres experimentos realizados para este trabajo. Hay que tener en cuenta que si el tamaño de cada imagen es de 640x480 píxeles, esto constituiría un total de 307.200 píxeles a analizar por técnicas que trabajen a nivel de píxel. Por ejemplo, en el Experimento 1, se analizarían en únicamente 716 vectores de media por frame.

Los vectores de movimiento presentes en cada frame, F, a analizar se van a representar como:

Tabla 1: Número medio de vectores analizados.

Modo Decisión	Exp. 1	Exp. 2	Exp. 3
4	716	376	1185

$$VM(F) = \{mv_i, i = 0, ..., n-1\}. \quad (1)$$

donde mv_i es la tupla (x, y, I_x, I_y), siendo *(x,y)* la posición en el frame del macrobloque al que se asocia el vector, e (I_x, I_y) las coordenadas cartesianas del vector.

Posteriormente, las coordenadas cartesianas del vector mv_i se transforman en coordenadas polares r y θ. Entonces, el elemento mv_i presente en la Ecuación (1) se redefine como la tupla (x, y, r, θ). Por ejemplo, si mv_i es (5, 18, -7, 4), se convierte en (5, 18, 8, 150°). Esta transformación permite trabajar posteriormente a nivel de ángulo facilitando la interpretabilidad de la dirección del movimiento de los vectores.

3 COMPARACIÓN DE LOS ÁNGULOS DE LOS VECTORES DE MOVIMIENTO

En una primera aproximación a la detección del desplazamiento del vehículo, se recurre a analizar los vectores de movimiento que se dirigen a la derecha y a la izquierda en un cada frame individual, tal y como se indica en las Ecuaciones (2) y (3), en las que el símbolo # representa el cardinal del conjunto.

$$D = \#(\{mv_i \in VM(F), 0° \leq \theta \leq 90° \; y \; 270° \leq \theta \leq 360°\}). \quad (2)$$

$$I = \#(\{mv_i \in VM(F), 90° < \theta < 270°\}). \quad (3)$$

En los primeros resultados experimentales, se observa como D crece con respecto a I cuanto mayor es la curvatura de la carretera hacia la derecha. Si la curvatura es a la izquierda aumenta I con respecto a D. Por ejemplo, en la Figura 2 se pueden observar dos movimientos en curva, una a la izquierda y otra a la derecha. El recuento de vectores por dirección sería de *(I=476, D=246)* e *(I=107, D=950)*, respectivamente.

Sin embargo, esta variación en curvas entre las proporciones de I con respecto a D y a la inversa, no ocurre en aquellos frames en los que aparecen objetos, bien móviles o estáticos, de gran tamaño. En la Figura 3, se muestra una situación en la que el vehículo tiene un movimiento recto en el momento que se cruza un camión, lo que hace que las medidas tomadas nos indiquen un giro hacia la derecha (I=141, D=213). Por tanto, estos valores no pueden considerarse válidos para determinar la curvatura del movimiento del vehículo bajo una serie de circunstancias bastante

Figura 2: Curvatura izquierda y curvatura derecha

comunes, y se hace necesario estudiar algún otro tipo de medida, más allá de un cardinal. Esta deberá ser robusta a situaciones en las que el número de vectores de movimiento crezca sensiblemente y deberá normalizar las diferencias entre vectores de una y otra dirección. Por tanto, se propone una medida única llamada Medida de Curvatura (*MC*) que se define en la Ecuación (4).

$$MC = (D/I) - (I/D). \tag{4}$$

En la Figura 4, se muestra un ejemplo del valor de *MC* para un subconjunto de frames (corresponde con el Experimento 1 de la Sección 5). Cuanto mayor es el valor de *MC*, mayor es la curvatura a la derecha. Cuanto menor es su valor, el movimiento será a la izquierda. Los valores "centrales" de *MC*, corresponderían con un movimiento en línea recta. Por ejemplo, los valores de *MC* para los frames de la Figura 2 serían de -1,371 (I) y de 14,65 (D). El valor de *MC* para la imagen mostrada en la Figura 3 sería de 4,439.

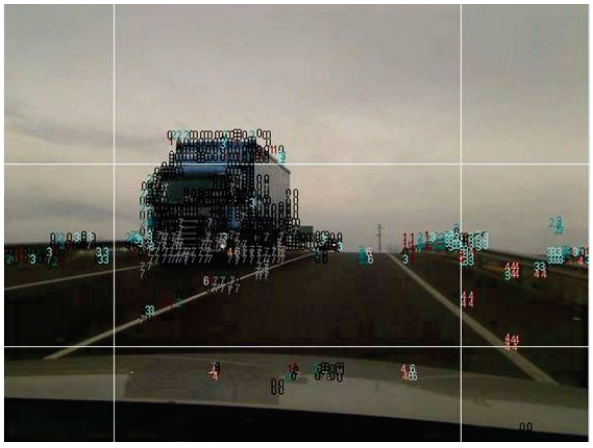


Figura 3: Experimento 1: presencia de un camión.

El objetivo es que de manera automática y únicamente a partir del valor de *MC*, se pueda establecer una correspondencia entre éste y uno de los tres tipos de trayectorias posibles, giro a la izquierda (*GI*), movimiento recto (*MR*) o giro a la derecha (*GD*). Para ello habrá que calcular que dos valores permitirían dividir el dominio de *MC* en tres

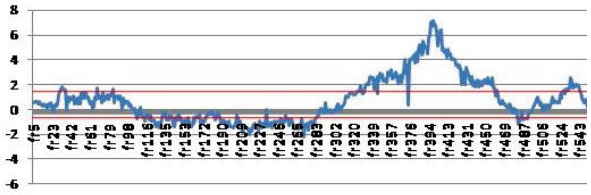


Figura 4: Valores de *MC* en el Experimento 1.

subdominios que se correspondiesen con *GI*, *MR* y *GD*.

Estos dos valores se llamarán U_{min} y U_{max} y se definirán empíricamente a partir de la observación de los valores máximos y mínimos que *MC* toma en una secuencia de frames con movimiento en línea recta. Por ejemplo en la Figura 4 los valores umbrales serían -0,8 y 2,8 y se representan en la misma mediante dos líneas horizontales.

Considerando estos valores *Umbrales*, la Ecuación (5) permite asignar una descripción en lenguaje natural del movimiento del vehículo en cada frame, que se llamará dirección del movimiento (*DM*).

$$DM \leftarrow \begin{cases} Giro\ Izquierda, & Si\ MC < U_{min} \\ Movimiento\ Recto, & Si\ U_{min} \leq MC \leq U_{max} \\ Giro\ Derecha, & Si\ MC > Umax \end{cases} \tag{5}$$

4 REPRESENTACIÓN DIFUSA DEL MOVIMIENTO DE UN VEHÍCULO

Una vez analizados los primeros resultados experimentales del método presentado en la Sección 3, se observa la aparición de un conjunto de errores comunes y recurrentes. Esto puede ser debido a que a la hora de establecer un valor para *DM* (Ecuación (5)) no se han tenido en cuenta ciertos aspectos implícitos al procesamiento de vídeo y más concretamente al procesamiento de la señal de vídeo comprimido, ni tampoco de aspectos vinculados al movimiento de vehículos. Por ejemplo, los datos procesados se corresponden con sistemas físicos con una suposición de continuidad en el movimiento, por tanto, el análisis individual y no en conjunto de los frames, hace posible que aparezcan resultados del tipo $(frame_i, GI), (frame_{i+1}, GD)$, que violan dicha suposición de continuidad.

Por otro lado, debido a que el escenario elegido para la experimentación, cámara móvil, no es fijo, los resultados de la función *MC* son sensibles a cambios en la imagen, como por ejemplo, la aparición de diferentes nuevos objetos en la escena, bien fijos o en movimiento. Esto hace que estos cambios modifiquen los valores de *MC* y aunque este cambio sea leve, hay situaciones con valores cercanos a los valores umbral, que provocan una clasificación incorrecta.

Por tanto, a continuación se van a presentar dos procesos que van a permitir, por un lado, añadir la capacidad de trabajar con límites borrosos alrededor de los valores umbral U_{min} y U_{max}, mediante la definición de una variable lingüística para *MC*, y por otro lado, definir un método de agrupamiento que permita analizar el vídeo como conjuntos de frames consecutivos y no como una secuencia de frames individuales.

4.1 Definición de la variable lingüística Medida de Curvatura (MC)

A continuación, se define una variable lingüística [9] *MC* compuesta por tres conjuntos difusos trapezoidales que se corresponden con los tres tipos de movimiento. El dominio de la variable *MC* estará en función de cada frame, pero para simplificar se asume que será $\Re$. Los valores (a, b, c, d) que definen cada trapezoide se muestran en la Tabla 2 y en la que k es un valor que se determinará empíricamente y que estará en función de los valores máximo y mínimo de *MC* en cada vídeo.

Tabla 2: Conjuntos difusos en MC.

Etiqueta	a	b	c	d
GI	$-\infty$	$-\infty$	$U_{min}-k$	$U_{min}+k$
MR	$U_{min}-k$	$U_{min}+k$	$U_{max}-k$	$U_{max}+k$
GD	$U_{max}-k$	$U_{max}+k$	∞	∞

4.2 Fuzzificación y agrupamiento de la información

En esta sección se va a describir el proceso que permite de manera simultánea trasladar la información de *MC* al dominio difuso y agruparla entre frames consecutivos de un vídeo. En primer lugar, para cada frame del vídeo se calcula *MC*, su valor se fuzzifica y el resultado se almacena en una tupla, llamada *MCFuzzy*, junto el número de frame, tal y como se muestra en la Ecuación (6).

$$MCFuzzy = (frame, \mu_{GI}(MC), \mu_{MR}(MC), \mu_{GD}(MC)) \quad (6)$$

Un ejemplo, para el frame 31 y con valores de pertenencia $\mu_{GI}(MC) = 0$, $\mu_{MR}(MC) = 0,524$ y $\mu_{GD}(MC) = 0,476$, es: *MCFuzzy = (31, 0, 0,524, 0,476)*. Cada una de estas tuplas se irán almacenando en una lista ordenada por número de frame, tal y como se muestra en la Ecuación (7).

$$lista \leftarrow lista + \{MCFuzzy\} \quad (7)$$

Uno de los objetivos planteados es agrupar la información de frames consecutivos en una serie de conjuntos. Para ello hace falta definir cual va a ser el cardinal o tamaño de cada uno de estos conjuntos, el cual será denominado como *m*. *m* será definido empíricamente para cada secuencia de vídeo y su valor estará relacionado de manera proporcional con el módulo de los vectores de movimiento, es decir, a la velocidad del movimiento del vehículo. Por ejemplo, a mayores velocidades, *m* deberá ser más pequeño porque los cambios en la dirección del vehículo pueden ocurrir en un menor número de frames.

Ahora, para cada grupo de frames se compararán los resultados de fuzzificar *MC* y se obtendrá un único valor que caracterizará el movimiento del vehículo en esos *m* frames. Para ello, se va a calcular un histograma de pertenencias, obtenido al sumar las pertenencias a cada una de las etiquetas de *MC* a lo largo de los *m* frames. En las Ecuaciones (8)-(10), se muestra la suma ponderada para el conjunto de frames en *MCFuzzy* que comienza en el frame *j* y termina en el *j+m*.

$$GIP_j \leftarrow (\Sigma_{i=j,j+m} GI_i)/m \quad (8)$$

$$MRP_j \leftarrow (\Sigma_{i=j,j+m} MR_i)/m \quad (9)$$

$$GDP_j \leftarrow (\Sigma_{i=j,j+m} GD_i)/m \quad (10)$$

Una vez se obtienen las medias ponderadas de todas las pertenencias a cada etiqueta se escoge la máxima. Esta será la que represente el movimiento del vehículo a lo largo de esos *m* frames. En este punto tendremos una nueva lista ordenada, *list'*, que contiene tuplas denominadas *MaxMCFuzzy* y cuyos elementos se muestran en la Ecuación (11).

$$MaxMCFuzzy = (frame_ini,\ frame_fin,\ Etiqueta) \quad (11)$$

Un ejemplo, de tupla que representa un movimiento recto entre los frames *31* y *60* sería el siguiente: *MaxMCFuzzy= (31, 60, MR)*. En este caso el tamaño de los grupos, *m*, es *30*.

Ahora, quedaría definir un segundo nivel de procesamiento que consiste en unir aquellos elementos de *list'* consecutivos con trayectorias idénticas, es decir, su elemento *Etiqueta* es el mismo. Cuando ocurre esto, se eliminan las dos tuplas consecutivas de *list'*, y en su posición se añade una nueva tal y como se muestra en la Ecuación (12).

$$MaxMCFuzzy = (frame_ini,\ frame_fin + m,\ Etiqueta) \quad (12)$$

con $Etiqueta \in \{GI, MR, GD\}$

Finalmente, se obtiene un lista ordenada final que llamaremos Movimiento del Vehículo en la secuencia de Vídeo

completa (MVV), en la que todos sus elementos consecutivos caracterizan movimientos del vehículo diferentes. Un ejemplo podría ser el mostrado en la Ecuación (13), en el que tenemos un vídeo con 2420 frames, y en el que el vehículo entre los frames 1 y 110 se mueve en línea recta y entre los frames 111 y 290 gira hacia la izquierda, etc.

$$MVV = \{(1,\ 110,\ MR),\ (111\ ,290\ ,GI)...,(2301\ ,2420\ ,MR)\} \quad (13)$$

5 EXPERIMENTOS

Se han analizado tres secuencias de vídeo con características muy diferentes. El Experimento 1, se caracteriza por su bondad ya que corresponde a una carretera prácticamente recta en su totalidad, con poco tráfico y en la que apenas aparecen objetos diferentes a vehículos como pueden ser árboles, construcciones, etc. El Experimento 2, se caracteriza por su dificultad, ya que es un vídeo de cámara a bordo en una competición de rallies, en los que la velocidad es extrema, los cambios de dirección son muy bruscos y existe gran presencia de vegetación al circular el vehículo en caminos rurales. Finalmente, en el Experimento 3 se circula por una carretera convencional, en la que se combinan rectas y curvas tanto hacia la izquierda como a la derecha. En la Tabla 3 se presenta el número de frames estudiado en cada vídeo y el número medio de vectores de movimiento procesados por frame. Los valores de los parámetros se muestran en la Tabla 4.

Tabla 3: Fotogramas y vectores procesados por experimento.

	Exp. 1	**Exp. 2**	**Exp. 3**
Frames	2479	2479	5284
Vectores	716	376	1185

Tabla 4: Valores de los parámetros por experimento.

	Exp. 1	**Exp. 2**	**Exp. 3**
U_{min}	-0.8	0	-0.3
U_{max}	2.8	4.8	1.8
k	0.2	0.2	0.2
m	10	5	10

En las Tablas 5 y 6 se presentan los intervalos agrupados y etiquetados obtenidos en los primeros frames analizados para los dos primeros experimentos (*MVV*), mostrando además la que debería ser la salida correcta, etiquetada manualmente, para cada uno de esos intervalos.

Analizando más en detalle el *MVV* del Experimento 1 (Tabla 5) se observa que existe un error en el intervalo (688, 698) debido a la aparición de líneas transversales pintadas en la calzada. Además, existe un cambio de movimiento directo de *GD* a *GI* en el frame 752, lo que violaría la suposición de continuidad en el movimiento descrita en la Sección 4. Realmente, lo que ocurre aquí es que se circula por una rotonda con lo que se este cambio directo de *GD* a *GI*, se considera una detección correcta por parte del sistema. Realmente, existen muy pocos frames etiquetados como *MR* y "desaparecen" en el método de agrupamiento. Para su detección, se debería reducir sensiblemente el tamaño de *m*.

Tabla 5: *MVV* resultado del Experimento 1

frame_ini	*frame_fin*	**Etiq.**	**Etiq. Correcta**
1	109	MR	MR
110	283	GI	GI
284	327	MR	MR
328	458	GD	GD
459	479	MR	MR
481	490	GI	GI
491	534	MR	MR
535	545	GD	GD
546	687	MR	MR
688	698	GI	MR
699	709	MR	MR
710	752	GD	GD
753	796	GI	GI
797	807	MR	GD
808	839	GD	GD
841	999	MR	MR

En el Experimento 2 (Tabla 6), la mayor parte de los errores se cometen al etiquetar como *GD*, lo que serían desplazamientos en línea recta del vehículo. Estos fallos aparecerían debido a la suavidad de las curvas y a que el desplazamiento del vehículo se realiza a lo ancho de la calzada completa.

Para finalizar, en la Tabla 7 se muestran los porcentajes aciertos/fallos para cada experimento. La dificultad del Experimento 2 hace que el porcentaje de aciertos para este experimento sea el más bajo de todos, considerándose como resultados muy buenos los de los otros dos experimentos.

6 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En esta trabajo se presenta una técnica que permite caracterizar lingüísticamente la trayectoria de un vehículo en una secuencia de vídeo utilizando un conjunto de información muy reducido con respecto a la que utilizarían las técnicas que trabajan a nivel de intensidad o píxel. La introducción de la lógica difusa ha permitido establecer límites difusos entre las diferentes salidas generadas por el sistema, y establecer un método de agregación ponderada basada en representaciones lingüísticas. Como trabajos futuros, se de-

Tabla 6: *MVV* resultado del Experimento 2

frame_ini	*frame_fin*	**Etiq.**	**Etiq. Correcta**
1	16	MR	MR
17	32	GD	MR
33	65	MR	MR
66	70	GD	MR
71	130	MR	GI
131	136	GD	MR
137	147	MR	MR
148	169	GD	GD
170	179	MR	MR
180	196	GD	GD
197	207	MR	MR
208	234	GI	GI
235	239	MR	MR
240	305	GD	MR
306	316	MR	MR
317	327	GD	MR
328	359	MR	MR
360	370	GD	GD
371	387	MR	MR
388	398	GD	GD
399	447	MR	MR
448	458	GD	GD
459	572	MR	GD
573	583	GD	MR
584	659	MR	MR
660	665	GI	GI
666	698	MR	MR
699	703	GI	MR
704	752	MR	MR
753	763	GD	MR
764	769	MR	MR

bería intentar estimar automáticamente los parámetros de configuración del sistema ya que tienen relación con valores conocidos como pueden ser el módulo medio de los vectores, la resolución del vídeo, etc. En otra línea de trabajo, la información sobre la trayectoria del vehículo se puede combinar con información de la geometría de la carretera para poder detectar situaciones de peligro, por ejemplo, cuando el vehículo no siga la trayectoria esperada en función de dicha geometría.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información de la Universidad de Castilla-la Mancha.

Tabla 7: Resultados por experimento

	Exp. 1	**Exp. 2**	**Exp. 3**
Aciertos	93,7	77,6	98,1
Fallos	6,3	22,4	1,9

Referencias

[1] D. Cheda, D. Ponsa, A.M. López: Monocular Egomotion Estimation based on Image Matching. *ICPRAM* (2) pp. 425–430, 2012.

[2] M. Chessa, F. Solari, and S.P. Sabatini: Adjustable linear models for optic flow based obstacle avoidance. *Comput. Vis. Image Underst.* 117, 6, pp. 603-619. 2013.

[3] A. Geiger and B, Kitt, Object flow: A descriptor for classifying traffic motion, *Intelligent Vehicles Symposium* (IV), pp. 21–24. 2010.

[4] T. Kang, H. Zhang, and G. Park: Vision based egomotion estimation for robot systems by type-2 fuzzy sets. En *Proceedings of the 18th international conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'09)*. IEEE Press, Piscataway, NJ, USA, pp. 147–152, 2009.

[5] B. Kitt, and H. Lategahn: Detection and tracking of independently moving objects in urban environments, *Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, pp. 1396–1401, 19-22 Sept. 2010

[6] C. Lundquist and T. B. Schön. Joint ego-motion and road geometry estimation. *Inf. Fusion* 12, 4 , pp. 253–263. 2011.

[7] F. Raudies and H. Neumann: A review and evaluation of methods estimating ego-motion. *Comput. Vis. Image Underst.* 116, 5, pp. 606–633, 2012.

[8] K. Yamaguchi, T. Kato, and Y. Ninomiya. Vehicle Ego-Motion Estimation and Moving Object Detection using a Monocular Camera. En *Proceedings of the 18th International Conference on Pattern Recognition* - Volume 04, Washington, DC, USA, 2006.

[9] L. A. Zadeh: Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences* pp. 177-200. 1971.

Análisis de riesgos en carretera basado en técnicas de visión artificial y lógica difusa

Juan Giralt[1], **Juan Moreno García**[2], **Ester del Castillo**[1], **Luis Jiménez**[1], **Luis Rodríguez Benítez**[1]

[1]*Escuela Superior de Informática, Universidad de Castilla-la Mancha, Paseo de la Universidad s/n. 13071. Ciudad Real*, {juan.giralt, ester.castillo, luis.jimenez, luis.rodriguez}@uclm.es

[2]*Escuela de Ingeniería Industrial de Toledo, Universidad de Castilla-la Mancha, Avenida Carlos III s/n. 45071. Toledo*, juan.moreno@uclm.es

Resumen

En este trabajo se presenta un sistema con capacidad para la detección de desplazamientos anormales de un vehículo comparando, la trayectoria del mismo, con la información obtenida de las dos líneas que delimitan el carril por el que el vehículo se desplaza. Se consideran como desplazamientos anormales, los cambios de carril y los derrapes. Antes de realizar la comparativa entre el movimiento del vehículo y la geometría de la carretera, se describe un proceso que permite obtener a partir de cada una de las pendientes de las dos líneas un único valor lingüístico que represente si el vehículo se encuentra en un tramo de carretera recto, una curva a la izquierda o una a la derecha. En este artículo, se describe también el proceso de comparación que permite detectar aquellos frames en los que no se encuentra una correspondencia lógica entre movimiento y carretera. El sistema propuesto toma como única información de entrada los vectores de movimiento H264/AVC y los vídeos son capturados desde un vehículo en movimiento. Como salida se obtienen aquellos intervalos de tiempo en los que el vehículo está provocando alguna situación de riesgo.

Palabras Clave: vectores de movimiento, H264/AVC, segmentación de líneas, comparación lingüística.

1 INTRODUCCIÓN

Los Sistemas Inteligentes de Transporte utilizan tecnologías avanzadas como procesamiento de imagen, de intercomunicación, electrónicas, etc., para no sólo ayudar en la mejora de la seguridad y movilidad sino además para mejorar la productividad así como reducir el impacto de los sistemas de transporte en el medio ambiente. Dentro de estos sistemas, la mejora de la seguridad en vehículos tiene especial relevancia, y dentro de ésta, aquellos sistemas que permiten mediante la utilización de técnicas de visión artificial segmentar las líneas de una carretera [5], realizar su seguimiento [7] y emitir alertas ante desvíos en la trayectoria del vehículo detectadas a partir de la información de las líneas de la carretera [1, 3]. En estas técnicas se asume que deben trabajar en tiempo real. Por ahora, el sistema propuesto en este trabajo, está más enfocado al análisis forense, como la generación de resúmenes de vídeo en los que se pueden extraer elementos clave, como pueden ser situaciones de riesgo derivadas de cambios en la trayectoria del vehículo.

Respecto a trabajos que abordan este problema utilizando la lógica difusa, Wang et al. [6] presentan un sistema de detección de líneas robusto a cambios en las condiciones de iluminación, que utiliza el algoritmo de clustering Fuzzy C-Means junto con reglas difusas para procesar la información espacial. Posteriormente, mediante el algoritmo de Canny se potencia la detección de bordes para identificar las líneas. El algoritmo genera además alertas mediante la comparación de los ángulos que componen los límites de la carretera y propone diferentes niveles de alerta: Seguro, levemente peligroso, moderadamente peligroso y extremadamente peligroso. Obradovic et al. [4] proponen un nuevo modelo para representar las líneas de la carretera utilizando conjuntos de puntos difusos que son colineales. También utiliza Fuzzy C-Means para detectar las líneas.

Una de las características del método propuesto es la eficiencia del mismo al trabajar con muy poca información de entrada. Esto es posible al tomar como datos los vectores de movimiento del estándar de compresión de vídeo H264/AVC. Este estándar utiliza la compensación de movimiento basada en macrobloques, matrices de píxeles, explotando la información espacial duplicada en frames consecutivos. La información de aquellos macrobloques similares presentes en un frame y en otro de referencia, no son almacenados sino que se codifica un vector de movimiento que representa el desplazamiento del macrobloque entre

frames. El campo de vectores de movimiento obtenido por H264, se puede considerar como una aproximación dispersa e imprecisa al campo de flujo óptico.

Este trabajo sigue la siguiente estructura: en la Sección 2 se presenta el mecanismo que permite fusionar la información resultado de segmentar las líneas izquierda y derecha del carril por el que circula el vehículo en un único valor difuso que representa la geometría de la carretera en el frame actual. Posteriormente en la Sección 3, se define un algoritmo para la comparación entre el movimiento del vehículo y la carretera para identificar aquellos desplazamientos anómalos por la misma. Para finalizar, en las Secciones 4 y 5 se muestran los resultados experimentales, conclusiones y trabajos futuros.

2 REPRESENTACIÓN DIFUSA DE LA FORMA DE LA CARRETERA

En [2], los autores presentan un algoritmo para la detección e identificación de las líneas en una carretera. Una vez identificadas, cada línea se representa mediante una serie de atributos de los que únicamente es de nuestro interés para este trabajo la pendiente. En la Figura 1, se muestra cómo el algoritmo detecta las dos líneas que delimitan el carril de la marcha del vehículo. La izquierda tiene una pendiente de -0,52 y la derecha de 0,68.

Figura 1: Detección de las líneas derecha e izquierda

2.1 Detección automática de la geometría de la vía

El objetivo de esta sección es la obtención automática, teniendo en cuenta únicamente las pendientes de cada línea, de la forma de la carretera entendiendo la misma como una sucesión de curvas y rectas. En la Figura 2, se pueden observar los valores de las pendientes de las líneas detectadas en los mil primeros frames de un vídeo concreto. Cuando las pendientes decrecen, la forma de la carretera corresponden con una curva hacia la izquierda, si aumentan, a una curva hacia la derecha. En aquellos frames en los que no se encuentra ninguna línea, se toma como valor de la pendiente la del frame anterior. Esto ocurre en giros bruscos, que principalmente se corresponden con rotondas o curvas muy cerradas. En este caso el algoritmo de seguimiento de líneas [2] falla.

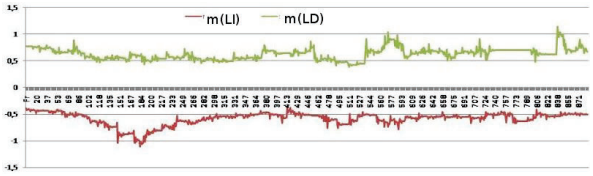


Figura 2: Pendientes de las líneas izquierda y derecha

Para obtener automáticamente la forma de la carretera se trabajará con una medida única obtenida a partir de la combinación de las pendientes de la línea izquierda, *m(LI)*, y de la línea derecha, *m(LD)*, en cada frame. Más concretamente, consideramos la suma de ambas pendientes (Ecuación (1))

$$Suma(m) \leftarrow m(LI) + m(LD) \tag{1}$$

Considerando dos valores umbral, U_{min} y U_{max}, la Ecuación 2 permite asignar una descripción en lenguaje natural de la curvatura de la vía en cada frame, que se llamará forma de la carretera (*FC*). Los valores umbral se obtendrán de manera empírica a partir de la observación de los valores máximos y mínimos de *Suma(m)* en una secuencia de frames con movimiento del vehículo en línea recta en un tramo recto. Esta podría considerase una secuencia de entrenamiento. Por ejemplo, en la Figura 3, los valores umbral mínimo y máximo serían -0,1 y 0,18 y se representan en la figura mediante dos líneas horizontales.

$$FC \leftarrow \begin{cases} Curva\ Izquierda, & Si\ Suma(m) < U_{min} \\ Recta, & Si\ U_{min} \leq Suma(m) \leq U_{max} \\ Curva\ Derecha, & Si\ Suma(m) > Umax \end{cases} \tag{2}$$

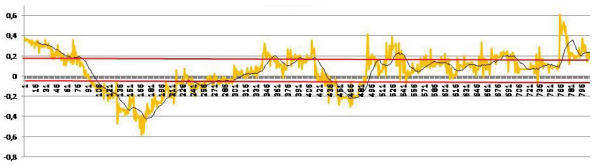


Figura 3: Suma de la pendientes y valores umbral.

2.2 Definición de la variable lingüística Forma Carretera y agrupación de la información

Llegados a este punto se plantea la transformación de la información manejada al dominio difuso, ya que el ruido inherente a los vectores de movimiento H264 y el escenario elegido para la experimentación, cámara móvil, afectan a la función *Suma(m)* y por tanto a *FC*. Se quiere por tanto añadir la capacidad de trabajar con límites borrosos alrededor de los valores umbral U_{min} y U_{max}. Para ello se definirá una variable lingüística [8] llamada *Forma Carretera (FC)*. Además, se dispone de gran cantidad de información, ya que se obtienen resultados por cada frame y estamos hablando de frecuencias de muestreo de unos 30 frames por segundo. Para mejorar la interpretabilidad de estos datos, se plantea compactar la información mediante un método que agrupe aquellos frames consecutivos en los que el sistema detecta una forma de la carretera idéntica.

La variable lingüística *FC* está compuesta por tres conjuntos difusos trapezoidales que se corresponden con las etiquetas lingüísticas Curva Izquierda, Recta y Curva Derecha, respectivamente. El dominio de la variable *FC* estará en el intervalo $[-0,5, 0,5]$ para los vídeos de la experimentación, en los que la cámara está situada en posiciones similares dentro del vehículo. En estos casos, las pendientes de las rectas que correspondan con la línea izquierda y derecha de la carretera pueden tomar valores entre $[-1,5, -0,5]$ y $[0,5, 1,5]$, respectivamente. Su suma, teniendo en cuenta que cuando la pendiente de una línea aumenta, la otra decrece y a la inversa, hace tomar esos valores límite de $[-0,5, 0,5]$. Los valores (a, b, c, d) que definen cada trapezoide se muestran en la Tabla 1, en la que k es un valor que se determinará empíricamente y que estará en función de los valores máximo y mínimo de *Suma(m)* en cada vídeo.

Tabla 1: Conjuntos difusos en FC.

Etiqueta	***a***	***b***	***c***	***d***
CI	$-0,5$	$-0,5$	$U_{min}-k$	$U_{min}+k$
R	$U_{min}-k$	$U_{min}+k$	$U_{max}-k$	$U_{max}+k$
CD	$U_{max}-k$	$U_{max}+k$	$0,5$	$0,5$

Al fuzzificar la información de *Suma(m)* se obtendrá para cada frame la tupla *FCFuzzy,* tal y como se muestra en la Ecuación 3, en la que *S(m)* representa a *Suma(m)*.

$$FCFuzzy = (frame, \mu_{CI}(S(m)), \mu_R(S(m)), \mu_{CD}(S(m))) \quad (3)$$

Un ejemplo, para el frame 70 y con valores de pertenencia $\mu_{CI}(S(m)) = 0,71$, $\mu_R(S(m)) = 0,29$ y $\mu_{CD}(S(m)) = 0$, es: *FCFuzzy = (70, 0,71, 0,29, 0)*. Cada una de estas tuplas se irá almacenando en una lista ordenada por número de frame, tal y como se muestra en la Ecuación (4).

$$lista \leftarrow lista + \{FCFuzzy\} \quad (4)$$

Posteriormente, se compactarán los elementos de la lista en conjuntos y por tanto, determinar el cardinal o tamaño de cada uno de estos conjuntos. Este valor se denominará *SetSize* y será definido empíricamente para cada vídeo. El valor de *SetSize* debe ser proporcional a la velocidad o módulo de los vectores de movimiento. A mayores velocidades, *SetSize* deberá ser más pequeño porque se recorre una mayor distancia en menor tiempo y puede haber cambios más rápidos en la forma de la carretera.

A continuación, para cada grupo de frames, se compararán los resultados de fuzzificar *Suma(m)* y se obtendrá un único valor que caracterizará el movimiento del vehículo en esos *SetSize* frames. Para ello, se va a calcular un histograma de pertenencias, obtenido al sumar las pertenencias a cada una de las etiquetas de *FCFuzzy* a lo largo de los *SetSize* frames. Una vez se obtienen las medias ponderadas de todas las pertenencias a cada etiqueta se escoge la máxima. Esta será la que represente el movimiento del vehículo a lo largo de ese conjunto de frames. En este punto tendremos una nueva lista ordenada, *list'*, que contiene tuplas denominadas *MaxFCFuzzy* y cuyos elementos se muestran en la Ecuación (5).

$$MaxFCFuzzy = (frame_ini,\ frame_fin,\ Etiqueta) \quad (5)$$

Un ejemplo, de tupla que representa un movimiento recto entre los frames *61* y *90* sería el siguiente: *MaxFCFuzzy= (61, 90, R)*. En este caso el tamaño del grupo, *SetSize*, es *30*.

Ahora, se unirán aquellos elementos de *list'* consecutivos con formas de la carretera idénticas, es decir, su atributo *Etiqueta* es el mismo. Cuando ocurre esto, se eliminan las dos tuplas consecutivas de *list'*, y en su posición se añade una nueva, tal y como se muestra en la Ecuación (6).

$$MaxFCFuzzy = (frame_ini,\ frame_fin + SetSize,\ Etiqueta) \quad (6)$$

Finalmente, se obtiene un lista ordenada que llamaremos Forma de la Carretera en la secuencia de Vídeo completa (*FCV*). Un ejemplo de la misma es el mostrado en la Ecuación (7), en el que tenemos un vídeo con 3420 frames, y en el que la forma de la carretera entre los frames 0 y 139 es una recta, entre los frames 140 y 389 es una curva a la derecha, etc.

$$FCV = \{(0,\ 139,\ R),\ (140\ ,389\ ,CD)..., (3300\ ,3419\ ,R)\} \quad (7)$$

3 DETECCIÓN DE SITUACIONES DE RIESGO

En esta sección se va a realizar una comparación entre la información de la geometría de la carretera, descrita en la Sección 2 y almacenada en la lista ordenada *FCV* y la información del desplazamiento del vehículo también obtenida a partir de los vectores de movimiento con una metodología similar a la seguida en este trabajo. Esta información está almacenada en una lista ordenada llamada Movimiento del Vehículo en el Vídeo *MVV*, cuya estructura es similar a *FCV*, pero en la que el atributo etiqueta puede tomar los valores *GI*, giro a la izquierda, *MR*, movimiento recto y *GD*, giro a la derecha. En la Tabla 2 se muestra un ejemplo de los elementos a comparar. Se puede observar que al obtenerse las dos listas mediante procesos diferentes, los intervalos temporales no son los mismos, por lo que no se puede realizar una comparación directa, sino que habrá que establecer una serie de intervalos comunes. Este proceso se describe en la Sección 3.1 y una vez finalizado se realizará el proceso de comparación descrito en la Sección 3.2.

Tabla 2: FCV (izda) y MVV (dcha) a comparar.

f_ini	f_fin	**Etiq.**	f_ini	f_fin	**Etiq.**
0	109	R	0	119	MR
110	283	CI	120	270	GI
284	327	R	271	329	MR
328	458	CD	330	470	GD
459	479	R	471	482	MR
481	490	CI	483	509	GI

3.1 Identificación de intervalos comunes

Tanto *MVV* como *FCV* están compuestos por elementos ordenados en el tiempo. Para identificar los intervalos comunes de ambos elementos, se van a generar dos listas ordenadas llamadas MVV_frame_fin y FCV_frame_fin, que van a contener el número del frame inicial de cada vídeo (normalmente 0) y los atributos que identifican el final de cada intervalo en cada lista ordenada. Este atributo se llamó en la Ecuación (5), $frame_fin$. En las Ecuaciones (8) y (9) se muestra el resultado de extraer la información de los datos mostrados en la Tabla 2.

$$FCV_frame_fin \leftarrow \{0, 109, 283, 327, 458, 479, 490\} \quad (8)$$

$$MVV_frame_fin \leftarrow \{0, 119, 270, 329, 470, 482, 509\} \quad (9)$$

Posteriormente, se mezclarán ambos conjuntos para obtener una secuencia ordenada ascendente de números de frame que se almacenará en un conjunto llamado *Intervalo Común (IC)*. En este conjunto no podrá haber elementos repetidos. El valor de IC, para el ejemplo mostrado en la Tabla 2 sería {0, 109, 119, 270, 283, 327, 329, 458, 470, 479, 482, 490, 509}. Cada pareja de valores consecutivos en *IC* será un intervalo. A cada frame de inicio de un intervalo, salvo al inicial, se le sumará uno, para que así la intersección entre intervalos consecutivos sea vacía: [0,109],[109,119] pasa a ser [0,109],[110,119]. Tanto *FCV* como *MVV* se reorganizarán temporalmente en función de estos intervalos tal y como se muestra parcialmente en la Tabla 3.

Tabla 3: FCV (izda) y MVV (dcha) a comparar reorganizada en función de los intervalos comunes.

f_ini	f_fin	**Etiq.**	f_ini	f_fin	**Etiq.**
0	109	R	0	109	MR
110	119	CI	110	119	MR
120	270	CI	120	270	GI
271	283	CI	271	283	MR
284	327	R	284	327	MR

3.2 Obtención de diferencias

Para detectar la falta de correspondencia entre las líneas de la carretera y el movimiento del vehículo, se comparan los elementos de *FCV* y *MVV* en el mismo intervalo temporal. La comparación se realiza directamente por el valor de los campos *Etiqueta* de *FCV* y de *MVV*, tal y como se muestra en la Ecuación 10. Observando la Tabla 3, la Ecuación (10) devolvería *TRUE* para el intervalo [0, 109] y *FALSE* para el intervalo [110, 119].

$$Comparacion \leftarrow \begin{cases} T, & Et(FCV) = CI \text{ y } Et(MVV) = GI \\ T, & Et(FCV) = R \text{ y } Et(MVV) = MR \\ T, & Et(FCV) = CD \text{ y } Et(MVV) = GD \\ F, & En\ otro\ caso \end{cases} \quad (10)$$

Como salida del proceso de comparación se obtendrá un Lista de Diferencias (LF) que contendrá tuplas de la forma $\{frame_ini, frame_fin, Etiqueta_{FC}, Etiqueta_{MV}\}$ que representan los intervalos en los que hay discrepancias entre carretera y desplazamiento. Por ejemplo, como resultado de la comparación del intervalo [110, 119] en la Tabla 3, se añadiría el siguiente elemento a *LF*: {110, 119, *CI*, *MR*}. Posteriormente, con la información de LF se podrá realizar un análisis más en detalle que permita discriminar entre información que represente situaciones de riesgo para el vehículo y otro tipo de información, procedente de ruido o errores de las etapas de procesamiento del vídeo de más bajo nivel.

4 EXPERIMENTOS

En esta sección se detallan los resultados de dos conjuntos de experimentos sobre tres vídeos. En el primer conjunto de experimentos, se comprueba la eficacia del algoritmo de identificación de la forma de la carretera propuesto en la Sección 2, mientras que el segundo conjunto, evalúa el proceso de identificación de situaciones de riesgo descrito en la Sección 3. Los vídeos analizados en los dos conjuntos de experimentos son comunes. Uno de ellos es un vídeo de nuestro propio conjunto de datos en el que las condiciones de desplazamiento se pueden caracterizar como normales y en las que no aparecen situaciones de riesgo para el vehículo. Los otros dos vídeos proceden de grabaciones del campeonato mundial de rallies, concretamente de los coches de los pilotos Peter Solberg y Sebastian Loeb. Estos dos últimos vídeos presentan un alto grado de dificultad debido a que la velocidad es extrema, los cambios de dirección son muy bruscos y el vehículo puede circular por vías estrechas sin líneas pintadas (en este caso el algoritmo identifica los bordes de la carretera) alternándose con carreteras convencionales con su marcas de línea correspondientes. Los nombres de los tres experimentos serán referenciados como *Propio*, *Loeb* y *Solberg*.

4.1 Evaluación del proceso de caracterización de la carretera

En la Tabla 4 se presentan un ejemplo de salida obtenida para *FCV*, en el experimento Loeb, en el que se muestra el valor del atributo *Etiqueta* obtenido por el sistema de manera automática y el valor correcto. Mientras, en la Tabla 5, se muestran los resultados obtenidos para cada uno de los tres experimentos. El porcentaje de aciertos es considerablemente menor en los tests Solberg y Loeb, y los fallos principalmente ocurren cuando al entrar en una curva pronunciada a alta velocidad, el algoritmo de tracking de líneas pierde la línea seguida. Este error se arrastra a niveles de más alto nivel, como es este de la identificación.

Tabla 4: *FCV* resultado del Experimento *Loeb*

frame_ini	*frame_fin*	**Etiq.**	**Etiq. Correcta**
1	181	MR	MR
182	224	GD	GD
225	246	MR	MR
247	290	GI	MR
291	399	MR	MR
400	442	GD	MR
443	551	MR	MR
552	617	GD	GD
618	661	GI	GI
662	682	MR	MR
683	748	GD	GI
749	791	GI	MR
792	835	MR	MR
836	879	GI	GI
880	922	MR	MR
923	944	GD	MR
944	999	MR	MR

Tabla 5: Caracterizacion de la carretera.

	Propio	**Loeb**	**Solberg**
Aciertos	89,6 %	67,7 %	60,2 %
Fallos	10,4 %	32,3 %	38,8 %

4.2 Evaluación de la detección de riesgos

En la Tabla 6 se muestra el proceso de comparación para uno de los experimentos cuyo resultado de la comparación sea igual a *False*, son los que se añadirían a la Lista de Diferencias. Aquellos intervalos de frames consecutivos añadidos a la Lista de Diferencias corresponderían con partes del vídeo en las que el vehículo realiza una acción de riesgo, considerándose para este trabajo dos tipos de situaciones: cambio de carril y derrape.

Ahora quedaría explorar cuales de los intervalos en la Lista de Diferencias, aquellos que automáticamente se clasifican como de riesgo, realmente corresponden a situaciones peligrosas. Estos serían aciertos de nuestro sistema. Además, habría que estudiar si hay alguna situación de riesgo en aquellos intervalos en los que a priori no debería existir, por no haber sido añadidos a la Lista de Diferencias. En este caso estas situaciones se consideran errores del método propuesto.

En la Tabla 7 se muestran los resultados de analizar el conjunto de frames que no son considerados por el sistema como que puedan contener situaciones de riesgo. Se estudia concretamente si hay dentro de ellos algún cambio de dirección o algún derrape. Los porcentajes en las tablas se refieren al número de frames. Es decir, en el experimento Loeb el 97,7 % de los frames no añadidos a LF, están clasificados de manera correcta. El 2,3 % restante corresponde a frames en los que ocurre algún tipo de situación considerada de riesgo. De manera análoga en la Tabla 8 se muestran los resultados de estudiar aquellos frames que el sistema ha determinado que contienen instantes del vídeo con situaciones anormales. Por ejemplo, para el experimento Solberg, un 29,9 % de los frames añadidos a la Lista de Diferencias representan efectivamente alguna situación anómala. El 70,1 % no corresponde con ningún desplazamiento anómalo del vehículo. Aunque estos resultados pueden parecer pobres a priori, además de la dificultad que presentan los experimentos, ha de decirse que dentro de ese 70,1 % se identifican algunos eventos específicos como pueden ser aparición de objetos de gran tamaño, vehículos que se cruzan o cambios de dirección bruscos, por ejemplo, rotondas. Por todo esto, no se podría afirmar que realmente en ese

Tabla 6: Resultado comparación del experimento *Propio*

f_ini	*f_fin*	**MVV**	**FCV**	**Comparación**
0	26	MR	R	True
27	47	MR	CD	False
48	113	MR	R	True
114	244	GI	CI	True
245	283	GI	R	False
284	327	GR	R	True
328	375	GD	R	False
376	397	GD	CD	True
398	451	GD	R	False
452	462	GD	CD	True
463	495	MR	R	True
496	527	MR	CI	False
528	571	MR	R	True
572	593	MR	CD	False
594	710	MR	R	True
711	752	GD	R	False
753	796	GI	R	False
797	807	GR	R	True
808	839	GD	R	False
840	909	GR	R	True
910	942	GR	CI	False
943	999	MR	R	True

porcentaje de frames “no ocurre nada”.

Tabla 7: Detección de riesgos en frames fuera de *LF*

	Propio	**Loeb**	**Solberg**
Aciertos	100 %	97,7 %	76,3 %
Fallos	0 %	2,3 %	23,7 %

Tabla 8: Detección de riesgos en frames dentro de *LF*

	Propio	**Loeb**	**Solberg**
Aciertos	32,5 %	30,2 %	29,9 %
Fallos	67,5 %	69,8 %	70,1 %

5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo se ha caracterizado de manera lingüística la forma de la carretera utilizando como única información de entrada la de los vectores de movimiento H264/AVC. Esto hace que ésta sea una técnica eficiente comparada con aquellas que trabajan con toda la información de la imagen, al procesar ésta a nivel de píxel. Además, la utilización de representaciones de alto nivel obtenidas al utilizar lógica difusa y más concretamente, el uso de variables lingüísticas, para representar el desplazamiento de un vehículo y la forma de la carretera, hace posible la definición de un proceso de comparación entre las mismas, fácilmente interpretable y eficiente en si mismo por su propia simplicidad. Aunque la dificultad en dos de los vídeos de prueba es alta, se han conseguido resultados aceptables en esta primera aproximación. Como trabajos futuros, se deben desarrollar mecanismos que permitan analizar en más detalle cada una de las diferencias obtenidas como salidas del algoritmo de comparación. Elementos como la duración de las mismas o el nivel o grado de diferenciación entre coche y carretera son factores que se deberían tener en cuenta para futuros desarrollos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información de la Universidad de Castilla-la Mancha.

Referencias

[1] A. Borkar, M. Hayes, and M. T. Smith. A new multi-camera approach for lane departure warning. In *Proceedings of the 13th international conference on Advanced concepts for intelligent vision systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 58–69. 2011.

[2] J. Giralt, L. Rodriguez-Benitez, J. Moreno-García, C.J. Solana-Cipres, L. Jimenez: Lane mark segmentation and identification using statistical criteria on compressed video. *Integrated Computer-Aided Engineering* 20, 2, pp. 143–155, 2013.

[3] J. Lee and U. Yi. A lane-departure identification based on LBPE, Hough transform, and linear regression. *Comput. Vis. Image Underst* 99, 3 , pp. 359–383, 2005.

[4] I. Obradovic, Z. Konjovic, E. Pap, and I. J. Rudas. Linear fuzzy space based road lane model and detection. *Know.-Based Syst*, pp. 37–47. 2013.

[5] T. Tran, J. Son, B. Uk, J. Lee, and H. Cho. An adaptive method for detecting lane boundary in night scene. In *Proceedings of the Advanced intelligent computing theories and applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 301–308. 2010.

[6] J. Wang, C. Lin, and S. Chen. Applying fuzzy method to vision-based lane detection and departure warning system. *Expert Syst. Appl.*, 37, 1, pp. 113–126. 2010.

[7] Y. Wang, N. Dahnoun, and A. Achim. A novel system for robust lane detection and tracking. *Signal Process.*, 92, pp. 319–334. 2012.

[8] L. A. Zadeh: Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, pp. 177–200. 1971.

GENERALIZACIÓN DE LOS OPERADORES MORFOLÓGICOS EN LA DETECCIÓN DE CONTORNOS

Manuel González-Hidalgo, Sebastia Massanet, Arnau Mir, Daniel Ruiz-Aguilera

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, Universitat de les Illes Balears
Campus UIB, Crta. Valldemossa Km. 7.5,
07122 Palma, Mallorca, {manuel.gonzalez, s.massanet, arnau.mir,daniel.ruiz}@uib.es

Resumen

En esta comunicación vamos a generalizar la definición del gradiente morfológico de la morfología matemática borrosa basado en t-normas. Dicho gradiente se usa para detectar contornos en imágenes con niveles de gris. Concretamente, en lugar de definir el gradiente morfológico basado en la erosión y dilatación "clásicas", donde se usan máximos y mínimos en dichas definiciones, vamos a sustituir el máximo por una t-conorma en el caso de la dilatación y el mínimo por una t-norma en el caso de la erosión. Una vez definidas dicha erosión y dilatación generalizadas, definimos el gradiente morfológico como la imagen diferencia entre la imagen obtenida por la dilatación y la imagen obtenida por la erosión. Seguidamente, vamos a realizar una comparación de resultados visuales usando el gradiente morfológico clásico y el gradiente morfológico generalizado.

Palabras Clave: Morfología matemática borrosa, detección de contornos, t-normas, implicaciones, histéresis.

1. INTRODUCCIÓN

La detección de contornos es una operación fundamental de bajo nivel en el procesamiento de imágenes que resulta esencial para desarrollar operaciones de alto nivel relacionadas, por ejemplo, con la visión por ordenador y el reconocimiento. Su rendimiento es crucial para los resultados finales de las técnicas de procesamiento de imágenes. En las últimas décadas, se han desarrollado un gran número de algoritmos de detección de contornos. Los diferentes enfoques van desde los algoritmos clásicos [18] basados en el uso de un conjunto de máscaras de convolución, a las nuevas técnicas basadas en conjuntos borrosos y sus extensiones [4].

Entre los enfoques borrosos, destaca la morfología matemática borrosa que generaliza la morfología binaria [20] usando conceptos y técnicas de la teoría de conjuntos borrosos [2, 16]. Esta teoría permite un mejor tratamiento y una representación con mayor flexibilidad de la incertidumbre y la ambigüedad presentes en cada nivel de una imagen. Los operadores morfológicos son las herramientas básicas de esta teoría. Un operador morfológico P transforma una imagen A que se quiere analizar en una nueva imagen $P(A,B)$ mediante un elemento estructurante B. Las cuatro operaciones morfológicas básicas son dilatación, erosión, cierre y apertura. Gracias a que las imágenes en niveles de gris pueden ser representadas como conjuntos borrosos, se pueden usar herramientas borrosas para definir los operadores morfológicos borrosos. Así, se han usado conjunciones (normalmente t-normas continuas, pero también uninormas, ver [10]) y sus implicaciones residuales. Recientemente, se ha introducido una morfología matemática borrosa basada en t-normas discretas con buenos resultados en detección de contornos [8].

La morfología matemática borrosa basada en t-normas en $[0,1]$ fue introducida por De Baets en [6] y [7] estableciendo un marco general donde se usaban conjunciones e implicaciones para definir los operadores morfológicos. Después de analizar qué propiedades debían de satisfacer la t-norma y la implicación para obtener una morfología matemática borrosa que tuviese todas las propiedades algebraicas deseables, se concluyó que la pareja formada por la t-norma de Łukasiewicz T_{LK} y su implicación residual I_{LK} es la representante de la única familia de t-normas (las nilpotentes) que satisfacen todas las propiedades. En consecuencia, siempre se suele utilizar (T_{LK}, I_{LK}) para implementar un detector de contornos basado en esta morfología. Este detector de contornos es el conocido como gradiente morfológico, definido como el residuo entre la dilatación y la erosión borrosas. Sin embargo y si sólo se pretende aplicar la morfología matemática borrosa en la detección de contornos, muchas más t-normas e implicaciones pue-

den ser utilizadas para definir el gradiente morfológico con mejoras sustanciales en su rendimiento [9]. Concretamente, si se escoge la configuración (T_{nM}, I_{KD}) donde T_{nM} es el mínimo nilpotente e I_{KD} es la implicación de Kleene-Dienes, los resultados obtenidos superan claramente a los obtenidos por la configuración (T_{LK}, I_{LK}).

En este trabajo, se pretende proponer una generalización de la erosión y la dilatación borrosas para poder definir un gradiente morfológico cuyo rendimiento como detector de contornos supere al del gradiente morfológico usual. Así, la definición de la erosión y la dilatación usando la morfología matemática borrosa anterior puede ser generalizada cambiando el papel que juegan el máximo y el mínimo en dichas definiciones. El máximo puede considerarse como caso particular de una t-conorma y el mínimo, como caso particular de una t-norma. Por tanto, se definirán la dilatación y erosión generalizadas cambiando el máximo por una t-conorma y el mínimo, por una t-norma cualesquiera. Como el máximo es la menor de las t-conormas y el mínimo es la más grande de las t-normas, el gradiente morfológico debería ser capaz de detectar muchos más contornos de la imagen. Así, a continuación, compararemos resultados visuales usando el gradiente morfológico clásico y el generalizado.

Para realizar una comparación de los resultados, se utilizarán varias medidas objetivas de rendimiento, como la medida propuesta por Pratt *FoM* (ver el capítulo 15 de [18]), el ρ-coeficiente [11] y la F-medida [19]. Esta medidas requieren que la imagen de contornos sea binaria y con los contornos de un píxel de anchura, en coherencia con las restricciones de Canny expuestas en [5]. Por lo tanto, una vez obtenida la imagen de contornos borrosos se implementarán el algoritmo de *thinning* conocido como *Non-Maxima Suppression* (NMS), expuesto por el mismo Canny y el recientemente introducido, algoritmo automático de histéresis basado en la determinación de una "zona de inestabilidad" en el histograma, propuesto en [15].

La comunicación se organiza de la siguiente forma. En la sección 2, se recuerdan las definiciones de los operadores morfológicos y de los operadores borrosos que los definen. En la sección 3, se definen la dilatación y la erosión generalizadas así como el gradiente morfológico derivado de las mismas. En la siguiente sección, se presentan y analizan los resultados. Finalmente, se exponen las conclusiones y el trabajo futuro que se quiere desarrollar.

2. PRELIMINARES

Los operadores morfológicos borrosos se definen a partir de operadores borrosos tales como las t-normas y las implicaciones. Más detalles sobre estos conectivos lógicos pueden encontrarse en [12] y [1], respectivamente.

Definición 1. Una *t-norma* T (*t-conorma* S) es una función de $[0,1]^2$ a $[0,1]$ conmutativa, asociativa, monótona creciente y con elemento neutro 1 (0).

Recordemos que las t-normas y las t-conormas son operadores duales. Dada una t-norma T, se define su t-conorma dual T^* como $T^*(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$ para todo $x, y \in [0,1]$ y viceversa. Las t-normas que usaremos en este trabajo se pueden visualizar en la tabla 1. Notar que las t-normas T_λ^{SS} pertenenecen a la familia parametrizada de Schweizer-Sklar y son estrictas si $\lambda \in [0, +\infty)$ y nilpotentes en otro caso. Las t-conormas consideradas en el trabajo son las duales de estas t-normas. Además, para toda t-norma T y t-conorma S se cumple que $T \leq T_M$ y $S_M \leq S$, donde $S_M = T_M^*$.

La asociatividad de una t-norma T (t-conorma S) nos permite extenderla de manera única a una operación n-aria de la forma usual por inducción, definiendo para cada n-tupla $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$

$$\begin{aligned} \mathop{\mathsf{T}}_{i=1}^{n} x_i &= T\left(\mathop{\mathsf{T}}_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \left(\mathop{\mathsf{S}}_{i=1}^{n} x_i = S\left(\mathop{\mathsf{S}}_{i=1}^{n-1} x_i, x_n\right) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right). \end{aligned}$$

Definición 2. Un operador binario $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una *implicación borrosa* si es decreciente en la primera variable, creciente en la segunda y satisface $I(0,0) = I(1,1) = 1$ y $I(1,0) = 0$.

Así, se pueden definir los operadores morfológicos borrosos básicos como son la dilatación y la erosión. A partir de ahora, se usará la siguiente notación: I denotará una implicación, T una t-norma, A una imagen en niveles de gris, y B un elemento estructurante en niveles de gris, modelados ambos como funciones $A, B : \mathbb{Z}^2 \to [0,1]$, d_A denotará el conjunto de puntos donde A está definida y $T_v(A)$ denotará la traslación de un conjunto borroso A por $v \in \mathbb{Z}^2$ definida por $T_v(A)(x) = A(x - v)$.

Definición 3. La *dilatación borrosa* $D_T(A,B)$ y *la erosión borrosa* $E_I(A,B)$ de A por B son las imágenes en niveles de gris definidas como

$$\begin{aligned} D_C(A,B)(y) &= \max_{x \in d_A \cap T_y(d_B)} C(B(x-y), A(x)) \\ E_I(A,B)(y) &= \min_{x \in d_A \cap T_y(d_B)} I(B(x-y), A(x)). \end{aligned}$$

Con unas mínimas propiedades la siguiente proposición asegura la extensividad de la dilatación borrosa y la anti-extensividad de la erosión borrosa.

Proposición 1. *Sean T una t-norma, I una implicación que satisface (NP), esto es, $I(1,y) = y$ para todo $y \in [0,1]$ y B un elemento estructurante en niveles de gris tal que $B(0) = 1$. Entonces se verifican las siguientes inclusiones:*

$$E_I(A,B) \subseteq A \subseteq D_T(A,B).$$

Cuadro 1: T-normas consideradas.

Nombre	**Fórmula**
Łukasiewicz	$T_{LK}(x,y) = \max\{x+y-1,0\}$
Mínimo	$T_M(x,y) = \min\{x,y\}$
Producto	$T_P(x,y) = xy$
Mínimo Nilp.	$T_{nM}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x+y \leq 1, \\ \min\{x,y\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$
Drástica	$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x,y \in [0,1), \\ \min\{x,y\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$
Schweizer-Sklar	$T_\lambda^{SS}(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y) & \text{si } \lambda = -\infty, \\ T_P(x,y) & \text{si } \lambda = 0, \\ T_D(x,y) & \text{si } \lambda = +\infty, \\ (\max\{x^\lambda + y^\lambda - 1, 0\})^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$

Así, como en el caso de la morfología clásica, la diferencia entre la dilatación borrosa y la erosión borrosa de una imagen en niveles de gris, $\delta_{T,I}(A,B) = D_T(A,B) \setminus E_I(A,B)$, conocida como operador *gradiente borroso*, puede usarse en detección de contornos.

3. GENERALIZACIÓN DEL GRADIENTE MORFOLÓGICO

En esta sección, vamos a generalizar las definiciones de la dilatación y erosión borrosas dadas en la definición 3.

Definición 4. Sean $\hat{S}$ una t-conorma y $\hat{T}$ una t-norma. Sean A y B imágenes en niveles de gris. Para cada $y \in d_A$, consideramos el conjunto finito con cardinal n_y, $K_y = d_A \cap T_y(d_B) = \{x_1, \ldots, x_{n_y}\}$. La *dilatación borrosa generalizada* $\hat{D}_{\hat{S},T}(A,B)$ y la *erosión borrosa generalizada* $\hat{E}_{\hat{T},I}(A,B)$ de A por B son las imágenes en niveles de gris definidas como:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\hat{S},T}(A,B)(y) &= \hat{\mathop{S}}_{i=1}^{n_y} T(B(x_i - y), A(x_i)), \\ \hat{E}_{\hat{T},I}(A,B)(y) &= \hat{\mathop{T}}_{i=1}^{n_y} I(B(x_i - y), A(x_i)). \end{aligned}$$

Observación 1. Notar que las definiciones anteriores generalizan la dilatación y la erosión clásicas en el sentido de que $\hat{E}_{T_M,I}(A,B) = E_I(A,B)$ y $\hat{D}_{S_M,T}(A,B) = D_T(A,B)$.

Usando las propiedades de las t-conormas y las t-normas puede verificarse fácilmente el resultado siguiente:

Proposición 2. *Sean $\hat{S}$ una t-conorma y $\hat{T}$ una t-norma. Sean T, I una t-norma y una implicación borrosa satisfaciendo las condiciones de prop. 1. Entonces la dilatación y la erosión generalizadas de una imagen A por un elemento estructurante B verifican:*

$$\hat{E}_{\hat{T},I}(A,B) \subseteq E_I(A,B) \subseteq A \subseteq D_T(A,B) \subseteq \hat{D}_{\hat{S},T}(A,B).$$

Demostración. Como se cumple que $\hat{T} \leq T_M$ y $S_M \leq \hat{S}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\hat{T},I}(A,B) &\subseteq \hat{E}_{T_M,I}(A,B) = E_I(A,B), \\ D_T(A,B) &= \hat{D}_{S_M,T}(A,B) \subseteq \hat{D}_{\hat{S},T}(A,B). \end{aligned}$$

Aplicando la proposición 1, se obtiene

$$\hat{E}_{\hat{T},I}(A,B) \subseteq E_I(A,B) \subseteq A \subseteq D_T(A,B) \subseteq \hat{D}_{\hat{S},T}(A,B).$$

□

Por tanto, la definición del gradiente morfológico generalizado aparece de forma natural usando la proposición anterior:

$$\delta_{\hat{S},\hat{T},T,I}(A,B) = \hat{D}_{\hat{S},T}(A,B) \setminus \hat{E}_{\hat{T},I}(A,B).$$

Como ya se había apuntado en la introducción, el gradiente morfológico generalizado extiende el gradiente morfológico usual permitiendo una mayor detección de contornos de la imagen.

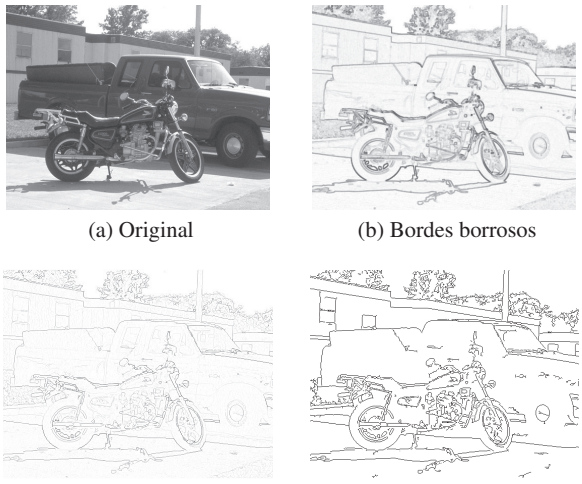
Corolario 3. *Sean $\hat{S}$ una t-conorma y $\hat{T}$ una t-norma. Sean T, I una t-norma y una implicación borrosa satisfaciendo las condiciones de prop. 1. Entonces se cumple que*

$$\delta_{T,I}(A,B) \subseteq \delta_{\hat{S},\hat{T},T,I}(A,B).$$

3.1. DETECTOR DE CONTORNOS Y MÉTODO DE COMPARACIÓN

Los métodos borrosos de detección de contornos, como son los gradientes morfológicos introducidos anteriormente, generan una imagen donde el valor del píxel representa su pertenencia al conjunto de bordes. Esta idea contradice las restricciones de Canny [5], que fuerzan una representación de los contornos como imágenes binarias de un píxel de anchura. Por lo tanto, la imagen de bordes borrosos debe de ser adelgazada y binarizada. La imagen de bordes borrosos contendrá valores grandes donde haya un gradiente grande, pero para identificar los bordes, se han de

adelgazar las vastas regiones con valores grandes del gradiente para que sólo permanezcan las magnitudes en aquellos puntos que son máximos locales. Non-Maxima Suppression (NMS), propuesto por Canny, realiza este trabajo eliminando todos los valores a lo largo de la recta del gradiente que no son valores extremos. Se ha usado la implementación de P. Kovesi en Matlab [13]. Finalmente, para binarizar la imagen se ha implementado una histéresis automática basada en la determinación de la zona de inestabilidad del histograma para encontrar los umbrales (ver [15]). La histéresis permite escoger aquellos píxeles significativos de ser considerados como bordes usando sus valores de pertenencia. Se usan dos umbrales U_1, U_2 con $U_1 \leq U_2$. Todos los píxeles con grado de pertenencia mayor que U_2 son considerados bordes, mientras que aquellos menores que U_1 se descartan. Los píxeles con grado de pertenencia entre los dos umbrales se seleccionan si están 8-conectados con píxeles superiores a U_2. El método se ha implementado con el mismo conjunto inicial de candidatos usado en [15], $\{0.01,\ldots,0.25\}$. En la Figura 1, se puede observar la secuencia del algoritmo.



(a) Original (b) Bordes borrosos

(c) NMS (d) Bordes binarios

Figura 1: Secuencia del algoritmo utilizado.

Una vez obtenida la imagen binaria de bordes con anchura un píxel (DE) correspondiente a los bordes detectados, se necesita alguna medida de rendimiento objetiva. Estas medidas necesitan además una imagen de bordes de referencia o *ground truth* (GT), que es una imagen binaria de bordes con anchura un píxel que contiene los contornos reales de la imagen original. Existen varias medidas de rendimiento para detección de contornos en la literatura (ver [17, 14]). En este trabajo se usarán para cuantificar la similaridad entre (DE) y (GT) las siguientes medidas:

1. La medida propuesta por Pratt, *Pratt's figure of merit*, definida como $FoM = \frac{1}{\max\{card\{DE\},card\{GT\}\}} \cdot \sum_{x\in DE} \frac{1}{1+ad^2}$, donde *card* es el número de píxeles de contorno de la imagen, a es una constante de escala y d es la distancia de separación entre un píxel de contorno obtenido respecto a uno ideal. En nuestro caso, se considerará $a = 1$ y la distancia Euclídea d.

2. El ρ-coeficiente [11], definido como $\rho = \frac{card(E)}{card(E)+card(E_{FN})+card(E_{FP})}$, donde E es el conjunto de píxeles de contorno bien detectados, E_{FN} es el conjunto de contornos de la imagen de referencia que no ha detectado el detector considerado y E_{FP} es el conjunto de píxeles de contorno detectados pero sin correspondencia en la imagen de contornos de referencia.

3. La F-medida [19] que viene dada como la media armónica ponderada de la precisión PR y la recuperación RE, es decir, $F = \frac{2\cdot PR\cdot RE}{PR+RE}$, donde $PR = \frac{card(E)}{card(E)+card(E_{FP})}$ y $RE = \frac{card(E)}{card(E)+card(E_{FN})}$.

Valores superiores de FoM, ρ y F ($0 \leq FoM, \rho, F \leq 1$) indican una mejor capacidad para detectar contornos.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En esta sección, se mostrarán algunos resultados preliminares relativos al uso de los operadores morfológicos generalizados y al gradiente morfológico generalizado. Para evaluar la bondad del gradiente generalizado respecto al gradiente usual, se han usado algunas imágenes de la base de imágenes pública de la University of South Florida [1] [3] que contiene las imágenes de bordes de referencia para comparar las salidas obtenidas por diversos detectores de contornos. En [3] se pueden encontrar los detalles sobre dichas imágenes de bordes de referencia y su uso en la comparación de detectores. Los resultados de esta sección han sido todos ellos obtenidos mediante el siguiente elemento estructurante isotrópico utilizado en [16]

$$B = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.86 & 0.86 \\ 0.86 & 1 & 0.86 \\ 0.86 & 0.86 & 0.86 \end{pmatrix},$$

y utilizando en los operadores morfológicos (tanto en los clásicos como los generalizados) como operadores internos T e I, la t-norma T_{nM} y la implicación $I_{KD}(x,y) = \max\{1-x,y\}$. Recordemos que esta configuración proporciona los mejores resultados en la detección de contornos con el gradiente morfológico usual [9].

Observando la figura 3, con el número de experimentos realizado hasta el momento, en un principio se pueden descartar las t-normas T_{LK} y T_P como t-normas generalizadoras de los operadores morfológicos en el detector de bordes,

[1] Se puede descargar desde `ftp://figment.csee.usf.edu/pub/ROC/edge_comparison_dataset.tar.gz`

Figura 2: Imágenes originales usadas en los experimentos.

debido al comportamiento de la erosión y dilatación que provoca un rendimiento muy bajo en la detección de contornos. En cambio, la familia Schweizer-Sklar proporciona un rendimiento similar al obtenido con la formulación clásica, introduciendo un parámetro que nos permite estudiar los resultados en función del mismo.

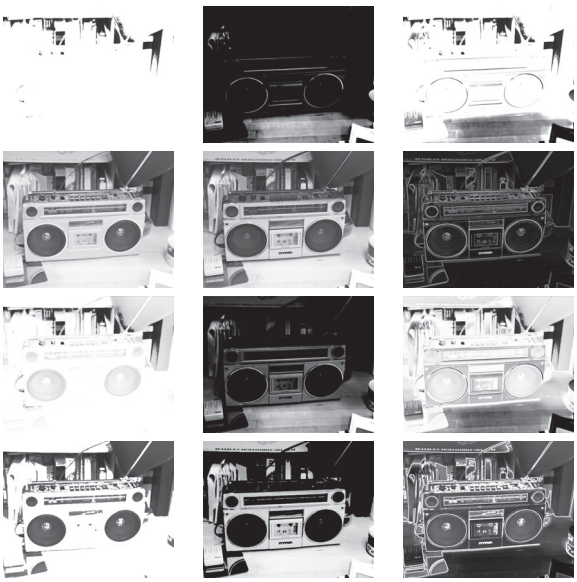
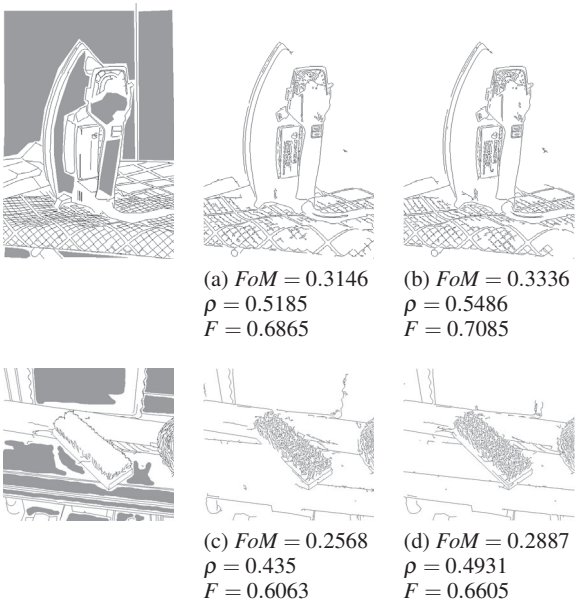


Figura 3: Dilatación y erosión generalizadas junto al gradiente morfológico generalizado $\delta_{\hat{S},\hat{T},T_{nM},I_{KD}}$ tomando de arriba a abajo como $\hat{T}$ las t-normas T_{LK}, T_M, T_P y T_{nM} y como t-conormas $\hat{S}$, las respectivas t-conormas duales.

Se han realizado experimentos con la familia Schweizer-Sklar en función del parámetro $\lambda \in (-\infty, 0)$, además de con el resto de t-normas de la tabla 1. En la figura 4 podemos ver como se mejoran los resultados visuales con respecto al caso clásico (columna central). Además las medidas obtenidas alcanzan valores superiores. En la figura 5 se muestra la evolución de la *FoM* en función de λ, en donde aparecen valores del parámetro en donde la medida obtenida supera a la del caso clásico. Esta situación se observa que se repite para las otras dos medidas y para el resto de imágenes inicialmente consideradas.



(a) $FoM = 0.3146$ $\rho = 0.5185$ $F = 0.6865$

(b) $FoM = 0.3336$ $\rho = 0.5486$ $F = 0.7085$

(c) $FoM = 0.2568$ $\rho = 0.435$ $F = 0.6063$

(d) $FoM = 0.2887$ $\rho = 0.4931$ $F = 0.6605$

Figura 4: Imagen de bordes de referencia e imágenes de bordes binarios obtenidas usando el gradiente $\delta_{\hat{S},\hat{T},T_{nM},I_{KD}}$ tomando $\hat{T}$ como las t-normas T_M y T^{SS}_{-15}, respectivamente, y como $\hat{S}$, sus t-conormas duales.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo, se ha propuesto una generalización de los operadores morfológicos con el objetivo de definir un gradiente morfológico generalizado que sea capaz de detectar un mayor número de contornos de la imagen. Esta generalización se ha basado en considerar una t-conorma y una t-norma cualesquiera en las definiciones de erosión y dilatación en lugar del máximo y el mínimo habituales. Los resultados iniciales obtenidos muestran el potencial de esta generalización siempre y cuando la t-norma y t-conorma consideradas tengan región 0 o 1 trivial, respectivamente. Como trabajo futuro, pretendemos extender la comparación iniciada en este trabajo a todas las imágenes de la base de datos considerada para, con un análisis estadístico, determinar si este enfoque mejora las definiciones clásicas. Además, sería de interés analizar otras posibles aplicaciones de estos operadores generalizadores como podrían ser la segmentación, el cambio de contraste y la eliminación de ruido.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado por el proyecto nacional MTM2009-10320 con el apoyo de fondos FEDER.

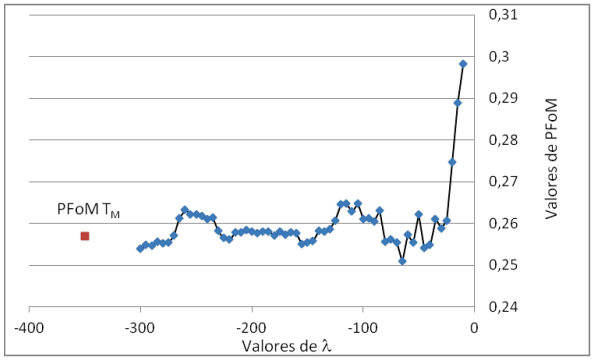


Figura 5: Valores de *FoM* para diferentes valores de λ de la imagen de bordes binarios del cepillo de la Figura 4 obtenida mediante $\delta_{(T_\lambda^{SS})^*,T_\lambda^{SS},T_{nM},I_{KD}}$.

Referencias

[1] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy Implications*, volume 231 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[2] I. Bloch and H. Maître. Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study. *Pattern Recognition*, 28:1341–1387, 1995.

[3] K. Bowyer, C. Kranenburg, and S. Dougherty. Edge detector evaluation using empirical ROC curves. In *IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR '99)*, volume 1, pages 354–359, 1999.

[4] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, and J. Fernandez. Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(13):1819–1840, 2009.

[5] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 8(6):679–698, 1986.

[6] B. De Baets. Fuzzy morphology: A logical approach. In B. M. Ayyub and M. M. Gupta, editors, *Uncertainty Analysis in Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach*, pages 53–68. Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997.

[7] B. De Baets. Generalized idempotence in fuzzy mathematical morphology. In E. E. Kerre and M. Nachtegael, editors, *Fuzzy techniques in image processing*, number 52 in Studies in Fuzziness and Soft Computing, chapter 2, pages 58–75. Physica-Verlag, New York, 2000.

[8] M. González-Hidalgo, S. Massanet, and J.Torrens. Discrete t-norms in a fuzzy mathematical morphology: Algebraic properties and experimental results. In *Proceedings of WCCI-FUZZ-IEEE*, pages 1194–1201, Barcelona, Spain, 2010.

[9] M. González-Hidalgo, S. Massanet, A. Mir, and D. Ruiz-Aguilera. On the choice of the pair conjunction-implication into the fuzzy morphological edge detector. 2013. Submitted to IEEE Trans Fuzzy Systems.

[10] M. González-Hidalgo, A. Mir-Torres, D. Ruiz-Aguilera, and J. Torrens. Image analysis applications of morphological operators based on uninorms. In *Proceedings of the IFSA-EUSFLAT 2009 Conference*, pages 630–635, Lisbon, Portugal, 2009.

[11] C. Grigorescu, N. Petkov, and M. A. Westenberg. Contour detection based on nonclassical receptive field inhibition. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12(7):729–739, 2003.

[12] E. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular norms*. Kluwer Academic Publishers, London, 2000.

[13] P. D. Kovesi. MATLAB and Octave functions for computer vision and image processing. Centre for Exploration Targeting, School of Earth and Environment, The University of Western Australia. Available from: <http://www.csse.uwa.edu.au/∼pk/research/matlabfns/>.

[14] C. Lopez-Molina, B. De Baets, and H. Bustince. Quantitative error measures for edge detection. *Pattern Recognition*, 46(4):1125 – 1139, 2013.

[15] R. Medina-Carnicer, R. Muñoz-Salinas, E. Yeguas-Bolivar, and L. Diaz-Mas. A novel method to look for the hysteresis thresholds for the Canny edge detector. *Pattern Recognition*, 44(6):1201 – 1211, 2011.

[16] M. Nachtegael and E. Kerre. Classical and fuzzy approaches towards mathematical morphology. In E. E. Kerre and M. Nachtegael, editors, *Fuzzy techniques in image processing*, number 52 in Studies in Fuzziness and Soft Computing, chapter 1, pages 3–57. Physica-Verlag, New York, 2000.

[17] G. Papari and N. Petkov. Edge and line oriented contour detection: State of the art. *Image and Vision Computing*, 29(2-3):79 – 103, 2011.

[18] W. K. Pratt. *Digital Image Processing*. Wiley-Interscience, 4 edition, 2007.

[19] C. Rijsbergen. *Information retrieval*. Butterworths, 1979.

[20] J. Serra. *Image analysis and mathematical morphology, vols. 1, 2*. Academic Press, London, 1982,1988.

Fusión de gradientes multiespectral basada en operadores ponderados

C. Lopez-Molina[1,2], **E. Barrenechea**[1], **H. Bustince**[1], **B. De Baets**[2]

[1]*Dpto. Automática y Computación, Universidad Pública de Navarra, España*,
{carlos.lopez,edurne.barrenechea,bustince}@unavarra.es
[2]*Dept. of Mathematical Modelling,Statistics and Bioinformatics, Ghent University, Bélgica*, bernard.debaets@ugent.be

Resumen

La mayor parte de los métodos de detección de bordes no están preparados para tratar con imágenes multiespectrales, lo cual dificulta su aplicación en imágenes médicas o de satélite. Frecuentemente, esto se soluciona transformando las imágenes multiespectrales en imágenes en escala de grises, provocando una pérdida de información. En este artículo proponemos una técnica de fusión multiespectral de gradientes que permita combinar los gradientes extraídos en cada espectro. Para dicha fusión presentamos una nueva clase de operadores de agregación ponderados que permiten modular de manera local y dinámica la importancia de cada espectro. Nuestra propuesta ha sido validada experimentalmente en combinación con los operadores de Sobel, aunque puede ser combinada con cualquier técnica clásica de extracción de gradientes.

Palabras Clave: Detección de bordes, imágenes multiespectrales, imágenes en color, fusión de gradientes, agregación ponderada.

1. Introducción

En los inicios del procesamiento de imagen digital, casi toda la información disponible se generaba en forma de imágenes binarias, es decir, imágenes cuyos píxeles tomaban valores en $\{0,1\}$. Con la popularización de las imágenes en escala de grises, las técnicas de procesamiento de imagen tuvieron que adaptarse a la nueva realidad. Un ejemplo muy relevante de dicha adaptación fue la que sufrió la morfología binaria [17], dando lugar a la morfología en escala de grises (o difusa). Evoluciones similares se dieron en otras técnicas de procesamiento de imagen (p.e. comparación de imágenes [2]). En los últimos años la imagen multiespectral se ha ido convirtiendo en un estándar *de facto*, y las técnicas establecidas para las imágenes en escala de grises han de adaptarse a la nueva realidad. Nótese que el incremento del número de canales asociados a cada imagen puede darse por diferentes factores, como son la representación vectorial del color en dispositivos modernos, o por el uso de varios sensores en la producción de imágenes superpuestas. En el primer caso, bien estudiado por la teoría de color digital, puede existir alguna correlación entre los diferentes canales [4]. En el segundo, que generalmente se restringe al empleo de satélites, cada uno de los canales provee de información independiente de la escena. En este trabajo el término *imagen multiespectral* se refiere a cualquier tipo de imagen cuyos píxeles tomen valores en un universo multidimensional, independientemente de la semántica del mismo.

La mayor parte de los métodos de detección de bordes en la literatura fueron diseñados para trabajar en imágenes monoespectrales (bien sean binarias o en escala de grises) y, lo que es más importante, muy pocos pueden ser adaptados de manera directa a un entorno multiespectral. Un factor de gran influencia en esta circunstancia es el hecho de que la detección de bordes suele apoyarse en la caracterización de *gradientes* en la imagen. Un gradiente es la combinación de las diferencias parciales (ortogonales) en cada píxel de la imagen, y suele usarse como el descriptor más fiable de la variación local de la misma. A pesar de que se aplica en muy diferentes tareas sobre imágenes monoespectrales, tiene un muy difícil encaje en imágenes multiespectrales. Tal y como resumen Toivanen *et al.*, el problema es que *it is not possible to define uniquely the ordering of multivariate data* [20]. A menudo, esta situación deriva en la necesidad de fusionar todos los canales de la imagen hasta conseguir una representación monoespectral de la misma en la que puedan detectarse bordes. Evidentemente, el proceso de fusión viene ligado de manera inexorable a una pérdida de información, que a menudo supone una rémora para el éxito del proceso de detección de bordes. Independientemente de si la fusión de canales se da de manera lineal o no-lineal, la reducción de la dimensionalidad de la información asociada a cada píxel siempre vendrá ligada a la indiscernibilidad de ciertos tonos diferenciables en el universo multidimensional.

En este trabajo proponemos una técnica para la fusión de indicadores de bordes obtenidos en diferentes canales. Es decir, una técnica para combinar los gradientes extraídos en cada uno de los canales de una imagen. Usando esta técnica habilitamos la detección de gradientes en cada uno de los canales (usando técnicas ya conocidas), para posteriormente fusionar toda la información en un único mapa de gradientes. Nuestra propuesta tiene la ventaja de que permite el uso de cualquier técnica de detección de gradientes conocida sobre imágenes monocanal, de manera que podemos incorporar a imágenes multicanal gran parte de los desarrollos hechos hasta la fecha. La técnica de fusión propuesta se basa en una clase de operadores de fusión de gradientes ponderados, con cierta relación con los operadores de agregación ponderados ordenados (operadores OWA, por sus siglas inglesas), ya que nos permiten modificar la relevancia de cada uno de los canales en cada píxel de la imagen.

En la Sección 2 presentamos una revisión de la literatura dedicada a la obtención de gradientes en entornos multicanal, así como los detalles matemáticos de nuestra propuesta. La validación experimental se incluye en la Sección 3, mientras que las conclusiones y las líneas de investigación futura ocupan la Sección 4.

2. Fusión de gradientes para la detección de bordes

Las imágenes multicanal se han convertido en moneda común en aplicaciones industriales, y los detectores de bordes deberían adaptarse a dicha realidad. Dada la gran cantidad de esfuerzo que se dedicó a la detección de bordes en imágenes monocanal, consideramos que los métodos para la detección de bordes en imágenes en escala de grises son un buen punto de partida para comenzar esta tarea. En este trabajo tratamos de aportar soluciones para la aplicación de técnicas de detección de gradientes monocanal en imágenes multicanal. De lograrlo, estaríamos habilitando el uso de una gran cantidad de técnicas ya conocidas en imágenes multicanal.

Queremos significar que algunos autores no hacen un uso explícito de gradientes para la detección de bordes. Por ejemplo, muchos autores confían en los resultados de un algoritmo de segmentación como punto de inicio para la detección de bordes. De hecho, el resultado de un proceso de segmentación puede considerarse de manera directa un mapa de bordes. Un ejemplo es la propuesta de Huntsberger y Descalzi [5], que consiste en un post-procesamiento de los resultados obtenidos por el algoritmo *Fuzzy c-Means* [1]. Otro ejemplo son los algoritmos de detección de bordes basados en similaridad de tonos o estadísticos derivados, cuya portabilidad a un entorno multiespectral es más sencillo. Dentro de estos últimos encontraríamos los métodos basados en *snakes* [7], que de manera simultánea producen un mapa de bordes candidato y una segmentación de la imagen[1].

En la Sección 2.1 el problema de la detección de gradientes en entornos multiespectrales se describe en detalle, mientras que las Secciones 2.2 y 2.3 contienen los detalles de nuestra propuesta.

2.1. Representación de gradientes en imágenes multiespectrales

El concepto de gradiente multiespectral está mal condicionado, ya que deriva directamente del concepto de *crecimiento*, que no tiene representación lógica (escalar) en datos multidimensionales. Sin embargo, un gradiente en una imagen multiespectral puede ser visto como un vector que (localmente) apunta en la dirección que soporte una mayor variación tonal, y tenga una magnitud proporcional a la variabilidad local del tono. Nótese que la dirección de dicho gradiente multiespectral es irrelevante, no sucediendo lo mismo con la orientación. En la literatura se ha abordado el cómputo de gradientes multiespectral desde tres perspectivas diferentes:

i) *Fusión de canales.* La fusión de canales se ha explorado a menudo en la literatura, junto con el uso de espacios de color apropiados para la representación de la diferencias percibidas entre tonos [22]. De hecho, algunos estudios pioneros en los espacios de color se dedican a la detección de bordes, como es el caso de [13]. La principal ventaja de esta estrategia es que permite el uso de la mayor parte de los métodos de detección de bordes existentes, así como el hecho de que la carga computacional de los mismos se ve aliviada por la fusión inicial de los canales. De hecho, Wesolkowski *et al.* sugieren que *perhaps it is more important to find the appropriate color space representation rather than design a new edge detection algorithm to obtain superior performance for a color edge detection algorithm* [22]. Sin embargo, es un hecho que cualquier forma de fusión de información trae como consecuencia ineludible la pérdida de información. Al usar fusión de canales, alguna información acerca de los tonos puede perderse, dificultando la buena discriminación de los bordes en el proceso subsecuente. Además, en caso de que no exista información *a priori* acerca de la utilización del espacio de color en la imagen, la técnica de fusión más común es la media aritmética, que puede llevar a resultados muy confusos. Por ejemplo, los tonos $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ en el espacio RGB se volverían indistinguibles en su representación escalar.

[1] En concreto, estos métodos producen una segmentación en sucesivas iteraciones a partir de la evolución de un mapa de bordes, que recibe el nombre de *snake* o serpiente.

ii) *Diseño de operadores específicos.* En los últimos años se ha dedicado una cantidad significativa de esfuerzo a la generación de operadores de caracterización de gradientes específicos para espacios de color. Algunos de estos esfuerzos se recogen en los trabajos de Karakos y Trahanias [6] o Evans y Liu [3]. Tal y como analizan Zhu *et al.* [24], las dos opciones para la generación de estos operadores son: (a) la extensión de técnicas monoespectrales [16, 18] y (b) el diseño de operadores dedicados, que derivan del estudio de los espacios de color vectoriales [3, 19, 21]. En cualquier caso, encontramos dos inconvenientes principales en esta aproximación al problema. El primero se centra en que la aplicabilidad de cada uno de estos métodos se restringe a un espacio de color determinado, ya que la semántica (y el interés) de cada canal varía en función del espacio de color elegido. El segundo se refiere a que estas técnicas no habilitan el uso de las técnicas ya conocidas para la detección de bordes en imágenes en escala de grises.

iii) *Fusión de gradientes multiespectrales.* En este caso se trata de efectuar la computación de los gradientes de manera individual en cada uno de los canales, para posteriormente combinarlos en una representación única. Nótese que esta aproximación transforma el problema inicial en uno de fusión de información, en el cual muchas técnicas provenientes de la literatura difusa pueden aplicarse. Esta idea no ha sido explorada, aunque entendemos que tiene un gran interés, principalmente por sus grandes posibilidades de combinación con todas las técnicas aplicables a imágenes multiespectrales.

Nuestra propuesta consiste en efectuar la detección de bordes en imágenes multiespectrales tal y como se muestra en la Figura 1. Nótese que en dicho esquema el operador de fusión de gradientes (G) tiene un rol determinante e independiente del número de canales de la imagen, así como de su semántica o interpretación.

2.2. Una aproximación inicial a la fusión de gradientes

La tarea de fusionar los gradientes producidos en cada canal puede considerarse como agregación de canales. Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ el espacio bidimensional de vectores. Para cada píxel de la imagen tenemos un vector de gradientes tal que $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_n)$, donde $D_i \in \mathbb{V}$ y n es el número de canales en la imagen. Denotaremos como $D_{i,x}$ y $D_{i,y}$ los componentes horizontales y verticales de cada vector, respectivamente, mientras que M_i es su magnitud y Θ_i su dirección. Nuestro objetivo es producir un operador $G : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}$ capaz de generar una agregación apropiada de un vector $\mathbf{D}$.

La técnica más común de agregación de vectores en la literatura es la media aritmética de componentes. Este operador está dado por:

$$G(\mathbf{V}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_{i,x} \, , \, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_{i,y} \right) \tag{1}$$

Este operador se utiliza en diferentes aplicaciones de procesamiento de imagen, como es el cómputo de fuerzas gravitatorias resultantes, pero tiene efectos indeseados para nuestros propósitos. La realidad es que, dada la semántica de nuestro problema, vectores opuestos no deberían anularse, sino combinarse.

Para nuestros propósitos, la principal propiedad de la dirección de un gradiente es el hecho de que es ortonormal a la dirección estimada del borde. Por lo tanto, con el fin de evitar la cancelación de componentes debemos tratar los gradientes no a partir de su dirección (la de la máxima variación de intensidad), sino a partir de la dirección del borde que caracterizan (es decir, de la ortonormal a la del propio gradiente). Al hacer esto, solucionaremos de manera automática el problema de la cancelación de vectores, ya que gradientes opuestos tienen, por definición, la misma orientación ortonormal. Así pues, abrimos la posibilidad de usar estadística circular. Sin embargo, dichas técnicas no suelen considerar gradientes, sino ángulos, de manera que perderíamos la información acerca de los gradientes [12].

Considerando las problemáticas asociadas a los operadores ya existentes, hemos decidido proponer un nuevo operador para la fusión de gradientes. Nuestro operador viene dado por:

$$G(\mathbf{V}) = (M_F \cdot \cos(\Theta_F), M_F \cdot \sin(\Theta_F)) \, , \tag{2}$$

donde Θ_F representa la dirección del gradiente, dada por

$$\Theta_F = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \sin(2 \cdot \Theta_i)}{\sum_{i=1}^{n} \cos(2 \cdot \Theta_i)} \right) , \tag{3}$$

y M_F es la magnitud resultante, que se obtiene con:

$$M_F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i \, . \tag{4}$$

2.3. Fusión de gradientes basada en agregación ponderada

El operador en la Eq. (2) otorga igual relevancia a cada uno de los canales de la imagen. Sin embargo, cuando se fusionan características de bordes multiespectrales, se debe considerar que la presencia de un indicador fuerte de presencia en un único canal puede ser suficiente para determinar la presencia de un borde, independientemente de los resultados obtenidos en el resto de canales. Un ejemplo de este hecho puede verse en la Figura 2, donde la variabilidad entre tonos es visible únicamente en algunos canales, pero desaparece en el resto. Consecuentemente, la presencia de una variación tonal fuerte en alguno de los canales puede

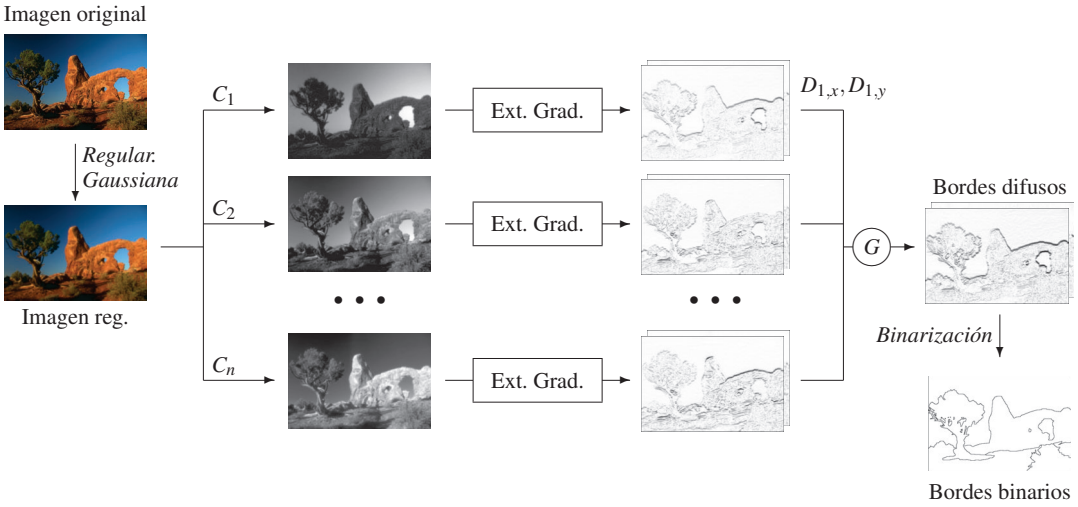


Figura 1: Representación esquemática de la propuesta para la obtención de imágenes de bordes binarias a partir de la fusión multiespectral de gradientes. La imagen que se incluye se ha obtenido del conjunto de prueba (*test set*) del BSDS300 [10], y cada uno de los canales se corresponde con su representación en el espacio de color RGB.

ser suficiente indicador para considerar un píxel como borde. De hecho, no debemos olvidar que la misma utilización de imágenes multiespectrales es la posibilidad de capturar en algunos canales información que es ignorada por otros. Por lo tanto, cuando fusionamos gradientes, aquellos que tienen una magnitud mayor (presumiblemente indicando la presencia de un borde visible) deberían ser dominantes sobre los que tienen una magnitud menor.

Por lo tanto, consideraremos una variación de las Eqs. (2)-(4) que sea capaz de otorgar mayor relevancia a aquellos gradientes que tengan una magnitud mayor. Sea $D_{(i)}$ el gradiente de $\mathbf{V}$ con la i-ésima mayor magnitud, y sean $D_{(i),x}$ y $D_{(i),y}$ sus componentes horizontales y verticales. De una manera similar, $M_{(i)}$ y $\Theta_{(i)}$ representan la magnitud y dirección de dichos gradientes, respectivamente. Nótese que, por ejemplo, $D_{(i),x}$ no es necesariamente el i-ésimo mayor componente horizontal en $\mathbf{V}$. Podemos reformular Eqs. (2)-(4) tal que

$$G(\mathbf{V}) = (M_F \cdot \cos(\Theta_F), M_F \cdot \sin(\Theta_F)) \,, \tag{5}$$

donde Θ_F representa la orientación del gradiente, dada por

$$\Theta_F = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \sin(2 \cdot \Theta_{(i)})}{\sum_{i=1}^{n} w_i \cos(2 \cdot \Theta_{(i)})} \right) , \tag{6}$$

y M_F representa la magnitud resultante, tal que

$$M_F = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot M_{(i)} \,, \tag{7}$$

y $w \in [0,1]^n$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, es un vector de pesos.

El papel que juega w en este operador es muy similar al que tiene el vector de pesos en un operador OWA [23][2]. El uso de un operador de pesos w nos permite variar la importancia de los gradientes a agregar. En concreto, al utilizar vectores con valores decrecientes conseguimos dar más robustez a los gradientes que tienen mayor magnitud. Por ejemplo, si usáramos el vector $w = (1, 0, \ldots, 0)$ sólo consideraríamos el gradiente de mayor magnitud de $\mathbf{D}$, mientras que $w = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ recuperaría las Eqs. (2)-(4).

3. Validación experimental

3.1. Objetivo del experimento

Este experimento tiene como objetivo la validación de nuestra propuesta para la detección de bordes en imágenes multiespectrales. En concreto, tratamos de discernir si nuestra técnica de fusión de gradientes consigue mejorar los resultados de la técnica más común para cumplimentar dicha tarea, que consiste en la simple agregación de los canales usando la media aritmética. Es decir, tratamos de descubrir si la fusión multiespectral de gradientes tiene mejores resultados que la propia fusión de los canales. Consecuentemente, sólo compararemos las mencionadas dos alternativas con una técnica estándar de caracterización de gradientes, como es el filtrado con máscaras de Sobel. Hemos seleccionado estos operadores porque su simplicidad evita que se introduzcan en la comparación nuevos factores que influyan en el resultado.

[2]No puede considerarse que G sea un operador OWA, en la medida en que el peso de los elementos a agregar no viene dado por sus valores, sino por la magnitud de los gradientes.

(a) Imagen original (b) Canal rojo (c) Canal verde (d) Canal azul (e) Media aritmética

Figura 2: Descomposición en canales de una imagen del BSDS [10], junto con el resultado de la fusión de sus canales RGB usando la media aritmética.

3.2. Configuración experimental

En este experimento usaremos el Berkeley Segmentation Dataset (BSDS), cuyos detalles pueden encontrarse en [10, 9]. A la hora de cuantificar la calidad de los resultados, usaremos la $F_{0,5}$, tal y como se describe en [9]. Más detalles acerca de este operador pueden encontrarse en [8].

La representación esquemática del proceso de generación de imágenes binarias se muestra en la Figura 1. La regularización se da con filtros Gaussianos, cuya desviación estándar denotamos como σ_r, mientras que los gradientes multiespectral se computan usando operadores de Sobel. Después de fusionar los gradientes, necesitamos binarizar los bordes. En este caso, esto se consigue usando la supresión de no-máximos, introducida por Rosenfeld [14], en combinación con *hysteresis* y la técnica de determinación de umbrales de Rosin [15][3].

3.3. Resultados

Los resultados obtenidos en el experimento se incluyen en la Fig. 3. Consideramos tres valores de σ_r, y para cada uno mostramos el rendimiento medio (en términos de $F_{0,5}$, PREC and REC), el ranking medio y el número de mejores/peores resultados obtenidos por cada contendiente. Nótese que en el cómputo del ranking y del número de mejores/peores resultados los contendientes considerados son todos los que usan el mismo valor de σ_r.

En la Fig. 3 observamos que la diferencia entre los resultados obtenidos con fusión de canales y fusión de gradientes es bastante pequeña. Lo cierto es que la fusión de gradientes siempre obtiene mejores resultados (en términos de cualquier medida de calidad usada), pero dichas mejoras son mínimas. Si bien es cierto que Novak and Shafer [11] calculan en un 10 % los bordes visibles en color y no en escala de grises, la mejora obtenida por nuestra propuesta es mejor que dicho porcentaje. Por otro lado, aunque la diferencia en términos de calidad cuantificada es mejor, los rankings obtenidos por la fusión de gradientes sí son consistentemente mejores que los obtenidos por la fusión de canales, especialmente en el caso de los vectores w_1 y w_2. Esto indica que los resultados obtenidos por la fusión de canales son generalmente peores. También es notorio que el método que usa el vector w_5, que no da predominancia a los vectores de mayor magnitud, es el que obtiene resultados menos satisfactorios en términos de ranking y mejores/peores resultados. Esto probaría la validez del uso de vectores de pesos decrecientes. Sin embargo, somos conscientes de que las mejoras son, en todo caso, marginales, y que experimentos más completos han de llevarse a cabo para complementar los resultados aquí expuestos.

[3] El umbral de Rosin se toma como *umbral alto* (T_H), mientras que el *bajo* se establece como $T_L = 0{,}4 \cdot T_H$.

4. Conclusiones

En este trabajo presentamos una técnica de fusión multiespectral de gradientes, que permite la aplicación de técnicas clásicas de caracterización de gradientes en imágenes multiespectrales. Nuestra propuesta se basa en un operador de fusión de gradientes capaz de solventar los problemas de cancelación de componentes en la agregación de gradientes opuestos. Los resultados experimentales parecen indicar, que nuestra propuesta mejora los resultados obtenidos por la fusión de canales usando la media aritmética. Esta mejora aparece de manera consistente, aunque mínima en la mayoría de las imágenes. En el futuro, trataremos de investigar la familia de operadores de fusión introducida en la Sección 2, así como estudiar sus propiedades.

Referencias

[1] J. C. Bezdek, R. Ehrlich, and W. Full. FCM: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences*, 10(2-3):191–203, 1984.

[2] D. Coquin and P. Bolon. Application of Baddeley's distance to dissimilarity measurement between gray scale images. *Pattern Recognition Letters*, 22(14):1483–1502, 2001.

[3] A. Evans and X. U. Liu. A morphological gradient approach to color edge detection. *IEEE Trans. on Image Processing*, 15(6):1454–1463, 2006.

[4] O. D. Faugeras. Digital color image processing within the framework of a human visual model. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 27(4):380–393, 1979.

		Fusión de canales	Fusión de gradientes				
			$w_1 = \{1,0,0\}$	$w_2 = \{\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\}$	$w_3 = \{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\}$	$w_4 = \{\frac{3}{6},\frac{2}{6},\frac{1}{6}\}$	$w_5 = \{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$
σ_r=1,0	F (P/R)	.48 (.38/.78)	.49 (.38/.78)	.49 (.38/.78)	.49 (.38/.78)	.49 (.38/.78)	.49 (.38/.78)
	Rank.	3.82	3.33	3.10	3.37	3.59	3.79
	B/W	14 / 24	30 / 23	16 / 7	14 / 10	18 / 21	8 / 15
σ_r=2,0	F (P/R)	.53 (.47/.66)	.53 (.48/.67)	.54 (.49/.67)	.54 (.48/.67)	.54 (.48/.66)	.53 (.48/.66)
	Rank.	3.90	3.36	3.06	3.28	3.46	3.94
	B/W	9 / 16	32 / 30	17 / 8	14 / 9	21 / 22	7 / 15
σ_r=3,0	F (P/R)	.52 (.51/.58)	.53 (.51/.60)	.53 (.52/.59)	.53 (.51/.60)	.53 (.52/.58)	.53 (.52/.58)
	Rank.	4.29	2.94	3.09	3.25	3.45	3.98
	B/W	5 / 29	38 / 16	13 / 9	14 / 12	20 / 15	10 / 19

Figura 3: Resultados obtenidos en el BSDS *test set* usando fusión de canales y fusión de gradientes con diferentes vectores de pesos.

[5] T. Huntsberger and M. Descalzi. Color edge detection. *Pattern Recognition Letters*, 3(3):205–209, 1985.

[6] D. Karakos and P. Trahanias. Generalized multichannel image-filtering structures. *IEEE Trans. on Image Processing*, 6(7):1038–1045, 1997.

[7] M. Kass, A. P. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 4:321–331, 1988.

[8] C. Lopez-Molina, B. De Baets, and H. Bustince. Quantitative error measures for edge detection. *Pattern Recognition*, 46(4):1125–1139, 2013.

[9] C. Lopez-Molina, B. De Baets, H. Bustince, J. Sanz, and E. Barrenechea. Multiscale edge detection based on Gaussian smoothing and edge tracking. *Knowledge-Based Systems*, 44:101–111, 2013.

[10] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics. In *Proc. of the 8th International Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 416–423, 2001.

[11] C. L. Novak and S. A. Shafer. *Proceedings of DARPA Image Understanding workshop*, chapter Color edge detection. 1987.

[12] E. Olson. On computing the average orientation of vectors and lines. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3869–3874, 2011.

[13] G. S. Robinson. Color edge detection. *Optical Engineering*, 16(5):479–484, 1977.

[14] A. Rosenfeld and M. Thurston. Edge and curve detection for visual scene anaiysis. *IEEE Trans. on Computers*, 20(5):562–569, 1971.

[15] P. L. Rosin. Unimodal thresholding. *Pattern Recognition*, 34(11):2083–2096, 2001.

[16] F. Russo and A. Lazzari. Color edge detection in presence of gaussian noise using nonlinear prefiltering. *IEEE Trans. on Image Processing*, 54(1):352–358, 2005.

[17] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Inc., 1983.

[18] G. Shapiro. Color snakes. *Computer Vision and Image Understanding*, 68(2):247–523, 1997.

[19] C. Theoharatos, G. Economou, and S. Fotopoulos. Color edge detection using the minimal spanning tree. *Pattern Recognition*, 38(4):603–606, 2005.

[20] P. J. Toivanen, J. Ansamaki, J. P. S. Parkkinen, and J. Mielikainen. Edge detection in multispectral images using the self-organizing map. *Pattern Recognition Letters*, 24(16):2987–2994, 2003.

[21] P. Trahanias and A. Venetsanopoulos. Color edge detection using vector order statistics. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2(2):259–264, 1993.

[22] S. Wesolkowski, M. Jernigan, and R. Dony. Comparison of color image edge detectors in multiple color spaces. In *Proc. of the International Conference on Image Processing*, volume 2, pages 796–799, 2000.

[23] R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.

[24] S.-Y. Zhu, K. N. Plataniotis, and A. N. Venetsanopoulos. Comprehensive analysis of edge detection in color image processing. *Optical Engineering*, 38(4):612–625, 1999.

MODELADO DE UN VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO MEDIANTE COMBINACIÓN DE TÉCNICAS PARAMÉTRICAS Y NEURODIFUSAS

Jesús Enrique Sierra[1], **Matilde Santos**[2]

[1] *Universidad de Burgos, Burgos*, jesierra@ubu.es
[2] *Universidad Complutense de Madrid, Madrid*, msantos@ucm.es

Resumen

A partir de datos de entrada/salida reales de un vehículo aéreo no tripulado (UAV) se han generado modelos orientados al control mediante técnicas paramétricas, neuronales y neurodifusas. El dispositivo empleado es un cuatrirrotor, por lo tanto un sistema complejo, no lineal, multivariable y con acoplamientos. Los resultados de la aplicación de los diferentes modelos se han analizado y comparado en los dominios temporal y frecuencial. Esta comparación señala que la combinación de los métodos ARX y ANFIS proporciona una excelente aproximación en ambos dominios.

Palabras Clave: Soft computing, ANFIS, redes neuronales, redes neurodifusas, técnicas paramétricas, modelización, identificación, vehículos aéreos no tripulados (UAV).

1 INTRODUCCIÓN

La identificación de sistemas es uno de los pasos más importantes para obtener modelos útiles de sistemas complejos. Fundamentalmente existen dos vías para alcanzar este objetivo: la primera de ellas consiste en aplicar las ecuaciones físicas conocidas que gobiernan el comportamiento dinámico y emplear este conocimiento para construir las ecuaciones diferenciales que lo representan. Esta metodología resulta muy útil cuando las variables son perfectamente conocidas y las relaciones entre ellas no son demasiado complejas. La otra vía consiste en la medida y el tratamiento de las señales en la entrada y la salida del sistema, y la aplicación de diferentes mecanismos de mapeado para describir las relaciones internas subyacentes entre las entradas y las salidas. En esta categoría se encuentran, entre otras, algunas de las técnicas proporcionadas por la Inteligencia Artificial, como son las redes neuronales, redes neurodifusas y los algoritmos genéticos [5].

La modelización de un vehículo aéreo no tripulado, UAV (Unmanned Aerial Vehicle), no es una tarea sencilla. La complejidad proviene de diferentes fuentes: la aleatoriedad de los flujos de aire y de las fuerzas exógenas, la no homogeneidad de su estructura mecánica interna, y la fuerte no linealidad de la dinámica del mismo. Todos estos factores convierten a las técnicas basadas en la inteligencia artificial en un camino idóneo para modelar estos sistemas.

Otros estudios anteriores se enfrentaron a este problema de modelización empleando redes neuronales como: [7] y [9]. También pueden encontrarse otros ejemplos de aplicación de técnicas inteligentes para modelar sistemas complejos no lineales como, por ejemplo, vehículos marinos [8]. Mediante este trabajo se realizan dos aportaciones novedosas en el estudio de los UAVs: la aplicación combinada de técnicas paramétricas y neurodifusas como metodología de modelización, y la utilización del error cuadrático medio de la respuesta al escalón, estimada mediante análisis de correlación, y del error cuadrático medio de la respuesta en frecuencia estimada, como dos herramientas de evaluación y validación de la eficacia del modelo.

En este trabajo, empleando datos reales de entrada/salida de un UAV, se han obtenido diferentes modelos basados en técnicas paramétricas, redes neuronales y redes neurodifusas, orientados todos ellos al control, y los resultados se han comparado. Por último se ha aplicado la sinergia de ambas aproximaciones, combinando los métodos, para mejorar los modelos obtenidos por cada una de ellas de forma individual.

El vehículo a modelar es el ARDRONE 2.0 comercializado por Parrot (Figura 1). Este aparato se fabrica en fibra de carbono y plástico PA66. Está equipado con cuatro motores tipo brushless de alta eficiencia, alimentados por una batería de litio de 11.1 V y 1000 mAh que le confiere una autonomía de vuelo de aproximadamente 12 minutos. La masa es de 380 g sin carcasa y 420 g con carcasa. Dispone de un acelerómetro de 3 ejes, un giróscopo de 2 ejes (balan-

ceo y cabeceo), y un giróscopo de precisión para el ángulo de guiñada.

Figura 1: Vehículo cuatrirrotor utilizado (`http://www.parrot.com`).

A continuación se detalla la organización del documento. En la sección 2 se desarrolla un análisis preliminar describiendo las señales examinadas, el análisis de correlación y el análisis espectral. La sección 3 se destina al estudio de los diferentes modelos contrastados: basados en técnicas paramétricas, basados en redes neuronales y neurodifusas y la aplicación conjunta de ambas metodologías. Los resultados son discutidos y comparados en la sección 4. El documento finaliza con las conclusiones.

2 ANÁLISIS PRELIMINAR

2.1 SEÑALES EMPLEADAS

Para realizar el modelado se parte de un conjunto de datos suministrados por el Grupo de Ingeniería de Control de CEA (Comité Español de Automática) para el concurso de Ingeniería de Control 2013 [2]. El conjunto recoge los siguientes datos: periodo de muestreo, señales pitch, roll, x, v_x, y e v_y, obtenidas durante 9 minutos con un tiempo de muestreo de 60 ms. Las señales de entrada y salida se representan en la Figura 2 (en azul: pitch y v_x, en verde: roll y v_y).

Puede adelantarse ya el importante desacoplo entre las variables que se corroborará mediante la correlación. Nos centraremos en el modelado de las velocidades v_x y v_y, puesto que la posición (x,y) viene determinada por la integración de esas velocidades.

2.2 ANÁLISIS DE CORRELACIÓN

A partir de la estima de la covarianza entre la entrada y la salida de un sistema, y la estima de la varianza de la entrada, se puede estimar la respuesta al impulso, con las

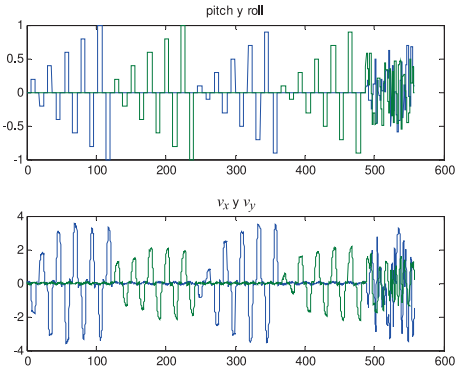


Figura 2: Señales empleadas.

expresiones siguientes:

$$\widehat{R}^N_{yu}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)(t-\tau) \tag{1}$$

$$\widehat{\lambda}^N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)^2 \tag{2}$$

$$\widehat{g}^N_\tau = \frac{\widehat{R}^N_{yu}(\tau)}{\widehat{\lambda}^N} \tag{3}$$

Siendo y la salida del sistema, u la entrada, N el número de datos, $\widehat{R}$ la covarianza, $\widehat{\lambda}$ la varianza y $\widehat{g}$ la respuesta estimada al impulso. Integrando la respuesta al impulso puede obtenerse la respuesta al escalón, la cual puede ser muy útil para ayudarnos a estimar el grado de acoplamiento entre las variables del sistema. Esta metodología de estudio suele denominarse análisis de correlación [1]. Empleando el método descrito se obtiene la Figura 3.

En la respuesta al escalón de la matriz de funciones de transferencia de la Figura 3 se aprecia como la ganancia en estado estacionario de los elementos de la diagonal principal, correspondientes al enlace (fila 1, columna 1) y (fila 2, columna 2), son bastante mayores que el resto. Este hecho indica que las dinámicas del sistema están parcialmente desacopladas, pudiendo convertir el sistema MIMO (multi-input multi-output) en dos sistemas SISO (single-input single-output). Aprovechando esta simplificación, los esfuerzos en modelado en este trabajo se centrarán en la influencia del pitch sobre la velocidad en el eje x y del roll sobre la velocidad en el eje y.

2.3 ANÁLISIS ESPECTRAL

Una vez calculada la estima de la covarianza, ésta puede emplearse para calcular la respuesta en frecuencia estimada [1] aplicando para ello la transformada de Fourier ponderada por una función de *enventanado*, como se describe en las expresiones siguientes:

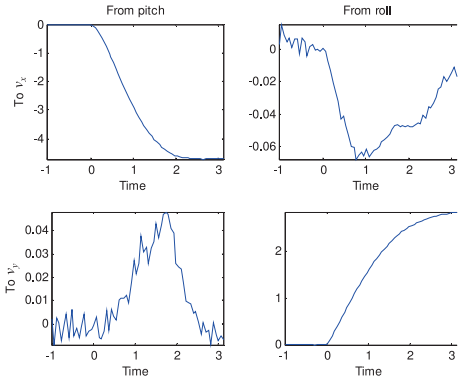


Figura 3: Respuesta a un escalón estimada del sistema MIMO

$$\widehat{\Phi}_{yu}^{N}(\omega) = \sum_{\tau=-M}^{M} w_M \widehat{R}_{yu}^{N}(\tau) e^{-i\omega\tau} \tag{4}$$

$$\widehat{\Phi}_{u}^{N}(\omega) = \sum_{\tau=-M}^{M} w_M \widehat{R}_{u}^{N}(\tau) e^{-i\omega\tau} \tag{5}$$

$$G^{N}(e^{iwT}) = \frac{\widehat{\Phi}_{yu}^{N}(\omega)}{\widehat{\Phi}_{u}^{N}(\omega)} \tag{6}$$

3 MODELOS

3.1 BASADOS EN TÉCNICAS PARAMÉTRICAS

Se han probado diferentes modelos paramétricos y se ha escogido, por su sencillez y efectividad, el modelo paramétrico ARX. Los modelos ARX (Autoregressive Exogenous Model), descritos en [3], describen el sistema con una ecuación de la siguiente forma:

$$Ay(y) = Bu(t) + \varepsilon \tag{7}$$

Donde y es la salida, u la entrada, ε el error de la estima, y A y B son polinomios. Si se restringe el grado máximo de los polinomios a 30, el mejor resultado se consigue con la configuración ARX $(10, 10, 1)$ donde 10 es el grado de A y de B, y 1 son las muestras de retardo.

3.2 BASADOS EN REDES NEURONALES

Se han probado distintos tipos de redes neuronales y se han escogido las redes de base radial por su aptitud para la aproximación de funciones, [4, 5]. Las redes de base radial están formadas por tres capas, una capa de entrada donde se reciben las señales del exterior; una capa oculta, conectada con la capa de entrada donde cada elemento tiene asociada una función de base radial; y una capa de salida donde se combinan linealmente los resultados de las funciones de activación de la capa oculta [6].

La salida de cada elemento de la capa oculta zi(n) se calcula como la distancia entre el patrón de entrada al centro del cluster ponderada por di, y aplicando este valor a una función de base radial, según la siguiente expresión:

$$z_i(n) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\sum\left(x_j(n) - c_{ij}\right)^2}}{d_i}\right) \tag{8}$$

$$y_k(n) = \sum w_{ik} z_i(n) + \mu_k \tag{9}$$

Siendo w_{ik} los pesos de la capa de salida y μ_k los umbrales de activación. La función de base radial Φ utilizada es:

$$\Phi(n) = e^{-n^2} \tag{10}$$

Para realizar el estudio, el conjunto de datos de entrada de la red se ha formado con la señal de entrada en el instante actual, $pitch(t)$, y valores en los 5 instantes de muestreo anteriores, $pitch(t - iTs)$ donde $i = 1 \ldots 5$, y Ts es tiempo de muestreo. El conjunto de datos objetivo se ha generado con los valores de la señal de salida en el instante actual $v_x(t)$. Un proceso similar se ha llevado a cabo para la relación $roll \rightarrow v_y$. Para simplificar el modelo y establecer las comparaciones en términos justos se ha limitado el número de neuronas de la capa oculta a 30.

Se han empleado 5000 muestras de las señales, el 60 % se ha empleado para entrenar las redes y el resto para simular y validarlas.

3.3 BASADOS EN TÉCNICAS NEURODIFUSAS

Se ha empleado la técnica ANFIS (Adaptive Neural Fuzzy Inference System) [4]. A grandes rasgos se basa en la creación de un árbol de decisión para clasificar los datos de entre p^n modelos de regresión. Donde n es el número de entradas del modelo y p es el número de particiones de cada variable.

Estas redes están formadas por cinco capas. En la capa de entrada (capa de valores) se *fuzzifican* las entradas. Esta capa se compone de p^n nodos, donde la salida de cada uno de ellos viene dada por:

$$O_{1,i} = \mu_{Aj}(x_k),\ i = 1, \ldots p^n, j = 1, \ldots p, k = 1, \ldots n \tag{11}$$

Donde A es una etiqueta lingüística (pequeño, grande, ...), y la función μ viene dada por:

$$\mu_A(x_k) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x_k - c_i}{a_i} \right|^{2b}} \quad (12)$$

Con las salidas de los nodos de la primera capa se construyen las reglas difusas en la segunda capa (capa de reglas) a través de alguna T-norma (mínimo, producto, ...):

$$O_{2,i} = w_i = T(\mu_{Aj}, \mu_{Bj}, \ldots),\ i = 1, \ldots p^n, j = 1, \ldots p \quad (13)$$

En la capa 3 (capa de normalización) se normalizan las salidas de la capa 2:

$$O_{3,i} = \overline{w}_i = \frac{w_i}{\sum w_i},\ i = 1, \ldots p^n \quad (14)$$

En la capa 4 (capa de funciones), las salidas de la capa 3 ($\overline{w}_i$), ponderan los resultados de la función de regresión lineal de su nodo generando las reglas de salida:

$$O_{4,i} = \overline{w}_i f_i = \overline{w}_i \left(p_{1_i} x_i + \cdots p_{n_i} x_n \right),\ i = 1, \ldots p^n \quad (15)$$

Donde $p_k, k = 1, \ldots n$ son los parámetros consecuencia. Finalmente, en la capa de salida se realiza una suma ponderada de las salidas de la capa 4:

$$O_5 = \sum_i \overline{w}_i f_i = \frac{\sum_i w_i f_i}{\sum_i w_i} \quad (16)$$

En nuestro caso el conjunto de entrenamiento es el mismo que para la red de funciones de base radial. Con lo que asignando un número de particiones $p = 2$, se obtienen un conjunto de $2^6 = 64$ reglas. Se fija el número de iteraciones a 1 para reducir la carga computacional.

3.4 APLICACIÓN COMBINADA DE TÉCNICAS

La combinación de las técnicas anteriores empleando la topología y la metodología adecuadas proporciona mejores resultados en términos de complejidad computacional y del error cometido en el modelo. En este estudio se ha empleado la conexión en cascada de la Figura 4.

En el primer caso, configuración en cascada, el entrenamiento de la red se realiza de la forma siguiente: *i*) se realiza la identificación del modelo paramétrico que mejor se aproxime, *ii*) a continuación se simula la salida esperada del sistema a partir de un conjunto de señales de entrada conocido, *iii*) finalmente, se entrena la red tomando como conjunto de entrada el resultado de la simulación anterior, y como conjunto de salida los datos de salida reales conocidos.

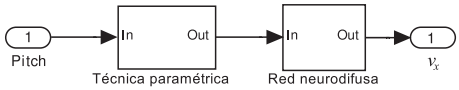


Figura 4: Conexión en cascada de las dos técnicas de modelado

Para que las comparaciones entre los modelos de las secciones 3.1 y 3.2 y la técnica combinada sean equiparables, se escoge como modelo lineal el ARX-10,10,1 y como red neuronal la red de base radial con 30 neuronas en la capa oculta.

4 RESULTADOS

En esta sección se presenta una comparación de los modelos obtenidos por las diferentes técnicas expuestas. Todas las estrategias se han implementado en Matlab/Simulink. Los modelos se evalúan tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Se define el error como la diferencia entre la salida real del sistema (datos experimentales proporcionados por los ensayos de la organización) y la salida del modelo correspondiente. Esta diferencia también se calcula para la respuesta al escalón estimada y para la respuesta en frecuencia estimada.

Las figuras 5 y 6 muestran la respuesta del sistema (velocidad en el eje x, Figura 5 y velocidad en el eje y, Figura 6) cuando se aplican diferentes escalones como señal de referencia. Si ordenamos los resultados en base a la similitud con la salida real, en ambos casos la conexión ARX+ANFIS es la que mejor comportamiento proporciona, seguida por la conexión ARX + base radial, y el resto de técnicas.

Las respuestas al escalón se representan en las figuras 7 (velocidad en el eje *x*) y 8 (velocidad en el eje *y*). El mejor resultado para vx es el proporcionado por la conexión ARX+ANFIS, seguida por ARX, ARX + base radial, ANFIS y base radial. Para vy es ARX+base radial la conexión que mejor se aproxima a la respuesta al escalón estimada, seguida por ANFIS, ARX+ANFIS, ARX y base radial.

En este caso queda patente la asimetría del sistema, ya que se obtienen diferentes aproximaciones en una dirección que en otra, y unas técnicas identifican mejor según la variable, y por lo tanto el eje, del que se trate.

Las figuras 9 (velocidad en el eje *x*) y 10 (velocidad en el eje *y*) muestran la comparación de la respuesta en frecuencia estimada para los diferentes modelos estudiados. En ambos casos el modelo que más se acerca a la respuesta en frecuencia estimada mediante los datos reales de entrada

y salida es el ARX seguido por la conexión ARX + base radial, ARX+ANFIS, base radial y ANFIS. Por lo tanto en el dominio de la frecuencia se puede concluir que se obtienen mejores resultados con técnicas clásicas.

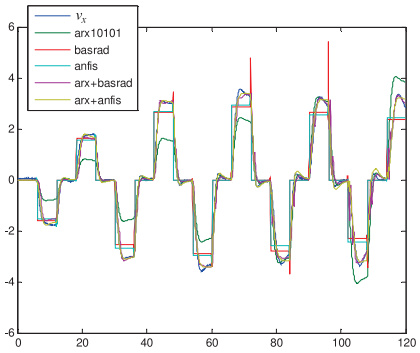


Figura 5: Comparación de las salidas de modelos para v_x.

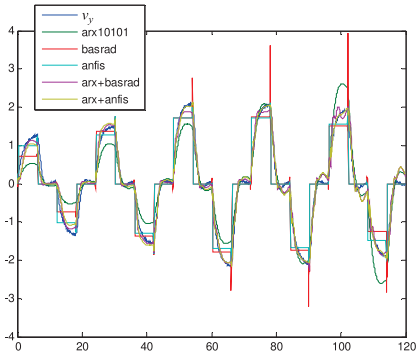


Figura 6: Comparación de las salidas de modelos para v_y.

Los resultados muestran que de forma general, la conexión en cascada proporciona mejores resultados que la utilización independiente de la red de base radial, ANFIS o ARX.

La tabla 1 presenta los resultados cuantitativos en términos de error cuadrático medio, MSE (*Mean Squared Error*) para cada técnica estudiada. Se ha escogido este estadístico por su denotada utilidad en la comparación de modelos cuando sólo se dispone de un conjunto de datos. ([5] y [6])

La comparativa general arroja que el modelo que mejor se comporta es el ARX+ANFIS. En el caso de la respuesta en frecuencia se ha observado que el modelo ARX presenta un mejor comportamiento que el ofrecido por el resto de los modelos. Esta diferencia se habría visto reducida si se hubiera aumentado el número de neuronas de la capa oculta de la red de base radial, o el número de particiones o iteraciones en ANFIS.

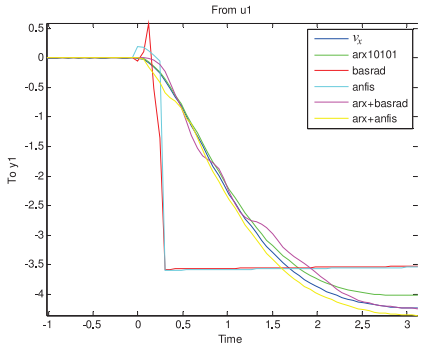


Figura 7: Comparación de la respuesta al escalón de modelos para v_x.

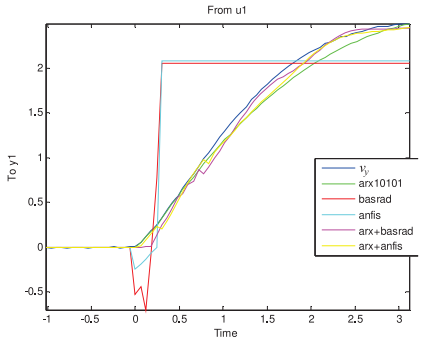


Figura 8: Comparación de la respuesta al escalón de modelos para v_y.

5 CONCLUSIONES

Los UAVs son sistemas muy complejos de modelar. Su complejidad deriva de la aleatoriedad de los flujos de aire y de las fuerzas exógenas, y de su dinámica fuertemente no lineal. Estos factores señalan a las técnicas inteligentes como estrategias eficientes para modelar estos sistemas. Para probarlo, en este trabajo se han implementado un conjunto de herramientas informáticas que permiten modelar cualquier tipo de UAV en base a datos experimentales con diferentes técnicas, analíticas e inteligentes.

En concreto, para modelar el UAV objeto de estudio, del que se cuentan con datos reales de ensayos, se han usado diferentes técnicas de identificación de sistemas. Por un lado se han implementado y comparado técnicas paramétricas y modelos basados en redes neurodifusas. Se han aplicado tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

Por otro lado, se han combinado las técnicas paramétricas con las inteligentes consiguiendo una mejora en la aproximación importante.

Los resultados son altamente satisfactorios: el error MSE

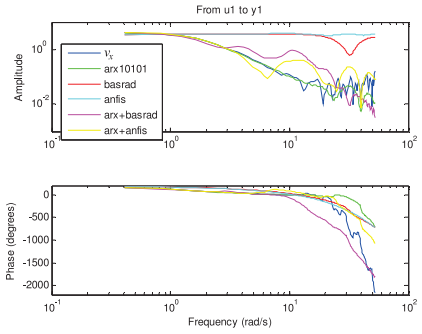


Figura 9: Comparación de la respuesta en frecuencia de los modelos para v_x.

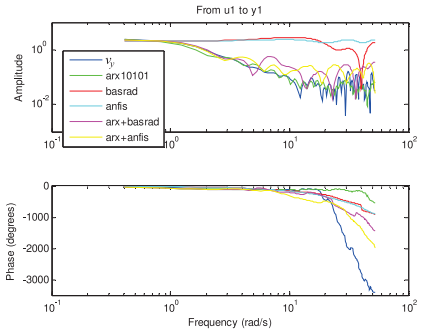


Figura 10: Comparación de la respuesta en frecuencia de los modelos para v_y.

—empleado como criterio evaluador de los modelos— obtenido mediante la aplicación combinada de técnicas indica que estos modelos proporcionan un comportamiento satisfactorio tanto para la secuencia temporal como para la respuesta en frecuencia, especialmente la combinación de ARX + ANFIS.

En última instancia se ha probado como la sinergia de técnicas clásicas e inteligentes puede ser una alternativa muy eficiente en el modelado de sistemas complejos

Agradecimientos

A los autores les gustaría agradecer la aportación del fichero con datos reales al Grupo de Ingeniería de Control del Comité Español de Automática [2].

Referencias

[1] Julius S. Bendat and Allan G. Piersol. *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. Wiley, New York, NY [u.a.], 1980.

[2] Comité español de automática. Bases del concurso en ingeniería de control, 2013. `http://www.ceautomatica.es/og/ingenieria-de-control`

Tabla 1: Comparación del MSE para valores en el dominio del tiempo, la respuesta al escalón estimada y la respuesta en frecuencia estimada.

Técnica	Salida	MSE	MSE respuesta al escalón	MSE respuesta en frecuencia	MSE medio
ARX10,10,1	v_x	0.5056	0.0122	**0.0014**	0.1731
ARX10,10,1	v_y	0.1440	0.0085	**0.0032**	0.0519
Base radial	v_x	0.5097	1.1919	6.1121	2.6046
Base radial	v_y	0.2345	0.3796	2.6912	1.1018
ANFIS	v_x	0.4816	1.1807	11.5394	4.4006
ANFIS	v_y	0.3765	**0.0048**	3.9787	1.5219
ARX+Basrad	v_x	0.0572	0.0172	0.0192	0.0493
ARX+Basrad	v_y	0.0248	0.0045	0.0204	0.0182
ARX+ANFIS	v_x	**0.0145**	**0.0087**	0.0735	**0.0141**
ARX+ANFIS	v_y	**0.0227**	0.0052	0.0254	**0.0161**

[3] A.J. Isaksson. Identification of arx-models subject to missing data. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 38(5):813–819, 1993.

[4] J.-S.R. Jang. Anfis: adaptive-network-based fuzzy inference system. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 23(3):665–685, 1993.

[5] Magnus Nørgård, O. E. Ravn, N. K. Poulsen, and L. K. Hansen. *Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic Systems: A Practitioner's Handbook*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1st edition, 2000.

[6] J. Park and I. W. Sandberg. Universal approximation using radial-basis-function networks. *Neural Comput.*, 3(2):246–257, June 1991.

[7] R. San Martin, A. Barrientos, P. Gutierrez, and J. Del Cerro. Unmanned aerial vehicle (UAV) modelling based on supervised neural networks. In *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*, pages 2497–2502, 2006.

[8] M. Santos, R. López, and J.M de la Cruz. A neuro-fuzzy approach to fast ferry vertical motion modelling. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, 19(3):313–321, April 2006.

[9] J.E. Sierra, M. Santos. Estudio comparativo de modelos de un vehículo aéreo obtenidos mediante técnicas analíticas y basadas en redes neuronales. In *Actas Multiconferencia CAEPIA'13 (XV Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial), ISBN: 978-84-695-8348-7*, pages 1270-1279, 2013.

Segmentación de defectos en piezas de fundido usando umbrales adaptativos y ensembles

José Francisco Diez-Pastor, **Alvar Arnaiz Gonzalez**, **César García-Osorio**, **Juan José Rodriguez Diez**

Universidad de Burgos, {jfdpastor,alvarag,cgosorio,jjrodriguez}@ubu.es

Resumen

La inspección de imágenes de rayos X es uno de los métodos más utilizados para la detección de poros y burbujas de aire en piezas de fundido. En este artículo de describe el proceso de localización y segmentación de este tipo de defectos en imágenes que presentan una gran variabilidad: múltiples piezas con formas complejas y varias perspectivas para cada una de ellas. Es un proceso dividido en dos etapas. La primera de ellas identifica regiones susceptibles de ser un defecto y la segunda clasifica éstas regiones en defecto/no defecto, mediante la extracción de características morfológicas y de textura. El proceso ha sido validado en un estudio experimental con imágenes reales, evaluando la semejanza entre el «ground truth» o máscara de defectos reales y la imagen de defectos predicha, obteniendo buenos resultados en cuanto a precisión y tiempo.

Palabras Clave: Test No-Destructivos, rayos X, segmentación de imágenes, PSO, umbrales adaptativos, rotation forest.

1 Introducción

Este artículo describe el proceso de detección y segmentación de defectos en piezas de fundido de magnesio. El magnesio es más ligero que el acero y el aluminio, pero puede presentar porosidad interna en los fundidos [18]. El control de calidad es imprescindible para que una empresa permanezca competitiva y la radiografía es uno de los TND (Test No-Destructivos) más ampliamente utilizados. En el proceso de inspección de imágenes de rayos X, habitualmente un operador humano examina la calidad, pero desafortunadamente este proceso es caro e inconsistente, los resultados pueden variar según la fatiga, la experiencia y la subjetividad de cada operador. Existe una necesidad de sistemas de inspección automáticos y objetivos.

A lo largo de los últimos años se han desarrollado una gran cantidad de métodos para la detección automática de defectos en imágenes de rayos X.

En el caso del análisis de imágenes de rayos X, al igual que en otros problemas de visión artificial, se pueden clasificar los métodos en:

a) Métodos dependientes del problema basados en procesamiento de imágenes, son soluciones a medida para un problema especifico, por lo que no funcionan correctamente cuando la variabilidad en las imágenes es muy grande, como es el caso. Utilizan técnicas muy variadas como por ejemplo: Sustracción de una imagen de referencia obtenida a partir de aplicar procesamientos a la imagen actual [10] u obtenida a partir de un conjunto de imágenes[18], Binarización automática [15, 22], operaciones morfológicas [1], *watershed* [24, 2].

b) Métodos basados en minería de datos utilizando la técnica de ventana deslizante [14, 25], consistente en recorrer la imagen usando una ventana rectangular, extrayendo para cada posición una serie de características dentro de dicha ventana. En la fase de entrenamiento se extraen todas las ventanas y se etiquetan como positivas si cubren un defecto y como negativas en caso contrario. En la etapa de predicción se combinan los resultados usando un umbral, dado que cada pixel esta cubierto por múltiples ventanas. Esta técnica de la ventana deslizante ha demostrado robustez frente a distintos tipos de imágenes y ha sido utilizada en [6] con resultados satisfactorios con las mismas imágenes que las utilizadas en este trabajo, pero es un proceso muy lento, dado que involucra la evaluación de miles de instancias para cada imagen.

En este artículo se presenta un método que es combina ambos enfoques: la simplicidad y velocidad de los métodos basados en procesamiento de imágenes y la robustez fren-

te a la variabilidad de los métodos basados en minería de datos.

2 Descripción del método

Visualmente un defecto en una imagen de radiografía se puede definir como una región que muestra una gran disimilaridad con su vecindad. El método propuesto está compuesto por dos etapas, en la primera de ellas se detectan todas aquellas regiones candidatas de ser un defecto mediante del uso de algoritmos de umbrales locales. Debido a la gran complejidad y variabilidad de las imágenes, en esta etapa se detectan gran cantidad de elementos como bordes o ruido que no son defectos. En la segunda se realiza la extracción de características y clasificación de estas regiones candidatas en defectos y no defectos.

2.1 Umbrales locales para la detección de regiones candidatas

Los métodos de binarización pueden ser agrupados en dos categorías: Binarización con umbrales globales y con umbrales locales. Los métodos de binarización global calculan un único umbral para toda la imagen, son métodos rápidos y obtienen buenos resultados en gran cantidad de problemas. Sin embargo existen casos en los que debido a la complejidad de la imagen, su degradación, la presencia de ruido etc los métodos globales no funcionan correctamente. Como solución a este problema se han propuesto los métodos locales, en los que se calcula un umbral diferente para cada pixel usando información de los pixels que forman una vecindad, en función de un determinado radio [21].

Existen varios algoritmos de binarización local, que además del radio pueden tener uno o dos parámetros. Los métodos probados en este trabajo han sido Bernsen [3], Mean [8], Niblack [16] y Sauvola [23], todos estos métodos tiene un tamaño de radio y uno o dos parámetros adicionales.

La binarización de una radiografía de una pieza de fundido da como resultado una imagen en blanco y negro, con las zonas susceptibles de ser defectos en blanco (Figura 1 b). Para separar regiones que hayan quedado pegadas a otras adyacentes y para eliminar ruido se ha utilizado la operación morfológica *Closing*, una dilatación seguida de una erosión [12].

La selección del método y sus parámetros se hizo con optimización por enjambre de partículas o PSO (Particle Swarm Optimization) [7], la función de ajuste a maximizar fue la precisión $\frac{TP}{TP+FP}$, donde TP son los pixels marcados como defecto en el «ground truth» y también blancos en la imagen binarizada y FP los blancos en la imagen binarizada pero no en el «ground truth».

El resultado de esta primera etapa es una imagen con una gran cantidad de regiones señaladas como potenciales defectos (Figura 1 c), a continuación se utilizará un proceso de extracción de características y de clasificación para seleccionar entre estas regiones aquellas que efectivamente son un defecto.

2.2 Clasificación de regiones candidatas en defecto/no-defecto

En esta etapa se va a crear una instancia para cada región candidata. En los sistemas de visión artificial es necesario obtener un conjunto de características con los que trabajar, dado que no es una buena práctica utilizar directamente los valores de los pixels, dado los valores de los pixels no describen texturas ni otras propiedades de las imágenes. En este trabajo se han utilizado las siguientes características:

- Básicas: Este grupo incluye la media y desviación de las intensidades de la región y las medias de la primera y segunda derivada de la región.
- Haralick: Características de textura. Son 14 características calculadas a partir de la matriz de co-occurrencia [11]. En este trabajo no se usa el coeficiente de correlación máximo debido a que su alto coste computacional no lo hace apropiado para una aplicación que funcione en tiempo real. La matrix de co-ocurrencia tiene como parámetros una orientación y una distancia. En este trabajo se han usado 4 orientaciones 0^o, 45^o, 90^o y 135^o y 5 distancias (de 1 a 5). Con lo cual para cada una de las 13 características usadas existen 5 vectores, de los que se ha obtenido la media y el rango. En total se tienen 130 características de Haralick (13 x 5 x 2 = 130).
- Medidas geométricas y de tamaño: área, perímetro, Major, Minor (longitud del eje mayor y menor de la elipse que circunscribe a la región), altura y anchura de la región, Feret (4 características), redondez, circularidad, solidez y razón de aspecto. [19].

Al igual que en [14], las características básicas y de Haralick, se extraen de la imagen original en escala de grises y de su *Saliency Map* [14], una transformación basada en el sistema biológico de atención visual. Se han obtenido un total de 282 características: ((4 básicas + 130 Haralick) $\times$ 2 canales) + 14 medidas geométricas y de tamaño = 282 características.

Al trabajar con grandes conjuntos de características puede ocurrir el problema de que algunas de ellas sean irrelevantes, redundates o bien el clasificador no puede funcionar apropiadamente o sea lento de entrenar. Para ello se suelen usar algoritmos de selección de características. En este caso se ha utilizado el algoritmo *SVM attribute evaluator* [9], que evalúa los atributos usando un SVM para elegir los 50 mejores atributos de entre todos.

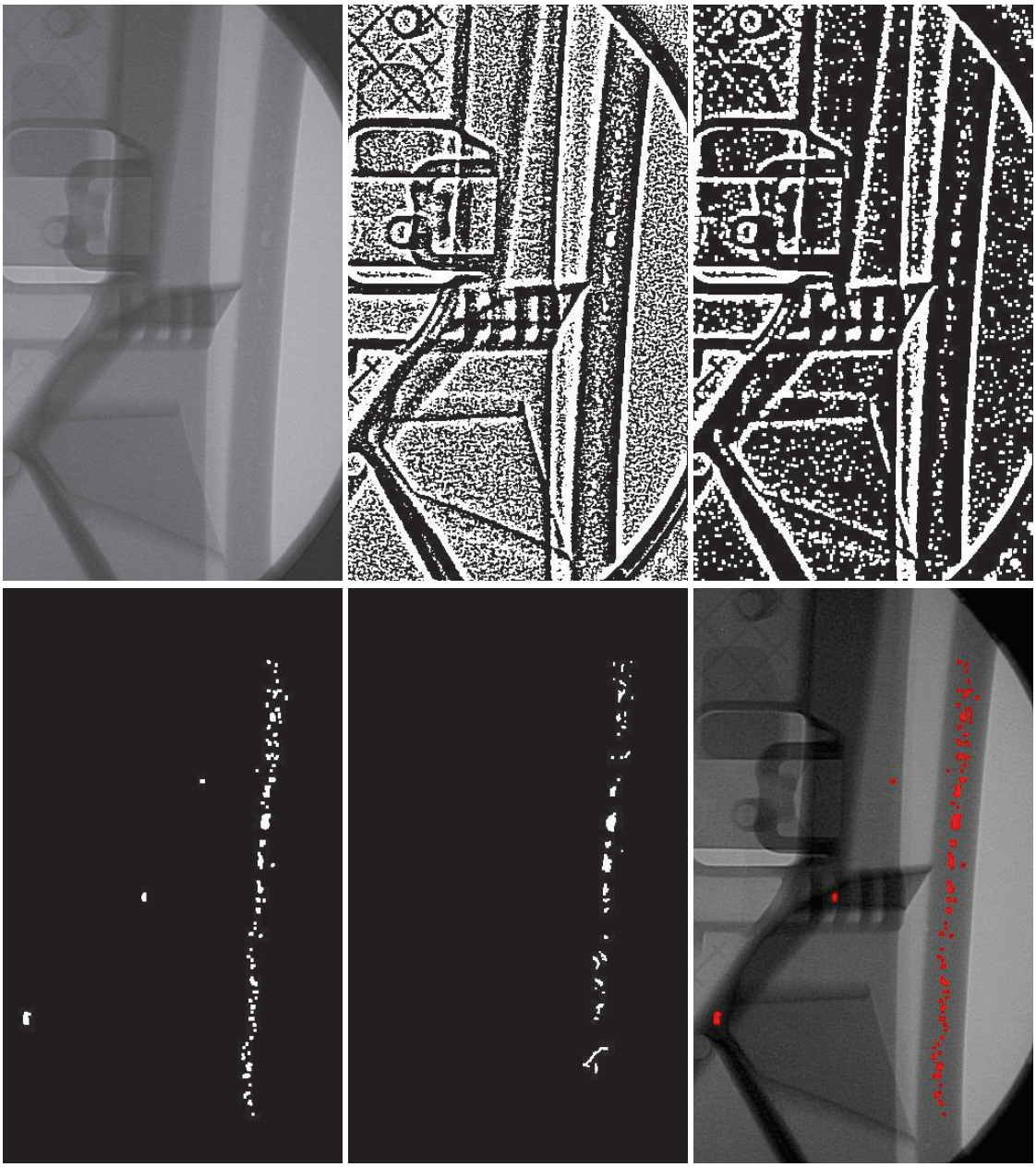


Figura 1: Proceso de detección de defectos. De arriba a abajo y de izquierda a derecha (a) Imagen original, (b) Binarización con umbrales adaptativos, (c) Closing de b, (d) predicción de defectos, (e) máscara o «ground truth» , (f) original con predicción de defectos superpuesta.

Hay otro aspecto que hay que tener en cuenta. Este es un problema desequilibrado, el problema de los conjuntos desequilibrados ocurre cuando existen muchas más instancias de una clase que de las demás [4].

Este es un problema desequilibrado desde 2 puntos de vista:

1. El número de regiones candidatas que realmente son defectos es mucho menor que el número de falsos positivos.

2. Considerando una imagen de radiografía como un conjunto de datos, el número de pixels pertenecientes a un defecto es mucho menor que el número de pixels correspondiente a zonas sin defecto.

Teniendo en cuenta el primer punto, se debe usar un clasificador especialmente preparado para lidiar con el problema del desequilibrio. Y teniendo en cuenta el segundo punto se tiene que usar una medida que tenga en cuenta el desequilibrio para evaluar el funcionamiento del sistema.

El clasificador y la metodología experimental utilizada se describen en la siguiente sección.

3 Metodología experimental y resultados

En esta sección se describe el proceso de validación experimental realizado. Se tiene un conjunto de diez imágenes en escala de grises con su correspondiente *ground truth* o máscara de defectos. Se va a evaluar la calidad final de la predicción de defectos en términos de la media geométrica, ya que esta medida es independiente de la distribución de ejemplos entre clases [13]. Considerando los pixels pertenecientes a un defecto como positivos y el resto como negativos, la media geométrica es $\sqrt{\text{Acierto positivos} \times \text{Acierto negativos}}$

Se ha realizado una validación cruzada a nivel de imagen: De las diez imágenes se toman 9 para extraer las regiones candidatas, construir el conjunto de datos, realizar la selección de atributos y entrenar el clasificador y se usa la imagen restante para evaluar la media geométrica comparando la predicción con la máscara. Este proceso se repite diez veces, utilizando para test una imagen distinta cada vez.

El clasificador utilizado ha sido Rotation Forest dado que en varios estudios experimentales con conjuntos desequilibrados ha resultado ser el mejor método [20]. El número de iteraciones fue 100. Como clasificador base se ha usado J48, la implementación de Weka de C4.5, se ha usado sin poda, sin colapsar pero con suavizado de Laplace, tal y como se recomienda para problemas desequilibrados [5].

Los resultados obtenidos aparecen en la Tabla 1.

Image nº	Media G	Image nº	Media G
Image 1	0.687	Image 6	0.255
Image 2	0.888	Image 7	0.721
Image 3	0.619	Image 8	0.641
Image 4	0.619	Image 9	0.438
Image 5	0.587	Image 10	0.510

Tabla 1: Media geométrica de la predicción para cada imagen

4 Conclusiones y líneas futuras

Este artículo presenta un método para la detección de defectos en imágenes de fundido. Se basa en la detección de zonas candidatas mediante un proceso de binarización adaptativa y la posterior clasificación de estas zonas en defecto/no-defecto.

Si bien el método presentado es rápido y obtiene unos buenos resultados para la mayoría de las imágenes, existen varias líneas futuras. En la primera etapa del método se ha utilizado un PSO para la elección del algoritmo de binarización y sus parámetros. Esta etapa se podría sofisticar, en lugar de optimizar únicamente los parámetros de una operación, se podrían optimizar varias operaciones y su orden. Con la intención de obtener en esta etapa una imagen con más TP y menos FP, facilitando el trabajo posterior del clasificador y mejorando la calidad total del sistema.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, proyecto TIN 2011-24046.

Referencias

[1] RS Anand, P. Kumar, et al. Flaw detection in radiographic weld images using morphological approach. *NDT & E International*, 39(1):29–33, 2006.

[2] RS Anand, P. Kumar, et al. Flaw detection in radiographic weldment images using morphological watershed segmentation technique. *NDT & E International*, 42(1):2–8, 2009.

[3] J. Bernsen. Dynamic thresholding of grey level images. In *Proceedings of the 8th International Conference on Pattern Recognition*, pages 1251–1255, 1986.

[4] N.V. Chawla, N. Japkowicz, and A. Kotcz. Editorial: special issue on learning from imbalanced data sets. *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 6(1):1–6, 2004.

[5] David A. Cieslak, T. Ryan Hoens, Nitesh V. Chawla, and W. Philip Kegelmeyer. Hellinger distance decision trees are robust and skew-insensitive. *Data Min. Knowl. Discov.*, 24(1):136–158, January 2012.

[6] J. F. Diez-Pastor, C. García-Osorio, V. Barbero-García, and A. Blanco-Álamo. Imbalanced learning ensembles for defect detection in x-ray images. In *Proceedings of the 26th International Conference on Industrial, Engineering & other Applications of Applied Intelligent Systems (IEA/AIE)*, page 654–663, 2013.

[7] Russell Eberhart and James Kennedy. A new optimizer using particle swarm theory. In *Micro Machine and Human Science, 1995. MHS'95., Proceedings of the Sixth International Symposium on*, pages 39–43. IEEE, 1995.

[8] R.C. Gonzalez and R.E. Woods. *Digital image processing*. Pearson/Prentice Hall, 2008.

[9] I. Guyon, J. Weston, S. Barnhill, and V. Vapnik. Gene selection for cancer classification using support vector machines. *Machine learning*, 46(1):389–422, 2002.

[10] RF Hanke, U. Hassler, and K. Heil. Fast automatic x-ray image processing by means of a new multistage filter for background modelling. In *Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*, volume 1, pages 392–396. IEEE, 1994.

[11] R.M. Haralick, K. Shanmugam, and I.H. Dinstein. Textural features for image classification. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, (6):610–621, 1973.

[12] Robert M Haralick, Stanley R Sternberg, and Xinhua Zhuang. Image analysis using mathematical morphology. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, (4):532–550, 1987.

[13] Miroslav Kubat, Stan Matwin, et al. Addressing the curse of imbalanced training sets: one-sided selection. In *ICML*, volume 97, pages 179–186, 1997.

[14] Domingo Mery. Automated detection of welding discontinuities without segmentation. *Materials Evaluation*, (June):657–663, 2011.

[15] H.F. Ng. Automatic thresholding for defect detection. *Pattern recognition letters*, 27(14):1644–1649, 2006.

[16] Wayne Niblack. *An introduction to digital image processing*. Strandberg Publishing Company, 1985.

[17] J.R. Quinlan. *C4.5: Programs for Machine Learning*. Morgan Kauffman, 1993.

[18] V. Rebuffel, S.C. Sood, and B. Blakeley. Defect detection method in digital radiography for porosity in magnesium casting. In *Materials Evaluation*, sep 2006. ECNDT 2006.

[19] Séverine Rivollier, Johan Debayle, and J Pinoli. Shape representation and analysis of 2d compact sets by shape diagrams. In *Image Processing Theory Tools and Applications (IPTA), 2010 2nd International Conference on*, pages 411–416. IEEE, 2010.

[20] Juan José Rodríguez, José-Francisco Díez-Pastor, and Cesar García-Osorio. Ensembles of decision trees for imbalanced data. In *MCS*, pages 76–85, 2011.

[21] Bulent Sankur and Mehmet Sezgin. Image thresholding techniques: A survey over categories. *Pattern Recognition*, 34(2):1573–1583, 2001.

[22] T. Saravanan, S. Bagavathiappan, J. Philip, T. Jayakumar, and B. Raj. Segmentation of defects from radiography images by the histogram concavity threshold method. *Insight-Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, 49(10):578–584, 2007.

[23] Jaakko Sauvola and Matti Pietikäinen. Adaptive document image binarization. *Pattern Recognition*, 33(2):225–236, 2000.

[24] M. Wang and L. CHAI. Application of an improved watershed algorithm in welding image segmentation. *Transactions China Welding Institution*, 28(7):13, 2007.

[25] Y. Wang, Y. Sun, P. Lv, and H. Wang. Detection of line weld defects based on multiple thresholds and support vector machine. *NDT & E International*, 41(7):517–524, 2008.

Selección de instancias en regresión mediante discretización

Álvar Arnaiz González, **José Francisco Díez Pastor**, **Juan José Rodríguez Diez**, **César Ignacio García Osorio**

Direcciones, {alvarag, jfdpastor, jjrodriguez, cgosorio}@ubu.es

Resumen

Uno de los problemas asociados a muchos conjuntos de datos, por ejemplo los de origen industrial, es la presencia de anomalías en las muestras que provocan que el conocimiento extraído de las bases de datos difiera de la realidad. Como solución a este problema, se plantea la selección de instancias en conjuntos de datos de regresión como paso previo a la fase de aprendizaje, la dificultad de esta tarea para este tipo de conjuntos hace que existan pocos algoritmos. En el presente artículo se plantea la discretización de la variable numérica a predecir para permitir aplicar algoritmos de selección de instancias «clásicos» de clasificación. La experimentación se realiza comparando un método específico pensado para regresión contra el planteamiento propuesto de discretizar la variable a predecir y aplicar la edición de Wilson. A pesar de que la idea utilizada es mucho más simple, el método presentado demuestra ser competitivo.

Palabras Clave: Selección de instancias, regresión, series temporales, información mutua.

1 Introducción

La tarea de regresión es análoga a la de clasificación con la excepción de que la clase a predecir es un valor continuo, numérico y no discreto. En el ejemplo más sencillo, se dispone de una variable de entrada y una de salida, este caso puede representarse en una gráfica en dos dimensiones, y la relación entre la entrada y la salida es lo que se desea obtener. En el caso general, la regresión trata de establecer la relación entre una variable dependiente a partir de un conjunto de variables independientes.

Aunque hay técnicas clásicas de regresión, la minería de datos ha estudiado y adaptado múltiples métodos que permiten obtener regresores para diversas problemáticas: *multivariate adaptive regression splines* [6], redes neuronales de base radial [24], regresión polinomial [5], vecino más cercano [10], perceptrón multicapa [11] y árboles de regresión [4], entre otros.

Un caso concreto de regresión es la predicción de series temporales. Una serie temporal es una secuencia de datos o valores ordenados cronológicamente, suele corresponder a mediciones realizadas en el mundo real, como puede ser la evolución de un índice bursátil, la energía eléctrica consumida, pluviometría, incidencia de una determinada enfermedad, etc.

Pese a que el análisis de series temporales lleva décadas estudiándose, el nuevo siglo ha provocado un revulsivo a la «minería» de series temporales, cientos de artículos han centrado el foco de atención en la necesidad de información de estas bases de datos. En [14] tratan de aportar luz sobre toda esa cantidad de nuevos algoritmos y técnicas que han surgido, evaluándolas sobre un banco de pruebas.

El artículo se encuentra organizado del siguiente modo: a continuación se expone la selección de instancias y los problemas que presenta aplicar esta técnica en regresión, en la sección 3 se presenta el método propuesto consistente en la discretización de la variable numérica, en la sección 4 se analizan los resultados de la experimentación llevada a cabo y, por último, en la sección 5 se extraen las conclusiones del trabajo.

2 Métodos de selección de instancias

Los algoritmos de aprendizaje basado en instancias sufren de varias desventajas [15]. Son muy susceptibles a los datos de entrenamiento y se ven afectados por patologías de los mismos, tales como el ruido o los valores atípicos (*outliers*). Además, los conjuntos de datos que se manejan en la actualidad hacen que pocos algoritmos sean capaces de tratar con bases de datos tan grandes.

Según [13] la selección de instancias se presenta para: eli-

minar el ruido en los conjuntos de datos (filtrado) y para reducir la complejidad de cálculo de los algoritmos de aprendizaje basado en instancias [1] (selección). La intención de estos últimos es la disminución del número de ejemplos en el conjunto de entrenamiento.

Existe un gran número de algoritmos de selección de instancias en la literatura y siguen apareciendo nuevos, una taxonomía actual sobre ellos puede verse en [7].

2.1 Clasificación

Los algoritmos de selección de instancias pretenden disminuir la complejidad mediante la reducción del número de ejemplos, extrayendo así los más significativos y desechando los que no aportan información al conjunto. La mayor parte de los existentes en la actualidad están pensados para la tarea de clasificación.

La necesidad de la selección de instancias se hace patente cuando se examinan los conjuntos de datos que se manejan en la vida real. Intentar entrenar un clasificador, por ejemplo, a partir de millones de instancias puede ser una tarea difícil e, incluso, inabordable. Por ello la selección de instancias se presenta como una buena alternativa para reducir la complejidad de la muestra posibilitando su posterior tratamiento.

Actualmente, los algoritmos de selección de instancias que se manejan tienen un gran inconveniente y es su complejidad. Si utilizamos la notación de Landau, la mayoría de los algoritmos clásicos de selección de instancias son de complejidad $O(n^2)$ por lo que la simple tarea de seleccionar las instancias puede no ser asumible.

2.1.1 Técnicas de filtrado

En función de si se aplica una reducción vertical u horizontal, estos métodos pueden clasificarse en dos categorías: selección de características y selección de prototipos o instancias. En la selección de instancias se agrupan toda una serie de procedimientos y algoritmos que tienen como finalidad la selección de un subconjunto representativo del conjunto de entrenamiento inicial. De forma generalizada, suele considerarse una clasificación de las técnicas de selección de prototipos en función del objetivo perseguido con su aplicación, dividiéndose las mismas en dos grandes grupos: edición o filtrado y condensado.

Los algoritmos de edición intentan eliminar del conjunto de entrenamiento aquellos prototipos erróneamente clasificados y, al mismo tiempo, limpiar los posibles solapamientos entre regiones de clases distintas, es decir, su objetivo principal es lograr agrupamientos compactos y homogéneos; en el caso del vecino más cercano, la regla de eliminación de instancias resultante se conoce como *Regla NN Editada* o edición de Wilson [22]. El fundamento teórico de esta regla es: si un prototipo resulta mal clasificado a partir de la regla k-NN, será eliminado del conjunto de entrenamiento. Suponiendo que sea X un conjunto de N instancias y M posibles clases, k el número de vecinos cercanos a considerar, $\delta_{kNN}(\mathbf{x}_i)$ la clase de los k vecinos más cercanos y θ_i la clase de la instancia $\mathbf{x}_i$, el algoritmo 1 presenta la edición de Wilson.

Algorithm 1: Algoritmo de edición de Wilson (ENN)

Data: Conjunto de entrenamiento
$X = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), ..., (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)\}$, k número de vecinos a considerar
Result: Conjunto editado $S \subseteq X$

```
1 S = X
2 foreach x ∈ S do
3     Encontrar x.N_{1...k}, los k vecinos más cercanos de x en X − {x}
4     if δ_kNN(x_i) ≠ θ_i then Borrar x de S
  end
5 return S
```

2.1.2 Técnicas de reducción

El principal problema relacionado con las distintas reglas NN se encuentra en la necesidad de disponer de una gran cantidad de instancias con el fin de obtener una correcta generalización. Sin embargo, este hecho determinará que el correspondiente proceso de búsqueda de los k vecinos más próximos sea computacionalmente demasiado costoso, lo cual podría significar la imposibilidad de utilizar estos esquemas de clasificación para ciertos problemas reales.

Con el objetivo de poder aplicar las distintas reglas basadas en criterios de vecindad, además de los diversos algoritmos eficientes que se describen en la literatura, una alternativa evidente para acelerar el cálculo del vecino más próximo consiste en disminuir el número de instancias en el conjunto de entrenamiento, pero sin originar un incremento del correspondiente error de clasificación.

De forma general, el objetivo de cualquier procedimiento de condensado consistirá en descartar del conjunto de entrenamiento todas aquellas instancias que no influyan explícitamente en la obtención de un resultado de clasificación igual o muy similar al obtenido utilizando la totalidad del conjunto. La principal diferencia entre los distintos esquemas de condensado se centra en el método empleado para estimar correctamente qué instancias son necesarias y cuáles no lo son.

La familia de técnicas de condensado se divide a su vez en esquemas de selección y de reemplazo, dependiendo de la forma en la cual obtienen las instancias del conjunto condensado. Los algoritmos que pertenecen al primer grupo seleccionan puntos del conjunto original, dando lugar a un conjunto reducido que es un subconjunto, generalmente propio de éste. En el caso de las técnicas con estrategia de

reemplazo, los prototipos miembros del conjunto condensado son «construidos» a partir de los puntos del conjunto original mediante el uso de una función de transformación, por lo tanto estos prototipos creados no coinciden necesariamente con los puntos originales.

2.2 Regresión

La aplicación de técnicas de selección de instancias a conjuntos de datos con una clase numérica se encuentra todavía poco investigada y existen escasos algoritmos pensados específicamente para ello. Como analizan en [17], los motivos por los que investigar en este área son dos, por un lado, que se ha trabajado muy poco en esta materia y por otro, que existen conjuntos de datos en aplicaciones industriales con gran número de instancias que no pueden ser correctamente analizados por su tamaño. En su artículo proponen dos algoritmos de selección de instancias con redes neuronales para problemas de regresión, modificando los algoritmos *ENN* y *CNN* [9]. En [20] se presenta un método de selección de instancias basado en un algoritmo genético centrado en la detección de anomalías (*outliers*) y como paso previo para selección de características.

Uno de los motivos por los que la selección de instancias para regresión no haya sido muy estudiada es su complejidad. Mientras que en clasificación las fronteras entre clases pueden ser bien definidas, en regresión, la clase puede tomar múltiples valores a lo largo del espacio de entrada. El problema se presenta al tratar de determinar qué instancias son claves para concretar la frontera de decisión, no se trata de una tarea trivial.

Una aproximación a la selección de características a través del concepto de información mutua fue presentada en [12]. Años después, formalizaron un método de selección de instancias que presenta buenos resultados en el filtrado orientado a la reducción del ruido [8] (ver algoritmo 2). Calculan la información mutua a partir de los vecinos más cercanos, definiendo el espacio $Z = \{X,Y\}$ y utilizando la máxima norma (aunque cualquier otra norma podría haberse utilizado) para cada par de puntos $z = (x,y)$ y $z' = (x',y')$.

$$||z - z'|| = \max\{||x - x'||, ||y - y'||\} \tag{1}$$

Se expresa con $\varepsilon(i)$ la distancia desde un punto z_i a sus k vecinos mas cercanos y por $\varepsilon_x(i)$ y por $\varepsilon_y(i)$ a las distancias entre los mismos puntos proyectados en los subespacios X e Y. Una vez definido lo anterior, $n_x(i)$ es el número de puntos x_j cuya distancia desde x_i es estrictamente inferior a $\varepsilon(i)$, lo mismo para y. Siendo ψ la función digamma, la fórmula para el cálculo de la información mutua se define como:

$$\hat{I}_1(X,Y) = \psi(k) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\psi(n_x(i)+1) + \psi(n_y(i)+1)] + \psi(N) \tag{2}$$

Algorithm 2: Algoritmo basado en la información mutua

Data: Conjunto de entrenamiento X
Result: Conjunto editado $S \subseteq X$

```
Calcular los k vecinos más cercanos de x_i en el espacio de entrada
for i = 1...n do
    Calcular el valor de información mutua I(X,Y)_i cuando se elimina x_i de X
end
Normalizar I(X,Y)_i en [0,1]
for i = 1...n do
    Cdiff = 0
    for j = 1...K do
        diff = I(X,Y)_i − I(X,Y)_{nn[x_i,j]}
        if diff > α then Cdiff = Cdiff + 1
    end
    if Cdiff < K then Seleccionar x_i
    else Descartar x_i
end
return S
```

3 Selección de instancias mediante discretización

La idea que planteamos en este artículo es la posibilidad de aplicar métodos de selección de instancias pensadas para tareas de clasificación en conjuntos de datos con clase numérica. Para ello es necesario discretizar la clase de tal modo que el conjunto de datos se convierta en un problema de clasificación. Una vez realizada la selección de instancias se deshace la discretización para obtener el valor numérico de la clase tal como se tenía al inicio del problema.

Este planteamiento se presenta en el meta-algoritmo 3 y permite utilizar cualquier método de selección de instancias ya existente para clasificación y con diversos propósitos:

- Edición: ENN, ENRBF [13], RNGE [18], etc.
- Condensado: CNN, MSS [3], POP [19], DROP [21], etc.

4 Experimentos

Con la intención de evaluar la capacidad del método propuesto, se ha comparado contra la técnica presentada por

Algorithm 3: Meta-modelo propuesto basado en discretizar la clase

Data: Conjunto de entrenamiento X
Result: Conjunto editado $S \subseteq X$
for $i = 1...n$ **do**
  Discretizar el valor de la clase numérica de X
end
Aplicar un algoritmo de selección de instancias de clasificación al conjunto X para obtener el subconjunto S
for $i = 1...n$ **do**
  Restaurar en S el valor de la clase numérica.
end
return S

Guillen et al. [8], en lo que sigue su método se denotará por MI. El método se presenta como un filtrado de anomalías y señalan dos mecanismos mediante los cuales introducirlas:

- Ruido: se añaden instancias ruidosas cuyos atributos han sido generados de manera totalmente aleatoria.
- Valores atípicos: se modifica la clase de instancias existentes en el conjunto de datos original, añadiendo o sustrayendo un valor aleatorio.

Los conjuntos de datos empleados en la experimentación han sido obtenidos de diversas fuentes:

- Series temporales: tres series sintéticas, Logistic (2 atributos y 749 instancias), Hénon (3 atributos y 748 instancias), Mackey-Glass (2 atributos y 1201 instancias) y una real Electric (2 atributos y 1860 instancias) las cuales fueron utilizadas en [8].
- UCI [2]: cuatro conjuntos de datos obtenidos de dicho repositorio, Crime communities (7 atributos y 320 instancias), Housing (13 atributos y 506 instancias), Forest fires (10 atributos y 518 instancias) y Concrete compression strength (7 atributos y 1030 instancias).
- Steel carbon, utilizado en [16], es un conjunto real de naturaleza industrial (12 atributos y 960 instancias).

Se han normalizado todos los atributos, incluida la clase, para evitar que determinados atributos con mucha varianza, en el cálculo del vecino más cercano, pudieran distorsionar los resultados.

El procedimiento seguido en la experimentación ha sido el siguiente: partiendo del conjunto de datos sin ruido se realiza validación cruzada con 10 grupos, sobre cada uno de los conjuntos de datos de entrenamiento se añade un porcentaje de ruido y el regresor es entrenado con el conjunto resultante del filtrado con el algoritmo de selección de instancias. En otras palabras, el entrenamiento se realiza sobre el conjunto «sucio» resultante de la selección de instancias y el test se realiza con el conjunto «limpio» original. Se ha hecho de este modo porque se quiere evitar que el ruido en la fase de test desvirtúe los resultados del clasificador, pero al mismo tiempo se desea evaluar de una forma objetiva lo eficiente que es el método en la detección y eliminación del ruido. Las configuraciones de ruido probadas han sido de 10, 20 y 30%.

Los algoritmos han sido implementados sobre *Weka* [23] y la experimentación se ha llevado a cabo con el experimentador de dicha herramienta. El regresor utilizado ha sido el perceptrón multicapa con los valores por defecto que aparecen en Weka para evitar que pudiera favorecer a un método frente al otro.

Los parámetros utilizados en el algoritmo MI han sido $k = 3$ como número de vecinos cercanos y $\alpha = 0,05$. Como este algoritmo está pensado para filtrar ruido, se ha utilizado la edición de Wilson con $k = 3$ en el meta-modelo propuesto.

Para la discretización se ha empleado el filtro que incorpora Weka, permitiéndole elegir el número de subconjuntos a realizar en la clase. Utiliza *leave-one-out cross-validation* para seleccionar la mejor forma de separar el valor de la clase.

4.1 Resultados

Para la evaluación de los modelos se ha utilizado el *root relative squared error* por lo que un resultado mas alto en el test supone un mayor error.

El resultado del filtrado de valores atípicos puede observarse en la tabla 1 y del filtrado de ruido en la tabla 2. En la primera columna aparece el error resultante producido por el perceptrón en el conjunto de datos original, en las sucesivas columnas aparecen los resultados de la experimentación planteada. En todas las configuraciones el método propuesto obtiene menor error en más de la mitad de conjuntos de datos.

En la tabla 3 aparecen los resultados del test estadístico de Wilcoxon realizado mediante el módulo de test no paramétricos de *Keel* [1]. En la detección de *outliers*, a medida que aumenta su presencia en la muestra, el método propuesto va ganando terreno al método basado en la información mutua. Por otro lado en la detección de instancias ruidosas, no se aprecia una tendencia significativa.

5 Conclusión y trabajo futuro

Este artículo presenta como una idea sencilla, como es la discretización de la variable numérica a predecir, para la posterior aplicación de algoritmos de selección de instan-

[1] Knowledge Extraction based on Evolutionary Learning, `http://www.keel.es/`

Tabla 1: Resultados de error de la experimentación con valores atípicos

Conjunto de datos	Original	10 %		20 %		30 %	
		ENN	MI	ENN	MI	ENN	MI
CrimeCommunities	68,93	71,52	67,63	74,86	74,75	68,79	68,79
Housing	50,50	50,46	59,14	52,28	61,05	52,35	61,48
Forest	117,59	126,66	120,70	124,43	124,68	123,44	130,98
Henon	67,51	68,22	80,60	78,00	94,38	76,61	77,19
Logistic	101,55	95,77	100,05	98,33	106,41	98,79	91,64
SteelCarbon	23,95	20,97	34,79	29,73	40,44	34,39	49,49
Concrete	120,96	99,76	110,53	99,82	113,28	104,35	113,71
MGData	112,20	120,77	113,96	107,86	104,85	106,31	117,93
Electric	102,60	104,29	105,95	100,55	109,90	99,42	108,97

Tabla 2: Resultados de error de la experimentación con ruido

Conjunto de datos	Original	10 %		20 %		30 %	
		ENN	MI	ENN	MI	ENN	MI
CrimeCommunities	68,93	76,24	87,75	83,57	74,14	83,04	81,51
Housing	50,50	60,25	60,86	70,04	71,98	95,38	97,40
Forest	117,59	125,41	137,73	144,30	178,32	178,70	182,01
Henon	67,51	74,42	79,26	74,18	78,51	78,92	82,08
Logistic	101,55	102,25	95,40	104,50	110,28	108,04	98,27
SteelCarbon	23,95	23,20	56,01	29,62	78,85	47,27	104,50
Concrete	120,96	103,47	114,16	114,47	103,01	118,44	114,15
MGData	112,20	109,72	111,21	107,29	103,91	104,61	113,47
Electric	102,60	101,08	104,47	102,07	113,72	117,33	120,27

Tabla 3: Resultados del test de Wilcoxon. El ✔ representa que el resultado de discretizar y filtrar por ENN es significativamente mejor que MI al $0,95$ de confianza.

Algoritmos	Tipo anomalía	% Ruido		
		10	20	30
ENN vs MI	Valor atípico	-	✔	✔
	Ruido	✔	-	-

cias pensados para clasificación es capaz de mejorar el filtrado de anomalías respecto a un método pensado específicamente para regresión. El reducido número de algoritmos existentes para el filtrado de conjuntos de datos con clase numérica hace de este meta-modelo una nueva vía de investigación en el área.

Se ha comprobado como la edición de Wilson es capaz de ofrecer buenos resultados como herramienta de filtrado. La utilización de otros algoritmos de selección de instancias aplicando este meta-modelo, plantea su empleo para tareas de reducción de bases de datos cuya variable sea numérica.

Dado que el modelo propuesto en este artículo basa su funcionamiento en la etapa de discretización, el análisis de cómo realizar este proceso queda como trabajo futuro así como la comparación del método frente a otros algoritmos de selección de instancias como los propuestos en [17].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, proyecto TIN 2011-24046.

Referencias

[1] DavidW. Aha, Dennis Kibler, and MarcK. Albert. Instance-based learning algorithms. *Machine Learning*, 6:37–66, 1991.

[2] K. Bache and M. Lichman. UCI machine learning repository, 2013.

[3] Ricardo Barandela, Francesc J. Ferri, and José Salvador Sánchez. Decision boundary preserving prototype selection for nearest neighbor classification. *IJPRAI*, 19(6):787–806, 2005.

[4] Leo Breiman, J. H. Friedman, R. A. Olshen, and C. J. Stone. *Classification and Regression Trees*. Wadsworth, 1984.

[5] Jianqing Fan, Irène Gijbels, Tien chung Hu, and Li shan Huang. A study of variable bandwidth selection for local polynomial regression. *Statistica Sinica*, 6:113–127, 1996.

[6] Jerome H. Friedman. Multivariate Adaptive Regression Splines. *The Annals of Statistics*, 19(1):1–67, 1991.

[7] S. Garcia, J. Derrac, J.R. Cano, and F. Herrera. Prototype selection for nearest neighbor classification: Taxonomy and empirical study. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 34(3):417–435, 2012.

[8] A. Guillen, L. J. Herrera, G. Rubio, H. Pomares, A. Lendasse, and I. Rojas. New method for instance or prototype selection using mutual information in time series prediction. *Neurocomput.*, 73(10-12):2030–2038, June 2010.

[9] P. Hart. The condensed nearest neighbor rule (corresp.). *Information Theory, IEEE Transactions on*, 14(3):515 – 516, may 1968.

[10] Trevor Hastie and Robert Tibshirani. Discriminant adaptive nearest neighbor classification and regression. In *NIPS*, pages 409–415, 1995.

[11] Simon Haykin. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 2nd edition, 1998.

[12] L. J. Herrera, H. Pomares, I. Rojas, M. Verleysen, and A. Guilén. Effective input variable selection for function approximation. In *Proceedings of the 16th international conference on Artificial Neural Networks - Volume Part I*, ICANN'06, pages 41–50, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer-Verlag.

[13] Norbert Jankowski and Marek Grochowski. Comparison of instances seletion algorithms i. algorithms survey. In Leszek Rutkowski, JörgH. Siekmann, Ryszard Tadeusiewicz, and LotfiA. Zadeh, editors, *Artificial Intelligence and Soft Computing - ICAISC 2004*, volume 3070 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 598–603. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[14] Eamonn Keogh and Shruti Kasetty. On the need for time series data mining benchmarks: a survey and empirical demonstration. In *Proceedings of the eighth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, KDD '02, pages 102–111, New York, NY, USA, 2002. ACM.

[15] I. Kononenko and M. Kukar. *Machine Learning and Data Mining: Introduction to Principles and Algorithms*. Horwood Pub., 2007.

[16] Mirosław Kordos, Szymon Białka, and Marcin Blachnik. Instance selection in logical rule extraction for regression problems. In Leszek Rutkowski, Marcin Korytkowski, Rafał Scherer, Ryszard Tadeusiewicz, LotfiA. Zadeh, and JacekM. Zurada, editors, *Artificial Intelligence and Soft Computing*, volume 7895 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 167–175. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[17] Mirosław Kordos and Marcin Blachnik. Instance selection with neural networks for regression problems. In *Proceedings of the 22nd international conference on Artificial Neural Networks and Machine Learning - Volume Part II*, ICANN'12, pages 263–270. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

[18] José Salvador Sánchez, Filiberto Pla, and Francesc J. Ferri. Prototype selection for the nearest neighbour rule through proximity graphs. *Pattern Recognition Letters*, 18(6):507–513, 1997.

[19] José Cristóbal Riquelme Santos, Jesús S. Aguilar-Ruiz, and Miguel Toro. Finding representative patterns with ordered projections. *Pattern Recognition*, 36(4):1009–1018, 2003.

[20] J. Tolvi. Genetic algorithms for outlier detection and variable selection in linear regression models. *Soft Comput.*, 8(8):527–533, August 2004.

[21] D. Randall Wilson and Tony R. Martinez. Reduction techniques for instance-basedlearning algorithms. *Mach. Learn.*, 38(3):257–286, March 2000.

[22] Dennis L. Wilson. Asymptotic properties of nearest neighbor rules using edited data. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, SMC-2(3):408–421, 1972.

[23] Ian H. Witten, Eibe Frank, and Mark A. Hall. *Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 3rd edition, 2011.

[24] Paul V. Yee and Simon Haykin. *Regularized radial basis functional networks: theory and applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 2001.

Mantenimiento predictivo de máquinas de pasteurización hiperbárica con técnicas de minería de datos

Pedro Santos González[1], **Jesús Maudes Raedo**[1], **Andrés Bustillo Iglesias**[1], **Julio Garrido Sánchez**[2], **Jaime Martínez García**[2]

[1]*Universidad de Burgos*, {psgonzalez,jmaudes,abustillo}@ubu.es
[2]*Hiperbaric*, {j.garrido,j.martinez}@hiperbaric.com

Resumen

En los últimos años la pasteurización hiperbárica se ha implantado en el sector de la alimentación como método de higenización y mejora de la calidad de los productos. Este trabajo aborda el mantenimiento predictivo de las máquinas encargadas de realizar este tipo de procesos. Dos tipos de fallos presentes en producción son analizados mediante técnicas de clasificación binarias. Se propone además una metodología que permite pasar los datos desde el formato inicial registrado en el ámbito de producción hasta una formulación abordable por técnicas de Minería de Datos. Específicamente, se introduce en la formación de las instancias un desfase temporal entre los atributos y la clase, a través de una *ventana temporal*. Los clasificadores consiguen un área bajo la curva ROC de 0,82 para uno de los tipos de fallo y de 0,76 para el otro, lo cual muestra la validez de la técnica usada para el tratamiento de los datos, si bien indica que es necesario mejorar la definición de los atributos, recogiendo información con más sensores y dando una descripción más detallada de los existentes.

Palabras Clave: Mantenimiento Predictivo, Pasteurización Hiperbárica, Minería de Datos, Ventana Temporal

1 Introducción: Problema industrial

La técnica conocida como *Pasteurización Hiperbárica* es un procedimiento empleado por las empresas del sector de la alimentación para la higienización de gran cantidad de productos, tales como los cárnicos, frutas y verduras, pescados, lácteos y zumos [8]. Con esta técnica no sólo se mejora la seguridad alimentaria, sino que también se consigue una mayor calidad, frente a otras técnicas más tradicionales como los métodos térmicos, en los que se produce una degradación en propiedades naturales de los alimentos, como el olor, color, sabor, textura y cualidades nutritivas [2]. La técnica consiste en someter a un nivel de presión hidrostática superior a 5000 bares a los alimentos durante varios minutos, con lo que se destruyen algunos patógenos como *Listeria*, *Escherichia coli* y *Salmonella*, y se reduce sustancialmente la presencia de flora microbiana [19].

Las máquinas que desarrollan estos procesos son muy complejas [13] y resultan una inversión crítica en las empresas que las incorporan. Por estas razones, su carga de trabajo es muy elevada y cualquier incidencia que detenga su actividad afecta directamente a la producción de la planta. Una de las incidencias más habituales que afectan a estos equipos son los fallos de funcionamiento que requieren una actividad de mantenimiento. El presente trabajo se engloba dentro del conocido como mantenimiento predictivo. Esta técnica de control industrial de maquinaria busca anticiparse a los fallos, siendo capaces, a partir de las condiciones de funcionamiento actuales de la máquina, de predecir futuros problemas y, de esta forma, realizar las acciones correctivas pertinentes sin necesidad de parar la producción. Para caracterizar las condiciones de trabajo de la máquina, se integran sobre la misma aquellos sensores que se consideren relevantes para una descripción completa de su estado físico y se desarrollen las técnicas de adquisición y análisis de señales necesarias para poder extraer toda la información posible de estas señales físicas.

A continuación se describe la estructura del artículo. En el apartado 2 se introduce la técnica de minería de datos usada para tratar el problema industrial, el uso de clasificadores binarios. En los apartados 3 y 4 se indica cuál es la información inicial proporcionada por la empresa y cómo a través de ésta se construyen los conjuntos de datos usados en la experimentación. En el apartado 5 se explican las familias de algoritmos de clasificación usados, detallando los resultados del análisis experimental en el apartado 6. Finalmente, en el apartado 7 de indican las conclusiones y futuras líneas de actuación.

2 Encuadre del problema industrial dentro de la minería de datos

Es posible abordar el problema de predicción planteado mediante herramientas de *minería de datos*. Específicamente, el estudio puede englobarse dentro de los *problemas de clasificación*, y, dentro de éstos, una *clasificación binaria*, donde una de las clases son las situaciones de funcionamiento normal de las máquinas y otra los fallos en la producción.

En este tipo de problemas, se tiene una unidad fundamental de información, denominada *instancia*, que en este caso de estudio se corresponde con uno o varios ciclos de producción de las máquinas analizadas. De forma analítica, se pretende encontrar un *clasificador* que permita clasificar a una *instancia* como de una determinada *clase* (y), según sean los *atributos* (x) que caracterizan a esa instancia, según la ecuación $y = f(x)$. En la ecuación anterior, f es la formulación del clasificador, que puede ser muy diversa, como se explica en el apartado 5.

Volviendo al problema industrial, las clases que puede tener una instancia son fallo o ciclo correcto, mientras que los atributos son variables construidas a partir de información recogida en los sensores de la máquina.

Este estudio introduce un tratamiento diferente del planteamiento general en los problemas de clasificación, al considerar *instancias* con un desfase temporal. Y es que, mientras que en el caso general se construye el modelo a partir de instancias compuestas por atributos y clases referidas a un mismo tiempo, en este caso se relacionan los atributos actuales con respecto a una clase referida a un tiempo futuro. Es decir, se usan medidas actuales para predecir comportamientos futuros de la máquina.

Se incorpora al estudio el uso de *ventanas temporales*. Estas herramientas sirven para agrupar elementos que tienen lugar en distintos instantes consecutivos. Se toma una ventana anterior al momento de referencia para la formación de atributos, y una ventana posterior para la determinación de la clase. De esta forma, para cada instancia, se agrupa la información de dos series de ciclos consecutivos. Por un lado, para la construcción de los atributos, se toman tantos ciclos como indique la ventana anterior, y por otro, para la asignación de la clase, los dados por la ventana posterior. Esta técnica es habitual en problemas de mantenimiento industrial [5, 7].

3 Información inicial proporcionada por la empresa

Se dispone de una base de datos SQL Server 2008 con datos de ciclos de producción de una máquina de presurización de la empresa de fabricación de maquinaria NC Hiperbaric S. A., ubicada en Burgos. En dicha base de datos, se recoge información referente a los ciclos de producción, indicando para cada uno de ellos si fue correcto o hubo algún fallo, si hubo alarmas y los valores registrados por seis sensores. Dichos sensores dan información de tres diferentes tipos: la variable principal del proceso (sensor de presión), el alineamiento de las vasijas (recogido por tres sensores, la presión de alineamiento y dos coordenadas de alineamiento para dos vasijas) e información térmica (temperatura interior y temperatura del aceite).

Para obtener la *clase* de ciclo, se parte de dos elementos: si el ciclo cumplió los requerimientos de producción o no y las alarmas registradas en caso de ser un ciclo fallido. Existen un total de 633 alarmas que se han dividido en tres categorías: problemas mecánicos (en el circuito de presurización o en la colocación de algunos elementos), eléctricos (de comunicación con el SCADA y el PLC) y fallos de otra naturaleza. Esta división hace que haya cinco tipos de ciclos: ciclos correctos, ciclos fallidos sin alarma, ciclos con fallo mecánico, ciclos con fallo eléctrico y ciclos con otro tipo de fallos.

En el presente estudio para el problema de predicción se toman solamente los fallos mecánicos y los considerados como «de otro tipo», descartando los fallos de tipo eléctrico, al no tener sensores de esa naturaleza. Se construyen dos problemas de clasificación binarios, uno para distinguir entre ciclos correctos y fallos mecánicos y otro entre ciclos correctos y fallos de otro tipo.

4 Tratamiento previo de la información y descripción del conjuntos de datos

Se han seguido las siguientes fases:

- Agrupamiento de la información por ciclos de producción
- Resumen de cada ciclo a través de unas magnitudes representativas
- Expresión de la información como un problema de clasificación, agrupando los ciclos de acuerdo a *ventanas* temporales

Como punto de partida, se obtiene a partir de la base de datos información agrupada por ciclos, teniendo para cada ciclo la información de los seis sensores, de si el ciclo fue correcto o erróneo, y en este último caso, de las alarmas asociadas al fallo, si se registraron.

Por cada sensor se tienen dos vectores por ciclo, uno con las fechas en las que se registraron los datos y otro con los valores numéricos. Para construir un problema de clasificación es necesario expresar esta información vectorial de forma agrupada a través de una serie de valores escalares. Dada la naturaleza del funcionamiento de la máquina, a través de ciclos de presurización, se considera que la presión

es una variable fundamental del problema, y necesita de un tratamiento diferenciado del de los otros cinco sensores. Sobre la Figura 1 se pueden ver las magnitudes consideradas para este sensor.

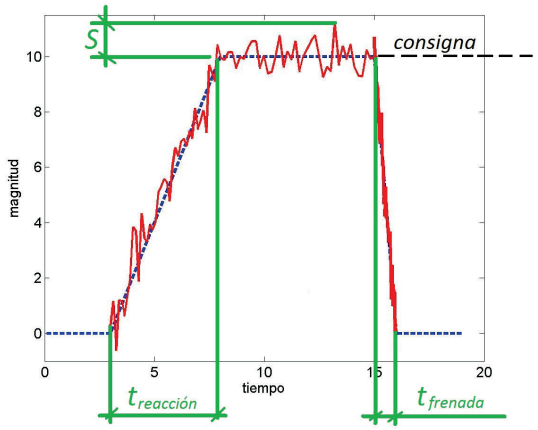


Figura 1: Ciclo de presión

Se define la respuesta de un ciclo en base a tres parámetros:

1. $t_{reacción}$ = tiempo de reacción. Intervalo entre el tiempo de subida y el inicial de establecimiento
2. $t_{frenada}$ = tiempo de frenada. Intervalo entre el tiempo final de establecimiento y el de bajada
3. S = sobrepaso. Es la cantidad máxima en que se sobrepasa la consigna, en porcentaje

$$S = 100 \times (máximo - referencia)/referencia \qquad (1)$$

Para los otros cinco sensores, se recogen máximos, mínimos y medias según lo detallado en la Tabla 1.

Tabla 1: Magnitudes resumen de los sensores

Sensor	**Magnitudes resumen**
Presión	Tiempo de subida tiempo de bajada y sobrepaso
Presión de alineamiento	mínimo y máximo
Alineamiento en la vasija 1	mínimo y máximo
Alineamiento en la vasija 2	mínimo y máximo
Temperatura interior	media y máximo
Temperatura del aceite	media y máximo

En total hay 13 magnitudes que describen un ciclo, con las que posteriormente se forman los atributos del problema de clasificación, a partir de un *ventaneo o agrupación temporal*, explicado al final del primer apartado. Se construyen los atributos a partir de variaciones en las magnitudes indicadas en la Tabla 1, denotando «incremento unitario» a la diferencia de valores entre un ciclo y el siguiente, e «incremento de ventana» a la suma de incrementos entre una serie de ciclos en una ventana. En total se tienen 26 atributos, dos por cada magnitud de la tabla: el incremento unitario y el de ventana.

Los tamaños de las ventanas están limitados al número de ciclos entre los que es habitual que la máquina esté parada, bien sea por un fallo en la producción o por una parada voluntaria, por lo que no es conveniente trabajar con un tamaño de ventana arbitraria. Haciendo un estudio del número de ciclos que transcurren entre dos paradas de la máquina, se ha limitado el tamaño de las ventanas anteriores a 45 ciclos y de las posteriores a 40, para no perder un porcentaje significativo de interrupciones en la producción. Los tamaños de ventana usados quedan recogidos en la Tabla 2.

Tabla 2: Tamaños de ventana usados

Tamaños de la ventana posterior	1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40
Tamaños de la ventana anterior	5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45

Analizando ajustes obtenidos por diversas técnicas de clasificación con los tamaños de ventana usados, se selecciona la combinación ventana anterior 30 – ventana posterior 5 para los fallos «mecánicos» y la 40–15 para los de «otro tipo». Los dos conjuntos finales tomados para la experimentación tienen las características mostradas en la Tabla 3.

Tabla 3: Conjuntos de datos

Conjunto	**Atributos**	**Instancias «fallo»**	**Instancias «OK»**
Mecánico	26	25	55
Otros	26	258	156

5 Técnicas de clasificación aplicadas

No se ha hecho ninguna hipótesis a priori sobre la naturaleza de los datos y la mayor idoneidad de unos métodos de minería de datos frente a otros. Por ello, se estima que lo conveniente es probar métodos de clasificación y regresión representativos de las seis «familias» (tipos de formulaciones) existentes:

- Bayesianos

- Árboles de decisión
- Basados en reglas
- Basados en instancias
- Basados en funciones
- Combinación de clasificadores (ensembles)

Los 11 algoritmos que se ha decido tomar para las experimentaciones iniciales son: red bayesiana y Bayesiano Ingenuo(como representantes de la familia bayesiana), C4.5 (árbol de decisión), PART (basado en reglas), clasificador de vecindad (basado en instancias), perceptrón multicapa, SVM con kernel lineal y gaussiano (basados en funciones) y bagging, adaboost y rotation forest (ensembles).

Estas familias han diso elegidas dado que tienen diferencias sustanciales en su funcionamiento y, de esta forma, se puede evaluar su idoneidad para este problema industrial:

- **Bayesianos** [12, 14]: Consideran que la clase y los atributos son variables aleatorias y aplican principios de teoría de la probabilidad para predecir la clase más probable dado unos nuevos atributos.
- **Árboles de decisión** [17]: Es un modelo basado en una sucesión de decisiones discretas, cada una de ellas en un único atributo, y jerarquizadas. Por ejemplo, se puede tener una primera división en un atributo numérico (Si el atributo 1 es mayor que 5, verificar unas condiciones en el resto de atributos, en otro caso, verificar otras condiciones) y una segunda en un atributo con tres posibles valores, A, B y C (si el atributo 1 es mayor que 5, si el 2 es A o B la clase de la instancia observada es del primer tipo, en cualquier otro caso es del segundo).
- **Reglas de decisión** [10]: Se analizan las condiciones que se tienen que cumplir en los atributos para tener un cierto valor de la clase. (Por ejemplo, la clase es del tipo 1 si el atributo 1 es menor que 5 y la clase 2 es A o B). El modelo final guarda semejanza con los árboles de decisión, pero en este caso no hay jerarquía, estando todas las decisiones al mismo nivel. Esto hace que el cálculo de las condiciones que fijan las decisiones sea diferente del de los árboles de decisión.
- **Modelos basados en instancias** [1]: Asignación de la clase de una instancia en función de los valores conocidos para los que tenían un valor más parecido en los atributos.
- **Modelos basados en funciones** [3, 4]: Se hace una suposición sobre la formulación matemática que debe tener la frontera de separación entre las diferentes clases (por ejemplo un hiperplano en el caso del SVM con Kernel lineal), y se hayan los parámetros de la función de separación supuesta (en el caso de tener dos atributos y SVM lineal, los dos parámetros de una recta, la pendiente y la ordenada en el origen) que mejor se ajuste a los datos.
- **Ensembles** [16]: Método de combinación de una serie de clasificadores (conocidos como *clasificadores base*). Es habitual tomar como sistema de combinación un voto mayoritario, es decir consultar a varios clasificadores qué clase predicen y escoger finalmente aquella que ha sido predicha en un mayor número de casos.

Tabla 4: Matriz de confusión

		Valor predicho	
		Predicción positiva	**Predicción negativa**
Valor real	**Instancias Positivas**	VP	FN
	Instancias Negativas	FP	VN

6 Análisis experimental

Para la selección del clasificador más adecuado para los dos conjuntos de datos, se ha utilizado una validación cruzada 10×10 [15] implementada por WEKA [11]. En esta metodología de evaluación, se dividen los datos inicialmente en k grupos (*folds*) (10 en nuestro caso), usando un grupo para evaluar el acierto del clasificador y el resto para su construcción. Estas divisiones en grupos se hacen de modo que en cada una de ellas la proporción de instancias de cada clase sea lo más parecida posible a la distribución inicial.

Nos basamos en el concepto de *matriz de confusión* a la hora de medir el rendimiento proporcionado por un clasificador. Para problemas *binarios* como el de estudio, se tiene por un lado la clase *positiva* (los fallos de la máquina en este caso), y, por otro, la clase *negativa* (las situaciones de funcionamiento correcto). La predicción que hace un clasificador entonces puede ser de cuatro tipos, como se muestra en el esquema de la Tabla 4:

- VP «verdaderos positivos»: estimación positiva correcta (acertar al pronosticar un fallo)
- FP «falsos positivos»: estimación positiva incorrecta (fallar al pronosticar un fallo)
- VN «verdaderos negativos»: estimación negativa correcta (acertar al pronosticar un funcionamiento correcto)
- FN «falsos negativos»: estimación negativa incorrecta (fallar al pronosticar funcionamiento correcto)

La curva ROC determina la capacidad de un clasificador de distinguir los casos «positivos» (los fallos de la máquina para el problema estudiado). Se define a partir del Ratio de Verdaderos Positivos (VPR) y el Ratio de Falsos Positivos (VFR), obtenidos con los conceptos definidos en la Tabla 4, según las expresiones: $VPR = VP/(VP+FN)$ y $FPR = FP/(VP+FN)$. La métrica usada en la experimentación para comparar los clasificadores es el área bajo la curva ROC (AUC). Por limitaciones de espacio, no se entra en más detalle sobre la formación de las curvas ROC y la adecuación de este sistema de medida en este contexto, lo cual puede consultarse en [9].

Las tablas 5 y 6 recogen el AUC obtenido en la validación, ordenadas en orden decreciente. Se resalta en negrita el clasificador con mayor AUC, indicando con un asterisco los casos peores que éstos de forma estadísticamente significativa, de acuerdo a un test *t* remuestreado corregido [18].

Tabla 5: AUC para los fallos mecánicos

Adaboost	**0,82**
Bagging	0,82
RotationForest	0,81
PART	0,77
Árbol de decisión	0,76
Red Bayesiana	0,72
Red neuronal	0,67
Bayesiano ingenuo	0,59 *
SVM Lineal	0,53 *
Clasificador de vecindad	0,5 *
SVM Gaussiano	0,5 *

Tabla 6: AUC para los fallos de otra naturaleza

RotationForest	**0,76**
Bagging	0,74
Adaboost	0,73
Red Bayesiana	0,66 *
Bayesiano ingenuo	0,65 *
Red neuronal	0,65 *
J48	0,64 *
PART	0,63 *
Clasificador de vecindad	0,56 *
SVM Lineal	0,51 *
SVM Gaussiano	0,5 *

Para ambos tipos de fallos los mejores resultados se obtienen con ensembles de árboles de decisión. Específicamente, con Rotation Forest para los fallos de otra naturaleza y tanto con Adaboost como con Bagging para los mecánicos, si bien Rotation Forest obtiene un resultado muy similar a ambos métodos. Por ello, consideramos que un ensemble de tipo Rotation Forest con árboles de decisión como clasificadores base es el método más adecuado para modelar los datos de la experimentación. No obstante, ha habido otro tipo de técnicas, como PART, redes bayesianas y redes neuronales, para las que los AUC obtenidos no son peores de forma estadísticamente significativa, por lo que también se consideran interesantes de cara a un futuro análisis, cuando se disponga de más cantidad de datos.

7 Conclusiones y futuras líneas de actuación

Se ha elaborado un sistema de predicción de dos tipos de fallos en máquinas de pasteurización hiperbárica, mecánicos, con un área bajo la curva ROC de 0,82 y fallos de diversa naturaleza, con un área bajo la curva ROC de 0,76. Estos resultados muestran que es posible relacionar los fallos en la producción con datos recogidos por la sensórica de las máquinas, si bien la precisión no es aún suficienemente alta para que el sistema puede tener una aplicación industrial clara. Por ello, es neceario encontrar una formulación más precisa de las variables del problema, añadiendo más sensores y mejorando las magnitudes que se definen a partir de los ya existentes.

Como futuras líneas de actuación, se pretende mejorar la definición de variables a partir de los sensores existentes, especialmente de las variables referidas al alineamiento de las vasijas. También se considera importante dar una descripción más detallada de la etapa de mantemiento de la presión, para lo cual quizá sería necesario caracterizar cuáles son los patrones normales de comportamiento de la máquina.

Se considera también que la incorporación de nuevos sensores mejoraría la precisión de las predicción, especialmente los referidos a un análisis de vibraciones. Tras la incorporación de sensores y la redifición de variables, sería conveniente seleccionar las características que aporten mayor información en la descripción del proceso.

Un aspecto interesante a añadir al uso de ventanas temporales en la definición del problema, sería el de un *hueco* o *salto temporal* entre los atributos y la clase. Los atributos no predicirían si hay un fallo a continuación en el proceso de producción, sino si hay un fallo tras una serie de ciclos. Con este salto de ciclos, el clasificador sería más útil ya que alertaría de la proximididad del fallo dejando los ciclos del *hueco* de margen para realizar operaciones de mantenimiento. Esta dia puede visualizarse mejor en el esquema de la Figura 2 (en el ejemplo la *ventana anterior* está formada por dos ciclos, la *ventana posterior* por un solo ciclo, y el *hueco* también por un solo ciclo) .

Finalmente se ha tenido en cuenta la posibilidad de reenforcar el problema de clasificación a regresión. De esta forma, las variación entre las clases de las instancias sería más suave, no teniendo solamente situaciones correcta y con fallo, sino situaciones para las que faltan un determinado número de ciclos para que se produzca un fallo.

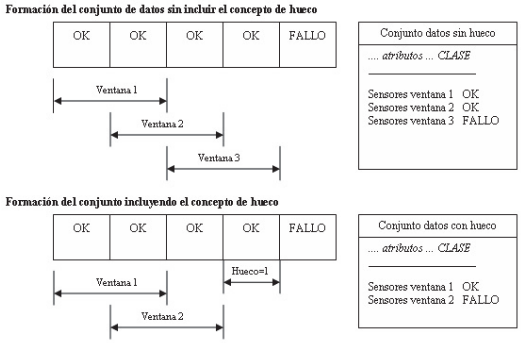


Figura 2: Concepto de Hueco

Agradecimientos

Este trabajo ha sido cofinanciado por el Ministerio de Economía y Competitividad, proyectos TIN 2011-24046 y IPT-2011-1265-020000.

Referencias

[1] D. Aha, D. Kibler: *Instance-based learning algorithms*. Machine Learning. 6: 37–66, 1991.

[2] J. M. Alegre, P. Bravo, M. Preciado: Preciado M. *Diseño mediante autozunchado de una vasija de altas presiones para la industria alimentaria*. Anales de Mecánica de la Fractura, vol. 22, pp. 409–414, 2005.

[3] R. Beale, T. Jackson: *Neural computing: an introduction*. Bristol, UK, UK: IOP Publishing Ltd, 1990. [Online]. Available: http: //portal.acm.org/citation.cfm?id=121342.

[4] B. Boser, I. Guyon, V. Vapnik: *A training algorithm for optimal margin*

[5] A. Bustillo, J. J. Rodriguez, *Online breakage detection of multitooth tools using classifier ensembles for imbalanced data*, International Journal of Systems Science, pp. 1–13, 2011. DOI:10.1080/00207721.2013.775378

[6] A. Bustillo, E. Ukar, J. J. Rodriguez, A. Lamikiz, *Modelling of process parameters in laser polishing of steel components using ensembles of regression trees*, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, 24(8), pp. 735–747, 2011.

[7] A. Bustillo, M. Correa, A. Reñones, *A virtual sensor for online fault detection of multitooth-tools*, Sensors, 11, pp. 2773–2795, 2013. DOI: 10.3390/s110302773

[8] F. Devlieghere , L. Vermeiren, J. Debevere: *New preservation technologies: Possibilities and limitations*. Int. Dairy Journal 14, pp. 273–285, 2004.

[9] T. Fawcett: *An introduction to ROC analysis*. Pattern recognition letters, 27(8), pp. 861–874. 2006.

[10] E. Frank, I. H. Witten: *Generating Accurate Rule Sets Without Global Optimization*. Fifteenth International Conference on Machine Learning, 144–151, 1998.

[11] M. Hall, E. Frank, G. Holmes, B. Pfahringer, P. Reutemann, I. Witten: *The weka data mining software: an update*. ACM SIGKDD Explorations Newsletter, vol. 11, no. 1, pp. 10–18, 2009.

[12] D. Heckerman, D. Geiger, D. M. Chickering: *Learning Bayesian networks: The combination of knowledge and statistical data*. Machine learning, 20(3), 197–243, 1995.

[13] A. S. Hernando. Machine for high pressure processing of products. U.S. Patent Application 10/398,604, 24 Oct. 2003.

[14] G. H. John, P. Langley. *Estimating continuous distributions in Bayesian classifiers*. In Proceedings of the Eleventh conference on Uncertainty in artificial intelligence, pp. 338–345, 1995. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

[15] R. Kohavi et al.: *A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection*. International Joint Conference, IJCAI, 14, pp. 1137–1145. 1995.

[16] L. Kuncheva: *Combining pattern classifiers: methods and algorithms*. Wiley-Interscience. Proceedings of the fifth annual workshop on Computational learning theory. ACM, 1992, pp. 144–152, 2004.[Online]. Available: http://books.google.es/books?id=9TJ6igZtqWAC

[17] R. Quinlan: *C4.5: Programs for Machine Learning*. Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA, 1993.

[18] C. Nadeau and Y. Bengio: *Inference for the generalization error*. Machine Learning, vol. 52, no. 3, pp. 239–281, 2003.

[19] M. Patterson: *High pressure treatments of foods*. Encyclopedia of food microbiology, pp. 1059–1065, San Diego: Academic Press, 2005.

[20] D. Teixidor, M. Grzenda, A. Bustillo, J. Ciurana, *Modeling pulsed laser micromachining of micro geometries using machine-learning Techniques*, Journal of Intelligent Manufacturing, pp. 1–14, 2013. DOI 10.1007/s10845-013-0835-x.

Effects of Molecular Representation in Predicting the Biological Activity using SVM and PLS Approaches

Gonzalo Cerruela García, Irene Luque Ruiz, Nicolás García Pedrajas, Miguel Ángel Gomez-Nieto

University of Córdoba. Department of Computing and Numerical Analysis. Campus de Rabanales. Albert Einstein Building. E-14071 Córdoba, Spain, {gcerruela, ma1lurui, npedrajas, mangel}@uco.es

Abstract

In this work we study and analyze the behavior of different representational spaces for molecular activity prediction. Representational spaces based on fingerprint similarity, structural similarity using maximum common subgraphs (MCS) and all maximum common subgraphs (AMCS) approaches are compared against representational spaces based on structural fragments and non-isomorphic fragments (NIF), built using different molecular descriptors. Support vector machine is used to study the influence of molecular representation in the dataset classification and PLS regression is proposed to construct a QSAR model for the molecular activity prediction.

Keywords: Molecular activity prediction, QSAR models, SVM, PLS regression.

1 INTRODUCCTION

In the pharmaceutical industry one of the most important steps for the molecular activity prediction, and in the construction of quantitative structure-property relationships (QSPR) and quantitative structure-activity relationship (QSAR) models is the data set representation. An adequate modeling of the structural and physicochemical features of chemical compounds is crucial for the prediction of biological molecular activity and to understand the molecular mechanism of a particular biological activity from the derived statistical models [1]. Different spaces have been used to represent the molecule data set, based on molecular descriptors [2] or considering structural information of the molecules, such as methods based on structural and fingerprint similarity [3], as well as structural fragments [4] extracted during the fragmentation process of the entire data set.

In the last decade, several graph representations have been introduced to depict theoretical biological data. Thus, complex networks based on graph theory are used to represent the structure and dynamics of different large biological systems such as protein--protein interaction networks. Complex networks are made up of nodes and edges usually representing the similarity and dissimilarity relationships between the nodes and placed in the space with or without geometrical constraints. For instance, in these networks, aminoacids could play the role of nodes and edges express spatial contact between two aminoacids or nucleotides could play the role of nodes and the edges are sequence neighbors or represent hydrogen bond thus denoting the secondary structure of RNAs. Such complex networks are used to compute various descriptors to describe the structure of drugs, proteins, or large bio-systems [5].

Other approaches are based on the similarity between the molecule dataset. Similarity measurements [6] are also obtained from graph representation of the molecules through an algorithm to calculate the “resemblance” between two given molecular graphs. These algorithms, named matching or isomorphism algorithms, extract the commonality between the molecular graphs representing the molecules. Subsequently, counts of these commonalities are used for the calculation of various similarity measures.

The calculation of the common subgraphs between two given molecular graphs has a high computational cost, and different solutions have been proposed to extract different measures of subgraph isomorphism, and the maximum common subgraph (MCS) is the most used. The MCS between two given molecular graphs is the maximum (largest number of nodes and edges) connected subgraph common to the two matched graphs. Another usual measure of isomorphism is the maximum common edges subgraph (MCES) or the maximum overlapping set (MOS) which is the maximum (not necessarily connected) subgraphs or cliques (more than one) common to the two matched graphs [7].

The array representations of molecule structure are named fingerprints [8] and they have a more efficient algorithm behavior [9]. Fingerprints are binary arrays that are generally built from the information stored in the molecular graph. Different fingerprint models have been proposed based on the extraction of structural elements of the molecular graphs and the application of different hashing algorithms to determine the bits set to 1 in the fingerprint. Although in the process of the building of the fingerprint the entire information stored in the molecular graph cannot be translated, fingerprint representations have shown huge efficiency in diverse fields of computational chemistry.

In this work we have used a SVM algorithm with feature selection method (RFE) [10] for the analysis of the behavior of the different representational spaces in the prediction of molecular biologic activity. Feature selection methods have been introduced for improving the classification performance of statistical learning methods and for selecting meaningful features when discriminating two data sets. The theory and applications of support vector machine in chemistry have been extensively reviewed [11]. SVM is used as the statistical learning method to study the influence of molecular representations in the activity classification, and PLS regression is used to construct a QSAR model for the molecular activity prediction.

The paper is organized as follows: in section 2, we describe the theoretical basis of the isomorphism algorithms, and similarity concepts, we present the techniques used for the generation of the different representational spaces based on structural information of the molecule dataset. In section 3 we analyze the experimental results and the behavior of different representational spaces in molecular classification and to construct an activity prediction model using PLS regression. Finally, the main conclusions are summarized.

2 THEORETICAL FOUNDATIONS

2.1. DESCRIPTOR-BASE REPRESENTATION

Molecule data sets can be represented as an array of variables or descriptors [2] representing some structural property of the chemical compound in order to extract a structural similarity measurement. Thousand of molecular descriptors have been proposed in the literature, most of them related to some structural or topological property corresponding to the molecular graph representing the molecule. For the calculation of descriptor-based similarity, molecules are represented as equation (1) and the two arrays are compared using mathematical or statistical procedures. However different hints are necessary to be considered:

$$M_A = \left(d_1^A, d_2^A, d_3^A, \cdots, d_n^A\right)$$
$$M_B = \left(d_1^B, d_2^B, d_3^B, \cdots, d_n^B\right) \quad (1)$$

The number and order of the descriptors has to be the same in the arrays M_A and M_B. The magnitude of the descriptors has to be normalized.

It is mandatory to eliminate the relationships between descriptors in order to diminish the number of variables, being necessary to perform a previous statistical analysis.

2.2. FINGERPRINT REPRESENTATION

In this case the compounds are represented as vectors of 0 and 1, indicating the presence or absence in the molecule of a particular substructure (see Figure 1).

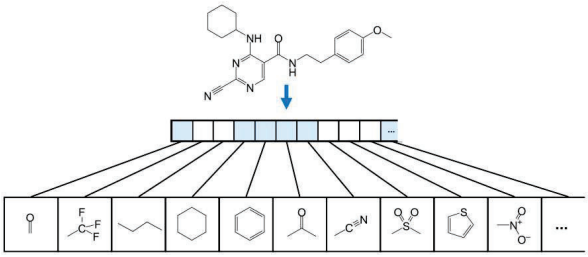


Figure 1. Molecular Fingerprint extraction

In fingerprint generation process the following parameters have been adjusted [12]:

- ✓ *Fingerprint length*, establishing the length of the binary array representing the fingerprint. This parameter takes values between 64 and 1024 bits, a value of 512 being the lowest value recommended for a better characterization of the molecular structure.
- ✓ *Bits to be set for patterns*, after detecting a pattern, some bits of the bit string are set to 1. The number of bits used to code patterns is constant.
- ✓ *Path length*, determining the high value of the size of molecular fragments extracted from the molecules in the generation process of the fingerprint.

By increasing the Fingerprint Length, the capacity for storing information about the molecules is greater. In addition, it decreases fingerprint darkness (a dark fingerprint has a high number of 1), and therefore also the probability of bit collisions also, which is beneficial. An excessive increase in Fingerprint Length may raise the necessary disk space, the size of the structure cache and the processing time.

By increasing the number of bits to be set for patterns, the coded information derived from a pattern increases. The fingerprint darkness rises, and as long as the bit collision number is not too high, the stored information increases, which is beneficial for the efficiency of the screening.

2.3. MOLECULAR FRAGMENTATION

This approach have been proposed in order to consider the fragments information of the molecules' dataset in the construction of prediction models. In this process, fragments made of different paths of molecule structures are extracted by applying different heuristics (e.g. minimum and maximum path size, considering hybridization or not, maintaining the cycle structure or not, etc.). In this way, the dataset can be represented again by a $Z=M \times F$ matrix, with M the dataset cardinality, and

F the number of the different generated fragments. Now, again using any molecular descriptor we can fill this matrix, storing in each matrix element *(i, j)* the descriptor value of the fragment *j*, for the molecule *i*.

2.4. MOLECULAR GRAPH ISOMORPHISM

Graph isomorphism has been widely used in computational chemistry. These models consider that structurally similar molecules should show similar properties and biological activities.

Thus, the molecular structure is represented through a graph called molecular graph. A molecular graph G is a connected and non-directed graph, where the nodes represent the atoms and the edges represent the bonds in the molecule. Determining whether two graphs G_A and G_B are the same (graph isomorphism) is a difficult computational task. Also difficult is the subgraph isomorphism problem, in which one determines which subgraph of G_A is a subgraph of G_B or vice versa.

The detection of subgraph isomorphism, and especially the detection of the maximum common substructure (MCS), has been applied to a great variety of fields, such as similarity-based problems, design and synthesis of products, clustering, QSPR/QSAR, etc.

A graph G is called a maximum common subgraph (MCS) of two graphs G_A and G_B , if there is no other common subgraph of G_A and G_B that has more nodes than G (node induced subgraph). According to this definition, MCS is not necessarily unique for two given graphs and it is always a connected graph representing the maximum clique between G_A and G_B . Another definition of subgraph isomorphism considers maximum overlapping set, MOS) which contains the maximum number of common edges between two given molecular graphs G_A and G_B.

For the last years, several algorithms have been proposed for the calculation of the MCS trying to reduce its computational cost. However, while all approaches calculate the MCS and MCES, our proposal allows to calculate the AMCS (All Maximum Common Subgraph) [7] . Because of MCS can be not unique for two given graphs, this algorithm has several steps: obtaining the MCS from the higher to the lower size, generating a set of connected MCS subgraphs related each order in a isomorphic AMCS and a non-connected common subgraph. Thus, the AMCS is a set of maximum and common subgraphs to G_A and G_B where: a) all the graphs of the AMCS set are connected graphs, b) the elements of the AMCS set are MCS^k subset that maximize the next MCS^{k+1}, more details about AMCS can be found in [7].

2.5. CHEMICAL SIMILARITY

Similarity is a fuzzy concept that attempts to measure the "resemblance" between two real or abstract objects. For more than fifty years researchers have applied this concept to different problems in chemistry. Database clustering and screening and the development of predictive models of physicochemical properties and biological activities of substances are clear examples of the application of similarity measures.

The different approaches to define chemistry similarity are based on: a) the review of structural commonalities or differences directly from the structural information of the chemical compounds, usually based on the topological representation of the structure, and b) the parameterization of the chemical structure by means of several specific property values and with the assistance of some mathematical analysis (statistical, geometrical, etc.) or artificial intelligence methods (pattern recogntion, neural network, etc.) in order to establish a numerical model. For the former, molecules are represented by molecular graphs that define the isomorphism relationships; then, a similarity is calculated based on the number of common nodes and edges of the common subgraph (MCS, MOS) regarding the total number of these elements in the matched graphs. Several similarity indices have been proposed in the chemistry literature, such as the Tanimoto, Ochiai, Sorensen, and Kulczynski indices [6]. For the second, molecules are represented by an array of properties or variables, called "descriptors", so that a molecule can be considered a point in a multidimensional "descriptor space", then two molecules, represented by their corresponding descriptors arrays are compared through a distance measure (e.g. Euclidean, Mahalanobis) between both descriptors spaces. Variables or descriptors can be extracted from the whole molecule or frequently using the fingerprint representation of the molecules.

2.6. HIERARCHICAL REPRESENTATION

This representation was based on the MCS calculation of all the pair wise molecules of the dataset in order to generate a hierarchical representation and to classify the dataset according with the different kernel substructures. The MCS built, shown in Figure 2, has the following characteristics: a) the root node contains the MCS common to all the dataset, b) each node also contains a MCS substructure common to all the child nodes, and c) finally, the leave nodes contain the molecules of the dataset.

The information contained in the nodes and edges of the MCST is used for building a weighted maximum common subgraph tree (WMCST), based on molecular descriptors [13]. The calculation of the molecular descriptor of nodes and edges allows the building of a weighted representation of the MCST. As the edges of the MCST store the NIF fragment from the parent and child nodes, the descriptor value of the NIF fragments can be used as a distance measure, that is, the cost of getting to the child node from the parent node. Thus, the WMCST can be represented by a $Y=N \times I$ matrix, being N the number of

WMCST nodes and *I* the number of different NIF substructures.

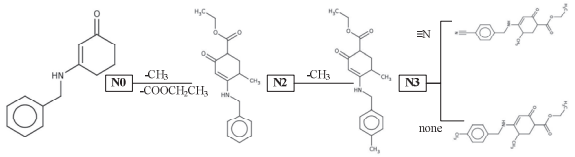


Figure2. Hierarchical representation.

The diagonal elements of this matrix store the weight of the nodes, and the rest of the elements store the weight of NIF fragment for each edge of the tree. Note that, while in the Z matrix all *i* elements for a same *j* element store the same value, in the Y matrix, the descriptor value for a NIF(j) can be different for two different WMCST nodes (i).

3 RESULTS AND DISCUSSION

In this work we have selected a dataset corresponding with 1,4-benzoquinone derivatives [14]. This family of substances has been studied due to its antifungal activity in humans. In recent years, the study of antifungal agents has attracted considerable interest due to an increase of mycotic infections and frequent accounts of tolerance to the known treatment. Recent studies have found that the presence of 1,4-benzoquinone derivatives in the structure of antifungal agent UHDBT 1 (5-n-undecyl-6-hydroxy-4,7-dioxobenzothiazole), one of the most effective antifungal agents known, improves considerably its activity. The experimental results for the representations, only based on the calculation of descriptors were not good, therefore have not been included in the tables of this section.

3.1. CLASSIFICATION USING SUPPORT VECTOR MACHINE ALGORITHM

In this process two SVM kernels have been tested: linear and Gaussian. Because SVM is very sensitive to the learning parameters; we have performed a 10-fold cross-validation for obtaining their values. Each time an SVM was applied, we tried a linear kernel with C in {0.1, 1, 10}, and a Gaussian kernel with C in {0.1, 1, 10} and gamma in {0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10}, testing all the 21 possible combinations. The best set of parameters obtained by the cross-validation process was then applied to learn the classifier.

In the study of the classification of the dataset using the different representational spaces, we have considered the following statistics for the analysis of the results:

$$Accuracy\ (A) = a + c / N \quad (2)$$

$$Sensitivity\ (S) = a / (a + d) \quad (3)$$

$$Specificity\ (s) = a / (c + b) \quad (4)$$

$$APV = a / (a + b) \quad (5)$$

$$IPV = c / (c + d) \quad (6)$$

where: N is the number of samples, a: is the number of active samples classified correctly, b is the number of active samples classified incorrectly, c is the number of inactive samples classified correctly, d is the number of inactive samples classified incorrectly, APV is the predictive value for active samples, IPV is the predictive value for inactive samples.

As observed in Table 1 the best results for the tested methods based on the use of classical similarity matrixes are obtained when the AMCS-based similarity is used. Tanimoto similarity index has been used for all the methods tested. Fingerprint-based similarity shows the worst results, although better than that from the literature [14]. In this case, compound 33 is classified as false inactive and four compounds (57, 65, 67, 71) as false active.

Compound 33 has the fluorine substituent in the para-position in the R2 (aniline) substituent. However, similar compounds like 32 or 34 are inactive compounds, the algorithm has a fault in the prediction. Regarding the errors in the classification on inactive compounds, we have noticed that compound 71 is the only compound that includes a double naphthalene substituent.

Compounds 65 and 67 are similar to compound 66, however they belong to a different class because of, again, the position of the fluorine substituent. The error in classifying the compound 57 maybe due to the low value of the pMIC 50 because it has not any substituent at the benzyl ring.

When MCS-based similarity matrix is used, compound 33 is again classified as false inactive, but in this case the compounds 28 and 61 are classified as false active.

Table 1. Results of SVM classification for different representation spaces (*Not external-Validation Used*)

Model	Active (54)		Inactive (20)		A	S	s	APV	IPV
	C	I	C	I					
Fingerprint	53	(33)	16	(57,65,67,71)	0.93	0.93	0.94	0.98	0.80
MCS	53	(33)	18	(28,61)	0.96	0.96	0.95	0.98	0.90
AMCS	54	None	20	None	1.00	1.0	1.0	1.00	1.00
Fragment (Z matrix)	54	None	20	None	1.00	1.0	1.0	1.00	1.00
NIF (Y matrix)	54	None	20	None	1.00	1.0	1.0	1.00	1.00

Compound 28 presents a low activty regarding with other similar compounds as 27, generating an erroneous classification. Regarding compound 61, a similar behavior to the aformentioned for the fingerprint matrix occurs. The ortho- position of the chlorine substituent provides a low activity, however, if the position is para- or meta- as in compound 62 the compounds are active.

Thus, we have observed that when fingerprint or MCS-based matrixes are used, some classification errors are found due to the existence of quite similar compounds that present a high difference of the experimental property. However, as it is observed in Table 1, when the AMCS-based similarity matrix is used, the algorithm is able to classify properly the entire dataset. The AMCS method provides more information than the MCS, generating finer similarity measures.

When fragments-based method is used, a complete classification of the dataset is obtained (see Table 2). The results are independent of the molecular descriptor used for building the Z matrix, because the presence or absence of specific fragments determines the class in which the molecule would be classified.

3.2. ACTIVITY VALUE PREDICTION USING PARTIAL LEAST-SQUARE REGRESSION.

Partial least-square regression (PLSR) [15] is one of the traditional statistical methods used for the development of QSAR models, so PLSR can be used with representational spaces (such as similarity matrices) in which the number of objects (molecules) and variables is the same. Moreover PLSR analysis reduces the data representational space, considering the variance of both predictors and properties.

Hence, the analysis of the PLS factors obtained allow us to perform the analysis of the multivariate system considering the trends and influences of the original variables on properties.

For the development of QSAR model we used the leave-one-out(LOO) cross-validation technique, evaluating as the result, the determination coefficient Q^2 (cross-validated R^2) and the standard error (SECV). Values of Q^2 greater than 0.50 and values of SECV lower than the standard deviation of the dataset predicted property would be the accepted threshold for proposing a model with a statistical meaning.

In order to analyze the behavior of the different representational spaces studied, the dataset was divided in two groups. The training group was composed by 55 molecules, representing 75 % of the entire dataset and the remaining 19 molecules, representing 25 % of the entire dataset were selected for the validation stage of the prediction model. Table 2 shows the results obtained.

As seen in Table 2, the similarity-based representational spaces (fingerprints, MCS and AMCS) have Q^2 values higher than 0.70. It is accepted within the QSAR community that: a) $Q^2 > 0.90$ indicates an excellent precision, b) if Q^2 values are between 0.70 and 0.90, that would mean that the model has a good precision, c) $Q^2 < 0.70$ indicates that the equation can only be used for screening purposes, which enable distinction between low, medium, and high values for the measured parameter, and d) if $Q^2 < 0.50$, the model only discriminates between high and low property values.

Best values of slope, bias and Q^2 were observed for fingerprint-based models in the training stage. However, the fingerprint-based model founds an outlier (molecule 24) and it needs more factors than MCS or AMCS-based models.

Also, for all models, the SECV is lower than the standard deviation of the dataset. However, the prediction capacity of the model is best for an AMCS based representational space. This model does not generate outliers and R^2, slope, bias and SEP values are close to the ideal.

Table 2. PLS QSAR prediction model results

Representation	Training					Test				
	Slope	Bias	Q^2	SecV	Outliers	Factors	Slope	Bias	R^2	Sep
Similarity Based										
Fingerprint	0.97	0.08	0.82	0.15	24	10	0.89	0.48	0.76	0.22
MCS	0.92	0.35	0.72	0.20	None	10	0.85	0.60	0.82	0.20
AMCS	0.92	0.33	0.71	0.20	None	6	0.98	0.06	0.82	0.18
Fragments Based										
Hyper Wiener	0.99	0.06	0.52	0.23	24,25,26	10	1.07	-0.35	0.87	0.16
Kier and Hall	0.86	0.59	0.69	0.18	22, 24,25,26	10	0.84	0.69	0.81	0.20
Randic (X^1)	0.86	0.60	0.69	0.18	22, 24,25,26	10	0.84	0.70	0.81	0.20
Schultz	0.95	0.22	0.63	0.20	24,25,26	10	0.97	0.15	0.83	0.18
Szeged	0.94	0.27	0.66	0.19	22, 24,25,26	10	1.03	-0.09	0.84	0.18
Wiener	0.95	0.24	0.62	0.20	24,25,26	10	0.99	0.03	0.83	0.18
NIF Based										
Hyper Wiener	0.94	0.26	0.85	0.13	23, 24, 26, 44, 54	9	0.96	0.17	0.87	0.15
Kier and Hall	0.95	0.20	0.68	0.18	22, 23, 24, 25, 26	3	0.98	0.01	0.78	0.21
Randic (X^1)	0.92	0.32	0.78	0.16	24, 26, 44	10	0.93	0.27	0.86	0.16
Schultz	1.13	-0.63	0.72	0.17	22, 23, 24, 25, 26	10	1.43	-2.06	0.72	0.26
Szeged	1.14	-0.68	0.76	0.16	22, 23, 24, 25, 26, 44	10	1.42	-2.01	0.72	0.27
Wiener	0.95	0.20	0.84	0.14	23, 24, 26, 44, 53	10	0.97	0.10	0.88	0.15

Results using fragments-based models as the representational space of the dataset are also shown in Table 2, for those molecular descriptors that show the best predictions. If we compare them versus similarity-based models, we observe lower statistics for the fragments-based models in the training stage: Q^2 values are lower (between 0.52 and 0.66) and the number of outliers, factors and SECV are higher. Fragments-based models require 10 factors for building the equation and 3-4 molecules are eliminated for the model. Again, molecule 24 is determined as an outlier as well as molecules 22, 25 and 26. These molecules are those presenting a simple substituent in the para-position in the *R2* radical (aniline).

Based on the results from Table 2, we conclude that NIF-based models improve considerably the results obtained in the previous analysis. The training models are better for all descriptors considered. Although the number of factors is similar for some descriptors, for the Kier and Hall descriptor only three factors are needed. Also, Q^2 values are always higher than 0.7, and for the Wiener-based descriptors this statistical is higher than 0.8. The number of outliers is slightly higher (3-5). Again, molecules 22, 24, 25 and 26 are defined as outliers, and also molecules 23, 44, 53 and 54 for some descriptors.

4 CONCLUSIONS

Molecular graph is a widely used mathematical mechanism for the representation of structural information of chemical compounds. By applying graph theory it is possible to extract structural information from molecules represented by means of a molecular graph. Thus, molecular descriptors can be obtained from molecular graphs, and then their values can be used in classification and prediction of molecular properties and biological activities of chemical compounds.

Moreover, molecular graphs can be used to obtain similarity measures between molecules, representing the resemblance between their structural characteristics, for a later use of these similarity measures in QSAR and classification activities.

Thus, structural based approaches using molecular descriptors and structural similarity have been widely used in computational chemistry during the last fifty years. In this paper we present and compare models previously proposed by the authors with other classical models of molecular representation. Descriptor, similarity and fragments based approaches have been studied and compared, and we presented the advantages and inconveniences of each of them.

References

[1] Irene Luque Ruiz, Gonzalo Cerruela García, M.Á. Gómez-Nieto, Structural Similarity based Approaches for the Development of Clustering and QSPR/QSAR Models in Chemical in: Matthias Dehmer, Kurt Varmuza, Danail Bonchev, F. Emmert-Streib (Eds.) Statistical Modelling of Molecular Descriptors in QSAR/QSPR, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 20012.

[2] M. Thomsen, L. Carlsen, Evaluation of empirical versus non-empirical descriptors, SAR QSAR Environ. Res., 13 (2002) 525-540.

[3] R. Van Deursen, L. Blum, J.-L. Reymond, Visualisation of the chemical space of fragments, lead-like and drug-like molecules in PubChem, J. Comput. Aid. Mol. Des., 25 (2011) 649-662.

[4] K.Z. Myint, C. Ma, L. Wang, X.Q. Xie, Fragment-similarity-based QSAR (FS-QSAR) algorithm for ligand biological activity predictions, SAR QSAR Environ. Res., 22 (2011) 385-410.

[5] R. Concu, M.A. Dea-Ayuela, L.G. Perez-Montoto, F.J. Prado-Prado, E. Uriarte, F. Bolás-Fernández, G. Podda, A. Pazos, C.R. Munteanu, F.M. Ubeira, H. González-Díaz, 3D entropy and moments prediction of enzyme classes and experimental-theoretic study of peptide fingerprints in Leishmania parasites, Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Proteins and Proteomics, 1794 (2009) 1784-1794.

[6] N. Nikolova, J. Jaworska, Approaches to Measure Chemical Similarity – a Review, QSAR & Combinatorial Science, 22 (2003) 1006-1026.

[7] G. Cerruela García, I. Luque Ruiz, M.Á. Gómez-Nieto, Step-by-Step Calculation of All Maximum Common Substructures through a Constraint Satisfaction Based Algorithm, Journal of Chemical Information and Computer Sciences, 44 (2003) 30-41.

[8] P. Guttiérrez Toscano, F.H.C. Marriott, Unsupervised classification of chemical compounds, J. R. Statist. Soc. C, 48 (1999) 153-163.

[9] M. Vogt, J. Bajorath, Bayesian screening for active compounds in high-dimensional chemical spaces combining property descriptors and molecular fingerprints, Chem. Biol. Drug Des., 71 (2008) 8-14.

[10] I. Guyon, J. Weston, S. Barnhill, V. Vapnik, Gene Selection for Cancer Classification using Support Vector Machines, Machine Learning, 46 (2002) 389-422.

[11] O. Ivanciuc, Applications of Support Vector Machines in Chemistry, in: Reviews in Computational Chemistry, John Wiley & Sons, Inc., 2007, pp. 291-400.

[12] JChem 6.1.4 , 2013, ChemAxon (http://www.chemaxon.com).

[13] G. Cerruela García, I. Luque Ruiz, M.A.n. Gómez-Nieto, Analysis and Study of Molecule Data Sets Using Snowflake Diagrams of Weighted Maximum Common Subgraph Trees, Journal of Chemical Information and Modeling, 51 (2011) 1216-1232.

[14] S.-Y. Choi, J.H. Shin, C.K. Ryu, K.-Y. Nam, K.T. No, H.-Y. Park Choo, The development of 3D-QSAR study and recursive partitioning of heterocyclic quinone derivatives with antifungal activity, Bioorganic & Medicinal Chemistry, 14 (2006) 1608-1617.

[15] D.A. Konovalov, L.E. Llewellyn, Y. Vander Heyden, D. Coomans, Robust Cross-Validation of Linear Regression QSAR Models, Journal of Chemical Information and Modeling, 48 (2008) 2081-2094.

EQUILIBRIO ENTRE PRIORIDADES DEL CLIENTE Y REDUCCIÓN DE COSTES.

Joaquín A. Pacheco Bonrostro y Amaya Martínez Puras[2]

UBU, {jpacheco,amayamar}@ubu.es

Resumen

En este trabajo se ha desarrollado una metodología ad hoc basada en búsqueda tabú para la resolución de un problema bi-objetivo en el contexto del PVRP (Periodic Vehicle Routing Problem). El análisis de este modelo viene motivado por un problema real que consiste en diseñar las rutas diarias de una empresa de Análisis Químicos de Salamanca a lo largo de un horizonte de planificación y la asignación de los calendarios de visita a sus clientes. El objetivo es doble: reducción de los costes y reducción de las modificaciones sobre los calendarios actuales de los clientes. Desde el punto de vista metodológico, la estrategia empleada para la resolución de este nuevo modelo es una adaptación del procedimiento MOAMP (*MultiObjective Adaptative Memory Procedure*) para problemas multiobjetivo.

Finalmente, con el fin de examinar la 'bondad' de los resultados obtenidos por nuestro procedimiento se comparan los mismos con una adaptación del conocido algoritmo NSGA II (*Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm*). Para este propósito además del problema con los datos reales se generan una serie de instancias seudo reales de distintos tamaños con las que se realizan pruebas computacionales. La conclusión final es que la estrategia MOAMP obtiene una curva de eficiencia más densa y poblada que la obtenida con NSGA II, con mayor dominancia y con mejor comportamiento en los extremos.

Palabras Clave: Rutas, MOAMP, NSGA II, Búsqueda Tabú.

1 INTRODUCCIÓN

El problema que se resuelve consiste en diseñar las rutas diarias de una empresa y la asignación de los calendarios de visita a los clientes. Cuando una empresa pide que se racionalice su planificación de productos/servicios a clientes a lo largo de un horizonte temporal, normalmente se requiere la reducción de los costes de las operaciones (coste de las rutas). Sin embargo, hemos observado que esta nueva planificación suele ser significativamente diferente de la empleada hasta ese momento. Es decir, para muchos clientes supone la modificación de sus calendarios o fechas de entrega.

Estas modificaciones no suelen ser bien recibidas por los clientes, ya que conllevan cambios en sus hábitos o costumbres. Indirectamente, estos cambios pueden repercutir de forma negativa sobre la imagen de la empresa suministradora de los servicios. Por consiguiente, al plantear el problema debemos tener en cuenta, además de la reducción de los costes, la repercusión de los cambios realizados o la minimización de éstos. Así planteado, el problema es claramente bi-objetivo: reducción de los costes y reducción de las modificaciones sobre los calendarios actuales de los clientes.

El modelo que se plantea viene motivado por un problema real que consiste en el diseño de las rutas de una empresa de Análisis Químicos situada en Salamanca. La empresa suele realizar unos 1200 servicios al mes que son efectuados por 10 técnicos, quienes conduciendo su propio vehículo son los encargados de realizar las rutas y el servicio. Las rutas comienzan y finalizan en la empresa (Salamanca). Los servicios se realizan de lunes a viernes y son de tres tipos: recogida de muestras (A), control de plagas (B) y control de calidad (C) con una duración aproximada de 15, 30 y 60 minutos respectivamente. El horizonte de planificación es mensual, 20 días (4 semanas) ya que sábados y domingos no se trabaja y la jornada laboral es como máximo de 9 horas e incluye el tiempo de conducción y de servicio.

El número de clientes que demandan el servicio oscila entre 97 y 104. También debemos tener presente que clientes con la misma frecuencia de visitas pueden disponer de distintos calendarios.

Por otro lado, la capacidad de los vehículos es ilimitada ya que las muestras apenas ocupan espacio. Estas características que acabamos de ver son las que tenemos que considerar para conseguir dos objetivos: la asignación de los calendarios de visita a los clientes tratando de respetar sus prioridades y el diseño de las rutas diarias.

1.1. LOCALIZACIONES Y FRECUENCIAS

En la figura 1, se muestra el mapa con las localizaciones de los clientes representados en distintos colores según su frecuencia de visitas. El significado de los colores es: rojo (empresa); azul (todos los días); amarillo (3 días a la semana); verde (2 días a la semana); naranja (1 vez a la semana); gris (1 vez cada 15 días) y negro (1 vez al mes).

Figura 1: Localizaciones de los clientes.

Las frecuencias de visita y el tipo de servicio que es demandado por los clientes se distribuyen como aparece en la siguiente tabla.

Tabla 1: Frecuencias de visita y tipo de servicio.

FRECUENCIAS	CLIENTES	SERVICIO
Todos los días	18	A
3 días a la semana	31	A
2 días a la semana	27	A ó B
1 día a la semana	14	B
1 vez cada 15 días	5	B ó C
1 vez al mes	5	C

2 PRIMEROS INDICIOS EN LA LITERATURA

El objetivo de minimizar o controlar las diferencias en las asignaciones a calendarios respecto a los de una solución preestablecida en el PVRP solamente ha sido tratado en el trabajo de Gulczynsky, Golden and Wasil [6], desde nuestro conocimiento. No obstante en este trabajo no se plantean estas diferencias como una nueva función objetivo sino como una restricción. Al modelo resultante lo denominan PVRP-RC *(PVRP with Reassignments Constraints*). Concretamente, consideran 3 variantes:

- PVRP-RCH (con restricciones de reasignaciones fuertes): se busca minimizar el coste con la restricción adicional de que el número de asignaciones a calendarios diferentes de la solución preestablecida sea menor que una constante prefijada.
- PVRP-RCS (con restricciones suaves): en este caso, se añade a la función objetivo del coste una penalización por asignación diferente.
- PVRP-RCR (con asignaciones limitadas): permite asignaciones diferentes en clientes que son visitados sólo una vez ya que generan menos problemas.

Estos autores creen que el PVRP-RC es un modelo más realista que el tradicional PVRP. En la práctica, existen razones de tipo económico, logístico o de contrato que impiden a las compañías construir nuevas rutas partiendo de 0. Cuando los clientes son asignados a nuevas rutas en nuevos días, la compañía puede incurrir en un coste. Algunas compañías tienen miles de vehículos en sus flotas y visitan millones de clientes anualmente por lo que construir nuevas rutas para estas compañías llevaría tiempo y además sería muy costoso. También, algunos clientes que cuentan con el servicio en varios días, ven las asignaciones como un inconveniente. Finalmente, minimizar el número de clientes reasignados ayuda a mantener buenas relaciones laborales.

Otro trabajo que presenta ciertas similitudes con el que aquí se trata es el de García, Pacheco y Álvarez [4]. En este trabajo se resuelve un problema bi-objetivo aunque no es tratado como un PVRP, podría estudiarse como un caso más particular de éste.

Se analiza el problema de una empresa de repostería que debe planificar la entrega de pedidos a delegaciones situadas en el norte de España. El período de planificación es semanal de lunes a viernes, en vez de mensual como en nuestro problema. Cada pedido viene determinado por una fecha de entrega inicial (día de la semana en que se efectúa el pedido) y el número de pallets a entregar. Con la finalidad de minimizar el coste de las operaciones, se permite que los pedidos sean entregados en la fecha inicial o el día anterior (excepto los del lunes). Así, se producen stocks pero controlados. El problema, por tanto, consiste en determinar la fecha definitiva de entrega de cada pedido y diseñar las rutas diarias con dos objetivos: minimizar la distancia total y el stock.

Este problema puede verse como un caso particular del PVRP. Se puede considerar que cada cliente dispone de dos posibles calendarios: la fecha inicial o el día anterior. La diferencia de asignación de calendario con la solución actual vendría ponderada por el nº de pallets que se adelantan.

3 FORMULACIÓN

El PVRP se puede plantear de forma concisa de la siguiente forma. Se define:

T: el número de días del período de planificación

V: conjunto de puntos del problema; $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ donde 0 representa el depósito, y $\{1, \ldots, n\}$ las localizaciones de los clientes.

Λ_i : Conjunto de patrones o calendarios de visita posibles para el cliente i, $i = 1..n$

q_i : cantidad demandada por el cliente i

m : tamaño de la flota de vehículos

d_{ij} y t_{ij}: distancias y tiempos entre los puntos i y j, $i, j \in V$

Se define $nc_i = |\Lambda_i|$ y denotamos por λ_{ij}, $j = 1,..., nc_i$, a cada uno de los posibles calendarios del cliente i. Denotemos por R_t un conjunto de rutas para cada día $t \in \{1,\ldots, T\}$; y por $V(r)$ y $E(r)$ respectivamente el conjunto de puntos y arcos para cada ruta $r \in R_t$. El problema consiste en asignar un calendario $\lambda_{ij} \in \Lambda_i$, para cada cliente $i \in \{1,\ldots, n\}$ y diseñar el conjunto de rutas R_t para cada $t \in \{1,\ldots, T\}$ de forma que:

- Cada ruta r empieza y finaliza en el depósito 0, $\forall\ r \in R_t$, $t \in \{1,\ldots,T\}$
- $\forall\ i \in \{1,\ldots,n\}$ y $t \in \lambda_{ij}$ existe una $r \in R_t$ verificando que $i \in V(r)$
- $\sum_{i \in V(r)} q_i \le Q$, $\forall\ r \in R_t$, $t \in \{1,\ldots,T\}$

Los objetivos del problema son minimizar la función coste y la función distorsión. La función coste se define como el coste total de las rutas, el cual es proporcional a la distancia total recorrida. Por tanto, la función a minimizar será la suma de la distancia recorrida por cada ruta diaria a lo largo del horizonte temporal.

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{r \in R_t} \sum_{(i,j) \in E(r)} d_{ij} \qquad (1)$$

La función distorsión se define como la diferencia entre los calendarios de los clientes con la solución actual.

$dif(S, S_0)$ = número de clientes con calendarios diferentes en S y S_0. (2)

Estos dos objetivos no son comparables ni fácilmente agregables y además entran en conflicto. Por tanto, se buscan soluciones que equilibren estos dos objetivos. El problema, así planteado, es claramente bi-objetivo y PVRP. Para cada cliente se determinan los días de visita y se diseñan las rutas diarias de acuerdo a la asignación de calendarios de visita a los clientes. Para su resolución, se determina el 'conjunto de puntos eficientes', es decir, el conjunto de soluciones no dominadas. Recuérdese que una solución no dominada es aquella para la cual no se conoce otra solución que mejore su valor en relación a alguno de los objetivos sin empeorar otros.

4 ESTRATEGIA DE SOLUCION

La estrategia que se propone para resolver el nuevo modelo planteado es una adaptación del procedimiento MOAMP (*Multiobjective Adaptative Memory Procedure*) para problemas multiobjetivo. MOAMP fue desarrollado por Caballero, Molina y Rodríguez-Uría [2] y básicamente crea una aproximación a la curva de eficiencia enlazando la ejecución de una serie de procedimientos de búsqueda tabú con diferentes funciones objetivo. Consta de 3 fases: en la primera fase, usa las funciones objetivo originales y en la segunda combinaciones de las originales. Finalmente, en la tercera se realiza una intensificación en torno al vecindario de las soluciones encontradas.

5 PROCEDIMIENTOS DE MOAMP

Como ya se ha comentado, MOAMP se desarrolla en tres fases. En la figura 2 se muestra la jerarquía de todos los procedimientos empleados.

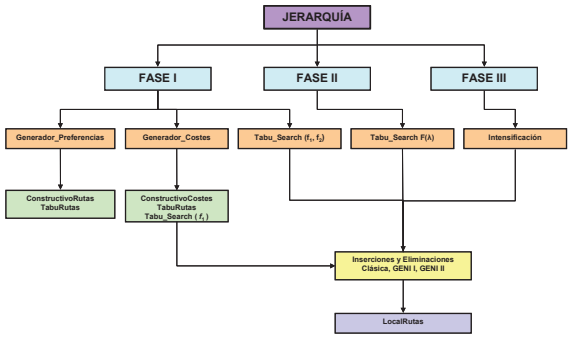


Figura 2: Jerarquía de procedimientos.

5.1. PROCEDIMIENTOS PRINCIPALES

Los procedimientos principales son **Generador_Preferencias**, **Generador_Costes** y **Tabu_Search**.

Mediante **Generador_Preferencias** se obtiene una solución S usando los calendarios de la solución preestablecida S_0. Posteriormente, se optimiza el coste de las rutas mediante **ConstructivoRutas** y **TabuRutas**.

Generador_Costes construye la solución que minimiza la función coste. Este problema es equivalente al PVRP clásico con algunos matices. En nuestro caso, **Generado_Costes** sigue una estrategia iterativa de tipo multiarranque. En cada iteración, **ConstructivoCostes** construye una solución. Después, sin modificar los calendarios asignados a los clientes, se mejora el conjunto de rutas para cada día con **TabuRutas**. Finalmente, se intenta mejorar aún más la solución obtenida aplicando a la función coste el algoritmo **Tabu_Search**.

TabuSearch es un método basado en búsqueda tabú. En cada iteración se mueve de la solución actual a la mejor solución vecina. En este caso, un movimiento viene definido por el cambio de calendario asignado a un cliente. Para que el proceso no cicle determinados movimientos son declarados tabú. A su vez, este criterio tabú puede ser ignorado en determinadas condiciones ("Criterio de Aspiración"). El proceso finaliza cuando se alcanza un criterio de parada.

5.2. PROCEDIMIENTOS DE RUTAS

En esta sección se describen los procedimientos de construcción y mejora de las rutas diarias usadas en los procedimientos generales explicados en la sección anterior. El objetivo siempre es minimizar el coste. Para ello, se desarrollan tres procedimientos: **ConstructivoRutas**, **LocalRutas** y **TabuRutas**.

ConstructivoRutas toma como input de entrada el conjunto de puntos a visitar ese día y como salida el conjunto de las rutas. Es un método de tipo "swap" que primero ordena los puntos y después los inserta.

LocalRutas es una heurística de búsqueda local que intenta mejorar el conjunto de rutas de un determinado día. Mediante una serie de cambios que se ilustran en la figura siguiente

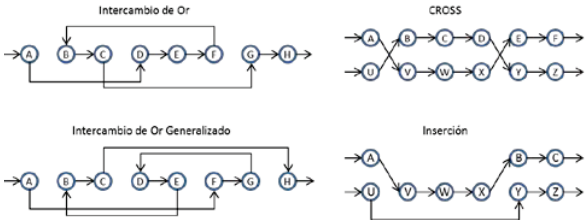


Figura 3: Tipos de movimientos.

LocalRutas mejora cada conjunto de rutas inicial hasta que no hay mejoras posibles. Por su parte **TabuRutas** permite mejorar los resultados obtenidos por **LocalRutas** ya que permite exploraciones más allá del primer óptimo local encontrado. Para ello se permiten movimientos a conjuntos de rutas peores. Los movimientos consisten en la eliminación e incorporación de una serie de arcos y para evitar que el algoritmo cicle, algunos movimientos se declaran tabú aunque pueden ser admitidos si dan lugar a un conjunto de rutas mejor.

5.3. INSERCIONES Y ELIMINACIONES

Finalmente mencionar que algunos de las rutinas anteriores usan eliminaciones y/o inserciones de puntos. Se contemplan 3 tipos de eliminaciones: Normal o Clásica, GENI I y GENI II y sus análogas inserciones. GENI I y GENI II fueron introducidas por Gendreau *et al.* [5]. Las eliminaciones son usadas por **Tabu_Search** y las inserciones por **ConstructivoCostes**, **Tabu_Search** y **ConstructivoRutas**.

6 EXPERIMENTOS

Para validar la estrategia MOAMP propuesta se compara su comportamiento con una adaptación a este problema del método NSGA-II propuesto en [3]. Este método es considerado como uno de los mejores métodos evolutivos para problemas multi-objetivos. Para realizar esta comparación se generan de forma aleatoria instancias seudo reales (basadas en datos reales) de tamaños 20, 40, 60 y 100 clientes. En concreto, 5 instancias de cada tamaño.

Tras ejecutar los 2 métodos para cada una de las instancias reales se puede comprobar el mejor comportamiento en todos los casos del método basado en MOAMP. Con el objetivo de ilustración, se muestra en la figura 6, una gráfica para una instancia de tamaño 100. Se observa como con MOAMP se consigue una curva de eficiencia con un mayor número de soluciones, menos dominadas, más densas y con un comportamiento mejor en los extremos.

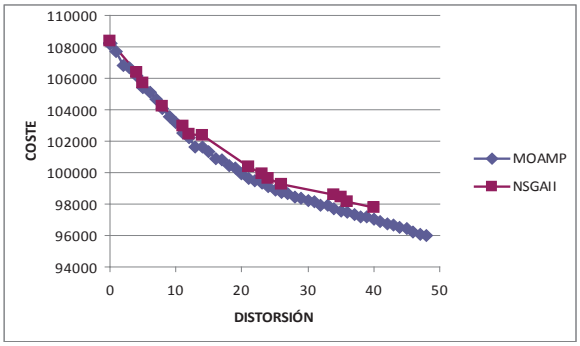


Figura 4: Conjunto de soluciones

7 ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES CON DATOS REALES

En la figura 5 se representan para un problema con datos actuales y reales, las soluciones obtenidas con MOAMP, NSGA II y la solución actual de la empresa. Obviamente la solución actual tiene distorsión 0 ya que son los calendarios que actualmente tienen asignados los clientes. Sin embargo, la estrategia MOAMP obtiene una solución con menor coste que respeta dichos calendarios. Esto es debido a que la empresa ni siquiera tiene optimizadas las rutas diarias. También, podemos apreciar como al permitir modificar la asignación de calendarios a los clientes, tanto MOAMP como NSGA II obtienen soluciones que reducen considerablemente el coste.

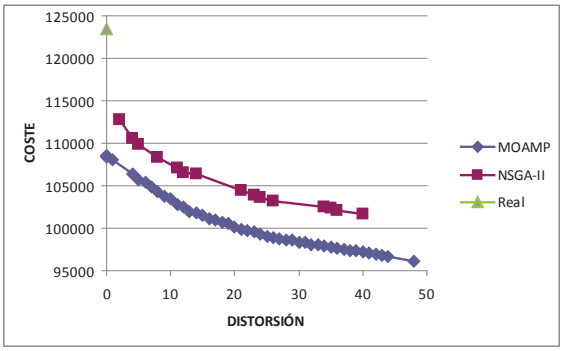


Figura 5: Soluciones MOAMP Y NSGA II y actual.

Como ocurre en la sección anterior se puede concluir un mejor comportamiento de MOAMP.

Finalmente creemos conveniente hacer un análisis más detallado de la curva de soluciones obtenida con MOAMP.

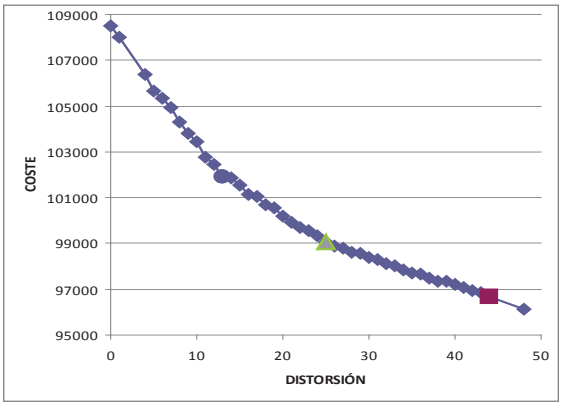


Figura 6: Análisis de la curva de soluciones.

La solución de distorsión 0 de MOAMP produce un ahorro del 12% sobre la solución actual de la empresa. En el otro extremo, la solución de mínimo coste tiene una distorsión de 48 y produce un ahorro de un 11,4% sobre la solución MOAMP de distorsión 0. Entre estas dos soluciones nos encontramos con un amplio abanico de soluciones intermedias. Un análisis que puede resultar muy interesante es estudiarla desde distintas coyunturas económicas. Así, en época de crisis o de recesión, como la que vivimos en la actualidad, la empresa puede estar más interesada en minimizar el coste aunque esto le suponga aumentar la distorsión. Como ya he dicho, la solución de mínimo coste tiene distorsión 48. Ahora bien, la siguiente solución con menos coste (resaltada en rojo) reduce la distorsión en un 8% sin apenas aumentar el coste. Incluso, podríamos llegar hasta la solución resaltada en verde en la que se reduce la distorsión hasta 25 produciéndose un aumento del coste de sólo el 2,4%. A partir de aquí, resulta algo más costoso reducir la distorsión.

Fijándonos en el primer tramo (quizá más interesante en tiempos de expansión) la pendiente de la curva es más pronunciada por lo que un pequeño ahorro supone un aumento considerable de la distorsión. No obstante, podríamos llegar hasta la solución resaltada en amarillo que con distorsión 13 reduce en un 5,3% el coste. Por consiguiente, se puede concluir que MOAMP facilita un conjunto de soluciones aunque la decisión final deberá tomarla la empresa según sus intereses y prioridades.

8 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método para resolver un problema bi-objetivo en el contexto del PVRP. El objetivo es doble: reducción de los costes y reducción de los cambios de calendario a los clientes. Estos objetivos no son fácilmente agregables ni comparables y además entran en conflicto.

El método desarrollado aporta un conjunto denso de soluciones con las que se puede encontrar un equilibrio entre los objetivos. Para contrastar los resultados de MOAMP, éstos se comparan con los obtenidos por una adaptación de NSGA II obteniéndose con MOAMP una curva de eficiencia más densa, poblada y que no es dominada por la obtenida con NSGA II. Por consiguiente, concluimos que el diseño de estrategias MOAMP adaptadas al problema produce mejores resultados aunque conlleva un esfuerzo adicional de diseño e implementación.

Destacar que el problema bi-objetivo es nuevo en sí y es abordado desde una perspectiva que considera las costumbres adquiridas por los clientes como un nuevo objetivo y no como una restricción.

Referencias

[1] J.L. Bentley: *Fast Algorithms for Geometric Salesman Problems*. ORSA Journal of Computing, 4, pp. 387-411, 1992.

[2] R. Caballero, J. Molina, M.V. Rodríguez: *MOAMP: Programación Multiobjetivo mediante un Procedimiento de Búsqueda Tabú*. II Congreso Español de Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados MAEB, Gijón, 2003.

[3] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan: *A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA II*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation 6, 2, pp. 182–197, 2002.

[4] I. García, J. Pacheco, A. Alvarez: *Optimizing routes and stock.* Journal of Heuristics, 19, 2, pp. 157-177, 2013.

[5] M. Gendreau, A. Hertz, G. Laporte: *New insertion and postoptimization procedures for the traveling salesman problem*. Operations Research 40, pp. 1086-1094, 1992.

[6] D. Gulczynski, B. Golden, E. Wasil: *The period vehicle routing problem: New heuristics and real-world variants.* Transportation Research Part E 47, 5, pp. 648-668, 2011.

INTELIGENCIA ARTIFICIAL PARA DETERMINAR LA CALIDAD EN LAMINAS METALICAS TEXTURIZADAS POR EDT

Maritza Correa-Valencia[1], Jorge Pamies-Teixeira[2]

[1] *Departamento de Operaciones y Sistemas, Universidad Autónoma de Occidente, Calle 25 No. 115 – 85, Km. 2 vía Cali – Jamundí, Cali, Colombia,* mcorrea@uao.edu.co

[2] *Departamento de Ingeniería Industrial y Mecánica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Quinta da Torre 2829-516 Caparica, Portugal,* jorge.pamies@fct.unl.pt

Resumen

Una de las materias primas más importantes para la industria automotriz son las láminas de acero o aluminio, siendo la textura superficial uno de sus atributos más importantes, dado que mejoran las propiedades tribológicas como la fricción, desgaste; la conformabilidad del material y las operaciones de acabado como el revestimiento y la pintura. En este artículo se presenta un sensor virtual para la predicción de los parámetros que definen la rugosidad superficial cuando se produce con un proceso de texturizado por descarga eléctrica. El desarrollo del sensor está dividido en dos etapas. La primera fase experimental para producir texturas de superficies planas usando una máquina de electroerosión modificada ALIC-1. La segunda usa los datos obtenidos para entrenar un modelo Bayesiano y una red neuronal artificial. El modelo ha sido validado en un estudio experimental con datos reales, donde se demuestra que es posible encontrar una rugosidad superficial con especificaciones particulares.

Keywords: Calidad superficial, redes Bayesianas, Multilayer Perceptron, EDT.

1 INTRODUCCION

La producción de láminas texturizadas requiere controlar los parámetros que definen la textura, dado que mejoran las propiedades tribológicas como la fricción, desgaste; la conformabilidad del material y las operaciones de acabado como el revestimiento y la pintura [1]. Estas son una de las principales materias primas de la industria automotriz, se comprende entonces la importancia del conocimiento de los mecanismos físicos y la correlación entre las variables resultantes de la textura y los parámetros operativos del proceso [2].

El texturizado por descarga eléctrica (EDT por su sigla en inglés, Electro Discharge Texturing). es uno de los métodos de texturización más populares, el arranque de material es realizado por medio de descargas eléctricas controladas que saltan, en un medio dieléctrico, entre un electrodo y una pieza. Si se compara con otras tecnologías competitivas los costos son más bajos, aparte de presentar ventajas como que dada la ausencia de esfuerzos de mecanizado el amarre es muy sencillo y no presenta desviación en las medidas, además el proceso EDT, contrario a otras técnicas, ofrece alto grado de aleatoriedad dando como resultado una superficie con un acabado mate uniforme [3], indicado para la industria automotriz.

Los umbrales en la corriente descargada y la frecuencia deben ser los mismos para asegurar la eficiencia del proceso EDT. Algunos problemas se presentan cuando los valores de corriente son bajos, provocando pequeños espacios entre la pieza de trabajo y el electrodo. Por el contrario si los valores de la frecuencia de descarga están por encima de ciertos límites, pueden producirse arcos que destruyen la superficie [4]. Si la frecuencia es muy baja, pueden ocurrir inestabilidades debido a insuficiente chispa de energía para producir descargas homogéneas, y por consiguiente superficies dañadas. Aunque se identifican varios problemas no se conocen modelos que describan la relación entre las variables del proceso y la textura superficial.

En este artículo se presenta un modelo que se desempeña como un sensor virtual para la predicción de los parámetros que definen la Ra en un proceso EDT. La estructura del trabajo está dividida en 4 apartados. La sección 2 presenta la descripción del modelo, que incluye la fase experimental y técnicas de clasificación aplicadas. En la sección 3, el análisis de los resultados obtenidos y finalmente en el apartado 4 se presenta las conclusiones del trabajo y las líneas futuras de investigación.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

2.1. ESTADO DEL ARTE

Varios trabajos se han enfocado en el uso de redes neuronales artificiales (RNA) para la predicción de la calidad superficial y especialmente de la tasa de remoción de material en procesos EDT, habitualmente en aceros. Por ejemplo [5] plantean un modelo usando RNA para determinar el acabado en EDM aplicado a aceros, asegurando que las RNA se han usado principalmente para determinar la tasa de remoción de material con resultados que muestran un porcentaje de error muy diferente según el tipo de material y sugieren usar nueva experimentación para corregir la exactitud del modelo.

En [6] comparan 2 tipos de redes neuronales BackPropagation (BP) y Radial Basis para predecir la rugosidad superficial en procesos EDM en piezas de acero, indicando que las redes BP son más exactas aunque toman más tiempo en el entrenamiento, presentando un error medio absoluto de 30% en BP y 57% en el caso de Radial Basis.

En el estudio de parámetros de corte, [7] aseguran que las RNA son muy utilizadas en aplicaciones con EDM para medir la tasa de remoción de material, aunque en este caso presentan un modelo de optimización de parámetros en un proceso EDM usando algoritmos genéticos y RNA para aceros. [8] estudian la influencia de los parámetros de corte y la geometría del electrodo en EDM para la fabricación de moldes de acero, usando modelos de regresión y RNA con resultados aceptables.

A pesar de que se encuentran reportes del uso de RNA en procesos EDM, con relativo éxito, el comportamiento de este tipo de redes es como caja negra, es decir que sólo se conoce la entrada y salida de la red, sin dar detalle sobre la influencia de las variables de entrada sobre la salida, ventaja que si se aprecia con el uso de Redes Bayesianas (RB). Aunque que el uso de RB en este tipo de proceso no es conocido, esta herramienta ha demostrado ser efectiva en el estudio de procesos de mecanizado por arranque de viruta [9,10,11], donde se resalta el conocimiento adicional que ofrecen estas redes sobre el comportamiento de las variables y sus relaciones.

2.2. FASE EXPERIMENTAL

Se hizo una serie de experimentos usando máquina de electroerosión (EDM por su sigla en inglés, Electric Discharge Machining) modificada ALIC-1 (Figura 1) con movimientos transversales, proporcionando los medios para producir texturas superficiales planas. Aunque este equipo tiene algunas limitaciones, como el pequeño rango de velocidad de desplazamiento, que son muy bajos, fue posible reproducir situaciones típicas del proceso industrial.

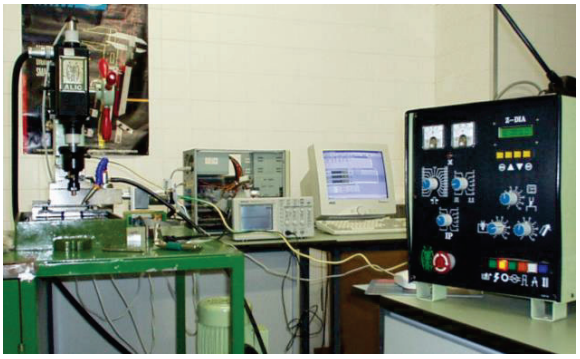


Figura 1: Equipo utilizado en la experimentación ALIC-1.

Para mecanizar la superficie de las probetas se usó acero DIN Ck45 con electrodos de grafito de alta densidad (EC17) y cobre HDCH (HD7), fluido dieléctrico FLUXELF 2 y distancia de voltaje de 40V. Se obtuvo una banda texturizada después de varias pasadas, para medir la rugosidad superficial Ra se usó un rugosímetro Mitutoyo Surftest 301 con longitud de cut-off de 0.8 mm, longitud de evaluación de 2.4 mm y nivel de pico máximo de 0.5 µm. La similitud de la superficie, se consiguió con 5 mediciones en 3 sitios diferentes de la superficie texturizada.

La medida usada más comúnmente para medir la rugosidad superficial es Ra o rugosidad media (área entre el perfil de rugosidad *f(x)* y su línea media dividido entre la longitud de evaluación *L*), ecuación 1, es el parámetro más representativo para la descripción de la textura superficial, condicionando muchos de los atributos y propiedades superficiales.

$$R_a = \frac{1}{L}\int_0^L |f(x)|dx \qquad (1)$$

La norma ISO4288:1996 indica que los valores de medición van de 0.006 µm a 80 µm.

2.2.1. Rangos y variables relevantes

Las variables usadas, dadas las posibilidades de control de los parámetros en la máquina ALIC-1, fueron: velocidad de desplazamiento (v), on-time (td), off-time (tq), corriente de descarga (I), polaridad y material del electrodo como una sola variable (m). La tabla 1 resume las variables utilizadas en la experimentación.

Los valores alto y bajo de las variables están representados por los niveles 1 y -1. El valor de tq fue dado en una escala de12 posiciones del sistema de control de la máquina, donde el número de la división (div) se tomó como el valor de la variable. El valor bajo de electrodo/ polaridad fue tomado como la rugosidad más baja (cobre/negativo) y el valor alto correspondiente a la rugosidad alta (grafito/negativo). Para seleccionar las variables relevantes se hizo un análisis de la varianza (ANOVA) con el software Statistics para un nivel de confianza de

95%, donde se cruzaron las variables relacionadas en las tablas 1 y 2.

Tabla 1 Variables usadas en los experimentos.

VARIABLE	NIVEL	
	-1	1
Velocidad de desplazamiento (V) [m/min]	0.06	0.24
On-time (td) [µs]	15	200
Off-time (tq) [div]	2	5
Corriente de descarga (I) [A]	1	3
Material del electrodo y polaridad (m)	Cobre, negativo	Grafito, negativo

Asegurar la calidad del producto diseñado, aun incorporando métodos preproceso como Taguchi [12], requieren de una etapa intermedia que garantice la calidad superficial durante el propio proceso EDT. Añadir sensores para ayudar a asegurar la calidad no es sencillo, dado que el propio proceso ofrece un ambiente hostil para la vida del sensor. De allí surge la necesidad de desarrollar sensores basados en modelos predictivos, fundamentados en la teoría del mecanizado (mecanísticos) y los apoyados en datos observados (empíricos).

2.2.2. Clasificación aplicada

Se desarrollan dos modelos, uno usando redes neuronales artificiales y otro usando redes Bayesianas para predecir los parámetros de acabado que definen la rugosidad superficial (Ra), en un proceso EDT. En los clasificadores Bayesianos supervisados dadas ciertas clases, se debe encontrar una regla para clasificar una nueva observación dentro de las clases existentes aplicando teoría de probabilidades.

Una red neuronal es un modelo computacional, paralelo, compuesto de unidades procesadoras adaptativas con alta interconexión entre ellas [13]. Las redes neuronales multicapa están conectada total o parcialmente, en el caso de los algoritmos supervisados se debe presentar a la red las salidas que se quieren encontrar ante las señales de entrada proporcionadas. Con la salida de la red se observa la diferencia entre esta y la señal deseada. Posteriormente los pesos de la red se modifican de acuerdo al error cometido. Las redes Bayesianas (RBs) [14] constituyen un paradigma de amplio uso dentro de la Inteligencia Artificial. Se basa en una semántica de independencia condicional entre tripletas de variables, donde se efectúa una factorización de probabilidad conjunta definida sobre la variable aleatoria n dimensional.

El objetivo principal de este trabajo es encontrar la combinación de parámetros que sean capaces de definir una calidad perteneciente a un rango dado, para la implementación del modelo de clasificación con redes Bayesianas utilizando el algoritmo TAN [15], ver figura 2. Para la construcción de la arquitectura de la red se seleccionaron seis variables medidas dentro y fuera del proceso (tabla 1), se midió la rugosidad superficial (Ra), fuera del proceso, como la variable clase o salida. Las etiquetas de la variable Ra, se muestran en la tabla 2, y fueron asignadas de acuerdo al valor de rugosidad establecido en el estándar ISO 4287 e ISO 4288.

Tabla 2 Rangos de rugosidad del modelo.

Valor de rugosidad Ra Límites clase Ra(µm)	Código
[1.6 – 4)	Semifino
(4 – 8]	Medio
(8-14]	Semirugoso
(14-27]	Rugoso

Para el modelo con Redes neuronales artificiales (RNAs) se usó el algoritmo backpropagation con momentum 0.2 y tasa de aprendizaje 0.3. Para la clasificación se utilizó el software WEKA [16].

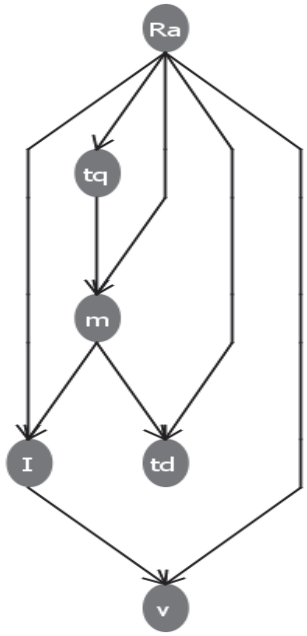


Figura 2: Estructura del clasificador TAN.

3 ANÁLISIS EXPERIMENTAL

Las RBs tienen la virtud de mostrar la relación y el efecto entre variables en los clasificadores TAN, la red generada se muestra en la figura 1. En un modelo de clasificación se busca clasificar correctamente casos nuevos, por lo tanto la validación debe hacerse con datos diferentes a los usados en el entrenamiento. El método de validación seleccionado fue validación cruzada de K iteraciones [17], consiste en dividir el conjunto total de casos en K subcon-

juntos disjuntos de aproximadamente el mismo tamaño. Usando K-1 subconjuntos para entrenar el modelo y se valida con el subconjunto restante, este procedimiento se efectúa K veces. La estimación de la tasa de error se da como la media de las K tasas de error obtenidas, en este caso la validación se efectuó con K=10, obteniendo una precisión de 79.5%.

Terminada la validación se genera una matriz de confusión media donde se cruza la variable derivada de la clasificación obtenida, con la variable que guarda la verdadera clasificación, los resultados del caso 1, detallado en la tabla 3, se muestran en la figura 3. Por estados la precisión en la clasificación está distribuida como: Rugoso 73.4%, Semirugoso 91.97%, Medio 59.68%, Semifino 0%, quedando estos clasificados como medio en 80%.

Precisión: **0.795238**
Matriz de confusión media

REAL	"rugoso"	"semirugoso"	"medio"	"semifino"
ASIGNADO				
"rugoso"	151	13	0	0
"semirugoso"	49	407	81	3
"medio"	3	16	110	7
"semifino"	0	0	0	0

Figura 3: Matriz de confusión media usando TAN.

En un modelo para predicción es útil definir escenarios donde se establezca cierta información, en este caso se aporta información sobre la calidad requerida para que el modelo asigne los mejores valores de los parámetros necesarios para lograr la clase señalada. Para el análisis se parte del estado inicial (con la probabilidad a priori), y se hace una instancia de dos estados de Ra, obteniendo las combinaciones de los parámetros que producen la calidad deseada, los resultados se resumen en la tabla 3.

Tabla 3: Probabilidades a priori calculadas con los dato de entrenamiento y los valores recalculados después de instanciar Ra como “medio” y “semirugoso”.

Clasificación de parámetros	**A PRIORI** **Vr. param / prob** **Ra= Semirugoso/ 0.52**	**CASO 1** **Vr. param/prob** **Ra=medio/1**	**CASO 2** **Vr. param/prob** **Ra= Semirugoso / 1**
td	100 / 0.40	50 / 0.39	100 / 0.42
tq	4 / 0.42	2 / 0.43	4 / 0.44
V	2 / 0.45	2 / 0.39	2 / 0.46
m	Igual para todos /0.25	Cu- / 0.52	Gr+ / 0.33
I	3 / 0.40	2 / 0.36	3 / 0.40

La matriz de confusión con los resultados del modelo usando RNAs se muestran en la figura 4. Por estados la precisión en la clasificación está distribuida como: Medio 65.8%, Semirugoso 75.54%, Rugoso 82.18%, Semifino 0%, obteniendo una precisión general del modelo de 80.5%.

Precisión: **0.804762**
Matriz de confusión media

REAL	"medio"	"semirugoso"	"rugoso"	"semifino"
ASIGNADO				
"medio"	108	75	7	1
"semirugoso"	49	363	24	0
"rugoso"	0	60	143	0
"semifino"	7	3	0	0

Figura 4: Matriz de confusión media usando RNAs.

4 CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS

En este trabajo se hace un análisis inicial del uso de las redes Bayesianas con la estructura TAN y redes artificiales neuronales con el algoritmo Backpropagation para el desarrollo de modelos empíricos que estimen el acabado superficial (Ra) en un proceso de texturizado por EDT, donde han demostrado ser una herramienta muy útil para aportar conocimiento en el desarrollo de un predictor de parámetros con tipos de Ra determinados.

Los modelos de clasificación supervisada fueron validados con el método 10-fold-cross validation confrontado con el conocimiento del experto, guardando una relación consistente entre el proceso físico y lo plasmado por el clasificador.

Los resultados de las dos estructuras son comparadas usando datos experimentales, ambos modelos proveen una predicción estadísticamente satisfactoria.

El resultado de precisión, en el caso del clasificador TAN es de 79.5%, es la estimación honesta de la tasa de error verdadera, es decir el indicador de bondad del clasificador o probabilidad de que este clasifique correctamente nuevos casos. En el caso del modelo con RNAs fue de 80.5%.

Haciendo el análisis de la tabla de contingencias con el clasificador TAN se encontró que la exactitud en la clasificación de los tipos semirugoso con 92% y rugoso con 73%, de bien clasificados, se presenta mayor confusión en el tipo medio con 60% de bien clasificados y 40% clasificados como tipo semirugoso, que es conveniente afinar proporcionando más ensayos pertenecientes a esta región.

En el caso de la red neuronal, analizando los resultados de la tabla de contingencia, se encontró que la clasificación de tipo rugoso aumenta de 73 a 82%, en el caso semirugoso disminuye de 92 a 76% y en el tipo medio aumenta de 60 a 66%.

En ambos modelos la clasificación del tipo semifino se reporta con 0%. Aunque normalmente en el proceso EDT el acabado semi-fino no es tan probable sería interesante producir resultados adicionales en esta región. Básicamente la diferencia entre ambos modelos se presenta en la posibilidad que tienen las redes Bayesianas de definir escenarios por medio de instancias al estado de Ra deseado, obteniendo las combinaciones de los parámetros que producen dicha calidad.

Para mejorar el desarrollo de los modelos se pueden adicionar otras características del proceso a la red, como el tipo de material a mecanizar y la corriente pico (pc).

Referencias

[1] A. Forn-Alonso, M.T Baile-Puig y E, Rupérez-de-Gracia. Propiedades tribológicas de los materiales compuestos de matriz de aluminio reforzados con partículas cerámicas. Rev, Metal. Madrid Extr., pp. 193-196, 2005.

[2] D.K. Aspinwall, F.L. Zhao y F. El-Menshawy: Electrodischarge texturing (EDT) of steel rolls. Surface Topography 2, pp.123-141, 1989.

[3] J.J. Pamies Teixeira: Fundamentos Físicos do Corte de Metais, EDINOVA – Editorial da Universidade Nova de Lisboa, 2002.

[4] M. Ghoreishi and J. Atkinson: A comparative experimental study of machining characteristics in vibratory, rotary and vibro-rotary electro-discharge machining. Journal of Materials Processing Technolog. 120, pp.374-384, 2002.

[5] Markopoulos, N.M. Vaxevanidis, G. Petropoulos, D.E. Manolakos, "Artificial neural networks modeling of surface finish in Electro-Discharge Machining of tool steels", Proceedings of ESDA2006 8th Biennial ASME Conference on Engineering Systems Design and Analysis July 4-7, 2006, Torino, Italy.

[6] M K Pradhan, R Das, and C.K. Biswas, "Comparisons of neural network models on surface roughness in electrical discharge machining", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, pp. 223: 801-808, July 1, 2009.

[7] Q. Gao, Q. Zhang, S. Su, J. Zhang, "Parameter optimization model in electrical discharge machining process", Journal of Zhejiang University SCIENCE A. Vol. 9(1), pp.104-108, 2008.

[8] N. Pellicer, J. Ciurana and T. Ozel, "Influence of Process Parameters and Electrode Geometry on Feature Micro-Accuracy in Electro Discharge Machining of Tool Steel", Materials and Manufacturing Processes, vol. 24 (12), pp. 1282-1289, 2009.

[9] M. Correa, J.R. Alique and C. Bielza, "Comparativa de modelos con aprendizaje supervisado: aplicación a un proceso industrial", IV Simposio de control inteligente, 11-13 June, Santander, España, 2008.

[10] M. Correa, C. Bielza, M.deJ. Ramirez and J.R. Alique, "A Bayesian network model for Surface prediction in the machining process", International Journal of Systems Science, Vol. 39 (12), pp. 1181-1192, 2008.

[11] M. Correa, C. Bielza and J. Pamies-Teixeira, "Comparison of Bayesian networks and artificial neural networks for quality detection in a machining process", Expert Systems with Applications, Vol. 36, pp. 7270-7279, 2009.

[12] Ghoreishi, M. & Atkinson, J. (2002). A comparative experimental study of machining characteristics in vibratory, rotary and vibro-rotary electro-discharge machining. Journal of Materials.

[13] M.H. Hassoun: Fundamentals of Artificial Neural Networks. MIT Press. 1995.

[14] F. V. Jensen: Bayesian Networks and Decision Graphs. Springer Verlag, 2001.

[15] N. Friedman, D. Geiger and M. Goldszmit, "Bayesian Network Classifiers. Machine Learning", vol. 29, pp. 131-161, 1997.

[16] M. Hall, E. Frank, G. Holmes, B. Pfahringer, P. Reutemann, I. Witten: The WEKA data mining software: an update. SIGKDD Explorations. 11(1), pp. 10-18, 2009.

[17] J.D. Rodríguez, A. Pérez y J.A. Lozano: Sensitivity Analysis of k-Fold Cross Validation in Prediction Error Estimation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 32(3), pp. 569-575, 2010.

Finding suitable time partitions for the linguistic summarization of time series

Rita Castillo-Ortega[1], **Nicolás Marín**[1], **Jesús G. Miranda**[2], **Daniel Sánchez**[1]

[1]*Department of Computer Science and A. I.*
18071 - University of Granada, Spain, {rita,nicm,daniel}@decsai.ugr.es
[2]*Department of Algebra*
18071 - University of Granada, Spain, jesusgm@ugr.es

Abstract

In this paper, a preliminary approach to face the segmentation problem during the linguistic summarization of time series is presented. In previous works our methodology worked with a user-given linguistic partition of the temporal time series data in order to perform the summarization. Although this is good regarding the understandability, when describing some properties of the series, the given partition is not the most appropriate. As we will see, by iteratively smoothing the original time series data, we come up with a machine-built hierarchy of partitions that will guide the summarization process. The friendliness of the final solution is not in danger since the user-given partition could still be used to construct the post-processed text presented to the human users.

Keywords: Linguistic Description, Time Series, Segmentation, Trends.

1 INTRODUCTION

Nowadays it is a common situation that companies and organizations have to deal with massive sets of data as an important part of their daily routine. For this important task, they find support in using data management tools born within the Business Intelligence field. The main utility of these tools is the transformation of raw data into useful information for decision makers. As the receivers of this information are human users, presenting summaries of the data involving the utilization of natural language eases the understanding of these data, and, as a consequence, facilitates the decision making process and enhances the company performance.

Historically, fuzzy set theory and fuzzy logic have played an essential role in the attempts to transform data into words to obtain linguistic descriptions understandable by humans [10]. Many researchers have used them in order to develop different approaches to do linguistic summarization [13, 8, 14, 5, 9].

In previous contributions, we have presented some proposals to linguistically describe time series attending to different characteristics, as value or trend [2], and also the description of the comparison of time series using several methods [1, 3]. These approaches have been implemented in a friendly web platform for the management of data cubes with linguistic dimensions (Linguistic F-Cube Factory [4]).

In our work, we have always defended the idea of giving the user the opportunity to define the linguistic framework that will be used to describe the temporal dimension that includes a hierarchical segmentation of the time domain. Although this is a good strategy in order to make summaries easily understandable, in some situations the user-given partitions may not be the most appropriate. In particular, this is the case when describing trends in the series and the segmentation should be directed by those points where these trends change.

Several authors have dedicated their efforts to the segmentation problem oriented to the description of different properties of the series. In [6] an overview of some of the most relevant segmentation techniques can be found. In [11] a segmentation method to perform the segmentation of a periodic time series data based on mathematical morphology is presented. A different way of segmenting temporal series based on a piecewise linear function is presented in [7].

In this paper, we propose an alternative preliminary approach to face the segmentation of the series based on a progressive smoothing of the time series. This novel method produces a hierarchical segmentation of the time domain that can be used later for the linguistic summarization of the trends of the series. The brevity of the lingusitic summary benefits from the use of the obtained hierarchical segmentation.

2 TRENDS IN TIME SERIES

In this section we will present the definition of the linguistic background needed to face the summarization process. After that, we will focus on the property of the series we try to summarize: the trends.

2.1 TIME SERIES

In previous papers [3, 2], we have presented a new general model to obtain linguistic summaries from time series data. This model can work with time series data obtained by means of OLAP operations on data cubes with time dimension. Suppose that the time dimension is described in its finest grained level of granularity by members $T = \{t_1, ..., t_m\}$.

Then, through the use of appropriate queries we can associate fact values to each of the time members: this way, we have $TS = \{< t_1, v_1 >, ..., < t_m, v_m >\}$, where every v_i is a value of the basic domain of the variable V.

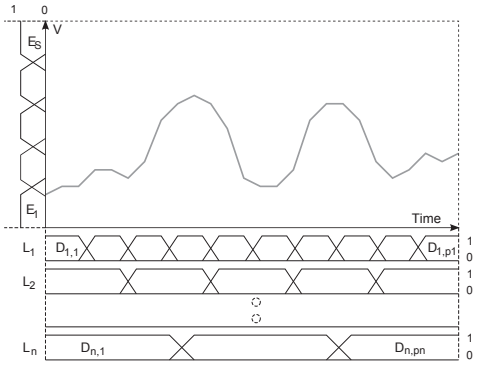


Figure 1: General context for the summarization of a time series.

Figure 1 illustrates the linguistic context built to describe the temporal series by means of natural language. Both axis x and y are partitioned using linguistic labels. While the variable domain is described using a single partition of linguistic labels, the temporal domain is described by a hierarchy of partitions. Each level of the hierarchy represents a linguistic partition of the same domain but following different levels of abstraction in the involved labels.

2.2 DESCRIPTION OF TIME SERIES AND SEGMENTATION

Using the previously described linguistic framework, we have proposed several methods to linguistically describe time series [2]. In our approach, a linguistic description is a collection of sentences in natural language. To build this kind of descriptions, we have taken concepts from Computational Theory of Perceptions [12]; more concretely, we have used protoforms and we have proposed algorithms to automatically find a *good* set of instantiations of these protoforms for the description of the series.

In our previous works, we have mainly focused on the value of the series. To complete this task, we have used protoforms based on quantified sentences of the form *"Q of D are A"* where Q is a linguistic quantifier, D is a time period and A is a description of the value of the series in D. The whole description is a collection of quantified sentences like this, where each sentence describes a *segment* of the series.

In our approach, D takes its values from a user-defined hierarchy of labelled partitions of the time domain (see Figure 1), and, therefore, the responsibility of the segmentation of the series goes to the user. This is *good* for the sake of user understanding, because terms in the linguistic descriptions are directly taken from the linguistic framework provided by the user. However, sometimes it is not possible to find good descriptions subject to this *pre-defined* segmentation. For example, we can find this limitation when trying to describe the trends of the series, understanding trends as the description of the increases and decrements that the series experiences along the time.

2.3 DESCRIPTION OF TRENDS

When describing trends, we can use a collection of instances of the following protoform *"In D, the trend is A (B)"* where D is a time period, A is a description of the trend and B is a number that expresses the variation observed in the series.

In order to describe the trends present in the analysed time series, A takes values from a linguistic variable shown in Figure 2 defined on the slope domain.

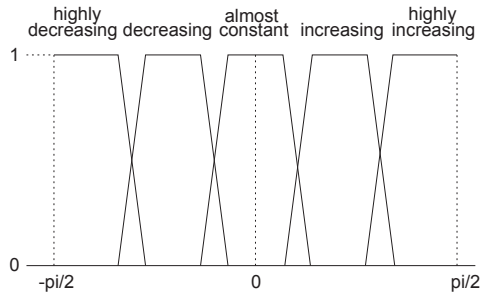


Figure 2: Linguistic variable for trends description.

The whole set of sentences based on the previously defined protoform, must be a segmentation of the series. Ideally, this segmentation must fit to the trend changes that are observed in the evolution of the series.

3 SEGMENTATION OF THE SERIES

An ideal trend in a time series is a collection of ordered time instants in which the value of the series is always increasing (resp. decreasing, constant). In order to describe a time series in terms of ideal trends, the most suitable segmentation of the time dimension is obtained by locating time instants in which the trend changes. Time intervals between consecutive trend changes can be perfectly described by means of the kind of protoforms presented in the previous section.

In this paper, we say that there is a change in trend at time instant t_i when one of the following situations occurs:

$$v_{i-1} > v_i \leq v_{i+1} \quad (1)$$
$$v_{i-1} \geq v_i < v_{i+1} \quad (2)$$
$$v_{i-1} < v_i \geq v_{i+1} \quad (3)$$
$$v_{i-1} \leq v_i > v_{i+1} \quad (4)$$

However, limiting the description of the series to intervals between consecutive changes in trends in the original series is not a good idea since small variations due to *unimportant* fluctuations in the value of the series, or even noise in data, can lead to a large amount of *change points*. The corresponding description will be comprised of a large amount of sentences describing very small parts of the series. Furthermore, this kind of *perfect* description of very local trends is not what a human user would expect. On the contrary, humans use to give less precise descriptions of approximate, global trends. For this purpose, only the most relevant of all the change points (i.e. those defining the approximate limits of global trends) must be taken into account.

On the other hand, trends are not only simply local or global, but we can define a complete hierarchy of trends in which a certain trend describing the evolution of the series in a time interval D, can be described more precisely by a collection of trends corresponding to time intervals defining a partition of D, and so on recursively. This is also the way in which humans describe time series, starting from larger trends and performing more precise descriptions of each interval until a *good enough* fitting between the description and the time series is achieved.

This procedure requires a hierarchical partition of the time series. Our approach for obtaining such hierarchical partition consists in iteratively evaluating the importance of the change points. In each iteration, some of the points will be discarded, until less than two points are left. Taking those iterations where points are eliminated as levels in a hierarchy, we obtain a hierarchical partition.

3.1 SMOOTHING METHOD

In order to evaluate the relevance of the change points, we will perform an iterative smoothing of the series using a moving average as follows: let $TS^i = \{< t_1, v_1^i >, ..., < t_m, v_m^i >\}$ be the smoothed time series at iteration i, with $TS^0 = TS$. Then the smoothing of TS^i is a new time series TS^{i+1} defined by $v_j^{i+1} = (v_{j-1}^i + v_j^i + v_{j+1}^i)/3$ for $1 < j < m$ with $v_1^i = v_1^{i+1}$ and $v_m^i = v_m^{i+1}$.

3.2 OBTAINING THE HIERARCHY

As a result of the iterative process described in the previous section, we have a collection of increasingly smoothed series $\{TS^0, ..., TS^i, ...TS^k\}$. Each of these series has its own set of change points. Let $CP^i = \{cp_1^i = t_0, ..., cp_j^i, ..., cp_{ni}^i = t_m\}$ be the ordered set of change points observed in the smoothed series TS^i.

As a consequence of the smoothing process, we have that $\lim_{i\to\infty} |CP^i| = 2$. We omit here the proof for the sake of space. The use of a bounded precision to compute the moving average during the smoothing guarantees that this limit is reached in a finite number of iterations. In fact, taking into account the goal of the smoothing, we stop the process when $|CP^i|$ is less or equal to three, that is, when at most one change point remains together with the starting and ending points of the series.

If we compare the change points set of two consecutive iterations CP^i and CP^{i+1}, we can have:

- A change point resists the iteration exactly as it is.
- A change point resists the iteration, but it is slightly moved on the time dimension. It can even be *temporarily* split into more than one close points.
- A change point does not resist the iteration and disappears.

Due to the second case, and taking into account that we want to build a hierarchical segmentation of the series, we cannot directly take CP^i to build the mentioned hierarchy. Instead, we have to perform a transformation of these sets.

Let us define the following matching function M:

$$M(cp_j^i) =$$

$$\begin{cases} \text{if i=0,} & cp_j^i \\ \text{if i>0,} & \min_k\{cp_k^{i-1} |\ \nexists h, |cp_h^{i-1} - cp_j^i| < |cp_k^{i-1} - cp_j^i|\} \end{cases}$$

Using M, we can define a transformation function T that connects a given cp_j^i with an original change point cp_k^0 as follows:

$$T(cp_j^i) = \begin{cases} \text{if i=0,} & cp_j^i \\ \text{if i>0,} & T(M(cp_j^i)) \end{cases}$$

Finally, from a given set $CP^i = \{cp_1^i = t_0, ..., cp_j^i, ..., cp_{ni}^i = t_m\}$, we can define the transformed set $CP_*^i = \{T(cp_1^i), ..., T(cp_j^i), ..., T(cp_{ni}^i)\}$.

Taking into account this definition, we have that $CP_*^{i+1} \subseteq CPi_*$ and, therefore, they can be directly used to build a hierarchical segmentation of the time series TS. Figure 3 depicts this hierarchical segmentation for the example time series.

4 DESCRIBING TIME SERIES IN TERMS OF TRENDS

We propose a greedy algorithm similar to those proposed in our previous works [2]. The objective is to obtain a summary covering the whole time domain using the minimum possible number of *good* sentences. A sentence "In D, the trend is A (B)' is considered to be *good* when in the interval D, the Mean Square Error (MSE) between the values of TS and the segment defined by the extreme points of D in TS is less or equal than a user-defined threshold τ. In practice, and in order to work with values of τ that are independent from the value domain of the time series, we will calculate the MSE as a value in $[0,1]$ by considering a normalized version of TS with all values in $[0,1]$, noted TS^*. Hence we shall consider $\tau \in [0,1]$. Notice that TS^* will be used for calculating the MSE only, whilst for the description of slopes and approximate difference between points we will use the original time series TS.

Let $D_{i,j}$ be a time interval delimited by the change points $m_{i,j}, M_{i,j}$ with $m_{i,j} < M_{i,j}$ and let $vm_{i,j}$ and $vM_{i,j}$ be the corresponding values of TS at those time instants. Let $segment(TS, D_{i,j})$ be the segment between points $< m_{i,j}, vm_{i,j} >$ and $< M_{i,j}, vM_{i,j} >$. Let $slope(TS, D_{i,j})$ be the slope of $segment(TS, D_{i,j})$. Let TS^* be the normalization of time series TS so that all values are in $[0,1]$, and let $vm_{i,j}^*$ and $vM_{i,j}^*$ be the values of the time series TS^* at time instants $m_{i,j}$ and $M_{i,j}$, respectively. Let $MSE(TS^*, segment(TS^*, D_{i,j}))$ be the Mean Square Error between values of the time series TS^* and values of $segment(TS^*, D_{i,j})$. Algorithm 1 is our greedy algorithm for linguistic summarization of trends in time series.

In order to look for *brevity*, we start from the time periods at the top level of the hierarchy obtained by following the procedure described in previous sections. The set *ToSummarize* is the collection of time periods for which a description has not been provided yet. The algorithm takes time periods from *ToSummarize* until it is empty. If it is possible to obtain a MSE lesser than or equal to τ for a taken period, the procedure obtains a sentence for that period, which is added to *Summary*. Otherwise, the algorithm add to *ToSummarize* the *corresponding children* in the next level of the time domain (lines 13-14). For a period $D_{i,j}$, the corresponding set of children $ch(D_{i,j})$ is defined as follows: $ch(D_{1,j}) = \emptyset$ for all j, otherwise $ch(D_{i,j}) = \{D_{i-1,k}, k \in \{1..p_{i-1}\} | D_{i-1,k} \cap D_{i,j} \neq \emptyset$ and $\neg \exists D \in ToSummarize \cup Summarized, (D_{i-1,k} \cap D_{i,j}) \subseteq D\}$, where p_{i-1} is the number of labels in level L_{i-1}. The final set of linguistically quantified sentences comprising the summary is *Summary*. Figure 4 shows the result obtained when applying this method to our example time series.

Algorithm 1 Algorithm to obtain linguistic summaries of trends in time series.

Input

A time series TS

A hierarchical partition of the time dimension D with n levels.

A linguistic variable E for trend slope.

A threshold τ as maximum error.

Output

A Summary of TS comprised of a set of sentences "In D, the trend is A (B)".

Algorithm

1: $ToSummarize \leftarrow L_n$;
2: $Summary \leftarrow \emptyset$; $Summarized \leftarrow \emptyset$;
3: **while** $ToSummarize \neq \emptyset$ **do**
4: Take $D_{i,j} \in ToSummarize$
5: $ToSummarize \leftarrow ToSummarize \backslash \{D_{i,j}\}$;
6: $covered \leftarrow false$;
7: **if** $MSE(TS^*, segment(TS^*, D_{i,j})) \leq \tau$ **then**
8: Let $A \leftarrow argmax_{*S \in E} S(slope(TS, D_{i,j}))$;
9: $Summary \leftarrow Summary \cup$ {In $D_{i,j}$, the trend is A (around $|vm_{i,j} - vM_{i,j}|$) };
10: $Summarized \leftarrow Summarized \cup (D_{i,j})$;
11: $covered \leftarrow true$;
12: **end if**
13: **if** *not covered* and $i > 1$ **then**
14: $ToSummarize \leftarrow ToSummarize \cup ch(D_{i,j})$;
15: **end if**
16: **end while**

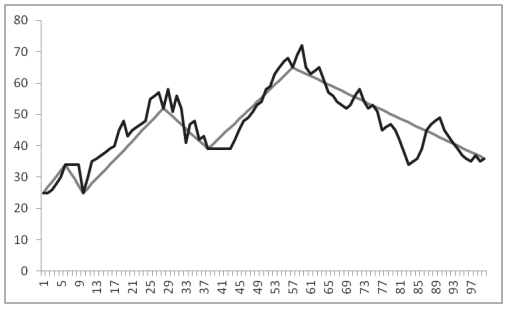


Figure 4: Resulting segmentation when summarizing our example.

According to this result, the linguistic description offered to the user would be the following one:

"In period from aprox. 1 to aprox. 5, the trend is highly increasing (around 10 units). In period from aprox. 5 to aprox. 9, the trend is highly decreasing (around 10 units). In period from aprox. 9 to aprox. 27 the trend is increasing (around 30 units). In period from aprox. 27 to aprox. 37, the trend is decreasing (around 15 units). In period from aprox 37 to aprox. 56, the trend is increasing (around 25 units). In period from aprox. 56 to aprox. 100, the trend is decreasing (around 30 units)."

Some post-process could be done in order to incorporate the user-given hierarchy of linguistic labels to the final solution. Moreover, the post-processed solution is expected to be shorter than the original one.

5 CONCLUSIONS

In this work, we have presented a new segmentation method of time series. This preliminary method is based on the iterative smoothing of the series resulting on a hierarchy of change points. This hierarchy will be used during the linguistic summarization process carried out by our previously presented summarization method, and it will come up in an unique fitting segmentation of the time domain used to construct the natural language text that describes the trends found in the series. We will keep working to enhance the method focusing our interest on using the user-provided hierarchy of linguistic labels to obtain a more friendly final result.

Acknowledgements

Part of this research was supported by the Andalusian Government (Junta de Andalucía, Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa) under project P07-TIC-03175 *Representación y Manipulación de Objetos Imperfectos en Problemas de Integración de Datos: Una Aplicación a los Almacenes de Objetos de Aprendizaje*. Part of this research was supported by the Spanish Government (Science and Innovation Department) under project TIN2009-08296.

References

[1] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez. Time series comparison using linguistic fuzzy techniques. In *IPMU 2010*, pages 330–339, 2010.

[2] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez. A fuzzy approach to the lingusitic summarization of time series. *Special Topic Issue on Soft Computing Techniques in Data Mining in Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing (JMVLSC)*, 17(2,3):157–182, 2011.

[3] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez. Linguistic query answering on data cubes with time dimension. *Special Topic Issue on Advances in Fuzzy Querying: Theory and Applications in International Journal of Intelligent Systems (IJIS)*, 26(10):1002–1021, 2011.

[4] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez. Flexible querying with linguistic f-cube factory. In *FQAS'13*, pages 245–256. Springer, Heidelberg, 2013.

[5] F. Díaz-Hermida and A. Bugarín. Linguistic summarization of data with probabilistic fuzzy quantifiers. In *ESTYLF 2010*, pages 255–260, 2010.

[6] F. Höppner. Time series abstraction methods – a survey. In *Informatik bewegt: Informatik 2002 - 32. Jahrestagung der Gesellschaft für Informatik e.v.*, pages 777–786. GI, 2002.

[7] J. Kacprzyk, A. Wilbik, and S. Zadrozny. An approach to the linguistic summarization of time series using a fuzzy quantifier driven aggregation. *Int. J. Intell. Syst.*, 25(5):411–439, 2010.

[8] J. Kacprzyk and S. Zadrozny. Data mining via protoform based linguistic summaries: Some possible relations to natural language generation. In *Proceedings of the IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining, CIDM 2009, part of the IEEE Symposium Series on Computational Intelligence 2009, Nashville, TN, USA, March 30, 2009 - April 2, 2009*, pages 217–224, 2009.

[9] A. Laurent. A new approach for the generation of fuzzy summaries based on fuzzy multidimensional databases. *Intell. Data Anal.*, 7:155–177, April 2003.

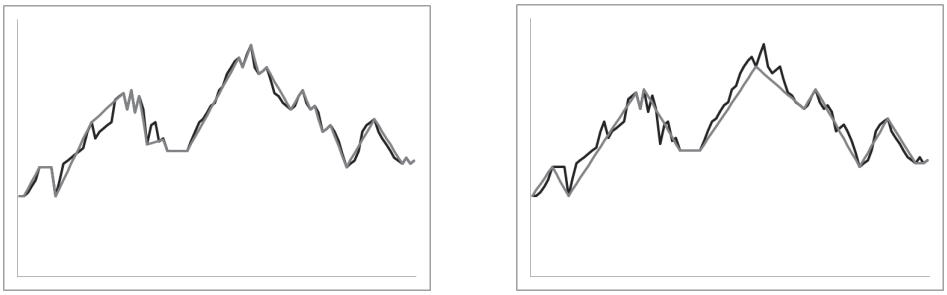
[10] S. Mitra, Senior Member, Fellow, S. K. Pal, and P. Mitra. Data mining in soft computing framework: A survey. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13:3–14, 2001.

[11] G. Moyse, M.J. Lessot, and B. Bouchon-Menier. Mathematical morphology tools to evaluate periodic linguistic summaries. In *FQAS'13*, pages 257–268. Springer, Heidelberg, 2013.

[12] S. Méndez Nuñez and G. Triviño. Combining semantic web technologies and computational theory of perceptions for text generation in financial analysis. In *FUZZ-IEEE 2010, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Barcelona, Spain, 18-23 July, 2010, Proceedings*, pages 1–8, 2010.

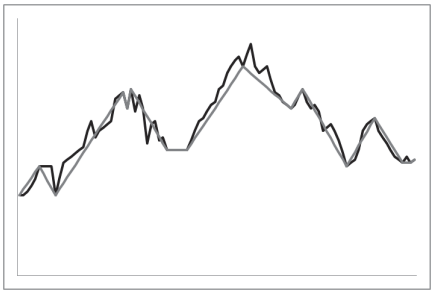
[13] G. Raschia and N. Mouaddib. Saintetiq: a fuzzy set-based approach to database summarization. *Fuzzy Sets Syst.*, 129(2):137–162, 2002.

[14] A. van der Heide and G. Triviño. Automatically generated linguistic summaries of energy consumption data. In *ISDA 2009*, pages 553–559, 2009.

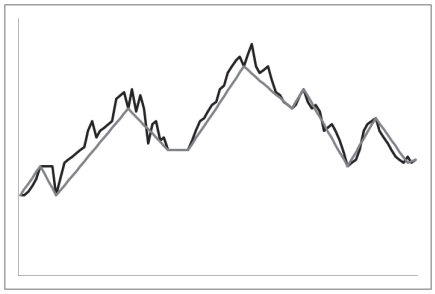


a) iteration 1

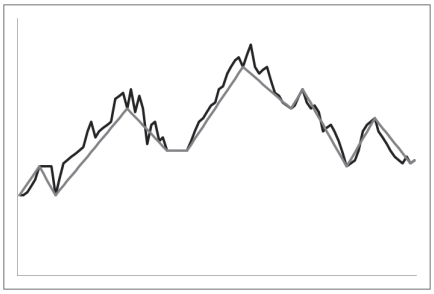
b) iteration 2



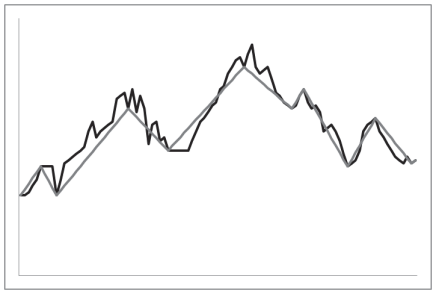
c) iteration 3



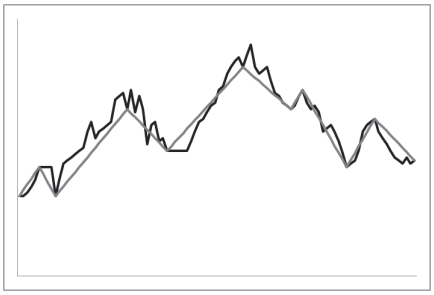
d) iteration 4



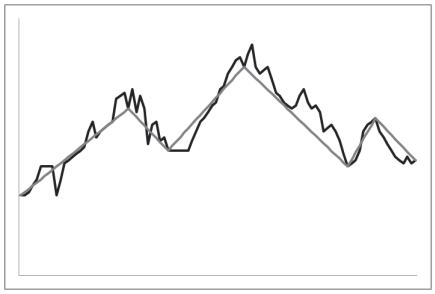
e) iteration 5



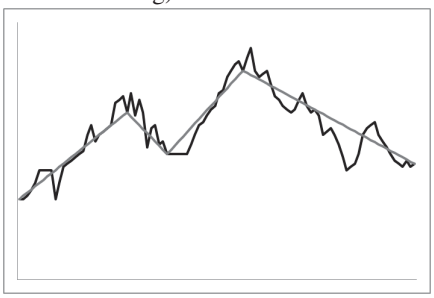
f) iteration 6



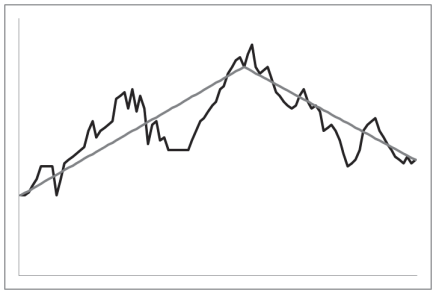
g) iteration 8



h) iteration 9



i) iteration 37



j) iteration 127

Figure 3: Hierarchical segmentation for the example time series.

Extensión del concepto de Percepción Computacional utilizando Z-numbers

Patricia Conde-Clemente, **Jose M. Alonso**, **Gracian Trivino**

European Centre for Soft Computing
Gonzalo Gutiérrez Quirós s/n, 33600 Mieres, Asturias, Spain,
{patricia.conde,jose.alonso,gracian.trivino}@softcomputing.es

Resumen

Para que las descripciones lingüísticas generadas automáticamente sean útiles, éstas deben ser fiables. Los seres humanos utilizamos expresiones que reflejan nuestro grado de confianza en los datos que manejamos. En este artículo, extendemos nuestro modelo lingüístico granular incorporando el concepto de Z-numbers introducido por Zadeh en 2011. De esta forma cada percepción computacional puede ir acompañada de un grado de confianza relativo a la fiabilidad de los datos que representa. Para ilustrar el uso del nuevo modelo, hemos realizado un experimento que genera descripciones lingüísticas sobre la velocidad de los autobuses urbanos de Gijón.

Palabras Clave: Descripciones Lingüísticas de datos, Computación con Percepciones, Fiabilidad.

1 INTRODUCCIÓN

Las descripciones lingüísticas de fenómenos complejos, son expresiones en lenguaje natural construidas a partir de conjuntos de datos numéricos. Estas descripciones, facilitan el trabajo y hacen más comprensible la información para las personas. En este campo, podemos encontrar varios ejemplos de resúmenes lingüísticos: de datos médicos que se generan utilizando ontologías y gramáticas para la generación de lenguaje natural [6], de datos acerca de series temporales que se generan a partir de proposiciones cuantificadas [4], o de datos sobre predicciones del tiempo que se generan a partir de plantillas para la generación de lenguaje natural [7].

El elemento central de nuestra línea de investigación para la generación de descripciones lingüísticas de datos es el Modelo Lingüístico Granular de Fenómenos Complejos (GLMP por sus siglas en inglés Granular Linguistic Model of Phenomena), basado en la Teoría Computacional de Percepciones de Zadeh [9, 10]. Esta teoría ofrece un entorno de trabajo para implementar sistemas con capacidad de manejar el significado de las expresiones en lenguaje natural, i.e. con la capacidad de trabajar con descripciones imprecisas de forma similar a como lo hacen los humanos [8, 11]. Nuestro grupo de investigación ha realizado descripciones lingüísticas de fenómenos tan variadas como por ejemplo: la evolución del tráfico [5], el análisis de la marcha humana [2], o descripciones sobre la belleza de las estrellas dobles [3].

Zadeh [12] presentó en 2011 el concepto de Z-numbers para cuantificar el grado de fiabilidad de la información que recibe y maneja una persona. Para que la información sea útil debe tratarse de manera adecuada. Sin embargo, en muchas ocasiones trabajamos con datos imprecisos y no podemos valorar la fiabilidad de la información derivada/extraída de ellos. Por ejemplo, si consideramos que la temperatura normal de una persona está dentro de un rango [36.1, 37.4] grados centígrados y una persona tiene 36.5° ¿Podemos afirmar que no tiene fiebre con un 100 % de confianza? Aparentemente sí, pero esta respuesta puede cambiar si el termómetro utilizado puede cometer un error de hasta 1° centígrado. En este caso, la temperatura de la persona sería $36.5 \pm 1°$ y deberíamos cuantificar la fiabilidad de la información para hacerla realmente útil.

La principal contribución de este artículo es incorporar a nuestro GLMP el concepto de Z-numbers. El objetivo es enriquecer el GLMP con descripciones lingüísticas que aporten información sobre la fiabilidad de los datos. Hemos ilustrado la utilidad de nuestra propuesta con un caso práctico: la generación de descripciones lingüísticas sobre la velocidad de los autobuses de Gijón.

El resto del artículo se ha estructurado de la siguiente forma. La Sección 2 introduce el modelo GLMP y los Z-numbers. En la Sección 3 se describe la extensión del GLMP. La Sección 4 muestra un caso de uso y la Sección 5 expone las conclusiones y el trabajo futuro.

2 PRELIMINARES

2.1 GLMP

El GLMP facilita la captura e interpretación de datos procedentes de fenómenos complejos, produciendo como resultado informes en lenguaje natural que son fáciles de entender incluso por usuarios no expertos. Un GLMP es una red de nodos (PMs por su siglas en inglés `Perception Mappings`). Cada uno de los cuales recibe como entrada un conjunto de percepciones computacionales (CPs por sus siglas en inglés `Computational Perceptions`), les aplica una función de agregación, y genera como salida una nueva CP. En la Figura 1 podemos ver un ejemplo de modelo GLMP. A continuación vamos a definir los CPs y PMs.

2.1.1 CP

Una CP es el modelo computacional de una unidad de información del fenómeno modelado. En general, una CP se corresponde con una parte específica del fenómeno modelado a un cierto nivel de granularidad. Una CP tiene los siguientes componentes (A, W) donde:

A = $(a_1, a_2, .., a_n)$ es un vector de expresiones lingüísticas (palabras o frases en lenguaje natural) que representan el dominio lingüístico completo de una CP.

W = $(w_1, w_2, .., w_n)$ es un vector con los grados de validez $w_i \in [0, 1]$ asignados a cada a_i para un contexto específico.

2.1.2 PM

Los PMs se utilizan para agregar y crear CPs. Un PM tiene los siguientes componentes (U, y, g, T):

U = $(u_1, u_2, .., u_n)$ es un vector de n entradas CPs u_i = (A_{u_i}, W_{u_i}). En el caso especial de los PMs de primer orden (1PMs), las entradas del modelo son simples valores numéricos obtenidos, e.g., de un sensor o de una base de datos.

y = (A_y, W_y) es la CP de salida.

g es la función de agregación usada para calcular W_y = $g(W_{u_1}, W_{u_2}, ..., W_{u_n})$ a partir de U. En Lógica Fuzzy, existen diferentes implementaciones de funciones de agregación. Por ejemplo, g puede ser implementada con un conjunto de reglas fuzzy. En el caso de los 1PMs, g se implementa con un conjunto de funciones de pertenencia.

T es un algoritmo de generación de texto que permite generar frases de salida. En un caso simple, T puede ser una plantilla, e.g. "La temperatura es {normal | media | alta}", aunque puede personalizarse de acuerdo a las preferencias de los usuarios.

2.2 Z-NUMBERS

Los `Z-numbers` introducidos por Zadeh en [12] tienen la capacidad de describir la fiabilidad de los números fuzzy. Básicamente un `Z-number` tiene dos componentes, Z = (A, B). La primera componente A, establece una restricción en los valores que puede tomar una variable X. La segunda componente B, es una medida de la fiabilidad de la primera componente. Siguiendo con el ejemplo presentado en la introducción si X representa la temperatura de una persona, A={normal, media, alta} y B={nada seguro, casi seguro, muy seguro}; un `Z-number` asociado podría ser Z = (normal, casi seguro), para una temperatura de $36.5 \pm 1^{\circ}$.

La computación con `Z-numbers` puede verse como una generalización de la computación con números, intervalos, números fuzzy y números aleatorios. Zadeh en [12] define las `Z-rules` como reglas que contienen `Z-numbers` en sus antecedentes y/o consecuentes:

Si (X, A_x, B_x) entonces (Y, A_y, B_y), dónde (X, A_x, B_x) se interpreta como "X es (A_x, B_x)".

Siguiendo con nuestro ejemplo, una `Z-rule` podría ser:

Si (Temperatura, normal, casi seguro) entonces (¿Tengo fiebre?, no, casi seguro)

3 EXTENSIÓN DEL GLMP CON Z-NUMBERS

La extensión del GLMP (en adelante Z-GLMP) es una generalización del GLMP original que permite cuantificar la fiabilidad de la información relativa al fenómeno modelado. En la Figura 1 podemos ver un ejemplo que muestra la dualidad entre un GLMP y un Z-GLMP. Los PMs se convierten en Z-PMs y las CPs pasan a ser Z-CPs. En el modelo GLMP se asume que los datos son totalmente fiables (f_i =1). En cambio, en el Z-GLMP la fiabilidad es gradual ($f_i \in [0, 1]$). A continuación se definen los Z-CP y Z-PM.

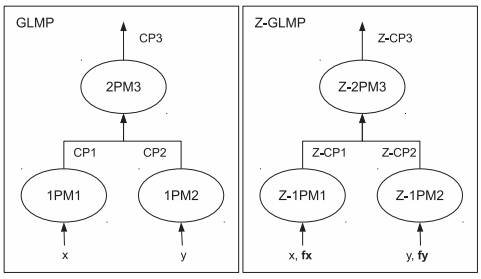


Figura 1: Comparación entre un GLMP y un Z-GLMP.

3.1 Z-CP

Una Z-CP extiende el concepto de CP para incorporar la fiabilidad de los datos. Una Z-CP tiene los siguientes com-

ponentes (A, W_A, B, W_B). A continuación se detallan los componentes añadidos respecto al CP:

B = $(b_1, b_2, .., b_n)$ es un vector de expresiones lingüísticas (palabras o frases en lenguaje natural) que representan el grado de fiabilidad de A.

W_B = $(w_{b_1}, w_{b_2}, .., w_{b_n})$ es un vector con los grados de validez $w_{b_i} \in [0,1]$ asignados a cada b_i para un contexto específico.

3.2 Z-PM

Los Z-PMs se utilizan para crear Z-CPs a partir de la agregación de CPs y/o Z-CPs. Un Z-PM se compone de cuatro elementos (U,y,g,T) donde:

U = $(u_1, u_2, .., u_n)$ es un vector de *n* entradas Z-CPs y/o CPs. En el caso especial de los Z-PMs de primer orden (Z-1PM), las entradas del modelo son pares de datos: valor numérico y su grado de fiabilidad.

y = (A_y,W_{A_y}, B_y, W_{B_y}) es la salida Z-CP.

g es la función de agregación usada para calcular W_{A_y} y W_{B_y} a partir de las entradas CPs y/o Z-CPs. Una de las posibilidades a la hora de seleccionar la función de agregación adecuada son las `Z-rules` de Zadeh. En en el caso de los Z-1PMs, g se implementa como un conjunto de funciones de pertenencia.

T es un algoritmo de generación de texto que permite generar frases de salida. En un caso simple, T puede ser una plantilla e.g. "Tenemos {mucha | alguna | poca} confianza en que la temperatura es {normal | media | alta}", aunque puede personalizarse de acuerdo a las preferencias de los usuarios.

4 CASO DE USO

4.1 LOS AUTOBUSES URBANOS DE GIJÓN

En los últimos años se ha potenciado el uso del transporte público, con el objetivo de paliar la contaminación acústica y ambiental que sufren las ciudades. Un punto importante para potenciar el uso del transporte público entre los ciudadanos es proporcionar un servicio de calidad. Aunque la calidad del servicio de transporte cubre muchos aspectos [1] como pueden ser: servicios ofertados, accesibilidad, información, tiempo, atención al cliente, confort, seguridad, impacto ambiental; hay otras cuestiones dónde los usuarios de estos servicios cada vez son más exigentes como son la puntualidad, comodidad o información, entre otras.

En la actualidad, los usuarios del transporte público pueden encontrar información en tiempo real de los servicios ofertados, a través de páginas web o puntos de información. Más concretamente, el servicio público urbano de autobuses de Gijón[1], utiliza un sistema de geolocalización para proporcionar información en tiempo real (a través de un servicio web[2]) del estado de cada autobús. Esta información permite a los usuarios saber, por ejemplo, el número de autobuses que recorren una línea o los minutos (aproximados) que faltan para que el autobús llegue a la parada. Pero actualmente, los usuarios no pueden saber cuánto tarda un autobús en recorrer un trayecto concreto, o que líneas son más puntuales. Como primer paso para el cálculo de la puntualidad, en este artículo realizamos descripciones lingüísticas sobre la velocidad del servicio público de autobuses, a partir de los datos obtenidos del servicio web.

4.2 OBTENCIÓN DE LOS DATOS

Entre las posibles operaciones ofrecidas por el servicio web, hemos consultado la operación *estadoParada*. Esta operación, recibe como parámetro el identificador de una parada y devuelve el conjunto de autobuses que se dirigen a ella, la distancia en metros a la parada consultada y el tiempo de actualización de los datos (entre otra información). Tras analizar los datos, vimos que estos nos permiten estimar la velocidad con cierto grado de fiabilidad. Hablamos de estimación de la velocidad, porque el autobús no envía los datos en el momento que llega a la parada, el envío lo realiza de forma periódica y no podemos saber la hora exacta en la que llegó. La solución para estimar la velocidad es analizar los datos enviados cuando el autobús se encuentra lo más cerca posible de la parada.

En el caso de uso propuesto calculamos la velocidad entre dos paradas consecutivas denominadas *parada de origen* y *parada de destino*. Para estimar el tiempo medio que tarda un autobús en recorrer dos paradas consecutivas, se consultaron y almacenaron datos (durante una semana), utilizando la operación *estadoParada* del servicio web. Concretamente, se consultaron las paradas *Pedro Duro* (origen) y *Playa de poniente* (destino). Estas paradas se escogieron por el número elevado de líneas que las recorren (un total de 6) en diferentes trayectos y horarios. Tras analizar los datos vimos dos cosas:

1. La duración y la velocidad aproximada del recorrido (origen-destino) tiene una correspondencia con perfil exponencial (ver Figura 2). Dado que los límites de velocidad son conocidos, esta correspondencia nos permite generalizar los resultados obtenidos al resto de recorridos origen-destino.

2. Podemos utilizar la distancia a las paradas origen-destino para cuantificar la fiabilidad de la velocidad estimada.

[1] http://bus.gijon.es
[2] http://docs.gijon.es/sw/busgijon.asmx

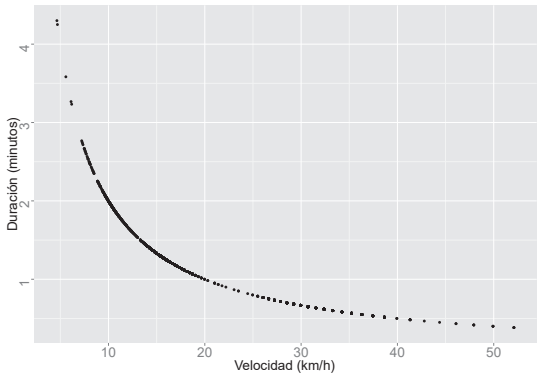


Figura 2: Correspondencia entre la duración y la velocidad aproximada del recorrido (origen-destino).

En la Figura 3 podemos ver como se obtienen la velocidad aproximada (V) y la distancia (D) entre las paradas origen-destino, a partir de los datos obtenidos del servicio web. En la figura las siglas PO y PD, son las paradas de origen y destino (respectivamente). B_X y B_Y representan los datos consultados cuando el autobús se encuentra más cerca de PO y PD. T es el tiempo aproximado que tarda el autobús en recorrer las paradas origen-destino (PO, PD). T se calcula como la diferencia entre los tiempos consultados B_X y B_Y. DO_X y DD_Y son la distancias consultadas desde B_X, B_Y a las PO, PD (respectivamente). DD_X es la distancia aproximada desde B_X a PD. D se calcula restando la distancia DD_X menos DO_X. V se calcula dividiendo la distancia D entre el tiempo T.

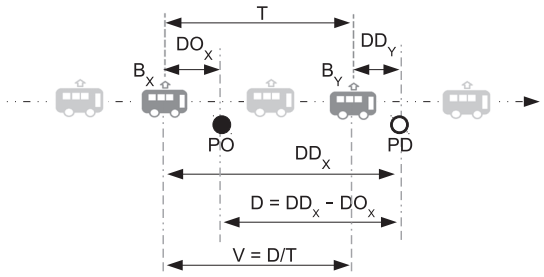


Figura 3: Tratamiento de los datos consultados en el servicio web, donde: PO es la parada de origen. PD es la parada de destino. B_X y B_Y son los datos del autobús en los puntos X e Y. DO_X distancia desde B_X a PO. DD_X distancia desde B_X a PD. DD_Y distancia desde B_Y a PD. D es la distancia estimada entre PO y PD. T es el tiempo estimado entre PO y PD. V es la velocidad estimada entre PO y PD.

4.3 DESCRIPCIONES LINGÜÍSTICAS SOBRE LA VELOCIDAD DE LOS AUTOBUSES

En la Figura 4 vemos el GLMP que permite realizar descripciones lingüísticas sobre la velocidad. Este modelo se ha definido utilizando los datos presentados en la sección previa. A continuación detallamos la definición del GLMP propuesto.

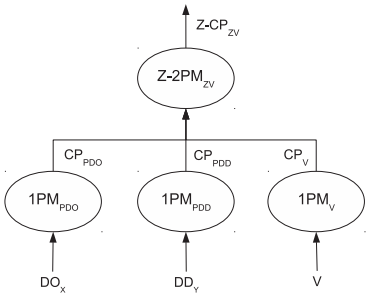


Figura 4: GLMP para realizar descripciones lingüísticas sobre la velocidad entre dos paradas consecutivas.

4.3.1 Percepciones de primer orden (1PM)

Distancia a la Parada de Origen ($1PM_{PDO}$), se define como: (U_{PDO}, y_{PDO}, g_{PDO}, T_{PDO}) donde:

U_{PDO} La entrada es la distancia DO_X (en metros) a la parada de origen.

y_{PDO} La salida CP_{PDO} describe lingüísticamente la distancia a la parada de origen. Se expresa con A={muy pequeña (mP), pequeña (P), medio pequeña (MP), media (M), medio grande (MG), grande (G), muy grande (mG)} y sus correspondientes grados de validez.

g_{PDO} Se construye con funciones de pertenencia que utilizan particiones fuzzy fuertes. Las particiones se han generado dando más importancia a las distancias pequeñas, según el perfil exponencial observado en la Figura 2. Dado que la distancia (D) entre las paradas origen-destino es variable, los puntos centrales de los triángulos se calculan teniendo en cuenta este dato (0, D/64, D/32, D/16, D/8, D/4, D/2). En la Figura 5 vemos las funciones de pertenencia del caso de uso propuesto dónde la distancia entre la paradas *Pedro Duro* y *Playa de poniente* es de 332.81 metros.

T_{PDO} = "La distancia a la parada de origen es {muy pequeña | pequeña | medio pequeña | medio | medio grande | grande | muy grande}".

Distancia a la Parada de Destino ($1PM_{PDD}$), se define como: (U_{PDD}, y_{PDD}, g_{PDD}, T_{PDD}). Se omite la descripción detallada de esta percepción debido a su dualidad con la parada de origen.

Velocidad del trayecto Origen-Destino ($1PM_V$), se define como: (U_V, y_V, g_V, T_V) donde:

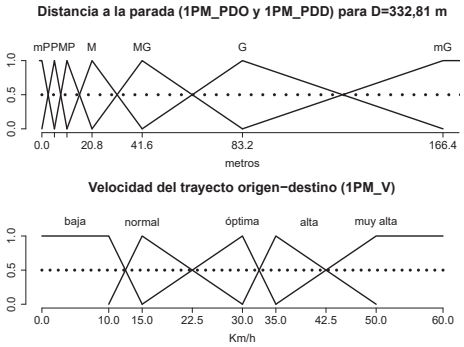


Figura 5: Funciones de pertenencia asociadas a las percepciones de primer orden.

U_V La entrada es la velocidad V (en Km/h) en el recorrido origen-destino.

y_V La salida CP_V describe lingüísticamente la velocidad del trayecto. Se expresa con A={baja (B) | normal (N) | óptima (O) | alta (A) | muy alta (mA)} y sus correspondientes grados de validez.

g_V Se construye con funciones de pertenencia que utilizan particiones fuzzy fuertes (ver Figura 5). Estas particiones toman como referencia la velocidad máxima a la que generalmente se debe circular por el casco urbano de una ciudad (30 km/h). La cercanía a esta valor indica que la velocidad es óptima. En los datos almacenados del servicio web, este valor lo alcanzan generalmente los autobuses que circulan a primera y última hora del día. En cambio en las horas más transitadas la velocidad normal suele ser mayor de 10 y menor que 30 (Km/h). Por debajo de los 10 Km/h la velocidad la consideramos baja. Y por encima de los 30 Km/h la consideramos alta, debido a que sobrepasan los límites establecidos por la ley.

T_V = "La velocidad del trayecto es {baja | normal | óptima | alta | muy alta}".

4.3.2 Percepciones de segundo orden (2PM)

Z-Velocidad del trayecto Origen-Destino (Z-2PM_{ZV}), se define como: (U_{ZV}, y_{ZV}, g_{ZV}, T_{ZV}) donde:

U_{ZV} = ($1PM_{PDO}$, $1PM_{PDD}$, $1PM_V$)

y_{ZV} la salida Z-CP_{ZV} describe de forma lingüística la velocidad del trayecto origen-destino, asociando un nivel de fiabilidad a la velocidad. Z-CP_{ZV} se expresa con velocidad A={baja (B) | normal (N) | óptima (O) | alta (A) | muy alta (mA)}, fiabilidad B={muy grande (mG), grande (G), medio grande (MG), media (M), medio pequeña (MP), pequeña (P), muy pequeña (mP)} y sus correspondientes grados de validez.

g_{ZV} La función de agregación se implementa con `Z-rules`. En la Figura 6 vemos las `Z-rules` generadas que son del tipo:

Si CP_{PDD} es P y CP_{PDO} es P y CP_V es O entonces Z-CP_{ZV} es (O,G)

y se pueden leer de la siguiente forma: "Si la distancia a la parada de destino (CP_{PDD}) es pequeña (P) y la distancia a la parada de origen (CP_{PDO}) es pequeña (P) y la velocidad (CP_V) es óptima (O), entonces podemos decir con fiabilidad grande (G) que la velocidad es óptima (O)."

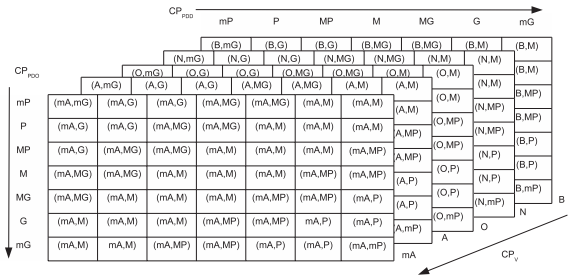


Figura 6: `Z-rules` que definen la velocidad entre las paradas de origen y destino (Z-2PM_{ZV}).

T_{ZV} = "Tenemos una confianza {muy grande | grande | medio grande | media | medio pequeña | pequeña | muy pequeña} en que la velocidad del autobús que recorre las paradas (PO) - (PD) de la línea (LL), trayecto (TT), del día-hora (DMA HMS) es {baja | normal | óptima | alta | muy alta}".

4.3.3 Ejemplo de generación de frases sobre la velocidad

Utilizando el GLMP que acabamos de presentar y los datos proporcionados por el servicio web, hemos implementado un prototipo[3] que genera frases sobre la velocidad de los autobuses de Gijón en tiempo real. A continuación, a modo de ejemplo, se puede ver una de las frases generadas:

"Tenemos una confianza medio grande en que la velocidad del autobús 335 que recorre las paradas Pedro Duro - Playa de Poniente de la línea 12, trayecto 2, del día-hora 08-10-2013 18:10 es óptima".

El ejemplo describe la velocidad del autobús 355, línea 12, trayecto 2, del día 08-10-2013 y hora del recorrido aproximada 18:10. Este autobús quedó a una distancia DO_X=22,9 metros del origen y DO_Y=32,8 metros del destino. La velocidad estimada del autobús fue V=30,72 km/h. En base a esto, inferimos que la velocidad es óptima con confianza medio grande.

[3]http://www.softcomputing.es/ldcp/bus-service-quality

4.4 ANÁLISIS EXPERIMENTAL

El prototipo propuesto ha estado funcionando de forma ininterrumpida durante una semana. Los resultados indican que la fiabilidad de las velocidades calculadas toman valores de *muy grande* a *grande* en un 8.7 % de los casos, de *medio grande* a *media* un 54,96 %, de *medio pequeña* a *pequeña* un 36,18 % y *muy pequeña* sólo un 0,17 %.

Con fiabilidad grande, la velocidad de los autobuses es *optima* y *normal* en un 71,52 % de los casos, *baja* en un 24,5 % y *alta* un 3,97 %. Analizando los datos por rangos horarios, vemos que la velocidad baja se produce en un 16,5 % por la mañana y la tarde, cuando hay más tráfico y el autobús no puede alcanzar la velocidad óptima. El análisis por días muestra que los fines de semana se reducen los porcentajes de velocidad *óptima* y *normal*. Una causa probable es la disminución del número de autobuses los fines de semana.

5 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este artículo hemos extendido nuestro GLMP añadiendo el concepto de `Z-numbers` con el objetivo de cuantificar la fiabilidad de la información manejada, es decir, hemos generado descripciones lingüísticas que expresan la fiabilidad de la información relativa al fenómeno modelado. También, hemos desarrollado un prototipo que genera descripciones lingüísticas para estimar la velocidad de los autobuses de Gijón. Para calcular esta velocidad, el prototipo estima el momento en el cual el autobús pasa por las paradas origen-destino. Considerándose el cálculo poco fiable cuando los puntos en los que tomamos los datos del autobús están muy lejos de las paradas. Este caso práctico, además de probar la utilidad del GLMP extendido, nos ha permitido ver la dificultad en la agregación de este tipo de descripciones. Por este motivo, como trabajo futuro proponemos medir la puntualidad del servicio basándonos en la velocidad calculada. Para ello, exploraremos otros métodos de agregación usando `Z-numbers`, así como procesos para la generación automática de `Z-rules`.

Agradecimientos

Este trabajo está financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad a través del proyecto TIN2011-29827-C02-01 y de la beca FPI-MICINN BES-2012-057427; y por el Ayuntamiento de Gijón a través del proyecto “Sistema inteligente de apoyo a la decisión espacial en transporte metropolitano (SIADE-TM)” del programa “Plataformas de desarrollo empresarial (IMPULSA Empresas)”, en la convocatoria 2013.

Referencias

[1] UNE-EN 13816:2003. Transporte. Logística y servicios. Transporte público de pasajeros. Definición de la calidad del servicio, objetivos y mediciones. *AEN/CTN 152 - LOGÍSTICA Y TRANSPORTE*, 2003.

[2] A. Alvarez-Alvarez and G. Trivino. Linguistic description of the human gait quality. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(1):13 – 23, 2013.

[3] L. Arguelles and G. Trivino. I-struve: Automatic linguistic descriptions of visual double stars. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(9):2083 – 2092, 2013.

[4] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez. A fuzzy approach to the linguistic summarization of time series. *Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 17(2-3):157–182, 2011.

[5] L. Eciolaza, M. Pereira-Fariña, and G. Trivino. Automatic linguistic reporting in driving simulation environments. *Applied Soft Computing*, doi:10.1016/j.asoc.2012.09.007, 2012.

[6] J. Hunter, Y. Freer, A. Gatt, E. Reiter, S. Sripada, C. Sykes, and D. Westwater. Bt-nurse: computer generation of natural language shift summaries from complex heterogeneous medical data. *JAMIA*, pages 621–624, 2011.

[7] A. Ramos-Soto, A. Bugarin, S. Barro, and J. Taboada. Automatic generation of textual short-term weather forecasts on real prediction data. In *FQAS*, pages 269–280, 2013.

[8] R. R. Yager. Approximate reasoning as a basis for computing with words. *Computing with words in information/intelligent systems*, 1:50–77, 1999.

[9] L. A. Zadeh. From computing with numbers to computing with words. From manipulation of measurements to manipulation of perceptions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications,*, 46(1):105–119, 1999.

[10] L. A. Zadeh. Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities. *Journal of statistical planning and inference*, 105(1):233–264, 2002.

[11] L. A. Zadeh. Computing with words (CW) and its application to decision support and systems analysis. In *IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing*, pages 1–2, 2003.

[12] L. A. Zadeh. A note on z-numbers. *Information Sciences*, 181(14):2923 – 2932, 2011.

ANTECEDENTES, LAGUNAS Y NUEVOS RESULTADOS EN LOS CONJUNTOS BORROSOS DE TIPO 2

Pablo Hernández[1], **Susana Cubillo**[2], **Carmen Torres-Blanc**[2]

[1]*Departamento de Matemática y Física, Univ. Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Táchira, Venezuela*, {phernandezv}@unet.edu.ve

[2]*Departamento de Matemática Aplicada, Univ. Politécnica de Madrid, 28660 Boadilla del Monte, Madrid, España*, {scubillo,ctorres}@fi.upm.es

Resumen

A partir del "Principio de Extensión" de Zadeh se han generalizado a los conjuntos borrosos de tipo 2 (T2FSs), definiciones, operaciones, propiedades y resultados obtenidos en los conjuntos borrosos (FSs). Sin embargo, como sucede en cualquier área de investigación, quedan muchas lagunas y problemas abiertos que suponen un reto para cualquiera que quiera hacer un estudio profundo en este campo.

A este reto nos hemos enfrentado los autores del presente artículo, que pretende ser una exposición de algunos de los avances realizados en este sentido de "rellenar huecos" existentes en la teoría de conjuntos de tipo 2. En particular, se abordarán las negaciones que permiten hablar de la propiedad de autocontradicción, las t-normas y t-conormas.

Palabras Clave: Conjuntos borrosos de tipo 2, Funciones normales y convexas, Negación, Autocontradicción, T-norma, T-conorma.

1 INTRODUCCIÓN

Los conjuntos borrosos de tipo 2 (T2FSs) fueron introducidos por L.A. Zadeh en 1975 [35], como una extensión de los conjuntos borrosos de tipo 1 (FSs). Mientras que en estos últimos el grado de pertenencia de un elemento al conjunto viene determinado por un valor en el intervalo $[0,1]$, en el caso de los T2FSs el grado de pertenencia de un elemento es un conjunto borroso en [0,1], es decir, un T2FS queda determinado por una función de pertenencia $\mu : X \rightarrow \mathbf{M}$, donde $\mathbf{M} = [0,1]^{[0,1]} = Map([0,1],[0,1])$, es el conjunto de las funciones de [0,1] en [0,1] (ver [19, 21, 22]).
El hecho de que la función de pertenencia de los conjuntos de tipo 2 sea un nuevo conjunto borroso, los hace más adecuados para modelizar la incertidumbre [17, 19, 18]. En este sentido, existen diversos estudios en los que se muestran las ventajas de este tipo de conjuntos ([2], [31]), en particular, por ejemplo, los trabajos realizados por Niewiadomski [25, 23, 24] en el campo de los resúmenes lingüístico. No obstante, el subconjunto de los T2FSs más utilizado es el de aquéllos donde la pertenencia de un elemento al conjunto es un intervalo $[a,b]$ (ver Definición 4), en lugar de un conjunto borroso, ya que la dificultad operacional y computacional es menor que en los T2FSs generales (ver [18]).

Desde que los T2FSs fueron introducidos, se han extendido a dichos conjuntos (ver [19, 21, 22, 32]), a partir del "Principio de Extensión" de Zadeh, muchas de las definiciones, operaciones, propiedades y resultados obtenidos en los FSs. Sin embargo, los autores han detectado muchas lagunas en estas extensiones. Por ejemplo, en el caso de las operaciones empleadas para modelar el complementario de un conjunto, la extensión se ha realizado exclusivamente a partir de la negación estándar en [0,1], $(n = 1 - id)$. En [15] los autores demostraron que la operación resultante, no cumple todos los axiomas que debe verificar cualquier operación para ser considerada negación en un conjunto ordenado como es **M**. Es de notar que en [8] y [9], se han considerado otras operaciones de negación, sin embargo, dichos trabajos no realizan un estudio riguroso de sus propiedades.

Por otra parte, hasta el momento existen muchas propiedades que no han sido extendidas a los T2FSs, por ejemplo la autocontradicción, la contradicción entre conjuntos, la incompatibilidad, etc. En este sentido, en la Sección 3, se presentarán la definición y propiedades de autocontradicción en el marco de los T2FSs. Para este estudio ha sido necesario previamente establecer de forma correcta las negaciones en estos conjuntos.

Respecto a las operaciones denominadas normas triangulares (t-normas) y conormas triangulares (t-conormas), empleadas habitualmente para modelar, respectivamente, la intersección (conjunción) y la unión (disjunción) entre con-

juntos, Walker et al. han realizado extensiones a **L** (ver [32, 33]), pero dejando abierto el problema de encontrar nuevas t-normas y t-conormas sobre este conjunto.

Así pues, el principal objetivo de este trabajo es recopilar algunos de los resultados obtenidos por los autores en diferentes publicaciones dedicadas precisamente a exponer estas lagunas encontradas, y a completar con un estudio más exhaustivo lo que hasta el momento había sido realizado por otros autores.

El artículo se organiza como sigue: en la Sección 2 se recuerdan algunas definiciones y propiedades de los FSs y T2FSs.

En la Sección 3, Subsección 3.1 se presentan algunos conceptos y resultados realizados por otros autores en relación con las negaciones en los conjuntos borrosos, y se exponen los principales resultados de [15] sobre las negaciones sobre los T2FSs. La Subsección 3.2 se dedica a la autocontradicción y N-autocontradicción en los conjuntos borrosos, resumiendo los resultados obtenidos en [14]. En la Sección 4 el principal objeto de estudio lo constituyen las t-normas y t-conormas. Se recuerdan las principales ideas sobre las mismas, y se abordan los resultados obtenidos en [13, 16]. La última sección se dedica a exponer algunas conclusiones.

2 PRELIMINARES

En todo el trabajo se denotará por X un conjunto no vacío que representará el universo de discurso. Además, $\leq$ denotará la relación usual de orden en el retículo de los números reales.

Definición 1. ([34]) Un conjunto borroso de tipo 1 (FS), A, queda caracterizado por una *función de pertenencia* μ_A,

$$\mu_A : X \to [0,1],$$

donde $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A.

Definición 2. ([21], [22]) Un conjunto borroso de tipo 2 (T2FS), A, queda caracterizado por una *función de pertenencia*:

$$\mu_A : X \to \mathbf{M} = [0,1]^{[0,1]} = Map\,([0,1],[0,1]).$$

Esto es, $\mu_A(x)$ es un conjunto borroso en el intervalo $[0,1]$, y es el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A. Por tanto,

$$\mu_A(x) = f_x, \quad \text{donde } f_x : [0,1] \to [0,1].$$

Se denota por $F_2(X)$, $F_2(X) = Map(X,\mathbf{M})$, al conjunto de todos los conjuntos borrosos de tipo 2 sobre X.

Definición 3. ([32]) Sea $a \in [0,1]$. La función característica de a es $\bar{a} : [0,1] \to [0,1]$, donde

$$\bar{a}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Sea $\mathbf{J} \subset \mathbf{M}$ el conjunto de todas las funciones características de los elementos de [0,1].

Definición 4. ([32]) Sea $[a,b] \subseteq [0,1]$. La función característica de $[a,b]$ es $\overline{[a,b]} : [0,1] \to [0,1]$, donde

$$\overline{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

Sea $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$ el conjunto de todas las funciones características de los subintervalos cerrados de $[0,1]$. Un conjunto borroso intervalo de tipo 2 (IT2FS) es un T2FS, con todos los grados de pertenencia en **K**.

En [32], se justifica que las operaciones sobre $Map(X,\mathbf{M})$ se pueden definir de forma natural a partir de las operaciones sobre **M**, verificando las mismas propiedades. Por tanto, en este artículo trabajaremos en **M**, ya que todos los resultados se pueden extender directa y fácilmente a $Map(X,\mathbf{M})$.

Definición 5. ([12], [32], [9]) En **M** se definen las operaciones $\sqcup$ (unión), $\sqcap$ (intersección), $\neg$ y los elementos $\bar{0}$ y $\bar{1}$ de la siguiente forma:

$$(f \sqcup g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \vee z = x\},$$
$$(f \sqcap g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \wedge z = x\},$$
$$\neg f(x) = sup\{f(y) : 1 - y = x\} = f(1-x),$$
$$\bar{0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}, \quad \bar{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases},$$

donde $\vee$ y $\wedge$ son las operaciones máximo y mínimo, respectivamente, en el retículo $[0,1]$.

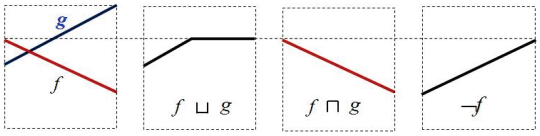


Figura 1: Ejemplo de las operaciones $\sqcup$, $\sqcap$, y $\neg$.

Figura 2: Funciones $\bar{0}$ y $\bar{1}$.

El álgebra $\mathbb{M} = (\mathbf{M}, \sqcup, \sqcap, \neg, \bar{0}, \bar{1})$ no tiene estructura de retículo, ya que no se cumple la ley de absorción [12], [32]. Por otra parte, las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ cumplen las propiedades requeridas para definir, cada una de ellas, un orden parcial sobre **M**.

Definición 6. ([22], [32]) En **M** se definen los dos órdenes parciales siguientes:

$$f \sqsubseteq g \quad \text{si } f \sqcap g = f; \quad f \preceq g \quad \text{si } f \sqcup g = g.$$

En general, estos dos órdenes no coinciden [22, 32]. $f \sqcap \bar{1} = f$, por lo que $f \sqsubseteq \bar{1}$, $\forall f \in \mathbf{M}$, es decir, $\bar{1}$ es el mayor elemento del orden parcial $\sqsubseteq$. Por otra parte, $\bar{0} \sqcup f = f$, por tanto $\bar{0} \preceq f$, $\forall f \in \mathbf{M}$ ([32]), y $\bar{0}$ es el menor elemento del orden parcial $\preceq$. Además, la función constante $g = 0$ ($g(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$) es el menor y mayor elemento de $\sqsubseteq$ y $\preceq$, respectivamente.

Con el fin de facilitar las operaciones sobre **M**, en trabajos anteriores se presentaron la Definición y Teorema siguientes:

Definición 7. ([12], [32], [9]) Si $f \in \mathbf{M}$, se definen $f^L, f^R \in \mathbf{M}$ como

$$f^L(x) = sup\{f(y) : y \leq x\}, \quad f^R(x) = sup\{f(y) : y \geq x\}.$$

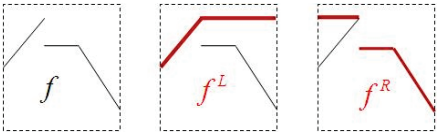


Figura 3: Ejemplos de f^L y f^R.

f^L y f^R son monótonas creciente y decreciente, respectivamente. Obsérvese que estas funciones, en cierto sentido, podrían representar los modificadores lingüísticos "menos que" y "más que", respectivamente.

A continuación se considerará **L**, subconjunto de las funciones normales y convexas de **M**; en este conjunto se va a tener una estructura de retículo acotado y completo, lo que va a permitir construir negaciones, t-normas y t-conormas de forma adecuada. Recordemos que:

Definición 8. Una función $f \in \mathbf{M}$ es normal si $sup\{f(x) : x \in [0,1]\} = 1$.

Llamamos **N** el conjunto de todas las funciones normales en **M**.

Definición 9. Una función $f \in \mathbf{M}$ es convexa, si para cualquier $x \leq y \leq z$, se cumple que $f(y) \geq f(x) \wedge f(z)$.

El conjunto de todas las funciones normales y convexas de **M** será denotado por **L**. El álgebra $\mathbb{L} = (\mathbf{L}, \sqcup, \sqcap, \neg, \bar{0}, \bar{1})$ es un subálgebra de $\mathbb{M}$. En **L**, los órdenes parciales $\sqsubseteq$ and $\preceq$ coinciden, y $\mathbb{L}$ es un retículo acotado ($\bar{0}$ y $\bar{1}$ son el mínimo y el máximo, respectivamente) y completo (ver [11], [12], [22], [32]). Además, es evidente que $\mathbf{J} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{L} \subset \mathbf{M}$.

La siguiente caracterización nos ayudará a establecer nuevos resultados:

Teorema 1. ([11], [12]) Sean $f, g \in \mathbf{L}$. $f \sqsubseteq g$ si y sólo si

$$g^L \leq f^L \text{ y } f^R \leq g^R.$$

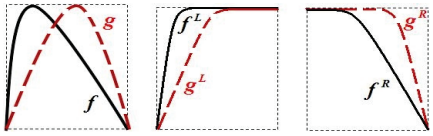


Figura 4: Ejemplo donde $f \sqsubseteq g$.

3 NEGACIONES Y AUTOCONTRADICCIÓN EN LOS T2FSs

3.1 NEGACIONES SOBRE LOS T2FSs

Recordemos la definición de negación en [0,1].

Definición 10. Una función decreciente $n : [0,1] \to [0,1]$, tal que $n(0) = 1$ y $n(1) = 0$, se le denomina negación. Si, además, se cumple que $n(n(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$, entonces se dice que es una negación fuerte.

En esta Subsección se presenta el estudio realizado en [15] sobre las negaciones en el marco de los T2FSs, resumiendo los principales resultados y caracterizaciones obtenidos en los T2FSs con grados de pertenencia en **L**.

La Definición 10 nos sugiere una extensión de la definición de negación a cualquier conjunto parcialmente ordenado (poset) con elementos mínimo y máximo (acotado).

Definición 11. Sea un conjunto A, y un orden parcial en A, $\leq_A$, tal que $(A, \leq_A)$ tiene elemento mínimo $Min_{\leq_A}$ y elemento máximo $Max_{\leq_A}$. Una negación en $(A, \leq_A)$ es una función $N : A \to A$, tal que N es decreciente, $N(Min_{\leq_A}) = Max_{\leq_A}$ y $N(Max_{\leq_A}) = Min_{\leq_A}$. Si además satisface que $N(N(x)) = x$, para todo $x \in A$, se dice que es negación fuerte.

Teniendo en cuenta las propiedades que satisface la operación $\neg$ en **M**, es sencillo constatar que $\neg$ no cumple todos los axiomas de negación fuerte en **M**, pero sí en el retículo $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ (ver [32]).

Definición 12. Sean $f \in \mathbf{M}$, y n una negación suprayectiva en [0,1]. Se define la operación N_n asociada a n como

$$(N_n(f))(x) = sup\{f(y) : n(y) = x\}.$$

Nótese que $\neg = N_n$, cuando n es la negación estándar $n = 1 - id$.

Obsérvese que para que N_n esté bien definida es necesario que n sea suprayectiva (y por tanto, continua), ya que de otro modo, existe algún x que no pertenece a la imagen de n, y para dicho x, no estaría definido $(N_n(f))(x)$.

Entre los resultados más importantes obtenidos por los autores, se tienen los siguientes.

Teorema 2. Sea la operación N_n asociada a n, una negación suprayectiva en $[0,1]$. Entonces, para todo $f \in \mathbf{M}$

1. $(N_n(f))^L = N_n(f^R),\ (N_n(f))^R = N_n(f^L)$.
2. $(N_n(f))(x) = f(n(x)) \Leftrightarrow n$ es fuerte.
3. N_n es una negación sobre $\mathbf{L}$.
4. N_n es una negación fuerte (involutiva) sobre $\mathbf{L}$ si y sólo si n es fuerte.

3.2 AUTOCONTRADICCIÓN EN LOS T2FSs

Trillas et al. en [29, 30], iniciaron el estudio de la autocontradicción y contradicción de conjuntos en el contexto de la lógica borrosa, no sólo como un tema de interés teórico, sino también práctico, en el análisis de las posibles consecuencias contradictorias en los procesos de inferencia borrosa. En artículos posteriores (ver [1, 4]): se abordó con más profundidad la autocontradicción y contradicción en los FSs; se propusieron formas de medir el grado en que estas propiedades se cumplen; se desarrolló una axiomática para las medidas de autocontradicción, contradicción entre conjuntos, autocontradicción respecto a una negación fuerte N (N-autocontradicción) y contradicción entre conjuntos respecto a una negación fuerte N (N-contradicción).

Así mismo, en [3] se aborda la contradicción en el marco de los conjuntos borrosos intuicionistas de Atanassov (IFSs) que son otra extensión de los FSs. A continuación se recogen los resultados obtenidos por los autores en [14], sobre la N-autocontradicción y autocontradicción, en los conjuntos de tipo 2, con grados de pertenencia en $\mathbf{L}$.

Definición 13. Sea $f \in \mathbf{L}$ y sea $N_n : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ una negación fuerte (ver Teorema 2). Decimos que f es N_n-*autocontradictorio* si y sólo si $f \sqsubseteq N_n(f)$, para todo $x \in [0,1]$. Y f es *autocontradictorio*, si es N_n-autocontradictorio respecto a alguna negación N_n.

El siguiente resultado presenta algunas caracterizaciones de dichas propiedades sobre $\mathbf{L}$.

Teorema 3. Sea $f \in \mathbf{L}$, y sea $N_n : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ una negación fuerte. Entonces

1. f es N_n-autocontradictorio si y sólo si $f^R(x) \leq f^L(n(x)), \forall x \in [0,1]$. Equivalentemente, si y sólo si $f^R(n(x)) \leq f^L(x), \forall x \in [0,1]$.
2. Sea $\alpha = \text{ínf}\{w\,;\, \lim_{x\to w^+} f(x) = 1$, o $\lim_{x\to w^-} f(x) = 1$, o $f(x) = 1\}$, y p el punto fijo de la negación fuerte n, es decir, $n(p) = p$. Entonces f es N_n-autocontradictorio si y sólo si $p \geq \alpha$, y $\forall x \leq \alpha$, es $f(n(x)) \leq f(x)$.
3. Si $f(0) < f(1)$ entonces f no es autocontradictorio.
4. f es autocontradictorio si y sólo si $\exists\ \varepsilon > 0$ y una negación en [0,1], n, donde $n|_{[0,\varepsilon]} : [0,\varepsilon] \to [n(\varepsilon), 1]$, tal que $f(n(x)) \leq f(x), \forall x \in [0,\varepsilon]$.

4 T-NORMAS Y T-CONORMAS SOBRE LOS T2FSs

Las normas triangulares (t-normas) fueron introducidas por Menger [20]; más tarde Schweizer y Sklar en [28], [27] dieron la axiomática, usada actualmente, para definir las t-normas en $[0,1]$.

Debido a la estrecha conexión entre la teoría de los conjuntos borrosos y la teoría del orden (ver, por ejemplo, [10]), distintos autores han estudiado las t-normas sobre conjuntos parcialmente ordenados acotados (posets acotados), como por ejemplo en [6] y en [5]. En [26] se consideró la extensión de las t-normas sobre retículos acotados exigiendo unos axiomas (en adelante se llamarán "axiomas básicos", y la operación que satisface dichos axiomas se denominará simplemente t-norma), que coinciden con los dados en [6] y [5]. Recordemos que una t-norma en $[0,1]$ ([17]) es una operación binaria $T : [0,1]^2 \to [0,1]$, conmutativa, asociativa, creciente en cada argumento, y con elemento neutro 1. Análogamente, una t-conorma en $[0,1]$ es una operación binaria $S : [0,1]^2 \to [0,1]$, conmutativa, asociativa, creciente en cada argumento, y con elemento neutro 0. Definiciones similares se aplican para los retículos acotados.

En [7] se extendieron las definiciones de t-norma y t-conorma a los conjuntos borrosos intervalo valorados (IVFSs), agregando otras restricciones o propiedades a los axiomas básicos, estableciendo los "axiomas restrictivos".

Posteriormente, en [32], [33] los autores extendieron estos axiomas restrictivos a los T2FSs, y presentaron dos familias de operaciones binarias sobre $\mathbf{M}$, obteniendo las condiciones bajo las cuales se cumplían los axiomas restrictivos sobre $\mathbf{L}$.

Definición 14. ([33]) La operación binaria $T : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}$ es una t$_r$-norma (t-norma según los axiomas restrictivos) sobre $\mathbf{L}$ si: 1) T es conmutativa, 2) T es asociativa, 3) $T(f,\bar{1}) = f$ para cualquier $f \in \mathbf{L}$ (elemento neutro), 4) Si $f,g,h \in \mathbf{L}$ son tales que $g \sqsubseteq h$, entonces $T(f,g) \sqsubseteq T(f,h)$ (creciente en cada argumento), 5) $T([\overline{0},\overline{1}],[a,b]) = [\overline{0},b]$, 6) T es cerrada en $\mathbf{J}$, 7) T es cerrada en $\mathbf{K}$.

De forma similar, una operación binaria $S : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}$ es una t$_r$-conorma si satisface: los axiomas 1, 2, 4, 6 y 7, anteriores; el axioma 3': $S(f,\bar{0}) = f$; y el axioma 5': $S([\overline{0},\overline{1}],[a,b]) = [\overline{a},\overline{1}]$. Los axiomas 1, 2, 3, 3' y 4, son llamados "axiomas básicos", y la operación que satisface dichos axiomas será denominada simplemente t-norma o t-conorma, según sea el caso.

Los mismos autores defineron las operaciones $\bar{\blacktriangle}$ y $\bar{\blacktriangledown}$. Para todo $f,g \in \mathbf{M}$,

$$(f \bar{\blacktriangle} g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \triangle z = x\},$$

$$(f \bar{\blacktriangledown} g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \nabla z = x\},$$

donde $\triangle$ y $\triangledown$ son, respectivamente, t-norma y t-conorma sobre [0,1]. Además, se demostró que si $\triangle$ ($\triangledown$), es continua, entonces $\bar{\blacktriangle}$ ($\bar{\blacktriangledown}$) es t_r-norma (t_r-conorma) sobre **L**. Obviamente, el problema de encontrar otras t_r-normas y t_r-conormas quedaba totalmente abierto.

El objetivo de esta Sección es recoger los resultados presentados por los autores en [13, 16] respecto al estudio de operaciones binarias sobre **M**, unas más generales y otras diferentes a las presentadas en [32], [33].

Definición 15. Sea $\star$ una operación binaria sobre $[0,1]$, $\triangle$ una t-norma y $\triangledown$ una t-conorma sobre $[0,1]$. Definimos las operaciones binarias $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$, para todo $f,g \in \mathbf{M}$, como:

$$(f \blacktriangle g)(x) = sup\{f(y) \star g(z) : y \triangle z = x\},$$

$$(f \blacktriangledown g)(x) = sup\{f(y) \star g(z) : y \triangledown z = x\}.$$

Obsérvese que $\blacktriangle = \bar{\blacktriangle}$ y $\blacktriangledown = \bar{\blacktriangledown}$, justo cuando $\star = \wedge$.
Cabe destacar que, anteriormente, en [8] estudiaron varias propiedades de $\blacktriangle$ y $\blacktriangledown$ en el caso particular de que $\star$ y $\triangle$ sean la t-norma de Lukasiewicz, y $\triangledown$ la t-conorma de Lukasiewicz, pero no determinaron si son t-norma y t-conorma, respectivamente, sobre **L**.

Definición 16. Para todo $f,g \in \mathbf{M}$ se definen las operaciones binarias

$$f \circledcirc g = f^R \wedge g^R\,, \quad f \circledast g = f^L \wedge g^L\,.$$

$$f \bar{\circledcirc} g = \begin{cases} f, \text{ si } g = \bar{1} \\ g, \text{ si } f = \bar{1} \\ f \circledcirc g, \text{ otro caso} \end{cases}, \quad f \bar{\circledast} g = \begin{cases} f, \text{ si } g = \bar{0} \\ g, \text{ si } f = \bar{0} \\ f \circledast g, \text{ otro caso.} \end{cases}$$

Algunos resultados respecto a las operaciones dadas en las definiciones 15 y 16 son:

Teorema 4.

1. Si $\star$ es una t-norma continua en [0,1], y $\triangle$ ($\triangledown$) es una t-norma (t-conorma) continua en [0,1], entonces $\blacktriangle$ ($\blacktriangledown$) es una t_r-norma (t_r-conorma) sobre **L**.
2. (Leyes de De Morgan) $N_n(f \blacktriangle g) = N_n(f) \blacktriangledown N_n(g)$, $N_n(f \blacktriangledown g) = N_n(f) \blacktriangle N_n(g)$, $\forall f,g \in \mathbf{M}$, siempre que $\triangle$ y $\triangledown$ sean n-duales, respecto a la negación fuerte en [0,1], n.
3. Si $\star$ es una t-conorma en [0,1], entonces $\blacktriangle$ ($\blacktriangledown$) no es una t-norma (t-conorma) sobre **L**.
4. La operación $\circledcirc$ ($\circledast$) satisface los axiomas restrictivos de t-norma (t-conorma) sobre **L**, excepto el elemento neutro y la clausura en **J**.
5. La operación $\bar{\circledcirc}$ ($\bar{\circledast}$) satisface los axiomas restrictivos de t-norma (t-conorma) sobre **L**, excepto la clausura en **J**.
6. $\circledcirc$ y $\circledast$ satisfacen las leyes de De Morgan sobre **M**, con la operación N_n asociada a cualquier negación fuerte en [0,1], n.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo los autores han expuesto, por una parte, las principales lagunas que encontraron respecto a las operaciones algebraicas, al adentrarse en el estudio sobre los conjuntos tipo 2. Por otra, han expuesto cómo al intentar clarificar estas lagunas, en sus últimos trabajos han obtenido algunos resultados que han contribuido en el estudio de estos conjuntos.

La Sección 3 se ha dedicado a las negaciones en cualquier conjunto parcialmente ordenado y acotado con el propósito de encontrar negaciones en **L**. En particular se ha definido la función N_n a partir de cualquier negación suprayectiva en $[0,1]$, dando condiciones para ser negación fuerte .

También en la Sección 3 se han extendido al marco del conjunto **L**, los conceptos de N-autocontradicción y autocontradicción establecidos previamente en los FSs, determinando algunos criterios para verificar dichas propiedades en un elemento en **L**.

En la Sección 4 se han definido nuevas operaciones en **M**, estudiando bajo qué condiciones satisfacen cada uno de los axiomas introducidos.

Agradecimientos

Este artículo esta parcialmente financiado por CICYT (España) proyecto TIN2011-29827-C02-01, UPM-CAM, FONACIT (Venezuela) y UNET (Venezuela).

Referencias

[1] E. Castiñeira, C. Torres-Blanc, S. Cubillo: Un modelo para medir la N-contradicción de conjuntos borrosos. En: *Actas ESTYLF 2008*, Mieres (España), pp. 113–119, 2008.

[2] S. Coupland, M. Gongora, R. John, K. Wills: A comparative study of fuzzy logic controllers for autonomous robots. En *Proc. IPMU*, Paris (France), pp. 1332–1339, Jul. 2006.

[3] S. Cubillo, E. Castiñeira: Contradiction in intuitionistic fuzzy sets. En: *Proceedings IPMU*, Perugia (Italia), pp. 2180–2186, 2004.

[4] S. Cubillo, E. Castiñeira: Measuring contradiction in fuzzy logic. *International Journal of General Systems*, 34(1), pp. 39–59, 2005.

[5] B. De Baets, R. Mesiar: Triangular norms on product lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 104, pp. 61–75, 1999.

[6] G. De Cooman, E. Kerre: Order norms on bounded partially ordered sets. *Journal Fuzzy Mathematics*, 2, pp. 281–310, 1994.

[7] M. Gehrke, C. Walker, E. Walker: Some comments on interval-valued fuzzy sets. *Internat. J. Intell. Systems*, 11, pp. 751–759, 1996.

[8] Z. Gera, J. Dombi: Exact calculations of extended logical operations on fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(11), pp. 1309–1326, 2008.

[9] Z. Gera, J. Dombi: Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(22), pp. 3014–3032, 2008.

[10] J. Goguen: L-Fuzzy Sets. *J. Math. Anal. Appli.*, 18(1), pp. 623–668, 1967.

[11] J. Harding, C. Walker, E. Walker: Convex normal functions revisited. *Fuzzy Sets and Systems*, 161, pp. 1343–1349, 2010.

[12] J. Harding, C. Walker, E. Walker: Lattices of convex normal functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, pp. 1061–1071, 2008.

[13] P. Hernández, S. Cubillo, C. Torres-Blanc: About t-norms on type-2 fuzzy sets. En: *Proc. EUSFLAT2013*, Milán (Italia), pp. 171–178, 2013.

[14] P. Hernández, S. Cubillo, C. Torres-Blanc: Autocontradicción en el conjunto de las funciones de $[0,1]^{[0,1]}$ normales y convexas. En: *Proc. ESTYLF2012*, Valladolid (España), pp. 48–53, 2012.

[15] P. Hernández, S. Cubillo, C. Torres-Blanc: Negations on type-2 fuzzy sets, aceptado para su publicación en *Fuzzy Sets and Systems*.

[16] P. Hernández, S. Cubillo, C. Torres-Blanc: Nuevas operaciones binarias sobre los conjuntos borrosos de tipo 2. En: *Proc. CEDI2013*, Madrid (España), pp. 1250–1259, 2012.

[17] P. Klement, R. Mesiar, E. Pap: Triangular Norms. *Trends in Logic. Studia Logica Library*, 8, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.

[18] O. Linda, M. Manic: Monotone Centroid Flow Algorithm for Type Reduction of General Type-2 Fuzzy Sets. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 20(5), pp. 805–819, 2012.

[19] J. Mendel, R. Jhon: Type-2 fuzzy sets made Simple. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 10(2), pp. 117–127, 2002.

[20] K. Menger: Statical metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 37, pp. 535-537, 1942. 535–537.

[21] M. Mizumoto, K. Tanaka: Fuzzy sets of type-2 under algebraic product and algebraic sum. *Fuzzy Sets and Systems*, 5, pp. 277–290, 1981.

[22] M. Mizumoto, K. Tanaka: Some properties of fuzzy sets of type-2. *Inf. Control*, 31, pp. 312–340, 1976.

[23] A. Niewiadomski: A type-2 fuzzy approach to linguistic summarization of data. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 16(1), pp. 198–213, 2008.

[24] A. Niewiadomski: On finity, countability, cardinalities, and cylindric extensions of type-2 fuzzy sets in linguistic summarization of databases. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 18(3), pp. 532–545, 2010.

[25] A. Niewiadomski: On two possible roles of type-2 fuzzy sets in linguistic summaries. *Lect. Notes Artif. Intell.*, 3528, pp. 341–347, 2005.

[26] S. Ray: Representation of a Boolean algebra by its triangular norms. *Matheware and Soft Computing*, 4, pp. 63–68, 1997.

[27] B. Schweizer, A. Sklar: Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publ. Math.*, 8, pp. 169–186, 1961.

[28] B. Schweizer, A. Sklar: Statistical metric spaces. *Pacific J. Math.*, 10, pp. 313–334, 1960.

[29] E. Trillas, C. Alsina, J. Jacas: On contradiction in fuzzy logic. *Soft Computing*, 3(4), pp. 197–199, 1999.

[30] E. Trillas, S. Cubillo: On non-contradictory input/output couples in Zadeh's CRI. En: *Proceedings NAFIPS*, New York (USA), pp. 28–32, 1999.

[31] C. Wagner, H. Hagras: Toward general type-2 fuzzy logic systems based on zSlices. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 18(4), pp. 637–660, Aug. 2010.

[32] C. Walker, E. Walker: The algebra of fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 149, pp. 309–347, 2005.

[33] C. Walker, E. Walker: T-norms for type-2 fuzzy sets. En: *Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, Vancouver (Canadá), pp. 1235–1239, 2006.

[34] L. Zadeh: Fuzzy sets. *Inf. Control*, 20, pp. 301–312, 1965.

[35] L. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Inf. Sci.*, 8, pp. 199–249, 1975.

DESCRIPCIÓN LINGÜÍSTICA SOBRE EVOLUCIÓN DE LA DESFORESTACIÓN

Éldman de Oliveira Nunes[1], Ángel Sánchez[2], Gracián Triviño[3]

[1]*Fundación CAPES, Ministerio de Educación, Brasilia, Brasil*, eldman.nunes@gmail.com

[2]*Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles (Madrid), España*, angel.sanchez@urjc.es

[3]*European Centre for Soft Computing, 33600 Mieres (Asturias), España*, gracian.trivino@softcomputing.es

Resumen

Monitorizar la degradación de la cubierta vegetal es un reto dentro el área de la preservación ambiental. Las imágenes de satélite se utilizan de forma habitual para esta tarea. Sin embargo, el análisis y la interpretación de dichas imágenes lo realizan normalmente expertos humanos. Debido a la gran cantidad de datos para analizar y al número insuficiente de expertos dedicados, dichas tareas pueden resultar lentas y tediosas. En por ello que el desarrollo de nuevas herramientas computacionales para el análisis de las imágenes satelitales y la creación de descripciones lingüísticas sobre las mismas, resulta necesario para la toma de decisiones por parte de expertos humanos. Este trabajo presenta una aplicación novedosa de la Teoría Computacional de Percepciones para producir resúmenes lingüísticos sobre evolución de desforestación en municipios usando imágenes multi-espectrales de satélite.

Palabras Clave: Teoría Computacional de Percepciones; Modelo Granular Lingüístico de un Fenómeno; Lógica Difusa; Análisis de Imágenes Satelitales; Monitoreo de Vegetación.

1 INTRODUCCIÓN

Los bosques son una reserva importante de la biodiversidad, una fuente de recursos naturales y de reservas de carbono. Protegen el suelo de la erosión y regulan el ciclo hídrico, asegurando el equilibrio ecológico y climático. En consecuencia, los bosques también tienen un papel clave en el mantenimiento de la calidad de vida de las poblaciones [4].

Una información precisa y actualizada sobre las condiciones de los bosques y la extensión de su degradación, harán posible la priorización de recursos necesarios para prevenir el incremento de la degradación [3]. Entre las medidas de control para dicha prevención se utilizan comúnmente las imágenes de satélite [1][10]. Dichas imágenes resultan fundamentales en el estudio de la distribución y la evolución de la cobertura vegetal.

Las personas tienen la capacidad para crear descripciones lingüísticas sobre situaciones complejas e imprecisas. La producción automática de descripciones lingüísticas correspondientes a imágenes o secuencias de vídeo es hoy día un problema difícil y con un gran interés científico. [11]. La Teoría Computacional de Percepciones (en inglés, *Computational Theory of Perceptions* o, abrevidamente, CTP) está inspirada en el uso del lenguaje natural por los humanos. Dicha teoría, introducida por Zadeh [14] y desarrollada en otros trabajos [15][16][7][17][5][13], proporciona un marco de trabajo para desarrollar sistemas computacionales capaces de producir descripciones imprecisas de fenómenos en un modo similar a como lo hacen las personas.

Este trabajo describe un prototipo de sistema CTP, basado en imágenes aéreas de bosques, capaz de realizar una descripción lingüística de las mismas sobre el grado de degradación forestal encontrado. Inicialmente, se aplican técnicas de tratamiento de imágenes para extraer ciertos atributos relevantes (y sus valores asociados) de las mismas. A continuación, esos atributos se usan como variables de entrada en el Modelo Granular Lingüístico de un Fenómeno (*Granular Linguistic Model of a Phenomenon*, o abreviadamente GLMP) [12][2]. Finalmente, se van construyendo progresivamente (en los GLMP) las descripciones lingüísticas sobre la degradación de la cubierta vegetal, usando la lógica difusa, para calcular la relevancia de las sentencias producidas. Diferentes ejemplos de aplicación del modelo GLMP para producir descripciones sobre diferentes tipos de fenómenos pueden encontrarse en la literatura [11][12][2].

Este trabajo se ha organizado como sigue. La sección 2 describe el modelo estructural aplicado para crear descripciones lingüísticas de un fenómeno. La sección 3 explica cómo instanciar dicho modelo para producir informes lingüísticos sobre degradación ambiental correspondientes a imágenes satelitales. En la sección 4 se describe la experimentación usando imágenes del satélite Landsat correspondientes a la región de Mato Grosso (Brasil), capturadas en el periodo 2000-2005. Finalmente, la sección 5 presenta las conclusiones de este trabajo.

2 COMPONENTES DEL SISTEMA PROPUESTO

En esta sección se describe el Modelo Granular Lingüístico de un Fenómeno (GLMP) y el modelo estructural aplicado al desarrollo de nuestro sistema computacional. La Figura 1 muestra los módulos de proceso en la solución desarrollada: el Módulo de Adquisición de Datos (MAD), el Módulo de Proceso de Datos (MPD), el Módulo de Descripción Lingüística (MDL) y el Módulo de Plantilla de Texto (MPT), respectivamente. Dichos módulos son descritos esquemáticamente en las siguientes subsecciones.

2.1. MODELO GRANULAR LINGÜÍSTICO DE UN FENÓMENO

Un Modelo Granular Lingüístico de un Fenómeno (*Granular Linguistic Model of a Phenomenon*, o abreviadamente GLMP) [2] consiste en un grafo multinivel de nodos con dos tipos de capas: *Perception Mappings* (PM) y *Computational Perceptions* (CPs). Cada nodo PM recibe como entrada un conjunto de CP y produce como salida otro CP de más alto nivel. Cada nodo CP tiene una cierta granularidad y abarca ciertos aspectos del fenómeno. El paradigma GLMP permite modelar percepciones particulares de fenómenos complejos usando diferentes tipos de expresiones lingüísticas y funciones de agregación.

2.1.1. *Computational Perception* (CP)

Una CP es un modelo computacional de una unidad de significado sobre un fenómeno a ser descrito. Las CPs se corresponden con partes específicas del fenómeno con un cierto nivel de granularidad. Más formalmente, un CP es una colección de 2-tuplas:

$$(A,W) = \{(a_1,w_1),(a_2,w_2),\ldots,(a_n,w_n)\},$$

donde:

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto de expresiones lingüísticas (palabras o frases en lenguaje natural) que representan el significado de una CP. Cada a_i describe un valor posible de una CP con un grado específico de granularidad. Durante el proceso, el diseñador define el dominio lingüístico A.

$W = \{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ es un conjunto de grados de validez $w_i \in [0,1]$ asociados a cada a_i. Los valores de w_i son instanciados durante un proceso on-line, es decir, éstos cambian de acuerdo con el estado del fenómeno siendo monitorizado. El concepto de validez depende de la verosimilitud y relevancia de cada frase en su contexto de uso.

2.1.2. *Perception Mapping* (PM)

Cada *PM* es una 4-tupla (U, y, g, T) usada para crear nuevas CPs mediante la agregación de CPs, donde:

U es un conjunto de CPs de entrada, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, donde u_i es una variable definida en el dominio de los datos de entrada;

y es la CP de salida con valores $y = \{(a_1,w_1), (a_2,w_2),\ldots, (a_n,w_n)\}$;

g es una operación de agregación difusa: $W_y = g(W_{u1}, W_{u2}, \ldots, W_{un})$, donde: W_y es un vector $(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ de grados de validez asignados a cada elemento de y, y W_{ui} son los grados de validez de las percepciones de entrada. En el caso de 1-PM, g se construye usando un conjunto de funciones de pertenencia; y

T es una plantilla lingüística usada para describir el estado actual del fenómeno (p.ej. "la degradación del área forestal es {alta | media | baja}".

2.2. SISTEMA COMPUTACIONAL DE PERCEPCIONES

El Sistema Computacional de Percepciones (SCP) viene inspirado en el GLMP. Dicho sistema hace posible la generación automática de descripciones lingüísticas de un fenómeno usando una Base de Conocimiento del Experto. El SCP se puede organizar en tres dominios: aplicación, percepción y lingüístico, respectivamente. En el dominio de aplicación, el SCP incluye los Módulos de Adquisición de Datos (MAD) y de Proceso de Datos (MPD). Estos módulos son responsables de la extracción y manipulación de las características relevantes del fenómeno considerado, que serán usadas por el Módulo de Descripciones Lingüísticas (MDL) para construir el resumen lingüístico asociado al fenómeno.

En el dominio de las percepciones (computacionales), el Modulo de Descripciones Lingüísticas (MDL) es el responsable de crear la percepción de un fenómeno organizado a diferentes niveles de granularidad.

En el dominio lingüístico, el Módulo de Plantillas Lingüísticas (MPL) proporciona las estructuras sintácticas para generar las sentencias usadas en los resúmenes, y dicho módulo es dependiente de la aplicación y del conocimiento del experto.

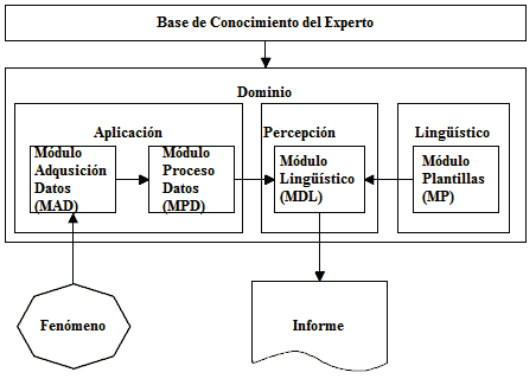


Figura 1: Módulos componentes del SCP propuesto.

3 DESCRIPCIÓN LINGÜÍSTICA DE LA DEGRADACIÓN AMBIENTAL

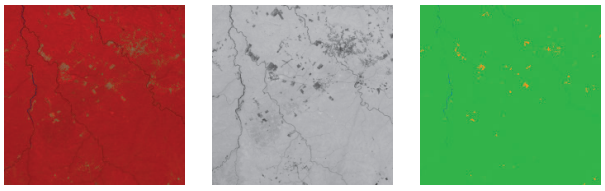
Esta sección describe la implementación del Sistema Computacional de Percepciones (SCP) propuesto y su aplicación al análisis y a la descripción lingüística de la desforestación en la región geográfica considerada.

3.1. MÓDULO DE ADQUISICIÓN DE DATOS

En este trabajo se ha usado una colección de imágenes multiespectrales proporcionadas por los satélites TM (*Thematic Mapper*) Landsat 5 y Landsat 7. Estas imágenes están disponibles en el sitio web del Instituto Nacional de Investigaciones Espaciales (INPE) de Brasil.

La resolución espacial de las imágenes es de 2,000×2,000 píxeles y su resolución geométrica en las bandas 1, 2, 3, 4, 5 y 7 es de 30m (es decir, cada píxel de la imagen representa una superficie de 0,09 hectáreas). Para la banda 6, la resolución es de 120m (cada píxel corresponde con 1,4 hectáreas). Cada banda se corresponde con un rango del espectro capturado por el satélite y tiene unas determinadas características y aplicaciones. Para abordar el estudio de la degradación ambiental es necesario realizar en primer lugar una combinación apropiada de bandas espectrales para destacar las propiedades de detección de zonas de agua, vegetación y terreno. Con este fin, el INPE recomienda las siguientes composiciones de bandas RGB: RGB-432 y RGB-543, respectivamente.

El Módulo de Adquisición de Datos (MAD) permite al usuario del sistema seleccionar y combinar las bandas multiespectrales en la escena que se usarán por el Módulo de Proceso de Daros (MPD). La Figura 2(a) muestra un ejemplo de imagen compuesta RGB-432.



(a) (b) (c)

Figura 2: Preproceso propuesto para imágenes multiespectrales: (a) imagen inicial compuesta RGB-432; (b) imagen NDVI; y (c) imagen temática resultante.

3.2. MÓDULO DE PROCESO DE DATOS

Este módulo es el responsable de realizar el filtrado, la segmentación, la extracción de características relevantes y la clasificación. El proceso de segmentación consiste en realizar una partición de la imagen en regiones homogéneas, según un conjunto de características específicas.

Para analizar la presencia y la localización de vegetación, se ha usado el Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (*Normalized Difference Vegetation Index*, NDVI) propuesto en [9]. Este índice permite una mejor visualización de la biomasa forestal (es decir, un mayor valor de NDVI indica que la biomasa verde es más densa). Dicho índice se calcula a partir de los valores de la banda 3 (rojo) y de la banda 4 (infrarrojo cercano) del espectro, según la fórmula (1).

$$NDVI = \frac{(NIR - R)}{(NIR + R)} \qquad (1)$$

donde: NIR = infrarrojo cercano (0,75 – 0,90 μm); y R = rojo (0,63 – 0,69 μm).

La Figura 2(b) muestra la imagen NDVI generada a partir de la imagen de la Figura 2(a). Para realizar la clasificación de los píxeles, el dominio de valores en la imagen NDVI se divide en intervalos según la Tabla 1. Dichos intervalos corresponden a las tres clases consideradas en el proyecto PRODES [8]: “Bosque”, “No Bosque” e “Hidrografía”, respectivamente. Estos intervalos de valores pueden variar dependiendo de la imagen considerada. La Figura 2(c) muestra la imagen temática (TI) generada a partir de la imagen NDVI de la Figura 2(b) (según lo explicado en [9]).

Tabla 1: Rangos de valores en la imagen NDVI.

Rango	Clase
0.3 <= NDVI <= 1	Bosque
0 <= NDVI < 0.3	No Bosque
-1 <= NDVI < 0	Hidrografía

El estudio de la evolución de la cubierta vegetal se puede realizar comparando imágenes NDVI de la misma escena y que han sido tomadas en diferentes periodos de tiempo. En consecuencia, el sistema propuesto trabaja con pares de imágenes de fechas consecutivas, que serán representadas respectivamente por los superíndices t y t+1. La Figura 3 muestra las imágenes y el resultado de los procesos realizados en los módulos de aplicación incluidos en nuestro sistema (MAD y MPD, respectivamente). La última tarea del módulo MPD consiste en extraer la información relevante para la aplicación. Los valores de parámetros correspondientes se pasan al Módulo de Descripción del Lenguaje (MDL). Para cada una de las tres clases consideradas (“Bosque”, “No Bosque” e “Hidrografía”, respectivamente), se determinan los valores dados por las ecuaciones (2-4).

Porcentaje de área de clase *i* en la imagen *t*+1 (CAP_i):

$$CAP_i = \frac{100 * CA_i}{AI} \qquad (2)$$

donde: CA_i es el área de la clase i en la imagen t+1 y AI es el área total de la imagen.

Variación Percentual de la clase *i* entre las imágenes *t* y *t*+1 (VP_i):

$$VP_i = \frac{100 * \left(\sum_{j}^{n} Count_{j \to i} - \sum_{j}^{n} Count_{i \to j} \right)}{CAP_i} \qquad (3)$$

donde: $Count_{j \to i}$ representa el número de pixeles de la clase *i* que se transforman en pixeles de la clase *j* entre las imágenes *t* y *t*+1, y CAP_i es el índice calculado en la ecuación (2).

Impacto Interclase para clases *i* y *k* ($II_{k \to i}$):

$$II_{k \to i} = \frac{100 * (Count_{k \to i} - Count_{i \to k})}{CAP_i} \qquad (4)$$

donde: *k* es la clase que ha causado el impacto en la clase *i*, y la '→' indica el cambio de los píxeles de clase relativos a la imagen previa y a la siguiente.

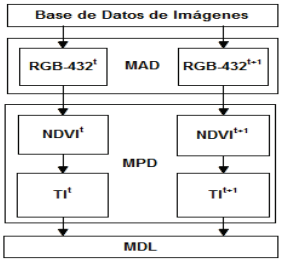


Figura 3: Procesos realizados sobre las imágenes.

3.3. MÓDULO DE DESCRIPCIÓN LINGÜÍSTICA

Este módulo se encarga de producir las descripciones lingüísticas de un fenómeno a diferentes niveles de granularidad. Los parámetros enviados por el MPD, que corresponden a las CPs iniciales, son las entradas de la 1-PM_1 a la 1-PM_4 usadas en el GLMP de esta aplicación, mostrado en la Figura 4. Para simplificar, las CPs involucradas no han sido representadas en esta figura. La figura muestra la estructura del GLMP obtenido para una de las tres clases a diferentes niveles de granularidad. Para la construcción del informe final, el GLMP incluirá las otras clases. Todas las 1-PM_i se estructuran desde la *fuzzificación* de las variables CAP_i (ver Ecuación (2)) por medio de las funciones de pertenencia mostradas en la Figura 5.

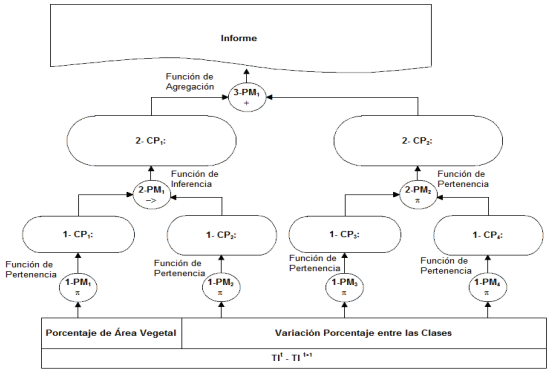


Figura 4: GLMP para una de las clases de la imagen.

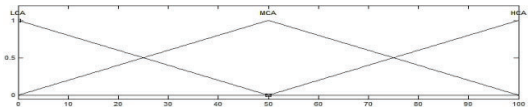


Figura 5: Funciones de pertenencia de CAP_i con etiquetas: LCA para "Low Coverage Area", MCA para "Moderate Coverage Area", y HCA para "High Coverage Area".

Las *Perception Mappings* de 1-PM_2 a 1-PM_4 se estructuran a partir de la fuzzificación de las variables PV_i e $II_{k \to i}$, que se calculan usando respectivamente las Ecuaciones (3) y (4), representadas por las funciones de pertenencia de las Figuras 6 y 7.

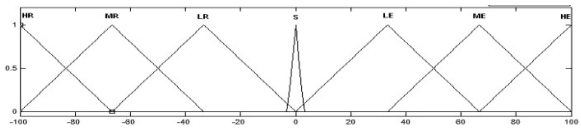


Figura 6: Funciones de pertenencia de las variables PV_i con etiquetas: HR="High Regression", MR="Moderate Regression", LR=" Low Regression", S="Stability", LE="Low Expansion", ME="Moderate Expansion", y HE="High Expansion".

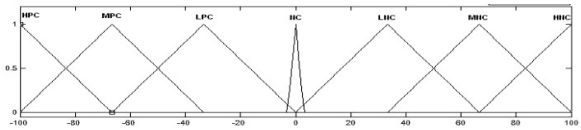


Figura 7: Funciones de pertenencia de variables $II_{k \to i}$ con etiquetas: HPC="High Positive Contribution", MPC= "Moderate Positive Contribution", LPC="Low Positive Contribution", NC="Non-Contribution", LNC= "Low Negative Contribution", MNC="Moderate Negative Contribution", y HNC="High Negative Contribution".

Las percepciones 2-PM_1 y 2-PM_2 se construyen usando diferentes funciones de agregación. 2-PM_1 usa una función de agregación basada en reglas. Los grados de validez de 1-PM_1 y 1-PM_2 se usan como antecedentes de las reglas. El consecuente se obtiene usando la función de pertenencia mostrada en la Figura 8. Esta función de agregación usa un sistema de inferencia de tipo Mamdani [6]. 2-PM_2 usa una función de agregación basada en el producto cartesiano del grado de validez de los conjuntos difusos involucrados. La etiqueta con mayor grado de cumplimiento es elegida para componer la sentencia.

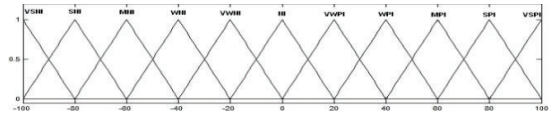


Figura 8: Funciones de pertenencia del consecuente de 2-PM_1 con etiquetas: VSNI="Very Strong Negative Impact", SNI="Strong Negative Impact", MNI= "Moderate Negative Impact", WNI="Weak Negative Impact", VWNI="Very Weak Negative Impact", NI=" No Impact", VWPI="Very Weak Positive Impact", WPI="Weak Positive Impact", MPI="Moderate Positive Impact", SPI="Strong Positive Impact", y VSPI="Very Strong Positive Impact".

4 EXPERIMENTOS

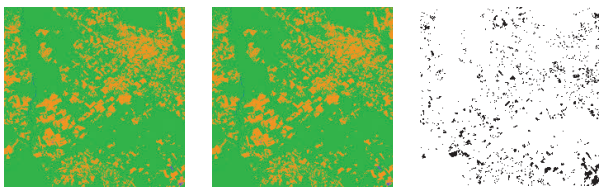
4.1. CARACTERÍSTICAS DE LA REGIÓN ANALIZADA

El Proyecto de Monitorización de la Desforestación Amazónica (PRODES), desarrollado por el Instituto Nacional Brasileño de Investigación Espacial (INPE), analiza las tasas anuales de desforestación de la región amazónica en Brasil desde 1988. En nuestro trabajo se usaron imágenes satelitales del Landsat TM 5 y Landsat TM 7, correspondientes a las bandas RGB-432 y a las siguientes fechas: 01/07/1985, 26/07/2000, 24/07/2005 y 25/07/2011. Se seleccionaron imágenes del municipio de Juará, en Mato Grosso, que presentaba la mayor tasa acumulada de desforestación de dicho estado. La Tabla 2 muestra las tasas observadas durante 5 años. La correspondiente tasa de desforestación acumulada (es decir, área de "Bosque" convertida en "No Bosque") durante el periodo 2000-2005 fue de un 7,8%.

Tabla 2: Tasas de desforestación en Juará (Brasil).

	Hasta 2000	**Hasta 2001**	**Hasta 2002**	**Hasta 2003**	**Hasta 2004**	**Hasta 2005**
Incremento	0,0	1,0	1,9	1,5	1,5	1,9
Bosque	67,1	66,1	64,2	62,7	61,2	59,3
No Bosque	32.2	33.2	35.1	36.6	38.1	40.0
Hidrografía	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

Las Figuras 9(a) y 9(b) muestran las imágenes temáticas de Juará (composición de bandas RGB-543, de fechas 24/07/2000 y 24/07/2005). Los píxeles negros en la imagen diferencia de la Figura 9(c) muestran la extensión de la devastación forestal.



(a) (b) (c)

Figura 9: Imágenes de Juará: (a) composición RGB-543 con fecha 24/07/2000; (b) composición RGB-543 del 24/07/2005; y (c) deforestación acumulada.

4.2. DESCRIPCIONES LINGÜÍSTICAS

Basándose en las imágenes descritas, correspondientes al municipio de Juará, nuestro sistema estimó los ratios de variación inter-clases presentados en la Tabla 3.

La Figura 10 muestra el GLMP diseñado para la clase "Bosque". A partir de los valores de la Tabla 3, que son las entradas de 1-PM, el sistema produce automáticamente descripciones lingüísticas de diferente granularidad. La descripción producida para cada región aparece a continuación (en inglés y en cursiva):

Tabla 3: Ratios (en %) de Juará entre 2000-2005.

Área Bosque	**Variación Bosque**	**Impacto de No Bosque**	**Impacto de Hidrografía**
73,3	-7,9	7,8	0,1
Área No Bosque	**Variación No Bosque**	**Impacto de Bosque**	**Impacto de Hidrografía**
26,4	31,1	-31,0	-0,1
Área Hidrografía	**Variación Hidrografía**	**Impacto de No Bosque**	**Impacto de Bosque**
0,3	9,1	-18,2	9,1

Region of Forest : Moderate Coverage Area and Low Regression of Forest area, resulting in Weak Negative Impact for this class, due the Low Negative Contribution of the Non-Forest area and Non-Contribution of the Hydrography area.

Region of Non-Forest : Moderate Coverage Area and Low Expansion of Non-Forest area, resulting in Weak Positive Impact for this class, due the Low Positive Contribution of the Forest area and Non-Contribution of the Hidrography area.

Region of Hydrography : Low Coverage Area and Low Expansion of Hydrography area, resulting in Very Weak Positive Impact for this class, due the Low Positive Contribution of the Forest area and Low Negative Contribution of the Non-Forest area.

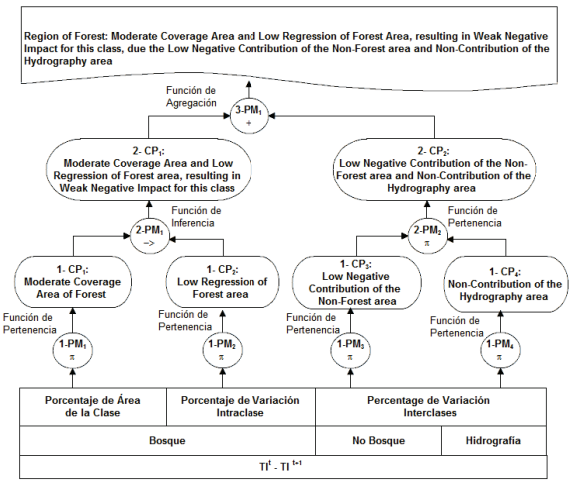


Figura 10: GLMP correspondiente a la clase "Bosque".

5 CONCLUSIÓN

Este trabajo presenta una aplicación del paradigma CWP al análisis de la desforestación. A partir del análisis de las imágenes multiespectrales de un municipio, y tras una etapa de procesado de dichas imágenes, nuestro sistema produce automáticamente descripciones lingüísticas sobre el nivel de degradación de los bosques y muestra el impacto inter-clases durante un periodo de tiempo considerado. La parametrización adecuada, por parte de expertos humanos, de las funciones de pertenencia usadas permitirá construir descripciones en lenguaje natural más precisas del fenómeno.

Como trabajo futuro se plantea analizar las tendencias y eventos de desforestación producidos en una secuencia de años. Este análisis podría extenderse a una región geográfica (compuesta de múltiples municipios).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación de Brasil (Fundación CAPES), a través de la beca N10066/12-8, y por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España, a través del proyecto TIN2011-29827-C02-01.

Referencias

[1] K.P. Acharya, R.B. Dangi and M. Acharya, "Understanding forest degradation in Nepal", *Unasylva 238*, vol. 62, pp. 31-38, 2011.

[2] A. Alvarez-Alvarez, D. Sanchez-Valdes, G.Trivino, "Automatic linguistic description about relevant features of the Mars' surface". *Proceedings of the 11th international conference on intelligent systems design and applications* (ISDA '11), pp. 154–159, Córdoba, Spain, 2011.

[3] Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO), Assessing forest degradation: Towards the development of globally applicable guidelines, *Forest Resources Assessment Working Paper* No. 177, 2011.

[4] International Tropical Timber Organization (ITTO), Guidelines for the restoration, management and rehabilitation of degraded and secondary tropical forests. *ITTO Policy Development Series* No. 13, 2013.

[5] J. Lawry, "A methodology for computing with words", *International Journal of Approximate Reasoning* 28 (2-3), pp.51–89, 2001.

[6] E.H. Mamdani, "Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant". *Proceedings IEE* (*Control and Science*) 121, pp.298-316, 1974.

[7] J.M. Mendel, "Computing with words and its relationships with fuzzistics", *Information Sciences* 177, pp. 988–1006, 2007.

[8] *PRODES Project (Brazilian Amazon Deforestation Monitoring Project*. URL: http://www.obt.inpe.br/prodes/index.php

[9] J. W. Rouse; R. H. Haas; J. A. Schell; D. W. Deering, "Monitoring vegetation systems in the great plains with ERTS", En: *Earth Resources Technology Satellite-1 Symposium 3*, 1973, Washington. Proceedings. Washington, D. C.: NASA, Goddart Space Flight Center, vol. 1, pp. 309-317, 1973.

[10] C. Souza Jr., L. Firestone, L.M. Silva and D. Roberts, "Mapping forest degradation in the Eastern Amazon from SPOT 4 through spectral mixture models", *Remote Sensing of Environment* 87, pp. 494-506, 2003.

[11] G.Trivino and M.Sugeno, "Towards linguistic descriptions of phenomena", *International Journal of Approximate Reasoning* 54, pp.22-34, 2013.

[12] G. Trivino, A. Sanchez, A.S. Montemayor, J.J. Pantrigo, R. Cabido, E.G. Pardo, "Linguistic description of traffic in a roundabout", *Proceedings of the IEEE Fuzzy 2010*, Barcelona, Spain, 2010.

[13] R.R. Yager, "Reasoning with doubly uncertain soft constraints", *International Journal of Approximate Reasoning* 52 (4), pp.554–561, 2011.

[14] L.A. Zadeh, "From computing with numbers to computing with words – from manipulation of measurements to manipulation of perceptions", *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 45(1), pp.105–119, 1999.

[15] L.A. Zadeh, "A new direction in AI. Towards a computational theory of perceptions of measurements to manipulation of perceptions", *AI Magazine* 22 (1), pp.73–84, 2001.

[16] L.A. Zadeh, "Granular computing as a basis for a computational theory of perceptions", *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Honolulu, USA, pp. 564–565, 2002.

[17] L.A. Zadeh, "Toward human level machine intelligence - is it achievable? The need for a paradigm shift", *IEEE Computational Intelligence Magazine* 3(3), pp.11–22, 2008.

Generación automática de predicciones meteorológicas a corto plazo: Metodología y validación

A. Ramos-Soto[1], **A. Bugarín**[1], **S. Barro**[1]

[1] *CITIUS, Universidad de Santiago de Compostela,*
{alejandro.ramos,alberto.bugarin.diz,senen.barro}@usc.es

Resumen

En este trabajo presentamos un método computacional que genera de forma automática predicciones meteorológicas a corto plazo para cada municipio de Galicia, usando los datos reales de la Agencia Gallega de Meteorología (MeteoGalicia). Esta aproximación se basa en métodos y estrategias de computación con palabras (CWP) y de generación de lenguaje natural (NLG).

Palabras Clave: computación con percepciones (CWP), descripciones lingüísticas de datos, generación de lenguaje natural (NLG), open data

1 Introducción

En los últimos años, gobiernos y agencias de gran cantidad de países han aumentado sus esfuerzos en la mejora de la accesibilidad de los ciudadanos a datos públicos, es decir, toda la información que los cuerpos públicos en un estado dado producen, recogen o compran, que se conoce comúnmente como el paradigma Open Data [4].

Para aprovechar estas cantidades ingentes de datos y convertirlas en información útil para las personas, la inteligencia artificial nos ofrece herramientas muy diversas, que se engloban en su mayoría dentro del ámbito de investigación de minería de datos. Entre estas técnicas, la creación de descripciones lingüísticas resulta de particular interés, ya que abstrae datos en información útil en distintos niveles y dimensiones. Concretamente, las aproximaciones de generación de lenguaje natural (NLG) y de computación con percepciones (CWP) permiten obtener resúmenes o descripciones de datos en forma de términos lingüísticos para proporcionar información que sea fácilmente consumible por las personas.

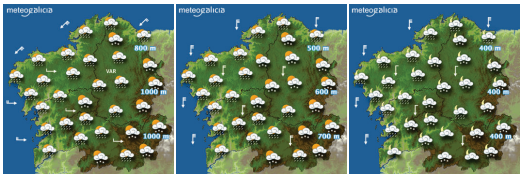
Existen muchos trabajos en estos campos de investigación, aunque en su mayor parte son experimentales y no han llegado a implantarse en usos prácticos y reales. Dentro del ámbito de NLG destacan sistemas de generación de predicciones meteorológicas como FoG [5], MultiMeteo [9] y SUMTIME-MOUSAM [7], que han sido utilizados por distintas agencias meteorológicas en América del Norte y Europa. En el ámbito de la CWP y las descripciones lingüísticas de datos, podemos destacar las descripciones del flujo de pacientes en un hospital [12], informes de consumo eléctrico doméstico [3], calidad del movimiento humano [1], o índices de bolsa [8].

Tomando como inspiración las descripciones lingüísticas de la computación con percepciones y los resúmenes textuales del campo de generación de lenguaje natural, presentamos en este trabajo una solución de descripciones lingüísticas que genera predicciones a corto plazo en forma de textos en lenguaje natural para la Agencia de Meteorología Gallega (MeteoGalicia). Para ello, en la siguiente sección introducimos el contexto en el que este método ha sido ideado. En la Sección 3 describimos la aproximación que hemos seguido en detalle y, finalmente, en las Secciones 4 y 5 presentamos los resultados de validación del método y las conclusiones más relevantes del trabajo.

2 Predicciones a corto plazo de la web de MeteoGalicia

La predicción meteorológica operativa ofrecida por la Agencia Meteorológica Gallega (MeteoGalicia) a través de su página web [11] consistía hasta hace poco en elaborar una descripción global de la tendencia meteorológica a corto plazo para toda Galicia (Fig. 1). Este servicio ha sido mejorado recientemente para proporcionar a los usuarios predicciones simbólicas para cada uno de los 315 municipios gallegos, lo que proporcional al usuario información más detallada sobre lugares específicos de la geografía gallega.

Por otro lado, esta mejora en el servicio supone un aumento en la cantidad de datos numérico-simbólicos, lo que provoca un inconveniente principal, como es la carencia de predicciones en formato texto. Este problema dificulta la comprensión de las predicciones, puesto que un usuario necesita observar todos los símbolos y detectar qué fenómenos son relevantes y cuándo van a tener lugar, mientras que una descripción en lenguaje natural puede proporcionar toda esta información directamente. Sin embargo, la tarea de crear predicciones textuales para los 315 municipios diariamente no es viable para un meteorólogo.



Mañana (7-14 h) Tarde (14-20 h) Noche (20-7 h)

Los cielos estarán nublados y habrá chubascos generalizados, que podrán tener carácter tormentoso. Las temperaturas mínimas estarán sin cambios o en descenso ligero, mientras que las máximas sufrirán un descenso entre ligero y moderado. El viento soplará moderado de componente norte, con intervalos fuertes.

Figura 1: Ejemplo de una predicción meteorológica real para el 13 de marzo de 2013 en Galicia, publicada en [11]

Para solventar esta carencia, presentamos un método computacional que, a partir de datos de predicción a corto plazo para una localización dada, genera descripciones lingüísticas que resaltan aquellos fenómenos meteorológicos que un meteorólogo considera relevantes, cuyo contenido es similar a la predicción general presentada en la Fig. 1.

3 Metodología para la Descripción Lingüística de Predicciones Operativas

El método de descripción lingüística que hemos diseñado emplea datos de predicción numérico-simbólicos e información adicional del dominio meteorológico para generar los textos de predicción finales. La metodología que sigue este método se basa en un procesado de dos etapas que son independientes entre sí. Durante la primera fase, se convierten los datos numérico-simbólicos en un código intermedio que se crea mediante la abstracción de los valores originales en etiquetas lingüísticas. La segunda fase traduce este código intermedio a un texto en uno de los idiomas de salida finales, que está preparado para el usuario final del servicio. Un esquema general del proceso se muestra en la Fig. 2.

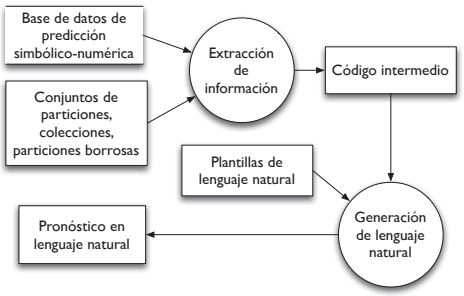


Figura 2: Esquema general del método de descripciones lingüísticas

3.1 Datos de predicción operativa meteorológica

Los datos e información que se requieren para elaborar las descripciones lingüísticas de predicción se clasifican en tres categorías:

- **Datos de predicción**. Este conjunto de datos, disponible en la base de datos de MeteoGalicia, cubre los 315 municipios gallegos e incluye datos asociados a los siguientes elementos de predicción:
  - Estado del cielo (fenómenos meteorológicos): Se almacenan como códigos numéricos y se muestran utilizando símbolos gráficos que proporcionan información sobre dos variables meteorológicas de interés, la cobertura nubosa y la precipitación.
  - Viento: Al igual que en el caso del estado del cielo, cada código numérico para la variable de viento se asocia a una dirección e intensidad específica, que se muestra también de forma gráfica usando los símbolos correspondientes.
  - Temperatura: Los datos de temperatura se almacenan como valores numéricos en grados Celsius.

Figura 3: Datos utilizados en la generación de los pronósticos meteorológicos automáticos

La Fig. 3 muestra que, para una localización dada, se almacenan 12 valores tanto para el estado

del cielo como para el viento. Cada valor está asociado a un periodo dentro de un mismo día (mañana, tarde y noche), por lo que estos 12 valores se traducen en 4 días de predicción que contienen 3 valores para cada día. En el caso de la temperatura, para cada día de predicción se almacenan los valores máximos y mínimos.

- **Información de configuración**. Incluye conjuntos de particiones y elementos que los operadores utilizan para extraer la información básica de los datos de predicción y convertirla en un lenguaje intermedio, independiente del lenguaje final de salida y sus variantes léxico-sintácticas. En el caso de la temperatura se utilizan particiones nítidas, mientras que para el resto de datos utilizamos categorías que clasifican los conjuntos de símbolos de meteoros y viento. Adicionalmente, en el caso de la cobertura nubosa, definimos conjuntos borrosos para representar el tiempo en el periodo a corto plazo (inicio, mediados, fin).

- **Plantillas de generación del lenguaje natural**. Incluyen las frases y las descripciones genéricas para un idioma dado, que se rellenan con la información contenida en el lenguaje intermedio generado por los operadores iniciales. Tanto las plantillas como los datos de configuración están codificados y almacenados en archivos de texto estructurado XML.

3.2 Fase de extracción de descripciones lingüísticas

En esta etapa se obtiene un lenguaje intermedio que contiene, para cada variable, la información que se considera relevante a la hora de incluirla en las predicciones textuales que se generan en la segunda etapa del procesado. El proceso consiste esencialmente en proveer a cada operador extractor los datos correspondientes – además de la información de particiones – para generar el lenguaje intermedio. A continuación describimos cada operador y el tipo de datos que recibe:

- **Operador borroso de cobertura nubosa**. Este operador utiliza la información contenida en los valores del estado del cielo, pero los clasifica de acuerdo al nivel de cobertura nubosa asociada a cada símbolo. La aproximación que se ha seguido agrupa los doce valores en tres subintervalos que corresponden al inicio, la mitad y el final de todo el periodo a corto plazo. Para cada subintervalo, el operador asigna una etiqueta de acuerdo con el estado de cobertura nubosa predominante para ese periodo. La predominancia de las etiquetas de cobertura nubosa se calcula utilizando conjuntos borrosos trapezoidales (Fig. 4) que determinan el grado de importancia que cada valor tiene en relación con cada subintervalo (por ejemplo, el primer, segundo o tercer valor, que se corresponden con el primer día, son más importantes que los siguientes a la hora de referirse al principio del periodo a corto plazo). Así pues, un ejemplo de la salida obtenida por este operador podría consistir en tres etiquetas "Despejado Nuboso Despejado".

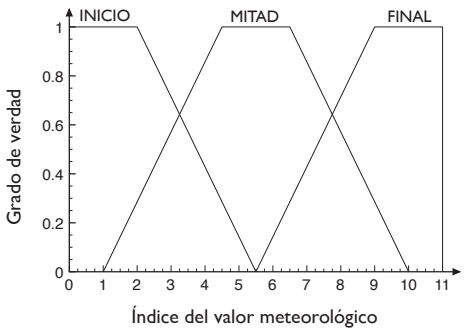


Figura 4: Partición de conjuntos borrosos empleada para modelar los subperiodos a corto plazo

Desde un punto de vista formal, definimos el conjunto ordenado de valores numéricos de estado del cielo como $SS = \{SS_1, SS_2, \ldots, SS_{12}\}$, las etiquetas de cobertura nubosa que clasifican los valores numéricos como $CCL = \{D, PN, F, N, C\}$ ("despejado", "poco nuboso", "niebla", "nublado", "cubierto") y la función fb que determina si un valor numérico SS_j pertenece a una etiqueta dada CCL_i:

$$fb(CCL_i, SS_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } SS_j \in CCL_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

Las definiciones anteriores se utilizan para codificar los 12 valores en etiquetas, pero para poder abstraerlas en el tiempo definimos la partición de conjuntos borrosos como $T = \{INICIO, MITAD, FINAL\}$ (Fig. 4). Esto nos permite obtener el grado de relevancia que cada etiqueta de cobertura nubosa tiene para cada periodo definido en T, como se muestra en el Algoritmo 1. Así, para cada T_k, el CCL_i con el grado de cumplimiento más elevado se elige como la etiqueta de cobertura nubosa para ese subperiodo.

- **Operador de precipitación**. Extrae información a partir de los valores del estado del cielo, que esencialmente consiste en aquellos periodos a corto plazo para los que se esperan que ocurran precipitaciones. Estos periodos se clasifican de acuerdo

Algoritmo 1 Cálculo de la cobertura nubosa

```
evaluations ← {}
for all CCL_i ∈ CCL do
  evaluation_i = {}
  for all SS_j ∈ SS do
    evaluation_i ← evaluation_i ∪ fb(CCL_i, SS_j)
  end for
  evaluations ← evaluations ∪ evaluation_i
end for
results ← matrix(length(T), length(CCL))
for all T_k ∈ T do
  for all evaluation_i ∈ evaluations do
    sum_{k,i} ← 0
    for all value_j ∈ evaluation_i do
      sum_{k,i} ← sum_{k,i} + T_k(j) * value_j
    end for
    results[k, i] ← sum_{k,i}
  end for
end for
return results
```

a la importancia y el tipo de precipitaciones detectados y codificados en el código intermedio de salida. Por ejemplo, si entre los 12 valores se detectan dos periodos de lluvia, se podría generar un código como "1-3 i i i", que significa "desde hoy por la tarde hasta mañana por la mañana habrá precipitaciones intermitentes" (Fig. 5).

En este caso, al igual que en el operador de cobertura nubosa, se ha definido un conjunto de etiquetas $PL = \{I, P, SN, ST, H\}$ ("intermitente", "persistente", "nieve", "tormenta", "granizo") para la precipitación. La función fb definida en (1) se usa también para convertir los símbolos del estado del cielo en sus etiquetas correspondientes en PL y determina también cuándo un periodo de precipitación empieza ($fb(PL_i, SS_j) = 1$) y termina ($fb(PL_i, SS_j) = 0$).

- **Operador de viento**. Sigue una estrategia similar al operador de precipitación, aunque en este caso no convierte los valores originales a etiquetas y sólo agrupa periodos en los que la intensidad del viento es fuerte o muy fuerte. Esta condición ha sido incluida a indicación de los meteorólogos. En consecuencia, si tenemos dos periodos de viento fuerte podríamos obtener dos códigos intermedios tales como "2-4 322,322" y "7-9 321,322,321", que significarían "desde esta noche hasta mañana por la tarde habría viento fuerte del sudoeste (símbolo 322)" y "desde pasado mañana por la tarde hasta la mañana del día siguiente habría vientos fuertes del sur y sudoeste (símbolos 321 y 322)". En este caso, los códigos numéricos están asociados a una dirección e intensidad dados, tal y como se define en las directrices de MeteoGalicia para la interpretación de predicciones.

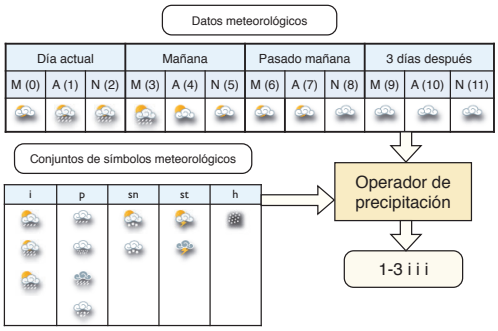


Figura 5: Esquema del operador de precipitación

- **Operador de temperatura**. Este operador genera un código intermedio que refleja la tendencia de la temperatura para el periodo de 4 días, pero también obtiene información sobre el comportamiento climático de las temperaturas (si las temperaturas son o no normales para la época del año correspondiente). Esta información proviene de la comparación entre la temperatura de la predicción y la media climática de cada municipio (definida como la media para los anteriores 30 años en esa época del año).

3.3 Fase de generación de lenguaje natural

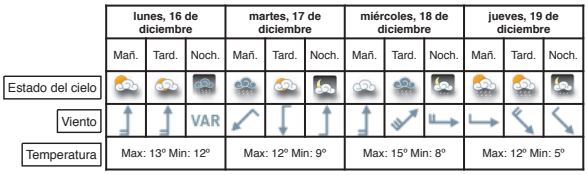
La etapa de generación de lenguaje natural se divide también en distintos módulos para cada variable, por lo que cambios en uno de ellos no afectan al resto del sistema. Cada uno de estos módulos recibe el código intermedio generado por su operador extractor correspondiente y, empleando la información contenida en las plantillas de generación de lenguaje natural para un idioma dado, genera la predicción textual final para la variable correspondiente.

4 Resultados y Validación

En esta sección presentamos un ejemplo real de descripciones lingüísticas obtenido con la implementación del método. Además, basándonos en las aproximaciones de validación existentes [6] [2] [10], detallamos el proceso de validación que hemos utilizado y sus resultados asociados.

4.1 Ejemplo de predicción meteorológica automática

Aunque los datos de predicción a corto plazo se limitan a 12 valores (8 para las temperaturas), el número de



Cielos nubosos en general durante todo el periodo. Se esperan precipitaciones todos los días. Las temperaturas serán altas para las mínimas y normales para las máximas respecto a lo habitual en esta época del año, con mínimas en descenso notable y máximas sin cambios, a pesar de que oscilarán. Viento muy fuerte del sudoeste para el miércoles por la tarde.

Figura 6: Descripción lingüística de predicción obtenida con la implementación del método. Datos reales publicados por MeteoGalicia el 16 de diciembre de 2013 para Santiago de Compostela.

fenómenos que tienen que ser tenidos en cuenta y su variabilidad temporal asegura una riqueza elevada en las descripciones lingüísticas obtenidas. Como prueba de esta riqueza presentamos aquí un ejemplo de predicción real generado automáticamente por nuestro método a partir de datos reales para el 16 de diciembre de 2013 para Santiago de Compostela.

4.2 Validación

Los meteorólogos de MeteoGalicia nos han proporcionado soporte para una validación de los resultados por parte de los expertos, lo que nos ha permitido refinar la solución propuesta de modo que se pueda asegurar que funciona bajo condiciones y casos reales. Para ello, la aplicación se instaló en los sistemas de información de MeteoGalicia para que los expertos pudieran probarla y elegir los ejemplos de validación apropiados. Como resultado, se generaron 45 predicciones de prueba que incluyen datos reales de predicción operativa pero también casos extremos en los que la predicción ha sido modificada para poner a prueba la robustez de la aplicación. Estas 45 predicciones fueron evaluadas por un meteorólogo mediante un cuestionario que cubre los aspectos de calidad más relevantes de las descripciones lingüísticas.

Siguiendo la aproximación presentada en [10], hemos diseñado un cuestionario que cubre tres dimensiones clave sobre la calidad de las predicciones generadas, como se muestra en la Fig. 7:

- Relevancia: ¿Incluye la predicción toda la clase de información que el experto incluiría?
- Verdad: ¿Refleja correctamente la información incluida la predicción numérico-simbólica?
- Forma: ¿Expresa la predicción la información de modo adecuado? ¿Está bien escrita?

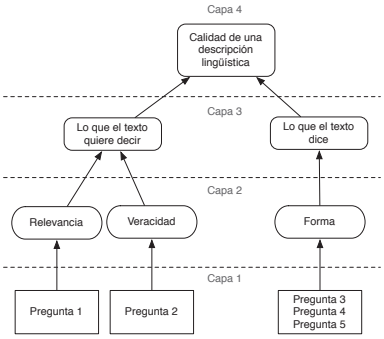


Figura 7: Esquema de la composición de las preguntas de validación

Estas tres dimensiones se clasifican de forma directa en dos categorías de nivel más abstracto, "lo que el texto implica" y "lo que el texto dice", que juntas determinan la calidad de la predicción generada.

De modo más específico, el cuestionario que proponemos consiste en 5 preguntas que tratan en mayor profundidad las tres dimensiones anteriores. La Pregunta 1 determina el grado en el que los expertos identifican la predicción generada con las que ellos elaboran y la Pregunta 2 considera el grado en el que el contenido de la predicción refleja con fidelidad la información contenida en los datos numérico-simbólicos de predicción. Con las puntuaciones de las dos primeras preguntas obtenemos la puntuación parcial de la predicción relacionada con "lo que el texto implica". Las Preguntas 3 y 4 evalúan si el vocabulario se usa de forma adecuada o si la información está bien agrupada y no es repetitiva. Finalmente, la Pregunta 5 tiene en cuenta aspectos relacionados con la presentación del texto de la predicción, como la puntuación de las frases. Con las puntuaciones de las últimas tres preguntas obtenemos la puntuación parcial de "lo que el texto dice".

La opinión del meteorólogo sobre el contenido de las predicciones de acuerdo al cuestionario anterior se recoge en la Tabla 1. Puede apreciarse que la valoración es muy positiva (con una puntuación media de 4.77 sobre 5 y una desviación de 0.18, utilizando el esquema de agregación global (Fig. 7)). En este sentido, el experto ha identificado de forma directa el contenido y el lenguaje de los resultados generados con los que él proporcionaría. El hecho de que tanto el contenido como el lenguaje de las predicciones automáticas sean poco distinguibles de los que él mismo produce manualmente es uno de los mejores indicios de calidad.

5 Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo hemos presentado un método computacional que obtiene predicciones meteorológicas a cor-

Tabla 1: Puntuaciones del test de validación para 45 ejemplos

Preguntas	Media	Desv. estándar
1	5	0
2	4.62	0.16
3	5	0
4	4.64	0.48
5	4.53	0.50
Valoración global (Fig. 7)	**4.77**	**0.18**

to plazo textuales para los 315 municipios de Galicia. Este método se basa en un desarrollo aplicado a un problema real, cuya definición y estructura se basan en el uso de operadores nítidos y borrosos que extraen información relevante, así como en el empleo de métodos de generación de lenguaje natural.

Como trabajo futuro, estamos considerando otros ámbitos de aplicación en los que las descripciones lingüísticas resultarán útiles, como los sistemas de información y soporte a la decisión ambientales, donde resultan interesantes descripciones lingüísticas que agreguen datos de forma geográfica para proporcionar información a nivel de regiones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado bajo el marco del proyecto TIN2011-29827-C02-02 (Ministerio de Economía y Competitividad). También ha sido subvencionado en parte por los Fondos FEDER bajo el proyecto CN2012/151 de la Consellería de Educación de Galicia. A. Ramos-Soto está subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad (Ayudas de Formación Personal al Investigador). Agradecemos también la enorme contribución de J. Taboada (MeteoGalicia) durante el proceso de validación de la herramienta.

Referencias

[1] A. Alvarez-Alvarez and G. Trivino, "Linguistic description of the human gait quality," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 26, no. 1, pp. 13 – 23, 2013.

[2] A. Belz and E. Reiter, "Comparing automatic and human evaluation of nlg systems," in *In Proc. EACL'06*, 2006, pp. 313–320.

[3] A. van der Heide and G. Trivino, "Automatic generated linguistic summaries of energy consumption data," in *Proceedings of 9th ISDA Conference*, 2009, pp. 553–559.

[4] E. Comission, "Open data. an engine for innovation, growth and transparent governance," December 2011.

[5] E. Goldberg, N. Driedger, and R. Kittredge, "Using natural-language processing to produce weather forecasts," *IEEE Expert*, vol. 9, no. 2, pp. 45–53, 1994.

[6] E. Reiter, "Task-based evaluation of nlg systems: control vs real-world context," in *Proceedings of the UCNLG+Eval: Language Generation and Evaluation Workshop*, ser. UCNLG+EVAL '11, 2011, pp. 28–32.

[7] E. Reiter, S. Sripada, J. Hunter, and I. Davy, "Choosing words in computer-generated weather forecasts," *Artificial Intelligence*, vol. 167, pp. 137–169, 2005.

[8] I. Kobayashi and N. Okumura, "Verbalizing time-series data: With an example of stock price trends," in *Proceedings IFSA/EUSFLAT Conf.*, 2009, pp. 234–239.

[9] J. Coch, "Interactive generation and knowledge administration in multimeteo," in *Proceedings of the Ninth International Workshop on Natural-Language Generation (INLG-1996)*, 1998, pp. 300–303.

[10] L. Eciolaza, M. Pereira-Fariña, and G. Trivino, "Automatic linguistic reporting in driving simulation environments," *Applied Soft Computing*, 2012.

[11] MeteoGalicia, "Meteogalicia's website. www.meteogalicia.es." [Online]. Available: www.meteogalicia.es

[12] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez, "A fuzzy approach to the linguistic summarization of time series," *Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, pp. 157–182, 2011.

Variables lingüísticas y codificación dispersa

Adolfo Rodríguez de Soto *

Dpto. de Ingenierías Mecánica, Informática y Aeroespacial
Universidad de Léon,
adolfo.rdesoto@unileon.es

Resumen

El conjunto de términos lingüísticos del lenguaje natural que habitualmente se representan mediante conjuntos fuzzy son un pequeño número de rasgos que permiten clasificar múltiples y diversos casos. La flexibilidad de las palabras del lenguaje natural viene dada por la posibilidad de adaptar su significado al contexto donde se aplican; "alto" es un predicado que tiene un significado muy distinto en función del contexto en el que se utilice. A la vez los términos lingüísticos relacionados, obtenidos mediante ciertos modificadores lingüísticos como "muy", "bastante" y otros, muestran una estructura coherente que hace fácil la interpretación de su significado. Vistos desde ese punto de vista, la tarea de aprendizaje del significado de las palabras para un contexto concreto puede verse como la obtención de un buen diccionario para explicar de forma sencilla los datos. Muchos métodos de aprendizaje basados en codificaciones dispersas buscan encontrar el mejor diccionario para modelizar una señal. Bajo la hipótesis de que buenos diccionarios permitirán procesar de forma más sencilla procesos complejos, en este trabajo se revisan los métodos de búsqueda de diccionarios para representaciones dispersas y su posible aplicación a la obtención de los términos lingüísticos de una variable lingüística.

Palabras Clave: Variables lingüísticas, sistemas fuzzy, codificaciones dispersas, representaciones dispersas.

* El autor reconoce la ayuda del Ministerio Español de Economía e Innovación y del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (ERDF/FEDER) bajo el proyecto TIN2011-29827-C02-02.

1 INTRODUCCIÓN

Sin lugar a dudas los Sistemas de Reglas Fuzzy (SRF) han permitido resolver muchos problemas de control y/o decisión complejos gracias a dos pilares fundamentales: la modelización de ciertos términos lingüísticos mediante Conjuntos Fuzzy [32] y la de la modelización del razonamiento aproximado, especialmente de las reglas del condicional. Esta potencia de los SRF ha hecho que multitud de trabajos de investigación se hayan centrado en el aprendizaje automático de SRF. La alta interpretabilidad de estos sistemas [3] junto con su capacidad de ser aproximadores universales son dos de sus valores más importantes. En muchos de los métodos de aprendizaje automático, lograr una alta precisión (premiar la segunda capacidad) puede hacer perder un grado aceptable en la primera y viceversa. Modelizar o aprender automáticamente con SRFs a partir de datos muestrales puede interpretarse como un problema inverso respecto a los términos lingüísticos del lenguaje natural. Sería interesante pues abordar problemas complejos mediante descripciones lingüísticas construidas a partir de variables lingüísticas obtenidas automáticamente y que mimeticen el uso que de esos términos se hace en el lenguaje natural. Ese objetivo también puede encuadrarse como parte del trabajo que se ha realizado en la búsqueda de métodos de obtención de SRF interpretables. No obstante no es fácil establecer medidas justas que evalúen adecuadamente cuándo un SRF puede considerarse interpretable [13]. Pero sin lugar a dudas cualquier medida debe ser inversamente proporcional al número de reglas y al número de términos lingüísticos. A más reglas y a más términos más difícil será interpretar el significado del sistema. A todo ello hay que añadir que la estructuración de las reglas y de los términos lingüísticos puede ser determinante a la hora de interpretar el significado de cada regla y de cada uno de los fuzzy sets que intervienen. Probablemente mecanismos jerárquicos ayuden a construir sistemas más interpretables. La estructura es muy importante entre los términos lingüísticos puesto que unos términos reducen o amplían el significado de otros. No asignamos el mismo significado al término *joven* si lo enfrentamos al término *viejo* que si lo enfrentamos

al término *de mediana edad*.

Los términos lingüísticos de una variable lingüísticas deben ser pocos y estructurados, probablemente sea menos importante la forma de los conjuntos fuzzy que les den significado que la relación estructural entre ellos. Los términos lingüísticos son patrones que creamos para representar de forma abstracta los datos y poder inferir conclusiones aplicando reglas de inferencia adecuadas. Nos podemos preguntar entonces cuál será el mejor conjunto de términos lingüísticos para representar cierta información.

Por supuesto ésto no es nuevo en el campo de los sistemas fuzzy. Es habitual que en los métodos de modelización automática con sistemas de reglas fuzzy se aprendan los términos lingüísticos que se utilizan en los sistemas de reglas. Lo que se plantea en este trabajo es conseguir un buen "diccionario" de términos lingüísticos, es decir un diccionario con una estructura adecuada entre sus términos lingüísticos y que facilite la representación de la información de una forma dispersa.

2 REPRESENTACIONES DISPERSAS MEDIANTE DICCIONARIOS

La idea de utilizar diccionarios de familias de elementos base para representar cierta información aparece en el campo del tratamiento de la señal [23] y relacionada con los mecanismos de representación de la señal mediante wavelets. Básicamente en la representación de la señal caben dos aproximaciones: fijar el diccionario de funciones base utilizadas en la representación y buscar la mejor representación posible (es el caso de utilizar Fourier o wavelets) o crear un diccionario adhoc para la señal a tratar y confiar que esa selección permita una representación más económica. En el trabajo citado ya se planteaba el objetivo de conseguir diccionarios que permitan una representación dispera de la información.

Durante las últimas dos décadas, la investigación en representaciones dispersas ha progresado enormemente en campos como el tratamiento de la señal [4, 7, 2], en el estudio e imitación del cortex visual humano [24, 25], en el campo de resolución de problemas inversos [11, 28] o en el campo del aprendizaje automático [1]. En general el objetivo de la codificación dispersa es el de representar aproximadamente vectores de entrada como combinación lineal ponderada de un número pequeño de vectores base elegidos de una gran colección o diccionario de ellos.

En el campo del aprendizaje automático, el principio de dispersión busca obtener patrones sencillos que representen adecuadamente los datos de entrenamiento. Los elementos del diccionario son las palabras (patrones) que utilizamos para representar los datos. Esos patrones o vectores base capturan patrones de alto nivel en los datos de entrada. En muchas ocasiones los vectores base pueden ser redundantes con el objetivo de lograr una adecuada representación dispersa. Un buen diccionario dará lugar a explicaciones cortas, dispersas, con pocos elementos que explican razonablemente bien los datos. Ejemplos de diccionarios asociados a representaciones dispersas son las familias de wavelets pero existen muchos más [4].

Las representaciones dispersas tienen una serie de ventajas. En primer lugar el principal objetivo de la representación disperas es lograr simplicidad, con menos componentes distintas de cero, el modelo será más sencillo. A igualdad de condiciones, el principio de la navaja de Ockham obliga a facilitar modelos lo más sencillos posibles. Bajo este principio, es una hipótesis tradicional que modelos sencillos permitirán mejores generalizaciones. Así mismo se ha comprobado que representaciones dispersas evitan el efecto de sobreajuste. Otra de las ventajas es la posibilidad de abordar el problema de la "dimensionalidad". Múltiples métodos de aprendizaje fallan cuando se trasladan a espacios de muchas dimensiones. Podríamos decir que son poco escalables. Sin embargo para muchos de esos problemas de aprendizaje es cierto que se mueven en variedades geométricas localmente sencillas. La dispersión pueden ayudar a encontrar mejor la geometría de esas variedades. Del mismo modo, representaciones dispersas pueden permitir aprender un conjunto pequeño de datos con un gran número de dimensiones.

En el debe de las representaciones dispersas se encuentra la obtención de algoritmos eficientes para obtener representaciones puesto que habitualmente requieren de la resolución de problemas de optimización costosos computacionalmente.

Las variables lingüísticas comparten ciertas carácterísticas con los diccionarios usados en las representaciones dispersas y esta característica puede ayudar a obtener métodos automáticos de aprendizaje. Los términos lingüísticos son "redundantes" y no suelen ser ni ortogonales ni ortonormales. Por otra parte, buscan simplicidad a la hora de representar información. En la literatura ya se han realizado trabajos relacionando variables lingüísticas con diccionarios, por ejemplo con wavelets [5] y la estructura de una variable lingüística puden verse como un diccionario jerárquico de funciones base [6]. En este trabajo se revisan algunas de las contribuciones ya existentes en el campo de los sistemas fuzzy y las representaciones dispersas y se proponen líneas de trabajo futuras.

3 MÉTODOS DE REGULARIZACION

Para la obtención de representaciones dispersas es habitual utilizar métodos de regularización. Dado una muestra de datos $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$ con $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, el problema de aprendizaje supervisado puede verse como el problema de encontrar una cierta función $f \in \mathscr{H}$, siendo $\mathscr{H}$ el espacio de hipótesis, tal que $f(\mathbf{x}_i) \sim y_i$. Por $V(y_i, f(\mathbf{x}_i))$ se denomina a la

función de pérdida o error que se comete. La clave para resolver el problema es fijar la complejidad del problema [29], lo que conduce a las técnicas de redes de regularización [10]. Bajo estas técnicas, el estándar es:

$$f_X^\lambda \in \arg\min_{f\in\mathscr{H}} \left\{ \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} V(y_i, f(\mathbf{x}_i)) + \lambda \|f\|^2_{\mathscr{H}} \right\}$$

Este problema puede verse como un caso particular de la regularización de Tikhonov [27]. El campo teórico donde se enmarca la solución a éste tipo de problemas es el de los espacios de Hilbert de kernel reproductivos (RKHS). Los teoremas de representación son la herramienta fundamental. Por ejemplo para la función de pérdida cuadrática $V(y_i, f(\mathbf{x}_i)) = (y_i - f(\mathbf{x}_i))^2$ están resueltos [16]. La versión más general es debida a [26] que vale para una función de pérdida arbitraria y para cualquier término de penalización cuando éste es estrictamente creciente respecto de la norma del espacio. El resultado establece que si $\mathscr{H} \in$ RKHS con kernel K entonces:

$$f_S^\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i K(\mathbf{x}, x_i)$$

donde α_i son en general coeficientes desconocidos. Para la función de pérdida cuadrática sí son conocidos [27] y para funciones diferenciables [15, 14] las α_i son soluciones a equaciones algebraicas.

4 REPRESENTACIONES DISPERSAS Y SISTEMAS DE REGLAS FUZZY

Los métodos de extracción de SRF habitualmente consideran dos fases, una primera para el aprendizaje de las variables lingüísticas y otra la del aprendizaje de reglas. Por supuesto existen métodos que realizan simultáneamente ambas fases. Análogamente los métodos de representación dispersa pueden considerar el diccionario dado de antemano o bien construir el diccionario a partir de los datos.

Antes de exponer alguno de los métodos aparecidos en la literatura sobre la aplicación de representaciones disperas al campo fuzzy, es preciso aclarar que es habitual utilizar la expresión "Sistemas de reglas fuzzy dispersos (Sparse Fuzzy Rule Systems)" a sistemas de reglas fuzzy caracterizados por no cubrir completamente el universo del discurso [17]. Junto a estos sistemas es muy habitual la utilización de mecanismos de interpolación para inferir valores en los huecos de definición. No nos referimos en este trabajo a este tipo de sistemas, aquí mostraremos algunos ejemplos de aplicación de los mecanismos de dispersión, básicamente la regularización, a los SRF.

Dado una muestra de datos $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$ con $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, el objetivo del aprendizaje de un Sistema de Reglas Fuzzy de Takagi-Sugeno es encontrar un conjunto de variables lingüísticas $A = \{A^i\}_{i=1}^n$ definidas en cada dimensión $\mathbb{R}$ [1] y un conjunto de términos lingüísticos en cada una de ellas $A^i = \{A^i_j\}_{j=1}^{t_i}$ definidos para cada una de ellas, junto con una familia de reglas $\{R^i\}_{i=1}^r$ del tipo:

$$R^i : \text{Si } x_1 \text{ es } A^1_{i_1} \text{ y } \ldots \text{ y } x_n \text{ es } A^n_{i_n} \text{ entonces } s_i = w_{i0} + w_{i1}x_1 + \ldots + w_{in}x_n;$$

tal que la función calculada por el sistema de reglas es

$$\hat{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} \phi_i(\mathbf{x}) s_i(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

donde $s_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j = \mathbf{x}^T\mathbf{w}$, es la salida de la i-ésima regla,

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^r \mu_j(\mathbf{x})}, \quad \mu_i(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} \mu_{A^i_j}(x_j), \qquad (2)$$

siendo $\mu_{A^i_j}$ el conjunto fuzzy que representa al término lingüístico A^i_j que puede ser triangular, en forma de campana, o similar. El error cometido se suele medir como una función de pérdida habitualmente cuadrática.

En el trabajo [19] se aplican métodos de regularización habituales en las representaciones dispersas para eliminar las reglas no relevantes y obtener un sistema de reglas más disperso en el sentido de tener un menor número de reglas. La dispersión se aplica a las reglas no a las variables lingüísticas. Éstas se obtienen mediante la fijación del número máximo de reglas que determina el número de términos lingüísticos y extrayendo éstos mediante la proyección en cada eje de clusters borrosos obtenidos en el espacio producto mediante un método de clustering de cuantificación vectorial iterativo [20]. Los términos lingüísticos A^i_j se representan con funciones de campana biparamétricas $\mu_{A^i_j}(x) = exp(-\frac{(x-c_{ij})^2}{2\sigma^2_{ij}})$.

La dispersión se concreta reduciendo el número de reglas aplicando métodos de regularización l_1, es decir con la norma del valor absoluto. Se asigna un peso ρ_i a cada antecedente de cada regla con lo que la función de pérdida es 4-paramétrica y la regularización que se aplica es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & V(\hat{y}; w, \rho, c, \sigma) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{r} |\rho_i| \le k \end{aligned}$$

siendo k el nivel de dispersión elegido. La resolución de ese problema se obtiene aplicando un algoritmo descendente a la formulación del problema con multiplicadores de Lagrange, problema que no es diferenciable.

[1] Ése es el modelo que vamos a considerar aquí, aunque realmente no es condición imprescindible tener una variable lingüística definida en cada dimensión

En el trabajo [21], el objetivo es el mismo que en el trabajo anterior, minimizar el número de reglas, pero en este caso aplicado de forma jerárquica. La obtención de las variables lingüísticas y con ello de los antecedentes de las reglas se obtienen de nuevo mediante proyección de clústers obtenidos mediante el mismo algoritmo que en el trabajo anterior. La diferencia de este trabajo es que aplica técnicas de representación dispersa en dos niveles, primero para la selección de las mejores reglas y segundo a la hora de obtener los parámetros de los consecuentes de las reglas.

La salida del SRF puede escribirse en notación matricial:

$$\begin{aligned}\hat{y}_j &= \sum_{i=1}^{r} \phi_i(\mathbf{x}_j) s_i(\mathbf{x}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \phi_i(\mathbf{x}_j)[1, \mathbf{x}_j^T]\mathbf{w}_i \\ &= \Psi_i(\mathbf{x}_j)\mathbf{w},\end{aligned}$$

con $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n]^T$, $\mathbf{w}_i = [w_{i0}, \ldots, w_{in}]^T$ e $\Psi_i(\mathbf{x}_j) = [\phi_i(\mathbf{x}_j), \phi_i(\mathbf{x}_j)\mathbf{x}_j^T]$. La salida del sistema para todos los datos de entrada sería $\hat{y} = \Psi\mathbf{w}$. Con ello tendríamos una representación matricial del sistema al que se le podría aplicar regulación para obtener representaciones dispersas. Cada bloque Ψ_i representa la salida de la regla i. En [21] no se utiliza la descomposición matricial indicada anteriormente sino que se reescribe de la forma $\Psi = [\Phi_1, \ldots, \Phi_r] = \Phi$ con $\Phi_i = \text{diag}(\phi_i(\mathbf{x}_1), \ldots, \phi_i(\mathbf{x}_r))X_e$ donde Φ_i es una matriz diagonal que contiene la salida de la regla i aplicada a todos los datos de entrada y $X_e = [\mathbf{1}, X^T]$ e $X = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N]$. En ese caso la salida del sistema sería $\hat{y} = \Phi\mathbf{w}$. El problema de regularización que se resuelve es

$$\begin{aligned}\text{mín} \quad & \|w\|_{2,0} \\ \text{s.a.} \quad & \frac{1}{2}\|y - \sum_{i=1}^{r} \Phi_i w_i\|_2^2 \leq k\end{aligned}$$

donde la norma $\|\cdot\|_{q,0}$ es una norma aplicada a w pero por bloques, y da el número de ellos que son distintos de cero. Del mismo modo Φ es una matriz por bloques obtenida a partir de la representación matricial de la función calculada por el SRF.

Usar la casi-norma $l_0 : \|\mathbf{x}\|_0 = card\{x_i \neq 0\}$ en los problemas de regularización dispersa se ha probado que es un problema NP-hard. Para abordarlos hay varias estrategias, pero principalmente usar la regularización l_1 y aplicando a ella algoritmos de selección ávidos por bloques tales como los "matching pursuit" [9].

4.1 APLICANDO BOOSTING

Como se ha visto, los métodos descritos no aplican dispersión a las variables lingüísticas sino a las reglas del sistema. Otro mecanismo que puede permitir construir métodos de modelización fuzzy usando técnicas dispersas es el Adaboost [12] pero adaptado, tal como puede verse en [30]. En este caso se parte de un conjunto de sistemas base $=\{h_j\}_{u=1}^{m}$, que pueden ser una familia de SRF sencillos. Pueden ser por ejemplo SRF con únicamente dos categorías antónimas en cada dimensión o diversos SRF con algunos términos más. Mediante boosting se busca obtener un clasificador compuesto

$$h_C(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_j(\mathbf{x}). \tag{3}$$

que minimize el error cometido y a la vez sea disperso, es decir, con el menor número posible de sistemas base con coeficiente asociado distinto de cero. Un algoritmo para calcular los parámetros de (3) puede encontrarse en [30]. En este caso se busca resolver el siguiente problema de regularización:

$$\begin{aligned}\text{mín} \quad & V(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} exp(-y_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_j(\mathbf{x}_i)) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{m} |\alpha_i| \leq k\end{aligned}$$

Los parámetros α_i pueden interpretarse en términos del sistema obtenido: indican la importancia o peso que tiene cada uno de los sistemas base en el sistema compuesto final.

4.2 APLICANDO ESTRUCTURACIÓN

El método anterior no tiene en cuenta ninguna relación estructural entre los SRF base, ni siquiera entre las distintas dimensiones. De hecho si se permutan las variables, el método obtiene el mismo sistema final. Para el aprendizaje de variables lingüísticas se requiere una estructuración mayor.

De forma general, el problema de regularización para el aprendizaje de un diccionario con una representación dispersa puede escribirse como

$$\begin{aligned}\text{mín}_{\mathbf{B},\mathbf{W}} \quad & \frac{1}{2}\|\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{W}\|_F^2 + \lambda\|\mathbf{W}\|_1 \\ \text{s.a.} \quad & \|b_i\|_2^2 \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m.\end{aligned}$$

con $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m]$, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N]$ y $\mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i, \in \mathbb{R}^n$ y pesos $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_N]$ con $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^m$. La norma $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobenius. De esta forma cada $\mathbf{x}_j \sim \mathbf{B}\mathbf{w}_j$ siendo $\mathbf{w}_j$ un vector disperso.

Este problema es convexo en $\mathbf{B}$ y en $\mathbf{W}$ por separado, pero no lo es en conjunto por eso lo habitual es optimizar $\mathbf{B}, \mathbf{W}$ por separado e iterativamente. La complejidad es alta. Fijado $\mathbf{B}$, optimizar en $\mathbf{W}$ requiere resolver N problemas n-dimensionales de tipo lasso y de tamaño m. Usando un algoritmo eficiente como LARS [8] con una implementación de Cholesky, cada problema está en el orden de $\theta(mnk + mk^2)$ siendo k el número de coeficientes distintos

de cero [22]. Fijando $\mathbf{W}$, optimizar en $\mathbf{B}$ es un problema de mínimos cuadrados de nm variables y m restricciones. Con un algoritmo eficiente [18] la formulación dual tiene sólo m variables pero requiere invertir matrices de orden mxm, es decir de orden $\theta(m^3)$.

En [31] se propone un método jerárquico para aprender un diccionario de forma incremental y multietápico. La idea es calcular un árbol de diccionarios donde los niveles más altos del árbol dan representaciones más gruesas y los niveles más bajos dan representaciones más finas. Las hojas del árbol dan el nivel más alto de resolución. El algoritmo utiliza proyecciones para el control de la información que fluye entre los distintos niveles. Además se fuerza a que los componentes de $\mathbf{W}$ que son cero en un nivel lo sean también en el siguiente. Esencialmente se usan l proyecciones $T_k \in \mathbb{R}^{d_k xn}$ $(1 \leq l \leq k)$ siendo l el número de niveles del árbol. Cada T_k tiene sus filas ortonormales y distintas y los T_k son ortogonales entre sí. En el nivel k se aprende el diccionario $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{d_k xm_k}$ y los pesos $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{m_k xN}$ mediante la resolución de un problema

$$\begin{aligned} \text{mín}_{\mathbf{B}_k,\mathbf{W}_k} \quad & \frac{1}{2}\|T_k X - \mathbf{B}_k \mathbf{W}_k\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{W}_k\|_1 \\ \text{s.a.} \quad & \|\mathbf{b}_i^{(k)}\|_2^2 \leq 1 \quad \forall i = 1,\ldots,m_k \end{aligned}$$

La estructura de árbol de los pesos induce una estructura de árbol en los diccionarios $\{\mathbf{B}_k\}_{k=1}^{l}$: los vectores base $\{\mathbf{b}_{rm_{k-1}+i} : 0 \leq r < m_k/m_{k-1}\}$ son los hijos de los vectores de la base $\mathbf{b}_i^{(k-1)}$.

5 CONCLUSIONES

En el trabajo se han mostrado varios métodos que aparecen en la literatura basados en la aplicación de representaciones dispersas mediante regularización y que pueden derivar en la obtención de variables lingüísticas estructuradas e inferidas a partir de datos de entrada. Ninguno de esos métodos se ha aplicado aún y se requiere más estudios para determinar la viabilidad de los mismos al problema planteado.

Referencias

[1] Christopher M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.

[2] Emmanuel J Candès, Justin Romberg, and Terence Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(2):489–509, 2006.

[3] J. Casillas, O. Cordón, F. Herrera, and L. Magdalena, editors. *Interpretability Issues in Fuzzy Modeling*, volume 128 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, 2003.

[4] Scott Shaobing Chen, David L. Donoho, and Michael A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20:33–61, 1998.

[5] Adolfo R. de Soto. Building a hierarchical set of fuzzy rules using wavelet theory. In *International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty Knowledge-Based Systems*, volume 3, pages 1764–1769, Madrid, July 2000.

[6] Adolfo R. de Soto. A hierarchical model of a linguistic variable. *Information Sciences*, 181(20):4394 – 4408, 2011.

[7] D. L. Donoho and X. Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(7):2845–2862, September 2001.

[8] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, and R. Tibshirani. Least angle regression (with discussion). *The Annals of Statistics*, 32(2):407–451, 2004.

[9] Michael Elad. *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2010.

[10] Theodoros Evgeniou, Massimiliano Pontil, and Tomaso Poggio. Regularization networks and support vector machines. *Advances in Computational Mathematics*, 13(1):1–50, 2000.

[11] M. A T Figueiredo, R.D. Nowak, and S.J. Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems. *Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of*, 1(4):586–597, 2007.

[12] Yoav Freund and Robert E Schapire. A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. *Journal of Computer and System Sciences*, 55(1):119 – 139, 1997.

[13] M.J. Gacto, R. Alcalá, and F. Herrera. Interpretability of linguistic fuzzy rule-based systems: An overview of interpretability measures. *Information Sciences*, 181(20):4340 – 4360, 2011.

[14] Federico Girosi. An equivalence between sparse approximation and support vector machines. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA, 1997.

[15] Federico Girosi, Michael Jones, and Tomaso Poggio. Regularization theory and neural networks architectures. *Neural computation*, 7(2):219–269, 1995.

[16] George S Kimeldorf and Grace Wahba. A correspondence between bayesian estimation on stochastic processes and smoothing by splines. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(2):495–502, 1970.

[17] LászlóT. Kóczy and Kaoru Hirota. Interpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rule bases. *Information Sciences*, 71(1–2):169 – 201, 1993.

[18] Honglak Lee, Alexis Battle, Rajat Raina, and Andrew Ng. Efficient sparse coding algorithms. In *Advances in neural information processing systems*, pages 801–808, 2006.

[19] E. Lughofer and S. Kindermann. Sparsefis: Data-driven learning of fuzzy systems with sparsity constraints. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(2):396–411, 2010.

[20] Edwin Lughofer. Extensions of vector quantization for incremental clustering. *Pattern Recognition*, 41(3):995 – 1011, 2008.

[21] M. Luo, F. Sun, and H. Liu. Hierarchical sparse representation for T-S fuzzy systems identification. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(6):1032–1043, 2013.

[22] J. Mairal. *Sparse coding for machine learning, image processing and computer vision*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2010.

[23] Stephane G Mallat and Zhifeng Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41(12):3397–3415, 1993.

[24] B. A. Olshausen and D. J. Field. Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by v1? *Vision Reseach*, 37:3311–3325, 1997.

[25] Bruno A. Olshausen. Sparse coding of time-varying natural images. In *In Proc. Of The Int. Conf. On Independent Component Analysis And Blind Source Separation*, pages 603–608, 2000.

[26] Bernhard Schölkopf, Ralf Herbrich, and Alex J Smola. A generalized representer theorem. In *Computational learning theory*, pages 416–426. Springer, 2001.

[27] AN Tikhonov and V Ya Arsenin. Solution of ill-posed problems. *VH Winston & Sons, Washington, DC*, 1977.

[28] J.A. Tropp and S.J. Wright. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):948–958, 2010.

[29] Vladimir N Vapnik. *Statistical learning theory*. Wiley, 1998.

[30] Zhen James Xiang and Peter J. Ramadge. Sparse boosting. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on*, 0:1625–1628, 2009.

[31] Zhen James Xiang, Hao Xu, and Peter J Ramadge. Learning sparse representations of high dimensional data on large scale dictionaries. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2011.

[32] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

MODELO LINGÜÍSTICO DEL APRENDIZAJE PARA LA EVALUACIÓN AUTOMÁTICA BASADA EN CRITERIOS

Gloria Sanchez-Torrubia [1], Carmen Torres-Blanc [1], Gracian Trivino [2]

[1] *Universidad Politécnica de Madrid, Campus de Montengancedo s.n., Boadilla del Monte, Madrid*, {gsanchez, ctorres}@fi.upm.es

[2] *European Centre for Soft Computing*, Mieres, Asturias, gracian.trivino@softcomputing.es

Resumen

En el año 2010 los autores se plantearon el objetivo de construir sistemas de evaluación automática que emularan el razonamiento de un profesor cuando evalúa la competencia alcanzada por el alumno en los objetivos de aprendizaje. Después de varios diseños basados en controladores tipo Mamdani, que dieron resultados prometedores pero no completamente satisfactorios, se decidió aplicar la técnica del *Granular Linguistic Model of a Phenomenon* que permitió alcanzar los objetivos planteados. En este trabajo presentaremos el modelo general diseñado para la evaluación del aprendizaje, así como algunas particularizaciones a sistemas concretos, unos construidos para evaluar el aprendizaje de los algoritmos de grafos mediante simulación de dichos algoritmos, y otros para evaluar, en base a criterios, las respuestas dadas por un alumno en un cuestionario de Moodle.

Palabras Clave: Granular Linguistic Model of a Phenomenon, computación con palabras, lógica borrosa, Learning Management System.

1 INTRODUCCIÓN

Desde el año 2012 estamos trabajando, dentro del proyecto "Descripción lingüística de fenómenos complejos"[1] con el objetivo de diseñar un modelo teórico de representación del aprendizaje con el fin de simular, mediante sistemas expertos, la evaluación de dicho aprendizaje realizada por un profesor en base a sus criterios, generalmente más complejos que lo que se puede obtener mediante medias ponderadas de las calificaciones parciales. De esta manera se puede compaginar la evaluación en base a criterios con la rapidez y eficacia de un sistema automatizado. Por otra parte, tanto el modelo teórico como los sistemas expertos que de él se deriven, están siendo diseñados para generar informes de evaluación que explican los niveles de conocimiento y la adecuación alcanzada por los alumnos a los objetivos de aprendizaje marcados por el profesor. Dichos informes, generados en lenguaje natural, representan una evaluación formativa, ya que subrayan las fortalezas y las carencias del alumno en cada uno de los aspectos de su aprendizaje. Hasta el momento han sido diseñados varios evaluadores automáticos de la simulación de algoritmos de grafos [4] [5] realizados en el entorno de aprendizaje GRAPHs [2], y también un evaluador, integrable en la plataforma Moodle, para ser aplicado sobre los resultados de los cuestionarios que cualquier profesor puede desarrollar en esta plataforma [6].

Este trabajo resumirá los objetivos alcanzados hasta el momento y está estructurado de la siguiente forma: en la sección 2 se describe en general el modelo lingüístico granular de la evaluación del aprendizaje, su estructura, sus componentes principales y la metodología utilizada para agregar la información. En la sección 3 se describe brevemente la aplicación del modelo a la evaluación del *log* de interacción generado por el entorno de aprendizaje GRAPHs, cuando un alumno lo utiliza para simular uno de los algoritmos implementados en él. En la sección 4 se presenta la particularización del modelo lingüístico granular del aprendizaje, para evaluar los cuestionarios de Moodle mediante una inferencia borrosa, basada en criterios, en vez de la evaluación basada en medias ponderadas que implementa Moodle.

2 MODELO TEÓRICO DE LA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

El objetivo de este modelo es la descripción de un sistema automático que emule el proceso de evaluación llevado a cabo por un profesor, desde el recuento de respuestas

[1] MICINN, TIN2011-29827-C02-01

correctas y errores cometidos, su agregación teniendo en cuenta criterios de importancia, repetición, etc. hasta la obtención de una valoración final basada en la adecuación de las respuestas suministradas a los objetivos de aprendizaje establecidos por el profesor. Además, el sistema genera un informe, dirigido a la evaluación formativa, sobre la situación del alumno en el proceso de aprendizaje respecto a cada uno de los aspectos considerados por el profesor. Para la construcción de este sistema se utilizan técnicas de lógica borrosa, en particular el modelo lingüístico granular de un fenómeno (GLMP) [1] basado en la computación con palabras y percepciones de Zadeh [9]. En esta sección veremos cómo el diseñador, en este caso el profesor, utiliza la metodología de GLMP para crear un modelo genérico de su propia percepción del proceso de evaluación. Mediante el uso de diferentes funciones de agregación y expresiones lingüísticas, el paradigma GLMP ofrece recursos adecuados para el diseño de un sistema de evaluación automática adecuada a sistemas *e-learning*.

Un GLMP es una estructura formada por percepciones computacionales (*CP*) estructuradas en niveles (ver Figura 1), donde los niveles más bajos representan los componentes elementales del fenómeno a estudiar y, a medida que aumenta el nivel, aumenta la complejidad del elemento considerado. Estas percepciones están relacionadas por *Perception Mappings* (*PM*) de manera que las percepciones de un nivel más bajo (percepciones subordinadas) explican las de niveles superiores. De esta manera, la información se va agregando, mediante inferencia borrosa, de abajo a arriba como se verá a continuación.

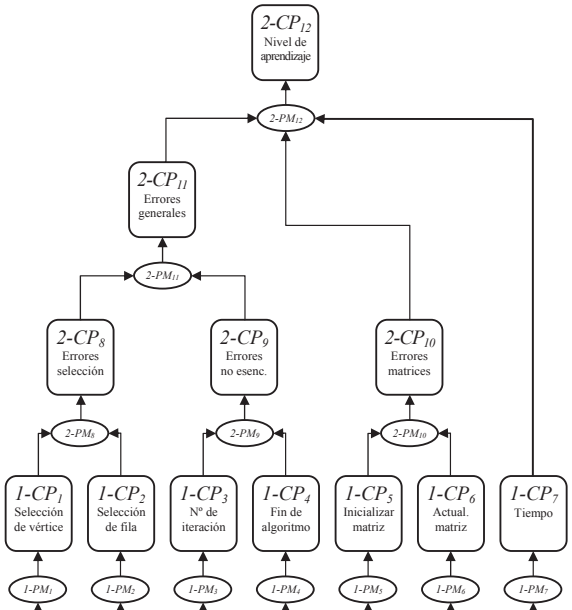


Figura 1: Ejemplo de estructura de un GLMP. Evaluación del Algoritmo de Floyd-Warshall.

Una **percepción computacional** (*CP*) es el modelo computacional de una unidad de información del fenómeno a modelar, en nuestro caso la evaluación del aprendizaje, es decir una faceta de dicho fenómeno con un cierto nivel de granularidad. Una *CP* es un par (*A*, *W*), donde:

$A=(a_1, a_2, ..., a_n)$ es un vector de expresiones lingüísticas que representa el dominio lingüístico de la *CP*. Cada a_i describe el valor de la *CP* en una situación particular, por ejemplo, a_i = "*El nivel de conocimiento de los conceptos básicos es alto*"

$W=(w_1, w_2, ..., w_n)$ es un vector de grados de validez. Cada $w_i \in [0,1]$ se asigna a su correspondiente expresión lingüística a_i y depende de la validez de cada expresión en su contexto de uso.

Notaremos

$$(A,W)=\{(a_1,w_1),(a_2,w_2),...,(a_n,w_n)\} \quad (1)$$

para enfatizar el hecho de que cada w_i es el grado de validez de la correspondiente expresión lingüística a_i.

Hay dos tipos de *CPs*: las *1-CP* representan las facetas elementales del fenómeno, en nuestro caso los conceptos básicos que forman el tema a evaluar, y están en el nivel inferior. Por otra parte las *2-CPs* representan facetas más complejas del aprendizaje a evaluar y son explicadas por un conjunto de *CPs* subordinadas.

El proceso de inferencia para generar *CPs* se lleva a cabo por las ***Perception Mappings*** (*PMs*). Una *PM* es una tupla (*U, y, g, T*) donde:

U es un conjunto de *CPs* de entrada, $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, donde

$$u_i = (A_{u_i}, W_{u_i}) = \{(a_1^{u_i}, w_1^{u_i}),(a_2^{u_i}, w_2^{u_i}),...,(a_{n_{u_i}}^{u_i}, w_{n_{u_i}}^{u_i})\}. \quad (2)$$

En el caso especial de una *Perception Mapping* de primer orden (*1-PM*), *U* es una variable definida en el dominio de los datos de entrada.

y es la *CP* de salida

$$y = (A_y, W_y) = \{(a_1^y, w_1^y),(a_2^y, w_2^y),...,(a_{n_y}^y, w_{n_y}^y)\} \quad (3)$$

g es la función de agregación con salida $W_y = g(W_{u_1}, W_{u_2}, ..., W_{u_n})$, donde W_y es el vector $(w_1^y, w_2^y, ..., w_{n_y}^y)$ de grados de validez asignados a cada expresión lingüística en *y* y W_{u_i} son los grados de validez de las percepciones subordinadas de entrada.

T es un algoritmo de generación de texto, capaz de generar las expresiones lingüísticas de A_y. En nuestro caso es una plantilla lingüística del tipo "*El nivel de conocimiento de los conceptos básicos es {muy bajo | bajo | medio | alto | muy alto}*"

En el caso de las *1-PMs*, la función de agregación ***g*** está definida mediante las funciones de pertenencia de las etiquetas lingüísticas de la correspondiente *1-CP*, que

transforman los datos de entrada en vectores de grados de validez, como se indica en (4).

$$W_y = g(z) = \left(\mu_{a_1^y}(z), \mu_{a_2^y}(z), \ldots, \mu_{a_{n_y}^y}(z) \right) = \left(w_1^y, w_2^y, \ldots, w_{n_y}^y \right). \quad (4)$$

donde $w_j^y = \mu_{a_j^y}(z)$ es el grado de validez asignado a a_j^y y z es el dato numérico de entrada.

Por otra parte, en el caso de las *2-PMs* las funciones de agregación ***g*** contienen motores de inferencia que transforman, mediante operadores de agregación y reglas de tipo *if-then*, los grados de validez de las percepciones subordinadas (2) en grados de validez de la *2-CP* correspondiente (3). Cada una de las reglas tiene como antecedentes una de las etiquetas lingüísticas de cada una de las percepciones subordinadas y como consecuente una de las etiquetas lingüísticas de la correspondiente *2-CP*. Estas funciones de agregación se utilizan para implementar criterios de evaluación como los que generalmente utiliza, a menudo inconscientemente, un profesor. Por ejemplo, ***g*** implementa criterios del tipo: "*se puede permitir algún error de este tipo ya que probablemente se deba a un despiste*", "*este error es importante y debe ser penalizado*" o "*estos dos errores juntos, indican que este concepto no ha sido comprendido*". La implementación de estos criterios se hará mediante la selección de la t-norma y la t-conorma a utilizar, la definición de etiquetas lingüísticas (con sus correspondientes funciones de pertenencia) y la construcción del conjunto de reglas de tipo *if-then*. En la sección 4 se puede encontrar un ejemplo de cómo las reglas *if-then* implementan los criterios de un profesor.

El diseño de un GLMP es un proceso iterativo que comienza con la definición de la percepción global que resume el fenómeno que se está modelizando. Esta percepción responde a una pregunta general del tipo *¿Cuál es el nivel de competencia, respecto a un cierto tema, demostrado por el alumno después de completar una tarea?* La respuesta estándar sería del tipo *El nivel de competencia es bueno y la calificación obtenida es 7.3*. Para construir esta respuesta, se crea una red de *PMs* que relacionan una serie de *CPs* representando, cada una de éstas, uno de los conceptos, cada uno con su propio nivel de detalle, que el profesor desea tener en cuenta (ver, por ejemplo, Figura 1).

Cuando un profesor desea evaluar el nivel de consecución, por parte del alumno, de los objetivos de aprendizaje, agrupa las respuestas según el concepto que utilizan y las valora según el tipo y la importancia de los errores cometidos, el número de repeticiones de esos errores, la importancia y la repetición de respuestas correctas, etc. A continuación agrega esos resultados utilizando un método de inferencia basado en la experiencia y obtiene la calificación final. Ésta es la base sobre la que se construye un GLMP que modeliza computacionalmente la tarea de evaluar en base a criterios. Este modelo general deberá adaptarse a cada caso particular definiendo los elementos que lo constituyen.

2.1. ADAPTACIÓN DE UN GLMP

Para particularizar el GLMP, el primer paso consiste en seleccionar los conceptos y métodos básicos del tema a evaluar (que definirán las 1-*CPs*), así como los conceptos agregados (que definirán las 2-*CPs*) hasta llegar al tema general a evaluar. De esta manera se crea un árbol similar a los representados en las Figuras 1 y 3. A continuación se deberá completar la construcción de cada una de las percepciones definiendo las etiquetas lingüísticas que las describen. Una vez construidas las percepciones se deberán diseñar las *Perception Mappings* (*PMs*) que las enlazan. En el caso de las 1-*CPs*, las propias funciones de pertenencia de las etiquetas lingüísticas actúan como borrosificadores (1-*PMs*) mientras que el diseño de las 2-*CPs* es más complejo ya que son los motores de inferencia que sustentan el sistema experto. Cada uno de estos motores consta de un conjunto de reglas *if-then* en lenguaje natural evaluadas mediante funciones de agregación borrosas (t-norma y t-conorma). Cabe destacar que no se utilizan operadores de implicación para evaluar las reglas porque lo que se transmite a través de la estructura de percepciones es el valor agregado de los antecedentes que tienen el mismo consecuente, es decir el grado de validez que cada uno de los antecedentes aporta a cada consecuente. Además, los datos se transmiten de un nivel a otro sin desborrosificar, por lo que no se pierde precisión en el proceso de inferencia. La desborrosificación se hace sólo para producir los resultados lingüísticos.

2.2. EXTENSIÓN DE UN GLMP

Además de lo explicado anteriormente, relativo a la ejecución de un ejercicio, el diseño del GLMP puede ser extendido a la evaluación de una serie de ejercicios del mismo tipo, bien para evaluar el comportamiento de un grupo de alumnos o para evaluar la evolución del aprendizaje en un mismo alumno. Para ello hemos utilizado el concepto de *importancia* de Yager [8] que mejora la adaptabilidad del GLMP en el estudio de una serie de ejercicios del mismo tipo. En particular este concepto ha sido utilizado para estudiar la evolución del aprendizaje de un alumno, dando mayor importancia a los últimos ejercicios realizados.

Cuando se están evaluando varios ejercicios, es necesario ofrecer, en el informe de evaluación, un resumen final construido mediante el uso de cuantificadores y atributos. De todos los resúmenes posibles, el que más información proporciona no siempre coincide con el que tiene mayor grado de validez, por ejemplo "ninguno de los ejercicios realizados es muy malo" puede tener grado de validez máximo pero, sin embargo, no proporcionar mucha información. En este sentido hemos utilizado y adaptado la medida de *informativeness* de Yager [7].

La utilización del concepto de *importancia* y de la medida de *informativeness* en la extensión del GLMP al estudio de la evolución del aprendizaje está explicada con detalle en [5].

3 EVALUADORES DE SIMULACIONES DE ALGORITMOS EN GRAPHs

GRAPHs es un entorno de aprendizaje diseñado para simular, con ayuda visual, la ejecución de un algoritmo sobre un grafo. Este entorno integra simuladores de algoritmos, diseñados según las especificaciones eMathTeacher [3], en las que el alumno simula la ejecución del algoritmo mediante las entradas solicitadas por la aplicación, y la simulación no continúa hasta que el alumno no realiza la acción correcta.

Cuando un alumno simula un algoritmo en GRAPHs, el sistema genera un *log* de interacción en XML. De este archivo se extraen los datos de entrada para el GLMP que realiza la evaluación automática de la simulación. Dicha evaluación contiene un informe en lenguaje natural que detalla las carencias y fortalezas del alumno en cada uno de los aspectos del algoritmo, así como una calificación numérica.

Hasta el momento hemos diseñado, probado y aplicado en evaluación real GLMPs adaptados a las simulaciones de los algoritmos de Dijkstra [5], DFS [4], Brélaz, Prim, Kruskal, y Floyd-Warshall (ver Figuras 1 y 3).

En el caso del GLMP del algoritmo de Dijkstra, también se ha desarrollado completamente la extensión de este GLMP a la evaluación de varios ejercicios. Veamos a continuación un ejemplo de cómo se obtiene el informe sobre la evolución del aprendizaje en este algoritmo. Para realizar este informe, hemos aplicado la extensión del GLMP descrita en la sección 2.2, diseñada para evaluar varios ejercicios del mismo tipo realizados secuencialmente. En este proceso el alumno repite la simulación del algoritmo con diferentes grafos, por tanto, los últimos ejercicios deben ser los que más se tengan en cuenta, ya que es natural que las primeras veces el alumno cometa errores que no deben producirse después de algunas repeticiones. Para ello, como se dijo en 2.2, utilizamos el concepto de *importancia* atribuyendo un peso de i^2 (donde i es el número de la simulación que se está realizando) a la calificación obtenida en esa simulación. La elección de i^2 se debe al hecho de que GRAPHs está diseñada como herramienta de aprendizaje, por lo que se deben potenciar mucho más los resultados obtenidos en las últimas ejecuciones. En este ejemplo, el alumno ha completado cinco simulaciones, y los datos obtenidos de los respectivos *log* de interacción, que son los datos de entrada al GLMP (descritos en [5]), así como las calificaciones obtenidas se muestran en tabla 1.

La calificación asignada a la secuencia de simulaciones se obtiene mediante media ponderada utilizando la *importancia* como peso, ver (5).

Tabla 1: Datos de los *log* de interacción de cinco simulaciones con sus respectivas calificaciones numéricas.

$E_{1\text{-}1}$	$E_{1\text{-}23}$	$E_{2\text{-}3}$	$E_{2\text{-}12}$	Tiempo	Calif*10
3/7	0/15	3/11	3/28	0.85	4.09
1/5	1/10	2/7	1/18	0.73	6.99
3/9	0/19	6/16	0/40	0.31	4.94
1/11	1/23	3/10	0/10	0.8	7.31
0/9	1/19	1/6	0/8	0.49	9.40

$$Calif_F = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2 * Calif_i}{\sum_{i=1}^{n} i^2} \quad (5)$$

La tabla 2 muestra los grados de validez T_{QS} y la *informativeness* I_{QS} de los resúmenes lingüísticos del tipo *Q de los y-es importantes son S*. Los grados de validez se calculan según (6)

$$T_{QS} = \mu_Q\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2 * \mu_S\left(Calif_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} i^2}\right) \quad (6)$$

Donde μ_Q es la función de pertenencia de uno de los cuantificadores Q {*pocos* | *algunos* | *la mayoría*}, y μ_S es la función de pertenencia de uno de los atributos S {*insatisfactorio* | *satisfactorio* | *muy satisfactorio*}.

Tabla 2. Grados de validez e *informativeness* de los resúmenes lingüísticos de las calificaciones de la Tabla 1

T_{QS}	Insat	Sat	Msat
Poc	1	0	0
Alg	0	1	0
May	0	0	1

I_{QS}	Insat	Sat	Msat
Poc	0.030	0.137	0.073
Alg	0	**0.168**	0
May	0.018	0.165	**0.184**

Seleccionamos los resúmenes con mayor *informativeness*, y en los casos en los que ésta sea muy parecida el que tenga mayor grado de validez, para generar el siguiente informe final: *En esta secuencia de 5 simulaciones* (*con importancia* i^2), *el grado de corrección alcanzado por el estudiante es muy satisfactorio en la mayoría de las simulaciones importantes* (*validez=1*) *y satisfactorio en algunas de las simulaciones importantes* (*validez=1*). *La calificación obtenida es 7,79.*

3.1. ESTRATEGIAS PARA PRODUCIR EL 10

Debemos hacer notar que conseguir que un GLMP produzca como calificación numérica el 10 (nota máxima) no es trivial debido precisamente a la utilización de la inferencia borrosa que, aunque pueda dar como resultado la

etiqueta *perfecto*, al calcular la calificación numérica, se pierde el 10, ya que éste no es un concepto borroso.

Para resolver este problema hemos seguido dos estrategias: una de ellas consiste en incluir en las variables lingüísticas, en las que no se permite ningún error, una etiqueta prácticamente *crisp* (casi un *singleton*) ver Figura 2. Esto es lo que se ha hecho en la implementación del GLMP para la evaluación de la simulación del algoritmo de Floyd-Warshall (ver Figura 1).

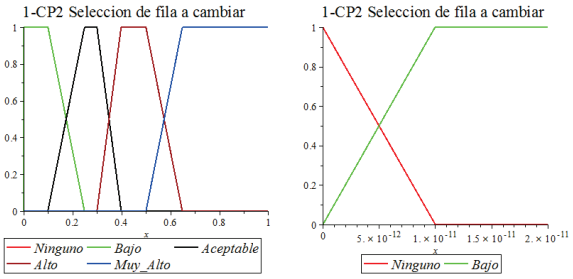


Figura 2: Etiqueta casi *crisp* utilizada en la obtención del 10.

La otra estrategia que hemos utilizado consiste en duplicar las percepciones de los conceptos que se consideran esenciales, dedicando una de ellas a la detección de la existencia de error y la otra a la cuantificación de dicho error. Las percepciones de existencia de error tendrán funciones de pertenencia *crisp* y se irán agregando entre sí, produciendo al final la etiqueta *perfecto* si el resultado de las agregaciones es no existencia de error. Esta es la técnica que se ha utilizado en el GLMP para el algoritmo de Brélaz (ver Figura 3).

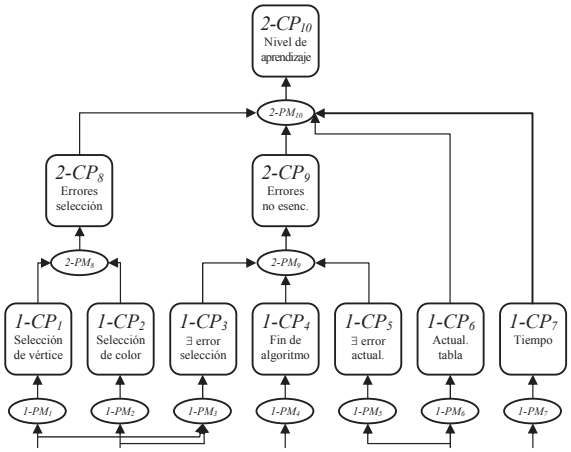


Figura 3: GLMP evaluación del Algoritmo de Brélaz.

En las dos estrategias se debe definir, en la última de las percepciones, la etiqueta *perfecto* como casi un *singleton* y en ella se debe utilizar el valor 0 o 1, según los casos, en lugar del centroide.

4 EVALUADORES DE CUESTIONARIOS DE MOODLE

En esta sección vamos a describir los aspectos característicos de un GLMP diseñado específicamente para evaluar un cuestionario de Moodle, o de cualquier otro sistema de aulas virtuales (Learning Management System o LMS) que permita extraer, automáticamente, los resultados de un cuestionario[6].

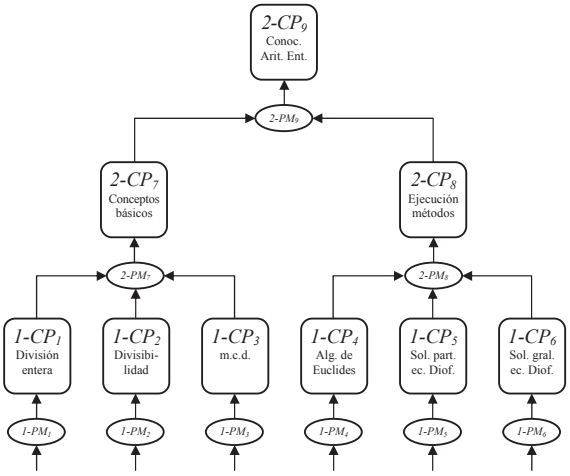


Figura 4: GLMP evaluación cuestionario aritmética entera.

En un GLMP, cada *CP* representa una faceta del fenómeno que se está estudiando, por ejemplo, en la construcción de un GLMP para evaluar un cuestionario de aritmética entera (ver Figura 4), cada 1-*CP* representa el conocimiento de uno de los conceptos o métodos básicos empleados en aritmética entera y cada una de las 2-*CP* el conocimiento de uno de los aspectos más complejos en que se pueden agrupar las 1-*CPs*. En el diseño de este GLMP, las 2-*CPs* construidas son: *conocimiento de conceptos básicos*, *implementación de métodos* y *conocimientos de aritmética entera*. La primera de estas facetas, que se puede ver como la variable lingüística *conocimiento de conceptos básicos*, está descrita por varios calificativos o etiquetas lingüísticas (*muy bajo, bajo, medio, alto y muy alto*) que describen el grado de conocimiento, alcanzado por un estudiante, de los conceptos básicos de la aritmética entera. La segunda, por otra parte, describe la habilidad alcanzada por el estudiante en la ejecución de los métodos propios de este tema. La separación entre estas dos facetas del conocimiento permite al profesor implementar sus propios criterios sobre la primacía (o no) del conocimiento de los conceptos sobre la habilidad para ejecutar los métodos. Así, si el profesor considera más importante la comprensión de los conceptos, construirá reglas que den más peso a la percepción que lo describe: *SI el conocimiento de conceptos básicos es muy alto y la implementación de métodos es media ENTONCES el conocimiento de aritmética entera es bueno* y *SI el conocimiento de conceptos básicos es medio y la implementa-*

ción de métodos es muy alta ENTONCES el conocimiento de aritmética entera es aceptable. En general la definición de las etiquetas, la construcción de las reglas y la selección de los operadores de agregación modeliza el criterio del profesor.

Lo más característico de estos GLMPs es el diseño de sus datos de entrada a partir de los resultados de las preguntas generados automáticamente por el sistema de aulas virtuales Moodle. A continuación describimos con detalle cómo se construyen estos datos.

4.1. DEFINICIÓN DE LOS DATOS DE ENTRADA

Una vez diseñado el GLMP, los datos de entrada al sistema se extraen de las preguntas del cuestionario sobre el que se va a aplicar la evaluación basada en criterios. Cada pregunta se asocia a la o las *1-CPs* que representan los conceptos utilizados para responder esa pregunta, de forma que la nota obtenida en esa pregunta será parte de los datos de entrada de todas las percepciones que representan conceptos o métodos cuyo conocimiento es necesario para la resolución de dicha pregunta. Específicamente, los datos de entrada al sistema se obtienen según (7):

$$G_i = max\left\{0, \frac{\sum_{k\in Q_i} s_k}{\sum_{k\in Q_i} S_k}\right\}, \quad 1 \le i \le 6, \qquad (7)$$

donde G_i es el dato de entrada a la correspondiente 1-PM_i, $Q_i = \{k \ / \text{ la pregunt } q_k \text{ usa el concepto } 1 - CP_i\}$, q_k es la *k-ésima* pregunta del cuestionario, s_k es la calificación obtenida en la pregunta q_k y S_k es la calificación máxima de la pregunta q_k. Por otra parte, para evitar que las entradas al GLMP puedan ser valores negativos, G_i se define en (7) como el máximo entre 0 y un cociente que puede llegar a ser negativo, cuando las preguntas de Moodle asignan calificaciones negativas a respuestas incorrectas.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

En este trabajo hemos descrito los resultados obtenidos hasta el momento en la adaptación y aplicación del modelo GLMP a la evaluación del aprendizaje en general así como su desarrollo en distintos casos concretos, matizando las características diferenciadoras de cada uno de ellos.

En el futuro nos proponemos diseñar un nuevo modelo que emplee conjuntos *fuzzy* intuicionistas. Creemos que estos conjuntos pueden modelizar mejor la incertidumbre sobre lo que sabe y no sabe un alumno, ya que el acierto en una respuesta indica existencia de conocimiento mientras que el error indica la existencia de conceptos incorrectos, lo que significa algo más que simple ausencia de conocimiento. La manera de representar la realidad que tienen los conjuntos intuicionistas refleja mejor la dualidad del conocimiento ya que, mediante estos conjuntos, podemos representar el grado de conocimiento y el de desconocimiento (o conocimiento erróneo) y éstos no siempre tienen que sumar 1, ya que el desconocimiento no siempre es la negación del conocimiento.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN, TIN2011-29827-C02-01).

Referencias

[1] Carmen Martínez-Cruz, Albert Van der Heide, Daniel Sánchez, and Gracian Trivino, "An Approximation to the Computational Theory of Perceptions using Ontologies," *Expert Syst. Appl.*, vol. 39, no. 10, pp. 9494-9503, August 2012.

[2] M. Gloria Sanchez-Torrubia, Carmen Torres-Blanc, and Sonia Escribano-Blanco, "GRAPHs: a learning environment for graph algorithm simulation primed for automatic fuzzy assessment," in *Proc. 10th Koli Calling Int. Conf. Comput. Educ. Res. (Koli Calling '10)*, Koli National Park, Finland, 2010, pp. 62-67.

[3] M. Gloria Sanchez-Torrubia, Carmen Torres-Blanc, and Miguel A. Lopez-Martinez, "PathFinder: A Visualization eMathTeacher for Actively Learning Dijkstra's Algorithm," *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, vol. 224, pp. 151-158, 2009.

[4] M. Gloria Sanchez-Torrubia, Carmen Torres-Blanc, and Gracian Trivino, "GLMP for Automatic Assessment of DFS Algorithm Learning," *in Proc. 16th Conf. Innov. Technol. Comput. Sci. Educ. (ITiCSE '11)*, Darmstadt, 27–29, 2011, p. 351.

[5] M. Gloria Sanchez-Torrubia, Carmen Torres-Blanc, and Gracian Trivino, "An approach to automatic learning assessment based on the computational theory of perceptions," *Expert Syst. Appl.*, vol. 39, no. 15, pp. 12177-12191, November 2012.

[6] M. Gloria Sanchez-Torrubia, Carmen Torres-Blanc, and Gracian Trivino, "Formative criterion-based assessment for Moodle quizzes using intelligent computing," in *Proc. Global Engineering Education Conference (EDUCON)*, Berlin, 2013, pp. 940-946.

[7] Ronald R. Yager, "A new approach to the summarization of data," *Inf. Sci.*, vol. 28, no. 1, pp. 69-86, 1982.

[8] Ronald R. Yager, "Quantifier guided aggregation using OWA operators," *Int. J. Intell. Syst.*, vol. 11, no. 1, pp. 49–73, 1996.

[9] Lofti A. Zadeh, "From computing with numbers to computing with words. From manipulation of measurements to manipulation of perceptions," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 45, no. 1, pp. 105 -119, 1999.

ABOUT STRONG STANDARD COMPLETENESS OF PRODUCT LOGIC

Amanda Vidal, **Francesc Esteva**, **Lluís Godo**

IIIA - CSIC, Campus de la UAB, 08913 Bellaterra, Spain
{amanda,esteva,godo}@iiia.csic.es

Abstract

Propositional Product Logic is known to be standard finite-strong complete but not a strong complete, that is, it is complete for deductions only from finite sets of premises with respect to evaluations on the standard product chain over the real unit interval. On the other hand, Montagna has defined a logical system, an axiomatic extension of the Hájek's Basic Fuzzy Logic BL with an storage operator and an infinitary rule, which was proved to be standard strong complete (i.e. for deductions from possibly infinite theories) with respect to the standard BL chains. In particular, the expansion of Product Logic with the infinitary rule and Monteiro-Baaz Delta operator is standard strong complete. In this paper we generalize this result to the case of having rational truth constants in the language, and provide alternative infinitary rules better adapted to the final goal of our ongoing research, that is to study modal extensions over product fuzzy logic.

Keywords: BL logic, Product logic, strong completeness, infinitary rules, archimedean product chains, storage and Δ-operators.

1 INTRODUCTION

The standard product algebra is the algebra defined on the real unit interval by the product t-norm and its residuum which will be denoted as $[0,1]_\Pi$ and which operations are $\min, \max, \odot, \to_\odot, \neg_\odot$ and the constants $0, 1$, i.e., $[0,1]_\Pi = \langle [0,1], \min, \max, \odot, \to_\odot, \neg_\odot, 0, 1\rangle$.

In [3] the authors defined Product Logic as the propositional logic which language is obtained from an enumerable set of propositional variables by means of the binary connectives $\odot, \to$ and the the constant $\bot$, defined by the following set of axiom and Modus Ponens as the only inference rule:

$(A1)$ $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$;
$(A2)$ $\varphi \odot \psi \to \varphi$;
$(A3)$ $\varphi \odot \psi \to \psi \odot \varphi$;
$(A4)$ $\varphi \odot (\varphi \to \psi) \to (\psi \odot (\psi \to \varphi))$;
$(A5)$ $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \odot \psi) \to \chi)$;
$(A6)$ $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$;
$(A7)$ $\bot \to \varphi$;
$(A_\Pi 1)$ $\neg\neg\chi \to ((\varphi \odot \chi \to \psi \odot \chi) \to (\varphi \to \psi)$;
$(A_\Pi 2)$ $\neg(\varphi \odot \varphi) \to \neg\varphi$;

In that paper the authors proved completeness for theorems with respect to the standard product algebra and this result was generalized to finite strong standard completeness in [2], i.e., for every finite set of formulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$,

$$\Gamma \vdash_\Pi \varphi \text{ if and only if } \Gamma \models_{[0,1]_\Pi} \varphi$$

But the completeness result is not valid for infinite theories as the following example shows.

Example 1.1. *Let p, q be propositional variables and let $\Gamma = \{p \to q^n \mid n \in N\}$ where q^n is the abbreviation of $p\&p...\&p$. For any evaluation v on $[0,1]_\Pi$, it is obvious that if $v(p \to q^n) = 1$ for all $n \in N$, then $v(p) = 0$ or $v(q) = 1$ which is equivalent to $v(\neg p \vee q) = 1$, i.e.,*

$$\Gamma \models_{[0,1]_\Pi} \neg p \vee q$$

However, any syntactic proof can only use a finite number of formulas of Γ. Suppose that from a finite subset Γ_0 of Γ we can prove $\neg p \vee q$. By finite strong standard completeness this means that for each evaluation v that evaluate formulas of Γ_0 to 1 (suppose that k is the greatest exponent appearing in formulas of Γ_0), then $v(\neg p \vee q) = 1$. Let $v(q) = 0.5$ and $v(p) \leq 0.5^k$. Then $v(p \to q^n) = 1$ for any $n \leq k$ ($v(\psi) = 1$ for any $\psi \in \Gamma_0$) but $v(\neg p \vee q) = 0.5 \neq 1$.

Montagna presented in [4] an axiomatic system with storage operator and an infinitary inference rule such that propositional logic BL is standard complete. In that paper he also studied the case of Product Logic. In such a case storage operator coincides with the Monteiro-Baaz Delta operator Δ (whose interpretation in a product chain is $\Delta(1) = 1$, $\Delta(x) = 0$ for $x \neq 1$.). Therefore the result of

Montagna is an axiomatic system of Product Logic with Δ obtained by adding to the axiomatic system of Product Logic the axioms of Δ and its generalization rule, a new infinitary rule (R^M):

$(A_\Delta 1)\ \Delta\varphi \vee \neg\Delta\varphi$; $(A_\Delta 4)\ \Delta\varphi \to \Delta\Delta\varphi$;
$(A_\Delta 2)\ \Delta(\varphi \vee \psi) \to (\Delta\varphi \vee \Delta\psi)$; $(A_\Delta 5)\ \Delta(\varphi \to \psi) \to (\Delta\varphi \to \Delta\psi)$;
$(A_\Delta 3)\ \Delta\varphi \to \varphi$; $(\mathbf{G}_\Delta)\ \frac{\varphi}{\Delta\varphi}$;

$$(\mathbf{R^M}):\ \frac{C \vee (A \to B^n),\ \textit{for all } n}{C \vee \neg A \vee B}$$

whose intuitive meaning is that of fixing that the algebras associated with this logic are archimedean (if $0 > x, y > 1$, then there is an n such that $x^n < y$).

On the other hand, in [5], the expansion of product logic with rational truth constants was studied, and it was proven that the extension of product logic with the Δ axioms from before and the following axiomatization for the constants is finitely strong standard complete with respect to the canonical standard product algebra with δ, denoted by $[0,1]_{\mathbf{c}\Pi}$ (where the rational designated symbols are interpreted by its name).

$$(A_{\mathscr{C}}1)\ \overline{r} \odot \overline{s} \leftrightarrow \overline{r \cdot s}; \qquad (A_{\mathscr{C}}2)\ (\overline{r} \to \overline{s}) \leftrightarrow \overline{r \to_\Pi s}\ ^1;$$
$$(A_{\mathscr{C}}3)\ \Delta\overline{r} \leftrightarrow \overline{\delta(r)};$$

where $\delta(1) = 1$ and $\delta(r) = 0$ if $r < 1$. We will call this logic (Product logic with Δ operator and rational constants) Π^+. Note than in the following sections, when we talk about truth constants we will implicitly assume they are *rational* constants. More specifically we will say a product chain $\mathbf{A}$ with constants has *proper (rational) constants* if $\overline{c}^{\mathbf{A}} \neq \overline{d}^{\mathbf{A}}$ for any $c \neq d$. From [5] we know that either $\mathbf{A}$ has proper constants or $\overline{c}^{\mathbf{A}} = 1$ for any constant $c \neq 0$.

This paper focuses on proving the generalization of Montagna's result about (infinite) strong completeness to product logic plus constants. We will provide an axiomatic extension of Π^+ that is strongly complete with respect to the canonical standard product algebra. Also, we will modify Montagna's rule to obtain a simpler characterization of archimedeanity in the particular case we have rational constants, with the idea of using these rules in an ongoing work concerning a modal expansion of this logic.

2 SOME ALGEBRAIC RESULTS

In this section we will provide some technical results that will be useful for proving the completeness of our logic. First, from [1] we have that there exist two functors $\mathfrak{G} : PL_c \leftrightarrow LG : \mathfrak{B}$ that induce a natural equivalence between the category of product chains and that of the lattice-ordered abelian groups, so given a product chain $\mathbf{A}$,

[1] $r \to_\Pi s = s/r$ if $r > s$ and 1 otherwise

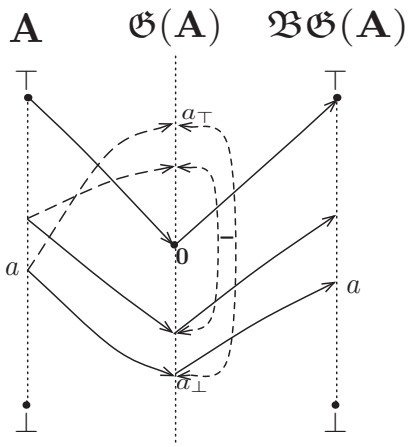


Figure 1: Intuitive meaning of $\mathfrak{G}$ and $\mathfrak{B}$

$\mathfrak{B}\mathfrak{G}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{A}$. In particular, in the case of product chains, we can let $\mathfrak{G}(\mathbf{A}) = \{a_\perp :\ a \in A \setminus \{\perp, \top\}\} \cup \{a_\top :\ a \in A \setminus \{\perp, \top\}\} \cup \{\mathbf{0}\}$ where $\mathbf{0}$ is the neutral element and

- $a_\perp +_{\mathfrak{G}(\mathbf{A})} b_\perp = (a \odot_{\mathbf{A}} b)_\perp$;
- $a_\top +_{\mathfrak{G}(\mathbf{A})} b_\top = (a \odot_{\mathbf{A}} b)_\top$;
- $a_\top +_{\mathfrak{G}(\mathbf{A})} b_\perp = \begin{cases} (b \to_{\mathbf{A}} a)_\perp & \text{if } a \leq_{\mathbf{A}} b \\ (a \to_{\mathbf{A}} b)_\top & \text{if } b <_{\mathbf{A}} a \end{cases}$
- $-a_\top = a_\perp$, $-a_\perp = a_\top$;

and the l-order is given by

- $a_\perp < b_\top$ for any $a, b \in \mathbf{A}$;
- $a_\perp \leq b_\perp$ iff $a \leq b$;
- $a_\top \leq b_\top$ iff $a \geq b$;

And given a group $\langle G, +, \leq, 0$, $\mathfrak{B}(G) = \{g \in G :\ g \leq 0\} \cup \{\perp\}$, with

- $a \odot b = \begin{cases} a + b & \text{if } a, b \in G \\ \perp & \text{otherwise} \end{cases}$
- $\neg a = \perp$ if $a \in G$, and $\neg\perp = 0_G$

and the order is inherited from G, letting $\perp \leq g$ for any $g \in G$.

For simplicity, we will denote by $\mathbb{R}_+$ the additive group of the real numbers, $\langle \mathbb{R}, +, -, 0 \rangle$.

We can now formulate and prove the following technical result.

Lemma 2.1. *Let* $\mathbf{A}$ *be an archimedean product chain with proper constants. Then, for each* $\overline{c}$ *(*$c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$*) there*

is a complete embedding ϕ_c from A to $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ such that $\phi_c(\overline{d}^{\mathbf{A}}) = -\log_c d$.

Proof. We can define

$$\phi_c(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x = \top \\ -\infty & \text{if } x = \bot \\ -\sup\{\frac{n}{m} : x^m \leq_{\mathbf{A}} (\overline{c}^{\mathbf{A}})^n\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

It is simple to see (using that the rationals are dense in the reals, that $c < 1$ and that the logarithm is a continuous function) that $\log_c d = sup\{r \in \mathbb{Q} : \ d \leq c^r\}$, and so, by axiom $(A_{\mathscr{C}}1)$, $\phi_c(\overline{d}^{\mathbf{A}}) = -\log_c d$.

On the other hand, by the definitions of operations and order in $\mathfrak{G}(\mathbf{A})$ we can construct the following chain of equivalences, for $x, \overline{c} \in \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} m \cdot x_\top \geq n \cdot (\overline{c}^{\mathbf{A}})_\top \quad &\text{iff} \quad (x^m)_\top \geq ((\overline{c}^{\mathbf{A}})^n)_\top \\ &\text{iff} \quad x^m \leq_{\mathbf{A}} (\overline{c}^{\mathbf{A}})^n \end{aligned}$$

Then, we have that $\sup\{\frac{n}{m} : m \cdot x_\top \geq (\overline{c}^{\mathbf{A}})_\top\} = \sup\{\frac{n}{m} : z^m \leq_{\mathbf{A}} (\overline{c}^n)^{\mathbf{A}}\}$.

We end up having that ϕ_c can be equally given by $\mathfrak{B}(\phi'_c)$, where $\phi'_c \colon \mathfrak{G}(A) \to \mathbb{R}_+$ is the complete embedding given by

$$\phi'_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = \mathbf{0} \\ \sup\{\frac{n}{m} : m \cdot x \geq (\overline{c}^{\mathbf{A}})_\top\} & \text{if } x > \mathbf{0} \\ -\sup\{\frac{n}{m} : m \cdot (-x) \geq (\overline{c}^{\mathbf{A}})_\top\} & \text{if } x < \mathbf{0} \end{cases}$$

To prove ϕ'_c is indeed a complete embedding, we refer to the Proof of [4, Prop. 3]. ϕ'_c is a particular case of the family of embeddings ϕ constructed there. Note in that proof, the *unit* is an arbitrary element of the algebra, while here we fix it to an element that coincides with the interpretation of constant $\overline{c}$, i.e. $\overline{c}^{\mathbf{A}}$, which is in particular an element of $\mathbf{A}$ too. Then, from this general case we have that ϕ'_c is a complete embedding, and then, so is $\phi_c = \mathfrak{B}(\phi'_c)$. □

To be able to prove completeness with respect to the canonical standard product algebra, what is needed is a complete embedding into that algebra. This will be now easy to prove using the previous intermediate embedding and composing it with the adequate one from $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ into $[0,1]_\Pi$.

Theorem 2.2. *(c.f. [4, Prop. 4]) A product-chain with Δ operator and (proper) constants is archimedean iff it can be embedded in the canonical standard algebra by a complete embedding.*

Proof. Let $P_c \colon \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$ be defined by

$$P_c(x) := \begin{cases} c^{-x} & \text{if } x \in \mathbb{R}^- \\ 0 & \text{if } x = \bot \end{cases}$$

Observe that the function P_c is clearly a complete embedding from $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ to $[0,1]_\Pi$ (it is a continuous monotone increasing function, since $0 < c < 1$ and its domain is $\mathbb{R}^- \cup \{\bot\}$), and $P_c(-1) = c$.

We can now proceed to prove that $P_c \circ \phi_c$ is a complete embedding from $\mathbf{A}$ to $[0,1]_\Pi$. Since both are complete embeddings, the only thing that is necessary to prove is that for any constant $\overline{d}^{\mathbf{A}} \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$ we have that $P_c \circ \phi_c(\overline{d}^{\mathbf{A}}) = d$. But by definition, $\phi_c(\overline{d}) = \phi_c(\overline{d}^{\mathbf{A}}) = -log_c d$, and thus $P_c(\phi_c(\overline{d})) = c^{-(-log_c d)} = d$. □

The last result we will need is an alternative characterization of archimedean algebras, which is independent of the existence of constants symbols.

Lemma 2.3. *([4, Lemma. 10]) Let $\mathbf{A}$ be a product chain. Then $\mathbf{A}$ is archimedean if and only if it satisfies the following condition:*
$(+)$ If there are $x, y \in \mathbf{A}$ such that $x \leq y^n$ for all n, then $x \leq \Delta y$.

3 AXIOMATIC SYSTEM AND STRONG COMPLETENESS

We let Π^* to be the logic defined from Π^+ plus the following rules:

$$(\mathbf{R_1}) \ \frac{\overline{c} \to \varphi, \text{ for all } c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}}{\varphi} \qquad (\mathbf{R_2}) \ \frac{\varphi \to \overline{c}, \text{ for all } c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}}{\neg\varphi}$$

And we will let $\vdash_{\Pi^*}$ be defined from the clauses of Π^+ and the following two clauses:

1. If $\{\gamma_c\}_{c\in(0,1)_{\mathbb{Q}}}$ are derivations of $\overline{c} \to \varphi$ from a set Γ of assumptions, then $\{\gamma_c\}_{c\in(0,1)_{\mathbb{Q}}}$ is a derivation of φ.
2. If $\{\gamma_c\}_{c\in(0,1)_{\mathbb{Q}}}$ are derivations of $\varphi \to \overline{c}$ from a set Γ of assumptions, then $\{\gamma_c\}_{c\in(0,1)_{\mathbb{Q}}}$ is is a derivation of $\neg\varphi$.

These two rules are valid in the canonical standard product algebra, which is archimedean. This provides the soundness of the logic Π^*.

To prove that Π^* enjoys strong completeness with respect to $[0,1]_{\Pi}$, we will follow an usual precourse: First, seeing that it is complete with respect to the product chains with constants (and, in fact, it is so with respect to *archimedean* product chains with *proper* constants). And then, using that any archimedean product chain with proper constants can be embedded into $[0,1]_\Pi$ with canonical constants by a complete embedding, we can conclude the proof.

To achieve this, we will provide some useful results regarding the logic Π^*.

Lemma 3.1. *Π^* is an extension of Π^+, i.e. for any $\Gamma \cup \{\varphi\}$, $\Gamma \vdash_{\Pi^+} \varphi$ implies $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \varphi$.*

From the previous observation, we can use finite strong completeness of Π^+ with respect to $[0,1]_{\Pi}$ to obtain useful results. It is easy to check the validity of the following statements in that algebra, and so, prove they are valid in our logic.

Lemma 3.2. *The following formulae are theorems of* Π^**:*
$(Th.1) : (\Delta\varphi \to \psi \odot \theta) \leftrightarrow ((\Delta\varphi \to \psi) \odot (\Delta\varphi \to \theta))$*;*
$(Th.2) : \Delta(\varphi \to \psi) \vee \Delta(\psi \to \varphi)$;
$(Th.3) : \neg\Delta(\overline{r} \to \overline{r} \odot \overline{c})$ *for any* $0 < c < 1$*;*
$(Th.4) : ((\Delta\varphi \to \alpha) \wedge (\Delta\psi \to \alpha)) \to (\Delta(\varphi \vee \psi) \to \alpha)$;

Lemma 3.3. *The following deductions hold in* Π^**:*
$(D.1) : \varphi \vee (\overline{c} \to \psi)) \vdash \overline{c} \to (\varphi \vee \psi)$ *for* $0 < r < 1$*;*
$(D.2) : (\varphi \to \overline{c}) \vee \Delta\alpha \vdash (\neg\Delta\alpha \wedge \varphi) \to \overline{c}$*;*
$(D.3) : \overline{c}^n \to \varphi^n \vdash \overline{c} \to \varphi$;

Now, we can easily prove that the Deduction Theorem keeps working in the Π^* logic.

Lemma 3.4 (Deduction Theorem)**.** *For any set of formulas over the product logic language with* Δ *and rational constants* $\Gamma \cup \{\alpha, \varphi\}$*, it holds that*

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\Pi^*} \varphi \text{ iff } \Gamma \vdash_{\Pi^*} \Delta\alpha \to \varphi.$$

Proof. The right to left direction is simple from $(\mathbf{G}_\Delta)$ and *MP*. For the other sense, we can proceed by induction on the derivation. The induction steps corresponding to Modus Ponens or Generalization of Δ are easy.
We now consider the case in which the last rule applied in the proof is (R_1). Thus, assume φ was obtained from $\{\overline{c} \to \varphi\}_{c\in(0,1)_{\mathbb{Q}}}$ using rule (R_1) (which are previous steps of the proof). Then, by induction hypothesis, $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \Delta\alpha \to (\overline{c} \to \varphi)$ for all c. By $(A.5)$ we have that $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \overline{c} \to (\Delta\alpha \to \varphi)$ for all c. Now, by rule (R_1), $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \Delta\alpha \to \varphi$.
We now consider the case where the last rule applied was (R_2). Suppose $\varphi \equiv \neg\psi$ and that it was obtained from $\{\psi \to \overline{c}\}_{c\in(0,1)_{\mathbb{Q}}}$ through rule (R_2). Then, by induction hypothesis, $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \Delta\alpha \to (\psi \to \overline{c})$ for each c. Then, $\Gamma \vdash_{\Pi^*} (\psi \wedge \Delta\alpha) \to \overline{c}$ for each c, and by rule (R_2), this leads to $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \neg(\psi \wedge \Delta\alpha)$. Now, since we know the DeMorgan Laws keep holding, $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \neg\Delta\alpha \vee \neg\psi$. Since $\Delta\alpha \vee \neg\Delta\alpha$ is a theorem, this is equivalent to $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \Delta\alpha \to \neg\psi$, which was the desired result. □

We can start now with the completeness proof. First, we can see that we can extend any Π^*- theory to a complete theory over Π^+ closed under R_1 and R_2.

To do that we will make use of the following technical lemma to prove how we can close our extension under (R_1).

Lemma 3.5. *(c.f. [4, Lemma 6])* Π^* *is closed under*

$$(\mathbf{R_1}') : \frac{\chi \vee (\overline{c} \to \varphi), \text{ for all } c}{\chi \vee \varphi}$$

Proof. Suppose $T \vdash_{\Pi^*} \chi \vee (\overline{c} \to \varphi)$ for all c. By $(D.1)$, $T \vdash_{\Pi^*} \overline{c} \to (\varphi \vee \chi)$ for all c. Then, by rule R_1, $T \vdash_{\Pi^*} \varphi \vee \chi$. □

We can express the more concrete result we will be using in the following way, which is a direct application from the previous lemma and the axioms and rules of Δ.

Corollary 3.6. *(c.f. [4, Lemma 7]) If for all* c, $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \Delta(\varphi \to \overline{c}) \to \alpha$ *and* $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \Delta\varphi \to \alpha$ *then* $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \alpha$.

Moreover, the following are some quite simple but useful remarks that come from axiom $(\mathscr{A}^{\mathscr{C}}_{\Pi}1)$ and $(Th.3)$.

Lemma 3.7. *The following conditions hold for any consistent theory* T *and* $c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$*:*

1. *If* $T \vdash_{\Pi^*} \varphi \to \overline{c}$*, for any consistent theory* T^+ *extending* T*,* $T^+ \nvdash_{\Pi^*} \overline{c'} \to \varphi$ *for some* c'.
2. *If* $T \vdash_{\Pi^*} \overline{c} \to \varphi$*, for any consistent theory* T^+ *extending* T*,* $T^+ \nvdash_{\Pi^*} \varphi \to \overline{c \cdot c}$.

Now we are ready to prove it is possible to extend a theory to another one complete and closed under (R_1) and (R_2). For $\Gamma \subset Fm$ we will define $C_{\Pi^*}(\Gamma) := \{\varphi : \Gamma \vdash_{\Pi^*} \varphi\}$, the closure of Γ under Π^*.

Theorem 3.8 (Prime extension)**.** *Given a theory* T *such that* $T \nvdash_{\Pi^*} \alpha$*, then there is a complete theory* T^+ *that extends* T *such that* $T^+ \nvdash_{\Pi^*} \alpha$ *and such that it is closed under* (R_1) *and* (R_2).

Proof. As Montagna noticed, it is interesting to observe that by the presence of infinitary rules, many standard constructions do not work. For instance, one might be tempted to use Zorn's lemma to obtain a maximal theory closer under R_1 and R_2 Γ^+ extending Γ such that $\varphi \notin \Gamma^+$. But in this case Zorn's lemma does not apply, as the union of a chain of (R_1, R_2)-theories may fail to be a theory closer under R_1 and R_2: for instance, let $\Gamma_n = K_{\Pi^*}(\{\frac{1}{n} \to \psi\})$. Then, $\Gamma_1 \subseteq ... \subseteq \Gamma_n ...$, and every Γ_n is a theory closer under R_1, but their union Γ^+ is not, as $\psi \notin \Gamma^+$. Thus we will proceed in another way.

Let $\langle \varphi_n, \psi_n \rangle$ be an enumeration of all the possible couples of formulae from $\mathscr{L}_{\mathscr{C},\Delta}$. We can define a series of theories T_n such that:

1. $T_0 = C_{\Pi^*}(T) \subseteq T_1 \subseteq ... \subseteq T_n \subseteq ...$;
2. For each n, $\alpha \notin T_n$.
3. For each n, either $\varphi_n \to \psi_n \in T_{2n+1}$ or $\psi_n \to \varphi_n \in T_{2n+1}$. (linearity)
4. For each n, if φ_n or ψ_n is a constant symbol $\overline{r_n}$ (and in that case, we name χ_n the other formula):
   - If $\overline{r_n} \to \chi_n \in T_{2n+1}$, then either $\chi_n \to \overline{c} \in T_{2n+2}$ for some $1 > c > 0$ or $\chi_n \in T_{2n+2}$. (closure under (R_1)).

- If $\overline{r_n} \to \chi_n \notin T_{2n+1}$, then either $\overline{c} \to \chi_n \in T_{2n+2}$ for some $c \in (0, r_n]_{\mathbb{Q}}$ or $\neg\chi_n \in T_{2n+2}$. (closure under (R_2)).

Indeed, we define them as follows:

Step 0: $T_0 := C_{\Pi^*}(T)$.

Step $2n+1$: If $\alpha \notin C_{\Pi^*}(T_{2n} \cup \{\varphi_n \to \psi_n\})$, put $T_{2n+1} := C_{\Pi^*}(T_{2n} \cup \{\varphi_n \to \psi_n\})$. Otherwise, put $T_{2n+1} := C_{\Pi^*}(T_{2n} \cup \{\psi_n \to \varphi_n\})$. Notice that in any case, $\alpha \notin T_{2n+1}$. Otherwise, $T_{2n} \vdash_{\Pi^{c,\Delta}_{R_1,R_2}} \Delta(\varphi_n \to \psi_n) \to \alpha$ and $T_{2n} \vdash_{\Pi^*} \Delta(\psi_n \to \varphi_n) \to \alpha$ (by the deduction theorem). Then, by $(Th.4)$, $T_{2n} \vdash_{\Pi^*} \alpha$, which is a contradiction.

Step $2n+2$: If both φ_n, ψ_n are different from constant symbols, let $T_{2n+2} := T_{2n+1}$; If at least one of $\{\varphi_n, \psi_n\}$ is a constant symbol, let $\overline{r_n}$ be it and χ_n be the other formula. Then, we have two cases:

1. If $\overline{r_n} \to \chi_n \in T_{2n+1}$ then we have two subcases:
   - If $\alpha \notin C_{\Pi^*}(T_{2n+1} \cup \{\chi_n \to \overline{c}\})$ for some c. Then let $T_{2n+2} := C_{\Pi^*}(T_{2n+1} \cup \{\chi_n \to \overline{c}\})$.
   - If $\alpha \in C_{\Pi^*}(T_{2n+1} \cup \{\chi_n \to \overline{c}\})$ for any $c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$, by the Deduction theorem we have that $T_{2n+1} \vdash_{\Pi^*} \Delta(\chi_n \to \overline{c}) \to \alpha$ for each c. By Corollary 3.6 ,and since $T_{2n+1} \nvdash_{\Pi^*} \alpha$, we know that $T_{2n+1} \nvdash_{\Pi^*} \Delta\chi_n \to \alpha$. Then, put $T_{2n+2} := K_R(T_{2n+1,R_2} \cup \{\chi_n\})$.
2. If $\overline{r_n} \to \chi_n \notin T_{2n+1}$ (i.e., $\chi_n \to \overline{r_n} \in T_{2n+1}$) then we have two subcases again:
   - If $\alpha \notin C_{\Pi^*}(T_{2n+1} \cup \{\overline{c} \to \chi_n\})$ for some $c \in (0, r_n]_{\mathbb{Q}}$, let $T_{2n+2} := C_{\Pi^*}(T_{2n+1} \cup \{\overline{c} \to \chi_n\})$.
   - If $\alpha \in C_{\Pi^*}(T_{2n+1} \cup \{\overline{c} \to \chi_n\})$ for any $c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$, then (by the Deduction Theorem) we have that $T_{2n+1} \vdash_{\Pi^*} \Delta(\overline{c} \to \chi_n) \to \alpha$ for each c. Using $(Th.4)$, we have that $T_{2n+1} \vdash_{\Pi^*} \Delta(\chi_n \to \overline{c}) \vee \alpha$ for each c. And so, by G_Δ, $T_{2n+1} \vdash_{\Pi^*} \Delta(\chi_n \to \overline{c}) \vee \Delta\alpha$ for each c. By $(Th.7)$, this implies that $T_{2n+1} \vdash_{\Pi^*} (\neg\Delta\alpha \wedge \chi_n) \to \overline{c})$ for each c, and so, by rule (R_2), we know that $T_{2n+1} \vdash_{\Pi^*} \neg(\neg\Delta\alpha \wedge \chi_n)$. By the DeMorgan Laws, and using G_Δ and axiom $(\mathscr{A}^{\Delta}_{\Pi}3)$ we have that $T_{2n+1} \vdash_{\Pi^*} \alpha \vee \Delta\neg\chi_n$. Then, $T_{2n+1} \nvdash_{\Pi^*} \Delta\neg\chi_n \to \alpha$ (otherwise, $T_{2n+1} \vdash_{\Pi^*} \alpha$, which is a contradiction).
     Then, let $T_{2n+2} := C_{\Pi^*}(T_{2n+1} \cup \{\neg\chi_n\})$.

It is clear that the sequence $\{T_n\}_{n\in\omega}$ satisfies conditions 1.,2.,3. and 4. . Then, let $T^+ := \bigcup_{n\in\omega} T_n$. Clearly, T^+ is a complete theory extending T and $\alpha \notin T^+$. We just need to see it is closed under (R_1) and (R_2).

On the one hand suppose that $\overline{r} \to \varphi \in T^+$ for some $0 < r < 1$. Then, by our construction, there must be an n such that $\overline{r} \equiv \overline{r_n}$ and $\varphi \equiv \chi_n$ (this implication has been added at step $2n+1$). Then, by construction, we have two options: either $\overline{c_0} \to \varphi \in T_{2n+2}$ for some $c_0 \in (0, r]_{\mathbb{Q}}$ or $\neg\varphi \in T_{2n+2}$. In the first case, by Lemma 3.7(2) it does not hold that T^+ contains $\varphi \to \overline{c}$ for any $c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$ (so (R_2) will not be applied over this pair of formula-constant). On the second case, we have that $\neg\varphi \in T^+$ so it is closed under R_2 for this formula. □

On the other hand, suppose that $\varphi \to \overline{r} \in T^+$, $0 < r < 1$. Then, by our construction, there must be an n such that $\overline{r} \equiv \overline{r_n}$ and $\varphi \equiv \chi_n$ (this implication has been added at step $2n+1$). Then, by construction, we have two options: either $\varphi \to \overline{c} \in T_{2n+2}$ for some c or $\varphi \in T_{2n+2}$. In the first case, by Lemma 3.7(1) it does not hold that T^+ contains $\overline{d} \to \varphi$ for any constant d (so (R_1) will not be applied over this formula). On the second case, we have that $\varphi \in T^+$, so it is closed under R_1 for this formula.

Once we have this prime extension of a theory, closed under R_1 and R_2, we know that its Lindenbaum sentence algebra is a product chain with constants $[\overline{c}]_{\Gamma^+}$. Now, to prove we can embed it into $[0,1]$, we will prove a similar result to [4, Lemma. 4], but using the new infinitary rules.

Lemma 3.9. *Let Γ be any complete theory closed under R_1 and R_2 over Π^+, and let $\mathscr{L}_\Gamma$ denote the Lindenbaum sentence algebra of Γ. Then $\mathscr{L}_\Gamma$ can be embedded into the canonical standard product algebra $[0,1]_{\mathbf{c}\Pi}$ by a complete embedding.*

Proof. We can prove $(+)$ from 2.3 by cases. Suppose there is $c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$ such that $\overline{c} \to x \in \Gamma$.

> **Claim:** $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \overline{c} \to \phi^k$ *for all k implies that* $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \overline{d} \to \phi$ *for all* $d \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$.
>
> Proof: Suppose that $\Gamma \vdash_{\Pi^*} c \to \varphi^k$ for all k. We know $(0,1)_{\mathbb{Q}}$ is archimedean, so for each d there is an n_d such that $d^{n_d} < c$. Then in particular $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \overline{d}^{n_d} \to \varphi^{n_d}$. By $(D.3)$, $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \overline{d} \to \varphi$.

Then, $\overline{c} \to y \in \Gamma$ for all c, so, by rule (R_1), $y \in \Gamma$, so $\Delta y \in \Gamma$ (by G_Δ) and so, for any element, and in particular for x, $x \to \Delta y \in \Gamma$.

If there is no $c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$ such that $\overline{c} \to x \in \Gamma$, since Γ is complete we have that $x \to \overline{c} \in \Gamma$ for all $c \in (0,1)_{\mathbb{Q}}$. Then, by rule (R_2), $\neg x \in \Gamma$, and then again, trivially, $x \to \Delta y \in \Gamma$ (for any y).

Finally, we have that $\mathscr{L}_\Gamma$ is achimedean, and so, by Theorem 3.9, there is a complete embedding from it into $[0,1]_{\mathbf{c}\Pi}$. □

As a corollary of the previously presented results, we can prove the main result of this paper: the strong standard completeness of our logic.

Theorem 3.10 (Strong Standard Completeness)**.** *For any set of formulas* $\Gamma \cup \{\varphi\}$, $\Gamma \vdash_{\Pi^*} \varphi$ *if and only if* $\Gamma \models_{[0,1]_{c\Pi}} \varphi$.

4 CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

In this paper presented an axiomatization of Product logic that is strong standard complete with respect to the standard product chain (with Delta operator and rational truth constants). This axiomatization is inspired in the one given by Montagna in [4] of Basic Logic (strongly) complete with respect to standard chains (with storage operator). As in Montagna paper we need to make use of Delta operator (the storage operator on archimedean product chains) and of infinitary inference rules.

As future work we are interested in study modal product logic, the logic obtained as expansion of Product logic with the modal operators of necessity and possibility defined as in the setting of many-valued modal logics. A first step would be the axiomatization of modal Product logic that is complete with respect to Kripke structures defined by crisp accessibility relation defined over the standard product chain $[0,1]_{\Pi}$. The results of the present paper seem to provide a good background to work towards the completeness proof for the above mentioned modal product logic. Moreover, knowing similar results for Gödel and Łukasiewicz modal logics it seems reasonable to think about completeness results for a modal BL logic.

Acknowlegdements

The authors acknowledge support of the Spanish projects EdeTRI (TIN2012-39348-C02-01) and AT (CONSOLIDER CSD 2007- 0022). Amanda Vidal is supported by a CSIC JAE Predoc grant.

References

[1] R. Cignoli and A. Torrens. An algebraic analysis of product logic. *Multiple-valued logic*, 5:45–65, 2000.

[2] P. Hájek. *Metamathematics of fuzzy logic*, volume 4 of *Trends in Logic—Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[3] P. Hájek, L. Godo, and F. Esteva. A complete many-valued logic with product-conjunction. *Archive for Mathematical Logic*, 35:191–208, 1996.

[4] F. Montagna. Notes on strong completeness in Łukasiewicz, product and BL logics and in their first-order extensions. In *Algebraic and Proof-theoretic Aspects of Non-classical Logics*, pages 247–274, 2006.

[5] P. Savický, R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, and C. Noguera. On product logic with truth-constants. *Journal of Logic and Computation*, 16(2):205–225, 2006.

Completeness of a PSPACE algorithm for concept satisfiability in finite-valued Fuzzy Description Logics

Marco Cerami[1], **Francesc Esteva**[2]

[1] *Palacký University in Olomouc, 17.listopadu 12, CZ-77146 Olomouc, Czech Republic*, marco.cerami@upol.cz

[2] *IIIA - CSIC, Campus UAB, ES-08913 Bellaterra, Spain*, esteva@iiia.csic.es

Abstract

In the present paper we are presenting the full proof of completeness of the algorithm, presented in [2], that decides satisfiability and subsumption without knowledge bases in language $\mathfrak{IALCED}^T$ over any finite MTL chain.

1 Introduction

Description Logics (DLs) are knowledge representation languages built on the basis of classical logic. Fuzzy Description Logics (FDLs) are natural extensions of DLs for dealing with vague concepts. In [5], P. Hájek proposes a general framework for Fuzzy (Many-valued) Description Logics and a general algorithm for deciding satisfiability and subsumption without knowledge bases in language $\mathscr{ALC}$ over $[0,1]_{\text{Ł}}$. Nevertheless, he leaves open the problem of characterizing the computational complexity. In [1] PSPACE completeness of this problem over finite residuated lattices has been proved by means of an automata-based algorithm. In [2] the authors present an algorithm that decides satisfiability and subsumption without knowledge bases in language $\mathfrak{IALCED}^T$ over any finite MTL chain. The result is not a new one, since it can be easily obtained from [1] as a particular case. But the method used is novel and based on a PSPACE implementation of the reduction presented in [5], that is a totally different method from the one used in [1]. Nevertheless, in [2] there is no proof of completeness of the algorithm presented with respect to the problem. In this paper we are presenting the full proof of soundness and completeness of the algorithm presented in [2].

2 Preliminaries

An *MTL chain* ([4]) an algebra $\mathbf{T} = \langle T, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1\rangle$ such that $\langle T, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ is a bounded chain, $*$ is a *t-norm* on T, and $\rightarrow$ is the *residuum* of $*$, i.e., $t_1 \rightarrow t_2 := \max\{t \in T : t * t_1 \leq t_2\}$ for every $t_1, t_2 \in T$.

Our interest is on finite MTL chains. So we will can assume that $T = \{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ (for $n \geq 2$). We will consider its expansion $\mathbf{T^c}$ as the expansion of $\mathbf{T}$ obtained by adding (i) the unary operation $\sim$ such that $\sim t := 1 - t$; (ii) the unary operation $\triangle$ defined by $\triangle(1) = 1$ and $\triangle(x) = 0$ for all $x \neq 0$.

Next we define the syntax and semantic of the description logic $\mathbf{T^c}$-$\mathfrak{IALCED}$. Assume that there are two disjoint sets $\mathsf{N_C} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ and $\mathsf{N_R} = \{R_1, R_2, R_3, \ldots\}$ of atomic concepts and atomic roles, respectively. The set of *concepts* is defined inductively as follows

$$C, D \rightsquigarrow A \mid C \sqcap D \mid C \sqcup D \mid C \boxtimes D \mid C \sqsupset D \mid \\ \mid \sim C \mid \triangle C \mid \bar{t} \mid \forall R.C \mid \exists R.C$$

where $A \in \mathsf{N_C}$, $R \in \mathsf{N_R}$ and C, D are concepts. An *interpretation* is a pair $\mathscr{I} = (\Delta^{\mathscr{I}}, \cdot^{\mathscr{I}})$ consisting of - a (crisp) set $\Delta^{\mathscr{I}}$ (called the *domain* of $\mathscr{I}$), and - an *interpretation function* $\cdot^{\mathscr{I}}$ assigning to every concept C a function $C^{\mathscr{I}} : \Delta^{\mathscr{I}} \longrightarrow T$, to every atomic role R a function $R^{\mathscr{I}} : \Delta^{\mathscr{I}} \times \Delta^{\mathscr{I}} \longrightarrow T$, and such that for every concepts C, D, every atomic role R and every element $a \in \Delta^{\mathscr{I}}$, it holds that:

$$\begin{aligned} (C \sqcap D)^{\mathscr{I}}(a) &= C^{\mathscr{I}}(a) \wedge D^{\mathscr{I}}(a) \\ (C \sqcup D)^{\mathscr{I}}(a) &= C^{\mathscr{I}}(a) \vee D^{\mathscr{I}}(a) \\ (C \boxtimes D)^{\mathscr{I}}(a) &= C^{\mathscr{I}}(a) * D^{\mathscr{I}}(a) \\ (C \sqsupset D)^{\mathscr{I}}(a) &= C^{\mathscr{I}}(a) \Rightarrow D^{\mathscr{I}}(a) \\ (\sim C)^{\mathscr{I}}(a) &= \sim C^{\mathscr{I}}(a) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\triangle C)^{\mathscr{I}}(a) &= \triangle C^{\mathscr{I}}(a)\\
(\bar{t})^{\mathscr{I}}(a) &= t\\
(\forall R.C)^{\mathscr{I}}(a) &= \inf_{b\in\Delta^{\mathscr{I}}}\{R^{\mathscr{I}}(a,b)\Rightarrow C^{\mathscr{I}}(b)\}\\
(\exists R.C)^{\mathscr{I}}(a) &= \sup_{b\in\Delta^{\mathscr{I}}}\{R^{\mathscr{I}}(a,b)*C^{\mathscr{I}}(b)\}.
\end{aligned}
$$

Since **T** is finite, the infimum (supremum) considered above is indeed a minimum (maximum) .

3 PSPACE implementation

In this section we will consider directly the satisfiability problem in the general setting of finite-valued $\mathfrak{IALCED}^T$.

Definition 1. (Modal r-satisfiability in $\mathfrak{IALCED}^T$) A concept C is said to be *modally r-satisfiable* in case that there is an interpretation $\mathscr{I}$ and an object $a\in\Delta^{\mathscr{I}}$ such that $C^{\mathscr{I}}(a)=r$.

Next we define the main computational problem we deal with in this section, together with its parametrized versions.

Definition 2. The computational problem **Satisf** is the following one:

INPUT: $(\mathbf{T},C,r)$ where **T** is a finite MTL-chain, C is a concept of $\mathfrak{IALCED}^T$ and $r\in T$.

OUTPUT: Yes/No depending whether C is modally r-satisfiable or not.

Moreover, for every finite MTL-chain **T**, the computational problem $\mathbf{Satisf_T}$ is the one obtained by fixing the finite MTL-chain in the previous problem.

The assumption on the lattice part of **T** that we have adopted above makes that the input **T**, in the uniform problem, is codified by its cardinal n and the tables of the t-norm and its residuum.

3.1 Preliminary definitions

First we give some technical definitions. An *occurrence* of a subconcept D in C is determined by the occurrence of a constructor or of an atomic concept. We will use _ to mark the occurrence considered. In the next definition we provide a labeling system that is a modification of the one given in [3]. This modification is crucial for the proof because it allows to recursively define the domain of the interpretation that possibly satisfies a given concept.

Definition 3 (Labeling (general version))**.** Let C be a concept. A *labelling function* (*label* for short) $l_C(\cdot)$ is the function which associates to every occurrence D of a subconcept in C a string of symbols in $N_R\cup\mathbb{N}$ defined by the conditions:

1. $l_C(C)$ is the empty sequence ε,

2. if D is a propositional combination of concepts $D_1,\ldots,D_j$, then $l_C(D_i):=l_C(D)$ for every $i\le j$.

3. if D is $\forall R.D'$ or $\exists R.D'$, then $l_C(D')$ is the concatenated sequence $l_C(D)\cdot Ri$, where i is the minimum non-zero number j such that the sequence $l_C(D)\cdot Rj$ has not been used to label any occurrence in C.

We will denote by Λ_C the set of labels of all occurrences in C. Given $\lambda\in\Lambda_C$, we define $\mathrm{path}(\lambda)$ as the finite sequence of symbols in N_R obtained by deleting in the sequence λ the symbols from $\mathbb{N}$, and we will refer to it as the *role path* of λ. We define the *length* of λ, in symbols $|\lambda|$, as the number of symbols in the sequence $\mathrm{path}(\lambda)$. For every atomic role $R\in N_R$, we introduce the binary relation $\prec_R$ among labels by the condition:

$$\lambda\prec_R\lambda' \text{ if and only if } \mathrm{path}(\lambda')=\mathrm{path}(\lambda)\cdot R.$$

And the relation $\prec$ is defined as $\bigcup\{\prec_R: R\in N_R\}$.

From the above introduced labeling system, we are going to define the set of individuals employed to build an interpretation for a given concept C. Thus, from now on we assume that C and a labelling l are fixed.

Definition 4. The set Σ_C is defined as the set

$$\Sigma_C:=\{\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_s : s\in\mathbb{N},\lambda_1\prec\lambda_2\prec\ldots\prec\lambda_s\}$$

formed by sequences of labels. For the case $s=0$ we have that $\varepsilon\in\Sigma_C$. Given $\sigma=\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_s\in\Sigma_C$, we define the *length* of σ, in symbols $|\sigma|$, as the number s. And we define its *role path* $\mathrm{path}(\sigma)$ as $\mathrm{path}(\lambda_s)$. Following the same pattern, we will write $\sigma\prec_R\sigma'$ and $\sigma\prec\sigma'$ when the corresponding relation holds between λ_s and $\lambda'_{s'}$.

It is straightforward that $|\sigma|=|\lambda_s|$. In the rest of this section we will sometimes refer to the elements of Σ_C as constants. The underlying idea is that the set Σ_C of constants is indeed the domain of an interpretation that modally satisfies the concept C. Unfortunately, the cardinality of Σ_C might be not polynomial on the size of concept C. The next definition gives an account of how to make a partition of the theory obtained by applying Hájek's reduction to a given concept. The theory we consider now is a propositional one (non-modal) over the set At of propositional variables and is defined as

$$\{B(\sigma): B \text{ occurrence of an atom in } C \text{ and } \sigma\in\Sigma_C\}$$

$\cup\{R(\sigma,\sigma') : R \in N_R, \sigma,\sigma' \in \Sigma_C \text{ and } \sigma \prec_R \sigma'\}$.

We will use the name of *assertion* to denote expressions $B(\sigma)$ where B is an occurrence of a quantified or atomic concept (*generalized atom*) in C and $\sigma \in \Sigma_C$. For every formula φ obtained from the set At of variables using propositional operators (i.e., non-modal) we define At_φ as the set of variables appearing in φ. Analogously, we can consider At_Φ for any set of such formulas.

Definition 5. Let $B(\sigma)$ be an assertion such that B is the occurrence of a generalized atom in C. Then the *Hájek set* $H_C(B(\sigma))$ is defined distinguishing the following two cases.

$(\forall)$ if $B = \forall R.D$, then $H_C(\forall R.D(\sigma))$ is the following set of formulas:

- $\forall R.D(\sigma) \equiv \big(R(\sigma,\sigma\cdot l(D)) \sqsupset D(\sigma\cdot l(D))\big)$,

- $\forall R.D(\sigma) \sqsupset \big(R(\sigma,\sigma\cdot l(E)) \sqsupset D(\sigma\cdot l(E))\big)$, for each occurrence E of a generalized atom occurring in C such that $\text{path}(l(E)) = \text{path}(l(D))$;

$(\exists)$ if $B = \exists R.D$, then $H_C(\exists R.D(\sigma))$ is the following set of formulas:

- $\exists R.D(\sigma) \equiv \big(R(\sigma,\sigma\cdot l(D)) \boxtimes D(\sigma\cdot l(D))\big)$,

- $\big(R(\sigma,\sigma\cdot l(E)) \boxtimes D(\sigma\cdot l(E))\big) \sqsupset \exists R.D(\sigma)$, for each occurrence E of a generalized atom occurring in C such that $\text{path}(l(E)) = \text{path}(l(D))$.

The formula in $H_C(B(\sigma))$ having the connective $\equiv$ as main connective will be called the *main formula* of $H_C(B(\sigma))$. The formula $B(\sigma)$ will be called the *head* of each one of the elements in $H_C(B(\sigma))$; and we will give the name of *body* to the formula lying on the opposite side of the head.

Definition 6. Let C be a concept and $\sigma \in \Sigma_C$. Then, the *Hájek theory* $\mathscr{H}_C(\sigma)$ of σ is the set:

$$\mathscr{H}_C(\sigma) := \bigcup\{H_C(D(\sigma)) : \text{path}(\sigma) = \text{path}(l(D)), \\ D \text{ occurrence of a generalized atom}\}$$

The next definition gives to each Hájek theory of a given concept C a self-standing status.

Definition 7. Let $e : At_{\mathscr{H}_C(\sigma)} \longrightarrow T$ and $e' : At_{\mathscr{H}_C(\sigma')} \longrightarrow T$ be mappings for some $\sigma,\sigma' \in \Sigma_C$. Then, we say that e and e' are *mutually consistent* if they assign the same value to common elements, that is, for every $p \in At_{\mathscr{H}_C(\sigma)} \cap At_{\mathscr{H}_C(\sigma')}$, it holds that $e(p) = e'(p)$.

3.1.1 Witness sets and satisfiability

We now define what is a *Witness set*.

Definition 8. Let C be a concept, let $\sigma \in \Sigma_C$, let $e : At_{\mathscr{H}_C(\sigma)} \longrightarrow T$ be a mapping such that $e(\mathscr{H}_C(\sigma)) = 1$ and let

$$\mathscr{W} \subseteq \bigcup\big\{Func\big(At_{\mathscr{H}_C(\sigma')}, T\big) : \sigma' \in \Sigma_C\big\}$$

where $Func(A,B)$ refers to the mappings from A into B. We say that $\mathscr{W}$ is a *witness set generated by* e if:

1. $e \in \mathscr{W}$,
2. if $e',e'' \in \mathscr{W}$ and $dom(e') = dom(e'')$, then $e' = e''$,
3. for every $e' \in \mathscr{W}$ with $e' : At_{\mathscr{H}_C(\sigma')} \longrightarrow T$, if a generalized atom E appears in the body of a formula in $\mathscr{H}_C(\sigma')$, then there is a mapping $e'' \in \mathscr{W}$ such that
   - $e'' : At_{\mathscr{H}_C(\sigma'\cdot l(E))} \longrightarrow T$,
   - $e''(\mathscr{H}_C(\sigma'\cdot l(E))) = 1$,
   - e' and e'' are mutually consistent.
4. for every $e' \in \mathscr{W}$ with $e' : At_{\mathscr{H}_C(\sigma')} \longrightarrow T$, there are $e_0,\ldots,e_k \in \mathscr{W}$ such that:
   - $e_0 = e$,
   - $e_k = e'$ and $k = |\sigma'|$,
   - for every $0 < i \leq k$, e_i is mutually consistent with e_{i-1}.

We will say that *e generates a witness set* in the case that there is some $\mathscr{W}$ such that $\mathscr{W}$ is a witness set generated by e.

The next lemma will allow us to show that the concept C is satisfiable if and only if there exists a mapping e which generates a witness set on it.

Lemma 9. *Let C be a concept. For every $\sigma \in \Sigma_C$, every $D_1,\ldots,D_i$ occurrences in C, and every $r_1,\ldots,r_i \in T$, if $\text{path}(\sigma) = \text{path}(l(D_1)) = \ldots = \text{path}(l(D_i))$ then the following statements are equivalent:*

1. there is an interpretation $\mathscr{I}$ and an individual $a \in \Delta^{\mathscr{I}}$ such that $D_1^{\mathscr{I}}(a) = r_1, \ldots, D_i^{\mathscr{I}}(a) = r_i$,

2. there is a mapping e: $At_{\mathscr{H}_C(\sigma)\cup\{D_1(\sigma),\ldots,D_i(\sigma)\}} \longrightarrow T$, such that
   - *$e(D_1(\sigma)) = r_1, \ldots, e(D_i(\sigma)) = r_i$ and*
   - *e generates a witness set.*

Proof. $(1 \Rightarrow 2)$: Suppose that there is an interpretation $\mathscr{I}$ and an individual $a \in \Delta^{\mathscr{I}}$ such that $D_1^{\mathscr{I}}(a) = r_1, \ldots, D_i^{\mathscr{I}}(a) = r_i$. Define the propositional evaluation e: $At_{\mathscr{H}_C(\sigma)\cup\{D_1(\sigma),\ldots,D_i(\sigma)\}} \longrightarrow T$ such that, for every $D(\sigma)$ appearing in $\mathscr{H}_C(\sigma) \cup \{D_1(\sigma),\ldots,D_i(\sigma)\}$ it holds that $e(D(\sigma)) = D^{\mathscr{I}}(a)$. It is clear that the propositional evaluation e satisfies the first condition of the statement. Now we have to prove that e generates a witness set. In order to do this, we inductively define the witness set $\mathscr{W}$.

(e) The first step is obviously obtained by setting $e := a$.

$(e'+1)$ Suppose that $e' : At_{\mathscr{H}_C(\sigma')} \longrightarrow T$ has been already defined as

$$e'(D(\sigma')) := D^{\mathscr{I}}(b)$$

for $b \in \Delta^{\mathscr{I}}$ and $D(\sigma')$ appearing in $At_{\mathscr{H}_C(\sigma')}$. Since $\mathscr{I}$ is a model of C, we have that for every generalized atom $QR.E$ appearing in the head of a formula in $\mathscr{H}_C(\sigma')$, there is $c \in \Delta^{\mathscr{I}}$ such that

$$QR.E^{\mathscr{I}}(b) \equiv (R^{\mathscr{I}}(b,c) \square E^{\mathscr{I}}(c)) = 1$$

for $\square \in \{\boxtimes, \sqsupset\}$. Hence, by setting
- $e'(F(\sigma' \cdot l(F))) = e''(F(\sigma' \cdot l(F))) := F^{\mathscr{I}}(c)$
- $e'(R(\sigma', \sigma' \cdot l(F))) := R^{\mathscr{I}}(b,c)$
for every $F(\sigma' \cdot l(F))$ and $R(\sigma', \sigma' \cdot l(F))$ appearing in $At_{\mathscr{H}_C(\sigma')}$, we obtain that
- $e'(\mathscr{H}_C(\sigma')) = 1$,
- e' and e'' are mutually consistent.
Repeating the process for every $\sigma' \in \Sigma_C$, we obtain that for every $e' \in \mathscr{W}$ with $e' : At_{\mathscr{H}_C(\sigma')} \longrightarrow T$, there are $e_0, \ldots, e_k \in \mathscr{W}$ such that:
- $e_0 = e$,
- $e_k = e'$ and $k = |\sigma'|$,
- for every $0 < i \leq k$, e_i is mutually consistent with e_{i-1},
Moreover, for every $0 < i \leq k$, we have that $e_i(\mathscr{H}_C(\sigma_i)) = 1$ and if $e', e'' \in \mathscr{W}$ and $dom(e') = dom(e'')$, then $e' = e''$.
$(2 \Rightarrow 1)$: Suppose that there is a mapping $e : At_{\mathscr{H}_C(\sigma) \cup \{D_1(\sigma), \ldots, D_i(\sigma)\}} \longrightarrow T$, such that $e(D_1(\sigma)) = r_1, \ldots, e(D_i(\sigma)) = r_i$, and e generates a witness set. Then we have to show that there exists an interpretation $\mathscr{I}$ and an individual $a \in \Delta^{\mathscr{I}}$ such that $D_1^{\mathscr{I}}(a) = r_1, \ldots, D_i^{\mathscr{I}}(a) = r_i$. So, define the interpretation $\mathscr{I} = (\Delta^{\mathscr{I}}, \cdot^{\mathscr{I}})$, where:

- $\Delta^{\mathscr{I}} = \Sigma_C$,

$$\text{- } R^{\mathscr{I}}(\sigma, \sigma') = \begin{cases} e_\sigma(R(\sigma,\sigma')), & \text{if } R(\sigma,\sigma') \\ & \text{occurs in } \mathscr{H}_C(\sigma) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- for every atomic concept A and $\sigma \in \Sigma_C$, define $A^{\mathscr{I}}(\sigma) = e_\sigma(A(\sigma))$, if $A(\sigma)$ occurs in $\mathscr{H}_C(\sigma)$ and $A^{\mathscr{I}}(\sigma) = 0$, otherwise.
Now we have to show by induction on concepts, that, for every occurrence E of a subconcept of C and every $\sigma \in \Delta^{\mathscr{I}}$, $E^{\mathscr{I}}(\sigma) = e_\sigma(E(\sigma))$.
- If E is either an atomic or a constant concept, it holds by definition of $\mathscr{I}$.
- If E is a propositional combination of concepts, this is trivial.
- Let $E = \forall R.F$ and suppose that $F^{\mathscr{I}}(\sigma) = e_\sigma(F(\sigma))$ and $R^{\mathscr{I}}(\sigma, \sigma \cdot l(F)) = e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(F))$. On the one hand, by Definition 8 and Definition 5, it holds that $e_\sigma(\mathscr{H}_C(\sigma)) = 1$ and $e_\sigma(\forall R.F(\sigma)) = e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(F))) \Rightarrow e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(F))) \Rightarrow e_{\sigma \cdot l(F)}(F(\sigma \cdot l(F))) = R^{\mathscr{I}}(\sigma, \sigma \cdot l(F)) \Rightarrow F^{\mathscr{I}}(\sigma \cdot l(F))$. On the other hand, again by Definition 8 and Definition 5, for every generalized atom G such that $\text{path}(l(G)) = \text{path}(l(F))$ it holds that, $e_\sigma(\forall R.F(\sigma)) \leq e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(G))) \Rightarrow e_\sigma(F(\sigma \cdot l(G))) = e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(G))) \Rightarrow e_{\sigma \cdot l(G)}(F(\sigma \cdot l(G))) = R^{\mathscr{I}}(\sigma, \sigma \cdot l(G)) \Rightarrow F^{\mathscr{I}}(\sigma \cdot l(G))$. So, $e_\sigma(\forall R.F(\sigma)) = \min_{x \in \Delta^{\mathscr{I}}}\{R^{\mathscr{I}}(\sigma, x) \Rightarrow F^{\mathscr{I}}(x)\} = (\forall R.F)^{\mathscr{I}}(\sigma)$.
- Let $E = \exists R.F$ and suppose that $F^{\mathscr{I}}(\sigma) = e_\sigma(F(\sigma))$ and $R^{\mathscr{I}}(\sigma, \sigma \cdot l(F)) = e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(F))$. On the one hand, by Definition 8 and Definition 5, it holds that $e_\sigma(\mathscr{H}_D(\sigma)) = 1$ and $e_\sigma(\exists R.F(\sigma)) = e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(F)))) * e_\sigma(F(\sigma \cdot l(F))) = e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(F))) * e_{\sigma \cdot l(F)}(F(\sigma \cdot l(F))) = R^{\mathscr{I}}(\sigma, \sigma \cdot l(F)) * F^{\mathscr{I}}(\sigma \cdot l(F))$. On the other hand, again by Definition 8 and Definition 5, for every generalized atom G such that $\text{path}(l(G)) = \text{path}(l(F))$ it holds that, $e_\sigma(\exists R.F(\sigma)) \geq e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(G))) * e_\sigma(F(\sigma \cdot l(G))) = e_\sigma(R(\sigma, \sigma \cdot l(G))) * e_{\sigma \cdot l(G)}(F(\sigma \cdot l(G))) = R^{\mathscr{I}}(\sigma, \sigma \cdot l(G)) * F^{\mathscr{I}}(\sigma \cdot l(G))$. So, $e_\sigma(\exists R.F(\sigma)) = \max_{x \in \Delta^{\mathscr{I}}}\{R^{\mathscr{I}}(\sigma, x) * F^{\mathscr{I}}(x)\} = (\exists R.F)^{\mathscr{I}}(\sigma)$.
Hence, for every concept E and every $\sigma \in \Delta^{\mathscr{I}}$, it holds that $E^{\mathscr{I}}(\sigma) = e_\sigma(E(\sigma))$. □

Using the occurrence C itself and the constant ε we get the following corollary.

Corollary 10. *Let C be a concept and $r \in T$. The following statements are equivalent.*
1. C is modally r-satisfiable,
2. there is a mapping $e : At_{\mathscr{H}_C(\varepsilon)} \longrightarrow T$ such that $e(C(\varepsilon)) = r$ and e generates a witness set on C.

3.1.2 Witness sets and procedures

Let us now consider the procedure $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ given in Figure 1. This procedure takes as *admissible inputs* strings made by
- an element $\sigma \in \Sigma_C$ and
- a set of pairs $\langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle$, where, for $1 \leq j \leq i$, D_j is the occurrence of a concept in C and r_j is a truth value,
and has three possible outputs:
- (i) true, (ii) false, (iii) a list of strings:

$$(\sigma \cdot l(E_1), \langle E_1, r_{1_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{1_k}\rangle),$$
$$\vdots$$
$$(\sigma \cdot l(E_k), \langle E_1, r_{k_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{k_k}\rangle),$$

each one of these strings being an admissible input.

Write down $\mathscr{H}_C(\sigma) \cup \{D_1(\sigma), \ldots, D_i(\sigma)\}$.
if there is a mapping $e_\sigma : At_{\mathscr{H}_C(\sigma) \cup \{D_j(\sigma)\colon 1 \leq j \leq i\}} \longrightarrow T$ such that $e_\sigma(D_j(\sigma)) = r_j$, for $1 \leq j \leq i$ and $e_\sigma(\mathscr{H}_C(\sigma)) = 1$ **then**
  if for every $j \leq i$ it holds that $nest(D_j) = 0$ **then**
    return **true**
  else
    return the following list of strings
    $(\sigma \cdot l(E_1), \langle E_1, r_{1_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{1_k}\rangle)$,
    $\vdots$
    $(\sigma \cdot l(E_k), \langle E_1, r_{k_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{k_k}\rangle)$,
    where $\{E_1, \ldots, E_k\}$ are the occurrences in the body of $\mathscr{H}_C(\sigma)$ and, for every $1 \leq h, m \leq k$, $e_\sigma(E_m(\sigma \cdot l(E_m))) = r_{h_m}$.
  end if
else
  return **false**
end if

Figure 1: $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$

What it is crucial is that in case that $\text{path}(\sigma) = \text{path}(l(D_1)) = \ldots = \text{path}(l(D_i))$, also the strings obtained as output satisfy this equality requirement. This procedure will be later used as a subroutine by the algorithm $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ (see Figure 2) in order to check for the r-satisfiability of a given concept C. For this reason it is parametrized with a concept C which does not appear within the input string. It is easy to see that the time needed by algorithm $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ to reach an answer is non-deterministically polynomial on the length of the input. Next we consider the main procedure $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ given in Figure 2.

Lemma 11. *Let C be a concept. For every $\sigma \in \Sigma_C$, every $D_1, \ldots, D_i$ occurrences in C, and every $r_1, \ldots, r_i \in T$, if $\text{path}(\sigma) = \text{path}(l(D_1)) = \ldots = \text{path}(l(D_i))$ then the following statements are equivalent.*
1. $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ returns true,
2. there is a mapping $e : At_{\mathscr{H}_C(\sigma) \cup \{D_1(\sigma), \ldots, D_i(\sigma)\}} \longrightarrow T$, such that $e(D_1(\sigma)) = r_1, \ldots, e(D_i(\sigma)) = r_i$ and e generates a witness set.

Proof. The proof of each one of the directions is done by induction.

if $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ returns **true then**
  return **true**
end if
if $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ returns a list of strings **and** for each string $\sigma \cdot l(E_m), \langle E_1, r_{m_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{m_k}\rangle$ in this list, it holds that $Witness_C(\sigma \cdot l(E_m), \langle E_1, r_{m_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{m_k}\rangle)$ returns **true then**
  return **true**
else
  return **false**
end if

Figure 2: $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$

($1 \Rightarrow 2$): Suppose that $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ returns **true**, we proceed by induction on the degree of C.
(0) If $nest(D_j) = 0$, for $1 \leq j \leq i$, then $\mathscr{H}_C(\sigma)$ is empty. Since $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ returns **true**, then e is a mapping over $\{D_j(\sigma)\colon 1 \leq j \leq i\}$ such that $e(D_j(\sigma)) = r_j$ and $\mathscr{W} = \{e\}$ is a witness set generated by e on $\{D_j(\sigma)\colon 1 \leq j \leq i\}$.
(d) Let $nest(D_j) > 0$, for at least one j such that $1 \leq j \leq i$ and suppose, by inductive hypothesis, that,
- for each occurrences $E_1, \ldots, E_k$ of concepts occurring in C such that there exist $R \in N_R$ and $n \in \mathbb{N}$ with $l(E_1) = \ldots = l(E_k) = l(D_j) \cdot Rn$,
- for each $\sigma' \in \Sigma_C$, such that there exists $1 \leq m \leq k$ with $\sigma' = \sigma \cdot l(E_m)$,
- for each $r_1, \ldots, r_k \in T$, it holds that, if $Witness_C(\sigma', \langle E_1, r_1\rangle, \ldots, \langle E_k, r_k\rangle)$ returns **true**, then there is a mapping $e_{\sigma'} : At_{\mathscr{H}_C(\sigma') \cup \{E_m(\sigma')\colon 1 \leq m \leq k\}} \longrightarrow T$ such that
- $e_{\sigma'}(E_m(\sigma')) = r_m$, for $1 \leq m \leq k$,
- $e_{\sigma'}(\mathscr{H}_C(\sigma')) = 1$,
- $e_{\sigma'}$ generates a witness set $\mathscr{W}_{\sigma'}$ on $E_1, \ldots, E_k$.
Now, suppose that $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ returns **true**, then:
1. $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ returns a list of strings $\{\sigma \cdot l(E_m), \langle E_1, r_{m_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{m_k}\rangle\colon 1 \leq m \leq k\}$ (remember that $nest(D_j) > 0$ by hypothesis) and, therefore (see Figure 1), there is a mapping $e : At_{\mathscr{H}_C(\sigma) \cup \{D_1(\sigma), \ldots, D_i(\sigma)\}} \longrightarrow T$, such that $e(D_1(\sigma)) = r_1, \ldots, e(D_i(\sigma)) = r_i$
2. For each string $\sigma \cdot l(E_m), \langle E_1, r_{m_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{m_k}\rangle$ in the output of $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$, it holds that $Witness_C(\sigma \cdot$

$l(E_m), \langle E_1, r_{m_1}\rangle, \ldots, \langle E_k, r_{m_k}\rangle)$ returns **true**.
Hence, by inductive hypothesis, for each occurrence E_m appearing in the output of $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$, there is a mapping $e_{\sigma'} : At_{\mathscr{H}_C(\sigma') \cup \{E_m(\sigma') :\, 1 \leq m \leq k\}} \longrightarrow T$ such that
- $e_{\sigma'}(E_m(\sigma')) = r_m$, for $1 \leq m \leq k$,
- $e_{\sigma'}(\mathscr{H}_C(\sigma')) = 1$,
- $e_{\sigma'}$ generates a witness set $\mathscr{W}_{\sigma'}$ on $E_1, \ldots, E_k$.
Moreover, since the truth values $r_{1_1}, \ldots, r_{k_k}$ are those appearing in the output of $Node_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$, then e_σ is mutually consistent with each $e_{\sigma'}$. So, the set:

$$\mathscr{W} = \{e_\sigma\} \cup \bigcup \{\mathscr{W}_{e_{\sigma'}} : \sigma' = \sigma \cdot l(E_m) \text{ with } 1 \leq m \leq k\}$$

is a witness set generated by e_σ.
- ($2 \Leftarrow 1$): Suppose that $e_\sigma : At_{\mathscr{H}_C(\sigma) \cup \{D_1(\sigma), \ldots, D_i(\sigma)\}} \longrightarrow T$ is a mapping such that $e_\sigma(D_1(\sigma)) = r_1, \ldots, e_\sigma(D_i(\sigma)) = r_i$ and e_σ generates a witness set.
(0) If $nest(D_j) = 0$, for every $1 \leq j \leq i$ then it is enough that e_σ be a mapping such that $e_\sigma(D_j(\sigma)) = r_j$, for $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ to return **true**.
(d) Let $nest(D_j) > 0$ for at least one $1 \leq j \leq i$ and suppose, by inductive hypothesis, that
- for each occurrences $E_1, \ldots, E_k$ of concepts occurring in C such that there exist $R \in N_R$ and $n \in \mathbb{N}$ with $l(E_1) = \ldots = l(E_k) = l(D_j) \cdot Rn$,
- for each $\sigma' \in \Sigma_C$, such that there exists $1 \leq m \leq k$ with $\sigma' = \sigma \cdot l(E_m)$,
- for each $r_1, \ldots, r_k \in T$,
it holds that, if there is a mapping $e_{\sigma'} : At_{\mathscr{H}_C(\sigma') \cup \{E_m(\sigma') :\, 1 \leq m \leq k\}} \longrightarrow T$ such that
- $e_{\sigma'}(E_m(\sigma')) = r_m$, for $1 \leq m \leq k$,
- $e_{\sigma'}(\mathscr{H}_C(\sigma')) = 1$,
- $e_{\sigma'}$ generates a witness set $\mathscr{W}_{\sigma'}$ on $E_1, \ldots, E_k$
then $Witness_C(\sigma', \langle E_1, r_1\rangle, \ldots, \langle E_k, r_k\rangle)$ returns **true**.
Now, if e_σ is a mapping which generates a witness set $\mathscr{W}_{e_\sigma}$ on $\{D_1, \ldots, D_i\}$, then, by Definition 8, for each occurrence of a generalized atom E appearing in the body of a formula in $\mathscr{H}_C(\sigma)$ there is a mapping $e_{\sigma'} \in \mathscr{W}$ such that
- $e_{\sigma'}(\mathscr{H}_C(\sigma')) = 1$,
- e_σ and $e_{\sigma'}$ are mutually consistent.
We consider the overlapping relation ol to be the transitive closure of the mutually consistent relation between mappings. Then the set $\{e' \in \mathscr{W} : e_\sigma \; ol \; e'\}$ is a witness set generated by e_σ on $\{D_1, \ldots, D_i\}$. Hence, by inductive hypothesis,
- for each occurrences $E_1, \ldots, E_k$ of concepts occurring in C such that there exist $R \in N_R$ and $n \in \mathbb{N}$ with $l(E_1) = \ldots = l(E_k) = l(D_j) \cdot Rn$,
- for each $\sigma' \in \Sigma_C$, such that there exists $1 \leq m \leq k$ with $\sigma' = \sigma \cdot l(E_m)$,
- for each $r_1, \ldots, r_k \in T$,
there is a mapping $e_{\sigma'} : At_{\mathscr{H}_C(\sigma')} \longrightarrow T$ such that $Witness_C(\sigma', \langle E_1, r_1\rangle, \ldots, \langle E_k, r_k\rangle)$ returns **true**. Hence (see Figure 2), it holds that $Witness_C(\sigma, \langle D_1, r_1\rangle, \ldots, \langle D_i, r_i\rangle)$ returns **true**. In particular, we have that the statement holds for ε, C and r. □

Corollary 12. *Let C be a concept and $r \in T$. Then $Witness_C(\varepsilon, \langle C, r\rangle)$ returns* **true** *if and only if there is a mapping $e : \mathscr{H}_C(\varepsilon) \cup \{C(\varepsilon)\} \longrightarrow T$ such that $e(C(\varepsilon)) = r$ that generates a witness set.*

Acknowledgements

M. Cerami was supported by ESF project POST - UP II No. CZ.1.07/2.3.00/30.0041 (co-financed by the European Social Fund and the state budget of the Czech Republic). F. Esteva was supported by the Spanish MICINN projects TASSAT (TIN2010-20967-C04-01/03) and Agreement Techologies (CONSOLIDER CSD 2007- 0022) and by the Catalan Government (2009SGR-1433/34).

References

[1] S. Borgwardt and R. Peñaloza. Finite lattices do not make reasoning in $\mathscr{ALC}$ harder. In *Proceedings of URSW 2011*, pages 51–62, 2011.

[2] F. Bou, M. Cerami, and F. Esteva. Concept satisfiability in finite-valued fuzzy description logics is pspace-complete (extended abstract). In *Proceedings of LATD 2012*, 2012.

[3] M. Cerami, F. Esteva, and F. Bou. Decidability of a description logic over infinite-valued product logic. In *Proceedings of KR 2012*, pages 203–213, 2010.

[4] F. Esteva and L. Godo. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 124(3):271–288, 2001.

[5] P. Hájek. Making fuzzy description logic more general. *Fuzzy Sets and Systems*, 154:1–15, 2005.

On conjectures in t-norm based fuzzy logics

Francesc Esteva[1], **Itziar García-Honrado**[2], **Lluís Godo**[1]

[1] *Artificial Intelligence Research Institute (IIIA) - CSIC*
Campus UAB s/n 08193 Bellaterra, Spain, {esteva,godo}@iiia.csic.es
[2] *Department of Statistics, Operational Research and Mathematical Education. University of Oviedo,* Spain
Affiliated researcher at European Centre for Soft Computing, garciaitziar@uniovi.es

Abstract

In this paper we study elements of models of ordinary reasoning like conjectures, hypothesis and speculations in the framework of t-norm based fuzzy logics that arise from two natural families of consequence operators definable in these logics, with special emphasis in three particular logics: Gödel, Product and Łukasiewicz logics.

Keywords: CHC models, consequence operators, t-norm based fuzzy logics, conjectures

1 Introduction

The paper deals with models of ordinary reasoning defined by Trillas et al. [2, 7, 4] through the definition of the set of conjectures, and its partition into consequences, hypotheses and speculations. Usually, these models are defined from a prefixed algebraic structure, for instance there are many publications regarding orthomodular lattices [2], but more recent papers deal with very general mathematical structure called Basic Flexible Algebras (BFA), that have as particular cases Boolean algebras, ortolattices, orthomodular lattices, De Morgan algebras and standard algebras of fuzzy sets.

Originally, in earlier papers the different models of ordinary reasoning, also called CHC models (from "Consequences, Hypotheses and Conjectures" [6]) were directly defined from a Tarski consequence operator, independently from the order of the underlying lattice. However, in [8] the CHC model is extended to residuated lattices where the notion of consequence is already based on the implication operation, which is a graded preorder, and in [7] the models are generalized to the setting of to pre-ordered sets.

In this paper we study the sets of conjectures in relation to two natural different consequence operators in the context of t-norm-based fuzzy logics [5, 3], namely the ones associated to the truth-preserving and degree-preserving notions of logical consequence [1]. We show they verify similar the properties of those described in [4] and it can be divided into consequences, hypotheses and speculations as well.

The paper is organized as follows. After some preliminaries on CHC models and consequence operators in the setting of t-norm-based fuzzy logics, we study consistency for sets of formulas relative to every consequence operator. Finally we study general the sets of conjectures, consequences, hypothesis and speculations for the main logics of a continuous t-norms, i.e., for Łukasiewicz, Gödel and Product logics.

2 Preliminaries

2.1 Preliminaries on CHC models

CHC models tries to collect the main properties of some of the basic types of ordinary reasoning: deduction, induction, abduction and speculative reasoning. These types of reasoning are represented, respectively, by the sets of consequences, conjectures, hypotheses and speculations. And all of them can be defined from a consequence operator in the sense of Tarski.

Any reasoning process starts from a body of information or, in logical terms, from a set of premises. If this set is finite, to obtain their consequences is usually reduced to look for the consequences of the conjunction (or meet in algebraic terms) of all the premises. This is done for instance in [7], in the setting of preordered sets, with the consequence operator $C_\wedge$ for which the consequences are the elements greater or equal (with respect to a given preorder) from the intersection of premises.

Notwithstanding, there are different ways of defining a consequence operator, even in that general setting. For instance in [7], the authors also consider the operator

$C_\cup$ for which the consequences of a set of premises is taken as the union of the consequences of each premise.

Once the set of consequences is defined, one can try to characterize the information that is not inconsistent with the set of premises P, where consistency refers to the impossibility of deducing the negation from an already deduced element (i.e. if $q \in C(P)$, then *not-q* $\notin C(P)$), assuming a negation *not* is available in the framework. Then the set of conjectures for a set of premises P are those elements consistent with P.

On the other hand, the hypotheses for a set of premises P will be those elements which allow to deduce every premise in P. Finally, the set of speculations for P is defined as the set of those conjectures that are neither consequences nor hypotheses. In this way, one obtains a partition of the set of conjectures in terms of consequences, hypotheses and speculations.

2.2 Preliminaries on t-norm based logics

(Continuous) T-norm-based fuzzy logics[1] are a family of logics whose language $\mathcal{L}$ is built from a countable set of propositional variables using different connectives $\&, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ and truth constants $\overline{0}, \overline{1}$ for truth and falsity. Semantically, they correspond to logical calculi with the real interval $[0,1]$ as set of truth-values and taking the conjunction $\&$, the implication $\rightarrow$ and the truth-constant $\overline{0}$ as primitive. Further connectives are definable as: $\varphi \wedge \psi = \varphi\&(\varphi \rightarrow \psi)$, $\varphi \vee \psi = ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$, $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \overline{0}$ and $\overline{1} = \neg\overline{0}$.

In this framework, each continuous t-norm $*$ uniquely determines a logic $\mathrm{L}_\star$ as a propositional calculus over formulas interpreting the conjunction $\&$ by the t-norm $\star$, the implication $\rightarrow$ by its residuum $\Rightarrow$ and the truth-constant $\overline{0}$ by the value 0. More precisely, evaluations of propositional variables are mappings e assigning to each propositional variable p a truth-value $e(p) \in [0,1]$, which extend univocally to compound formulas as follows:

$$\begin{aligned} e(\overline{0}) &= 0 \\ e(\varphi\&\psi) &= e(\varphi) \star e(\psi) \\ e(\varphi \rightarrow \psi) &= e(\varphi) \Rightarrow e(\psi) \end{aligned}$$

From these defintions, it follows that $e(\varphi \wedge \psi) = \min(e(\varphi), e(\psi))$, $e(\varphi \vee \psi) = \max(e(\varphi), e(\psi))$, $e(\neg\varphi) = e(\varphi) \Rightarrow 0$ and $e(\varphi \equiv \psi) = e(\varphi \rightarrow \psi) * e(\psi \rightarrow \varphi)$.

For each logic $\mathrm{L}_\star$, we consider two kinds of finitary consequence relations, $\models$ and $\models^{\leq}$, defined as follows, where $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is a finite set of formulas from $\mathcal{L}$:

- $\Gamma \models \varphi$ if $e(\varphi) = 1$ for every evaluation $e : \mathcal{L} \rightarrow [0,1]_*$ such that $e(\psi) = 1$ for every $\psi \in \Gamma$.
- $\Gamma \models^{\leq} \varphi$ if $\min\{e(\psi) \mid \psi \in \Gamma\} \leq e(\varphi)$ for every evaluation (morphism) $e : \mathcal{L} \rightarrow [0,1]_*$.

The consequence relation $\models$ is usually called "1-preserving" while $\models^{\leq}$ is called "degree-preserving", for obvious reasons. Observe that $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models^{\leq} \varphi$ iff $\models (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$, so that deductions from premises with $\models^{\leq}$ can be translated to deductions of theorems with $\models$.

Well-known axiomatic systems, like Łukasiewicz logic (Ł), Gödel logic (G) or Product logic (Π), syntactically capture the "1-preserving" consequence relation for $\mathrm{L}_\star$ when $\star$ is Łukasiewicz, min or product t-norm respectively [5]. It is worth noticing that Gödel logic is the only t-norm based fuzzy logic such that $\models$ coincides with $\models^{\wedge}$.

3 Consequence operators on $\mathrm{L}_\star$ logics

Given a logic $\mathrm{L}_\star$, we consider the consequence operators associated to logical consequences $\models$ and $\models^{\leq}$:

- $C(\Gamma) = \{\varphi \mid \Gamma \models \varphi\}$, and
- $C^{\leq}(\Gamma) = \{\varphi \mid \Gamma \models^{\leq} \varphi\}$.

For each consequence operator C and $C^{\leq}$ we also consider the consequence operators $C_\cup$ and $C_\cup^{\leq}$ (used in Trillas et al.'s paper [4]) defined by

- $C_\cup(\Gamma) = \{\varphi \mid \gamma \models \varphi \text{ for some } \gamma \in \Gamma\}$, and
- $C_\cup^{\leq}(\Gamma) = \{\varphi \mid \gamma \models^{\leq} \varphi \text{ for some } \gamma \in \Gamma\}$.

Since $\models$ is a stronger notion of consequence than $\models^{\leq}$, we have the following chains of inclusions among these operators:

$$C_\cup^{\leq} \subseteq C^{\leq} \subseteq C \subseteq \mathbb{CL} \quad (1)$$

$$C_\cup^{\leq} \subseteq C_\cup \subseteq C \subseteq \mathbb{CL} \quad (2)$$

where $\mathbb{CL}$ denotes the consequence operator of classical propositional logic (CL) in the language $\mathcal{L}$ where we identify the connectives $\&$ and $\wedge$. In the particular case of Gödel logic ($\star = \min$), since $\models$ coincides with $\models^{\leq}$, it turns out that $C = C^{\leq}$ and $C_\cup = C_\cup^{\leq}$.

Observe that, unlike C, the operators $C_\cup^{\leq}$ and $C_\cup$ are not closed by modus ponens, which makes the associated notion of inference quite weak. Actually $C^{\leq}$ is neither closed by modus ponens but its closed by a restricted version of modus ponens: if $\varphi \rightarrow \psi$ is a theorem, from φ derive ψ.

[1] In fact the framework also cover logics defined by left-continuous t-norms but in this work we only deal with the case of continuous t-norms.

All these operators are consequence operators in the sense of Tarski, that is, any $C^* \in \{C, C^{\leq}, C_{\cup}, C_{\cup}^{\leq}\}$ verifies:

- $\forall \Gamma,\ \Gamma \subseteq C^*(\Gamma)$.
- $\forall \Gamma_1, \Gamma_2$, if $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ then $C^*(\Gamma_1) \subseteq C^*(\Gamma_2)$.
- $\forall \Gamma,\ C^*(C^*(\Gamma)) = C^*(\Gamma)$.

The following lemmas highlight several properties of the above defined consequence operators. In what follows, given a finite set of formulas Γ, we will write $\Gamma^{\wedge}$ for $\bigwedge\{\psi \mid \psi \in \Gamma\}$. Moreover, to simplify notation we will also write $C^*(\varphi)$ for $C^*(\{\varphi\})$ for any $C^* \in \{C, C^{\leq}, C_{\cup}, C_{\cup}^{\leq}\}$.

Lemma 1 *For $C^* \in \{C, C^{\leq}\}$, it holds that $C^*(\Gamma) = C^*(\Gamma^{\wedge})$.*

Lemma 2 *C and $C^{\leq}$ are closed by the weak conjunction $\wedge$: if $\varphi \in C^{\leq}(\Gamma)$ and $\psi \in C^{\leq}(\Gamma)$ then $\varphi \wedge \psi \in C^{\leq}(\Gamma)$.*

Lemma 3 *C is closed by the strong conjunction $\&$: if $\varphi \in C(\Gamma)$ and $\psi \in C(\Gamma)$ then $\varphi\&\psi \in C(\Gamma)$.*

These results do not hold in general for the operators $C_{\cup}$ and $C_{\cup}^{\leq}$, while Lemma 3 does not even hold for $C^{\leq}$.

On the other hand, by definition, it is clear that the $C_{\cup}$ and $C_{\cup}^{\leq}$ operators satisfy the following property.

Lemma 4 *Let $C^* \in \{C_{\cup}, C_{\cup}^{\leq}\}$. Then $C^*(\Gamma) = \bigvee_{\varphi \in \Gamma} C^*(\varphi)$.*

It is known that in the family of logics $\mathrm{L}_{\star}$, C and $C^{\leq}$ (and also $C_{\cup}$ and $C_{\cup}^{\leq}$) coincide if and only if $\star$ is the min t-norm. For Product and Łukasiewicz logics it is easy to compute that $\varphi\&\varphi$ belongs to $C(\varphi)$ and does not belong to $C^{\leq}(\varphi)$, see Lemma 3.

4 Notions of consistency relative to the consequence operators C, $C^{\leq}$, $C_{\cup}$ and $C_{\cup}^{\leq}$

In this section we study the notion of consistency with respect to our four consequence operators C, $C^{\leq}$, $C_{\cup}$ and $C_{\cup}^{\leq}$ within the framework of $\mathrm{L}_{\star}$ logics.

In the setting of the consequence relation $\models$, in "mathematical fuzzy logic" [3] it is customary to define a set of premises Γ to be consistent whenever $\Gamma \not\models \overline{0}$. However this notion of consistency does not make much sense in the setting of the consequence relation $\models^{\leq}$, since $\models^{\leq}$ is paraconsistent, i.e. it is not always the case that $\{\varphi, \neg\varphi\} \models^{\leq} \overline{0}$. Because of that we will adopt the following general definition.

Definition 5 *Let $C^* \in \{C, C^{\leq}, C_{\cup}, C_{\cup}^{\leq}\}$. We say that a set of premises Γ is C^*-consistent whenever the following condition holds: if $\varphi \in C^*(\Gamma)$ then $\neg\varphi \notin C^*(\Gamma)$.*

Notice that if Γ is C^*-consistent, then so is $C^*(\Gamma)$.

Next we provide equivalent conditions for different particular cases of consequence operators and particular choices of the t-norm $\star$ in the logic $\mathrm{L}_{\star}$.

4.1 The case of C and $C^{\leq}$ operators

Lemma 6 *For any logic $L_{\star}$, the following conditions are equivalent:*

- *Γ is C-consistent*
- *$\Gamma \not\models \overline{0}$ (i.e. there exists an evaluation e such that $e(\psi) = 1$ for all $\psi \in \Gamma$)*
- *$\Gamma^{\wedge} \not\models \overline{0}$ (i.e. there exists an evaluation e such that $e(\Gamma^{\wedge}) = 1$)*

The proof is an immediate consequence of Lemma 3 since if Γ is C-inconsistent then $\Gamma \models \varphi\&\neg\varphi$, and $\varphi\&\neg\varphi$ is equivalent to $\overline{0}$.

Lemma 7 *For any logic $L_{\star}$, the following conditions are equivalent:*

- *Γ is $C^{\leq}$-consistent*
- *For all formula φ, if $\models \Gamma^{\wedge} \to \varphi$ then $\not\models \Gamma^{\wedge} \to \neg\varphi$.*

This follows directly from the definition of $\models^{\leq}$ in terms of $\models$.

Next we show some specific conditions for different choices of the t-norm $\star$ in the logic $\mathrm{L}_{\star}$, namely $\star = \min$ (Gödel logic), $\star =$ product t-norm (Product logic) and $\star =$ Łukasiewicz t-norm (Łukasiewicz logic).

Lemma 8 *For $L_{\star}$ being Gödel or Product logic, C-consistency and $C^{\leq}$-consistency coincide.*

Proof: The case of Gödel logic has already been mentioned. For Product logic it is true by using the following equivalences: Γ is $C^{\leq}$-consistent iff $\Gamma \not\models^{\leq} 0$ iff there is an evaluation e such that $e(\Gamma^{\wedge}) > 0$ iff there is an evaluation e' ($e'(p) = e(\neg\neg p)$ for each propositional variable p) [2] such that $e'(\Gamma^{\wedge}) = 1$ iff $\Gamma \not\models 0$ iff Γ is C-consistent $\dashv$

[2] Recall that in Gödel or Product algebras $\neg\neg x = 1$ if $x > 0$ and $\neg\neg 0 = 0$.

Lemma 9 *For $L_\star$ being Gödel or Product logic, let $C^* \in \{C, C^{\leq}\}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) Γ is C^*-consistent

(ii) there exists an $\{0,1\}$-evaluation e s.t. $e(\Gamma^\wedge) = 1$

Proof: The proof is easy taking into account that the evaluation e' defined in the proof of previous lemma is crisp ($e'(\varphi) \in \{0,1\}$ for al formula φ). ⊣

This previous lemma amounts to say that, in the case of Gödel or Product logic, Γ is C^*-consistent if and only if Γ is *classically* consistent (identifying the weak and strong conjunctions).

However, in Łukasiewicz logic C-consistency is not equivalent to $C^{\leq}$-consistency and condition (ii) is not satisfied neither for C nor for $C^{\leq}$.

Lemma 10 *For $L_\star$ being Łukasiewicz logic, the following conditions are equivalent:*

- *Γ is $C^{\leq}$-consistent*
- *there exists an $L_\star$-evaluation e s.t. $e(\Gamma^\wedge) > 1/2$*

Proof: Assume there exists an evaluation e such that $e(\Gamma^\wedge) > 1/2$, then if $\Gamma \models^{\leq} \varphi$, necessarily $e(\varphi) \geq e(\Gamma^{\leq}) > 1/2$, and thus $e(\neg\varphi) = 1 - e(\varphi) < 1/2$ and $\Gamma \not\models^{\leq} \neg\varphi$.

Conversely, assume $e(\Gamma^\wedge) \leq 1/2$ for any evaluation e. Then, we would have both $\Gamma \models^{\leq} \Gamma^\wedge$ (by definition of $\models^{\leq}$), but also $\Gamma \models^{\leq} \neg\Gamma^\wedge$ (by hypothesis), and hence Γ would be $C^{\leq}$-inconsistent. ⊣

To see that C-consistency is not equivalent to $C^{\leq}$-consistency take for example $\Gamma = \{p, \neg q, p \to q\}$, then Γ is obviously C-inconsistent (there is not e such that $e(p \wedge \neg q \wedge (p \to q) = 1)$ while it is $C^{\leq}$-consistent (take the evaluation e such that $e(p) = 0.6, e(q) = 0.4$. Then $e(p \wedge \neg q \wedge (p \to q) = 0.6 > 0.5)$.

4.2 The case of $C_\cup$ and $C_\cup^{\leq}$ operators

Lemma 11 *For any logic $L_\star$, the following are equivalent:*

- *Γ is $C_\cup$-inconsistent*
- *there exists $\psi, \chi \in \Gamma$, such that $\psi, \chi \models \overline{0}$*
- *there exists $\psi, \chi \in \Gamma$ and $n \in \mathbb{N}$ such that $\neg(\chi^n) \in C^\cup(\psi)$, where $\chi^n = \chi\& \overset{n}{\ldots} \&\chi$; or equivalently, $\psi \models \neg(\chi^n)$.*
- *there exists $\psi, \chi \in \Gamma$ and $n \in \mathbb{N}$ such that for every evaluation e, if $e(\psi) = 1$ then $e(\chi)\star \overset{n}{\ldots} \star e(\chi) = 0$.*

Proof: If Γ is $C_\cup$-inconsistent, there exist $\chi, \psi \in \Gamma$ such that $\chi \models \varphi$ and $\psi \models \neg\varphi$, then $\chi, \psi \models \overline{0}$. Moreover, this is is equivalent in turn to the fact of the existence of $n \in \mathbb{N}$ such that $\psi \models \neg\chi^n$.[3]

Reciprocally, if $\psi, \chi \in \Gamma$ are such that there exists $n \in \mathbb{N}$ verifying $\psi \models \neg\chi^n$, then $\chi \models \chi^n$ and $\psi \models \neg\chi^n$. Therefore, Γ is $C_\cup$-inconsistent. ⊣

In the case of Lukasiewicz logic, it can be shown the possibility of having $\chi, \psi \in \Gamma$, such that $\chi, \psi \models \overline{0}$, with $\psi \not\models \neg\chi$ and $\chi \not\models \neg\psi$. For instance, it is enough to take $\chi = p\&(q \equiv p \otimes p)$ and $\psi = r\&(\neg q \equiv r \otimes r)$. Therefore, for Lukasiewicz logic the previous lemma does not hold with $n = 1$ in the third and fourth items. However, this holds true for Gödel and Product logics.

Lemma 12 *For $L_\star$ being Gödel or Product logic, let $C^* \in \{C_\cup, C_\cup^{\leq}\}$. Then the following conditions are equivalent:*

- *Γ is C^*-consistent*
- *for any $\psi, \chi \in \Gamma$, $\chi \not\models \neg\psi$.*
- *for any $\psi, \chi \in \Gamma$, there exists an evaluation e such that $e(\psi \wedge \chi) > 0$.*
- *for any $\psi, \chi \in \Gamma$, there exists an evaluation e such that $e(\psi \wedge \chi) = 1$*

Proof: We prove the case $C^* = C_\cup$, the case of $C^* = C_\cup^{\leq}$ being similar. If Γ is $C_\cup$-inconsistent, there exist $\psi, \chi \in \Gamma$ such that $\psi \models \varphi$ and $\chi \models \neg\varphi$ for some φ. Let us prove that $\chi \models \neg\psi$. The hypothesis implies that for all evaluation e, if $e(\psi) = 1$ then $e(\varphi) = 1$, and if $e(\chi) = 1$, then $e(\varphi) = 0$. Therefore, $e(\chi) = 1$ implies $e(\psi) < 1$. Then we have two cases: either $e(\psi) = 0$ and we are done, or $e(\psi) > 0$. In the latter case, define a new evaluation e' by putting $e'(p) = e(\neg\neg p)$ for all propositional variable p. It can be checked (see e.g. [5]) that $e'(\varphi) = e(\neg\neg\varphi)$ for any formula φ, and hence[4] $e'(\chi) = e'(\varphi) = e'(\psi) = 1$, contradicting the hypothesis that $\chi \models \neg\varphi$.

Reciprocally, assume that for all evaluation e such that $e(\chi) = 1$, we have $e(\neg\psi) = 1$. Therefore, Γ is $C_\cup$-inconsistent, since $\psi \models \psi$ and $\chi \models \neg\psi$.

The last item is an easy consequence of previous one. ⊣

[3] Here we are using the local deduction theorem that is valid for all t-norm based logics, namely $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ iff there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\Gamma \models \varphi\& \overset{n}{\ldots} \&\varphi \to \psi$ (see e.g. [5, 3]).

[4] Recall that in Gödel or Product algebras $\neg\neg x = 1$ if $x > 0$ and $\neg\neg 0 = 0$.

In fact this lemma simply says that in Gödel and Product logics, a set of formulas is consistent with respect to the consequence operators $C_\cup$ and $C^{\leq}_\cup$ iff they are pairwise consistent in the usual sense of the operators C and $C^{\leq}$ respectively, which is very natural according to the definition of the consequence operators $C_\cup$ and $C^{\leq}_\cup$.

Lemma 13 *For $L_\star$ being Lukasiewicz logic, Γ is $C^{\leq}_\cup$-consistent*

- *iff for all $\psi, \chi \in \Gamma$, $\neg\chi \notin C^{\leq}_\cup(\psi)$*
- *for all $\psi, \chi \in \Gamma$ there exists an evaluation e such that $e(\psi) > e(\neg\chi)$, i.e. $e(\psi\&\chi) > 0$.*

Proof: If Γ is $C^{\leq}_\cup$-consistent, there exist $\psi, \chi \in \Gamma$ and φ such that, for all evaluation e, $e(\psi) \leq e(\varphi)$, and $e(\chi) \leq e(\neg\chi)$. Therefore, $e(\psi) \leq e(\varphi) \leq e(\neg\chi)$. Reciprocally, if there exist $\psi, \chi \in \Gamma$ such that $e(\psi) \leq e(\neg\chi)$, then Γ is inconsistent since obviously $e(\chi) \leq e(\chi)$. ⊣

5 Hypothesis and conjectures

In this section we study how the notions of conjecture, hypothesis and speculation can be characterized under the different notions of consequence operators and logics we have considered. We start by recalling the usual definitions adapted to our framework.

Definition 14 *Let Γ be a set of premises. We respectively define the set of hypotheses, conjectures and speculations of Γ wrt $C^* \in \{C, C^{\leq}, C_\cup, C^{\leq}_\cup\}$ as follows:*

- $Conj_{C^*}(\Gamma) = \{\varphi \mid \Gamma \cup \{\varphi\}$ *is C^*-consistent*$\}$
- $Hyp^{+}_{C^*}(\Gamma) = \{\varphi \mid \varphi$ *is C^*-consistent and* $\Gamma \subseteq C^*(\varphi)\}$
  $Hyp_{C^*}(\Gamma) = Hyp^{+}_{C^*}(\Gamma) \setminus C^*(\Gamma)$
- $Spec_{C^*}(\Gamma) = Conj_{C^*}(\Gamma) \setminus (C^*(\Gamma) \cup Hyp_{C^*}(\Gamma))$.

From this definition, it readily follows the next inclusions for any set of formulas Γ:

$$C^*(\Gamma) \cup Hyp_{C^*}(\Gamma) \subseteq Conj_{C^*}(\Gamma).$$

The following general properties also trivially hold:

- $Conj_{C^*}(\Gamma)$ may be not C^*- consistent
- $Conj_{C^*s}(\Gamma) = \bigcup\{T \mid \Gamma \subseteq T, T$ is maximally C^*-consistent$\}$
- If $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, then $Conj_{C^*}(\Gamma_2) \subseteq Conj_{C^*}(\Gamma_1)$.
- $(Conj_{C^*}, \vee, 1)$ is a $\vee$-semilattice.
- If $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, then $Hyp_{C^*}(\Gamma_2) \subset Hyp_{C^*}(\Gamma_1)$
- If $C_1 \subseteq C_2$ then $Conj_{C_2}(\Gamma) \subseteq Conj_{C_1}(\Gamma)$
- If $C_1 \subseteq C_2$ then $Hyp_{C_1}(\Gamma) \subseteq Hyp_{C_2}(\Gamma)$
- If $C_1 \subseteq C_2$ then $Spec_{C_2}(\Gamma) \subseteq Spec_{C_1}(\Gamma)$

From the chains of inclusions (1) and (2), and the last three items we have corresponding chains of inclusion for Conjectures, Hypothesis and Speculations with respect to the of the consequence operators $C, C^{\leq}, C_\cup$ and $C^{\leq}_\cup$.

5.1 The case of C and $C^{\leq}$ operators

From Lemma 1 it follows that, for $C^* \in \{C, C^{\leq}\}$, $Conj_{C^*}(\Gamma) = Conj_{C^*}(\Gamma^\wedge)$ and $Hyp_{C^*}(\Gamma) = Hyp_{C^*}(\Gamma^\wedge)$.

Moreover for $L_\star$ being Gödel or Product logics the notion of consistency for C and $C^{\leq}$ coincide and thus the following results hold.

Lemma 15 *Let $C^* \in \{C, C^{\leq}\}$ and let $L_\star$ be Gödel or Product logics. Then*

- *$\varphi \in Conj_{C^*}(\Gamma)$ iff there exists an evaluation e such that $e(\Gamma^\wedge \wedge \varphi) = 1$.*
- *$Conj_{C^*}(\Gamma) = \alpha^{[-1]}(Conj_{\mathbb{CL}}(\alpha(\Gamma)))$*

where α is the mapping formulas of the logic $L_\star$ to formulas of classical logic obtained by identifying the weak and strong conjunctions.

Obviously α is the identity in Gödel Logic. Therefore, for this logic, the set $Con_{C^*}(\Gamma)$ is the same than in classical logic.

Lemma 16 *Let $C^* \in \{C, C^{\leq}\}$ and let $L_\star$ be Gödel or Product logics. Then $Conj_{C^*}(\Gamma) = \mathcal{L} \setminus Hyp^{+}_{C^*}(\neg\Gamma^\wedge)$.*

Proof: A formula φ does not belong to $Conj_{C^*}(\Gamma)$ iff $\{\Gamma^\wedge, \varphi\} \models \overline{0}$ iff there is a natural n such that $\varphi \models (\Gamma^\wedge)^n \to \overline{0}$, i.e, $\varphi \models \neg((\Gamma^\wedge)^n)$ iff $\varphi \models \neg(\Gamma^\wedge)$ iff $\varphi \in Hyp^{+}_{C^*}(\neg(\Gamma^\wedge))$. ⊣

For $L_\star$ being Łukasiewicz Logic we need to distinguish the cases of consequence operator C and $C^{\leq}$ since their notion of consistency are different. In that logic we have.

Lemma 17 *Let $L_\star$ be Łukasiewicz logic. The following conditions hold:*

- $\chi \in Conj_C(\Gamma)$ *iff there exists an evaluation* e *such that* $e(\Gamma^\wedge \wedge \chi) = 1$
- $\chi \in Conj_{C^\leq}(\Gamma)$ *iff there exists an evaluation* e *such that* $e(\Gamma^\wedge \wedge \chi) > \frac{1}{2}$.

5.2 The case of $C_\cup$ and $C_\cup^\leq$ operators

From the notion of $C_\cup$-consistency, it follows that the set of conjectures of a set formulas Γ is $Conj_{C_\cup}(\Gamma) = \{\varphi \mid \forall \psi \in \Gamma\ \varphi, \psi \not\models \overline{0}\} = \{\varphi \mid \forall \psi \in \Gamma,\ \forall n,\ \varphi \not\models \neg\psi^n\}$.

In the case of Gödel or Product logic it is enough to take $n = 1$, and then the above expression could be simplified to

$$Conj_{C_\cup}(\Gamma) = \{\varphi \mid \forall \psi \in \Gamma, \varphi \not\models \neg\psi\}. \qquad (3)$$

It turns out that this condition is also true for $C_\cup^\leq$ since, for Gödel and Product logics, $C_\cup^\leq$-consistency coincides with $C_\cup$-consistency. However, (3) is not valid for Łukasiewicz logic as we have shown in Section 4.2.

The results of Lemmas 15 and 16 translate into the next characterizations, where we denote by $C^\cup_{CPC}$ the following consequence operator related to classical logic: $\mathbb{CL}_\cup(\Gamma) = \{\psi \mid \psi \in \mathbb{CL}(\varphi) \text{ for some } \varphi \in \Gamma\}$.

Lemma 18 *Let* $C^* \in \{C_\cup, C_\cup^\leq\}$ *and let* $L_\star$ *be Gödel or Product logics. Then,*

- $Conj_{C^*}(\Gamma) = \alpha^{[-1]}(\mathbb{CL}_\cup(\alpha(\Gamma)))$
- $Conj_{C^*}(\Gamma) = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{\psi\in\Gamma} Hyp^+_{C^*}(\neg\psi)$.

Proof: The first item basically follows by the same reasoning used in the first property in Lemma 15. As for the second one, we have the following equivalences: $\varphi \notin Conj_{C^*}(\Gamma)$ iff there exists $\psi \in \Gamma$ such that $\varphi \models \neg\psi$ iff $\varphi \in \bigcup_{\psi\in\Gamma} Hyp^+_{C^*}(\neg\psi)$. ⊣

Finally we present a summary of results organized by logics: For Gödel logic it holds that, for any Γ:

(i) $C^\leq(\Gamma) = C(\Gamma) \subsetneq \mathbb{CL}(\Gamma)$
(ii) $Conj_{C^\leq} = Conj_C = Conj_{\mathbb{CL}}$
(iii) $Hyp_{C^\leq} = Hyp_C \subsetneq Hyp_{\mathbb{CL}}$
(iv) The same inequalities hold for the $C_\cup$ and $C_\cup^\leq$ operators and the corresponding classical ones,

while for Product logic it holds that:

(i') $C^\leq(\Gamma) \subsetneq C(\Gamma) \subsetneq \alpha^{-1}(\mathbb{CL}(\alpha[\Gamma]))$
(ii') $Conj_{C^\leq} = Conj_C = \alpha^{-1}(Conj_{\mathbb{CL}}(\alpha()))$
(iii') $Hyp_{C^\leq} \subsetneq Hyp_C \subsetneq Hyp_{\mathbb{CL}}$
(iv') The same inequalities hold for the $C_\cup$ and $C_\cup^\leq$ operators and the corresponding classical ones.

6 Concluding remarks

Regarding the notion of consistency, in this paper we have obtained some results very similar to those of [7] in two aspects. First, some spaces for sets of premises are defined in order to preserve the consistency of a Tarski consequence operator:

- The space $\{\triangle;\ \triangle^\wedge \not\models \overline{0}\}$, where a set of premises Γ belongs to in case there exists an evaluation e such that $e(\Gamma^\wedge) = 1$ or that $e(\Gamma^\wedge) > 0$. (Product and Gödel logics.)
- The space $\{\triangle;\ \triangle^\wedge \not\models^\leq \neg\triangle^\wedge\}$, where a set of premises Γ belongs to just in case there exists an evaluation e such that $e(\Gamma^\wedge) > 1/2$. (Łukasiewicz logic.)

Second, the sets of conjectures are defined based on the notion of consistency, since conjectures are those elements that are "not inconsistent" with the body of information.

As for future research, we plan to get a deeper insight into CHC models for t-norm based logics, with more general characterizations and new applications.

Acknowledgments This work has been partially supported by the Spanish projects TIN2012-39348-C02-01 (Esteva and Godo) and TIN2011-29827-C02-01 (García-Honrado).

References

[1] F. Bou, F. Esteva,J.M. Font, A. Gil, L. Godo, A. Torrens, and V. Verdú. Logics preserving degrees of truth from varieties of residuated lattices. *Journal of Logic and Computation*, 19(6):1031–1069, 2009.

[2] E. Castiñeira, E. Trillas, S. Cubillo. On conjectures in orthocomplemented lattices. *Artificial Intelligence*, 117:255–275, 2000.

[3] P. Cintula, P. Hájek, and C. Noguera, editors. *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic (in 2 volumes)*, vols. 37 and 38 of *Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations*. College Publications, London, 2011.

[4] I. García-Honrado and E. Trillas. On an attempt to formalize guessing. In *Soft Computing in Humanities and Social Sciences* (Eds. R. Seising and V. Sanz) Springer-Verlang, 273:237–255, 2012.

[5] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Trends in Logic, vol. 4, Kluwer, Dordercht, 1998.

[6] D. Qiu. A note on Trillas' CHC models. *Artificial Intelligence* 171 (2007) 239-254.

[7] E. Trillas, I. García-Honrado and A. Pradera. Consequences and conjectures in preordered sets. *Information Sciences*, 180(19): 3573–3588, 2010.

[8] M. Ying, H. Wang. Lattice-theoretic models of conjectures, hypotheses and consequences. *Artificial Intelligence* 139 (2002) 253-267.

PERCEPCIÓN Y ¿JUSTIFICIÓN, LEGITIMACIÓN O SUSTENTO?

José L. Falguera, Santiago Peleteiro

Universidad de Santiago de Compostela, jose.luis.falguera@usc.es, pelaosanti@hotmail.com

Resumen

Un modelo clásico de análisis filosófico de la percepción entiende que ésta pertenece al espacio de razones y que ello posibilita la justificación de creencias, en especial de creencias perceptuales. Pese a ciertas críticas a este modelo, como las de Sellars y Davidson, filósofos como McDowell y Brewer proponen recuperar las experiencias perceptuales para el espacio de razones (y con ello recuperar su papel normativo en la justificación de creencias), atribuyendo a sus contenidos un carácter conceptual. No obstante, aportaciones de la psicología básica (como las basadas en experimentos del tipo Sperling o las propuestas de Coltheart) y análisis filosóficos de autores como Peacocke, más bien dan soporte a la tesis del contenido no-conceptual de la experiencia perceptual, poniendo en duda que su supuesto carácter conceptual sea una condición necesaria para constituirse en razón de una creencia perceptual.

Por otra parte, algunos defensores del contenido no-conceptual de la percepción como Burge y Pryor han propuesto un nuevo modelo en el que excluyen la percepción del espacio de las razones, aunque sin negarle un papel epistémico normativo. Ambos proponen que los contenidos de la percepción proporcionan a las creencias perceptuales un tipo de garantía distinto al que proporciona una justificación (la cual en su opinión sólo se establece entre contenidos conceptuales).

Aquí también defendemos que se da una relación epistémica entre percepción y creencia perceptual distinta de la de justificación. Sin embargo, encierra suficientes diferencias con la propuesta por Burge y Pryor como para hablar de una nueva forma de entender la relación normativa entre experiencia perceptiva y creencias perceptuales. A esta relación le damos el nombre de "sustento epistémico".

Palabras Clave: Experiencia perceptual, contenido no-conceptual, representaciones de la memoria icónica, justificación epistémica, legitimación epistémica, sustento epistémico.

1 JUSTIFICACIÓN Y LEGITIMACIÓN EPISTÉMICAS

¿Qué relación epistémica existe entre nuestras experiencias perceptuales (EPs) y aquellas creencias basadas directamente en esas experiencias o creencias de experiencia perceptual (CEPs)? En cualquier aproximación al tópico del conocimiento ordinario y al problema de la evaluación epistémica de las creencias sobre nuestro mundo resulta inevitable abordar una cuestión como ésta.

Tradicionalmente se ha entendido que la relación epistémica entre EPs y CEPs debe ser una relación de *justificación* de las segundas a partir de las primeras. Así, el fundamentismo clásico de corte empirista presentaba las CEPs como cimiento último de todo conocimiento, por entender que éstas estaban justificadas exclusivamente por EPs consideradas como algo dado (y en tanto que dado que deberían entenderse como meras presencias, posiblemente aparentes, inducidas por el entorno).Sin embargo, a raíz del cuestionamiento por parte de Sellars ([14]) de que lo dado pueda formar parte del "espacio lógico de las razones" y de que por lo tanto pueda jugar el rol de justificar, surgieron planteamientos sobre este asunto en los que se ha relegado a las EPs al cumplimiento de un papel meramente *causal*. Tal ha sido el caso de Davidson que, adoptando una enfoque netamente coherentista respecto a los contenidos de conocimiento, llega a afirmar que «nada puede contar como razón para sostener una creencia sino otra creencia» ([5], p. 126), y que por lo tanto lo único que pueden hacer nuestras EPs es causar creencias, nunca justificarlas.

No obstante, autores como McDowell ([10]) y Brewer ([1]) han planteado una alternativa que permite reintroducir las EPs dentro del espacio de las razones y recuperar para ellas un papel normativo. La solución ofrecida por ellos en tales textos consistía en sustituir cierta concepción tradicional de experiencia del empirismo por otra según la cual su contenido es *conceptual*. Que su contenido sea conceptual quiere decir que ya a nivel de nuestras EPs se actualizan los mismos conceptos que configuran el

contenido de nuestras CEPs.[1] McDowell está convencido de que, aun asumiendo que las EPs *no* son creencias, si se les atribuye un contenido del mismo tipo podrán ejercer las mismas funciones de justificación que Davidson reservaba exclusivamente a las creencias. De hecho, propone reformular la tesis de Davidson diciendo que «nada puede contar como una razón para sostener una creencia salvo alguna otra cosa que también se encuentre en el espacio de los conceptos.» ([10], pp. 140 y 143). Para Brewer las EPs proporcionan razones para creer porque entiende que su contenido es proposicional –el mismo que el de la(s) proposición(es) con la(s) que caracterizamos esa experiencia perceptual– y en tanto que proposicional puede formar parte de una inferencia de algún tipo en calidad de premisa. De ese modo, ambos adaptan el modelo de relación epistémica entre EPs y CEPs al *modelo de justificación inferencial entre creencias*.

En paralelo a ellos, y siguiendo algunas afirmaciones de Evans ([6]) sobre los contenidos informativos de la percepción, otra serie de pensadores, entre los que aquí destacamos a Peacocke ([11]; [12]), han presentado toda una batería de argumentos que ponen en cuestión ese supuesto carácter conceptual de la percepción, al tiempo que niegan que dicho carácter conceptual constituya una condición necesaria para que puedan justificar CEPs. Argumentos como la mayor riqueza y finura de cualquier contenido perceptual no-conceptual respecto de la(s) proposición(es) con la(s) que podemos caracterizar ese contenido, la cuestión de la percepción en el caso de los animales no humanos y de las etapas prelingüísticas de los humanos, el peligro de caer en una circularidad, etc., alimentan una controversia que todavía hoy en día sigue viva. No obstante, su problema es conseguir una explicación suficientemente plausible de cómo contenidos perceptivos no-conceptuales pueden constituirse como razones o justificaciones de creencias. De hecho, las objeciones de McDowell y Brewer a la tesis no-conceptualista se centran fundamentalmente en este punto. Éstos opinan que un contenido perceptivo, en tanto que razón para justificar una creencia, debe poder ser reconocido por el sujeto perceptor como tal razón, como su propia razón para creer. Esta condición, argumentan, no puede ser satisfecha si el contenido perceptivo no es conceptual, y esto, opinan, hace que las propuestas no-conceptualistas sean incapaces de caracterizar la relación epistémica entre EPs y CEPs como una relación racional.[2]

Debido quizás a esta dificultad, algunos defensores del carácter no-conceptual de la percepción han optado por proponer una forma de entender la relación epistémica entre EPs y CEPs distinta de la justificación en base a razones. Burge ([2]) y Pryor ([13]) hablan de una relación epistémica normativa que, aunque la denominan de manera diferente, podemos considerarla equivalente e identificarla con el nombre adoptado por el primero de ellos, a saber: "legitimación". La relación de legitimación no conlleva, según ellos, que el sujeto haya de considerar sus EPs como sus razones para creer –requisito éste que el conceptualista consideraba imprescindible para que las EPs jueguen un papel normativo–. Burge y Pryor ponen de manifiesto esta idea al afirmar que cuando las CEPs de un sujeto se legitiman a partir de sus EPs se cumplen determinadas normas o reglas epistémicas de las que ese sujeto no tiene que ser consciente ([2], pp. 512 y ss; 521; 547) ni ha de seguir de forma deliberativa ([13], pp. 195 y ss.). A su modo de ver, cuando una EP legitima una determinada CEP está proporcionando una *garantía* distinta al tipo de garantía que proporciona la justificación. En todo caso esa garantía *es inmediata*, pues no requiere de creencias previamente disponibles por parte del sujeto, y *se da en ausencia de razones en contra* ([2], pp. 526 y 546).

Nosotros también proponemos una forma de entender la relación epistémica entre EPs y CEPs diferente de la relación de justificación. En ese sentido nuestra propuesta resulta cercana a la anterior relación de legitimación, toda vez que entendemos igualmente que las EPs no juegan el papel de constituirse en razones para creer. Sin embargo, a diferencia de aquella veremos que para nosotros la relación epistémica entre EPs y CEPs no está completamente desvinculada de cierta relación inferencial que requiere una CEP, lo cual implica que la garantía que una EP proporcione a esa CEP no es inmediata. La relación así entendida la denominamos "sustento epistémico". En nuestra propuesta una EP no es una razón para una CEP, pero puede desencadenar de manera directa un contenido proposicional (y por ello conceptual) que entre en un proceso inferencial abductivo con otros contenidos proposicionales previamente disponibles por el sujeto de la EP, dando lugar a una determinada CEP como conclusión. La CEP resultante, aunque fiable para el sujeto, es falible.

[1] Esta maniobra implica difuminar la línea divisoria entre el espacio lógico de las leyes naturales y el espacio lógico de las razones, lo que podría dar lugar a acusaciones de idealismo. Con el fin de evitarlas McDowell ([10], pp. xviii y ss.) echa mano de la noción de 'segunda naturaleza', aquella que «los seres humanos adquieren al ser adiestrados en las capacidades conceptuales» ([10], p. xx). Su idea es que toda vez que entendamos que por su naturaleza la especie humana se relaciona con su entorno fundamentalmente a través del uso de capacidades conceptuales, no debería resultar difícil concebir nuestras EPs como algo que pertenece al ámbito lógico de las razones sin dejar de pertenecer al ámbito de lo natural. Sin embargo, consideramos que esta vía supone una excesiva hiperintelectualización (echando mano del término empleado por Burge [2]) de la experiencia perceptual humana.

[2] En *Mind and World* McDowell presenta su propuesta conceptualista como el modo de evitar oscilar indefinidamente entre dos extremos que resultan incompatibles con una interpretación normativa cabal del papel de la experiencia perceptual. Uno de esos extremos sería el de un coherentismo puro, representado por Davidson ([5]), que rechaza directamente cualquier papel normativo para las EPs. El otro sería el de una recaída en el mito de lo dado que según él representan las propuestas no-conceptualistas de Evans ([6]) y Peacocke ([11]); En todo caso, el problema reside para McDowell en la adopción de una concepción de experiencia que la excluye del ámbito lógico de las razones.

2 REPRESENTACIONES DE LA MEMORIA ICÓNICA

Empecemos por considerar el carácter no-conceptual, y por ello no-proposicional, de las EPs basándonos en resultados de la psicología de la percepción; aspecto éste que no encontramos en los planteamientos de Burge y Pryor. Fodor ([8], pp. 111 y ss.; [9], pp. 185 y ss.) señala que resultados como los obtenidos por experimentos de tipo Sperling proporcionan evidencia empírica acerca de la existencia de representaciones de la memoria icónica en tanto que representaciones mentales no-conceptuales.

En la versión original los sujetos del experimento eran expuestos a presentaciones taquistoscópicas de una serie de matrices o mosaicos de letras, algunas compuestas de tres filas con cuatro letras por fila, otras de un número mayor. La presentación de cada una de ellas no superaba los 50 ms e iban seguidas siempre de un campo en blanco, tal y como se ilustra en la Figura 1. Proyectarlas mediante un taquistoscopio aseguraba una única fijación ocular en el campo visual por cada presentación, a partir de la cual los participantes debían identificar el mayor número de letras posible. Este planteamiento fue denominado "informe total" y el resultado fue que los participantes sólo lograban recordar entre 4 y 5 letras, con independencia de cuantas (9, 12, o más) configurasen la matriz, aunque curiosamente *afirmaban tener la sensación de haber visto más letras de las que lograban identificar*.

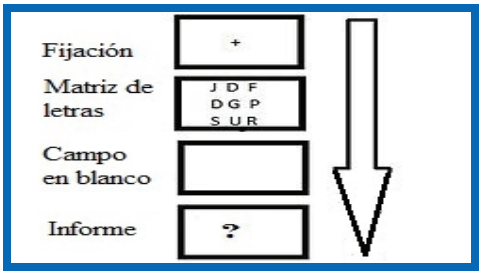


Figura 1: Versión del experimento de Sperling en su formato de informe total.

Para comprobar si tan exiguo rendimiento se debía a la extrema brevedad de las presentaciones se fue variando su duración entre 15 y 500 ms, pero el resultado fue el mismo. Sperling propuso entonces una explicación alternativa sugiriendo que la totalidad del conjunto estimular era sensorialmente captada dejando una *huella de memoria* de muy escasa duración. Esa huella de memoria, o *memoria icónica*, se desvanecería en el breve espacio de tiempo entre el final de la presentación y la producción de la respuesta verbal o identificación, aunque debería ser suficiente para explicar el hecho de que a los sujetos participantes les pareciese haber percibido más letras que las que lograron identificar.

Con el fin de corroborar esta hipótesis de la huella de memoria Sperling ([15]) empleó, en contrapartida al informe total, la llamada "técnica del informe parcial", consistente en requerir de los participantes que identificasen las letras de una sola de las filas de la matriz en función de un determinado tono auditivo, como se muestra la Figura 2. Para ello se hizo corresponder un tono auditivo alto para la fila superior, uno medio para la fila media y uno bajo para la inferior. Los sujetos no sabían a qué fila pertenecerían las letras a identificar hasta que, coincidiendo con el final de la presentación de la matriz, se hacía sonar uno de los tonos elegido al azar. El resultado era que identificaban una media de tres de las cuatro letras de cada fila. Se obtenía así una mejora de rendimiento que parecía ratificar la existencia de la citada huella de memoria. Posteriormente se intentó comprobar su duración media introduciendo en el informe parcial demoras de la señal auditiva con respecto a la desaparición de la matriz. Se constataron mermas de rendimiento proporcionales a dichas demoras, hasta el punto de que cuando la señal se demoraba un segundo, el rendimiento resultaba equiparable al obtenido mediante el informe total, lo cual indicaba que la huella se desvanece en un brevísimo intervalo de tiempo. De hecho, suele aceptarse que su duración media oscilaría entre 500 y 800 ms ([4], p. 252), muy breve pero suficiente para que los sujetos experimenten haber tenido presente la totalidad de la matriz.

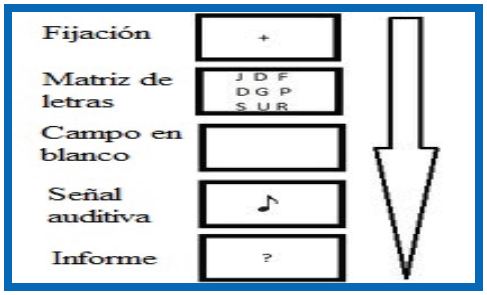


Figura 2: Versión del experimento de Sperling en su formato de informe parcial.

Los resultados de una variante experimental de la técnica de informe parcial son considerados por Fodor ([9], p. 189) para señalar que estas representaciones de la memoria icónica son efectivamente no-conceptuales. A diferencia de lo que sucedía en la versión original, en la que la señal auditiva indicaba una posición (la fila que se debía recordar), esta vez se presentan matrices que combinan letras con números, y las señales auditivas indican unas veces la fila y otras la categoría (números o letras) que se ha de recordar. El resultado es que el rendimiento disminuye notablemente cuando el tono elegido indica que los participantes deben identificar sólo letras o sólo números, y no cualesquiera ítems de la fila correspondiente ([4], pp. 252-253). La introducción de las categorías 'letra' y 'número' no tiene pues una influencia positiva, sino más bien

negativa, sobre el rendimiento que cabría esperar tratándose de un informe parcial. De ello se puede concluir que los contenidos de la memoria icónica son *precategoriales* o se producen con independencia de los conceptos o categorías que posea un sujeto.

En su planteamiento Fodor sitúa estas representaciones no-conceptuales, o *representaciones de la memoria icónica* (RMIs), en etapas tempranas del proceso de percepción, en concreto inmediatamente después de las transducciones. Ello contrasta con el carácter conceptual que reserva para los productos finales de ese proceso: las representaciones de la *experiencia fenoménica* (la experiencia perceptual)[3].

Pese a Fodor, nosotros creemos que existen razones para pensar que las RMIs configuran la propia experiencia perceptual permitiendo caracterizar esta última como no-conceptual. Veamos por qué en el caso de la percepción visual. Nuestra experiencia fenoménica de la percepción visual es la de un flujo continuo. No obstante, una serie de experimentos muestran que en realidad captamos la información visual de una forma *discreta*. En efecto, resulta que la captación de información se produce sólo en los momentos de fijación ocular, en los que el sujeto consigue focalizar su atención en una parte de la escena. Pero estas fijaciones duran brevísimos periodos de tiempo (entre 175 y 500 ms) y cada una de ellas va seguida por un movimiento ocular muy rápido, llamado "sacádico", que si bien sirve para que el sujeto dirija su atención a otra parte de la escena, provoca que durante el mismo no se produzca captación alguna de información (fenómeno llamado "supresión sacádica"). Puesto que entre dos fijaciones oculares consecutivas se produce uno de estos movimientos sacádicos, se genera entonces una *discontinuidad* en la captación de información que contrasta con la mencionada continuidad fenoménica de nuestra experiencia visual. Esta continuidad debe estar asegurada entonces por algún mecanismo que permita integrar todas esas captaciones discontinuas de forma que las experimentemos como un flujo continuo. Pues bien, se ha propuesto la hipótesis, inicialmente formulada por Coltheart ([3]), de que son las RMIs las que constituyen ese elemento integrador. La razón estriba en que una RMI perdura el tiempo suficiente como para cubrir el paso de una fijación ocular a otra a través de un sacádico. Así, secuencias de RMIs relativas a una escena determinada estarían conformando la apariencia o experiencia fenoménica visual de esa escena a modo de continuo y no como serie discontinua y discreta de representaciones.

[3] Este carácter conceptual se debe al hecho de que para Fodor los procesos que se dan en fases más cercanas a la conformación final de la experiencia fenoménica son procesos inferenciales. Se trata eso sí de *inferencias subpersonales*, entre las que incluye las operaciones que dan lugar a constancias perceptuales de forma, tamaño, color, etc. ([8], p. 114; [9], p. 192).

3 SUSTENTO EPISTÉMICO

Para elaborar nuestra propuesta del modo en que las representaciones de la experiencia perceptual, conformadas por esas RMIs no-conceptuales, constituyen un *sustento epistémico* para juicios y creencias perceptuales volvemos de nuevo a Fodor, esta vez retrotrayéndonos a su "Observation Reconsidered" ([7], pp. 40-41). Allí establece una clara distinción entre 'fijación de apariencias' y 'fijación de creencias perceptuales'. La diferencia consiste en que la fijación de apariencias o representaciones fenoménicas, *no* se ve afectada por *todo* el bagaje de creencias disponible por el sujeto, mientras que la fijación de CEPs *sí*. Según Fodor, en la fijación de apariencias como mucho opera un subconjunto de creencias y además de manera autónoma en el módulo que conforma el sistema visual. Se trata por lo tanto de un proceso encapsulado. El resultado de ese proceso, y esto es lo que aquí nos interesa, consiste para Fodor en representaciones *a modo de meras hipótesis* acerca de las fuentes distales de la estimulación. Dichas hipótesis son lo que un sujeto llegaría a creer acerca de las fuentes distales *si en la consiguiente fijación de creencias sólo intervinieran las apariencias o EPs relevantes*. Pero lo que sucede en la fijación de creencias es, según Fodor, que cada una de las EPs del sujeto, en tanto que hipótesis, son sometidas a los procesos centrales para ser evaluadas a la luz de *todo* el bagaje de creencias de ese sujeto. Como resultado de esa evaluación el sujeto puede formarse una o varias creencias acerca de su entorno inmediato.

Al igual que Fodor nosotros también postulamos este tipo de hipótesis; pero con la diferencia de que no se corresponderían con las EPs mismas, dado el carácter no-conceptual que atribuimos a estas últimas. Más bien, entendemos que tales hipótesis se obtienen directamente *a partir de* las EPs *en función del aparato conceptual disponible por el sujeto de esas experiencias, y como resultado de atender y seleccionar determinados aspectos de su contenido informativo*. Así, aunque el contenido de una EP no sea conceptual, el de las hipótesis asociadas directamente a ella sí lo es. Las hipótesis contempladas por un sujeto en relación con cierta EP se someterían, como ya planteaba Fodor, a los procesos centrales para ser evaluadas a la luz de todo el bagaje de conocimientos y creencias disponibles por el sujeto, fijando así una determinada CEP.

Permítasenos describir con más detalle cómo concebimos el proceso. Un sujeto S tiene cierta EP (o una secuencia de EPs) de una escena E. Esa(s) EP(s) puede desencadenar en S ciertas hipótesis (al menos una) que podrían tomarse como posibles descripciones de E. Llamémosles Hipótesis Perceptuales Directas [HPDs]. Estas HPDs se desencadenan como resultado de: (i) atender y seleccionar determinados aspectos del contenido informativo de la(s) EP(s); (ii) en función del aparato conceptual del que S dispone; y (iii) en función del aprendizaje perceptual de S en relación con EPs previas que sean similares para S.

La(s) HPD(s) desencadenada(s) por aquella(s) EP(s) de S se someterían, como ya planteaba Fodor, a los procesos centrales para ser evaluadas a la luz de todo el bagaje de creencias disponibles por parte de S, fijando así una(s) determinada(s) CEP(s) de S. Si la(s) EP(s) sólo desencadena(n) una HPD, ésta será o no adoptada por S como CEP suya dependiendo de si entra o no en colisión con el bagaje de fondo. Si desencadena varias HPDs, de entre ellas el sujeto adoptará como su(s) CEP(s) alguna(s) de aquellas HPDs que no entra(n) en colisión consciente con las creencias ya asumidas por ese sujeto. Si todas las HPDs desencadenadas inicialmente entran en colisión consciente con las creencias asumidas por S, éste se ve impelido a contemplar alguna otra alternativa que pueda adoptar como creencia acerca de la EP en cuestión. De este modo, el bagaje de creencias de S puede dar lugar a desarrollar otra(s) hipótesis perceptual(es) no-directa(s) [HPND(s)] alternativa(s) a la(s) HPD(s), tal que el contenido de la CEP fijada sea el contenido de esa (o una de esas) hipótesis alternativa(s). Claro que, normalmente, y a falta de variaciones en las creencias relevantes asumidas por un sujeto, la hipótesis que éste puede contemplar y adoptar como CEP vendrá prefijada por el aprendizaje a partir de EPs similares previas. No obstante, la posibilidad de que la creencia adoptada acerca de una EP no corresponda a una HPD, sino a una HPND desarrollada conforme a las creencias ya asumidas, no conlleva que la propia EP pueda variar en función de las creencias asumidas.

Ilustremos esto con un ejemplo. Supongamos un sujeto S ante *un racimo de uvas de cera* indiferenciable a primera vista para S de un auténtico racimo de uvas.

Figura 3. Racimo de uvas de cera.

En este caso S tendría la misma EP (no conceptual) tanto si (i) fija la CEP de que 'es un racimo de uvas' como si (ii) fija la CEP de que 'es un racimo de uvas de cera' una vez que ha verificado, por ejemplo a través del tacto, que no se trata de un racimo de uvas auténtico. En (i), cuando S fija la CEP de que 'es un racimo de uvas', su EP visual habría propiciado al menos la HPD de que 'es un racimo de uvas'. En (ii), cuando S fija la creencia de que 'es un racimo de uvas de cera', cabrían las siguientes alternativas:

a) su EP visual desencadena dos HPDs: 'es un racimo de uvas' y 'es un racimo de uvas de cera';
b) su EP visual desencadena simplemente la HPD 'es un racimo de uvas' y S obtiene gracias a su bagaje de creencias la HPND 'es un racimo de uvas de cera';
c) su EP visual simplemente desencadena la HPD 'es un racimo de uvas de cera' gracias al aprendizaje visual previo que S es capaz de poner en juego.

En cualquiera de los casos la fijación de la creencia requiere que mediante la participación de los procesos centrales S elija la hipótesis más apropiada a la luz de su bagaje de creencias.

Este planteamiento permite entender también los casos de ilusión óptica. Pensemos por ejemplo en la ilusión de Müller-Lyer.

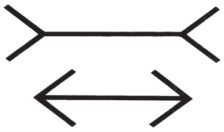


Figura 4: Ilusión de Müller-Lyer.

Nuestra propuesta proporciona un marco adecuado para explicar de forma integrada por qué cuando S percibe las dos líneas paralelas:

a) persiste la ilusión –es decir, la EP (o secuencia de EPs)– aun cuando S conoce que se trata de una ilusión;
b) S contempla a modo de hipótesis la consideración conceptual ilusoria de que una de las líneas es más larga que otra;
c) S fija la creencia (correcta) de que las líneas son de la misma longitud a partir de una EP que le muestra lo contrario.

4 CONCLUSIÓN

Según lo señalado, podemos decir que *una EP (o secuencia de EPs) de un sujeto S acerca de una escena E es el* sustento epistémico *de una determinada CEP de S acerca de E en la medida en que el contenido de esa CEP (falible) es el contenido de la mejor hipótesis a disposición de S, entre sus HPDs y (de ser el caso) sus HPNDs correspondientes a esa EP (o secuencia de EPs), para dar cuenta descriptivamente de E*. La fijación de CEPs se alcanza mediante una suerte de *inferencia a la mejor explicación* o de inferencia a lo que mejor da cuenta descriptivamente de cómo son o acontecen las cosas en el entorno de S, dado el bagaje de creencias relevantes asumidas por S. El sentido en el que ahora hablamos de que una EP *sustenta* una CEP no se corresponde con nada de lo que en la tradición empirista se ha entendido por justificación de CEPs. Una EP (o una secuencia de EPs) mantiene una relación epistémica normativa de sustento con una CEP debido a que una (o varias) HPD(s), desencadenada(s) por esa(s) EP(s), es (son) sometida(s) a evaluación a la luz del

bagaje de creencias asumidas, y de manera específica con el bagaje relevante a esa(s) HPD(s).

¿Cuál es la peculiaridad de nuestra propuesta? En relación al debate entre las posiciones conceptualistas de McDowell ([10]) y Brewer ([1]) y las no-conceptualistas de Evans ([6]) y Peacocke ([11]; [12]) ha quedado claro que a diferencia de las primeras lo que planteamos *no se ajusta propiamente al modelo de justificación inferencial entre creencias*. El rol que atribuimos a las EPs no implica entender su contenido como una suerte de premisa para una suerte de argumento o inferencia. Pero nuestra propuesta, aun siendo no-conceptualista, se diferencia también de las segundas si tenemos en cuenta que también en ellas se ha considerado que el papel epistémico de las EPs estriba en que *en sí mismas* constituyen las *razones* del sujeto para creer, si bien negando que el carácter conceptual de las EPs sea un requisito para ello. A nuestro modo de ver las EPs no juegan el papel de constituirse en razones para creer sino el de permitir, o contribuir a, el establecimiento de razones para creer.

Pero también existen diferencias respecto a la relación de legitimación que contemplan Burge y Pryor. Lo que nosotros entendemos por 'sustentar epistémicamente' no implica una garantía inmediata, tal y como dan a entender que proporciona su legitimación. Ha de tenerse en cuenta que para nosotros el sustento no queda desvinculado de una relación inferencial, la que se da desde las HPDs y las HPNDs, dado el bagaje de creencias, para concluir una CEP. Así pues, la garantía que proporciona la sustentación epistémica no es inmediata, dado que el bagaje de fondo del sujeto *siempre* está involucrado en la mencionada relación inferencial. Es cierto que Burge y Pryor hacen jugar un papel al bagaje de creencias en la relación de legitimación que postulan, pero es meramente el de anular tal legitimación cuando hay razones del bagaje en contra. Finalmente, no queda claro si conforme las propuestas de Burge y Pryor las EPs ilusorias pueden proporcionar legitimación. En la nuestra sí pueden sustentar. Recuérdese lo dicho acerca de la ilusión de Müller-Lyer. Téngase en cuenta que dada esa experiencia ilusoria, incluso si la creencia fijada fuera incorrecta (p.e., "las líneas son de diferente longitud"), habría sustentación de esa creencia a la luz del bagaje de creencias disponibles del sujeto (seguramente por falta de creencias que permitan descartar la HPD que desencadene la experiencia ilusoria).

Agradecimientos

Este trabajo participa de los proyectos de investigación FFI2009-08828, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España y por FEDER, y PTDC/FIL-FIL/109882/2009, financiado por la Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior de Portugal).

Referencias

[1] B. Brewer: *Perception and Reason*. Oxford, Oxford U.P., 1999.

[2] T. Burge: Perceptual Entitlement. *Philosophy and Phenomenological Research* 67 (3), pp. 503-548, 2003.

[3] M. Coltheart: Ecological Necessity of Iconic Memory. *Behavioral and Brain Sciences* 6, pp. 17-18, 1983.

[4] A. Crespo: *Cognición Humana. Mente, Ordenadores y Neuronas*. Madrid, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, 2006.

[5] D. Davidson: A Coherence Theory of Truth and Knowledge. En: Henrich, D. (Eds.). *Kant oder Hegel?*. Stuttgart: Klett-Cotta, 1983 [vers. util. en: E. Sosa, S. Kim, J. Fantl y M. McGrath (Eds.). *Epistemology. An Antology*. Malden (Mass.)/Oxford, Blackwell, pp. 124-133), 2000].

[6] G. Evans: *The Varieties of Reference*. Oxford, Clarendon Press. 1982.

[7] J. A. Fodor: Observation Reconsidered. *Philosophy of Science* 51, pp. 23-43, 1984

[8] J. A. Fodor: The Revenge of the Given. En: B. P. McLaughlin y J. Cohen (Eds.). *Contemporary Debates in Philosophy of Mind*. Malden (Mass.)/Oxford/Carlton (Victoria), Blackwell, pp. 105-116, 2007.

[9] J. A. Fodor: *LOT2.The Language of Thought Revisited*. Oxford, Oxford U.P., 2008.

[10] J. McDowell: *Mind and World*. Cambridge (Mass), Harvard U. P., 1994.

[11] C. Peacocke: *A Study of Concepts*. Cambridge (Mass.), MIT Press, 1992

[12] C. Peacocke: Does Perception Have a Nonconceptual Content?. *Journal of Philosophy* 98, pp. 239-264, 2001.

[13] J. Pryor: There is Immediate Justification. En: M. Steup y E. Sosa (Eds.). *Contemporary Debates in Epistemology*. Malden, MA: Blackwell, pp. 181-202, 2005.

[14] W. Sellars: Empiricism and the Philosophy of Mind. En: *Science, Perception and Reality*. London, Routledge and Kegan Paul, 1963.

[15] G. Sperling: The Information Available in Brief Visual Presentations. *Psychological Monographs: General and Applied* 74 (11, No. 498), pp. 1-29, 1960.

RAZONANDO CON PALABRAS: UNA PRIMERA APROXIMACIÓN

Clemente Rubio Manzano[1], **Pascual Julián Iranzo**[2]

[1]*Departamento de Sistemas de Información, Universidad del Bío-Bío, Chile*, clrubio@ubiobio.cl
[2]*Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información, Universidad de Castilla-La Mancha*, Pascual.Julian@uclm.es

Resumen

El objetivo de este trabajo es proponer un modelo de razonamiento basado en las relaciones semánticas entre las palabras e incorporarlo al mecanismo de inferencia de un lenguaje de programación lógica. Este modelo se integra en un marco de programación lógica borrosa y se implementa en el sistema Bousi∼Prolog con la ayuda de WordNet. Todo este proceso es transparente al programador y el razonamiento con palabras es automático. La semántica léxica entre los símbolos nos proporciona la habilidad de razonar con palabras y convierte la representación del conocimiento en un proceso más natural y menos complejo.

Palabras Clave: Razonar con palabras, Programación Lógica, Unificación Débil, Prolog, WordNet.

1 Introducción

Cuando los símbolos de un lenguaje formal se interpretan como términos lingüísticos o palabras [10] entonces es posible establecer una correspondencia entre el lenguaje formal y el lenguaje natural, en el sentido que los símbolos adquieren el significado de las palabras a las cuales están representando. Como consecuencia las propiedades o fenómenos que tienen lugar entre ellas se extrapolan a los símbolos (relaciones semánticas, vaguedad, imprecisión o ambigüedad). En este contexto, la lógica clásica cuenta con limitaciones a la hora de tratar con estos fenómenos debido, principalmente, a sus mecanismos de inferencia precisos. Por tanto sería interesante extender o adaptar estos mecanismos a los nuevos requerimientos. El siguiente ejemplo muestra este hecho.

Ejemplo 1 *Supongamos que queremos formalizar la siguiente regla de razonamiento de sentido común: "si estás en tu coche y conduces desde casa hasta el aeropuerto, entonces estarás en el aeropuerto". Una posible formalización, dejando de lado ciertas consideraciones temporales, sería:*

$$\texttt{at}(\texttt{I},\texttt{car}) \wedge \texttt{driving}(\texttt{I},\texttt{home},\texttt{airport}) \rightarrow \texttt{at}(\texttt{I},\texttt{airport}).$$

Para lograr que esta formalización trabaje correctamente con las propiedades y fenómenos mencionados anteriormente, se requiere una gran cantidad de elementos adicionales. Por ejemplo, definir con precisión los términos que aparecen en la sentencia (`car, driving, home, airport`*) y sus interrelaciones, lo que hace que el proceso de representación de conocimiento sea una tarea muy compleja cuando el objetivo es obtener un razonamiento de sentido común.*

Por otro lado, mientras que el razonamiento lógico es deductivo, el razonamiento humano es mayormente inductivo, abductivo y empírico; además los conceptos, la generalización, las categorías basadas en la experiencia y las percepciones juegan un papel central. La lógica cuenta con un lenguaje expresivo donde no es fácil modelar esto y donde la simulación del razonamiento humano, que es mayormente inductivo y altamente asociativo, es un proceso complejo.

Tales consideraciones nos conducen a sopesar el empleo de las relaciones semánticas (que se dan en el lenguaje natural) en un marco de programación lógica con el objetivo de mejorar sus mecanismos de representación y de inferencia. Además, la cuantificación de la similitud semántica entre los símbolos nos proporciona la habilidad de razonar sobre ellos y convierte la representación del conocimiento en un proceso más natural y menos complejo. Mientras que la lógica es una representación sintética, creando y manipulando símbolos en un mundo cerrado, la lógica enriquecida con las relaciones semánticas del lenguaje natural es una representación empírica, conjugando símbolos (representado conceptos/palabras) que ya han sido definidas y relacionadas en el lenguaje humano [5].

En este trabajo presentamos la primera aproximación tendente a resolver este tipo de problemas. Consiste en diseñar un modelo de razonamiento basado en las relaciones semánticas entre las palabras e incorporarlo al mecanismo de inferencia de un lenguaje de programación lógica borrosa. En este nuevo marco, las relaciones semánticas se manejan mediante relaciones borrosas. Conseguimos un lenguaje lógico borroso que incorpora las relaciones semánticas mediante un proceso de unificación débil. Este modelo se implementa en el sistema Bousi∼Prolog con la ayuda de WordNet y WordNet::Similarity [1].

El resto del trabajo se estructura como sigue. En primer lugar, la sección 2 introduce conceptos generales sobre el lenguaje natural y los tesauros. Note que estamos interesados en la semántica léxica y los tesauros como base de conocimiento, tratando, por tanto, una pequeña parte de la teoría del lenguaje natural. Posteriormente, en la sección 3 proponemos un modelo de razonamiento basado en las relaciones semánticas entre las palabras mediante la definición de un conjunto de reglas de inferencia que se apoyan en los conceptos de sinonimia, antonimia e hiperonimia y que incorporamos a un marco de programación lógica borrosa. La sección 4 describe la incorporación de WordNet al sistema Bousi∼Prolog y la implementación del modelo de razonamiento presentado en la sección anterior. A continuación, la sección 5 muestra los posibles problemas que nos podemos encontrar al razonar con palabras. Finalmente, las conclusiones y las líneas de trabajo futuro son expuestas en la sección 7.

2 El Lenguaje Natural y los Tesauros

Aunque los lenguajes naturales constan de otros muchos componentes aparte de una sintaxis y una semántica (como por ejemplo, fonética, morfología, pragmática, etc.), aquí nos ocuparemos de los primeros. La sintaxis se encarga de establecer las normas por las cuales se construyen las palabras y las oraciones. La semántica estudia el significado de estas construcciones a dos niveles: semántica léxica o semántica de las palabras y semántica de las oraciones. En esta primera aproximación fijaremos nuestra atención en la semántica léxica.

Una parte importante en la semántica léxica es el estudio de las relaciones existentes entre las palabras debido a que el significado de una palabra depende en gran medida de sus relaciones semánticas con las demás. Las principales relaciones son: (a) **Sinonimia**, que relaciona palabras con significado similar en un contexto determinado. Así que dos palabras son sinónimas cuando tienen un mismo significado o un significado parecido. (b) **Antonimia**, son pares de palabras opuestas en su significado. Las palabras podrían tener diferentes antónimos, dependiendo del significado, por ejemplo "long" y "tall" son antónimos de "short". Hay tres tipos de antónimos. **Antónimos graduables** que representan puntos sobre una escala que son aproximadamente iguales en distancia (un poco-completamente, caliente-frío, feliz-triste o temprano-tarde); **Antónimos Complementarios** son pares de palabras que expresan significado opuesto total (mortal-inmortal, encendido-apagado, vivo-muerto); y **Antónimos Racionales** que son pares de antónimos en los cuales una palabra describe una relación entre dos objetos y los otros describen la relación inversa (padre-hijo, profesor-alumno, comprar-vender). (c) **Hiperonimia**, una palabra A es un hiperónimo de otra palabra B si B es una clase de A. (d) **Hiponimia** es lo opuesto de la hiperonimia. Un hipónimo es una palabra cuyo significado esta incluido en la de otra palabra, su hiperónimo. Además de las mencionadas anteriormente existen otras relaciones semánticas: **Polisemia**, **Homonomia**, la **Meronomia**, etc.

Una forma de obtener las relaciones semánticas entre las palabras, en un determinado contexto, son los tesauros. Un tesauro es un vocabulario (términos y descriptores) con enlaces hacia términos sinónimos, equivalentes, genéricos, específicos o relacionados. Un tesauro puede ser general y proceder del lenguaje natural (WordNet [1] o ConceptNet [5], en inglés, o FDSA [7], en español) o especializado y proceder de un dominio de conocimiento especializado (Eric Thesaurus of Descriptors, Art and Architecture Thesaurus Getty Found, Medical Subject Heading, etc). En este trabajo estamos interesados en los tesauros generales digitales para emplearlos como base de conocimiento del lenguaje natural a partir de la cual obtendremos las relaciones semánticas que definen el significado de las palabras. En particular haremos uso de WordNet que puede definirse como una base de datos léxica del idioma inglés donde las palabras (separadas en nombres, verbos, adjetivos y adverbios) se enlazan mediante relaciones semánticas.

3 Razonando con palabras

En esta sección presentamos un modelo de razonamiento basado en las relaciones semánticas (entre las palabras) y lo incorporaremos al mecanismo de resolución débil de un lenguaje de programación lógica borrosa. Este mecanismo operacional se apoya en dos conceptos esenciales: el de *ecuación de proximidad* y el de *unificación débil*. Las ecuaciones de proximidad sirven para modelar relaciones de similitud y proximidad y, en general, relaciones difusas. Desde un punto de vista sintáctico, una ecuación de proximidad $a \sim b = \alpha$ define la entrada $\mathscr{R}(a,b) = \alpha$ de una relación $\mathscr{R}$ (afirmando que a está relacionado con b con grado $\alpha \in [0,1]$). Informalmente, la unificación débil establece que dos términos $f(t_1,\ldots,t_n)$ y $g(s_1,\ldots,s_n)$ unifican si los símbolos f y g son similares con un cierto grado y sus argumentos t_i y s_i también unifican débilmente. El siguiente ejemplo muestra su funcionamiento de forma práctica.

[1] Por simplicidad cuando hablamos de WordNet incluimos también a WordNet::Similarity

Ejemplo 2 *Supongamos una base de datos deductiva que almacena información sobre personas y sus preferencias para enseñar en un área.*

```
%% PROXIMITY EQUATIONS      %% FACTS
physics ~ math = 0.8.       likes_teaching(john,physics).
physics ~ chemistry = 0.8.  likes_teaching(mary,chemistry).
chemistry ~ math = 0.6.     has_degree(john,physics).
                            has_degree(mary,chemistry).
%% RULES
can_teach(X,M):-has_degree(X, M), likes_teaching(X, M).
```

En Prolog, si preguntamos por las personas que pueden enseñar matemáticas, "`?-can_teach(X,math)`"*, el sistema devuelve un resultado negativo que no coincide con lo que el sentido común de un experto en la materia podría sugerir. Sin embargo* Bousi∼Prolog *consigue obtener las respuestas* "`X=john with 0.8`" *y* "`X=mary with 0.6`"*. Ya que hemos especificado que* `physics` *es similar a* `math`*, con grado 0.8, estos dos términos pueden unificar débilmente con grado de aproximación 0.8, conduciendo a una refutación. De forma similar para los términos* `physics` *y* `chemistry`*.*

Como se ha mostrado en el ejemplo, la programación lógica basada en similitud permite establecer y cuantificar la relación entre dos símbolos. Por otra parte, cuando los símbolos se interpretan como palabras se podrá modelar las relaciones semánticas entre ellos a partir de los datos obtenidos de un tesauro $\mathscr{T}$. Una palabra $w_1 \in \mathscr{T}$ se relaciona con otra palabra $w_2 \in \mathscr{T}$ con un grado α a través de una relación semántica (de sinonimia, antonimia o hiperonimia) obtenida de $\mathscr{T}$, lo que representaremos mediante una ecuación de proximidad $w_1 \sim w_2 = \alpha$ en el lenguaje Bousi∼Prolog. Así, las palabras y sus relaciones pasan a formar parte del alfabeto del lenguaje de primer orden e intervienen en el proceso de inferencia de forma natural.

Esto requiere de una regla de inferencia basada en la relación semántica empleada en la obtención del conjunto de ecuaciones de proximidad entre las palabras. Llamaremos *programa* Π a un conjunto de cláusulas de Horn de primer orden en el cual aparece un conjunto de símbolos que interpretamos como palabras. Este programa tiene asociado un diccionario que llamaremos vocabulario de Π y que está formado por todos aquellos símbolos (de predicado, función o constante) presentes en el programa y que se encuentran definidos también en un tesauro $\mathscr{T}$.

Definición 1 (Vocabulario de un programa Π) *Dado un programa Π. El vocabulario de Π denotado por V_Π son todos los símbolos de predicado, función o constante del programa.*

Definición 2 (Vocabulario de Π y un tesauro $\mathscr{T}$) *Dado un programa Π y un tesauro $\mathscr{T}$. El vocabulario de Π y $\mathscr{T}$ denotado por $\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$ son todos los símbolos de predicado, función o constante del programa de Π que son palabras en $\mathscr{T}$. Esto es, los símbolos que se interpretan como palabras de un tesauro $\mathscr{T}$.*

Ejemplo 3 *Para el programa, Π, del Ejemplo 1 y un tesauro del lenguaje inglés $\mathscr{T}$ como WordNet. El vocabulario que se obtiene es: $\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T} = \{at, car, home, airport, driving\}$*

Ahora, para cada uno de los elementos de $\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$ obtendremos las relaciones semánticas (sinónimos, antónimos e hiperónimos) asociadas a ellas haciendo uso del tesauro $\mathscr{T}$.

3.1 Razonando con sinonimia

El razonamiento con sinonimia consiste en emplear esta relación semántica para inferir. Se requiere obtener reglas de inferencia basadas en esta propiedad.

El cálculo deductivo basado en sinonimia tiene dos reglas. La regla de inferencia directa basada en sinonimia que establece que si tengo A podré inferir B siempre y cuando A y B sean sinónimos; y una adaptación del modus ponens que establece que si tengo A y $B \rightarrow C$ podré inferir C siempre y cuando A y B sean sinónimos. Esto se establece formalmente en las siguientes definiciones:

Definición 3 (Inferencia basada en sinonimia) *La regla de inferencia directa basada en sinonimia afirma que de A se puede inferir como consecuencia inmediata B si y sólo si A es sinónimo de B.*

Definición 4 (Modus Ponens basado en Sinonimia) *El modus ponens basado en sinonimia establece que de A y $B \rightarrow C$ se puede inferir como consecuencia inmediata C si y sólo si A es sinónimo de B.*

Para simular este razonamiento en nuestro marco de trabajo tenemos que calcular los sinónimos para cada uno de los elementos del vocabulario de un programa Π. Dado un programa Π, un tesauro $\mathscr{T}$ y su vocabulario asociado $\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$, entonces para todo $w \in \mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$, el conjunto de sinónimos de w extraído de $\mathscr{T}$ se denota como $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}}(w) = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Ejemplo 4 *Dado el programa del Ejemplo 1, el tesauro WordNet, el vocabulario $\mathscr{V}_\Pi^{WordNet} = \{$ thinking, at, car, home, airport, driving $\}$. Es posible obtener el conjunto de sinónimos para cada elemento del vocabulario: $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^{WordNet}}(thinking) = \{$ rational, reasoning, $\ldots\}$; $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^{WordNet}}(at) = \{$ helium, $\ldots\}$; $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^{WordNet}}(car) = \{$ sedan, bike, motorcar $\ldots\}$; $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^{WordNet}}(home) = \{$ home $\}$; $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^{WordNet}}(airport) = \{$ airdrome, heliport, aerodrome$\ldots\}$; $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^{WordNet}}(driving) = \{$ dynamic, impulsive, energic, $\ldots\}$*

Una vez construido el vocabulario de sinónimos se crean las ecuaciones de proximidad (ecuaciones de sinonimia, en este caso) a partir del vocabulario del programa y su conjunto de sinónimos asociado.

Definición 5 (Ecuaciones de Sinonimia para Π) *Dado un programa Π, un tesauro $\mathscr{T}$ y su vocabulario asociado $V_\Pi^\mathscr{T}$. Entonces para todo $w \in \mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$ y sus sinónimos*

$\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}}(w) = \{s_1,\ldots,s_n\}$ se crea una entrada por cada sinónimo tal que $w \sim s_i = \alpha_i$, siendo α_i el correspondiente grado de aproximación.

Ejemplo 5 *Sea un programa $\Pi = \{$ loves(a,b) $\}$, el tesauro WordNet y $\mathscr{V}_\Pi^{WordNet} = \{loves\}$ el vocabulario del programa y el tesauro. Obtenemos los sinónimos del vocabulario, esto es, $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^{WordNet}}(loves) = \{$ romance $\}$. Entonces se crea las ecuaciones de sinonimia "loves $\sim$ romance $= 1.0$". Por tanto, se podría preguntar si "a" sueña con "b", para ello se lanzaría la pregunta "?.-romance(a,b)", el sistema respondería "Yes" ya que "a" ama a "b" y por deducción basada en sinonimia también lo sueña.*

3.2 Razonando con Antonimia

El razonamiento con antonimia consiste en emplear esta relación para conseguir un tipo de razonamiento basado en ella. Siguiendo a [9], la antonimia es un fenómeno del lenguaje que involucra un par de palabras (P,Q) con algunas propiedades importantes [2]: (a) Teniendo el par (P,Q) entonces P es un antónimo de Q y Q es un antónimo de P i.e. $P = aQ$ y $Q = aP$; (b) Para cualquier objeto x se cumple que "Si x es aP entonces no es x es P", pero no se cumple que "Si x no es P entonces x es aP". Por ejemplo, si el bote está vacío significa que no está lleno pero, si el bote no está lleno, no significa que esté vacío i.e. aP implica Not-P, pero Not-P no implica aP (salvo alguna excepción).

Según estás dos propiedades, podríamos establecer dos reglas. La regla de inferencia directa basada en antonimia que establece que si tengo A podré inferir cualquier noB si A y B son antónimos, y una adaptación del modus tolens que establece que si tengo A y $B \rightarrow C$ podré inferir $notB$ siempre y cuando A y C sean antónimos. Esto se establece formalmente en las siguientes definiciones:

Definición 6 (Inferencia basada en Antonimia) *La regla de inferencia directa basada en antonimia establece que de A se puede inferir como consecuencia inmediata noB si y sólo si A es antónimo de B.*

Definición 7 (Modus Tolens basado en Antonimia) *El modus tolens basado en antonimia establece que de A y $B \rightarrow C$ se puede inferir como consecuencia inmediata notB si y sólo si A es antónimo de C.*

Para llevar este tipo de razonamiento a nuestro marco vamos a manejar la antonimia como una sinonimia de conceptos opuestos. En este caso si *"a"* es antónimo de *"b"* tendremos que *"a"* es sinónimo de *"not#b"* i.e. "b" es lo opuesto de *"a"*. Por ejemplo, si "cold" es antónimo de "hot" entonces "cold" es sinónimo de "not#hot". Aquí es necesario emplear un modificador de negación basado en antonimia "not#" que no debe confundirse con el operador lógico "not" y que proporciona información sobre los conceptos que son antónimos.

Procedemos de forma similar al caso de la sinonimia calculando, en este caso, los antónimos para cada uno de los elementos que están en $\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}$. Dado un programa Π, un tesauro $\mathscr{T}$ y su vocabulario asociado $\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}$, entonces para todo $w \in \mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}$, el conjunto de antónimos de w extraídos de $\mathscr{T}$ se denota como $\mathscr{A}_{\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}}(w) = \{a_1,\ldots,a_n\}$.

Ejemplo 6 *Dado el programa del Ejemplo 1, el tesauro WordNet y el vocabulario $\mathscr{V}_\Pi^{WordNet} = \{$at, car, home, airport, driving $\}$. Es posible obtener el conjunto de antónimos para cada uno de los elementos del vocabulario: $\mathscr{A}_{\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}}(at) = \{\}$; $\mathscr{A}_{\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}}(car) = \{\}$; $\mathscr{A}_{\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}}(home) = \{away\}$; $\mathscr{A}_{\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}}(airport) = \{\}$; $\mathscr{A}_{\mathscr{V}_\Pi^{\mathscr{T}}}(driving) = \{attract\}$*

Una vez construido el vocabulario de antónimos se crean las ecuaciones de proximidad que modelan la antonimia para ese problema.

Definición 8 (Ecuaciones de Antonimia para Π) *Dado un programa Π, un tesauro $\mathscr{T}$ y su vocabulario asociado $V_\Pi^{\mathscr{T}}$. Entonces, para todo $w \equiv not\#u$, con $u \in \Pi$, y los antónimos de u, $\mathscr{A}_{\mathscr{V}_\Pi}(u) = \{a_1,\ldots,a_n\}$, se crea una entrada para cada antónimo tal que $not\#u \sim a_i = 1.0$.*

Ejemplo 7 *Sea un programa $\Pi = \{$ bottle(coke,full). drink(X)$\leftarrow$ bottle(X,not#empty).$\}$, el tesauro WordNet, $\mathscr{V}_\Pi^{WordNet} = \{bottle, coke, full, drink, empty\}$ y $\mathscr{A}_{\mathscr{T}}(empty) = \{full\}$ (por simplicidad sólo consideramos "full"). Entonces se obtiene la ecuación de antonimia $not\#empty \sim full = 1.0$. Por tanto, se podría preguntar si beberá o no el bote "?.-drink(X)", a lo que el sistema respondería que "Yes" con "X=coke".*

3.3 Razonando con Hiperonimia

El razonamiento con hiperonimia consiste en emplear la hiperonimia para conseguir un tipo de razonamiento basado en ella. Esto se formaliza en las siguientes definiciones.

Definición 9 (Inferencia basada en Hiperonimia) *La regla de inferencia directa basada en hiperonimia establece que de A se puede inferir como consecuencia inmediata B si y sólo si B es hiperónimo de A.*

Definición 10 (Modus Ponens basado en Hiperonimia) *El modus ponens basado en hiperonimia establece que de A y $B \rightarrow C$ se puede inferir como consecuencia inmediata C si y sólo si A es hipónimo de B (es decir, B es hiperónimo de A).*

Procedemos de forma similar al caso de la sinonimia y la antonimia calculando en este caso los hiperónimos para cada uno de los elementos del vocabulario de un programa

[2] Nosotros sólo enunciamos dos de ellas, las necesarias para definir una regla de inferencia basada en antonimia, para mayor información ver [9]

Π. Dado un programa Π, un tesauro $\mathscr{T}$ y su vocabulario asociado $\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$, entonces para todo $w \in \mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$, el conjunto de hiperónimos de w extraídos de $\mathscr{T}$, se denota como $\mathscr{H}_{\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}}(w) = \{h_1, \ldots, h_n\}$.

Una vez construido el vocabulario de hiperónimos se crean las ecuaciones de proximidad, en este caso ecuaciones de hiperonimia.

Definición 11 (Ecuaciones de Hiperonimia para Π) *Dado un programa Π, un tesauro $\mathscr{T}$ y su vocabulario asociado $V_\Pi^\mathscr{T}$. Entonces dado para todo $w \in V_\Pi^\mathscr{T}$ y sus hiperónimos $\mathscr{H}_{\mathscr{V}_\Pi}(w) = \{h_1, \ldots, h_n\}$ se crea una entrada para cada hiperónimo tal que $w \sim h_i = 1.0$*

Ejemplo 8 *Supongamos que vamos a una exposición y que queremos modelar el conocimiento que alguien nos proporciona expresado en lenguaje natural, por ejemplo: "había cuadros de jilgueros y gorriones". En este caso particular, si una persona conoce que "jilguero" y "gorrión" son "pájaros" podría llegar a inducir que la exposición era sobre pájaros. Supongamos un programa $\Pi = \{$ picture(a,goldfinch), picture(b,sparrow)$\}$, el tesauro WordNet y sea $\mathscr{V}_\Pi^{WordNet} = \{picture, goldfinch, sparrow\}$, con $\mathscr{H}_{WordNet}(picture) = \{show\}$, $\mathscr{H}_{WordNet}(goldfinch) = \{bird\}$, $\mathscr{H}_\mathscr{T}(goldfinch) = \{bird\}$. Entonces se podría preguntar por los cuadros que son de pájaros* "?- picture(X,bird)", *el sistema me respondería* "X=a" *and* "X=b".

4 Implementación del modelo de razonamiento en Bousi∼Prolog

En esta sección se detalla la incorporación del modelo de razonamiento explicado en la sección anterior en el sistema Bousi∼Prolog [2, 3, 4]. Para obtener las relaciones semánticas haremos uso de WordNet. Comenzamos primero con los aspectos sintácticos para, posteriormente, describir las diferentes fases de implementación y las estructuras de datos que se generan para facilitar el razonamiento con palabras.

4.1 Sintaxis

Todos los tipos de lenguajes de programación deben proporcionar instrucciones para declarar y definir sus estructura de datos. El lenguaje Bousi∼Prolog hace uso de una directiva para declarar y conectarse a un tesauro $\mathscr{T}$. La sintaxis concreta de esta directiva es: "`:-thesaurus(Nombre_Tesauro,[SR_1,...,SR_N])).`" donde, `Nombre_Tesauro` es el nombre del tesauro y `[SR_1,...,SR_N]]` es un conjunto (eventualmente vacío) de relaciones semánticas que admite dicho tesauro.

Ejemplo 9 *La siguiente directiva declara y se conecta al tesauro WordNet y hará uso de las relaciones semánticas de sinonimia, antonimia e hiperonimia en el razonamiento:* "`:-thesaurus(wordnet,[synonymy,antonymy,hypernymy]).`"

4.2 Compilando relaciones semánticas

Una de las características más importantes del sistema Bousi∼Prolog es su habilidad de compilar toda la información relacionada con el tesauro y definida en un programa. En esta sección se detallan las diferentes fases de la compilación. En el Análisis Sintáctico se verifica si existen errores sintácticos en la directiva y el programa. Al mismo tiempo, se construye el árbol sintáctico a partir del cual se genera el código intermedio. De forma paralela, la directiva "`thesaurus`" crea la conexión con el tesauro y produce la generación del vocabulario para el programa Π y el tesauro $\mathscr{T}$. A continuación, se pasa a la fase de Generación de las Relaciones Borrosas que genera las ecuaciones de proximidad a partir de las relaciones semánticas indicadas en los argumentos. Esto es formalizado por el Algoritmo 1 cuyo objetivo es compilar toda la información semántica asociada a un programana Π y un tesauro $\mathscr{T}$.

Algoritmo 1 **Entrada**: *Un programa Π y un tesauro $\mathscr{T}$.*
Salida: *Un conjunto de entradas que define las relaciones semánticas $\mathscr{R}$.*
Inicialización: $\mathscr{R} := \emptyset$
Calculamos $\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$
Para $x \in \mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}$

1. *Cálcular los sinónimos $\mathscr{S}_{\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}}(x) = \{s_1, \ldots, s_n\}$*
   $\mathscr{R} := \mathscr{R} \cup \{\mathscr{R}(x, s_i) = 1.0\}$;
2. *Si existe una palabra $u \equiv not\#x$, cálcular los antónimos $\mathscr{A}_{\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}}(x) = \{a_1, \ldots, a_n\}$*
   $\mathscr{R} := \mathscr{R} \cup \{\mathscr{R}(not\#x, a_i) = 1.0\}$;
3. *Cálcular los hiperónimos $\mathscr{H}_{\mathscr{V}_\Pi^\mathscr{T}}(x) = \{h_1, \ldots, h_n\}$*
   $\mathscr{R} := \mathscr{R} \cup \{\mathscr{R}(x, h_i) = 1.0\}$;

endFor
Return $\mathscr{R}$

Ejemplo 10 *Volviendo al Ejemplo 1. Supongamos que queremos razonar empleando las relaciones semánticas de sinonimia, antonimia e hiperonimia. Esto se puede codificar en* Bousi∼Prolog *como sigue:*

```
:-thesaurus(wordnet,[synonymy,antonymy,hypernymy]).

at(I,airport):-at(I,car), driving(I,home,airport).
at(john, taxi).
driving(I,not#away,aerodrome).
```

Las ecuaciones de proximidad que se generan para este programa son las mismas que aparecen en los Ejemplos 4,6 y 8. Entonces, si lanzamos la pregunta "`?.-at(X, aerodrome).`" *el sistema responde* "`X= john`".

Note que ahora se podría desarrollar reglas más generales sin tener que especificar cada elemento ya que esto se proporcionan de forma automática por WordNet y nuestro razonamiento se realiza en base a él. Note también que esta

manera de proceder puede causar problemas ya que se emplean todas las relaciones semánticas de una palabra dada. Esto puede producir un razonamiento no deseado. Por otro lado surge también el problema del contexto. Este problema, y una posible solución, se plantea a continuación.

5 Problemas al razonar con palabras

El empleo de un tesauro general puede provocar un problema de contexto. En nuestro marco esto se pone de manifiesto en el uso de todas las ecuaciones de proximidad obtenidas del tesauro en el proceso de inferencia. El siguiente programa muestra este problema:

```
%% Ecuaciones proporcionadas por WordNet::Similarity
bank~deposit=1.0. bank~swear=1.0. bank~trust=1.0.

%% Representación del Conocimiento
person ( john , job ( bank ) ).
person ( mary , job ( park ) ).
```

En este caso, si consultamos cuáles son las palabras más cercanas a “bank”, usando WordNet::Similarity, obtendríamos “deposit”, “swear” y “trust”. Note que en ningún momento se tiene en cuenta el contexto lo que podría producir un empleo innecesario de ciertas ecuaciones. Una posible solución es, dado un programa, determinar cuáles de estas ecuaciones son las más adecuadas en función del contexto estructural de los símbolos. El contexto estructural (CE, para abreviar) para un símbolo “s” es el conjunto de símbolos que le preceden a nivel de hecho o regla. Por ejemplo, el CE para “bank”, denotado por “CE(bank)” es el conjunto { person, job }. Entonces con el objetivo de seleccionar las ecuaciones más adecuadas calcularíamos cuál es el grado de relación entre los símbolos relacionados a “*s*” y su contexto estructural. En este caso, obtendríamos tres grupos: (a) { job∼deposit=0.426, person∼deposit=0.256 } para “deposit”; (b) { job∼swear=0.0, person∼swear=0.0 } para “swear”; y (c) { job∼trust=0.439, person∼trust=0.318 } para “trust”. En este caso serían buenas candidatas las ecuaciones “bank∼trust=1.0” y “bank∼deposit=1.0.”. Finalmente podríamos desechar la ecuación “bank∼swear=1.0.” por tener poca relación con el CE de bank.

6 Trabajos relacionados

La propuesta más cercana a la nuestra es [8] donde se propone un Prolog natural borroso lingüístico con unificación basada en sinonimia y una resolución basada en antonimia. Esta idea se usa en este trabajo en algún sentido. La principal diferencia reside en que la relación de antonimia no se emplea para extender la resolución sino como una similitud de palabras opuestas. Una de las razones es que adaptamos la incorporación de las relaciones semánticas a los requerimientos de nuestro marco de implementación i.e. Bousi∼Prolog y WordNet.

7 Conclusiones y Trabajo Futuro

Hemos presentado una primera aproximación para razonar con palabras. La idea consiste en emplear las relaciones semánticas entre ellas, dentro del mecanismo de unificación de un lenguaje de programación lógica. Las ventajas que podría tener este marco es que el conocimiento se obtiene del tesauro automáticamente y, por tanto, no es necesario introducir todas las relaciones entre los símbolos de forma explícita. Con el fin de materializar estas ideas, hemos integrado el tesauro WordNet en el sistema Bousi∼Prolog lo que permite a este razonar con relaciones de sinonimia, antonimia o hiperonimia en el sentido que hemos explicado. Creemos que este marco puede ser útil para conducir los marcos de programación lógica hacia el paradigma de la computación con palabras [10].

Sin embargo, todavía los problemas a resolver son importantes. En primer lugar será necesario establecer los fundamentos teóricos y, en segundo lugar, será un requisito imprescindible el tratamiento del contexto para mejorar los procesos de inferencia.

Referencias

[1] G.A. Miller. WordNet: A Lexical Database for English. Communications of the ACM,1995, 38, p.p 39–41 (1995).

[2] P. Julián-Iranzo and C. Rubio-Manzano. A Similarity-based WAM for Bousi∼Prolog. In: Proc. of IWANN’2009, LNCS, vol 5517, pp. 245–252. Springer, Heidelberg (2009).

[3] P. Julián-Iranzo and C. Rubio-Manzano. An Efficient Fuzzy Unification Method and its Implementation into the Bousi∼Prolog System. In: Proc. of FUZZ-IEEE’10, (2010).

[4] C. Rubio-Manzano and P. Julián-Iranzo. Fuzzy linguistic prolog and its applications. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, DOI: 10.3233/IFS-130834, pp. 12. IOS Press (2013).

[5] H. Liu and P. Singh ConceptNet, a practical commonsense reasoning tool-kit. BT Technology Journal Vol 22 No 4 October (2004).

[6] T. Pedersen, S. Patwardhan y Jason Michelizzi. WordNet::Similarity - Measuring the Relatedness of Concepts. In: *Proc. AAAI-04*, pp. 1024-1025 (2004).

[7] S. Fernández Lanza et al. Introducing FDSA: applications on information retrieval and stand-alone use. In J. Mathware and Soft Computing 10 (2-3): 57-70, 6 Ref (2003).

[8] A. Sobrino. The Role of Synonymy and Antonymy in ’Natural’ Fuzzy Prolog. R. Seising, V. Sanz (Eds.): Studies in Fuzziness and Soft Computing Vol. 273 Springer (2012).

[9] E. Trillas, S.Cubillo y E. Castiñeira. On Antonymy from Fuzzy Logic. X Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (2000).

[10] L.A. Zadeh. Computing With Words and Perceptions: A Paradigm Shift. In Joint Colloquium Distinguished Lecture Series June 22 (2009).

Bivalent and trivalent logics in the analysis of borderline cases

Pablo Cobreros [1], Laura Bujalance[2]

[1] pcobreros@unav.es
[2] laura.bujalance@unir.net

Abstract

Classical logic (CL) seems to be inappropriate to model ordinary reasoning due to semantic indeterminacy and vagueness. This logic relies on the fact that meanings of linguistic expressions are precise. But meanings in ordinary language depend to a great extent on usage, and causal relations between speakers and properties of things, and thus they cannot achieve the level of precision required to be modeled by CL.

One standard way to accommodate intuitions regarding vagueness is by weakening classical semantics and logic, for example by generalizing the notion of an interpretation allowing for an intermediate value between truth and falsity. In this talk we describe with some detail two approaches of this sort, the so-called K3 (Kleene's three-valued logic) and LP (Logic of paradox) logics. A natural question arises in this context: which one provides a better approach to ordinary reasoning? We argue that due to deep symmetries between these logics, this question has no straightforward answer.

1 ORDINARY LANGUAGE CHALLENGES TO CLASSICAL LOGIC

While the truth of logical principles is commonly regarded as a matter of its form, the non strictly logical principles of ordinary language are considered true holding on its content [3]. Formal logic is essentially applied to ordinary language in a mathematical way, that is, constructing a model-kind depiction of the phenomenon of ordinary language. But ordinary language does not lack indeterminacy precisely because it does not rely on just its form. In fact, Tarski describes natural language as both semantically closed and containing paradoxes.

The logic of ordinary language allows a reasoner to speak in a way that seems reasonable to any other competent one. When a competent speaker is confronted with a case of semantic indeterminacy, such as ambiguity or vagueness, he is led to undertake a semantic decision regarding its meaning and so, its content. The main difference between facing ambiguity or vagueness it is that the first is claimed to be resolved by clarifying the context in which it was uttered or the intention of the speaker (or both). But this is rarely the case with vagueness.

1.1. THE CHALLENGE DERIVED FROM BORDERLINE CASES

One of the most puzzling problems involved in the phenomenon of vagueness is the one of the borderline cases. [6].Borderline cases are cases where the application of a vague predicate is unclear, even if we know, or seem to know, all relevant facts for the application of the predicate. Borderline cases are best introduced by examples.

Suppose we start painting a wall with blue paint and at some point we add a drop of yellow paint into a bucket of 10 liters. The drop does not make any noticeable difference in the colour of the wall, so we keep painting and after some brushstrokes we add another drop. At some point, however, it becomes unclear whether the colour of the wall really qualifies as "blue".

The colour of the wall is borderline blue in the sense that we feel some reluctance to call it simply "blue" and to call it simply "not blue". That's part of the phenomenology of borderline cases: that competent speakers manifest a symmetry in their dispositions to assent and dissent to borderline cases; that they won't give you a bare yes / no answer to the question of whether the wall is blue, even if they know or seem to know all relevant facts for the application of the predicate (they understand the meaning of the word and can use it competently in most situations).

This phenomenology of borderline cases contrast with classical semantics and logic, as we stated previously. According to classical semantics, each unambiguous sentence possesses a definite truth-value: "true" or "false"

and not both (this is the so-called "Principle of Bivalence"). But Bivalence clashes with borderline cases; since competent speakers manifest a symmetry in their disposition to assent and dissent to the sentence "the wall is blue", how can this sentence take a clean truth-value "true" or "false" and not both? Meaning is supposed to be determined by use but, in this case, is utterly mysterious how the sentence "the wall is blue" takes its truth-value, given the symmetry in use manifested by competent speakers.

1.2. THE "SORITES PARADOX"

The issue of borderline cases contrasts also with classical logic when we consider the so-called "sorites" paradox.

Let p_n be the proposition saying "the wall at point *n* in the paining is blue". At point 0 the wall is clearly blue, at some point *k* the wall is borderline blue but at some point *n* the wall is clearly not blue. Now consider the list of conditionals:

p0 ⟶ p1

p1 ⟶ p2

...

pn-1 ⟶ pn

Are all these conditionals true? According to classical logic the answer *must* be "no". Since the wall is clearly blue at point 0, the truth of the first conditional guarantees (by *modus ponens*) the truth of p_1. Now this together with the truth of the second conditional guarantees the truth of p_2. A chain of *n* arguments of this form classically guarantee the truth of p_n. But the wall is not blue at point *n*. Thus, at least one of the conditionals on the series is not true.

Now let's consider what that means in the context of classical logic and semantics. It does mean that one conditional is false, that is, one conditional has a true antecedent and a false consequent. So, at some point *k,* (0<*k*<*n*) the wall is blue but adding a drop of yellow paint makes the wall not blue.

Living up to the standard of a clean and a clear semantic interpretation, that is, of an interpretation of "true" or "false", feels kind of a luxury from the point of view of the ordinary language. This is why ordinary speakers tend to ignore vagueness [1]. Nevertheless, it is the goal of logical reasoning describing the *desirable* reasoning for ordinary competent speakers.

So, what is the closest reasoning to that *desirable* one, that could also keep the semantic symmetry that competent speakers manifests when facing borderline cases? Approaching to that sort of reasoning requires, somehow, weakening classical logics and semantics.

2 TRIVALENT LOGICS AS A WAY OUT

In classical semantics, an interpretation (for a propositional language) is an assignment of truth-values among the classical truth-values "true" or "false". Trivalent logics make available a third option, i.e. in trivalent semantics a third truth-value is included (½) among truth (1) and falsity (0). Once we include a third truth-value the question arises on how to extend truth-values to complex formulas.

2.1. KLEENE'S SHCHEMA

There are different ways of doing this, but one of the most functional-proven one is the strong Kleene's schema. Its main distinctive feature is that its third value is regarded as *undetermined* which allows an increase of information without implying an increase of certainty [7]. The Kleene schema renders the following truth-conditions for complex formulas:

$I(\neg A) = 1 - I(A)$

$I(A \wedge B) = \min(I(A), I(B))$

$I(A \vee B) = \max(I(A); I(B))$

$I(A \longrightarrow B) = \max(1 - I(A), I(B))$

That is, negation maps 1 onto 0 and 0 onto 1, while mapping ½ onto itself. Conjunction takes the minimum, disjunction the maximum and the conditional is the material conditional (that is: (A □ B) is equivalent to ($\neg A \vee B$)).

2.2. UNDERSTANDING THE MIDDLE VALUE

Now the critical question comes: how do we have to understand the middle value? Is it a form of being true or, rather, a form of untruth? The answer we give to this question has an important impact on the resulting logic.

2.2.1. Middle value as form of being true: LP

Suppose "½" is read as a way of being true; then, since negation maps the middle value onto itself, both a sentence and its negation can be true. Suppose "½" is read as a form of untruth; then both a sentence and its negation might fail to be true.

This reading of the semantics has its impact on the logic. Logical consequence can be defined as necessary preservation of truth. If the middle value is a form of being true then truth is identified with the formal property of taking value more than 0 (this is "tolerant truth"[8]). The resulting consequence relation is that which preserves tolerant truth in every interpretation. More formally, $\Gamma \vDash \Delta$ according to this reading of truth, just in case:

For every interpretation I:

if all gammas take value more than 0, then

some deltas take value more than 0.

This definition of logical consequence corresponds to Priest's "Logic of Paradox" *LP* [4 y 5].

2.2.2. Middle value as a form of being untrue: K3

If the middle value is a form of being untrue, then truth is identified with the formal property of taking value 1 (this is "strict truth"[8]). The resulting consequence relation is the one which preserves strict truth in every interpretation. More formally $\Gamma \models \Delta$ according to this reading of truth, just in case:

For every interpretation I:

*If all gammas take value **1** then*

*some deltas take value **1***

This definition of logical consequence corresponds to Kleene's *K3*.

2.2.3. Differences between LP and K3

Although *LP* and *K3* are defined on a similar semantics, they have quite different properties.

LP is not explosive in the sense that

$$A \wedge \neg A \not\models \text{LP}$$

the "Principle of Explosion" fails. In other words, being explosive refers to the fact that inferences made in a logic deriving from inconsistencies render trivialities. If the "principle of explosion" fails, that is, if a logic is non-explosive, that logic manages to make what is rendered from inconsistencies somehow informative.

K3 is "non-implosive" in the sense that

$$\not\models \text{K3}\ A \vee \neg A$$

excluded middle fails. In other words, being implosive means that truth-value gaps can implode anywhere and so, they implode everywhere. If the principle of excluded middle fails, the incompleteness of that logic is committed to non-triviality [2]

For these two reasons it is said that *LP* is a *paraconsistent* logic while K3 is a *paracomplete* logic.

This kind of weakening in a logic is precisely the sort of weakening we might be looking for when trying to accommodate intuitions of ordinary language about vagueness and borderline cases. Let's see how these logics accommodate these questions more in particular.

2.2.4. LP and K3 on borderline cases and on the "sorites paradox"

First, both K3 and LP semantics accommodate the symmetry of dispositions manifested by competent speakers in borderline cases. The sentence "This wall is blue" takes the middle value when the colour of the wall is borderline blue; and negation maps the middle value onto itself. Thus, the sentence "The wall is blue" and its negation have the same semantic status; neither true nor false for K3-ists, both true and false for LP-ists.

Second, both LP and K3 have their way to address the sorites paradox. In K3 the inference of *modus ponens* is valid; thus not all conditionals are true. This means that the sorites argument is valid but unsound. Now note that this unsoundness does not entail, as it does in classical logic, as sharp transition from the "blue" to the "non-blue". Not all conditionals are true, but no conditional is *false*: thus, there's no clearly blue item followed by a clearly not blue item.

In LP, all conditionals in the series take value more than 0 and so all conditionals are true by LP standards. However, the inference of *modus ponens* is not LP valid and so the conclusion does not follow, even if all the premises are true.

3 WHICH ONE SHOULD WE FOLLOW?

Based on their weakening of classical logic and semantics, both K3 and LP are capable of giving a reasonable answer to the problems of vagueness. So we can reasonably ask which one is better to account for the reasoning of ordinary speakers. The answer, however, is not easy, and this is the fact we would like to stress in our paper. K3 and LP are different in a very systematic way; actually, all differences between LP and classical logic are reflected in some or other way in K3 and all the differences between K3 and classical logic are reflected in LP. K3 and LP are *dual logics* in the sense that an inference that is valid according to one logic just in case the contrapositive inference is valid in the other. More formally:

$$\Gamma \models_{\text{LP}} \Delta$$

just in case

$$\neg(\Delta) \models_{\text{K3}} \neg(\Gamma)$$

(where $\neg(\Delta)$, $\neg(\Gamma)$ is the result of attaching a negation in from of each delta, each gamma)

3.1. IMPLICATIONS OF DUALITY

This duality expresses a systematic connection between both logics: any logical advantage or shortcoming of one logic will be reflected in the other in dual form. For example, LP is classic on the right in the sense that for any set of formulas Δ,

$$\models_{\text{LP}} \Delta$$

just in case

$$\models \text{CL}\ \Delta$$

And one might think this is an advantage of LP. But this connection to classical logic appears in K3 in *dual form*; K3 is classic on the left,

$$\Delta \vDash_{K3}$$

just in case

$$\Delta \vDash CL$$

4 CONCLUSIONS

We have undertaken the goal of approaching the most *desirable* logic to represent ordinary language by weakening classical logic. Yet, there are no arguments for one of the two logics introduce that do not apply to the other. And there are no arguments against one logic that do not apply to the other. Not at least if these arguments concern logical behaviour. That said, we now notice that weakening classical logic is just the first step towards truly grasping the semantic intuitions behind ordinary language, regarding the indeterminacy involved in borderline cases. Deciding which is the best candidate to do so it is the second, and it is a difficult one when duality is concerned. And is still to be definitely done.

Finally, we would like to point out that duality is not a particularity between K3 and LP. Dual logics appear each time we differentiate falsity and untruth and take logical consequence as a matter of preservation of truth. Thus there is a question that would raise again when dealing with these matters: how to decide between a logic and its dual?

References

[1] D. Braun & T. Sider: Vague, so Untrue. *Nous* 41, pp.133-156, 2007.

[2] D. Hyde: *Vagueness, Logic and Ontology*. Ashgate Publishing Limited, Hampshire, 2007, p.75.

[3] G. Harman: The logic of Ordinary Language. In: R. Elio (Ed.), *Common Sense, Reasoning, and Rationality*, Oxford University Press, New York, pp. 93-102, 2002.

[4] G. Priest: *In contradiction: a study of transconconsistent*. Expanded edition. Oxford University Press, New York, 2006. First edition published by Martinus Nijhoff Publishers, 1987.

[5] G. Priest: The Logic of Paradox. *Journal of Philosophical Logic* 8(1), pp. 219-241, 1979.

[6] M. Caie: Vagueness and semantic indiscriminability. *Philosophical Studies* 160, pp. 365-377, 2012.

[7] M. Fitting: Kleene's three valued logics and their children. *Journal Fundamenta Informaticae* 20 (1-3), pp. 113-131, 1994.

[8] P. Cobreros, P. Égré, D. Ripley and R van Rooij: *Reaching Transparent Truth*. Forthcoming in Mind.

ALFREDO DEAÑO Y EL RAZONAMIENTO ORDINARIO

María G. Navarro[1]

[1] {maria.navarro}@cchs.csic.es

Resumen

El lenguaje natural podría entenderse como una suerte de oportunidad para el cálculo. Este artículo sostiene que este era al menos el punto de vista de Alfredo Deaño. Se afirma que para dicho autor esta suerte de optimismo no se basa en el desarrollo de la lógica clásica sino en la lingüística y las lógicas no clásicas. Para justificarlo se muestran y califican algunos de los hallazgos característicos de la obra de Deaño en torno al razonamiento ordinario. Finalmente se ofrecen algunas evidencias procedentes de publicaciones recientes en el ámbito de los estudios sobre razonamiento para justificar la actualidad, interés y relevancia científica de hallazgos en la filosofía de Alfredo Deaño.

Palabras Clave: Razonamiento defectible, Razonamiento ordinario, Comunicación informativa, Inducción, Alfredo Deaño

1 EL LENGUAJE COMO ESTÍMULO PARA EL CÁLCULO

De la *Introducción a la lógica formal* de Alfredo Deaño [5] puede inferirse que su autor sostenía que el lenguaje natural podría verse como una fuente de estímulos para el desarrollo de cálculos. El lenguaje natural podría entenderse -por así decir- como una suerte de oportunidad para el cálculo. Intérpretes como Harada [15] afirman que, a este respecto, el optimismo mostrado por Deaño (tan certero como precoz si reparamos en la fecha en que este era manifestado y lo cotejamos con la producción científica que habría de corroborar su racionalidad años después) no se basa -al menos no principalmente- en el desarrollo de la lógica clásica sino en la lingüística y las lógicas no clásicas. Prueba de que esta interpretación es acertada son las afirmaciones y descripciones que el propio Deaño dedicó a la lógica difusa y a su característico análisis de las relaciones de inferencia entre enunciados sobre conjuntos borrosos.

Sin embargo, dichas aseveraciones obtienen una justificación plena, que nos permite atisbar mejor las motivaciones filosóficas de su autor, cuando atendemos al desarrollo interno del pensamiento esbozado por él mismo en lo que aquí vamos a denominar los tres hallazgos fundamentales sobre razonamiento ordinario:

(1) La estructura prismática de la comunicación;

(2) Símiles políticos en las relaciones de la lógica con la filosofía;

(3) La práctica espontánea del razonamiento.

1.1. TRES HALLAZGOS FUNDAMENTALES SOBRE RAZONAMIENTO ORDINARIO

1.1.1. La estructura prismática de la comunicación

El primer rasgo que atribuye a la práctica de la comunicación es «su estructura prismática» [6]. Con este rasgo Deaño quiere indicar que el estudio de la comunicación humana solo puede abordarse interdisciplinarmente. En este sentido, atribuye al menos a cuatro ciencias la tarea de acompañar a la investigación propiamente filosófica en torno a la comunicación informativa, a saber: la lingüística, la teoría de la información, la psicología y la sociología. Esta consideración preliminar adquiere en Deaño rango de principio programático de su filosofía y está inspirado en la convicción que comparte con Javier Muguerza [18] según la cual «el lenguaje no es un simple instrumento de la comunicación, sino la auténtica condición *sine qua non* de ésta, y, por lo pronto, de toda comunicación informativa… Cuando digo que el lenguaje es la condición *sine qua non* de toda comunicación informativa quiero decir que lo es de la objetividad del conocimiento que respalda esa información». En consecuencia con el carácter e ideal interdisciplinar que parece debe presidir cualquier investigación sobre la comunicación humana informativa (frente a la artística en la que, tal y como solía insistir José Luis López Aranguren, parecen identificarse la comunicación con lo comunicado), Deaño cifra esta suerte de estructura prismática en los siguientes hallazgos:

(i) el pensamiento y el uso del lenguaje se deben concebir como dos partes de un proceso único [24].

(ii) La organización de un lenguaje sólo puede explicarse si se la considera un instrumento de comunicación al servicio de un grupo humano [12].

(iii) La unidad de pensamiento y uso del lenguaje es de distinto origen y sólo queda fundida a través del desarrollo social del hombre.

(iv) El lenguaje es el vehículo indispensable del pensamiento.

Sin duda, esta estructura prismática podría seguir ilustrándose con nuevos asertos fundamentales en torno a la comunicación informativa, pero todos ellos procederían de las disciplinas mencionadas; y comprobar esto nos basta aquí a los efectos de mostrar en qué sentido tal estructura es prismática. Deaño considera suficientes los hallazgos arriba indicados por otra razón: ellos solos bastan para dar una idea del carácter interdisciplinar de una investigación filosófica en torno al lenguaje comunicativo o informativo. Y prueba de ello es que se puedan cifrar en estos tres que siguen los problemas filosóficos principales en torno al lenguaje (e.g. lenguaje comunicativo o informativo) por lo que, a fin de cuentas, habrían ofrecido al filósofo los rendimientos especulativos necesarios cuando, a raíz de su consideración, se comprueba la necesidad de las siguientes preguntas de investigación:

(a) ¿qué es preferible: construir lenguajes artificiales precisos o establecer el funcionamiento efectivo del lenguaje natural?;

(b) ¿es posible o deseable unificar el lenguaje?; y

(c) ¿qué método filosófico es más rentable especulativamente o más útil: la reconstrucción racional del lenguaje o la descripción de su uso ordinario?

A mi modo de ver, de los textos analizados se infiere que estas últimas preguntas (aquellas en las que el filósofo debe dedicar sus esfuerzos para poder colaborar científicamente con el resto de las ciencias aludidas) no sólo son resultado especulativo de la estructura prismática de la comunicación sino concausa de ella.

1.1.2. Símiles políticos en las relaciones de la lógica con la filosofía

Cuando se trata de definir la relación entre lógica y filosofía, Deaño indica de manera aparentemente anecdótica que dicha relación es plural o, siquiera, variada, y, además, se presta a la utilización de símiles políticos. El propio autor consignaba esta idea del siguiente modo: «Utilizando símiles políticos diríamos que las relaciones de la lógica con la filosofía en este contexto han pasado del paternalismo más o menos autoritario (en Frege y Russell), a la dictadura (en el primer Wittgenstein), de ésta a la democracia formal (neopositivismo lógico), de la democracia formal a la anarquía (segundo Wittgenstein), y de ésta, finalmente, al bipartidismo (la filosofía del lenguaje ordinario).» Después de esto último, Deaño añade algo más para calificar el sesgo político de su propia propuesta que juzga sin atisbo de duda con una sola palabra, «autogestión» [6].

No vamos a ofrecer aquí ninguna reconstrucción del panorama que ofrece el autor sobre dicha relación ni de los aspectos que podrían interpretarse para producir los argumentos en virtud de los cuales se pueden entender los símiles políticos enumerados (símiles que, por lo demás, se nos presentan como evidentes y de comprensión inmediata). Una interpretación superficial de los mismos podría conducir a pensar que el autor hace uso de un recurso pedagógico para efectuar una auténtica exposición razonada de las etapas de la filosofía del lenguaje que cada uno de dichos autores comporta por sí solo. Más interesante puede ser sin embargo aventurar nuestra propia interpretación acerca de su propia posición cuyo peso político vaticina el carácter progresivo con que se presentan los anteriores ciclos políticos en la historia de la filosofía del lenguaje. «Autogestión» es una palabra que no vuelve a aparecer en el documento pero se puede identificar con la adhesión que muestra Deaño hacia el planteamiento de Noam Chomsky, el cual sobresale por el aspecto creador que atribuye al lenguaje o, para decirlo más apropiadamente, con la creatividad radical del lenguaje que asocia al uso de reglas generativas y, en particular, al uso de reglas recursivas, que permiten ampliar progresivamente la expresividad de nuestro pensamiento[1]. El sujeto que habla parece haber asimilado un sistema coherente de reglas que le permite realizar interpretaciones semánticas de un conjunto potencialmente infinito de frases del lenguaje real. Es la idea de la gramática generativa lo que Deaño tiene en mente cuando menciona el término «autogestión» para describir su particular símil político en su busca de la relación entre lógica y filosofía. La autogestión parece la opción más honesta, si caemos en la cuenta, junto a Deaño, de que «la lógica nos ha hipnotizado. Obsesionados por su sublime profundidad, por su exactitud, buscamos un lenguaje lógicamente perfecto, y, al analizar por medio de éste el lenguaje ordinario, creemos encontrar, por debajo de sus imperfecciones (…), su esencia oculta.» [6]. Estos símiles políticos son de un interés manifiesto y connotan una agudeza preclara cuando pensamos en todas las indagaciones en clave política que se harían después no sólo sobre la historia de la filosofía, cuyas elementales constricciones historiográficas dan una idea de lo vano que es intentar zafarse de la influencia de la actividad política sobre la investigación histórica, sino sobre disciplinas como la epistemología que, muchos años después, sería presentada por ciertos autores como epistemología social analítica (en Alvin Goldman) cuando no como epistemología social y política (en Steve Fuller). Se encuentran además antecedentes en el propio autor de símiles políticos con

[1] La autora desea expresar su agradecimiento a un evaluador anónimo por su comentario acerca de la aportación de Noam Chomsky.

función no sólo pedagógica sino filosófica en afirmaciones como la que sigue: «Lejos de intentar armonizar lógica y dialéctica, Adorno, Marcuse y en general la llamada "escuela de Frankfurt" vienen a sostener que precisamente la "autocrítica de la lógica tiene como consecuencia la dialéctica". La dialéctica, el pensamiento negativo y crítico, se constituye como crítica de la lógica formal, lógica establecida, lógica de la dominación.» [8]. Sobre la relación entre análisis y dialéctica (relación que subyace a estas líneas arriba citadas) Deaño escribiría dos años más tarde algunas claves de comprensión de clara vigencia en *Revista de Occidente* [9]. La interpretación más consistente acerca de las razones del interés que suscitó en Deaño la distinción entre lógica analítica y lógica dialéctica sigue encontrándose en la que formuló Gustavo Bueno. Según este último la mencionada distinción (e.g., entre dialécticos y analíticos) encontró su punto álgido durante los años de la Guerra Fría en los que el bloque comunista (y países satélites) se caracterizaba por su interés por las obras de lógica dialéctica mientras que, en contraposición, los países pertenecientes al área capitalista estaban volcados en la lógica analítica. Basándose en esta perspicaz apreciación acerca de la influencia que ejerce la geopolítica sobre las distinciones historiográficas que transcienden este simple plano para adquirir -progresiva y, en ocasiones, veladamente- un rango filosófico, Bueno recordaba el número de la *Revista de Occidente* al que nos hemos referido arriba porque fue dirigido precisamente por el propio Deaño. En dicho número se dividían a los filósofos en España entre analíticos y dialécticos. Dicha división daría nombre también a dos métodos (i.e., el método analítico y el método dialéctico). Ante la oposición entre la lógica analítica y la dialéctica, la cual estaría basada en la idea de que aquélla era muy insuficiente por lo que era preciso escribir una lógica dialéctica, Bueno se preguntaba: «¿Qué criterios se pueden seguir para diferenciar esta supuesta diferencia? Seguramente el criterio más seguido era el de la contradicción: la lógica analítica no admite la contradicción, mientas que la lógica dialéctica acepta el principio de contradicción. Pero esta distinción es absurda, porque la contradicción no puede tener cabida en ningún tratado de lógica, ni en ningún discurso ordinario.» [3]. Para completar esta perspectiva es de rigor recordar que en su obra póstuma, *Las concepciones de la lógica,* Deaño insistiría en la necesidad de ofrecer una reconstrucción de la historia de la disciplina teniendo a la vista su posible proyección sobre el programa curricular de la universidad española de su época, pero sin olvidar por ello la tarea de ofrecer argumentos sobre la función que la lógica debe tener en toda investigación filosófica [10]. Sobre el papel de dicha edición en la cuestión de la recepción de la filosofía analítica en España sigue siendo de interés consultar [2]. Sobre este último punto es concluyente la interpretación de Muguerza acerca de la filosofía de Deaño entendida como estudio de los principios en que se basa la relación de implicación entre enunciados. Una investigación que conduciría inequívocamente -en este caso- hacia una especie de reflexión transcendental. La conferencia de clausura dictada por Muguerza en 1978 con ocasión de las Jornadas de Filosofía[2] en homenaje al filósofo lucense estuvo basada en la justificación de dicha interpretación acerca del pensamiento de Deaño y fue reseñada en la edición impresa de *El País*. Años más tarde, la revista *El Basilisco* dedicaría varias páginas firmadas por José Antonio López Brugos a la reconstrucción exhaustiva de los argumentos utilizados por Deaño para mostrar en qué sentido las leyes lógicas serían leyes de la constitución formal del sujeto transcendental [17].

1.1.3. La práctica espontánea del razonamiento

En su introducción y definición de las lógicas no clásicas de 1976, Alfredo Deaño hacía notar de manera original la diferencia entre forma y contenido en el razonamiento cuando afirmaba: «Distinguiendo entre contenido y forma de un razonamiento, la lógica formal – de ahí ese adjetivo que la califica –abstrae del contenido y retiene tan sólo la forma. Y se ocupa de estudiar aquellas formas de razonamiento, aquellos modos de argumentación, aquellos esquemas de inferencia que son válidos en cuanto tales (es decir, en virtud de su estructura, pues otra cosa no tienen). En lo que acabamos de decir está implícita la razón de que la lógica utilice, en lugar del lenguaje ordinario, un lenguaje artificial, ese lenguaje simbólico que aturde a los aturdidos y sirve de instrumento a los que no lo están. La lógica opera sobre la separación entre forma y contenido y la posterior retención de aquélla. Y es el caso que, en el lenguaje

[2] Dichas jornadas tuvieron lugar en el Colegio Mayor Isabel de España; comenzaron el 11 de abril de 1978 y fueron clausuradas el 26 de abril con la conferencia magistral de Muguerza. La edición impresa de *El País* reseñó dicho evento [25] y publicó varios artículos [26] tras la dramática y prematura muerte de Deaño quien fue colaborador y asesor de las páginas dedicadas a cultura y pensamiento en dicho periódico. Por su vivacidad, la descripción del periodista Javier Pradera sobre la personalidad y aportación intelectual de Deaño tal vez esté quintaesenciada en la siguiente afirmación «predicó con el ejemplo de su obra y de su vida las cualidades propias de los hombres con atributos: el rigor en el trabajo intelectual, la ironía distanciadora, la cultura asumida de manera orgánica, y la imaginación teórica» [21]. Igualmente conmovedor y de gran fuerza expresiva es el testimonio de Mariano Antolín Rato: «Deaño era de padre gallego y era un genio tremendo, la persona más inteligente que he conocido. En todo el Bachillerato y en toda la carrera sacó matrícula en todas las asignaturas, incluidas Religión, Gimnasio y Formación del Espíritu Nacional. Y no estudiaba mucho más que los compañeros, porque además en esa época escribía obras de teatro.» [22]. Igualmente reseñable es el homenaje que dedicó al filósofo gallego la Sociedad Asturiana de Filosofía en 1978 en la Universidad de Oviedo donde estudió aquel. Dichas jornadas estuvieron dedicadas a explorar una de las relaciones que más interesó a Deaño, tal y como veremos a continuación: la dilemática relación entre lógica y psicología. En la exploración de dicha relación fue determinante la colaboración entre Deaño y Juan Del val Merino [11], especialista en psicología evolutiva y educación, alumno de Jean Piaget y filósofo de formación, sus planteamientos seguramente interesaron sobremanera a Deaño y dejaron en él fuerte impronta.

ordinario, forma y contenido se dan siempre juntos: cuando razonamos en el mundo – y no en una clase de lógica –, razonamos de una determinada forma y acerca de un determinado contenido. La forma no se da nunca aislada, sino incorporada siempre a una cierta materia. Por ello, si la lógica quiere operar sobre la pura forma, no puede hacerlo en el lenguaje ordinario: precisará un lenguaje artificial, especialmente construido para reflejar la forma lógica por separado. Por separado de todo contenido concreto, pero sin por ello olvidar que de hecho, en la práctica espontánea del razonamiento, esa forma aparece siempre dando forma a algún contenido. Dicho de otro modo: la forma prescinde – abstrae – de los contenidos concretos, no de la idea de contenido.» [7].

Este fragmento, dedicado a explicar en qué sentido contenido y forma de un razonamiento son objeto de análisis para la lógica formal, nos da una idea de la importancia que concedía Deaño a lo que denominaba «la práctica espontánea del razonamiento». Según Deaño, en dicha práctica, la forma es siempre tal porque lo es respecto a algún contenido, y aparece por consiguiente «siempre dando forma a algún contenido.» Suele decirse que mediante el razonamiento ordinario llegamos a adoptar o asumir creencias nuevas a partir de otras de las que ya disponemos. Pero el razonamiento ordinario nos muestra un rasgo aún más definitivo: mediante él podemos no sólo acumular creencias nuevas, sino llevar a efecto procesos de transformación y retractación de creencias, informaciones y conocimientos previamente aceptados o acumulados. Este fenómeno resulta determinante porque en él comprobamos que las reglas inferenciales que justifican la adopción de nuevas creencias nos permiten actuar con ellas de manera eventual y temporal, por lo que suele decirse que el razonamiento humano es claramente *suposicional*. Este aspecto de las reglas inferenciales llamó poderosamente la atención de Deaño y es un elemento que subyace no sólo en la anterior descripción de la práctica espontánea del razonamiento, sino en aspectos característicos de su pensamiento que, previsiblemente, de haber podido se habrían seguido desarrollando para formar parte de la línea de investigación que estaba determinado a explorar. Y es en este sentido como cabe entender su crítica al principio de tolerancia de Rudolf Carnap el cual juzgó de «represivo» en su formulación primera, ya que si el lenguaje no está dado de una vez por todas (pues, al cabo, nos hallamos en permanente posición *autogestora* de él y de nosotros mismos al explorar lo que somos a través de la comunicación informativa), eso da una idea de que lo más arraigado en él no es otra cosa que la constante actividad de clarificación y creación lingüística y filosófica en la que nos hallamos inmersos, así como del potencial valor científico de todo ello. En este sentido, la primera formulación de dicho principio le parecía represiva pues vendría a indicar que, aunque gozamos de una completa libertad en el uso del lenguaje, dicha libertad podía conducir al hablante a incurrir en el sinsentido y en el error lógico. De la interpretación de Deaño se infiere que, a su juicio, estos extremos se han tenido por indeseables («una forma de libertinaje -afirma Deaño- que en lógica se asocia con el sinsentido») por lo que se tiende a considerarlos prematuramente como si fueran improductivos e incluso irrelevantes científicamente incurriendo así en un grave equívoco. De nuevo, el símil político y moral en el análisis de las relaciones entre filosofía y lógica, lleva a su autor a efectuar críticas inesperadas que, a mi modo de ver, obtienen explicación en las razones que llevaron a Gustavo Bueno a situar al filósofo galaico-asturiano[3] como miembro destacado de lo que denominó la generación filosófica española del cambio con la finalidad de establecer un criterio historiográfico de clasificación. A dicha generación habría de suceder la del silencio según este mismo autor. Este último aspecto del razonamiento al que hemos aludido (e.g., relación entre forma y contenido) constituye la clave de la práctica espontánea del razonamiento ordinario, y nos da una idea de la inextricable relación entre la permanente forma del contenido y el razonamiento dirigido a intereses -verdadero protagonista de nuestra vida cotidiana. Y precisamente era este tipo de razonamiento lo determinante para Deaño cuando insistía en que la exaltación del lenguaje ordinario no debía hacernos perder de vista una de sus características primordiales, a saber, que es imposible evitar su tendencia a seguir desarrollándose. Esta misma idea -que él asoció en ocasiones con el constructivismo-, acaso sea la clave para entender el símil político de la autogestión en que hacía radicar su planteamiento, convencido como estaba de la creatividad esencial del lenguaje ordinario y de quienes, por así decir, lo autogestionamos de continuo en inevitable actitud *autopoiética*.

2 PROPIEDADES DE LA INDUCCIÓN QUE ACTUAN SOBRE EL RAZONAMIENTO ORDINARIO

A riesgo de equivocarnos, si tuviéramos que elegir una línea de investigación en la que los planteamientos de Deaño no sólo encontrarían una interpretación argumentada -además de coherente acomodo-, sino que nos permitiera pronosticar contrafactualmente el ámbito al que se habrían dirigido sus hallazgos, esta no sería otra que la establecida por Jonathan E. Adler y Lance J. Rips [1]. El razonamiento es una forma de *transición no accidental* del pensamiento. Así lo definió Adler en su colaboración con Rips. Transición no accidental porque las creencias, la información, el conocimiento, etc.,

[3] Así se describía su origen en el artículo de *El País* dedicado a reseñar la intervención de Aranguren en el homenaje que tuvo lugar en el Colegio Mayor Universitario Isabel de España al que nos hemos referido en la nota anterior [26].

provee los fundamentos o razones para llegar a otro pensamiento. Esta forma de transición se puede predicar tanto del razonamiento teórico (que responde a la pregunta de si *p* es el caso) como del práctico (que responde a la pregunta de si es el caso que debe creerse *p*). A partir de esta elemental distinción, Adler y Rips elaboran una interpretación sobre la historia del razonamiento en un sentido amplio [1]. Muchos aspectos relacionados con esta compilación (selección de autores y procedencia disciplinar, temáticas, diseño del índice) podrían utilizarse para analizar la relevancia científica de la aproximación de Deaño. Como muestra un botón: la afirmación fundamental de Gilbert Harman de 1986 [15] según la cual el razonamiento teórico implica la actividad de revisar las creencias que tenemos pero las reglas de la lógica o la implicación no, forma parte de los hallazgos que encontramos en la obra de Deaño. Sin embargo, cabe afirmar aún más. Deaño no solo estableció una clara distinción entre los elementos psicológicos, los intencionales o los propios del medio en que se convierte la producción inferencial en su particular proyección epistemológica, también insistió en la importancia y peculiaridad del contenido en la formación ordinaria de inferencias, así como en los rasgos del análisis lógico-formal más adecuado en función de las peculiaridades de ese contenido, cuya permanente modificación sustantiva y/o estructural afecta de continuo al contenido (i.e., incorporando, produciendo, sustituyendo, modificando creencias) pero también a la forma (i.e., reorganizando, transformando, reinterpretando, reajustando, etc., de distinta manera y grado cuerpos de creencias). La proyección filosófica de Deaño habría seguido ejerciendo un claro impacto sobre la psicología del razonamiento en cuyo ámbito su planteamiento fue examinado y reclamado con ocasión, por ejemplo, de la celebración del ciclo de conferencias la «Psicología como Ciencia» celebrado en la Fundación de Investigaciones Marxistas del 9 al 18 de mayo de 1982 en Madrid. En dicho ciclo, Delval dedicó su exposición sobre las relaciones entre psicología y lógica a Deaño e insistió en las consecuencias derivadas de las tareas de razonamiento de Johnson-Laird y Peter Wason de 1970. Los desarrollos sobre psicología del razonamiento y de la deducción de Rips en 1975 [23] junto a los de Nisbett, Krantz y Kunda en 1983 [19] y, posteriormente, los de Carey en 1985 [4], etc., tal vez habrían tenido el efecto de transmutar las tres preguntas que Deaño se dirigía a sí mismo con objeto de dar con los instrumentos de precisión para capturar el secreto del funcionamiento del razonamiento ordinario. ¿Por qué? Porque la descripción del uso ordinario del razonamiento le habría llevado a preguntarse -junto a los mencionados autores- ¿qué convierte a una propiedad (a un contenido) en una propiedad (inferencialmente) proyectable? ¿Qué hace a un caso generalizable? ¿Y a muchos casos? ¿Cómo proyectan los adultos las propiedades de una categoría de animales a otra? ¿Afecta la homogeneidad de las categorías sobre esa proyección o transición que lleva a realizar fuertes inferencias? Esto último (ver Tabla 1) [14] parece entrar en contradicción con el interés de Deaño por la reflexión acerca de las condiciones de posibilidad de la lógica que este no hacía radicar ni en actos mentales ni en entidades ideales sino en principios. Sin embargo, fue su análisis sobre el modo en que la lógica se enraíza en la vida cotidiana (y en el contenido de las premisas) lo que le llevó a examinar los casos en los que se muestra que las inferencias realizadas por las personas divergen de los patrones normativos [20]. De ahí que Deaño insistiera en que la lógica está enraizada en la vida cotidiana (real o imaginada) utilizando para ello análisis de famosos fragmentos literarios[4].

Tabla 1: Las propiedades en el razonamiento inductivo: elaborado a partir del artículo de E. Heit [14]

Las propiedades de la inferencia	**Inferencias desde los casos simples**	**Inferencias desde múltiples casos**
Promotores de la inducción	La similitud entre premisas y conclusión promueve la inducción	Un gran número de casos observados y premisas promueve la inducción en adultos
Agentes propensos a promover así la inducción	Los niños más que los adultos	Los adultos más que los niños
Efectos derivados del incremento en la diversidad (no sólo en el número) de casos observados	Refuerza la evidencia tanto en niños como en adultos	La evidencia puede ser malinterpretada entre niños y un número muy elevado puede convertirla en irrelevante para adultos
Propiedades proyectadas en función del dominio específico	La propiedad idiosincrática o transitoria radica en la similitud de los contenidos proyectados	La propiedad de transición no siempre radica en el número de contenidos similares proyectados
Tipos de similitud	Similitud basada en la apariencia que se percibe (e.g., para niños de hasta 6 años la información acerca de personas en premisas promueve fuertes conclusiones)	Similitud basada en una categoría subyacente que se comparte (e.g., la transición con premisas acerca de animales hacia humanos es más débil que la de humanos a animales)

[4] Deseo agradecer a un evaluador anónimo este interesante comentario.

El interés de Deaño por este tipo de análisis no es circunstancial, muy al contrario: está profundamente relacionado con las limitaciones que observó en la lógica bivalente. En estas últimas líneas se ha sugerido, apelando para ello a una especie de argumento contrafáctico que, de haber podido, Deaño habría manifestado interés por la investigación de psicólogos del razonamiento como Rips o Heit ya que en su obra podemos apreciar un claro interés por las propiedades del razonamiento inductivo en el sentido de cómo influye el contenido de las proposiciones y nuestra propia percepción sobre las relaciones lógico-formales.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado gracias a la financiación de un contrato del subprograma "Juan de la Cierva" (Referencia JCI-2011-09425) del Ministerio español de Economía y Competitividad.

Referencias

[1] J.E. Adler y L.J.Rips (Eds.): *Reasoning. Studies of Human Inference and Its Foundations,* Cambridge, MA, Cambridge University Press, 2009.

[2] J.L. Blanco: La recepción de la filosofía analítica en España. *Isegoría. Revista de filosofía moral y política* 3, pp. 138-146, 1991.

[3] G. Bueno: Lógica analítica y lógica dialéctica. Tesela núm. 15, 9 de febrero de 2010 en Fundación Gustavo Bueno accesible en: www.fgbueno.es/med/tes/t015.htm (último acceso 3 de noviembre de 2013)

[4] S. Carey: Conceptual change in childhood. Cambridge, MA, MIT Press, 1985.

[5] A. Deaño: *Introducción a la lógica formal,* Alianza Editorial, Madrid, 1974.

[6] A. Deaño: Pensamiento, comunicación y lenguaje. *Convivium* 34, pp. 26-53, 1971.

[7] A. Deaño: Lógicas no clásicas. En: M. Quintanilla (Ed.), *Diccionario de filosofía contemporánea,* Ediciones Sígueme, Salamanca, pp. 263-264, 1976.

[8] A. Deaño: Lógica formal, lógica dialéctica por H. Lefebvre. *Revista de Occidente* 109, pp. 120-123, 1972.

[9] A. Deaño: Análisis y dialéctica: la razón de unas páginas. *Revista de Occidente* 138, pp. 129-149, 1974.

[10] A. Deaño: *Las concepciones de la lógica.* Taurus, Madrid, 1980.

[11] J.A. Delval Merino: Lógica y psicología del razonamiento. En: J.A. Delval (Comp.) *Investigaciones sobre lógica y psicología,* Alianza Universidad, Madrid, 1977.

[12] F. François: Le Langage. En: *Encyclopédie de la Pléiade*, Gallimard, París, pp. 1-19, 1968.

[13] P.C. Fishburn: *Utility theory for decision making*. Wiley, Nueva York, 1970.

[14] E. Heit: Properties of inductive reasoning. Psychonomic Bulletin & Review 7, 569-592, 2000.

[15] E. Harada Olivares: Argumentos, formalización y lógica informal. *Ciencia ergo sum* 16-2, pp. 125-136, 2009.

[16] G. Harman: *Change in View. Principles of Reasoning*, Cambridge, Mass. and London, England, The MIT Press, 1986.

[17] J.A. López Brugos: Mis concepciones de "Las Concepciones de la Lógica" de Alfredo Deaño. *El Basilisco* 11, pp. 57-72, 1980.

[18] J. Muguerza: El problema de Dios en la filosofía analítica. *Revista de Filosofía* vol. XXV, núm. 96-99, p. 294, 1966.

[19] R. E. Nisbett, D.H. Krantz, C. Jepson, and Z. Kunda: The use of statiscal heuristics in every-day inductive reasoning, Psychological Review 90, 339-363, 1983.

[20] D.N. Osherson, E.E. Smith, O. Wilkie, A. López, and E. Shafir: Category-based induction. *Psychological Review* 97, 185-200, 1990.

[21] J. Pradera: Ha muerto el filósofo Alfredo Deaño. EL PAIS 26 de enero de 1978.

[22] M.A. Rato: Me confesé en el Corazón de María con una revista pornográfica en el bolsillo. La Nueva España-Diario Independiente de Asturias 23 de enero de 2011.

[23] L.J. Rips: Inductive judments about natural categories. *Journal of Verbal Learning & Verbal Behavior* 14, 665-681, 1975.

[24] A. Shaff: *Lenguaje y conocimiento*, Grijalbo, México, pp. 178-179, 1967.

[25] Clausura de las Jornadas de Filosofía en homenaje de Alfredo Deaño. *El País*, 27 de abril de 1978.

[26] José Luis Aranguren: "El filósofo es un transgresor" Ciclo de homenaje a Alfredo Deaño, *El País*, 12 de abril de 1978.

RECURSOS LINGÜÍSTICO-FORMALES PARA EL SILOGISMO APROXIMADO

M. Pereira-Fariña [1], A. Sobrino [2]

[1] *Centro Singular de Investigación en Tecnoloxías da Información (CITIUS), Campus Vida, Universidade de Santiago de Compostela*, martin.pereira@usc.es

[2] *Facultade de Filosofía, Praza de Mazarelos, s/n, Universidade de Santiago de Compostela*, alejandro.sobrino@usc.es

Resumen

El objetivo de este trabajo es indagar en la naturaleza del silogismo aproximado y mostrar como algunas relaciones lingüísticas, como la sinonimia o la glosa, pueden contribuir a cuantificar de modo adecuado la confianza en la plausibilidad de una conclusión en términos del solape significativo que muestren los términos involucrados en el razonamiento silogístico.

Palabras Clave: silogismo, silogismo aproximado, sinonimia, medidas de similitud, glosa.

1 INTRODUCCIÓN

El razonamiento ordinario es aquel que usamos los seres humanos en nuestra vida cotidiana para tomar muchas de nuestras decisiones y se caracteriza por aceptar argumentos no deductivamente válidos aunque razonables o aceptables. En estos casos, la verdad de las premisas no garantiza con carácter de necesidad la verdad de la conclusión, pero le puede proporcionar un soporte adecuado para hacerla plausible.

El razonamiento ordinario se caracteriza porque sus reglas no son tan rígidas como las del razonamiento deductivo, sino que más bien se definen como heurísticas o guías que nos permiten alcanzar la conclusión que tiene un mejor soporte en las premisas. Por ejemplo, si vemos que está mojada la acera delante de nuestra casa y el día está nublado, concluimos que seguramente haya llovido hace poco, descartando otras alternativas, como que la persona encargada de la portería ha lavado la calle. Esta última conclusión no es inconsistente con las premisas (no hay nada que impida lavar las calles a una persona), pero las premisas avalan con más confianza a la primera conclusión que a la segunda.

Otra característica del razonamiento ordinario es su tolerancia a la vaguedad y a la imprecisión, hecho incompatible con la deducción clásica. Teniendo en cuenta que la vaguedad es un fenómeno muy común en el lenguaje natural, la deducción es un procedimiento de inferencia raro en nuestros argumentos cotidianos.

Un tipo de inferencia típicamente deductiva es el silogismo, definido ya en el siglo IV a.C por Aristóteles [1]. Este se caracteriza fundamentalmente por tratar con: i) argumentaciones compuestas por dos premisas y una conclusión, siendo todas ellas enunciados cuantificados; ii) argumentaciones que incluyen tres términos: el Término Mayor, que aparece en la Premisa Mayor y es el predicado de la conclusión; el Término Menor, que aparece en la Premisa Menor y es el sujeto de la conclusión y, por último, el Término Medio, que sólo aparece en las premisas; iii) sólo se consideran los dos cuantificadores clásicos (universal y existencial) –y sus respectivas negaciones- (*todos*, *ningún*, *algún*, *alguno… no*), habitualmente representados en el Cuadrado Lógico de la Oposición (ver Figura 1).

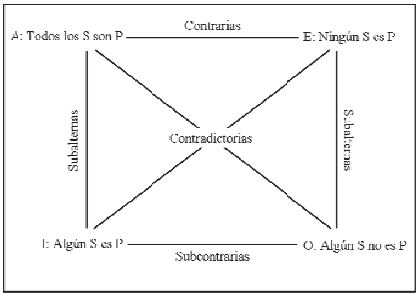


Figura 1. Cuadrado Lógico de la Oposición aristotélico.

A pesar de que la naturaleza lógico-lingüística del silogismo lo aproxima al razonamiento ordinario (la forma lógica de sus enunciados queda reflejada en su expresión lingüística y los términos denotan conjuntos), un análisis

detallado del mismo muestra que su aplicación a argumentos expresados en lenguaje natural es muy limitada, dado que: i) de la gran plétora de cuantificadores existentes en la argumentación ordinaria, sólo se consideran dos cuantificadores nítidos y sus correspondientes negaciones; ii) el encadenamiento de los términos tiene que ser exacto y preciso, a pesar de que muchos términos empleados en el razonamiento silogístico ordinario son de significado vago.

En la bibliografía podemos encontrar algunas propuestas que intentan mejorar estos aspectos clásicos del silogismo para incrementar su expresividad. La inclusión de cuantificadores no nítidos ha sido ampliamente tratada ([3], [7], [12] entre otros); pero el estudio del encadenamiento flexible que posibilite el uso de términos vagos o de significado similar no ha sido analizado con la misma profundidad, por lo que se mantiene su concepción tradicional: cualquier argumento que no tenga un encadenamiento preciso en el Término Medio será una falacia. Esta se denomina, en particular, la Falacia de los Cuatro Términos, en tanto pretende indicar que el silogismo es incorrecto porque incluye más de tres términos.

Uno de los objetivos de este trabajo se enmarca precisamente en este ámbito. Partimos del hecho de que no todos los argumentos con cuatro términos son falaces, puesto que si el término medio está compuesto por dos palabras o expresiones que tienen significados similares, el argumento puede ser aceptable aunque no sea estrictamente deductivo. En el ejemplo de la Tabla 1, el que no igualen con exactitud las expresiones 'persona saludable' y 'persona robusta' no nos impide juzgar a la conclusión como altamente plausible y teniendo pleno sentido. Es decir, deseamos proponer una generalización o flexibilización del silogismo clásico para incluir la posibilidad de que se concluya algo con sentido aún cuando los términos medios de un silogismo no solapen completamente.

Tabla 1. Falacia de los 4 términos.

Toda *persona deportista* es una *persona saludable*
Toda *persona robusta* es una *persona vigorosa*
Toda persona deportista es una persona vigorosa

En este trabajo nos centraremos fundamentalmente en el análisis de la similitud lingüística desde un punto de vista cuantitativo y cualitativo. Desde el punto de vista cuantitativo proponemos el uso de los denominados cuantificadores de similitud (procedentes de la estadística), que nos permiten analizar el parecido significativo entre dos términos en función de los elementos compartidos en sus definiciones. Desde el punto de vista cualitativo, nos centraremos en la sinonimia, dado que es la relación lingüística por excelencia que denota la vecindad significativa entre dos términos. Abordaremos el análisis de la sinonimia para justificar que es posible dar un grado de plausibilidad a una conclusión en un silogismo que, como el del ejemplo, aun no siendo estrictamente válido, es sumamente plausible.

Este trabajo se organiza en las siguientes secciones: en la sección 2, analizamos la similitud desde el punto vista cuantitativo; en la sección 3, analizamos la similitud cualitativa; en la sección 4, la similitud que llamamos contextual y, en la sección 5, resumimos las principales conclusiones de este trabajo.

2 SIMILITUD CUANTITATIVA: CUANTIFICADORES DE SIMILITUD

Esta idea ha sido ya parcialmente desarrollada en [8]. Como punto de partida tomamos una definición extensiva de cada uno de los términos del silogismo; es decir, cada término del silogismo denota una serie enumerable de elementos. Consideremos el ejemplo de la Tabla 2.

Tabla 2. Razonamiento silogístico plausible.

Todos los *aficionados a la música clásica* son melómanos
Algún *aficionado a la ópera* es gallego
Algún gallego es melómano

El rol de Término Medio está desempeñado por dos términos distintos, 'aficionados a la música clásica' en la Premisa Mayor y 'aficionados a la ópera' en la Premisa Menor. Adoptando un punto de vista extensional, cada uno de los términos denota dos conjuntos de individuos *a priori* independientes: aquellos a los que les gusta la música clásica y aquellos a los que le gusta específicamente la ópera (clásica). Desde un punto de vista intensional, si hay una relación entre ambos conjuntos, dado que los aficionados a la ópera constituyen un subconjunto de los aficionados a la música clásica. Ahora bien, ¿cómo de similares son estas expresiones desde el punto de vista extensional?

Abordaremos esta cuestión usando cuantificadores de similitud. Estos son de tipo vago y, aunque no aparecen directamente como un cuantificador específico, sí adoptan expresiones típicamente lingüísticas como "*A* y *B* se parecen mucho entre ellos", "los conjuntos *A* y *B* contienen aproximadamente los mismos elementos",… donde *A* y *B* denotan términos o conjuntos de objetos. En su versión más simple, proponemos definirlos mediante el cálculo de cardinalidades entre conjuntos.

Así pues, sea *E* el universo de referencia y *P(E)* el conjunto potencia de *E*. La evaluación de un enunciado "Y_1 es similar a Y_2 en un grado α" puede ser modelada como:

$$\alpha: \mathcal{P}(E)\ x\ \mathcal{P}(E)\ \rightarrow \{0,1\}$$

$$(Y_1, Y_2)\ \rightarrow\ \alpha(Y_1, Y_2) = \begin{cases} 0 = \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1 \cup Y_2|} < \alpha, Y_1 \cup Y_2 \neq \emptyset \\ 1 = \frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1 \cup Y_2|} > \alpha, Y_1 \cup Y_2 \neq \emptyset \\ 1 = Y_1 \cup Y_2 = \emptyset \end{cases} \quad (1)$$

En letra, si el resultado de la división de las cardinalidades es igual a 1, decimos que los conjuntos son iguales;

mientras que si el resultado es 0, decimos que los conjuntos son completamente diferentes.

Si particularizamos el ejemplo de la Tabla 2 a una ciudad concreta, digamos Santiago de Compostela, podemos modificar el silogismo para dar entrada a esta afirmación como parte de la argumentación, tal y como se muestra en la Tabla 3, y trasladar el grado de similitud a la conclusión bajo la siguiente asunción: cuanto mayor sea el grado de similitud entre los términos, mayor es el grado de confianza en la conclusión del silogismo.

Tabla 3. Silogismo encadenado aproximado

Todos los *aficionados a la música clásica* en **Santiago de Compostela** son melómanos
Algún *aficionado a la ópera* en **Santiago de Compostela** es gallego
Aficionado a la ópera y *aficionado a la música clásica* en **Santiago de Compostela** son similares en grado α
Algún gallego es melómano (con una confianza α)

Así pues, obtenemos una conclusión con un grado de plausibilidad o confianza sobre la oración cuantificada de la conclusión que depende directamente de la confianza en el encadenamiento entre los términos.

2.1. LIMITACIONES DE ESTE MODELO

El modelo anteriormente expuesto presenta algunas deficiencias.

En primer lugar, identificar la extensión exacta del conjunto resulta difícil en algunos contextos. Desde el punto de vista computacional u operativo, este método para calcular la similitud entre dos términos es claro y puede ser enunciado con precisión. Sin embargo, desde el punto de vista conceptual no ocurre lo mismo, pues no siempre resulta sencillo determinar la cardinalidad de cada uno de los conjuntos y de las intersecciones y uniones entre ellos. Por ejemplo, ¿cuántos aficionados hay a la música clásica y a la ópera en Santiago de Compostela? Podemos usar distintos métodos para determinarlo (asistentes a los conciertos, ventas de CDs en tiendas de música,…), pero, en general, definir esa similitud con cierto fundamento parece requerir un esfuerzo costoso.

Otro problema es el encadenamiento con los términos extremos. Si la relación entre los términos medios se basa básicamente en el solape de los mismos, es sencillo construir un contra-ejemplo donde los términos extremos pertenezcan a subconjuntos fuera del solape. Por ejemplo, en el silogismo de la Tabla 3 es fácil construir un contra-argumento en el que *todos los gallegos aficionados a la ópera en* **Santiago de Compostela** sean aquellos aficionados a la ópera que no son aficionados a la música clásica. En general, además de introducir la premisa con la similitud entre los conceptos, debemos aceptar otras premisas implícitas (por ejemplo, los elementos están más o menos uniformemente distribuidos entre ambos conjuntos,…), lo que podría generar argumentos con presuposiciones no tan ampliamente aceptadas.

Un tercer problema, y quizá el más importante, es que una similitud basada meramente en valores cuantitativos es muy limitada para su uso en el lenguaje natural. Los seres humanos manejamos muchos más tipos de similitud que la basada meramente en el número de elementos que comparten dos conjuntos. Por ejemplo, la similitud entre 'aficionados a la ópera' y 'aficionados a la música clásica' también puede ser conceptual, en la medida en que *ópera* y *música clásica* denotan un tipo de música con ciertas características comunes, como ser ambas música orquestal. Otro tipo de similitud muy usada en el lenguaje natural es la analogía, que esta definición basada en cardinalidades no puede representar adecuadamente porque deja al margen algunas de sus posibles caracterizaciones, como la analogía basada en la estructura o en la función.

Así pues, aunque el uso de cuantificadores de similitud para modelar cuánto se parecen dos conceptos puede ser adecuado en algunos ámbitos e incluso en algunas inferencias silogísticas, su uso general y extensivo presenta limitaciones. Es necesario desarrollar una alternativa que permita superar estas dificultades.

3 SIMILITUD CUALITATIVA: SINONIMIA

La sinonimia es, quizás, la relación lingüística por excelencia que denota la similitud entre dos conceptos. Tradicionalmente se han dado dos caracterizaciones de la sinonimia en términos de significado: a) una, de inspiración lógica, que considera que dos términos son sinónimos si significan exactamente lo mismo y, como tales, son sustituibles *salva veritate* en una expresión lógica de manera que, si esta era verdadera (falsa), reemplazando un término por otro sinónimo la expresión seguiría siendo verdadera (falsa); b) otra, de inspiración lingüística, que dice que dos términos son sinónimos si significan lo mismo o aproximadamente lo mismo. Para nuestro propósito de extender el silogismo clásico a fin de permitir inferencias plausibles, esta concepción es la más útil y adecuada: si los términos que desempeñan el rol de término medio son sinónimos, el encadenamiento debe admitirse y el grado de vecindad entre los términos debe transmitirse de alguna manera a la conclusión, que no será segura, pero sí aceptable.

A continuación abundaremos en estas dos concepciones de la sinonimia y en su posible utilización en el silogismo aproximado: i) la sinonimia como una relación nítida; ii) la sinonimia como una relación de parecido.

3.1. SINONIMIA COMO RELACIÓN NÍTIDA

La concepción de la sinonimia como una relación nítida ha sido defendida principalmente por algunos filósofos del lenguaje, como W. O. Quine. Según él, para determi-

nar sinonimia entre dos términos hay que identificar sus significados y comprobar que pertenecen a la misma clase de equivalencia [10]. Dado que, desde un punto de vista lógico, el significado de una oración asertiva se identifica con su valor de verdad, dos términos serán sinónimos si ambos son verdaderos o ambos son falsos: *'A truth that can be turned into a logical truth by substituting synonyms for synonyms. Statements may be said simply to be cognitively synonymous when their biconditional (the result of joining them by "if and only if") is analytic'* [10: p. 32]

Desde el punto de vista lógico, la sinonimia permite la substitución de un término por otro en cualquier contexto, sin que la verdad del enunciado resultante de tal cambio se vea comprometida. Sin embargo, este tipo de sinonimia sólo se da en un número muy reducido de palabras y en contextos a menudo profesionales, como muestra el ejemplo de "estetoscopio" y "fonendoscopio" en el ámbito de la medicina. En el lenguaje natural lo usual es que el significado dependa fuertemente del contexto y que las palabras sinónimas sean inter-sustituibles en algún grado o proporción y con alguna pérdida o alteración significativa.

3.2. SINONIMIA COMO RELACIÓN DE PARECIDO

La interpretación de la sinonimia como una relación de parecido tuvo como precursor a Gabriel Girard [4], quien la describió así: *'In order to obtain property, one does not have to be demanding with words; one does not have to imagine all that so-called synonyms are so with all the rigorousness of perfect resemblance; since this only consists of a principal idea which they all enunciate, rather each one is made different in its own way by an accessorial idea which gives it its own singular character. The similarity bought about by the principal idea thus makes the words synonyms; the difference that stems from the particular idea, which accompanies the general one, means that they are not perfectly so, and that they can be distinguished in the same manner as the different shades of the same colour'.*

Durante el siglo XX esta visión de la sinonimia se ha convertido en la dominante en el estudio del lenguaje natural. La sinonimia en el lenguaje ordinario facilita hacer inferencias aproximadas, con las que tomamos múltiples decisiones de sentido común. En esta acepción, la sinonimia se considera una relación de similitud, no de identidad, que puede variar según el contexto de uso.

En [11] desarrollamos los pasos iniciales de esta idea. Como punto de partida asumimos que la herramienta que quizás mejor refleja la sinonimia es un diccionario de sinónimos *(thesaurus)*, en tanto es una mezcla del uso de la lengua por sus hablantes y de la sistematización que de la misma hacen los profesionales que mejor la conocen: los lingüistas. WordNet [6], un *theasurus* de referencia en la lengua inglesa, es quizás la fuente más usada para determinar sinonimia entre palabras, al definir cada término, entre otras relaciones, por su *synset*; esto es, por su conjunto de sinónimos. Usando los *synsets*, proponemos usar como medidas de sinonimia medidas de similitud, como los coeficientes de Jaccard y del Dado, y atenernos a la siguiente máxima: cuanto mayor sea el número de sinónimos que comparten dos términos, mayor es la similitud entre ellos.

3.3. LIMITACIONES DE ESTE MODELO

El uso de medidas de sinonimia (inversas de la distancia matemática) nos permite cuantificar el grado de similitud entre dos términos. Sin embargo, para un mismo par de sinónimos podemos obtener resultados significativamente diferentes en función de la media aplicada [9,11]. Surge la pregunta natural de cuál usar en cada caso, o incluso también la cuestión de si es plausible usarlas todas y después calcular la media de los resultados obtenidos. Se trata de un problema abierto que aproximaremos a continuación usando otra fuente de información también aportada por WordNet: las glosas.

4 SIMILITUD CONTEXTUAL: GLOSAS

El contexto es, sin duda, uno de los elementos fundamentales que los humanos usamos para desambiguar palabras o precisar lo necesario para interpretar mejor a aquellas que tienen un significado vago. Sin embargo, puesto que el contexto engloba muchos factores, su modelado, aunque crucial, resulta muy complejo.

Un primer paso para empezar a abordar el contexto desde el punto de vista del silogismo encadenado aproximado es utilizar la información proporcionada por WordNet denominada *glosa*. Además de los *synsets*, WordNet asocia a cada palabra una o varias breves descripciones de las distintas acepciones o usos que puede tener una palabra. En general, no existe un patrón homogéneo para hacer la glosa de un término: puede otorgarle una descripción positiva, negativa o incluso circular del mismo, entre otras [5].

Desde el punto de vista del procesamiento del lenguaje natural, las glosas son útiles para desambiguar los términos; es decir, para determinar la acepción o sentido con que se está usando un término en un contexto dado. Las glosas de dos términos pueden incluir descripciones completamente diferentes o mostrar solape.

En [2], se propone una técnica para determinar el solape denominada *extended gloss overlap*. Su objetivo consiste, básicamente, en hallar cómo de relacionados están dos conceptos según el número de palabras compartidas (solape) en sus glosas, así como en sus sinónimos. Esta medida se fundamenta en la asunción de tres premisas:

1. Palabras que aparecen juntas en una oración serán usadas en sentidos relacionados.

2. El grado en el cuál dichos sentidos están relacionados puede ser identificado por el número de solapes en sus glosas; esto es, cuanto más relacionados están dos sentidos, más palabras comparten en sus glosas.
3. Los solapes también proporcionan evidencias de una relación implícita entre los *synsets* de ambos términos.

Por ejemplo, consideremos las glosas de *coche* y *neumático* en Wordnet (*car* y *tire*):

- ***Car:*** *a motor vehicle with four wheels; usually propelled by an internal combustion engine;*
- ***Tire:*** *hoop that covers a wheel.*

Ambos conceptos comparten la palabra *wheel* (*rueda*). Si escogemos otra palabra, como por ejemplo *tree* (*árbol*), podemos comprobar fácilmente como esta relación no se da:

- ***Tree:*** *a tall perennial woody plant having a main trunk and branches forming a distinct elevated crown; includes both gymnosperms and angiosperms*

Ahora bien, aunque *car* y *tire* son conceptos implícitamente relacionados, esta relación no aparece como tal en WordNet. Si se analizan dos hiperónimos de ambos conceptos (*vehicle* y *hoop*), como se indica en [2], se puede comprobar como ambos conjuntos de *synsets* sí están relacionados.

4.1. GLOSAS PARA EL SILOGISMO APROXIMADO

Para ilustrar como las glosas pueden ser útiles para precisar mejor esa relación de sinonimia, empezaremos comentando una variante de la falacia de los cuatro términos, donde en lugar de haber cuatro términos se usa el témino medio en diferentes acepciones en las premisas. Consideremos el ejemplo de la Tabla 4.

Tabla 4. Falacia del término medio ambiguo

Todos los *revolucionarios* tienen ideas brillantes
Todos los anarquistas son *revolucionarios*
Todos los anarquistas tienen ideas brillantes

De acuerdo con un diccionario del castellano, 'revolucionario' tiene tres acepciones: 1) persona, causa: insurrecto, rebelde, agitador; 2) innovador, reformador, novedoso; 3) persona: partidario de cambios drásticos.

En la premisa mayor (la primera), el término *revolucionarios* es usado en la acepción 2). En la premisa menor (la segunda) lo es en la acepción 1) o 3). Así pues, la conclusión claramente no se sigue de las premisas puesto que el encadenamiento entre los términos mayor y menor no es el adecuado.

Analicemos el conjunto de glosas que WordNet nos proporciona para cada uno de estos términos (*revolucionarios* (*revolutionary*), *brillante* (*brilliant*) y *anarquista* (*anarchist*)):

- ***Revolutionary:*** *(1) markedly new or introducing radical change; (2) of or relating to or characteristic or causing an axial or orbital turn; (3) relating to or having the nature of a revolution; (4) advocating or engaged in revolution*
- ***Brilliant:*** *(1) of surpassing excellence; (2) having or marked by unusual and impressive intelligence; (3) characterized by grandeur; (4) having strong or striking color; (5) full of light; shining intensely; (6) clear and sharp and ringing*
- ***Anarchist:*** *(1) of or related to anarchism or tending toward anarchism*

Como podemos ver, no hay ningún término compartido entre las distintas glosas de cada uno de los términos. Podemos tomar este hecho como un dato significativo para avalar la conclusión anterior: el encadenamiento entre *anarquistas* e (idea) *brillante* no se puede llevar a cabo usando el término *revolucionario*.

Consideremos ahora el ejemplo de silogismo aproximado de la Tabla 5, donde el rol de término medio está desempeñado por dos términos distintos.

Tabla 5. Silogismo encadenado aproximado aceptable.

Todos los terremotos son un *desastre*
Ninguna *calamidad* es deseable
Ningún *terremoto* es *deseable*

Veamos las glosas para cada uno de los cuatro términos en WordNet (calamidad (*calamity*), indeseable (*undesirable*) -puesto que aparece en una premisa negativa-, terremoto (*earthquake*) y desastre (*disaster*)):

- ***Calamity:*** *(1)* ***an event resulting in great loss and misfortune***
- ***(Un)desirable:*** *(1) not wanted; (2) not worthy of being chosen (especially as a spouse)*
- ***Earthquake:*** *(1) shaking and vibration at the surface of the earth resulting from underground movement along a fault plane or from volcanic activity; (2) a disturbance that is extremely disruptive*
- ***Disaster:*** *(1) a state of extreme (usually irremediable) ruin and* ***misfortune****; (2)* ***an event resulting in great loss and misfortune****; (3) an act that has disastrous consequences*

En este caso, podemos comprobar cómo los términos *calamidad*, *(in)deseable* y *desastre* aparecen fuertemente relacionados: las glosas de *calamity (1)* y *disaster (2)* coinciden totalmente; el término 'misfortune' también aparece en *disaster (1);* así pues, dos de las tres glosas de *disaster* están directamente relacionadas con la única glosa de *calamity*, lo que nos permite inferir un parecido de familia entre ambos términos. Con el término *(un)desirable*, la relación no es tan claramente medible en

término cuantitativos, pero sí se puede apreciar intuitivamente que está relacionado con *calamity* y *disaster* por la glosa (1), dado que algo 'not wanted' se asocia usualmente con 'misfortune' y 'great loss'. Por último, cabe mencionar que con *earthquake* no hay ningún tipo de relación explícita, pero ya que es un nombre que describe un fenómeno natural muy concreto, esa ausencia de relación tampoco es significativa.

Así pues, si asumimos el principio "cuantos más términos compartan las glosas, más semánticamente relacionados están dichos términos", tenemos un criterio, entre otros posibles, para seleccionar entre las distintas medidas de similitud descritas en [11]: se utilizará la medida de similitud con resultados más altos cuanto más semánticamente relacionados estén dos términos. Además, el uso de las glosas nos permite no sólo considerar los términos del encadenamiento, sino también los otros términos del silogismo, lo que significa que estamos usando información contextual.

El uso de las glosas en conjunción con la sinonimia parece ser una buena alternativa para evaluar el parecido de familia entre dos términos en un silogismo aproximado y determinar, con más fundamento, el grado de confianza en la conclusión usando, de entre todas las que existen, las medidas de similitud más adecuadas.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos profundizado en el estudio de recursos lingüístico-formales para abordar el silogismo aproximado. Empezamos considerando un modelo meramente cuantitativo para medir la vecindad entre términos del silogismo que no son iguales, aunque sí parecidos, pero la enumeración extensional de los elementos presentaba dificultades para su aplicación. A continuación hemos considerado una aproximación semántica, basada en el concepto de sinonimia, con unos resultados razonables pero sin una guía clara para escoger entre las distintas medidas de similitud existentes. Por último, hemos analizado el uso de las glosas como elementos que nos aportan información contextual relevante para la selección de la medida de similitud adecuada.

Como trabajo futuro, proponemos profundizar en el estudio de otros recursos lógico-lingüísticos, como las teorías formales de contextos o la antonimia, para justificar mejor la elección de una medida de similitud que traslade a la conclusión la información de las premisas en el silogismo encadenado aproximado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Ministerio de Economía e Innovación y Fondo Europeo de Desarrollo Regional (ERDF/FEDER) a través de la ayuda TIN2011-29827-C02-02 y por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (ERDF/FEDER) a través de las ayuda CN2012/151 y CN2011/058 de la Consellería de Educación de la Xunta de Galicia.

Referencias

[1] Aristóteles: *Organon*, Gredos, Madrid, 1982-1986.

[2] S. Banerjee, T. Pedersen: Extended gloss overlaps as a measure of semantic relatedness. En: *Proceedings of the 18th international joint conference on Artificial intelligence*, Acapulco (México), pp. 805-810, 2003.

[3] D. Dubois, L Godo, R. López de Mántaras, H. Prade: Qualitative Reasoning with Imprecise Probabilities. *Journal of Intelligent Information Systems* 2, pp. 319-363, 1993.

[4] G. Girard: *La Justesse de la langue françoise, ou les différentes significations des mots qui passent pour synonymes*, Leurent d'Houry, 1718.

[5] X. G. Guinovart, X. M. Clemente, A. G. Pereira, V. T. Lorenzo: Galnet: WordNet 3.0 do galego. *LinguaMÁTICA* 3, pp. 61-67, 2011.

[6] G. A. Miller: WordNet: A Lexical Database for English. *Communications of the ACM* 38, pp. 39-41, 1995.

[7] M. Pereira-Fariña, J. C. Vidal, F. Díaz-Hermida, A. Bugarín: A fuzzy syllogistic reasoning schema for generalized quantifiers. *Fuzzy Sets and Systems*, En prensa, 2013.

[8] M. Pereira-Fariña, A. Sobrino: Una propuesta de silogismo encadenado aproximado. En: *Actas del VII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, Servizo de Publicacions da USC, Santiago de Compostela, pp. 705-713, 2012.

[9] M. Pereira-Fariña, A. Sobrino, A. Bugarín: A Proposal of Fuzzy Chained Syllogism based on the Concept of Synonymy. En: *Proc. 2013 International Fuzzy Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2013)*, Hyderabad (India), pp. 1-8, 2013.

[10] W. Quine: From a Logical Point of View. En: *Two dogmas of empiricism,* Har, pp. 20-46, 1980.

[11] A. Sobrino-Cerdeiriña, S. Fernández-Lanza: Synonymy from a computational and philosophical perspective. En: *Proceedings eighth international conference IPMU*, II, 2000.

[12] L. A. Zadeh: Syllogistic reasoning in fuzzy logic and its applications to usuality and reasoning with dispositions. *IEEE Transactions On Systems, Man and Cybernetics* 15, pp. 754-765, 1985.

FUZZY SETS FROM THE ETHICS OF SOCIAL PREFERENCES

José Carlos R. Alcantud[1]

[1]*Edificio FES, Campus Unamuno, 37007 Salamanca, Spain*, jcr@usal.es

Abstract

We show that the problem of evaluating infinite sequences (or streams) of utilities by a unique utility (or social welfare function) can be stated in terms of fuzzy subsets of the set of infinite utility sequences. For each stream, its evaluation can be viewed as its degree of membership to the subset of 'ethically acceptable' streams within the set of possible sequences. Since the property 'being ethically acceptable' is not well defined and cannot be exactly measured, the fuzzy approach seems especially adequate.

Keywords: Fuzzy subset, Social welfare function, Ethical.

1 INTRODUCTION

The resolution of real-world intergenerational conflicts such as global warming has given place to many analyses of intergenerational social preferences over infinite streams of utilities or well-being. A very authoritative review of these contributions is covered by Asheim [2]. They raise the question: How should the streams of utilities be ranked from a social perspective, when the interests of all generations must be respected?

A practical way to perform this comparison consists of evaluating the relevant infinite streams of utilities by a unique utility, which is then called a social welfare function. In the present contribution we show that this problem can be stated in terms of fuzzy subsets of the relevant set of infinite utility streams. The idea is as follows: when these evaluations are valued in $[0,1]$ we can view them as membership functions that capture the degree of agreement with the imprecise statement 'the infinite stream is ethically acceptable'. This seems pretty appropriate because the property 'being ethically acceptable' is not well defined and cannot be exactly measured. In technical terms, any social welfare function $\mathbf{W}$ on a set of infinite streams $\mathbf{X}$ whose values lie in $[0,1]$ (and this is a matter of normalization) is identified with a fuzzy subset of $\mathbf{X}$. And for each $\mathbf{x}$, $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ is its degree of membership to the subset of 'ethically acceptable' streams in $\mathbf{X}$.

Since social welfare functions are used to determine optimal policies in infinite horizon models, they are expected to verify an adequate combination of principles of two kinds: egalitarian treatment of the generations and sensitivity to the interests of each generation. Such requirement can be stated in terms of our alternative viewpoint, and then *ethical* fuzzy subsets appear naturally, with properties inherited from the literature on intergenerational equity. In fact the design of acceptable social welfare functions is controversial since many impossibility results show that an infinite number of generations cannot be treated equally while still being sensitive to the interests of each generation. We transfer that debate to the selection of ethical fuzzy subsets.

This work is organized as follows. In Section 2 we present the standard approch to the design of social welfare functions and some of its desirable properties in the context of intergenerational aggregation of the utilities. In Section 3 we state the corresponding problem in terms of *ethical* fuzzy sets, with prominent examples and the resolution of some particular statements. Other variations that lead to related approaches to the problem of constructing ethical fuzzy subsets are discussed too. We conclude in Section 4.

2 SOCIAL WELFARE FUNCTIONS: EQUITY AND EFFICIENCY PROPERTIES

Let $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ represent a domain of infinite-horizon utility sequences (henceforth, streams). We adopt the standard notation for infinite streams: $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n, ...) \in \mathbf{X}$. Each x_i can represent for example, either the allocation of utility to an agent from an infinite society or the welfare endowment of a generation or its consumption. For simplicity we

use the terminology from intergeneral justice and say that each component is a generation. We write $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ if $x_i \geqslant y_i$ for each $i = 1,2,...$; $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ if $x_i > y_i$ for each $i = 1,2,...$; and $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ if $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ and $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Social welfare relations are binary relations on $\mathbf{X}$. They are interpreted as normative welfare criteria on the domain $\mathbf{X}$. A *social welfare function* (SWF) is a function $\mathbf{W} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, also regarded as a representable social welfare relation. The analysis of intergenerational aggregation by means of SWFs is usually called the Basu-Mitra approach. More generally, one can use binary relations in the comparison of utility streams.

Let $\mathbf{W}$ be a SWF. We first proceed to recall some efficiency properties (axioms) that we use along the paper. Then we mention the equity property under inspection, as well as other possible approaches.

2.1 EFFICIENCY PROPERTIES

The most standard version of the Pareto axiom is the very demanding principle that improving the allocation of at least one generation should increase the social evaluation:

Axiom SP (*Strong Pareto*). If $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ then $\mathbf{W}(\mathbf{x}) > \mathbf{W}(\mathbf{y})$.

The next axioms are all implied by Strong Pareto.

Axiom MON (*Monotonicity*). If $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ then $\mathbf{W}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{W}(\mathbf{y})$.

MON is an undisputable property of efficiency. The next two properties are succesively weaker than SP:

Axiom IP (*Infinite Pareto*). If $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ and $x_i > y_i$ for an infinite number of indices i, then $\mathbf{W}(\mathbf{x}) > \mathbf{W}(\mathbf{y})$.

Axiom WP (*Weak Pareto*). If $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ then $\mathbf{W}(\mathbf{x}) > \mathbf{W}(\mathbf{y})$.

An independent weaker version of Strong Pareto is:

Axiom WD (*Weak Dominance*). If $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, there is $j \in \mathbb{N}$ with $x_j > y_j$, and $x_i = y_i$ for all $i \neq j$, then $\mathbf{W}(\mathbf{x}) > \mathbf{W}(\mathbf{y})$.

2.2 EQUITY PROPERTIES

The Anonymity axiom (**Axiom AN**) demands that any finite permutation of a utility stream produces a socially indifferent utility stream. This is a *procedural* property of equal treatment of all generations. Such impartiality avoids biases towards particular generations and in particular, avoids dictatorships and impatiant behaviors.

Besides procedural equity, in order to implement various egalitarian principles the literature on intergenerational justice has provided a number of useful *consequentialist* equity properties. This term means that contrarily to the case of procedural equity requirements, some streams are declared as socially better than other ones on the basis of ethical principles. We return to this discussion in Subsection 3.4 below.

2.3 THE CODOMAIN OF SWFs

Observe that because there exist strictly increasing mappings $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, every social welfare function $\mathbf{W} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ can be transformed into a mapping $\mathbf{W}' = \rho \circ \mathbf{W} : \mathbf{X} \longrightarrow [0,1]$ in such way that $\mathbf{W}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{W}(\mathbf{y})$ and $\mathbf{W}'(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{W}'(\mathbf{y})$ are equivalent, for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$.

The composition with ρ does not affect the fulfilment of the axioms above: $\mathbf{W}$ is SP, resp., MON, IP, WP, WD, AN, if and only if so is $\mathbf{W}' = \rho \circ \mathbf{W}$.

Therefore for the purpose of investigating the existence of SWFs with the axioms we have mentioned, we do not lose generality if the codomain is assumed to be $[0,1]$.

3 SOCIAL WELFARE FUNCTIONS AND FUZZY SETS

SWFs are used to compare infinite streams of utilities, e.g. by a social planner that has to decide among distributions of well-being. Therefore SWFs are regarded as evaluations that must meet adequate properties of efficiency and equity in order to fulfil that role. Efficiency must be requested in some form, since deciding on allocations should be made consistently with certain sensitivity to the interest of the individuals or generations. Equity among generations is expected too, since this decision should be made with respect to commonly agreed egalitarian principles as well. In particular, the term *ethical* has been applied by prominent contributors to this literature to mean that both SP and AN are met (cf., Svensson [13]). Although we use it in this technical sense too, we also refer to the common meaning of the term 'ethical' in this context: a 'fair' combination of efficiency and equity properties.

From another perspective, when these evaluations or SWFs take values in $[0,1]$ they can be regarded as membership functions that capture the degree of agreement with the statement 'the infinite stream is ethically acceptable'. Now the evaluation has an intrinsic value rather than being a mere way to compare among streams (in order to choose a maximally graded distribution of the welfare indicators, for example). In short, we can view any social welfare function $\mathbf{W}$ on $\mathbf{X}$ (whose values lie in $[0,1]$) as a fuzzy subset of $\mathbf{X}$ and for each $\mathbf{x}$, $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ is the degree of membership to the subset of 'ethically acceptable' streams in $\mathbf{X}$. To better fit this interpretations, in the usual case where $\mathbf{X} \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$ and both $\mathbf{1} = (1,1,...,1,...) \in \mathbf{X}$ and $\mathbf{0} = (0,0,...,0,...) \in \mathbf{X}$ hold

true, it seems convenient to restrict our analysis to SWFs that verify $\mathbf{W}(\mathbf{1}) = 1$ and $\mathbf{W}(\mathbf{0}) = 0$, which due to MON is simply a matter of normalization.

Therefore we can view one of the topics of Social Choice as a matter of ellucidating the existence of fuzzy subsets of a fixed $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (very often, $\mathbf{X} = [0,1]^{\mathbb{N}}$) that verify certain lists of properties. As argued above, we request that the degree of membership of the stream $\mathbf{1} = (1,1,...,1,...)$, resp. $\mathbf{0} = (0,0,...,0,...)$, must be 1, resp. 0. This means that whatever the interpretation of the term 'ethically acceptable distribution' of the infinite utilities, attaching the maximum value to all generations is absolutely acceptable, and attaching the null value to all generations is absolutely insupportable. Needless to say, one can reinterpret such fuzzy subsets as SWFs with the corresponding list of properties.

To illustrate this alternative position, we proceed to define some pertinent concepts of ethical fuzzy subsets (in the broad sense of the term) and then we give some results that concern their possible existence. Finally in this Section, we make a short digression on other related possibilities that are left unexplored in this first contribution.

3.1 PROMINENT EXAMPLES

A very direct definition of a fuzzy subset that is inspired in a well-known SWF is given in our first example:

Example 3.1. The *minimax* or Rawlsian fuzzy subset of $\mathbf{X} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ is defined by the membership function $\mu_R : \mathbf{X} \longrightarrow [0,1]$ such that

$$\mu_R(\mathbf{x}) = \inf_i x_i, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \tag{1}$$

The most popular objective function used to determine optimal policies in infinite horizon models is the discounted sum of utilities, which depends on a discount factor $\delta \in (0,1)$. When $\delta > \frac{1}{2}$ the standard expression for such SWF produces evaluations of streams that are larger than 1 thus we need to adapt it in order to define our next prominent example of a fuzzy subset in this analysis:

Example 3.2. Given $\delta \in (0,1)$, the δ-discounted fuzzy subset of $\mathbf{X} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ is $\mu_\delta : \mathbf{X} \longrightarrow [0,1]$ such that

$$\mu_\delta(\mathbf{x}) = (1-\delta)\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} x_i, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \tag{2}$$

As requested by our definition, $\mu_R(\mathbf{1}) = \mu_\delta(\mathbf{1}) = 1$ and $\mu_R(\mathbf{0}) = \mu_\delta(\mathbf{0}) = 0$.

In the analysis of infinite horizon models, a recent proposal that has attracted much attention is the *Rank-discounted utilitarian* SWF (cf., Zuber and Asheim [14, Definition 1], where an *Extended* rank-discounted utilitarian SWF is defined too). This suggests the next example that supposes a variation of Example 3.2 above:

Example 3.3. Let $\bar{\mathbf{X}}$ be the set of allocations of $[0,1]^{\mathbb{N}}$ whose elements can be permuted to obtain non-decreasing streams. Given $\delta \in (0,1)$, the δ-rank-discounted fuzzy subset of $\bar{\mathbf{X}}$ is $\rho_\delta : \bar{\mathbf{X}} \longrightarrow [0,1]$ such that

$$\rho_\delta(\mathbf{x}) = (1-\delta)\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} x_{\lfloor i \rfloor}, \forall \mathbf{x} \in \bar{\mathbf{X}} \tag{3}$$

where $(x_{\lfloor 1 \rfloor}, x_{\lfloor 2 \rfloor}, ...)$ is the non-decreasing infinite stream which is a permutation of $\mathbf{x}$.

3.2 ETHICAL FUZZY SETS: VARIATIONS OF A COMPREHENSIVE TERM

Depending on the combination of properties that we demand to our fuzzy subsets of $\mathbf{X}$, various concepts of ethical (in the comprehensive sense) fuzzy subsets come up.

Definition 3.1. A fuzzy subset of a domain of infinite utility streams $\mathbf{X} \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$ such that the degree of membership of $\mathbf{1} \in \mathbf{X}$ is 1, resp. of $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$ is 0, is called

1. **Ethical** if *a*) The degree of membership of any $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ does not change under finite permutations of its coordinates; and *b*) when $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x}$ allocates more than $\mathbf{y}$ to some generation, and $\mathbf{x}$ does not allocate less than $\mathbf{y}$ to any generation, then $\mathbf{x}$ has a higher degree of membership than $\mathbf{y}$.

2. **Pre-ethical** if *a*) above; and *b*) when $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x}$ allocates more than $\mathbf{y}$ to an infinite number of generations, and $\mathbf{x}$ does not allocate less than $\mathbf{y}$ to any generation, then $\mathbf{x}$ has a higher degree of membership than $\mathbf{y}$.

3. **Weakly ethical** if *a*) above; and *b*) when $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x}$ allocates more than $\mathbf{y}$ to all generations, then $\mathbf{x}$ has a higher degree of membership than $\mathbf{y}$.

4. **Quasi-ethical** if *a*) above; and *b*) when $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x}$ allocates more than $\mathbf{y}$ to a generation i, and $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ allocate the same amount to any generation other than i, then $\mathbf{x}$ has a higher degree of membership than $\mathbf{y}$.

5. **Basically ethical** if *a*) above; and *b*) when $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, and $\mathbf{x}$ does not allocate less than $\mathbf{y}$ to any generation, then $\mathbf{y}$ does not have a higher degree of membership than $\mathbf{x}$.

Requirement *a*) is an anonymity prerequisite common to every property in the list. It implements the idea that all generations must be treated equally: when the allocations to any two generations are swapped, the degree of membership to the subset of 'ethically acceptable' streams does not vary. Fuzzy subsets that verify *a*) are called *anonymous*. The respective conditions *b*) implement efficiency concepts in the sense that improving the allocations to certain generations, the other generations not being worse-off,

should increase the degree of membership to the subset of 'ethically acceptable' streams.

A handicap for accepting the discounted sum of utilities in the intergenerational analysis is that it discriminates future generations. In our approach, this translates into the fact that μ_δ does not meet requirement *a*), i.e., μ_δ is not anonymous. To overcome that drawback, one can refer to the corresponding rank-discounted sum ρ_δ: it coincides with μ_δ on non-decreasing streams, but it agrees with requirement *a*). We return to this point in subsection 3.3 below.

Remark 3.1. Any ethical fuzzy subset of $\mathbf{X}$ is pre-ethical, quasi-ethical, and basically ethical. Pre-ethical fuzzy subsets of $\mathbf{X}$ are weakly ethical. Furthermore, the concepts in Definition 3.1 are hereditary by (crisp) subsets of $\mathbf{X}$.

On the ground of our defense of the Monotonicity property of SWFs, it may appear that only basically ethical fuzzy subsets of our domain of infinite utility streams are worth considered when *a*) is imposed. However under such assumption all the concepts above collapse into a single one, as the following simple lemma justifies:

Lemma 3.1. If a fuzzy subset of $[0,1]^{\mathbb{N}}$ is quasi-ethical and basically ethical then it is ethical.

3.3 RESULTS

The following questions arise: Do there exist ethical, resp., pre-ethical, weakly ethical, quasi-ethical, basically ethical, fuzzy subsets of $\mathbf{X}$? It seems intuitively natural that the answer to these questions can vary with the structure of $\mathbf{X}$. We proceed to examine all these questions separately.

3.3.1 Are there ethical fuzzy subsets?

The requirements on the set of infinite streams determines the answer to this question. Suppose first the case where every generation or individual has a common set of feasible allocations, i.e., $\mathbf{X} \supseteq Y^{\mathbb{N}}$ for some $Y \subseteq [0,1]$. Then Theorem 3.1 below states that the answer for this particular question is negative even if $\mathbf{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Such case is the simplest possible instance for analysis: it only distinguishes a 'good' state 1 and a 'bad' state 0 for each generation or agent, thus for any practical purpose we have impossibility of ethical fuzzy subsets (provided that there is a common set of feasible allocations across generations). This statement derives from a celebrated result by Basu and Mitra [6, Theorem 1], which establishes that there are no SP, AN social welfare functions on $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Theorem 3.1 (Basu and Mitra [6])**.** There do not exist ethical fuzzy subsets of $\mathbf{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

However we obtain a different conclusion when we refer our analysis to $\bar{\mathbf{X}}$ as defined in Example 3.3:

Theorem 3.2 (Zuber and Asheim [14], Prop. 5)**.** Example 3.3 defines an ethical fuzzy subset of $\bar{\mathbf{X}}$.

3.3.2 Are there pre-ethical fuzzy subsets?

Building on [6], Crespo, Núñez, and Rincón-Zapatero [8, Theorem 3.3] prove that there are not IP, AN social welfare functions on $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. From this we deduce:

Theorem 3.3 (Crespo, Núñez, Rincón-Zapatero [8])**.** There do not exist pre-ethical fuzzy subsets of $\mathbf{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Remark 3.2. Theorem 3.1 is a trivial Corollary to Theorem 3.3, because ethical fuzzy subsets of $\mathbf{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ are pre-ethical. Another reason for this redundance is that [8, Theorem 3.3] generalizes the aforementioned [6, Theorem 1] by proving that the incompatibility between SP and AN remains when the weaker IP replaces SP. However we believe that it is just fair to state Theorem 3.1 on its own right due to the key importance of [6] in the recent development of the problem of aggregating infinite utility streams.

However in view of Remark 3.1 and Theorem 3.2, Example 3.3 defines a pre-ethical fuzzy subset of $\bar{\mathbf{X}}$.

3.3.3 Are there weakly ethical fuzzy subsets?

This is a case where the choice of the domain of infinite utility streams provides a rich discussion. The motivation for the analysis of this case is Basu and Mitra [7]. Accordingly, we can state:

Theorem 3.4 (Basu and Mitra [7])**.** Let $\mathbf{X} = Y^{\mathbb{N}}$ be a domain of infinite utility streams.

1. If $Y = \mathbb{N}$ then there exist weakly ethical fuzzy subsets of $\mathbf{X}$.
2. If $Y = [0,1]$ then there do not exist weakly ethical fuzzy subsets of $\mathbf{X}$.

As in the previous impossibility results, the cardinality of the set of feasible utilities (namely, Y in Theorem 3.4 above) is key in the argument. In those impossibility results one simply 'runs out of numbers' when the constraints are imposed. This partially explains the different conclusion when Y changes from the countable (and not order-dense) $\mathbb{N}$ to $[0,1]$.

We emphasize that the appeal to discrete sets of feasible utilities like $\mathbf{X} = Y^{\mathbb{N}}$ with $Y = \mathbb{N}$ is supported by the recognition that human perception is not endlessly fine. It is a natural restriction e.g., when the utilities have a well-defined smallest unit (as happens when the endowments of the generations are monetary amounts).

Furthermore, Example 3.3 defines a weakly ethical fuzzy subset of $\bar{\mathbf{X}}$ as argued above.

3.3.4 Are there quasi-ethical fuzzy subsets?

Here we obtain a widespread affirmative answer. Of course, Example 3.3 defines a quasi-ethical fuzzy subset

of $\bar{\mathbf{X}}$ as argued above. But now we can do better than this due to Basu and Mitra [7], who prove that there are WD, AN social welfare functions on $\mathbf{X} = [0,1]^{\mathbb{N}}$. Thus Theorem 3.5 below benefits from their result in order to state that the answer to our question for the quasi-ethical restriction on fuzzy subsets is affirmative for any $\mathbf{X} \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$ too.

Theorem 3.5 (Basu and Mitra [7])**.** There exist quasi-ethical fuzzy subsets of any $\mathbf{X} \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$.

3.3.5 Are there basically ethical fuzzy subsets?

The answer to the question if there are basically ethical fuzzy subsets of a suitable domain of utility streams is affirmative for any $\mathbf{X} \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$. We just need to check that the *minimax* or Rawlsian fuzzy subset μ_R in Example 3.1 verifies the requested properties.

Although we have shown that there are quasi-ethical fuzzy subsets of $[0,1]^{\mathbb{N}}$ and also basically ethical fuzzy subsets of $[0,1]^{\mathbb{N}}$, it is remarkable that quasi-ethical fuzzy subsets of $[0,1]^{\mathbb{N}}$ cannot be basically ethical. This is due to Lemma 3.1 in combination with Theorem 3.1.

3.4 OTHER VARIATIONS AND APPROACHES TO THE CONCEPT

3.4.1 Equity in other forms

The 'ethical' concepts of fuzzy subsets of a (crisp) set of infinite utility streams in Definition 3.1 do not exhaust the possibilities in this regard. Other proposals can be imported from the extensive literature on ranking infinite utility streams. Suppose first that we are concerned with the spirit of anonymity as in subsection 3.3. Then authors like Kamaga and Kojima [9], Lauwers [10], Mitra and Basu [11], or Zuber and Asheim [14] among others have investigated the implications of stronger versions of our Anonymity property. And in order to attempt a positive alternative to the impossibilities that have arisen, other authors appeal to weakened versions of Anonymity. To name but a few proposals, the aforementioned Crespo et al. [8, Definition 4.1] or Asheim et al. [3]'s treatment of relative anonymity, strong anonymity or fixed-step relative anonymity. Sakai [12] provides a discussion of the controversial problem of selecting appropriate anonymity axioms in the context of aggregating infinite utility streams.

Besides these procedural properties there are other approaches to equity, and in relation with then one can define more variations of the general concept of an 'ethical' fuzzy subset of a domain of utility streams. The interested reader is addressed to the analysis of consequentialist equity properties like the Pigou-Dalton transfer principle or Hammond Equity in various forms. These are classical principles that originate in the analysis of allocations to a finite number of agents. As to egalitarian principles that are specifically designed for the analysis of infinite societies or societies with an infinite number of periods, the most relevant property may be Hammond Equity for the Future. As in the case of weakly ethical fuzzy subsets, its implications are very different depending on the structure of the set of feasible streams. This follows from a comparison between Alcantud and García-Sanz [1] and Banerjee [5].

3.4.2 Respect for specific rules

Besides the generic forms of equity or efficiency mentioned above, some authors have defended that certain incomplete criteria for comparing streams on the basis of their acceptability must be respected. This alternative approach can be adapted as the following explanatory example shows.

Definition 3.2. *Let μ be a fuzzy subset of a domain of infinite utility streams $\boldsymbol{X} \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$ such that the degree of membership of $\boldsymbol{1} \in \boldsymbol{X}$ is 1, resp. of $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{X}$ is 0. We say that μ respects von Weizsäcker's criterion if $\mu(\boldsymbol{x}) > \mu(\boldsymbol{y})$ whenever there is $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\sum_{k=1}^{n} x_k > \sum_{k=1}^{n} y_k$ for every $n > n_0$.*

Definition 3.2 asks that when a stream **x** overtakes another stream **y**, the degree of membership of **x** must be higher than the degree of membership of **y**. It is simple to check that fuzzy subsets that verify anonymity and respect von Weizsäcker's criterion are ethical. Therefore in view of Theorem 3.1:

Corollary 3.1. *There do not exist anonymous fuzzy subsets of $\boldsymbol{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ that respect von Weizsäcker's criterion.*

We omit the details of further developments in this direction. Let us just point out that Asheim et al. [3] present a new version of the overtaking criterion called generalized time-invariant overtaking. Other interesting rules that are arguably worth considering include various infinite extensions of the leximin rule (cf., e.g., Asheim and Tungodden [4], and Asheim et al. [3, Subsection 6.2]).

4 CONCLUSIONS

The concept of social welfare function (SWF) means an evaluation of the objects under consideration, that verifies certain properties making it efficient and egalitarian. We have concentrated on SWFs on domains of infinite-horizon utility distributions or streams. We have shown that the identification of SWFs with adequate lists of properties can be viewed as a problem in fuzzy set theory: the original problem is equivalent to the identification of fuzzy subsets of the set of feasible distributions with the corresponding list of properties. Results from the standard literature on SWFs can be imported to the new framework. Although here we have focused on the case of infinite utility streams, which is mathematically more challenging, the approach can be employed to study allocations to a finitely-lived –or finite– population instead.

Acknowledgements

The author is grateful to María J. Campión and Esteban Induráin for their kind invitation to participate in the Special Session of ESTYLF 2014 under their joint organization. Fnancial support by the Spanish Ministerio de Ciencia e Innovación under Project ECO2012–31933 is gratefully acknowledged.

References

[1] J. C. R. Alcantud, M. D. García-Sanz: Paretian evaluation of infinite utility streams: An egalitarian criterion. *Economics Letters* 106, pp. 209–211, 2010.

[2] G. B. Asheim: Intergenerational Equity. *Annual Review of Economics* 2, pp. 197–222, 2010.

[3] G. B. Asheim, C. d'Aspremont, K. Banerjee: Generalized time-invariant overtaking. *Journal of Mathematical Economics* 46, pp. 519–533, 2010.

[4] G. B. Asheim, B. Tungodden: Resolving distributional conflicts between generations. *Economic Theory* 24, pp. 221–230, 2004.

[5] K. Banerjee: On the equity-efficiency trade off in aggregating infinite utility streams. *Economics Letters* 93, pp. 63–67, 2006.

[6] K. Basu, T. Mitra: Aggregating infinite utility streams with intergenerational equity: the impossibility of being Paretian. *Econometrica* 71, pp. 1557–1563, 2003.

[7] K. Basu, T. Mitra: Possibility theorems for equitably aggregating infinite utility streams. In: J. Roemer, K. Suzumura (Eds.), *Intergenerational equity and sustainability: conference proceedings of the IWEA roundtable meeting on intergenerational equity*, Palgrave, 2007.

[8] J. Crespo, C. Núñez, J. P. Rincón-Zapatero: On the impossibility of representing infinite utility streams. *Economic Theory* 40, pp. 47–56, 2009.

[9] K. Kamaga, T. Kojima: *Q*-anonymous social welfare relations on infinite utility streams. *Social Choice and Welfare* 33, pp. 405–413, 2009.

[10] L. Lauwers: Infinite utility: insisting on strong monotonicity. *Australasian Journal of Philosophy* 75, pp. 222–233, 1997.

[11] T. Mitra, K. Basu: On the existence of Paretian social welfare quasi-orderings for infinite utility streams with extended anonymity. In: J. Roemer, K. Suzumura (Eds.), *Intergenerational equity and sustainability: conference proceedings of the IWEA roundtable meeting on intergenerational equity*, Palgrave, 2007.

[12] T. Sakai: A characterization and an impossibility of finite length anonymity for infinite generations. Journal of Mathematical Economics 46, pp. 877–883, 2010.

[13] L.-G. Svensson: Equity among generations. *Econometrica* 48, pp. 1251-1256, 1980.

[14] S. Zuber, G. B. Asheim: Justifying social discounting: The rank-discounted utilitarian approach. *Journal of Economic Theory* 147, pp. 1572–1601, 2012.

Fuzzy automata as group representations

Inmaculada Lizasoain[1], **Marisol Gómez**[1]

[1]*Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra*
Campus de Arrosadía. 31006 Pamplona, Spain, {ilizasoain,marisol}@unavarra.es

Abstract

Transformation semigroups constitute a class of algebraic automata whithout initial nor final states. If some uncertainty or imprecision is considered in the transition functions of the automata, fuzzy transformation semigroups arise. In the case that its set of inputs has the structure of a group, an automaton can be seen as a group representation. This point of view allows us to build a new fuzzy automaton starting from an initial one in order to model automata working in parallel.

Keywords: Group representations, lattice-valued fuzzy automata, fuzzy transformation semigroups.

1 Introduction

Fuzzy finite state machines (ffsm) and fuzzy transformation semigroups (fts) as well as the relationships between them have been widely studied in the literature (see [5]). The basic idea in their formulation is that, unlike the crisp case, they can switch from one state to another one to a certain truth degree between 0 and 1. Malik and Morderson define in [4] several products of pairs of these automata in order to build new automata starting from two of them.

Our paper deals with these kinds of automata (whithout initial nor final states) in a more general case in which the truth structure will be a complete lattice $(L, \leq_L)$. The use of a complete lattice $(L, \leq_L)$ as the truth structure of finite automata is common in the literature (see [6]).

In the case that the set of inputs has the structure of a group, an automaton can be seen as a group representation and consequently it can be induced from the initial group to a greater one by using techniques of group representations. This point of view allows us to build new automata starting from a unique one instead of two in order to model automata working in parallel.

The paper is organized as follows. Section 2 brings together the main definitions and results about lattice-valued fuzzy finite state automata. Section 3 introduces and analyzes the induced lattice-valued transformation semigroup and Section 4 is devoted to the conclusions.

2 Preliminaries

A *finite state machine* is a finite automaton (without initial nor final states) consisting of a finite set of states, Q, and a finite set of inputs, X, so that any input $x \in X$ *changes* each state $q \in Q$ into the state $q^x \in Q$. We will say that X acts on the set Q in that way.

For each finite set of inputs X, we will consider:

(i) The set X^* of all the words of elements of X of finite length, including the empty word λ.

(ii) The length of any word $u \in X^*$, denoted by $|u|$. (The length of the empty word will be $|\lambda| = 0$).

(iii) The binary operation given by the concatenation, which makes X^* be a non-finite semigroup with λ as its identity element.

If we extend the action of X on Q to the semigroup X^* by defining inductively $q^{x_1 \cdots x_n} = ((q^{x_1})^{\cdots})^{x_n}$ and $q^{\lambda} = q$ for any $q \in Q$, we generate a transformation semigroup, which satisfies $q^{uv} = (q^u)^v$ for any $u, v \in X^*$.

Since X^* is not finite, it is usual to consider the quotient $X^*/_\sim$ given by the equivalence relation

$$u \sim v \Longleftrightarrow q^u = q^v \text{ for every } q \in Q,$$

which is always finite because Q is a finite set and so are the maps from Q to Q.

When some uncertainty or imprecision is introduced in the automaton, the concept of a fuzzy finite state machine (ffsm) arises. Instead of giving a unique state q^x for each $q \in Q$ and each $x \in X$, each tern (q,x,p) (with $p \in Q$) is assigned a real value between 0 and 1. We will deal with a more general case of imprecision, in which the value assigned to each tern (q,x,p) belongs to a complete lattice $(L,\leq_L)$.

Recall that a complete lattice $(L,\leq_L)$ is a partially ordered set in which every subset has an infimum (great lower bound) and a supremum (least upper bound). We will denote by 0_L the least element of the whole set L and by 1_L the greatest element of L.

Definition 2.1 (see [5] and [1])**.** Let $(L,\leq_L)$ be a complete lattice. An *L-fuzzy finite state machine* (L-ffsm) is a triple $M=(Q,X,\mu)$, where Q and X are nonempty finite sets, called the set of states and the set of input symbols respectively, and and $\mu : Q\times X\times Q \to L$ is the membership function of an L-fuzzy set.

The way in which the fuzzy action of X on Q is extended to the semigroup X^* previously defined, is described for each L-ffsm $M=(Q,X,\mu)$ in the following way:

$\mu^* : Q\times X^*\times Q \to L$ will be the map given for any $q, r \in Q$ by

- $\mu^*(q,\lambda,r) = \begin{cases} 1_L & \text{if } r=q \\ 0_L & \text{if } r\neq q \end{cases}$
- $\mu^*(q,ux,r) = \bigvee\{\mu^*(q,u,s)\wedge\mu(s,x,r) \mid s\in Q\}$ for every $u\in X^*$ and $x\in X$.

  In particular, $\mu^*(q,x,r)=\mu(q,x,r)$ whenever $x\in X$.

In this case, $X^*/_\sim$ will be the quotient given by the equivalence relation

$$u\sim v \Longleftrightarrow \mu^*(q,u,r)=\mu^*(q,v,r) \text{ for every } q,r\in Q$$

and $\overline{\mu^*} : Q\times(X^*/_\sim)\times Q\to L$ is defined, for any $q,r\in Q$ and $u\in X^*$ by $\overline{\mu^*}(q,\bar{u},r)=\mu^*(q,u,r)$.

Definition 2.2 (see [5] and [1])**.** An *L-fuzzy transformation semigroup* (or an L-fts) is a triple $G=(Q,U,\delta)$, where Q is a nonempty finite set, U is a finite semigroup and $\delta : Q\times U\times Q\to L$ is a map satisfying the following conditions:

(TS1) If U is a semigroup with an identity element e, for all $q,r\in Q$,

$$\delta(q,e,r)=\begin{cases} 1_L & \text{if } r=q \\ 0_L & \text{if } r\neq q \end{cases}$$

(TS2) $\delta(q,uv,r)=\bigvee\{\delta(q,u,l)\wedge\delta(l,v,r) \mid l\in Q\}$ for any $q,r\in Q$ and $u,v\in U$.

If in addition, for any $u,v\in U$, the following property holds

$$\delta(q,u,r)=\delta(q,v,r) \text{ for any } q,r\in Q \Longrightarrow u=v,$$

then the L-fts (Q,U,δ) will be called *faithful*.

Recall that a complete lattice $(L,\leq_L)$ in which one of the following distributive properties holds is called *a complete distributive lattice*. Moreover, these two properties are equivalent (see [2]):

(i) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ for all $a,b,c\in L$.

(ii) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ for all $a,b,c\in L$.

Theorem 2.3 ([1])**.** *Let $(L,\leq_L)$ be any complete lattice. Then the following assertions are equivalent:*

(i) The triple $G_L(M)=(Q,X^*/_\sim,\overline{\mu^*})$ is a faithful L-fts for any L-ffsm $M=(Q,X,\mu)$.

(ii) $(L,\leq_L)$ is a distributive lattice.

From now on, only complete distributive lattices $(L,\leq_L)$ will be considered in this paper.

3 Induced lattice-valued fuzzy transformation semigroups

Several products of pairs of fuzzy automata allow us to get a new ffsm and so a fts starting from two ffsms (see [4]). In this section we use techniques of group representations to provide a new L-fuzzy transformation semigroup starting from a unique L-fts $H=(Q,V,\delta)$ in the case that V is a subgroup of a finite group U.

The new L-fuzzy transformation semigroup will consist of the union of several copies of $H=(Q,V,\delta)$, each of which with the set of inputs V extended to U in a different way. At the same time the group U *permutes* in some sense the copies of $H=(Q,V,\delta)$.

Indeed, for any $u\in U$, consider the right coset of V in U, $\{vu \mid v\in V\}$, and denote it by Vu. Notice that $U=\cup\{Vu \mid u\in U\}$. Moreover, if $Vu\cap Vw\neq\emptyset$, then $Vu=Vw$. Hence, U is equal to the disjoint union of all the different cosets $\{Vy_j \mid j\in J\}$. Any full set of representatives of the right cosets, $\{y_j \mid j\in J\}$ is called a *right transversal of V in U*. Now, for any $u\in U$ and any $j\in J$, we have $y_ju\in Vy_{j^{\bar{u}}}$ for some $j^{\bar{u}}\in J$. Write $y_ju=v_j(u)y_{j^{\bar{u}}}$, where $v_j(u)\in V$ is unique for each $j\in J$ and $u\in U$.

In this paper, we shall only consider right transversals containing the identity element.

Definition 3.1. Let V be a subgroup of a finite group U and $P=\{y_j \mid j\in J\}$ a full set of representatives of the right cosets of V in U. Then, for each L-fts $H=(Q,V,\delta)$, the *induced L-fuzzy transformation semigroup of H* will be the triple $H^U=(Q^U,U,\delta^U)$, where

(i) $Q^U = Q \times P = \{(q, y_j) \mid q \in Q,\ j \in J\}$, the induced set of states.

(ii) $\delta^U((q,y_j),u,(r,y_k)) = \begin{cases} \delta(q,v_j(u),r) & \text{if } k = j^{\bar{u}} \\ 0_L & \text{otherwise} \end{cases}$

where, for any $u \in U$ and $j \in J$, the element $v_j(u) \in V$ and the index $j^{\bar{u}}$ are given by $y_j u = v_j(u) y_{j^{\bar{u}}}$.

Remark 3.2. Notice that the set of states of $H^U = (Q^U, U, \delta^U)$ can be seen as the union of $|J|$ copies of Q. In addition, the input symbols have been extended from V to U. For any $j \in J$, each element $u \in U$ *changes* the states occurring in the j-th copy in the same way that $v_j(u)$ did in (Q,V,δ), but taking this state to the $j^{\bar{u}}$-th copy at the same time.

In particular, if $u \in V$, then $\delta^U((q,e),u,(r,e)) = \delta(q,u,r)$, which means that the subgroup V of U has on the copy $\{(q,e) \mid q \in Q\}$ the same behavior that it had on (Q,V,δ).

Theorem 3.3. *In the conditions of Def. 3.1, for any L-fts $H = (Q,V,\delta)$, the triple $H^U = (Q^U,U,\delta^U)$ is an L-fts. Moreover, if H is faithful, then the induced L-fts $H^U = (Q^U,U,\delta^U)$ is faithful too.*

Example 3.4. Let U be the group of all the permutations of $\{1,2,3\}$:

$$U = \{e = \mathrm{id}_{\{1,2,3\}}, \sigma = (123), \sigma^2 = (132), \tau = (23), \tau\sigma = (12), \tau\sigma^2 = (13)\},$$

where $\sigma = (123)$ means that $1^\sigma = 2$, $2^\sigma = 3$ and $3^\sigma = 1$; $\tau = (23)$ means that $2^\sigma = 3$, $3^\sigma = 2$ and $1^\sigma = 1$; and so on.

Call $V = \{e, \tau\}$, a subgroup of U. Then $U = Vy_1 \cup Vy_2 \cup Vy_3$, where $y_1 = e$, $y_2 = \sigma$, $y_3 = \sigma^2$. Any element of U permutes the copies $\{Vy_1, Vy_2, Vy_3\}$ in the same way that it permutes the numbers $\{1,2,3\}$. Moreover, it is easy to check that, for any $1 \le j \le 3$,

$$v_j(e) = v_j(\sigma) = v_j(\sigma^2) = e \text{ and}$$
$$v_j(\tau) = v_j(\tau\sigma) = v_j(\tau\sigma^2) = \tau.$$

Consider the complete distributive lattice $L = \{0_L, a, b, 1_L\}$ consisting of four different elements with the order relation given by $0_L \le_L a \le_L 1_L$ and $0_L \le_L b \le_L 1_L$. It is clear that $a \wedge b = 0_L$ and $a \vee b = 1_L$.

The triple $H = (Q,V,\delta)$ with $Q = \{p,q\}$ $(p \neq q)$ and $\delta : Q \times V \times Q \to L$ given by

$$\delta(p,e,p) = \delta(q,e,q) = 1_L,$$
$$\delta(p,e,q) = \delta(q,e,p) = 0_L,$$
$$\delta(p,\tau,p) = \delta(q,\tau,q) = a$$
$$\text{and } \delta(p,\tau,q) = \delta(q,\tau,p) = b,$$

is an L-fts because it satisfies properties (TS1) and (TS2).

Then the induced L-fts $H^U = (Q^U,U,\delta^U)$ is the triple given by

(i)

$$Q^U = \{(p,y_1),(q,y_1)\} \cup \{(p,y_2),(q,y_2)\} \cup \{(p,y_3),(q,y_3)\}.$$

(ii) For $u \in \{e, \sigma, \sigma^2\}$,

$$\delta^U((r,y_j),u,(s,y_k)) = \begin{cases} 1_L & \text{if } r = s \text{ and } k = j^u \\ 0_L & \text{otherwise} \end{cases}$$

(iii) For $u \in \{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$,

$$\delta^U((r,y_j),u,(s,y_k)) = \begin{cases} a & \text{if } k = j^u \text{ and } r = s \\ b & \text{if } k = j^u \text{ and } r \neq s \\ 0_L & \text{if } k \neq j^u \end{cases}$$

4 Conclusions

The use of techniques of group representations applied to transformation semigroups allows us to build a new fuzzy transformation semigroup starting from a unique one in the case that the set of inputs has the structure of a group.

References

[1] M. Gómez, I. Lizasoain, C. Moreno. Lattice-valued finite state machines and lattice-valued semigroups. *Fuzzy Sets and Systems* 208, pp. 1–21, 2012.

[2] G. Grätzer. *General lattice theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1978.

[3] I. Lizasoain, M. Gómez. Products of lattice-valued fuzzy finite state machines. Induced fuzzy transformation semigroups. Preprint.

[4] D. S. Malik, J. N. Mordeson, M. K. Sen. Products of fuzzy finite state machines. *Fuzzy Sets and Systems* 92, pp. 95-102, 1997.

[5] J. N. Mordeson and D. S. Malik. *Fuzzy automata and languages*. Chapman and Hall, USA, 2006.

[6] W. Wechler. *The Concept of Fuzziness in Automata and Language Theory*. Akademie Verlag, Berlin, 1978.

Conjuntos fuzzy desde familias anidadas

Edurne Barrenechea[1], **Humberto Bustince**[1], **Maria Jesús Campión**[2], **Esteban Induráin**[2], **Vicki Knoblauch**[3]

[1]*Departamento de Automática y Computación, Universidad Pública de Navarra, E-31006 Pamplona, Spain.*,
{edurne.barrenechea,bustince}@unavarra.es
[2]*Departamento de Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, E-31006 Pamplona, Spain.*,
{mjesus.campion,steiner}@unavarra.es
[3]*Department of Economics. University of Connecticut. Storrs, CT 06269-1063, U.S.A.*, vicki.knoblauch@uconn.edu

Resumen

Mostramos que la definición clásica de subconjunto fuzzy conlleva estructuras adicionales de naturaleza topológica. Miramos al concepto de subconjunto fuzzy y sus correspondientes α-cortes desde un punto de vista alternativo: un subconjunto fuzzy puede ser interpretado como una topología anidada en un conjunto de referencia, denominado universo. Se analizan varios tipos de subconjuntos fuzzy asociados a esta interpretación. **Palabras Clave:** Conjuntos fuzzy, topologías anidadas.

1 Introducción

Una nueva mirada a la definición clásica de subconjunto fuzzy, introducida por L.A. Zadeh en su trabajo [59] (véase también [9]), revela estructuras topológicas y otras que estaban escondidas en la definición original.

Consideremos la definición estándar (véase [59, 9]) de un *subconjunto fuzzy*[1] X (de un conjunto U) como una función $\mu_X : U \to [0,1]$, donde U denota un conjunto no vacío (nítido) de referencia, usualmente denominado *universo*. Esta aproximación es obviamente equivalente a la definición de un subconjunto fuzzy como una familia anidada $\{U_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ de subconjuntos de U, denominados α-cortes. Aquí $U_\alpha = \{t \in U : \mu_X(t) \geq \alpha\}$, para cada $\alpha \in [0,1]$.

Pero una familia anidada de subconjuntos de un conjunto dado U inmediatamente induce una *topología* que es también anidada. Así, la definición clásica de un subconjunto fuzzy puede ser (re)-interpretada como una topología anidada de un cierto tipo definida en un conjunto. Otras interpretaciones topológicas notables de conjuntos fuzzy y temas relacionados ya han aparecido en la literatura. Véase e.g. [1, 30, 38].

Más aún, diferentes tipos de subconjuntos fuzzy llevarían a diferentes tipos de topologías anidadas. Por poner un *ejemplo* sencillo, observamos que cuando $X = U$, de modo que X es nítido y $\mu_X(t) = 1$ para cada $t \in U$, tenemos que $U_\alpha = U$ para cada $\alpha \in [0,1]$. Es entonces obvio que la topología inducida por la subbase $\{U_\alpha = U\}_{\alpha\in[0,1]}$ es la *trivial* en el conjunto U. Recíprocamente, es directo ver que los subconjuntos fuzzy que no son nítidos inducen topologías no triviales. Nótese también que cuando $X = \emptyset$, i.e. $\mu_X(t) = 0$ para cada $t \in U$, la topología inducida es también la trivial. Pero, para cualquier otro conjunto fuzzy, la topología no es trivial (incluidos los conjuntos nítidos $X \subset U$).

Qué información adicional proporciona este nuevo escenario?

Por un lado, hay clases importantes de topologías (e.g., las inferiormente preordenables) que son, por definición, anidadas. También, un factor clave relacionado con topologías anidadas es que definen diferentes tipos de ordenaciones (e.g. órdenes lineales, preórdenes totales) en un conjunto no vacío nítido. Teniendo esto en mente, nos preguntamos si estas ordenaciones pueden ser definidas directamente por medio de subconjuntos fuzzy adecuados.

2 Preliminares

2.1 El concepto clásico de subconjunto fuzzy

En adelante, un conjunto en el sentido estándar se dice que es *nítido*, en oposición al término “fuzzy" introducido más abajo en la definición 2.1.

Consideramos a continuación la definición estándar de un subconjunto fuzzy.

Definición 2.1. ([59]) Sea U un conjunto no vacío, usualmente denominado *universo*. Un *subconjunto fuzzy* X de U se define por medio de una aplicación $\mu_X : U \to [0,1]$.

[1]Adoptamos aquí la vieja terminología de “*subconjunto* fuzzy", en lugar de quizá la más estándar y frecuente de *conjunto* fuzzy .Esto nos ayudara a interpretar mejor otras definiciones equivalentes basadas en α-cortes o en topologías anidadas en un conjunto.

La aplicación μ_X se dice que es *función de pertenencia* (o *indicador*) de X.

El *soporte* de X es el subconjunto $Supp(X) = \{t \in U : \mu_X(t) \neq 0\} \subseteq U$, mientras que el *núcleo* de X es el subconjunto $Ker(X) = \{t \in U : \mu_X(t) = 1\} \subseteq U$. El subconjunto fuzzy X se dice que es *normal* si tiene núcleo no vacío.

Dado $\alpha \in [0,1]$, el subconjunto de U definido por $U_\alpha = \{t \in U : \mu_X(t) \geq \alpha\}$ se dice que es el α-*corte* del subconjunto fuzzy X.

Nota 2.2. Nótese que a lo largo de la definición 2.1, el subconjunto fuzzy X se identifica con su función de pertenencia μ_X. Es bastante común emplear esas dos notaciones, X y μ_X, indistintamente.

Partiendo de la colección de α-cortes de un subconjunto fuzzy X, es directo recuperar el subconjunto fuzzy completo (i.e.: reobtener la función de pertenencia μ_X), como sigue:

Lema 2.3. *Sea X un subconjunto fuzzy del universo U. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ la colección de α-cortes inducida por X. Entonces, para cada $t \in X$ se tiene que $\mu_X(t) = \sup\{\alpha \in [0,1] : t \in U_\alpha\}$. Además, se tiene que $t \in U_{\mu_X(t)}$, para cada $t \in U$.*

Nota 2.4. Observamos que el Lema 2.3 nos permite identificar el subconjunto fuzzy X a la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ de sus α-cortes.

Ideas similares han aparecido en Topología general y Análisis Real, mucho antes que el trabajo de Zadeh ([59]). Una aplicación real puede ser descrita en una vía alternativa equivalente, a través de una colección adecuada de subconjuntos del conjunto principal donde se ha establecido la función. Esta técnica nos lleva , al menos implícitamente, a los trabajos de P. Urysohn (véase [54]). Con diferentes variantes ha sido empleada por muchos autores como M.H. Stone en su definición de la descomposición espectral de una función con valores reales (véase [52]). Estas ideas fueron también empleadas por Nachbin (véase [41]) para dar resultados sobre la existencia de funciones continuas que preservan el orden en espacios topológicos preordenados. También, técnicas basadas en el concepto de *escala* (véase e.g. [16, 32, 33, 11, 2]) se apoyan en un marco semejante.

2.2 Familias anidadas y topologías anidadas

Introducimos el principal concepto de *familia anidada*.

Definición 2.5. Sea U un conjunto nítido. Una colección no vacía de subconjuntos de U, $\mathscr{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (donde A denota un conjunto de índices), se dice que es una *familia anidada* si para cada $\alpha, \beta \in A$, tenemos $O_\alpha \subseteq O_\beta$ ó $O_\beta \subseteq O_\alpha$. Podemos decir también que una familia anidada es un subconjunto totalmente ordenado del conjunto potencia de U (con el orden de inclusión).

La familia anidada $\mathscr{O}$ es la subbase de una topología en U. Esta topología, denotada $\tau_\mathscr{O}$, se dice que es la *topología natural* asociada a $\mathscr{O}$.

Ejemplo 2.6. Sea $U = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ el conjunto de los números naturales. Sea también $A = \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $O_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. (Notemos que $O_0 = \mathbb{N}$). Consideramos ahora la familia $\mathscr{O} = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esta familia genera la topología $\tau_\mathscr{O} = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \{\emptyset\}$.

Nota 2.7. Es importante señalar que las familias anidadas de subconjuntos abiertos de un conjunto dado dotado con una topología ya han sido considerados en la literatura en conexión con condiciones apropiadas que garantizan la propiedad de representabilidad (semi)continua de una topología (véase [13, 10, 22, 23]). Tambien se consideran en conexión con condiciones adecuadas que caracterizan la representabilidad (semi)continua de un preorden total, incluso en estructuras alebraicas (véase [32, 14, 10, 11, 2, 12, 22, 24, 27]).

Para el caso particular de $A = [0,1]$ adoptamos la siguiente definición que empleamos en adelante.

Definición 2.8. Sea U un conjunto nítido no vacío. Sea $\mathscr{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ una colección no vacía de subconjuntos de U indexada en $[0,1]$. La familia $\mathscr{O}$ se dice que es *anidada con respecto a* $[0,1]$ si $O_0 = U$ y $\alpha \leq \beta \Rightarrow O_\beta \subseteq O_\alpha$, para cada $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Nota 2.9. La razón de haber adoptado esta definición 2.8 y las condiciones que involucra ($O_0 = U$ y $\alpha \leq \beta \Rightarrow O_\beta \subseteq O_\alpha$, para cada $\alpha, \beta \in [0,1]$) es la siguiente: nos gustaría identificar familias anidadas adecuadas con respecto a $[0,1]$ con la colección de α-cortes de algún subconjunto fuzzy. (Véase la Proposición 3.2, en la Sección 3 más abajo).

A través del concepto de familia anidada consideramos un tipo particular de topologías.

Definición 2.10. Sea U un conjunto nítido dotado con una topología τ. La topología τ se dice que es *anidada* si es una familia anidada de subconjuntos de U, en el sentido de la definición 2.5.

Sea U un conjunto nítido no vacío y $\mathscr{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia anidada de U. La siguiente propiedad viene de la definición de la topología natural $\tau_\mathscr{O}$.

Lema 2.11. *La topología natural $\tau_\mathscr{O}$ es anidada.*

Lema 2.12. *Sea U un conjunto no vacío nítido dotado con una topología anidada τ. Entonces, la topología natural asociada a τ es nuevamente τ.*

A partir del Lema 2.11 y del lema 2.12 obtenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.13. *Una topología τ es anidada si y sólo si es la topología natural asociada a una familia anidada de conjuntos.*

3 Subconjuntos fuzzy vs. topologías anidadas en un conjunto

3.1 Familias anidadas con respecto a $[0,1]$ vs. subconjuntos fuzzy

Como se comenta en la Nota 2.4, un subconjunto fuzzy genera una familia de subconjuntos de un conjunto nítido, que es anidada con respecto a $[0,1]$ en el sentido de la definición 2.8.

Qué sucede con el recíproco?

Nos preguntamos si cualquier familia anidada con respecto a $[0,1]$ se puede identificar con un subconjunto fuzzy, considerando su colección de α-cortes. La respuesta es *negativa* como prueba el Ejemplo 3.1. Afortunadamente, podemos caracterizar familias anidadas con respecto a $[0,1]$ que corresponden a los α-cortes de un subconjunto fuzzy, como se establece en la Proposición 3.2.

Ejemplo 3.1. Sea $U=\mathbb{R}$. Sea $U_0=U=\mathbb{R}$, $U_\alpha=[0,+\infty)$ para cada $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ y $U_\alpha=\emptyset$ para cada $\alpha\in[\frac{1}{2},1]$. Tenemos que $\sup\{\alpha\in[0,1]:0\in U_\alpha\}=\frac{1}{2}$, pero $0\notin U_{\frac{1}{2}}$, de modo que la segunda condición en el enunciado del Lema 2.3 no se alcanza.

Proposición 3.2. *Sea U un conjunto no vacío nítido. Sea $\mathscr{F}=\{X_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ una familia anidada con respecto a $[0,1]$, de subconjuntos de U. Para cada $t\in U$, definimos $\gamma(t)=\sup\{\alpha\in[0,1]:t\in X_\alpha\}$. Las siguientes condiciones son equivalente, para todo $t\in U$:*

(a) $t\in X_{\gamma(t)}$.

(b) $X_{\gamma(t)}=\bigcap\{X_\alpha:t\in X_\alpha,\ \alpha\in[0,1]\}$.

(c) $\gamma(t)=\max\{\alpha\in[0,1]:t\in X_\alpha\}$, *esto es, el supremo se alcanza para cada $t\in U$.*

(d) $\gamma:U\to[0,1]$ *es un subconjunto fuzzy cuyos α-cortes son $U_\alpha=X_\alpha\in\mathscr{F}$, para cada $\alpha\in[0,1]$.*

3.2 Familias anidadas vs. topologías anidadas

Como se menciona en el Lema 2.12, una topología anidada es, en particular, una familia anidada.

Además, una familia anidada $\mathscr{O}$ de subconjuntos de un conjunto no vacío U define una topología natural $\tau_{\mathscr{O}}$ en U. Más aún, la topología $\tau_{\mathscr{O}}$ es anidada.

Sin embargo, la familia $\mathscr{O}$ no se puede recuperar, en general, de la topología $\tau_{\mathscr{O}}$. En otras palabras, puede suceder que dos familias anidadas diferentes $\mathscr{O}_1$ y $\mathscr{O}_2$ induzcan la misma topología natural $\tau_{\mathscr{O}_1}=\tau_{\mathscr{O}_2}$ en U, como prueban el Ejemplo 3.3 y el Ejemplo 3.4.

Ejemplo 3.3. Sea $U=[0,1]$. Sea $\mathscr{O}_1$ la familia anidada con respecto a $[0,1]$ dada por $(O_1)_\alpha=[2\alpha,1]$ para cada $\alpha<\frac{1}{2}$, $(O_1)_\alpha=\{1\}$ para cada $\alpha\geq\frac{1}{2}$. También, sea $\mathscr{O}_2$ la familia anidada definida por $(O_2)_\beta=[\beta,1]$ para cada $\beta\in(0,1)$, y $(O_2)_1=\{1\}$. Ignorando los subíndices, podemos observar que cualquier elemento de la colección $\mathscr{O}_1$ también pertenece a $\mathscr{O}_2$, y a la inversa. Así $\tau_{\mathscr{O}_1}=\tau_{\mathscr{O}_2}$.

Incluso si tienen diferentes elementos, dos familias con respecto a $[0,1]$ pueden inducir la misma topología natural, como muestra el Ejemplo 3.4.

Ejemplo 3.4. Sea $U=[0,1]$. Sea $\mathscr{O}_1$ una familia anidada con respecto a $[0,1]$ dada por $(O_1)_0=U=[0,1]$, $(O_1)_\alpha=(0,1]$ para cada $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, y $(O_1)_\alpha=[\alpha-\frac{1}{2},1]$ para cada $\alpha>\frac{1}{2}$. También, sea $\mathscr{O}_2$ definida por $(O_2)_\beta=[\beta,1]$ para cada $\beta\leq\frac{1}{2}$, y $(O_2)_\beta=[\frac{1}{2},1]$, para cada $\beta>\frac{1}{2}$. El elemento $(0,1]$ sólo pertenece a $\mathscr{O}_1$. Sin embargo, pertenece a $\tau_{\mathscr{O}_2}$ porque $(0,1]=\bigcup\{[\alpha-\frac{1}{2},1]:\ \frac{1}{2}<\alpha\leq1\}$. Una comprobación final muestra que $\tau_{\mathscr{O}_1}=\tau_{\mathscr{O}_2}$.

Agradecimientos

Este trabajo está financiado por los proyectos de investigación MTM2009-12872-C02-02, TIN2010-15055 y MTM2012-37894-C02-02 .

Referencias

[1] R.F. Albrecht (2003), Topological interpretation of fuzzy sets and intervals, *Fuzzy Sets and Systems* **135**, 11-20.

[2] J.C.R. Alcantud, G. Bosi, M.J. Campión, J.C. Candeal, E. Induráin and C. Rodríguez-Palmero (2008), Continuous utility functions through scales, *Theory and Decision* **64 (4)**, 479-494.

[3] K.T. Atanassov (1986), Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* **20 (1)**, 87-96.

[4] E. Barrenechea, H. Bustince, B. De Baets and C. López-Molina (2011), Construction of interval-valued fuzzy relations with application to the generation of fuzzy edge images, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **19 (5)**, 819-830.

[5] A.F. Beardon, J.C. Candeal, G. Herden, E. Induráin and G.B. Mehta (2002), The non-existence of a utility function and the structure of non-representable preference relations, *Journal of Mathematical Economics* **37**, 17-38.

[6] A.F. Beardon, J.C. Candeal, G. Herden, E. Induráin and G.B. Mehta (2002), Lexicographic decomposition of chains and the concept of a planar chain, *Journal of Mathematical Economics* **37**, 95-104.

[7] B. Bedregal, G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, R. Mesiar and D. Paternáin (2012), A class of fuzzy multisets with a fixed number of memberships, *Information Sciences* **189**, 1-17.

[8] G. Beliakov, H. Bustince, S. James, T. Calvo and J. Fernández (2012), Aggregation for Atanassov's intuitionistic and interval valued fuzzy sets: the median operator, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **20 (3)**, 487-498.

[9] R. Bellman, R. Kalaba and L.A. Zadeh (1966), Abstraction and pattern classification, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **13**, 1-7.

[10] G. Bosi, M.J. Campión, J.C. Candeal, E. Induráin and M.E. Zuanon (2005), Numerical isotonies of preordered semigroups through the concept of a scale, *Mathematica Pannonica* **16 (1)**, 65-77.

[11] G. Bosi, M.J. Campión, J.C. Candeal, E. Induráin and M.E. Zuanon (2007), Isotonies on ordered cones through the concept of a decreasing scale, *Mathematical Social Sciences* **54**, 115-127.

[12] G. Bosi, J. Gutiérrez-García and E. Induráin (2009), Unified representability of total preorders and interval orders through a single function: the lattice approach, *Order* **26**, 255-275.

[13] G. Bosi and G. Herden (2002), On the structure of completely useful topologies, *Applied General Topology* **3 (2)**, 145-167.

[14] G. Bosi and M.E. Zuanon (2003), Continuous representability of homothetic preferences by means of sublinear order-preserving functions, *Mathematical Social Sciences* **45**, 333-341.

[15] D.S. Bridges and G.B. Mehta (1995), *Representations of Preference Orderings*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[16] D.C.J. Burgess and M. Fitzpatrick (1977), On separation axioms for certain types of ordered topological space, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **82**, 59-65.

[17] H. Bustince, E. Barrenechea and M. Pagola (2007), Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measures of similarity, *Fuzzy Sets and Systems* **158**, 496-516.

[18] H. Bustince, E. Barrenechea and M. Pagola (2008), Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal E-N-functions: Image thresholding invariant. *Pattern Recognition Letters* **29(4)**, 525-536.

[19] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola and J. Fernández (2009), Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: application to edge detection, *Fuzzy Sets and Systems* **160 (13)**, 1819-1840.

[20] B. Caldairou, N. Passat, P. Habas, C. Studholme, and F. Rousseau (2011), A non-local fuzzy segmentation method: Application to brain MRI, *Pattern Recognition* **44 (9)**, 1916-1927.

[21] M.J. Campión, J.C. Candeal and E. Induráin (2006), Representability of binary relations through fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* **157**, 1-19.

[22] M.J. Campión, J.C. Candeal and E. Induráin (2009), Semicontinuous order-representability of topological spaces, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (3)* **15**, 81-89.

[23] M.J. Campión, J.C. Candeal and E. Induráin (2009), Preorderable topologies and order-representability of topological spaces, *Topology and its Applications* **156 (18)**, 2971-2978.

[24] M.J. Campión, J.C. Candeal, E. Induráin and G.B.Mehta (2012), Continuous order representability properties of topological spaces and algebraic structures, *Journal of the Korean Mathematical Society* **49 (3)**, 449-473.

[25] J.C. Candeal, J. Gutiérrez-García and E. Induráin (2009), Universal codomains to represent interval orders, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **17(2)**, 197-219.

[26] J.C. Candeal and E. Induráin (1999), Lexicographic behaviour of chains, *Archiv der Mathematik* **72 (2)**, 145-152.

[27] J.C. Candeal, E. Induráin and M. Sanchis (2012), Order representability in groups and vector spaces, *Expositiones Mathematicae* **30**, 103-123.

[28] G. Debreu (1954), Representation of a preference ordering by a numerical function, In R. Thrall, C. Coombs and R. Davies (Eds.), *Decision processes*, John Wiley, New York.

[29] F. Feng, X. Liu, V. Leoreanu-Fotea and Y.B. Jun (2011), Soft sets and soft rough sets, *Information Sciences* **181**, 1125-1137.

[30] X. Ge, Z. Li and Y. Ge (2011), Topological spaces and soft sets, *Journal of Computational Analysis and Applications* **13**, 881-885.

[31] J.A. Goguen (1967), L-fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **18(1)**, 145-174.

[32] G. Herden (1989), On the existence of utility functions, *Mathematical Social Sciences* **17**, 297-313.

[33] G. Herden and A. Pallack (2000), Useful topologies and separable systems, *Applied General Topology* **1 (1)**, 61-82.

[34] L.K. Huang, M.J. Wang (1995), Image thresholding by minimizing the measure of fuzziness,*PatternRecognition* **28**, 41-51.

[35] A. Kaufmann and M.M. Gupta (1985), *Introduction to Fuzzy Arithmetic. Theory and Applications*, Van Nostrand Reinhold Company, New York.

[36] V. Knoblauch (2000), Lexicographic orders and preference representation, *Journal of Mathematical Economics* **34 (2)**, 255-267.

[37] V. Knoblauch (2005), Continuous lexicographic preferences, *Journal of Mathematical Economics* **41 (7)**, 812-825.

[38] J. Liu, J. Wang, Q. Zheng, W. Zhang and L. Jiang (2012), Topological analysis of knowledge maps, *Knowledge-Based Systems* **36**. 260-267.

[39] A. Mayer and H. Greenspan, An adaptive mean-shift framework for MRI brain segmentation (2009), *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **28 (8)**, 105-118.

[40] P. Melo-Pinto, P. Couto, H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola and J. Fernández (2013), Image segmentation using Atanassov's intuitionistic fuzzy sets, *Expert Systems with Applications* **40 (1)**, 15-26.

[41] L. Nachbin (1965), *Topology and Order*, Van Nostrand Reinhold, New York.

[42] N. Otsu (1979), A threshold selection method from gray level histograms, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **9**, 62-66.

[43] M. Pagola, E. Barrenechea, H. Bustince, J. Fernández, M. Galar, A. Jurío, C. López-Molina, D.Paternáin, J. Sanz, P. Couto, and P. Melo-Pinto (2011), Extensions of fuzzy sets in image processing: an overview, *Mathware & Soft Computing* **18 (1)**, 32-43.

[44] Z. Pawlak (1982), Rough sets, *International Journal of Computer and Information Sciences* **11**, 341-356.

[45] W. Pedrycz (1998), Shadowed sets: representing and processing fuzzy sets, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **28 (1)**, 103-110.

[46] W. Pedrycz (2009), From fuzzy sets to shadowed sets: interpretation and computing, *International Journal of Intelligent Systems* **24 (1)**, 48-61.

[47] S. Purich (1977), The orderability and suborderability of metrizable spaces, *Transactions of the American Mathematical Society* **226**, 59-76.

[48] P. Ren (2010), A nested cellular topology applicable to wireless sensor networks, *IEEE International Conference on Communication Technology (ICCT)* **12**, 689-692.

[49] J. Sanz, A. Fernández, H. Bustince and F. Herrera (2010), Improving the performance of fuzzy rule-based classification systems with interval-valued fuzzy sets and genetic amplitude tuning, *Information Sciences* **180 (19)**, 3674-3685.

[50]] J. Sanz, A. Fernández, H. Bustince and F. Herrera (2011), A genetic tuning to improve the performance of fuzzy rule-based classification systems with interval-valued fuzzy sets: degree of ignorance and lateral position, *International Journal of Approximate Reasoning* **52(6)**, 751-766.

[51] M. Shabir, M.I. Ali and T. Shaheen (2013), Another approach to soft rough sets, *Knowledge Based Systems* **40**, 72-80.

[52] M.H. Stone (1949), Boundedness properties in function-lattices, *Canadian Journal of Mathematics* **1**, 176-186.

[53] H. Tizhoosh (2005), Image thresholding using type II fuzzy sets, *Pattern Recognition* **38**, 2363-2372.

[54] P. Uryshon (1925), Über die Mächtigkeit der zusammenhangenden Mengen, *Mathematische Annalen* **94**, 262-295.

[55] S. Willard (1970), *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

[56] Z.S. Xu and R.R. Yager (2006), Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, *International Journal of General Systems* **35**, 417-433.

[57] R.R. Yager (1988), On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **18**, 183-190.

[58] J. Ye, Expected value method for intuitionistic trapezoidal fuzzy multicriteria decision-making problems, *Expert Systems with Applications* **38 (9)**, 11730-11734.

[59] L.A. Zadeh (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control* **8**, 338-353.

[60] Z. Zhang (2012), On interval type-2 rough fuzzy sets, *Knowledge-Based Systems* **35**, 1-13.

[61] W. Zhu (2007), Generalized rough sets based on relations, *Information Sciences* **177**, 4997-5011.

SUBCONJUNTOS FUZZY Y ECUACIONES FUNCIONALES

M.J. Campión[1], **R.G. Catalán**[1], **E. Induráin**[1], **G. Ochoa**[1]

[1]*Departamento de Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, E-31006 Pamplona, Spain.*,
{mjesus.campion,raquel.garcia,steiner,ochoa}@unavarra.es

Resumen

Relacionamos subconjuntos Fuzzy y las soluciones quasinormales de algunas ecuaciones funcionales. Revisamos los resultados conocidos para la ecuación de Sincov y analizamos en profundidad la ecuación de Sincov generalizada.

Palabras Clave: Subconjunto Fuzzy, Ecuación funcional de Sincov generalizada.

1 Introducción

Los subconjuntos difusos y las ecuaciones funcionales parecen pertenecer a mundos muy separados dentro de las matemáticas. Sin embargo veremos que hay una unión muy estrecha entre ellos, en algunos casos unívoca.

En una primera sección damos las definiciones necesarias para el contenido del trabajo y resumiremos los resultados más relevantes para el caso de la ecuación funcional de Sincov (SFE).

En una segunda sección aportaremos resultados nuevos, para los que nos es necesario tratar con soluciones quasinormales de la SFE y con susbconjuntos fuzzy quasinormales. Extenderemos después todos estos resultados a la ecuación de Sincov generalizada (GSFE).

Finalizaremos abriendo la puerta al trabajo de investigación naciente que relaciona subconjuntos Fuzzy y otras ecuaciones funcionales, como la ecuación de separabilidad.

2 Definiciones y propiedades

2.1 Subconjuntos fuzzy

Definición 1 *Sea X nuestro conjunto universo. Llamaremos subconjunto Crisp A de X a cada aplicación $\nu_A : X \to \{0,1\}$.*

Lo llamamos subconjunto *crisp* para diferenciarlo del siguiente concepto:

Definición 2 *Sea X nuestro conjunto universo. Llamaremos subconjunto Fuzzy S de X a cada aplicación $\mu_S : X \to [0,1]$.*

La gran diferencia es que en la definición de un subconjunto Fuzzy damos una graduación al hecho de pertenecer a un subconjunto, mientras que en el subconjunto Crisp A un elemento está o no está en A.

Definición 3 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que un subconjunto Fuzzy S de X es Normal si toma el valor 1 en algún caso, es decir, si existe al menos un $x_0 \in X$ con $\mu_S(x_0) = 1$.*

Definición 4 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que un subconjunto Fuzzy S de X es Quasi-Normal si $\sup\{\mu_S(x); x \in X\} = 1$.*

Por supuesto un subconjunto Fuzzy Normal es también Quasi-Normal, pero el recíproco no es cierto.

2.2 Ecuación funcional de Sincov

Definición 5 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que una función $F : X \times X \to \mathbb{R}$ satisface la Ecuación Funcional de Sincov (denotaremos F cumple SFE) si para cualesquiera $x,y,z \in X$ se tiene que $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z)$.*

Un resultado muy conocido (véase [2],[3]) es el siguiente:

Proposición 2.1 *Sea $F : X \times X \to \mathbb{R}$. Se tiene que F cumple SFE si y sólo si existe una función $g_F : X \to \mathbb{R}$ de modo que $F(x,y) = g_F(y) - g_F(x)$, para cualesquiera $x,y \in X$.*

Definición 6 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que una función $F : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface SFE está generada por una función $g : X \to \mathbb{R}$ si $F(x,y) = g(y) - g(x)$ para cualesquiera $x,y \in X$.*

Proposición 2.2 *Sea $F : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica SFE. Dos funciones $g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ generan F (esto es $F(x,y) = g_1(y) - g_1(x) = g_2(y) - g_2(x)$ si y sólo si $g_1 - g_2 = k$ constante.*

Más información de estos resultados en [1].

Hacemos observar que si una función F cumple SFV, entonces se tiene claramente que $F(x,x) = 0$ para todo $x \in X$ y $F(x,y) = -F(y,x)$, $\forall x, y \in X$.

Definición 7 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que una función real bivariante sobre $X \times X$ es 1-acotada si $F : X \times X \to [-1,1]$.*

Definición 8 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que una función real bivariante sobre $X \times X$ es quasi-normal si* $\sup\{F(x,y); x, y \in X\} = 1$

Claramente toda $F : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo SFE, que sea quasi-normal también es *1-acotada*, y evidentemente el recíproco no es cierto.

3 Subconjuntos fuzzy y SFE

Replanteamos la proposición 2.2 para funciones 1-acotadas y tenemos

Proposición 3.1 *Sea F bivariante sobre X 1-acotada. Se tiene que F cumple SFE si y sólo si existe una función $g_F : X \to [0,1]$ de modo que $F(x,y) = g_F(y) - g_F(x)$, para cualesquiera $x, y \in X$.*

Proposición 3.2 *Sea S un subconjunto Fuzzy de X, dado por la función $\mu_S : X \to [0,1]$. Entonces la función bivariante F definida sobre $X \times X$ por $F(x,y) = \mu_S(y) - \mu_S(x)$ es una función 1-acotada verificando SFE.*

El recíproco también se tiene:

Proposición 3.3 *Sea $F : X \times X \to [-1,1]$ que cumple SFE. Entonces existe un subconjunto S Fuzzy de X cuya función μ_S es una función genera- triz de F.*

Es natural plantearse si hay unicidad en la elección del subconjunto fuzzy asociado a la solución 1-acotada de una SFE:

Proposición 3.4 *Sea F bivariante sobre $X \times X$ 1-acotada que cumple SFE. Sea S un subconjunto Fuzzy de X cuya función μ_S es una función gene- ratriz de F. Sean $a = \text{ínf}\{\mu_S(x); x \in X\}$ y $b = \sup\{\mu_S(x); x \in X\}$. Entonces existe otro subconjunto Fuzzy T de X cuya función asociada μ_T genere a F si y sólo si $\mu_S - \mu_T = k \in [b-1, a]$.*

Corolario 3.1 *Sea $F : X \times X \to [-1,1]$ que cumple SFE. Entonces existe un único subconjunto Fuzzy S de X cuya función asociada μ_S genere a F si y sólo si F es quasi-normal.*

Observemos que el subconjunto S es normal.

En general, cuando F no es quasi-normal:

Corolario 3.2 *Sea $F : X \times X \to [-1,1]$ que cumple SFE. Entonces existe un único subconjunto Fuzzy quasi-normal S de X cuya función asociada μ_S genera a F.*

4 Otras ecuaciones funcionales

En la literatura aparecen muchas otras ecuaciones funcionales de relevada importancia ([2]). De ellas podemos destacar la ecuación de Sincov generalizada y la ecuación de separabilidad.

4.1 Ecuación de Sincov Generalizada

Definición 9 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que una función $H : X \times X \to \mathbb{R}$ sa- tisface la Ecuación Funcional de Sincov generalizada de diagonal k (GSFEk) si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se tiene que $H(x,y) + H(y,z) = H(x,z) + k$, con k constante real.*

Claramente la ecuación funcional de Sincov es un caso particular de éste, en el que se toma $k = 0$.

Las soluciones de una SFE verificaban que $F(x,x) = 0$ y $F(x,y) = -F(y,x)$ para cualesquiera $x, y \in X$. Las soluciones de una GSFEk cumplen relaciones de este estilo, pero algo diferentes. Esto es lo primero que vamos a observar.

Proposición 4.1 *Sea $H : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $H(x,y) + H(y,z) = H(x,z) + k$ para todos $x, y, z \in X$. Entonces $H(x,x) = k$ y $H(y,x) = 2k - H(x,y)$ para todos $x, y \in X$.*

Proof: Es muy sencillo, pues si H cumple GSFEk entonces $H(x,x) + H(x,x) = H(x,x) + k$, por lo que $H(x,x) = k \forall x \in X$. Además $H(y,x) = H(x,x) + k - H(x,y) = 2k - H(x,y)$ $\forall x, y \in X$. •

Proposición 4.2 *Sea $H : X \times X \to \mathbb{R}$. Se tiene que H cumple GSFEk si y sólo si existe una función $h_H : X \to \mathbb{R}$ de modo que $H(x,y) = h_H(y) - h_H(x) + k$, para cualesquiera $x, y \in X$.*

Proof: Efectivamente, dada cualquier $h : X \to \mathbb{R}$, $H_h(x,y) = h(y) - h(x) + k$ verifica GSFEk, pues $H(x,y) = H(x_0,y) + k - H(x_0,x) = h(z) - h(x) + 2k = H_h(x,z) + k$.

Partimos ahora de una función $H : X \times X \to \mathbb{R}$ verificando GSFEk. Tomamos $x_0 \in X$ fijo. Definimos $h_H : X \to \mathbb{R}$ de la forma $h_H(y) = H(x_0,y)$ para cualquier $y \in X$. Entonces, $H(x,y) = H(x_0,x) + H(x,y) - H(x_0,x) = h_H(y) - h_H(x) + k$. •

Definición 10 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que una función $H : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface GSFEk está generada por una función $h : X \to \mathbb{R}$ si $H(x,y) = h(y) - h(x) + k$ para cualesquiera $x, y \in X$.*

Proposición 4.3 *Sea $H : X \times X \to \mathbb{R}$ cumpliendo GSFE. Se tiene que dos funciones $h_1, h_2 : X \to \mathbb{R}$ generan H si y sólo si $g_1 - g_2 = C$ constante.*

Proof: Es evidente que si $h_1 - h_2 = C$ y h_1 genera H, entonces también h_2 genera H.

Por otra parte, si $H(x,y) = h_1(y) - h_1(x) + k = h_2(y) - h_2(x) + k$ entonces $h_1(y) - h_2(y) = h_1(x) - h_2(x)$ para cualesquiera $x, y \in X$, lo que significa que $h_1 - h_2 = C$ constante. •

Definición 11 *Sea X nuestro conjunto universo. Sea $H : X \times X \to \mathbb{R}$. Diremos que H es 1-acotada, k-centrada, si $H(x,y) \in [k-1, k+1]$ para todos $x, y \in X$.*

Definición 12 *Sea X nuestro conjunto universo. Sea $H : X \times X \to \mathbb{R}$. Diremos que H es k-quasi-normal si $\sup\{H(x,y); x, y \in X\} = 1 + k$.*

Es obvio que una función bivariante que satisface GSFEk, si es k-quasi-normal también es 1-acotada, k-centrada, pues $\inf\{H(x,y); x, y \in X\} = 2k - \sup\{H(x,y); x, y \in X\} = 2k - (1+k)$. Claramente se tiene que el recíproco no es cierto.

Replanteamos la proposición 4.3 para funciones 1-acotadas y k-centradas y tenemos:

Proposición 4.4 *Sea H bivariante sobre X 1-acotada, k-centrada. Se tiene que H cumple GSFEk si y sólo si existe una función $h_H : X \to [0,1]$ de modo que $H(x,y) = h_H(y) - h_H(x) + k$, para cualesquiera $x, y \in X$.*

Proof: Partimos de una función $H : X \times X \to [k-1, k+1]$ verificando GSFEk. Por cumplir GSFEk existe $h_1 : X \to \mathbb{R}$ tal que $H(x,y) = h_1(y) - h_1(x) + k$. Sean $a = \inf\{h_1(x); x \in X\}$ y $b = \sup\{h_1(x); x \in X\}$. Claramente $a - b + k = \inf\{H(x,y) = h_1(y) - h_1(x) + k; x, y \in X\} \leq \sup\{H(x,y) = h_1(y) - h_1(x) + k; x, y \in X\} = b - a + k$. Como $H(x,y) \in [k-1, k+1]$, tenemos que $-1 \leq a - b \leq H(x,y) - k \leq b - a \leq 1$. Tomamos $h_2(x) = h_1(x) - a$. Así h_2 también genera H y además $0 \leq h_2(x) \leq b - a \leq 1$ para cualquier $x \in X$.

Para la implicación inversa basta observar que si $h(x) \in [0,1]$ para cualquier $x \in X$, entonces $k - 1 \leq H(x,y) = h(y) - h(x) + k \leq 1 + k$. •

Proposición 4.5 *Sea S un subconjunto Fuzzy de X, dado por la función $\mu_S : X \to [0,1]$. Entonces la función H definida sobre $X \times X$ por $H(x,y) = \mu_S(y) - \mu_S(x) + k$ es una función 1-acotada, k-centrada, verificando GSFEk.*

Proof: Como μ_S es una función generatriz de H, H cumple GSFE. Además, como el rango de μ_S es $[0,1]$, se tiene que H es 1-acotada y k-centrada. •

El recíproco también se tiene haciendo una reinterpretación de la proposición 4.4:

Proposición 4.6 *Sea $H : X \times X \to [k-1, 1+k]$ que cumple GSFEk. Entonces existe un subconjunto S Fuzzy de X cuya función μ_S es una función generatriz de H.*

Proposición 4.7 *Sea H bivariante sobre $X \times X$ 1-acotada, k-centrada, que cumple GSFEk. Sea S un subconjunto Fuzzy de X cuya función μ_S es una función generatriz de H. Sean $a = \inf\{\mu_S(x); x \in X\}$ y $b = \sup\{\mu_S(x); x \in X\}$. Entonces existe otro subconjunto Fuzzy T de X cuya función asociada μ_T genere a H si y sólo si $\mu_S - \mu_T = R \in [b-1, a]$.*

Proof: Supongamos que $\mu_S - \mu_T = R \in [b-1, a]$. Como μ_S genera H, también lo hace μ_T por 4.3. Además $0 \leq a - R \leq \mu_S(x) - R = \mu_T(x) \leq b - R \leq 1$, luego μ_T define un subconjunto fuzzy.

Si S y T generan F entonces $\mu_S - \mu_T = R$ constante por 4.3. Como $0 \leq \mu_T \leq 1$ y $\mu_T = \mu_S - R \leq 1$, tenemos que $\mu_S \leq R + 1$ y por tanto $b \leq R + 1$. Como además $\mu_T = \mu_S - R \geq 0$, tenemos que $\mu_S \geq R$ y por ello $R \leq a$. •

Corolario 4.1 *Sea $H : X \times X \to [k-1, 1+k]$ que cumple GSFEk. Entonces existe un único subconjunto Fuzzy S de X cuya función asociada μ_S genere a H si y sólo si H es k-quasi-normal.*

Proof: Sea S un subconjunto fuzzy,con μ_S genera H k-quasi-normal. Sean $a = \inf\{\mu_S(x); x \in X\}$ y $b = \sup\{\mu_S(x); x \in X\}$. Entonces $1 = b - a$. Como $0 \leq a \leq b \leq 1$ tenemos que $a = 0 = b - 1$ y por 4.3 el intervalo $[b-1, a] = [0]$ por lo que S es único.

Recíprocamente, si S es único es que $[b-1, a] = [0]$, por lo que $\sup\{H(x,y); x, y \in X\} = b - a + k = 1 + k$ y por tanto H es k-quasi-normal. •

De nuevo el subconjunto fuzzy S es normal.

Cuando H no es quasi-normal, de 4.7 obtenemos:

Corolario 4.2 *Sea $H : X \times X \to [k-1, 1+k]$ que cumple GSFEk. Entonces existe un único subconjunto Fuzzy quasi-normal S de X cuya función asociada μ_S genere a H.*

4.2 Ecuación de separabilidad

Definición 13 *Sea X nuestro conjunto universo. Diremos que una función $G : X \times X \to \mathbb{R}$ satisface la Ecuación Funcional de Separabilidad (SepFE) si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se tiene que $G(x,y) + G(y,z) = G(x,z) + G(y,y)$.*

Claramente GSFE es un caso particular de éste. Sin embargo los resultados obtenidos para SFE ya no pueden obtenerse de forma ni parecida para SepFE. La ra´zón es que si bien las soluciones de una GSFE vienen generadas por una única función (recordamos $H(x,y) = h(y) - h(x) + k$), las soluciones de SepFE necesitan de dos funciones distintas para ser generadas:

Proposición 4.8 *Sea X nuestro conjunto universo. Sea $G : X \times X \to \mathbb{R}$. Entonces G cumple SepFE si y sólo si existen dos funciones $g,h : X \to \mathbb{R}$ de modo que $G(x,y) = g(y) - h(x)$ para todos $x,y \in X$.*

Así, para relacionar soluciones de una SepFE sobre $X \times X$ (soluciones acotadas) y subconjuntos Fuzzy de X, lo primero que debemos hacer es manejar pares de subconjuntos. Es los resultados que estamos obteniendo estos subconjuntos están íntimamente conectados, en lo que denominamos subconjuntos bi-anidados:

Definición 14 *Sea X nuestro conjunto universo. Sean S y T dos subconjuntos fuzzy de X dados respectivamente por las funciones $\mu_S, \mu_T : X \to [0,1]$. Diremos que S y T están bianidados si existe $k \in \mathbb{R}$ de modo que* $\sup\{\mu_S(x); x \in X\} \leq \text{ínf}\{\mu_T(x); x \in X\} + k$ *y también* $\sup\{\mu_T(x); x \in X\} \leq \text{ínf}\{\mu_S(x); x \in X\} + k$.

Los resultados de esta línea abierta de investigación prometen ser muy interesantes, a la par que muy diferentes de lo obtenido para GSFE. El análisis de este comportamiento diferente viendo cómo se traduce para el caso particular que supone quedarse con SFE también es interesante.

Referencias

[1] M.J. Campión, R.G. Catalán, E. Indurain, G. Ochoa: Reinterpreting a fuzzy subset bu means of a Sincov's functional equation. *J. of Intelligent and Fuzzy Systems.* 1, pp. 1-6, 2013.

[2] E. Castillo-Ron, R. Ruiz-Cobo: *Functional equations in Science and Engineering*. Marcel Decker, Nueva York, 1992.

[3] D. Gronau: A remark on Sincov's functional equation. *Not. S. Afr. Math. Soc.* 31, pp. 1-8, 2000.

SUBCONJUNTOS FUZZY A TRAVÉS DEL ESPECTRO DE URYSOHN

Francisco Javier Abrísqueta[1], **María Jesús Campión**[1], **Asier Estevan**[1], **Esteban Induráin**[1]

[1] *Universidad Pública de Navarra. Departamento de Matemáticas. Campus Arrosadía. E-31006. Pamplona*,
{fjavier.abrisqueta,mjesus.campion,asier.mugertza,steiner}@unavarra.es

Resumen

Analizamos cómo puede redefinirse un subconjunto fuzzy –o, equivalentemente, una aplicación de un conjunto universal en el intervalo unidad de la recta real– mediante construcciones topológicas involucradas en el resultado clásico conocido como Lema de Urysohn, que se utiliza en Topología General con el fin estudiar axiomas de separación, y, en concreto, al caracterizar los espacios normales. La construcción de Urysohn, que data de 1925, y se conoce como "espectro de Urysohn", viene a ser equivalente a la definición de la familia de α-cortes de un subconjunto fuzzy. Otras construcciones (bien conjuntistas, o de índole topológica) similares, en torno al concepto de "escala", permiten también reconstruir funciones definidas en un universo y con valores en la recta real, o en el intervalo unidad de la misma. Dejamos constancia de alguna de estas construcciones clásicas, y relacionamos todas ellas con el concepto de subconjunto fuzzy introducido por Zadeh en 1965.

Palabras Clave: Lema de Urysohn, espectro de Urysohn, escalas, α-cortes de un subconjunto fuzzy, funciones con valores en el intervalo unidad de la recta real.

MSC (2010): 54C30, 03E72, 54D15.

1. Introducción y motivación

L. A. Zadeh introdujo en 1965 (véase [19]) la noción de subconjunto difuso o borroso ("fuzzy", en inglés[1]) a partir de una generalización de la idea clásica de *pertenencia a un conjunto*. Así, dado un conjunto de referencia de partida U, al que llamaremos *universo*, en el sentido clásico un *subconjunto* $X \subseteq U$ se puede entender (e incluso definir) como una función $\mu : U \to \{0,1\}$, denominada *función característica* del conjunto X, y tal que dado un elemento $x \in U$, si ocurre que $\mu(x) = 0$, decimos que el elemento x no está en el subconjunto X, mientras que si $\mu(x) = 1$, decimos que el elemento x pertenece al subconjunto X. En otras palabras, estamos entendiendo aquí que $X = \{x \in U : \mu(x) = 1\}$.

La idea clave de Zadeh consistió en entender la pertenencia a un conjunto de referencia (o universo) como algo *gradual* en vez de como algo *dicotómico* del tipo "sí o no". Con esta idea, que perseguía una interpretación matemática de la *incertidumbre* o de la *posibilidad*, un elemento x de un universo U tiene asociado un *grado de pertenencia* a un subconjunto *difuso* (o "fuzzy"), de U, al que seguiremos denotando X. Ahora, el grado de pertenencia pasa a ser un número entre 0 y 1. Así las cosas, un *subconjunto difuso* X del universo U se define directamente como una función $\mu_X : U \to [0,1]$. Habitualmente se identifica el objeto definido X con la función μ_X que lo define, y se emplean los términos y símbolos X y μ_X de manera intercambiable y equivalente, como mejor convenga. La función μ_X se denomina *indicador* o función de *grado de pertenencia* del subconjunto difuso $X \subseteq U$. A los subconjuntos clásicos de un universo U, es decir, aquellos cuya función de grado de pertenencia toma valores en $\{0,1\}$ se les denomina *conjuntos nítidos* ("crisp", en inglés).

Si tenemos presente entonces que un subconjunto fuzzy es, por su propia definición, una función, definida sobre un universo U (que manejarems siempre como un conjunto nítido, en sentido clásico y habitual), y que toma valores en el intervalo unidad $[0,1]$ de la recta real, resultará, por ende, que cualquier construcción teórica (generalmente topológica o analítica) que nos permita recuperar de manera unívoca una función de U en $[0,1]$, estará definiendo de hecho un subconjunto difuso de U.

Hay diversas construcciones de este tipo: de hecho, para recuperar completamente una función $f : U \to [0,1]$, no nece-

[1] Esta palabra ha sido incorporada ya al lenguaje matemático, incluso cuando nos expresamos en lengua castellana. Nosotros la utilizaremos también a lo largo del presente trabajo.

sitamos –de entrada– conocer los valores de $f(x)$ para cada elemento x del universo U. Podemos dar f de alguna otra forma alternativa que permita, *pero a posteriori, y siempre que necesitemos el dato*, calcular cualquier valor $f(x)$, no importa cuál sea el elemento $x \in U$.

Una de estas construcciones clásicas de la Topología General y del Análisis Real apareció en 1925 (véase [17]). La analizamos en la sección siguiente.

2. Espacios normales en Topología General: Algunos resultados alrededor del Lema de Urysohn

Al estudiar los llamados *axiomas de separación* en Topología General, aparece el concepto de *espacio normal* (véase, por ejemplo, [15], p. 134). Recordemos que un espacio topológico (U,τ) se dice normal si dados dos subconjuntos $A,B \subseteq U$, ambos τ-cerrados y con intersección vacía ($A \cap B = \emptyset$), es posible encontrar dos subconjuntos $A',B' \subseteq U$ ambos τ-abiertos, con intersección vacía, y tales que $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$.

En 1925, P. Urysohn (véase [17]) probó el siguiente resultado clásico:

Lema de Urysohn: *Si A y B son cerrados disjuntos de un espacio topológico normal (U,τ), existe una función continua $f : U \to [0,1]$ tal que $f(a) = 0$ para todo $a \in A$ y $f(b) = 1$ para cualquier $b \in B$.*

La demostración de este resultado, que podemos consultar, por ejemplo, en [15], p. 137, se basa en una forma un tanto peculiar de obtener la función f. En efecto, para obtener f se toma en primer lugar un subconjunto denso D en el conjunto $[0,+\infty)$ de los números reales no negativos. En concreto, Urysohn toma aquí el conjunto de los números racionales diádicos positivos, pero podría trabajarse de manera análoga con otros subconjuntos densos de $[0,+\infty)$. Después, siendo D el conjunto de los números racionales diádicos positivos, Urysohn define una familia $\{F_0\} \cup \{F_t : t \in D\}$ de subconjuntos de U, con las siguientes características:

1. $A \subseteq F_0$ y la clausura de F_0, que denotaremos $\bar{F}_0$ tiene intersección vacía con B. Esto puede hacerse porque el espacio topológico (U,τ) es normal, de manera que los cerrados A y B pueden separarse por abiertos disjuntos A' y B' con $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$, así que llamando $A' = F_0$ tenemos, en particular, que $F_0 \cap B \subseteq F_0 \cap B' = \emptyset$, luego $F_0 \subseteq U \setminus B$, y al ser este último un cerrado (pues B era abierto), llegamos ya a que $\bar{F}_0 \subseteq U \setminus B$, o bien $\bar{F}_0 \cap B = \emptyset$.

2. $F_1 = U \setminus B$.

3. Para cualquier $s \in D$ tal que $s > 1$ se tiene que $F_s = U$.

4. Si $0 < t < 1$, con $t \in D$, se escribe t en la forma $t = (2m+1)2^{-n}$ con m,n enteros positivos, y se escoge, por inducción sobre n, un subconjunto abierto $F_t \subseteq U$ tal que siendo $s = (2m)2^{-n}$ y $u = (2m+2)2^{-n}$ se cumpla que $\bar{F}_s \subseteq F_t \subseteq \bar{F}_t \subseteq F_u$. De nuevo, esto puede hacerse por ser (U,τ) un espacio topológico normal.

A la familia $\mathscr{F} = \{F_0\} \cup \{F_t : t \in D\}$ así construida se le denomina *espectro de Urysohn*. Y a partir de él se define una función $f : U \to [0,1]$ en la forma $f(x) = \text{ínf}\{t : x \in F_t\}$. Se prueba también que esta función es continua, se anula sobre A y, finalmente, toma el valor 1 sobre B.

Alrededor de este resultado clásico debido a Urysohn, podemos fijar nuestra atención en los siguientes hechos básicos, que, al estilo de la demostración del Lema de Urysohn que aparece en [15], pueden probarse y establecerse como lemas previos que luego se utilizan en alguno de los pasos intermedios de la demostración del citado lema.

Proposición 1: *Sea D un subconjunto denso en el conjunto $[0,+\infty)$ de los números reales no negativos. Sea U un conjunto (o universo). Supongamos que, para cada $t \in D$ existe un subconjunto $F_t \subseteq U$ de manera que la familia $\mathscr{F} = \{F_t : t \in D\}$ satisface las propiedades siguientes:*

1. *Si $t < s$ entonces $F_t \subseteq F_s$.*[2]

2. *$U = \bigcup_{t \in D} F_t$.*

Entonces, si consideramos la función $f : U \to [0,+\infty)$ dada por $f(x) = \text{ínf}\{t : x \in F_t\}$ $(x \in U)$, se tiene que:

i) $\{x \in U : f(x) < s\} = \bigcup\{F_t : t \in D;\ t < s\}$,

ii) $\{x \in U : f(x) \leq s\} = \bigcap\{F_t : t \in D;\ t > s\}$,

para todo $s \in [0,+\infty)$.

Proposición 2: *Sea D un subconjunto denso en $[0,+\infty)$. Sea (U,τ) un espacio topológico. Supongamos que, para cara $t \in D$ existe un subconjunto τ-abierto $F_t \in D$ de manera que la familia $\mathscr{F} = \{F_t : t \in D\}$ satisface las propiedades siguientes:*

1. *Si $t < s$ entonces $\bar{F}_t \subseteq F_s$, donde $\bar{F}_t$ representa la clausura (en la topología τ de partida) del subconjunto $F_t \subseteq U$,*

2. *$U = \bigcup_{t \in D} F_t$.*

[2] Se suele decir, en una situación como ésta, que una familia de subconjuntos de un mismo universo es *encajada* (o *anidada*) si, dados cuales quiera dos elementos de tal familia, ocurre siempre que uno de ellos está contenido en el otro. En otras palabras, la tal familia resulta estar totalmente ordenada por contenido conjuntista.

Entonces, la función $f : U \to [0,+\infty)$ *dada por* $f(x) = \text{ínf}\{t : x \in F_t\} \quad (x \in U)$ *es continua.*

Observación*: Si partimos, de entrada, de un conjunto o universo* U *a priori desprovisto de topología, podemos considerar en él la topología discreta (en la que cualquier subconjunto de* U *es abierto). Esto hace que cualquier función definida sobre* U *pase a ser automáticamente continua. (En otras palabras, si queremos despreocuparnos de la continuidad de las funciones que definimos, podemos considerar el subconjunto* U *dotado de la topología discreta. Notemos además que, en tal caso la clausura* $\bar{A}$ *de un subconjunto* $A \subseteq U$ *es el propio subconjunto* A*. De hecho, la topología discreta sobre* U *se puede caracterizar como aquella que cumple* $\bar{A} = A$ *para todo* $A \subseteq U$*).*

En resumidas cuentas, en los resultados previos alrededor del lema de Urysohn, o en los pasos intermedios de la prueba de tal lema, observamos como a partir de familias adecuadas de subconjuntos de un conjunto o universo dado de antemano –tal es el caso de la familia conocido como espectro de Urysohn, cuando se trabaja con espacios topológicos normales– podemos reconstruir funciones que partan de ese conjunto y tomen valores en $[0,1]$. Esto, ni más ni menos, recuperaría así cualquier subconjunto fuzzy $X \subseteq U$, en el sentido de la definición clásica introducida por Zadeh en [19].

3. La familia de α-cortes de un subconjunto fuzzy

Abundando más en las ideas anteriores, podemos observar de nuevo que, dado un universo U, hemos definido un subconjunto fuzzy $X \subseteq U$ como una función de grado de pertenencia $\mu_X : U \to [0,1]$. Con esta definición, dado un número $\alpha \in [0,1]$, denominamos α*-corte* del subconjunto fuzzy $X \subseteq U$ al subconjunto nítido ("crisp") X_α del universo U definido como $X_\alpha = \{x \in U : \mu_X(x) \geq \alpha\}$.

Al contemplar la colección $\{X_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ resulta evidente que se trata de una familia anidada. Además $X_0 = U$. Al conjunto X_1 se le denomina *núcleo* del subconjunto fuzzy $X \subseteq U$. Cuando X_1 es no vacío se dice que el subconjunto fuzzy X es *normal*[3]. Observamos inmediatamente que si $\alpha < \beta$ ocurre que $X_\beta \subseteq X_\alpha$.

La familia de α-cortes de un subconjunto fuzzy $X \subseteq U$ juega, de hecho, un papel análogo al de un espectro de Urysohn, si bien como acabamos de notar, los contenidos están a la inversa (esto es: $\alpha < \beta \Rightarrow X_\beta \subseteq X_\alpha$), aunque esto no tiene mayor importancia. Y, al estilo de los resultados que giran alrededor del lema de Urysohn, podemos recuperar fácilmente la función indicador o grado de pertenencia μ_X del subconjunto difuso $X \subseteq U$, como $\mu_X(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] : x \in X_\alpha\}$.

Ni qué decir tiene, entonces, que a partir de un espectro de Urysohn sobre un universo U se puede definir de manera natural un subconjunto fuzzy $X \subseteq U$, y viceversa, a partir de un subconjunto fuzzy $X \subseteq U$ podremos siempre definir un espectro de Urysohn sobre el universo U, trabajando adecuadamente con la colección de los α-cortes $\{X_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ de X.

4. Comentarios finales

Construcciones muy similares a la del espectro de Urysohn, con el fin de recuperar funciones (continuas o no) entre dos espacios topológicos han ido apareciendo en la literatura relativa a Topología General, Análisis Real, Estructuras Ordenadas, etc. (Véase [18], pp. 43-44 de [10], [16, 7, 11, 12, 14, 6, 3, 4, 1, 9, 5]). Con diversos matices, los conceptos son bastante similares: generalmente a partir de una determinada familia encajada (o anidada) de subconjuntos de un conjunto dado se consigue reconstruir una función que, desde otro conjunto de partida, tome valores en éste. El término más frecuente para referirse a estas colecciones anidadas de conjuntos es el de *escala*, si bien se utilizan otros términos alternativos según el contexto, tales como "espectro de Urysohn" –que tal vez determina el concepto y la nomenclatura más antiguos–, "descomposición espectral de Stone" (véase [18]), "familias separables de Herden" (véase [11, 12, 13]), entre otros. Una interesante y didáctica comparación entre los distintos matices técnicos de esta gama de definiciones similares puede verse en la sección tercera de [4].

Añadiendo alguna condición adicional a la definición de "escala", se han analizado en la literatura adecuadas familias anidadas de un subconjunto dado que no solamente permiten recuperar o reconstruir funciones con valores reales –por ejemplo, con valores en $[0,1]$ como es el caso de las funciones de grado de pertenencia, o indicadores, de subconjuntos fuzzy de un universo dado–, sino que también permiten garantizar que las funciones construidas sean continuas, semicontinuas, isotónicas (esto es, preservadoras de alguna ordenación), u homomorfismos algebraicos (de semigrupos, espacios vectoriales, etc.). Un balance y recopilación comentada de este tipo de construcciones aparece en el artículo [4] de la bibliografía que citamos aquí.

Por último, otras visiones alternativas "desde fuera" de la noción de subconjunto fuzzy han aparecido recientemente en la literatura. Se trata de construcciones que son, de algún modo, equivalentes a la definición original introducida por Zadeh en [19]. Entre estas formas alternativas de visualizar o redefinir un subconjunto difuso ("fuzzy") las hay basadas en nociones topológicas (véase [2]) o en ecuaciones funcionales (véase [8]).

[3] Este concepto de "normalidad" no tiene nada que ver, en principio, con aquella noción de "espacio topológico normal" que hemos considerado en la seeción anterior.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación MTM2012-37894-C02-02, del Ministerio de Educación y Ciencia (España).

Referencias

[1] J.C. Rdz. Alcantud, G. Bosi, M.J. Campión, J.C. Candeal, E. Induráin y C. Rodríguez-Palmero: Continuous utility functions through scales. *Theory and Decision* 64, pp. 479–494, 2008.

[2] E. Barrenechea, H. Bustince, M.J. Campión, E. Induráin y V. Knoblauch: Topological interpretations of fuzzy subsets. A unified approach for fuzzy thresholding algorithms. *Knowledge-based Systems* 54, pp. 163–171, 2013.

[3] G. Bosi, M.J. Campión, J.C. Candeal, E. Induráin y M.E. Zuanon: Numerical isotonies of preordered semigroups through the concept of a scale. *Mathematica Pannonica* 16, pp. 65–77, 2005.

[4] G. Bosi, M.J. Campión, J.C. Candeal, E. Induráin y M.E. Zuanon: Isotonies on ordered cones through the concept of a decreasing scale. *Mathematical Social Sciences* 54, pp. 115–127, 2007.

[5] G. Bosi, J. Gutiérrez García y E. Induráin: Unified Representability of Total Preorders and Interval Orders through a Single Function: The Lattice Approach. *Order* 26, pp. 255–275, 2009.

[6] G. Bosi y M.E. Zuanon: Continuous representability of homothetic preorders by means of sublinear order-preserving functions. *Mathematical Social Sciences* 45, pp. 333–341, 2003.

[7] D.C.J. Burgess y M. Fitzpatrick: On separation axioms for certain types of ordered topological space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 82, pp. 59–65, 1977.

[8] M. J. Campón, R. G. Catalán, E. Induráin y G. Ochoa: Reinterpreting a fuzzy subset by means of a Sincov's functional equation. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*. DOI:10.3233/IFS-131005. Aceptado para publicación en 2013. Aparecerá a lo largo de 2014.

[9] M.J. Campión, E. Induráin y V. Knoblauch: Topologies generated by nested collections. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*. Aceptado para publicación en 2013. Aparecerá a lo largo de 2014.

[10] L. Gillman y M. Jerison: *Rings of Continuous Functions*. Springer Verlag, New York, 1965.

[11] G. Herden: On the existence of utility functions. *Mathematical Social Sciences* 17, pp. 297–313, 1989.

[12] G. Herden: On the existence of utility functions II. *Mathematical Social Sciences* 18, pp. 107–117, 1989.

[13] G. Herden y A. Pallack: Useful topologies and separable systems. *Applied General Topology* 1, pp. 61–82, 2000.

[14] G. Herden y A. Pallack: On the continuous analogue of the Szpilrajn Theorem I. *Mathematical Social Sciences* 43, pp. 115–134, 2002.

[15] J.L. Kelley: *Topología General*. Eudeba, Buenos Aires, 1962.

[16] L. Nachbin: *Topology and Order*. Van Nostrand Reynold, New York, 1965.

[17] P. Urysohn: Über die Machtigkeit der zusammenhängenden Mengen. *Mathematische Annalen* 94, pp. 262–295, 1925.

[18] M.H. Stone: Boundedness properties in function lattices. *Canadian Journal of Mathematics* 1, pp. 176–186, 1949.

[19] L.A. Zadeh: Fuzzy Sets. *Information and Control* 8, pp. 338–353, 1965.

Aplicación de un sistema de recomendaciones que combina relevancia y calidad en una biblioteca digital universitaria

Álvaro Tejeda-Lorente[1], **Carlos Porcel**[2], **Juan Bernabé-Moreno**[1], **Mª Ángeles Martínez**[3], **Enrique Herrera-Viedma**[1]

[1]*Dpto. Ciencias de la Computación e IA, Universidad de Granada*, {atejeda,viedma}@decsai.ugr.es,juan.bernabe-moreno@telefonica.com

[2]*Dpto. Informática, Universidad de Jaén*, cporcel@ujaen.es

[3]*Dpto. de Trabajo Social, Universidad Internacional de La Rioja*, mundodesilencio@hotmail.com

Resumen

Los sistemas de recomendaciones pueden ser usados en un entorno académico para ayudar a los usuarios en sus procesos de acceso a información relevante. Para ello, las propuestas analizadas usan características de los usuarios y/o ítems, pero no tienen en cuenta la calidad de los propios ítems. En este trabajo proponemos que, combinando la relevancia estimada que un ítem tiene para un usuario junto con su calidad, el sistema genera recomendaciones más útiles y precisas. El sistema mide la calidad del ítem y la tiene en cuenta como un nuevo factor en el proceso de generación de recomendaciones. Hemos desarrollado el sistema adoptando un enfoque lingüístico difuso.

Palabras Clave: Sistemas de recomendaciones, modelado lingüístico difuso, calidad de los ítems, bibliotecas digitales universitarias.

1 Introducción

Cada día, nos enfrentamos con una gran cantidad de información en cualquier ámbito de nuestras vidas. Esto nos dificulta el poder acceder a información de interés, lo que hace necesario el desarrollo de sistemas automáticos que faciliten un accceso rápido y efectivo a información relevante. Un ejemplo de estos sistemas automáticos son las bibliotecas digitales, donde la información se genera mucho más rápido de lo que los usuarios puedan procesarla [10, 16]. Las bibliotecas digitales son colecciones de información que tienen asociados una serie de servicios que ofrecen a su comunidad de usuarios [16]. Se han aplicado en numerosos ámbitos, pero nosotros nos vamos a centrar en un contexto académico. En ellas, un servicio particularmente importante es la difusión selectiva de información.

Un sistema de recomendaciones asiste a los usuarios suministrándoles ítems que puedan ser de su interés [5]. Son servicios personalizados porque tratan a cada usuario de manera diferente. Se están convirtiendo en herramientas muy populares para reducir la sobrecarga de información y para mejorar las ventas en comercio electrónico. En el marco de las Bibliotecas Digitales Universitarias (BDU), los sistemas de recomendaciones se pueden usar para ayudar a sus usuarios (profesores, estudiantes y personal de biblioteca) a encontrar y seleccionar información y fuentes de conocimiento [13]. En trabajos previos hemos aplicado con éxito sistemas de recomendaciones en el ámbito de las BDU [14, 15]. Pero, tal y como sucede en la Web, el número de recursos electrónicos que se generan diariamente sigue creciendo y el rendimiento del sistema disminuye, por lo que las propuestas previas son suceptibles de mejora.

Un primer paso la mejora consiste en adapatar el enfoque de recomendación a las nuevas circunstancias. En el ámbito de las BDU, el enfoque colaborativo (ver sección 2.1) es muy útil porque permite a los usuarios compartir experiencias y valoraciones, de manera que los usuarios pueden recibir información considerada útil por otros usuarios con perfiles similares. Pero este enfoque falla cuando se dispone de pocas valoraciones, lo que se conoce como *problema de arranque en frío*. Por ello, proponemos combinar el enfoque colaborativo con un enfoque basado en contenidos, obteniendo de esta forma un enfoque híbrido (ver sección 2.1). Por otro lado, consideramos que las recomendaciones generadas serían más interesantes si se tiene en cuenta la calidad de los ítems. La idea es combinar la relevancia estimada mediante el esquema de recomendación híbrido con la calidad del ítem. En la vida cotidiana solemos comprar productos bien conocidos o productos de marcas populares. Estos productos son populares porque se considera que tienen una alta calidad de cara a satisfacer las necesidades de los usuarios.

En este trabajo presentamos un sistema de recomendaciones lingüístico difuso basado en la calidad de los ítems, y lo aplicamos en una BDU para ayudar a los usuarios a acceder a recursos electrónicos relevantes. El sistema mide la

calidad de los recursos y tiene en cuenta esta medida como un nuevo factor en el proceso de generación de recomendaciones. Hemos realizado estudios online y las recomendaciones obtenidas son más útiles y precisas.

El trabajo se estructura de la siguiente forma. En la sección 2 se presentan los antecedentes necesarios. La sección 3 presenta el sistema propuesto. Por último se analizan las conclusiones obtenidas.

2 Antecedentes

2.1 Sistemas de recomendaciones

La provisión de recomendaciones personalizadas requiere que el sistema tenga algún conocimiento sobre los usuarios, tal como las valoraciones que hayan suministrado sobre ítems ya explorados [5, 6, 11]. El disponer de este conocimiento implica que el sistema debe mantener perfiles de usuarios que contienen las preferencias o necesidades de los mismos. Pero la forma en que el sistema adquiere esta información depende del esquema de recomendación que adoptemos. El sistema podría adquirir información implícita acerca de los usuarios analizando su comportamiento, o bien podría requerir que los usuarios especifiquen explícitamente sus preferencias.

Uno de los métodos más usados para generar recomendaciones es el *enfoque colaborativo* [6], en el que las recomendaciones hechas a un usuario están basadas en las valoraciones proporcionadas por otros usuarios con perfiles similares. Otro enfoque muy usado por su simplicidad es el *enfoque basado en contenidos* [11], que genera las recomendaciones teniendo en cuenta las caraterísticas de los ítems y la experiencia pasada de los usuarios al tratar con ítems similares. Todos los enfoques tienen sus ventajas e inconvenientes, de manera que una solución bastante frecuente consiste en adoptar un enfoque híbrido [3, 4]. En este caso se combinan de una forma u otra diferentes enfoques para reducir las desventajas que cada uno de ellos presenta por separado y al mismo tiempo explotar sus beneficios.

2.2 Enfoque lingüístico difuso

Es una herramienta basada en el concepto de variable lingüística [17], que ha dado muy buenos resultados para el modelado de información cualitativa en multitud de problemas.

2.2.1 Enfoque lingüístico difuso 2-tupla

El enfoque lingüístico difuso 2-tupla [8] es un modelo continuo de representación de información que permite reducir la pérdida de información típica de otros enfoques lingüísticos (clásico y ordinal [7, 17]). Para definirlo, tenemos que establecer el modelo de representación y el modelo computacional de las 2-tupla para representar y agregar respectivamente la información lingüística.

Consideremos que $\mathscr{S} = \{s_0, ..., s_g\}$ es un conjunto de términos lingüísticos con cardinalidad impar, donde la semántica asociada con cada una de las etiquetas viene dada por medio de funciones de pertenencia triangulares, y consideramos todos los términos distribuidos sobre una escala sobre la que hay establecida una relación de orden total. Si mediante un método de agregación de información lingüística, obtenemos un valor $\beta \in [0, g]$, y $\beta \notin \{0, ..., g\}$, podemos representar β como una 2-tupla (s_i, α_i), donde s_i representa la etiqueta lingüística, y α_i es un valor numérico que expresa la traslación de β con respecto al índice de la etiqueta más cercana, i, en el conjunto de términos lingüísticos ($s_i \in \mathscr{S}$). Este modelo define un conjunto de funciones de transformación entre valores numéricos y 2-tupla: $\Delta(\beta) = (s_i, \alpha)$ y $\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = \beta \in [0, g]$ [8].

Para establecer el modelo computacional, se definen operadores de negación, de comparación y de agregación. Usando las funciones Δ y Δ^{-1}, podemos extender cualquiera de los operadores de agregación ya definidos para trabajar con 2-tuplas [8]. Algunos ejemplos son:

Definición 1 . *Media aritmética. Sea* $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\}$ *un conjunto de 2-tuplas, la 2-tupla que representa la media aritmética* $\bar{x}^e$ *se calcula como:*

$$\bar{x}^e[(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)] = \Delta(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)) = \Delta(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_i).$$

Definición 2 . *Operador de media ponderada lingüística. Sea* $x = \{(r_1, \alpha_1), \ldots, (r_n, \alpha_n)\}$ *un conjunto de 2-tuplas y* $W = \{(w_1, \alpha_1^w), ..., (w_n, \alpha_n^w)\}$ *sus pesos asociados con valores 2-tupla. La media ponderada lingüística* $\bar{x}_l^w$ *es:*

$$\bar{x}_l^w[((r_1, \alpha_1), (w_1, \alpha_1^w)) ... ((r_n, \alpha_n), (w_n, \alpha_n^w))] = \Delta(\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \beta_{W_i}}{\sum_{i=1}^{n} \beta_{W_i}}),$$

con $\beta_i = \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)$ *y* $\beta_{W_i} = \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i^w)$.

2.2.2 Enfoque lingüístico difuso multi-granular

En cualquier enfoque, un parámetro importante que hay que determinar es la "granularidad de incertidumbre", es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos S. Según el grado de incertidumbre que un experto encargado de cualificar un fenómeno tenga sobre el mismo, el conjunto de términos lingüísticos elegido para proporcionar ese conocimiento tendrá más o menos términos.

Cuando distintos expertos tienen diferentes grados de incertidumbre sobre el fenómeno o cuando un experto tiene que valorar distintos conceptos, se necesitan varios conjuntos de términos lingüísticos de diferente granularidad [9]. En tales situaciones necesitamos herramientas que nos permitan gestionar la información lingüística multi-granular. En [9] se propuso un MLD 2-tupla multi-granular basado en el concepto de jerarquía lingüística. Una *Jerarquía Lingüística, LH*, es un conjunto de niveles $l(t,n(t))$, donde cada nivel t es un conjunto de términos lingüísticos con una granularidad $n(t)$ diferente [9]. Los niveles están ordenados por granularidad, de manera que podemos definir un nivel a partir del anterior: $l(t,n(t)) \rightarrow l(t+1, 2\cdot n(t)-1)$. En [9] se definió una familia de funciones de transformación entre etiquetas de diferentes niveles. Para establecer el modelo computacional seleccionamos un nivel que usamos para hacer uniforme la información y así podemos usar los operadores definidos en el modelo 2-tupla.

2.2.3 Relaciones de preferencia lingüísticas difusas

Definición 3 . *Una relación de preferencia difusa P sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1,..,x_n\}$ es un conjunto difuso sobre $X \times X$, es decir, es caracterizado por una función de pertenencia $\mu_P: X \times X \longrightarrow [0,1]$.*

Cuando la cardinalidad de X es pequeña, la relación de preferencia puede ser convenientemente representada mediante la matriz $P = (p_{ij})$, con $p_{ij} = \mu_P(x_i,x_j)$ $(\forall i,j \in \{1,\ldots,n\})$ indicando el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre x_j, donde: $p_{ij} = 1/2$ indica indiferencia entre x_i y x_j, $p_{ij} = 1$ indica que x_i es absolutamente preferida a x_j, y $p_{ij} > 1/2$ indica que x_i es preferida a x_j.

Sin embargo, nuestro sistema integra el MLD multi-granular basado en 2-tupla, por lo que definimos una relación de preferencia de la siguiente manera.

Definición 4 . *Sea $X = \{x_1,..,x_n\}$ un conjunto de alternativas y S un conjunto de términos lingüísticos. Una relación de preferencia lingüística $P = p_{ij} (\forall i,j \in \{1,\ldots,n\})$ sobre X es:*

$$\mu_P : X \times X \longrightarrow S \times [0.5, 0.5)$$

donde $p_{ij} = \mu_P(x_i,x_j)$ es una 2-tupla que denota el grado de preferencia de la alternativa x_i respecto x_j.

Sin embargo, en problemas reales, los expertos no siempre son capaces de proporcionar todos los valores que son requeridos. Para modelar estas situaciones, definimos el concepto de relación de preferencia difusa incompleta [1, 2].

Definición 5 . *Una función $f: X \longrightarrow Y$ es parcial cuando no ocurre que cada elemento del conjunto X necesariamente se corresponde con un elemento del conjunto Y.*

Definición 6 . *Una relación de preferencia difusa incompleta P sobre un conjunto de alternativas X, es un conjunto difuso sobre el conjunto $X \times X$ que se caracteriza mediante una función de pertenencia parcial.*

3 Descripción del sistema

En este trabajo afrontamos el proceso de generación de recomendaciones sobre recursos de una BDU como una tarea con dos elementos a considerar: recursos relevantes para los usuarios y recursos de calidad. Proponemos un método para combinar la relevancia estimada para un recurso junto con la calidad del mismo. A continuación se van describiendo los componentes principales.

3.1 Representación de la información

Para representar los distintos conceptos que tienen que ser valorados en la actividad del sistema, vamos a usar distintos conjuntos de etiquetas $(S_1, S_2, ...)$ seleccionados de una jerarquía lingüística [9]. En el sistema propuesto trabajamos con los siguientes conceptos:

- **Grado de importancia** de una disciplina con respecto al ámbito de un recurso, valorado en S_1.
- **Grado de similitud** entre recursos o usuarios, valorado en S_2.
- **Grado de relevancia** estimado de un recurso para un usuario, valorado en S_3.
- **Grado de satisfacción** de un usuario con un recurso recomendado, valorado en S_4.
- **Grado de preferencia** de un recurso respecto de otro, valorado en S_5.

En nuestro sistema usamos conjuntos de etiquetas seleccionados de 2 niveles de una jerarquía lingüística de 3 niveles de 3, 5 y 7 etiquetas cada uno. En concreto, se usa el nivel 2 (5 etiquetas) para representar grados de importancia y grados de preferencia ($S_1 = S^5$ y $S_5 = S^5$), y el nivel 3 (9 etiquetas) para representar grados de similitud, relevancia estimada y satisfacción ($S_2 = S^9$, $S_3 = S^9$ y $S_4 = S^9$).

3.1.1 Representación de los recursos

Los recursos considerados son artículos de revista, contribuciones a congresos, capítulos de libro, libros o libros editados. El sistema obtiene una representación interna basada principalmente en el ámbito del recurso, para lo cual usamos una clasificación compuesta de 25 disciplinas (ver figura 1). Entonces, para representar un recurso i adoptamos un modelo vectorial, es decir, obtenemos un vector $VR_i = (VR_{i1}, VR_{i2}, ..., VR_{i25})$, donde $VR_{ij} \in S_1$ indica el

grado de importancia de la disciplina j con respecto al ámbito del recurso i. Este valor es asignado inicialmente por el personal de la BDU cuando se inserta un nuevo recurso.

Figura 1: Disciplinas para definir el ámbito de los recursos.

3.1.2 Perfiles de usuario

Para adquirir las preferencias de los usuarios, usamos el método propuesto en [14]. Consiste en solicitar a los usuarios que proporcionen sus preferencias sobre 5 recursos, usando una relación de preferencia lingüística difusa incompleta. Además, de acuerdo a los resultados presentados en [2], basta con que los usuarios proporcionen una fila de la relación. A continuación usamos el método propuesto en [2] para completar la relación, y entonces podemos obtener un vector que representa las preferencias de los usuarios sobre sus tópicos de interés. Además, de esta forma conseguimos reducir el problema de arranque en frío, porque con esta información suministrada por los usuarios al registrarse, ya pueden empezar a recibir recomendaciones. Veámos el proceso con más detalle:

1. Adquirir las **preferencias de los usuarios** sobre un número limitado de recursos. El sistema muestra a los usuarios los 5 recursos más representativos, $R = \{r_1,..,r_5\}$ y les pide que expresen sus preferencias mediante una relación de preferencia lingüística difusa incompleta. En la relación de preferencia, cada valor $p_{ij} \in S_5$ representa el grado de preferencia de i sobre j. Bastaría con proporcionar una única fila:

$$P = \begin{pmatrix} - & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ x & - & x & x & x \\ x & x & - & x & x \\ x & x & x & - & x \\ x & x & x & x & - \end{pmatrix} \quad (1)$$

   Entonces el sistema completa la relación P usando el método propuesto en [2], y obtenemos la relación P^*:

$$P^* = \begin{pmatrix} - & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p^*_{21} & - & p^*_{23} & p^*_{24} & p^*_{25} \\ p^*_{31} & p^*_{32} & - & p^*_{34} & p^*_{35} \\ p^*_{41} & p^*_{42} & p^*_{43} & - & p^*_{45} \\ p^*_{51} & p^*_{52} & p^*_{53} & p^*_{54} & - \end{pmatrix} \quad (2)$$

   donde $p_{1j} \in S_5$ son los grados insertados por el usuario sobre las preferencias del recurso x_1 con respecto a x_j, p_{ii} indica indiferencia, y cada p^*_{ij} es el grado estimado para el usuario sobre sus preferencias del recurso x_i con respecto a x_j.

2. Obtener el **vector de preferencias del usuario**. Para calcular los grados de preferencia del recurso i para un experto DG, podemos aplicar el operador de media aritmética definido en la definición 1 [8]: $DG_i = \overline{x}^e[p^*_{i1},\ldots,p^*_{i5}]$.

3. Ahora podemos obtener el vector de preferencias del usuario x, es decir, $VU_x = (VU_{x1}, VU_{x2}, ..., VU_{x25})$, a partir de la agregación de los vectores que representan las características de los recursos seleccionados ($\{VR_1,...,VR_5\}$) ponderados por los grados de preferencias $\{DG_1,\ldots,DG_5\}$, usando el operador $\overline{x}^w_l$ definido en la definición 2 [8]: $VU_{xk} = \overline{x}^w_l[(VR_{1k}, DG_1),\ldots,(VR_{5k}, DG_5)]$, con $k = \{1,\ldots,25\}$.

3.2 Esquema de recomendación

Para generar las recomendaciones que se envían a los usuarios, adoptamos un enfoque híbrido que alterna entre los enfoques basado en contenidos y el colaborativo [5]. El primero se aplica cuando se inserta un nuevo recurso y el segundo cuando se registra un nuevo usuario. Nos basamos en un proceso de cálculo de similitudes entre vectores. En concreto usamos la medida del coseno, definida en un contexto lingüístico:

$$\sigma_l(V_1,V_2) = \Delta(g \times \frac{\sum_{k=1}^{n}(\hbar_1 \times \hbar_2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\hbar_1)^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\hbar_2)^2}})$$

donde $\sigma_l(V_1,V_2) \in S_2 \times [-0.5, 0.5]$, g es la granularidad del conjunto usado para expresar la relevancia (S_3), n el número de disciplinas, $\hbar_i = \Delta^{-1}(v_{ik}, \alpha_{vik})$ y (v_{ik}, α_{vik}) es el 2-tupla del término k en el vector V_i.

3.2.1 Recomendación basada en contenidos

Cuando un nuevo recurso i se inserta en el sistema, se sigue el esquema basado en contenidos para saber si le puede interesar a un usuario e, de la siguiente manera:

1. Calcular $\sigma_l(VR_i, VU_e) \in S_2$. Como $S_2 = S^9$, consideramos que i está relacionado con e si $\sigma_l(VR_i, VU_e) > (s^9_4, 0)$.

2. Si i está relacionado con e, el sistema recomienda i a e con un grado de relevancia estimada $i(e) \in S_3 \times [-0.5, 0.5]$ calculado así:
   (a) Buscar todos los recursos que previamente han sido bien valorados por e.
   (b) Agregar todas las valoraciones de e sobre esos recuros, ponderando por la similitud entre i y cada uno de los recursos (usamos el operador definido en la definición 2).

3.2.2 Recomendación colaborativa

Cuando un nuevo usuario e se registra en el sistema, se generan recomendaciones sobre recursos ya insertados, de la siguiente manera:

1. Seleccionar el conjunto de usuarios $\aleph_e$ más similares a e. Para ello calculamos la similitud entre el vector que representa a e (VU_e), y los vectores del resto de usuarios (VU_y, $y = 1..n$ siendo n el número de usuarios): $\sigma_l(V_e, V_y) \in S_2$. Como $S_2 = S^9$, consideramos que y es similar a e si $\sigma_l(VU_e, VU_y) > (s_4^9, 0)$.
2. Recuperar las valoraciones sobre recursos que previamente hayan sido bien valorados por los usuarios similares a e.
3. Todos esos recursos bien valorados por los usuarios similares a e, serán recomendados a e con un grado de relevancia estimada $j(e) \in S_3 \times [-0.5, 0.5]$, calculada como la agregación de todas esas valoraciones, ponderandas por la similitud entre e y cada uno de sus vecinos cercanos (usamos el operador definido en la definición 2).

3.3 Cálculo de la calidad

La idea es que si un recurso es habitualmente preferido a otros, nos da una idea de que dicho recurso tiene cierta calidad. Para ello adoptamos el método presentado en [14], donde los usuarios expresan sus preferencias mediante relaciones de preferencia lingüísticas difusas incompletas [1, 12]. El sistema completa las relaciones de preferencia incompletas usando las técnicas presentadas en [1, 2]. Con este método podemos contar el número de veces que cada recurso ha sido seleccionado para ser mostrado (entre los más relevantes), así como el número de veces que ha sido preferido a otros. Los recursos que se muestran van variando, de manera que el sistema registra las veces que cada recurso es seleccionado y las veces que es preferido a otro. Adoptamos este enfoque porque estos datos los tenemos disponibles, de manera que no necesitamos más información sobre usuarios o recursos, evitando además un incremento de la complejidad del sistema. Estimamos la calidad de un recurso i como la probabilidad de que sea preferido habiendo sido seleccionado, es decir:

$$q(i) = p_i / s_i \tag{3}$$

donde p_i es el número total de veces que i ha sido preferido a otro y s_i es el total de veces que i ha sido seleccionado.

3.4 Reranking

Una vez que un recurso i es considerado relevante para e, agregamos su relevancia estimada $i(e) \in S_3$ junto con su puntuación de calidad $q(i) \in [0, 1]$:

1. Trasladamos la puntuación de calidad al rango en el que está definida la relevancia: $tq(i) = q(i) \times g$, donde g es la granularidad de S_3; como $S_3 = S^9 \Rightarrow g = 8$.
2. Para obtener el grado de relevancia final usamos un operador de agregación multiplicativo por su sencillez de aplicación y buenos resultados obtenidos:

$$RelevanciaFinal(i) = \Delta\left(\frac{\Delta^{-1}(i(e) \times tq(i))}{g}\right) \tag{4}$$

   donde Δ y Δ^{-1} son las funciones de transformación entre 2-tupla y valores simbólicos [8].
3. Trasladamos el grado de relevancia final al intervalo $[0, g]$.

3.5 Fase de realimentación

Por último, la actividad de generación de recomendaciones se completa con esta fase, en la que los usuarios proporcionan al sistema sus valoraciones sobre la satisfacción con los ítmes recomendados, que serán etiquetas de S_4.

3.6 Evaluación del sistema

Hemos desarrollado experimentos online para comprobar la precisión del sistema a la hora de predecir las valoraciones que los usuarios darían a un recurso recomendado. Para ello utilizamos un data set con 200 recursos de distintas áreas y 30 usuarios. Posteriormente se añadieron 100 nuevos recursos, que fueron recomendados y se registraron las valoraciones que los usuarios proporcionaron sobre dichas recomendaciones. Estas valoraciones las comparamos con las valoraciones estimadas por el sistema, lo que nos permitió calcular el Error Absoluto Medio (MAE), que mide la desviación absoluta media entre un valor estimado y la valoración real asignada por el usuario. En nuestro caso, obtuvimos un valor MAE promedio para todos los usuarios de 0.7565. Para poder comparar resultados, repetimos el experimento pero utilizando el esquema propuesto en [14], en el que no se tenía en cuenta la calidad de los recursos. En este caso, obtuvimos un valor MAE promedio de 0.7823. Ello implica que mediante la aplicación del nuevo enfoque, es decir, teniendo en cuenta la calidad de los recursos, obtuvimos una mejora del 4.8 %.

4 Conclusiones

En este trabajo afrontamos el proceso de generación de recomendaciones desde una doble perspectiva: encontrar recursos relevantes, pero además que sean de calidad. Hemos presentado un sistema de recomendaciones híbrido lingüístico difuso y lo hemos aplicado en una BDU para asistir a sus usuarios en el acceso a información de interés. El sistema mide la calidad de los recursos y la tiene en cuenta como un nuevo factor a considerar en el proceso de generación de recomendaciones. Hemos desarrollado estudios online obteniendo unos resultados experimentales bastante satisfactorios.

Como trabajo futuro consideramos estudiar técnicas automáticas para establecer la representación interna de los recursos. Sería también interesante explorar nuevas formas de mejorar el proceso de generación de recomendaciones, por ejemplo, usando técnicas bibliométricas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado gracias a la financiación de los proyectos TIN2010-17876, TIC5299 y TIC-5991.

Referencias

[1] S. Alonso, F. Cabrerizo, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Group decision-making with incomplete fuzzy linguistic preference relations, International Journal of Intelligent Systems 24 (2009) 201–222.

[2] S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J. Alcalá-Fdez, C. Porcel, A consistency-based procedure to estimating missing pairwise preference values, International Journal of Intelligent Systems 23 (2008) 155–175.

[3] A. Barragáns-Martínez, E. Costa-Montenegro, J. Burguillo, M. Rey-López, F. Mikic-Fonte, A. Peleteiro, A hybrid content-based and item-based collaborative filtering approach to recommend tv programs enhanced with singular value decomposition, Information Sciences 180 (2010) 4290–4311.

[4] R. Burke, Hybrid recommender systems: Survey and experiments, User Modeling and User-Adapted Interaction 12 (2002) 331–370.

[5] R. Burke, Hybrid web recommender systems, P. Brusilovsky, A. Kobsa, and W. Nejdl (Eds.): The Adaptive Web, LNCS 4321 (2007) 377–408.

[6] J. Herlocker, J. Konstan, L. Terveen, J. Riedl, Evaluating collaborative filtering recommender systems, ACM Transactions on Information Systems 22(1) (2004) 5–53.

[7] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Aggregation operators for linguistic weighted information, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems 27 (1997) 646–656.

[8] F. Herrera, L. Martínez, A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8(6) (2000) 746–752.

[9] F. Herrera, L. Martínez, A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in multiexpert decision-making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics 31(2) (2001) 227–234.

[10] E. Herrera-Viedma, J. López-Gijón, Libraries' Social Role in the Information Age, Science 339 (6126) (2013) 1382.

[11] P. Lops, M. Gemmis, G. Semeraro, Recommender Systems Handbook, chap. Content-based Recommender Systems: State of the Art and Trens, Ricci, F. and Rokach, L. and Shapira, B. and Kantor, P.B. Eds. (Springer), 2011, pp. 73–106.

[12] L. Martínez, L. Pérez, M. Barranco, M. Espinilla, Improving the effectiveness of knowledge based recommender systems using incomplete linguistic preference relations, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 16(2) (2008) 33–56.

[13] A. Neumann, Recommender Systems for Information Providers: Designing Customer Centric Paths to Information, Heidelberg: Physica-Verlag, 2009.

[14] C. Porcel, E. Herrera-Viedma, Dealing with incomplete information in a fuzzy linguistic recommender system to disseminate information in university digital libraries, Knowledge-Based Systems 23 (2010) 32–39.

[15] C. Porcel, J. Moreno, E. Herrera-Viedma, A multidisciplinar recommender system to advice research resources in university digital libraries, Expert Systems with Applications 36 (10) (2009) 12520–12528.

[16] L. Ross, P. Sennyey, The Library is Dead, Long Live the Library! The Practice of Academic Librarianship and the Digital Revolution, The Journal of Academic Librarianship 34 (2) (2008) 145–152.

[17] L. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part I, Information Sciences 8 (1975) 199-249, Part II, Information Sciences 8 (1975) 301-357, Part III, Information Sciences 9 (1975) 43-80 (1975).

UN MODELO PARA EVALUAR LA CALIDAD DE LAS BIBLIOTECAS 2.0 USANDO COMPUTACIÓN CON PALABRAS

Francisco Javier Cabrerizo[1], **Rubén Heradio**[1], **David Fernández-Amorós**[2], **Manuel Herrera**[3], **Raquel Ureña**[4], **Enrique Herrera-Viedma**[4]

[1]*Dept. de Ingeniería de Software y Sistemas Informáticos, UNED*, {cabrerizo,rheradio}@issi.uned.es

[2]*Dept. de Lenguajes y Sistemas Informáticos, UNED*, david@lsi.uned.es

[3]*Dept. de Sociología III, UNED*, mherrera@poli.uned.es

[4]*Dept. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Universidad de Granada*, {raquel,viedma}@decsai.ugr.es

Resumen

Las herramientas Web 2.0 han facilitado y mejorado la participación de los usuarios en las actividades ofrecidas por las bibliotecas. Pero, para que las herramientas Web 2.0 sean útiles, es indispensable saber si están satisfaciendo las necesidades y expectaciones de los usuarios. El objetivo de este artículo es presentar un modelo de evaluación de la calidad de las Bibliotecas 2.0. En este modelo, la calidad se define a través de las percepciones que tienen los usuarios sobre el nivel de calidad de los servicios ofrecidos a través de las páginas web de las bibliotecas. Asumiendo el modelado lingüístico difuso ordinal para representar las percepciones de los usuarios y aplicando herramientas de computación con palabras, el modelo que proponemos es capaz de obtener las valoraciones de calidad de los servicios ofrecidos. Además, siguiendo la metodología LibQUAL+, nuestro modelo puede identificar los servicios que deben mejorarse y los servicios que satisfacen de forma extraordinaria las expectativas de los usuarios.

Palabras Clave: Biblioteca 2.0, Calidad, Computación con Palabras, LibQUAL+.

1 INTRODUCCIÓN

Las bibliotecas permiten y facilitan el intercambio de información, conocimiento y cultura entre profesores, alumnos y público en general, jugando de esta forma un papel fundamental en el desarrollo educacional de un país. Esto se ha visto acentuado en los últimos años por el uso de la tecnología y, recientemente, debido a la Web 2.0 [1, 9].

El término Web 2.0 fue acuñado por Tim O'Reilly [10] para describir las tendencias y modelos de negocios que sobrevivieron a la crisis del mercado del sector tecnológico de los años 90. O'Reilly notó que las compañías tecnológicas que habían superado la crisis eran compañías de naturaleza colaborativa, interactiva y dinámica, donde los usuarios eran de igual forma tanto creadores como consumidores de contenido [9]. Una página Web 2.0 permite a sus usuarios interactuar y colaborar con los demás en un diálogo social como creadores de contenido, en contraste con los páginas webs 1.0 donde los usuarios se limitan a ser consumidores de contenido. El desarrollo de la idea de la Web 2.0 en el contexto de las bibliotecas ha dado lugar al concepto de Biblioteca 2.0.

La Biblioteca 2.0 es un nuevo modelo de biblioteca para una forma modernizada del servicio de biblioteca que refleja una transición dentro del mundo de las bibliotecas en el modo en el que los servicios son ofrecidos a los usuarios. En el concepto de Biblioteca 2.0 se produce un cambio centrado en el usuario y en su participación en la creación de contenido y de hacer comunidad. La Biblioteca 2.0 tiene múltiples facetas que reflejan los medios típicos de participación de los usuarios que las herramientas Web 2.0 permiten. Entre ellos se incluyen: blogs, etiquetado, clasificación social de contenidos, redes sociales, distribución de archivos multimedia, etc.

Como las bibliotecas son instituciones al servicio del usuario, si éstas conocen la naturaleza y las necesidades de sus usuarios, les proporcionarán un servicio mejor. Como el modelo de Biblioteca 2.0 permite y anima la participación de los usuarios no sólo en el uso de los servicios si no también en su gestión, la evaluación de los servicios proporcionados por la Biblioteca 2.0 necesita ser juzgada por sus usuarios. De acuerdo a los comentarios de los usuarios, se pueden descubrir las deficiencias y las virtudes de los servicios ofrecidos por las bibliotecas. Una vez conocidos, se pueden ofrecer propuestas con el objetivo de mejorar los servicios defectuosos y potenciar los que funcionan bien. Además, al centrarse en los usuarios de las bibliotecas y en los esfuerzos por resolver sus expectativas, las bibliotecas se vuelven más dinámicas [2].

Diferentes modelos de evaluación de la calidad de las bibliotecas digitales basados en las percepciones de los usuarios han sido propuestos [4]. Sin embargo, estos modelos no tienen en cuenta la nueva dimensión de las bibliotecas, esto es, el impacto de las herramientas Web 2.0 en las páginas web de las bibliotecas.

El objetivo de este artículo es proponer un modelo de evaluación de la calidad de los servicios ofrecidos por las Bibliotecas 2.0. Para ello, presentamos un modelo que mide el nivel de calidad de los servicios 2.0 ofrecidos por las bibliotecas a través de sus páginas webs de acuerdo a las percepciones de los usuarios. Las herramientas convencionales de medida usadas por los usuarios para expresar sus opiniones están concebidas sobre valores numéricos. Sin embargo, como el lenguaje natural es la representación estándar de los conceptos que los humanos usan para comunicarse, parece natural que éstos usen palabras (términos lingüísticos) en lugar de valores numéricos para expresar sus opiniones. El uso de palabras o sentencias en lugar de números es, en general, menos específico, más flexible, directo, realista y adecuado para expresar las opiniones de las personas. Estas características indican la aplicabilidad de la Teoría de Conjuntos Difusos [13] para capturar las percepciones de los usuarios, ya que ayuda a representar la imprecisión asociada al juicio subjetivo de los seres humanos. En particular, nuestro modelo utilizará el modelado lingüístico difuso ordinal [5] para representar las percepciones de los usuarios y herramientas de computación con palabras para obtener las valoraciones de calidad. Además, es importante indicar que nuestro modelo seguirá la metodología LibQUAL+ [3], lo que permitirá identificar tanto los servicios 2.0 que deben ser mejorados como los servicios 2.0 satisfechos de forma excepcional por la biblioteca.

El resto del artículo se organiza de la siguiente forma. En la Sección 2 se presentan el modelado lingüístico difuso y la metodología LibQUAL+. En la Sección 3 se describe en detalle el modelo de evaluación que proponemos en este artículo. Para finalizar, en la Sección 4 presentamos algunas conclusiones y trabajos futuros.

2 PRELIMINARES

En esta sección introducimos las herramientas que utilizaremos para diseñar nuestro modelo de evaluación de la calidad de los servicios ofrecidos por las Bibliotecas 2.0: la metodología LibQUAL+ y el modelado lingüístico difuso.

2.1 LA METODOLOGÍA LibQUAL+

En 1999, la ARL (Association of Research Libraries) en colaboración con la Texas A&M University emprendió un gran proyecto para obtener una medida estandarizada de la calidad del servicio de bibliotecas. El resultado de este proyecto fue la metodología LibQUAL+ [3], la cual permite detectar la calidad de los servicios bibliotecarios a partir de la percepciones de los usuarios. LibQUAL+ está basado en las teorías de evaluación de calidad de servicios aplicadas en el mundo empresarial, y muy particularmente en la metodología de evaluación de calidad de servicios en organizaciones SERVQUAL (SERVvice QUALity) [11].

El principio singular de SERVQUAL es que "sólo los clientes juzgan la calidad, los demás juicios son irrelevantes" [18]. Siendo, por tanto, la satisfacción del cliente el elemento predominante de la calidad percibida, en SERVQUAL la calidad del servicio está ligada a la minimización de la distancia entre las expectativas del cliente con respecto al servicio y la percepción de éste tras su utilización. Con SERVQUAL, un cliente valorará negativamente o positivamente la calidad de un servicio en el que las percepciones que ha obtenido sean inferiores o superiores a las expectativas que tenía, respectivamente. Por ello, las empresas que prestan servicios, donde uno de las objetivos es la diferenciación mediante un servicio de calidad, deben mostrar especial interés al hecho de superar las expectativas de sus clientes.

De acuerdo al modelo SERVQUAL, en LibQUAL+ se busca evaluar la calidad del servicio de una biblioteca considerando tres grandes dimensiones de servicios de las bibliotecas: (i) valor afectivo del servicio ofrecido por el personal, (ii) valor de la biblioteca como espacio, y (iii) valor del control de la información. Para evaluar dichas dimensiones se elabora una encuesta de 22 preguntas en la que en cada una de ellas se ha de contestar a tres cuestiones: (i) nivel de servicio mínimo exigible, (ii) nivel de servicio deseado, y (iii) nivel observado (percepción del usuario). En base a las respuestas de los usuarios, es posible definir dos variables que permiten detectar los puntos fuertes y débiles de una biblioteca: *Adecuación del Servicio* (valor percibido − valor mínimo) que indica las áreas donde el servicio de la biblioteca está por debajo del nivel esperado por el usuario, y *Superioridad del Servicio* (valor percibido − valor deseado) que identifica las áreas donde la biblioteca da un servicio mejor que el esperado por el usuario.

2.2 EL MODELADO LINGÜÍSTICO DIFUSO

Hay numerosas situaciones en las que la información no puede ser valorada cuantitativamente de forma precisa y es necesario hacerlo de forma cualitativa. Por ejemplo, cuando valoramos algún aspecto relacionado con percepciones humanas, solemos usar palabras del lenguaje natural en lugar de valoraciones numéricas. En otros casos, no podemos trabajar con información cuantitativa, bien porque no está disponible o bien porque el coste computacional es demasiado elevado y nos basta aplicar un "valor aproximado". El uso de la Teoría de Conjuntos Difusos ha dado muy buenos resultados para modelar información cualitativa [14, 15, 16] y ha sido aplicada con éxito en diver-

sas situaciones [6]. Se trata de usar el concepto de variable lingüística, cuyos valores no son números sino palabras o sentencias en lenguaje natural, propuesto por Zadeh [14, 15, 16] para trabajar con información cualitativa.

El modelado lingüístico difuso ordinal [5] es un tipo muy útil de modelado lingüístico difuso, que fue propuesto como una herramienta alternativa al modelado lingüístico difuso clásico, ya que simplifica la computación con palabras al eliminar la complejidad de tener que definir una gramática. Se define considerando un conjunto de etiquetas finito y totalmente ordenado $S = \{s_i\}$, $i \in \{0,\ldots,g\}$, con $s_i \geq s_j$ si $i \geq j$, y con una cardinalidad impar. La semántica del conjunto de etiquetas se establece según la estructura ordenada del conjunto de etiquetas, considerando que cada etiqueta del par (s_i, s_{g-i}) es igualmente informativa. Por ejemplo, podríamos usar el siguiente conjunto de 9 etiquetas para representar las percepciones de los usuarios: $S = \{$N = Ninguna, EB = Extremadamente Bajo, MB = Muy Bajo, B = Bajo, M = Medio, A = Alto, MA = Muy Alto, EA = Extremadamente Alto, T = Total$\}$.

Una ventaja del modelado lingüístico difuso ordinal es la simplicidad y agilidad de su modelo computacional. Está basado en el cálculo simbólico [5] y actúa operando directamente sobre las etiquetas, teniendo en cuenta el orden de las valoraciones lingüísticas en la estructura ordenada de las etiquetas. Habitualmente, el modelado lingüístico difuso ordinal para la computación con palabras se define estableciendo: (i) un operador de negación, $Neg(s_i) = s_j \mid j = g - i$, (ii) operadores de comparación basados en la estructura ordenada de los términos lingüísticos: operador de maximización, $MAX(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \geq s_j$; y operador de minimización $MIN(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \leq s_j$, y operadores apropiados para la agregación de información lingüística difusa ordinal.

Un destacado operador de agregación de información lingüística ordinal basado en computación simbólica es el operador LOWA (*Linguistic Ordered Weighted Averaging*) [5]. Este es un operador de agregación de información lingüística no ponderada, es decir, información lingüística con igual importancia.

Sea $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$ un conjunto de etiquetas a agregar, $a_i \in S$, entonces el operador LOWA, ϕ, se define como:

$$\phi(a_1,\ldots,a_m) = W \cdot B^T = C^m\{w_k,\ b_k,\ k = 1,\ldots,m\} = w_1 \odot b_1 \oplus (1-w_1) \odot C^{m-1}\{\beta_h,\ b_h,\ h = 2,\ldots,m\}, \quad (1)$$

donde $W = [w_1,\ldots,w_m]$ es un vector de pesos tal que $w_i \in [0,1]$ y $\Sigma_i w_i = 1$. $\beta_h = w_h / \Sigma_2^m w_k$, $h = 2,\ldots,m$, y $B = \{b_1,\ldots,b_m\}$ es un vector asociado a A tal que $B = \sigma(A) = \{a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(m)}\}$, donde $a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)}\ \forall\, i \leq j$, con σ siendo una permutación sobre el conjunto de etiquetas A. C^m es el operador de combinación convexo de m etiquetas y si $m = 2$, entonces se define como:

$$C^2\{w_i,\ b_i,\ i = 1,2\} = w_1 \odot s_j \oplus (1-w_1) \odot s_i = s_k, \quad (2)$$

tal que $k = \min\{g,\ i + round(w_1 \cdot (j-i))\}$, $s_j, s_i \in S$, $(j \geq i)$, donde *"round"* simboliza el operador de redondeo usual, y $b_1 = s_j$, $b_2 = s_i$. Si $w_j = 1$ y $w_i = 0$, con $i \neq j$, $\forall i$, entonces el operador de combinación se define como: $C^m\{w_i,\ b_i,\ i = 1,\ldots,m\} = b_j$.

El operador LOWA es un operador "or-and" [5] y su comportamiento se puede controlar por medio de W. Con el objetivo de clasificar los operadores OWA con respecto a su localización entre "or" y "and", Yager [12] presentó una medida de *orness*, asociada con cualquier vector W : $orness(W) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(m-i)w_i$. Esta medida caracteriza el grado al cual la agregación es como una operación "or" (máximo). Un operador OWA con $orness(W) \geq 0.5$ será como un operador *orlike*, y con $orness(W) < 0.5$ será como un operador *andlike*.

Una cuestión importante en el operador LOWA es cómo determinar el vector de pesos W. En [12], se definió una expresión para obtener W que permite representar el concepto de mayoría difusa [7] mediante un cuantificador lingüístico difuso no decreciente by means Q [17]:

$$w_i = Q(i/n) - Q((i-1)/n),\ i = 1,\ldots,n. \quad (3)$$

Cuando se usa un cuantificador lingüístico difuso Q para obtener el vector de pesos asociado al operador LOWA, se simboliza como ϕ_Q.

3 MODELO PARA EVALUAR LA CALIDAD DE LAS BIBLIOTECAS 2.0

En esta sección describimos el modelo de evaluación que proponemos en este artículo, el cual usa herramientas de computación con palabras para medir la calidad de los servicios ofrecidos por las Bibliotecas 2.0. Las principales características de este modelo son:

- Contiene un conjunto de criterios subjetivos relacionados con los servicios de las Bibliotecas 2.0.
- La calidad de los servicios se obtiene usando las percepciones de los usuarios, que se representan mediante el modelado lingüístico difuso ordinal [5].
- Utiliza herramientas de computación con palabras basadas en el operador lingüístico de agregación LOWA para obtener las valoraciones de calidad.
- Sigue la metodología LibQUAL+ para identificar los servicios en los cuales el nivel de calidad debería mejorarse, ya que está por debajo del nivel esperado por

***Categoría 1 – Uso de RSS*:**

1. Utilidad del RSS para informar sobre noticias y eventos de la biblioteca
2. Utilidad del RSS para informar sobre nuevos libros, revistas y bases de datos de medios electrónicos
3. Idoneidad de las instrucciones sobre cómo usar el RSS
4. Idoneidad de los enlaces a páginas web de la biblioteca para descargar el RSS
5. Usabilidad de los items del RSS (por ejemplo, los items del RSS están clasificados por temas)

***Categoría 2 – Uso de Blogs*:**

6. Utilidad del Blog para informar sobre noticias y eventos de la biblioteca
7. Utilidad del Blog para informar sobre nuevos libros, revistas y bases de datos de medios electrónicos
8. Utilidad del Blog para publicar revisiones o discusiones sobre libros y revistas
9. Utilidad del Blog para la alfabetización informacional
10. Idoneidad de las instrucciones sobre cómo usar los Blogs
11. Actualización del Blog (es decir, cómo de recientes son los últimos posts)
12. Idoneidad de los enlaces del Blog (por ejemplo, apuntan a recursos relevantes, a blogs similares, etc.)
13. Usabilidad del Blog (por ejemplo, se pueden buscar entradas mediante palabras clave, entries are searchable by keywords, las entradas pueden verse por temas o por fecha, etc.)

***Categoría 3 – Uso de Podcasts*:**

14. Utilidad del Podcast para informar sobre noticias y eventos de la biblioteca
15. Utilidad del Podcast para informar sobre nuevos libros, revistas y bases de datos de medios electrónicos
16. Utilidad del Podcast para proporcionar consejos sobre el uso de recursos y otros servicios de la biblioteca
17. Utilidad del Podcast para la alfabetización informacional
18. Idoneidad de las instrucciones sobre cómo usar los Podcasts
19. Usabilidad del Podcast (por ejemplo, una transcripción acompaña a podcast, se pueden buscar los podcasts mediante palabras clave, los podcasts pueden verse por temas, etc.)

***Categoría 4 – Uso de Wikis*:**

20. Utilidad del Wiki como manual de temas
21. Utilidad del Wiki para proporcionar listas de recursos
22. Idoneidad de las instrucciones sobre cómo usar las Wikis
23. Editabilidad del Wiki (por ejemplo, los usuarios pueden crear nuevas páginas, editar páginas existentes, subir ficheros, etc.)
24. Usabilidad del Wiki (por ejemplo, proporciona un enlace a la página principal de la biblioteca, un motor de búsqueda mediante palabras clave, etc.)

Figura 1: Esquema de evaluación para medir la calidad de los servicios 2.0.

los usuarios, y los servicios ya satisfechos por las bibliotecas, ya que el nivel de calidad es superior al esperado por los usuarios.

Este modelo de evaluación de la calidad presenta dos elementos: (i) un esquema de evaluación que contiene los criterios subjetivos, y (ii) un método de computación que genera las valoraciones de calidad de los servicios ofrecidos por las Bibliotecas 2.0.

3.1 ESQUEMA DE EVALUACIÓN

Para obtener las opiniones de los usuarios respecto a la calidad de los servicios ofrecidos por las Bibliotecas 2.0, vamos a adaptar el cuestionario presentado por Linh [8]. En este cuestionario, formado por 95 cuestiones de tipo sí–o–no, Linh analizó qué tipos de tecnologías Web 2.0 habían sido aplicadas en las bibliotecas universitarias australianas, así como su propósito y sus características. Linh usó una lista de verificación (checklist) que incluía características y criterios que surgieron del análisis de la bibliografía existente sobre el uso de herramientas Web 2.0 en bibliotecas. La lista de verificación se basaba en la evaluación de la usabilidad de las páginas web de las bibliotecas y en las guías de accesibilidad del contenido web. Sin embargo, debido a que este número de cuestiones es excesivo, vamos a definir un número menor de criterios subjetivos, que serán fácilmente comprensibles para los usuarios con el fin de evitar su rechazo.

El esquema de evaluación que proponemos es el mostrado en la Figura 1. Este esquema está compuesto de 24 cuestiones (criterios subjetivos) sobre las herramientas Web 2.0 comúnmente utilizadas en las bibliotecas. Además, como nuestro interés es obtener el nivel de calidad de los servicios 2.0 ofrecidos por las bibliotecas, para cada una de las

24 cuestiones, los usuarios deberán indicar el nivel mínimo de servicio que encontrarían aceptable, el nivel de servicio deseado que ellos esperan y el nivel de servicio que perciben (similar a LibQUAL+). De esta forma, podremos identificar tanto los servicios 2.0 en los cuales el nivel de calidad debería mejorarse y los servicios 2.0 satisfechos de forma excepcional por la biblioteca.

3.2 MÉTODO DE COMPUTACIÓN

El método de computación que hemos diseñado para obtener las valoraciones de calidad de los servicios ofrecidos por las Bibliotecas 2.0 tiene las siguientes características:

- *Está centrado en el usuario*. Las valoraciones de calidad se obtienen a partir de las opiniones proporcionadas por los usuarios.
- *Está guiado por la mayoría*. Las valoraciones de calidad son valores representativos de la mayoría de opiniones individuales proporcionadas por los usuarios de las Bibliotecas 2.0. Para ello, se usa el operador lingüístico de agregación LOWA.

El método de computación se compone de las siguientes fases:

1. En primer lugar, los usuarios expresan sus percepciones rellenando el cuestionario descrito anteriormente (Figura 1), utilizando el conjunto de términos lingüísticos presentado en la Sección 2.2. Como resultado, para cada uno de los usuarios $u_j \in \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y cada cuestión $i_k \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{24}\}$, existe una tupla ($\text{MSL}_{jk}$, DSL_{jk}, PPL_{jk}), que codifica el nivel mínimo de servicio aceptable para el usuario, el nivel de servicio deseado y el nivel de servicio percibido, proporcionado por el usuario u_j sobre la cuestión i_k, respectivamente.
2. En segundo lugar, se obtiene la opinión global de los usuarios sobre cada cuestión i_k, (MSL_k, DSL_k, PPL_k). Para ello, se usa el operador lingüístico de agregación LOWA:

$$\begin{aligned} \text{MSL}_k &= \phi_Q(\text{MSL}_{1k}), \ldots, \text{MSL}_{nk}), \\ \text{DSL}_k &= \phi_Q(\text{DSL}_{1k}), \ldots, \text{DSL}_{nk}), \\ \text{PPL}_k &= \phi_Q(\text{PPL}_{1k}), \ldots, \text{PPL}_{nk}), \end{aligned} \tag{4}$$

   donde MSL_k, DSL_k y PPL_k son las valoraciones lingüísticas que representan el nivel mínimo de servicio, el nivel de servicio deseado y el nivel de servicio percibido, respectivamente, de la biblioteca con respecto a la cuestión i_k, de acuerdo a la mayoría (representada por el cuantificador lingüístico difuso Q) de las opiniones lingüísticas proporcionadas por el grupo de usuarios.
3. Finalmente, para obtener la opinión global de los usuarios respecto a todas las cuestiones, (MSL, DSL, PPL), el operador lingüístico de agregación LOWA es de nuevo usado. Así, la tupla (MSL, DSL, PPL) se calcula como:

$$\begin{aligned} \text{MSL} &= \phi_Q(\text{MSL}_1, \ldots, \text{MSL}_{24}), \\ \text{DSL} &= \phi_Q(\text{DSL}_1, \ldots, \text{DSL}_{24}), \\ \text{PPL} &= \phi_Q(\text{PPL}_1, \ldots, \text{PPL}_{24}), \end{aligned} \tag{5}$$

   donde MSL, DSL y PPL son las valoraciones lingüísticas que representan el nivel global de servicio mínimo, el nivel global de servicio deseado y el nivel global de servicio percibido, respectivamente, alcanzado por la biblioteca de acuerdo a la mayoría (representada por el cuantificador lingüístico difuso Q) de las opiniones lingüísticas expresadas por los usuarios sobre todas las cuestiones.

   De acuerdo a la metodología LibQUAL+, los valores del nivel de servicio mínimo y del nivel de servicio deseado establecen los límites de una *zona de tolerancia* dentro de la cual los valores percibidos deberían fluctuar. La diferencia entre el valor del nivel de servicio percibido y el valor del nivel de servicio se conoce como *Adecuación del Servicio* (AS), y la diferencia entre el valor del nivel de servicio deseado y el valor del nivel de servicio percibido se conoce como *Superioridad del Servicio* (SS). Cuando el nivel de servicio percibido cae fuera de la zona de tolerancia, se denomina SA^- and SS^+, respectivamente. Por un lado, SA_k^- significa que la biblioteca no está cumpliendo las expectativas mínimas exigibles por sus usuarios para la cuestión i_k, es decir, el valor del nivel de servicio percibido es menor que el valor del nivel de servicio mínimo que los usuarios exigen ($MIN(\text{PSL}_k, \text{MSL}_k) = \text{PSL}_k$). Por otra parte, SS_k^+ significa que la biblioteca está excediendo las expectaciones de sus usuarios para la cuestión i_k, es decir, el valor del nivel de servicio percibido es mayor que el valor del nivel de servicio deseado ($MAX(\text{DSL}_k, \text{PSL}_k) = \text{PSL}_k$). Por tanto, SA^- puede usarse para identificar los servicios 2.0 de la biblioteca que necesitan mejorar, mientras que SS^+ es un indicador de los servicios 2.0 de la biblioteca que satisfacen de forma excepcional las expectativas de los usuarios.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este artículo hemos propuesto un modelo de evaluación de los servicios ofrecidos por las Bibliotecas 2.0 que proporciona valoraciones de calidad de acuerdo a las percepciones de los usuarios. Para ello, en lugar de usar valoraciones numéricas para representar las opiniones de los usuarios, se ha usado el modelado lingüístico difuso ordi-

nal, facilitando de esta forma la expresión de las percepciones a los usuarios. Hemos aplicado también herramientas automáticas de computación con palabras basadas en el operador lingüístico de agregación LOWA para calcular las valoraciones de calidad de las Bibliotecas 2.0. Además, siguiendo la metodología LibQUAL+, el modelo de evaluación que hemos presentado en este artículo es capaz de identificar los servicios 2.0 ofrecidos por las bibliotecas que deberían mejorarse y aquellos que satisfacen de forma excepcional las expectativas de los usuarios.

Como trabajos futuros, proponemos experimentar con el modelo de evaluación para comprobar su utilidad y poder refinarlo si fuera necesario, e implementar un sistema de recomendación que genere automáticamente reglas sobre cómo mejorar los servicios 2.0 de las bibliotecas que no están cumpliendo las expectativas de los usuarios.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado con la financiación de los fondos FEDER en el Proyecto FUZZYLING-II (TIN2010-17876), los Proyectos de Excelencia de la Junta de Andalucía TIC-05299 y TIC-5991, y el Proyecto de Investigación del Plan de Promoción de la Investigación UNED 2011 (2011/PUNED/0003).

Referencias

[1] S. Anfinnsen, G. Ghinea, S. Cesare: Web 2.0 and folksonomies in a library context. *International Journal of Information Management* 31, pp. 63–70, 2011.

[2] A. Asemi, Z. Kazempour, H.A. Rizi: Using LibQUAL+TM to improve services to libraries: A report on academic libraries of Iran experience. *The Electronic Library* 28, pp. 568–579, 2010.

[3] Association of Research Libraries: LibQUAL+: charting library service quality. *ARL*, `http://www.libqual.org`.

[4] R. Heradio, D. Fernádez-Amorós, F.J. Cabrerizo, E. Herrera-Viedma: A review on quality evaluation of digital libraries based on user's perceptions. *Journal of Information Sciences* 38, pp. 269–283, 2012.

[5] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay: Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems* 79, pp. 175–190, 1996.

[6] F. Herrera, S. Alonso, F. Chiclana, E. Herrera-Viedma: Computing with words in decision making: foundations, trends and prospects. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 8, pp. 337–364, 2009.

[7] J. Kacprzyk: Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets Systems* 18, pp. 105–118, 1986.

[8] N.C. Linh: A survey of the application of Web 2.0 in Australasian university libraries. *Library Hi Tech* 26, pp. 630–653, 2008.

[9] J.M. Maness: Library 2.0 theory: Web 2.0 and its implications for libraries. *Webology* 3, `http://www.webology.ir/2006/v3n2/a25.html`, 2006.

[10] T. O'Reilly: What is Web 2.0? Design patterns and business models for the next generation of software. *O'Reilly Media, Inc.*, `http://www.oreilly.de/artikel/web20.html`, 2005.

[11] A. Parasuraman, V.A. Zeithaml, L.L. Berry: SERVQUAL: A multiple-item scale for measuring consumer perceptions of service quality. *Journal of Retailing* 64, pp. 12–40, 1988.

[12] R.R. Yager: On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, pp. 183–190, 1988.

[13] L.A. Zadeh: Fuzzy sets. *Information and Control* 8, pp. 338–353, 1965.

[14] L.A. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part I. *Information Sciences* 8, pp. 199–249, 1975.

[15] L.A. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part II. *Information Sciences* 8, pp. 301–357, 1975.

[16] L.A. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part III. *Information Sciences* 9, pp. 43–80, 1975.

[17] L.A. Zadeh: A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computer & Mathematics with Applications* 9, pp. 149–184, 1983.

[18] V.A. Zeithaml, L.L. Berry, A. Parasuraman: Delivering Quality Services - Balancing Customer Perceptions and Expectations. *The Free Press*, New York, 1990.

COMBINANDO VARIABLES LINGÜÍSTICAS Y ONTOLOGÍAS PARA LA CONSULTA FLEXIBLE DE BASE DE DATOS

Clemente Rubio Manzano[1], **Pascual Julián Iranzo**[2], **Esteban Salazar Solis**[1]

[1]*Dept. de Sistemas de Información, U. del Bío-Bío, Chile*, clrubio@ubiobio.cl

[2]*Dept. de Tecnologías y Sistemas de Información, U. de Castilla-La Mancha*, Pascual.Julian@uclm.es

Resumen

En este trabajo proponemos un método declarativo para formular consultas lingüísticas y basadas en proximidad sobre Sistemas Gestores de Base de Datos Relacionales. Para ello, adaptamos técnicas procedentes de la programación lógica basada en proximidad que permiten combinar en un mismo marco las variables lingüísticas y las ontologías con el objetivo de hacer más flexible el proceso de obtención de respuestas.

Palabras Clave: Base de datos relacionales, Recuperación de Información, Consultas lingüísticas, Relaciones de Proximidad/Similitud, Programación Lógica Borrosa.

1 Motivación e Introducción

Los Sistemas Gestores de Base Datos Relacionales (SGBDR, para abreviar) se utilizan para almacenar los datos de un gran número de empresas y organizaciones [1]. Su consulta se realiza empleando un lenguaje específico, siendo el más conocido el Lenguaje Estructurado de Consulta (SQL, para abreviar). En la mayoría de ocasiones, los usuarios no están familiarizados con el almacenamiento de los datos y un experto se encarga de acceder a ellos, traduciendo las necesidades del usuario (consultas expresadas en lenguaje natural) a la sintaxis del lenguaje de consulta. Para que la consulta sea eficaz el experto debe dominar una serie de estrictos comandos lo que unido a un modelo de recuperación rígido podría causar la perdida de algunas respuestas de interés.

[1]Otras sin embargo han optado por sistemas no sólo relacionales. Aunque este trabajo se centra en los sistemas relacionales el método puede emplearse para cualquier repositorio de datos precisos

Por otro lado, los SGBDR se crearon, en un principio, para trabajar con datos bancarios. Sin embargo las nuevas necesidades de las empresas y organizaciones requieren, además de almacenar y consultar datos, obtener información relevante que les permita obtener conocimiento para tomar decisiones en base a él. Como la mayoría de este conocimiento se expresa en lenguaje natural, es importante que los sistemas de base de datos faciliten, a los expertos de un área, el acceso a los datos de manera sencilla, amigable y haciendo uso de interfaces de consulta flexibles y cercanas. A este respecto, las técnicas basadas en la teoría de conjuntos borrosos han resultado muy útiles para crear un nexo de unión entre la computación tradicional basada en números y el mundo real basado en palabras. Por ejemplo, se ha utilizado con éxito para el procesamiento de consultas borrosas mediante el empleo de términos lingüísticos y relaciones de similitud [1] o para la mejora de los sistemas de recuperación de información mediante el uso de recursos lingüísticos (ontologías y/o tesauros) [2].

En este trabajo se propone un método declarativo para formular consultas lingüísticas y basadas en proximidad sobre un SGBDR mediante la combinación de variables lingüísticas, relaciones borrosas y ontologías/tesauros. En particular, este nuevo método permite recuperar datos de tales sistemas empleando el mecanismo de inferencia de un lenguaje de programación lógica basado en proximidad denominado Bousi∼Prolog (Bousi, para abreviar) [3, 4, 5]. Para ello, primero, las filas de una tabla se transforman en un conjunto de hechos Bousi y, a continuación, se establecen dos tipos de relaciones: (a) una relación entre las constantes numéricas de los hechos y las etiquetas lingüísticas definidas en las variables lingüísticas y; (b) una relación entre las constantes a través de una ontología. En el primer caso (a) la relación representa la correspondencia (determinada por un algoritmo de unificación semántica incorporado en Bousi) entre los datos y los conceptos lingüísticos que pueden aparecer en la consulta. En el segundo caso (b) se crea una relación de proximidad a partir de los valores de una columna de la base de datos y las relaciones semánticas de cada uno de ellos con conceptos o palabras almacenadas en

una ontología. Después de esto, se escribe la consulta (mediante una interfaz gráfica), se traduce a sintaxis Bousi y se lanza la consulta al sistema, que proporcionará las respuestas correspondientes. Para implementar este método, se han construido dos herramientas: Bousi Gunfire y Bousi Exporta. Bousi Gunfire es una versión reducida del sistema Bousi∼Prolog que contiene el núcleo del lenguaje. Bousi Exporta es una herramienta que permite la conexión a un SGBDR, visualizar su estructura (tablas, atributos y valores) y transformar las filas, las variables lingüísticas y las relaciones obtenidas de la ontología en un programa Bousi. El resultado es un sistema capaz de formular consultas lingüísticas y basadas en proximidad sobre un SGDBR. Además nuestro sistema es multiplataforma ya que la extracción de datos se realiza empleando la meta información que proporciona el SGBDR.

Para finalizar esta sección, es importante decir, que en este trabajo (que es una primera aproximación) no hemos considerado cuestiones de rendimiento y escalabilidad.

2 Base de Datos Borrosas y Trabajos Relacionados

Las bases de datos borrosas surgieron por la necesidad de tratar con la imprecisión y la vaguedad en los sistemas de información. Hay al menos dos líneas de trabajo: (a) dejar el modelo de datos intacto y centrarse en el procesamiento de las consultas para permitir el uso de conceptos vagos y/o imprecisos [12, 11]; (b) extender el modelo teórico mediante la modificación del cálculo y el algebra relacional [7]. La primera línea de trabajo parece ser más práctica ya que el modelo relacional continua siendo una alternativa muy utilizada.

Este trabajo pertenece a la primera línea de trabajo. En ella, la mayoría de las propuestas tratan la borrosidad mediante consultas que requieren la definición explícita de las funciones de pertenencia. Otras propuestas adoptan técnicas de clustering para generar la correspondencia entre los términos borrosos, definidos en un nivel más alto de abstracción [1, 6]. Mientras la primera opción requiere una especificación exacta del significado de cada término borroso conocido por el sistema, el segundo hace la tarea de definición mucho más sencilla ya que en lugar de definir explícitamente el rango de los valores de los conceptos correspondientes a cada término, los usuarios solamente definen el orden relativo de los términos lingüísticos, lanzando un algoritmo de clustering que asocia cada término con el grupo de registros adecuado [6].

Nuestro método puede verse como una propuesta híbrida ya que hace uso de las funciones de pertenencia, que dan significado a los términos lingüísticos, y las técnicas de clustering para realizar el procesamiento de la consulta [2].

En este contexto, el desarrollo de un sistema de consulta borroso consiste en construir una interfaz de usuario para conseguir información de la base de datos, haciendo referencias a los conceptos lingüísticos y poniendo en relación estos con los datos precisos de la base de datos. Para el resto de términos que aparecen en la consulta usamos una ontología que permite obtener la relación con los posibles valores almacenados en la base datos.

Por otro lado, es importante determinar los tipos de términos borrosos con los que vamos a trabajar. Vamos a seguir la terminología mostrada en [6] y consideraremos que un término borroso puede clasificarse como: un descriptor numérico cualitativo, un descriptor no numérico cualitativo o una descripción cuantitativa. Un descriptor numérico cuantitativo es una palabra que describe algún valor numérico o un rango de valores numéricos. Un descriptor no numérico cuantitativo es una palabra que describe un concepto no numérico. Una descripción de cuantificación es una palabra que describe la cantidad de respuestas deseadas en una consulta en lenguaje natural. A diferencia de [6] que sólo trata con descriptores numéricos cualitativos, nuestra propuesta puede trabajar tanto con descriptores cualitativos numéricos (mediante un algoritmos de unificación semántica) y no numéricos (mediante ecuaciones de proximidad obtenidas de una ontología).

3 Definiciones Preliminares, Conceptos y Notaciones

Formalmente, nuestro marco descansa sobre una combinación de conceptos procedentes de diversas áreas: base de datos relacionales, lógica borrosa y programación lógica. Estas se presentan brevemente en esta sección.

Modelo de base datos relacional. Este modelo emplea las tablas como principal estructura para representar una entidad del mundo real. Una tabla se define por un conjunto de columnas que se corresponden con los atributos de una entidad. Cada entidad se representa por los valores de una fila. Formalmente, una tabla T es un conjunto de tuplas y una tupla t es un conjunto de pares $\langle atributo - dominio, valor\rangle$ de la forma: $t = \{\langle A_1, v_1\rangle, \langle A_2, v_2\rangle, \ldots, \langle A_n, v_n\rangle\}$ tal que $v_i \in D_i$, siendo D_i un dominio.

Relaciones Borrosas y dominios sintácticos. Una *relación binaria borrosa* sobre un conjunto U es un subconjunto borroso sobre $U \times U$ (es decir, una correspondencia $U \times U \longrightarrow [0,1]$). Una relación binaria borrosa $\mathscr{R}$ es una *relación de proximidad* si cumple la propiedad reflexiva (i.e. $\mathscr{R}(x,x) = 1$ para cualquier $x \in U$) y la propiedad *simétrica* (i.e. $\mathscr{R}(x,y) = \mathscr{R}(y,x)$ para cualquier $x,y \in U$). Si además se cumple la propiedad *transitiva* (i.e., $\mathscr{R}(x,z) \geq \mathscr{R}(x,y) \triangle \mathscr{R}(y,z)$ para cualquier $x,y,z \in U$; donde el operador '$\triangle$' es una t-norma), se denomina *similitud*. Estamos

[2] Note que nuestro mecanismo de unificación semántica puede verse como un algoritmo de clustering borroso.

interesados en las relaciones de proximidad sobre dominios sintácticos. Una relación de similitud $\mathscr{R}$ sobre el alfabeto de un lenguaje de primer orden puede extenderse a términos mediante inducción estructural de la forma usual [10].

Programación Lógica Borrosa y Bousi. La **Programación Lógica Borrosa** investiga como introducir conceptos de la lógica borrosa en la programación lógica para tratar con la vaguedad y la imprecisión de forma declarativa. Cuando la imprecisión se trata mediante relaciones de similitud entonces se habla de Programación Lógica basada en Similitud [10]. Bousi es un extensión borrosa del lenguaje de programación Prolog. Su semántica operacional es una adaptación del principio de resolución SLD donde el algoritmo de unificación se sustituye por un algoritmo de unificación borrosa basado en relaciones de proximidad. Informalmente, el algoritmo de unificación débil establece que dos términos $f(t_1,\ldots,t_n)$ y $g(s_1,\ldots,s_n)$ unifican débilmente si los símbolos f y g son próximos y cada uno de sus argumentos t_i y s_i unifican débilmente. Por lo tanto, este algoritmo de unificación no falla cuando los símbolos son distintos, ya que ahora podrían ser próximos, y sería posible alcanzar el éxito con un cierto grado de aproximación. Por tanto, se computa tanto respuestas como grados de aproximación.

Variables Lingüísticas en Bousi. Una variable lingüística [13] es una quíntupla $\langle X, T(X), U, G, M\rangle$ donde: X es el nombre de la variable, $T(X)$ es un conjunto de términos lingüísticos de X (i.e., es conjunto de nombres de los valores lingüísticos de X, también conocidos como etiquetas lingüísticas), U es el dominio o universo del discurso, G es una gramática que permite generar $T(X)$ y M es una regla semántica que asigna a cada término lingüístico x en $T(X)$ su significado (i.e., un subconjunto borroso de U —caracterizado por su función de pertenencia μ_x—). Es habitual hacer la distinción entre *términos atómicos* (también denominados, *términos primarios*) y *términos compuestos* que están compuestos por términos primarios. En Bousi sólo se indica el dominio y los términos primarios; el resto de términos compuestos se calculan de forma automática. Para ello, se usan dos directivas: la directiva de dominio que permite declarar y definir el universo del discurso de la variable. La sintaxis concreta es: "`:-domain(Dom_Name(n,m,Magnitude)).`", donde, `Dom_Name` es el nombre del dominio, n y m (con $n < m$) son los límites inferior y superior del subintervalo real $[n,m]$, y la `Magnitude` es es el nombre de la unidad de medida. La directiva `fuzzy_set` permite declarar y definir una lista de subconjuntos borrosos (asociados a los términos primarios) sobre un dominio específico. La sintaxis concreta de esta directiva es:

```
:-fuzzy_set(Dom_Name,[SubS_1(a1,b1,c1[,d1]),
...
,SubS_n(an,bn,cn[,dn])]).
```

Los subconjuntos borrosos se definen indicando su nombre, `SubS_i`, y el tipo de la función de pertenencia (trapezoidal o triangular). Además, un programa Bousi puede incluir lo que denominamos "puntos de dominio". Un punto de dominio es nuestra manera de representar valores precisos en el universo del discurso para que puedan compararse con otros términos lingüísticos. Los puntos de dominio se denotan por "`Dom_Name#Dom_Val`", donde `Dom_Name` es un nombre de dominio y `Dom_Val` es un valor preciso de ese dominio. Note que la implementación de una variable lingüística permite la manipulación de sus etiquetas lingüísticas como identificadores estándar del lenguaje Bousi. Por tanto, pueden usarse como símbolos de un lenguaje de primer orden, es decir, símbolos de constante, función o predicado (Ver [4] para más detalle).

4 Consultas Flexibles sobre Base de Datos

En esta sección proponemos un método declarativo para formular consultas lingüísticas y basadas en proximidad sobre un SGBDR. Para ello, empleamos dos algoritmos. El primero tiene como entrada una tabla relacional cuyas columnas pueden estar enlazadas a variables lingüística u ontologías. Si el atributo es numérico entonces se utiliza una variable lingüística y los valores se transforman en puntos de dominio (relativos a esa variable lingüística). Si el atributo no es numérico se calculan los conceptos próximos de los conceptos almacenados en la base datos mediante una ontología (nosotros emplearemos WordNet::Similarity [9]). Después de esto, cada tupla se convierte en un hecho Bousi. Finalmente, retorna como salida un programa Bousi i.e. hechos, directivas ("domain" y "fuzzy_set" representado las variables lingüísticas) y ecuaciones de proximidad (representando la relación entre las palabras obtenidas de la ontología y las constantes de los hechos). Este programa Bousi es la entrada del segundo algoritmo que relaciona la información precisa de la base de datos (que ha sido transformada en puntos de dominio o en constantes que participan en las ecuaciones de proximidad) con las respectivas etiquetas lingüísticas. Entonces, podríamos formular consultas lingüísticas y basadas en proximidad sobre la base de datos relacional. Ambos algoritmos se explican con detalle en las siguientes secciones.

4.1 De datos precisos a conocimiento

Queremos transformar cada variable lingüística definida sobre algún atributo vago en un conjunto de directivas `domain` and `fuzzy_set` y cada relación de valores en un conjunto de ecuaciones de proximidad. Para esta tarea, usamos un algoritmo que genera un hecho por cada tupla de una tabla y una constante por cada par $\langle Atributo, Valor\rangle$. Los hechos que se generan tienen la siguiente forma "símbolo_predicado$(c_1,\ldots,c_n)$.", donde el identificador empleado para el símbolo del predicado es el nombre de la propia tabla. Tenemos dos ca-

sos para la generación de las constantes: si el par analizado $\langle nombre_atributo, valor_atributo\rangle$ es de naturaleza vaga o imprecisa, entonces (i) generamos un punto de dominio formado por la concatenación del nombre del atributo, el símbolo "#" y su valor asociado ("*nombre_atributo#valor_atributo*"), que es la sintaxis de Bousi para los punto de dominio, en caso contrario (ii) tomamos su valor asociado *valor_atributo* como una constante.

El siguiente ejemplo ilustra la primera fase de nuestro método que emplea el algoritmo descrito anteriormente de manera informal.

Ejemplo 1 *Supongamos un fragmento de una base de datos que almacena información sobre personas y sus trabajos. Queremos saber quién es de mediana edad y le gusta la ciencia. Supongamos una tabla relacional "personas". Aquí, una persona se define por una clave, su nombre, edad y el trabajo que realiza.*

Key	Name	Age	Profession
01	*John*	*24*	*Programmer*
02	*Paul*	*30*	*Engineer*
03	*Mary*	*34*	*Teacher*
04	*Warren*	*45*	*Footballer*

Para hacer la consulta más flexible, nuestro método define una (o varias) variables lingüísticas sobre un atributo vago o impreciso. En este ejemplo el atributo "Age" se asocia a la variable lingüística "age", que se define por medio de una herramienta gráfica. Esta herramienta se encarga de generar las directivas "domain" y "fuzzy_set" de forma automática. Posteriormente, se define una ontología sobre uno (o varios) descriptores no numéricos. En este ejemplo el atributo "Profession" se asocia a una ontología a partir de la cual se puede obtener la relación de los diferentes valores del atributo. En esta primera aproximación empleamos WordNet::Similarity como una ontología de propósito general [3]*. A partir de ella se obtendrían las siguientes relaciones (por simplicidad sólo mostramos las de mayor grado).*

$$programmer=\{\langle engineer,0.88\rangle\ \langle technologist,0.88\rangle\ \}$$
$$engineer=\{\langle organize,1.0\rangle\ \langle mastermind,1.0\rangle\ \}$$
$$teacher=\{\langle educator,0.94\rangle\ \langle pedagogue,0.94\rangle\ \}$$
$$footballer=\{\langle athlete,0.91\rangle\ \langle player,0.92\rangle\ \}$$

A continuación, cada fila se convierte en un hecho formado por un símbolo de predicado (nombre de la tabla) y sus argumentos (valores de los atributos). Si un atributo es vago y numérico, se crea un punto de dominio que permite asociar un valor concreto a una etiqueta lingüística. Por ejemplo, la constante "`age#24`*" indica que el valor* `24` *se enlazará a la variable lingüística* `age` *(y por tanto a sus respectivos términos lingüísticos). Si un atributo no es numérico se crean las ecuaciones de proximidad utilizando la ontología y calculando, por cada constante, los elementos próximos. Para este ejemplo se generaría el siguiente programa.*

```
%% Linguistic variable defined on attribute age
:-domain(age(0,100,years)).
:-fuzzy_set(age,
            [young(0,0,20,50), middle(20,40,60,80),
             old(50,80,100,100)]).

%%proximity equation
programmer~engineer=0.88.       teacher~educator=0.94.
programmer~technologist=0.88.   teacher~pedagogue=0.94.
engineer~organize=1.0.          footballer~athlete=0.91.
engineer~mastermind=1.0.        footballer~player=0.92.

%% Facts
person(01,john,age#24,programmer).
person(03,mary,age#34,teacher).
person(02,paul,age#30,engineer).
person(04,warren,age#45,footballer).
```

4.2 Generación de ecuaciones de proximidad

Esta sección describe la segunda fase de nuestro método, vamos a analizar el programa Bousi Π (generado por el primer algoritmo) para extraer toda la información relacionada con las variables lingüísticas. Comenzamos con un análisis sintáctico para leer y chequear las directivas "domain" y "fuzzy_set". A continuación se construyen los dominios y los subconjuntos borrosos que se indican en ella junto a los puntos de dominio que aparecen en el programa. Este proceso construye una tabla de términos lingüísticos con sus significados asociados. Una vez se ha construido la tabla de términos, la siguiente fase se centra en generar las ecuaciones de proximidad entre los términos lingüísticos almacenados con el objetivo de compilar toda la información semántica asociada a ellos.

Algoritmo 1 **Entrada**: $S=\{\langle x_i,\mu_{x_i}\rangle \mid 1\leq i\leq n\}$, *Subconjunto de términos/significados de variables lingüísticas X.*
Salida: *Un conjunto* $\mathscr{R}$ *de entradas que define una relación borrosa sobre S.*
Inicialización: $\mathscr{R}:=\emptyset$
Para cada $\langle x_i,\mu_{x_i}\rangle$ **y** $\langle x_j,\mu_{x_j}\rangle$, **con** $i,j\in I$, **hacer**
  Para el caso:
    1. $\mu_{x_i}\neq\perp$ **y** $\mu_{x_j}\neq\perp$: $\mathscr{R}:=\mathscr{R}\cup\{\mathscr{R}(x_i,x_j)=match(\mu_{x_j},\mu_{x_i})\}$;
    2. $\mu_{x_i}\neq\perp$ **y** $\mu_{x_j}=\perp$: **Dado** $x_j=dom\#u_j$ **en** $\mathscr{R}:=\mathscr{R}\cup\{\mathscr{R}(x_i,x_j)=\mu_{x_i}(u_j)\}$;
  Fin del para el caso
Fin del para
Devolver $\mathscr{R}$

La idea es la siguiente: Suponiendo que $T(X)=\{x_i \mid i\in I\}$, donde I es un conjunto de índices. Para cada x_i y x_j, con $i,j\in I$, generamos la entrada de una relación borrosa sobre $T(X)$: $\mathscr{R}(x_i,x_j)=\alpha$. El grado de relación α puede calcularse como la relación entre los subconjuntos borroso $M(x_i)$ y $M(x_j)$ asociados a estos términos como significado. El caso donde $M(x_j)=\perp$ implica que x_j es un punto dominio, debería resolverse de forma específica. Con más precisión,

[3] Note que se podrían emplear ontologías más específicas lo que permitiría al método trabajar sobre diferentes contextos

la fase de generación se implementa por medio del Algoritmo 1, que es una adaptación del presentando en [4] y que sólo trabaja con puntos de dominio.

Note que, en el Algoritmo 1, el subconjunto borroso S únicamente contiene los términos primarios en $T(X)$ y aquellos términos compuestos que aparecen en el programa Π. La función de matching computa los grados de relación entre los subconjuntos borrosos y se ha implementado por medio de una técnica empleada con éxito en el sistema *FuzzyClips* [8]. Una vez generada la relación, $\mathscr{R}$, el mecanismo operacional del lenguaje Bousi manipula la variable lingüística X y, los términos en $T(X)$ (puntos de dominio incluidos) de una forma totalmente estándar. Es decir, como símbolos de un lenguaje de primer orden capaces de participar en un algoritmo de unificación débil al mismo nivel que el resto de los símbolos del alfabeto. Por lo tanto, somos capaces de manipular un proceso semántico, que involucra una consulta lingüística borrosa, mediante un mecanismo sintáctico.

Ejemplo 2 *Continuando con el Ejemplo 1. El conjunto de ecuaciones de proximidad generadas a partir del programa Bousi, usando la segunda fase del nuestro método y el Algoritmo 1 es el siguiente*[4]*:*

```
%%ecuaciones de proximidad asociadas a una variable linguistica
young~age#24 = 0.86.  middle~age#24 = 0.2.  old~age#24 = 0.0.
young~age#30 = 0.66.  middle~age#30 = 0.5.  old~age#30 = 0.0.
young~age#34 = 0.53.  middle~age#34 = 0.7.  old~age#34 = 0.0.
young~age#45 = 0.16.  middle~age#45 = 1.0.  old~age#45 = 0.0.
```

Ahora, es posible preguntar sobre "quién es de mediana edad y su trabajo está relacionado con la ciencia" lanzando la consulta "?.-person(_,X,middle,science)." *a la herramienta Bousi Gunfire (Ver próxima sección). Entonces, es capaz de encontrar las respuestas:* X=john with 0.2, X=paul with 0.5, X=mary with 0.7 *y* X=warren with 1.0*; ya que ha sido creado internamente un conjunto de ecuaciones de proximidad entre el conjunto crisp* 24, 30, 34 y 45*, y los términos lingüísticos* middle *y es posible establecer un enlace entre ellos usando el algoritmos de unificación débil. Note que gracias al perfil de nuestro lenguaje (basado en proximidad) las ecuaciones entre los símbolos no numéricos se realiza de forma natural.*

5 Bousi Exporta y Bousi Gunfire

En esta sección, se detalla la arquitectura del prototipo software que implementa nuestro método para formular consultas borrosas lingüísticas y basadas en proximidad. Se compone de tres capas: la **Interfaz de Usuario, Bousi Gunfire y Bousi Exporta**. La interfaz de usuario permite interactuar con las herramientas Bousi Exporta y Bousi Gunfire e implementa la interfaz con Bousi Exporta y la interfaz de entrada/salida. **La inferfaz de Bousi Exporta** proporciona una lista gráfica de tablas y su visualización (sus columnas y datos). Además, permite definir una variable lingüística sobre una columna. La **Ventana de Entrada/Salida** permite formular consultas lingüísticas y visualizar las respuestas obtenidas por Bousi Gunfire. En nuestro sistema, una consulta se crea por medio de una interfaz gráfica en la cual se muestra una lista de tablas. Una vez seleccionada la tabla es posible indicar los términos lingüísticos. Por ejemplo, para formular la consulta "encontrar personas altas con ojos claros", el usuario debe seleccionar la tabla "person" y el término lingüístico "tall" y "light eyes". Note que, esta forma de formular la consulta es temporal ya que se debería crear en el futuro una interfaz de lenguaje natural (esto se comenta en la Sección 6).

Bousi Gunfire es el núcleo del sistema Bousi~Prolog. Recibe como entrada un programa (generado por la herramienta Bousi Exporta) y la consulta del usuario. El mecanismo de inferencia de Bousi devuelve un conjunto (posiblemente vacío) de respuestas que se muestran en la interfaz. Esta capa implementa la funcionalidad del algoritmo de unificación débil. **Bousi Gunfire** se compone de cuatro paquetes: (i) Compilador que traduce el programa generado por la herramienta Bousi Exporta y la consulta formulada por la interfaz de usuario y retorna el código intermedio que será ejecutado por la máquina abstracta. El compilador se detalla en [3]; (ii) SWAM (Máquina Abstracta de Warren basada en Similitud) ejecuta el código intermedio generado en la fase de compilación. Difiere de la presentada y detallada en [3], en que ahora la entrada/salida se realiza por medio de un paquete de comunicación especial que se resume en el item (iv); (iii) **Utilidades** implementa las estructuras de datos empleadas por el resto de módulos; (iv) Comunicación que se compone de tres clases. Estas clases son empleadas para la comunicación con otras aplicaciones (e.g. Bousi Exporta): (a) La clase `BousiAnswer` es una lista de objetos "$\langle VariableSubstitution, Degree\rangle$" del paquete utilidades; (b) La clase `BousiGunfire` se compone de un objeto SWAM que ejecuta el programa Bousi, dos objetos String que actúan como entrada (ruta del archivo y la consulta), y una lista de objetos BousiAnswer que actúan como salida; (c) La clase `IncorrectQuery` es una clase que hereda de `Exception`. Se emplea para gestionar la aparición de errores durante la formulación de la consulta al sistema Gunfire.

Bousi Exporta permite conectarse a un SGBDR (Por ahora MySQL, Oracle, Postgres y SQL Server) para proporcionar al usuario información sobre su estructura (tablas atributos y valores). Esta conexión se realiza mediante un componente de la interfaz de usuario que, como se ha explicado, permite al usuario definir y asociar variables lingüísticas a atributos vagos de una tabla. Finalmente, ambos datos y las variables lingüísticas se transforman en un programa Bousi por medio de los algoritmos de nuestro mé-

[4] Por simplicidad, solamente se muestran las relaciones entre los términos lingüísticos y los puntos de dominio. Las relaciones de los términos lingüísticos con ellos mismos son omitidas.

todo. Bousi Exporta se compone de dos paquetes: (a) paquete MetaDataExporta: se compone de 8 clases. La clase principal es la DatabaseMetaData que permite obtener la meta-información sobre un SGBDR concreto. Para ello, se implementan tres métodos importantes: `getTables()`, `getColumns()` and `getTypeColumns()`. Adicionalmente, la clase `Connection` se emplea para hacer una conexión la SGBD seleccionado y Statement se emplea junto ResultSet para recuperar los datos; (b) Paquete Query Exporta: se compone de 3 clases. Permite la comunicación con la herramienta Bousi Gufire mediante el uso de las clases `BousiAnswer`, `BousiGunfire` y `IncorrectQuery` comentadas en los items previos.

6 Conclusiones y Trabajo Futuro

En este trabajo, se ha presentado un nuevo método que permite formular consultas borrosas lingüísticas y basadas en proximidad sobre Base de Datos Relaciones. Para ello, las filas de una tabla se transforman en un conjunto de hechos Bousi∼Prolog y se establece una relación borrosa entre las constantes de los hechos y las etiquetas lingüísticas definidas para una variable lingüística. Esto nos permite establecer una correspondencia entre los datos y los conceptos lingüísticos que aparecen en la consulta. Adicionalmente, obtenemos conceptos próximos a los valores de una columna haciendo uso de una ontología aumentando así la flexibilidad. Por último, hemos presentado un prototipo software que implementa este método. Podemos señalar algunas limitaciones: i) la interfaz de usuario y las consultas son muy simples; ii) la transformación de los datos precisos a conocimiento (preciso e impreciso) se realiza solamente sobre una tabla.

Aunque el trabajo no se centra en las aplicaciones, pensamos que nuestra propuesta podría ser muy útil en los siguientes casos: (a) Cuando el usuario de la base de datos relacional no es un experto y no conoce su estructura (tablas, columnas, dominios), nuestro método ayuda a esos usuarios inexpertos para formular consultas lingüísticas y basadas en proximidad sin la necesidad de conocer la estructura de la base de datos o un lenguaje específico; (b) Adaptar la información crisp almacenada en una base de datos con el objetivo de desarrollar aplicaciones de soft computing, ya que este método nos permite poner en relación conceptos vagos con datos precisos almacenados en la base de datos y transformar los datos precisos en datos vagos; (c) Porque la información de la base de datos se transforma en hechos de un lenguaje de programación lógica borrosa, y por tanto en un programa declarativo, por tanto puede emplearse para inferir nuevo conocimiento; (d) La combinación de las dos últimas habilidades (conexión de los datos crisp con los conceptos vagos y las capacidades deductivas) nos permite emplear los datos preciosos en varias aplicaciones tales como: base de datos flexibles deductivas, sistemas expertos, sistemas de control o razonamiento aproximado.

En cuanto al trabajo futuro, queremos mejorar la interfaz de usuario permitiendo el uso de consultas más complejas en lenguaje natural. Por otro lado, el proceso de transformación tiene que ser realizado son multiples tablas relacionales.

Referencias

[1] S.M. Chen and H.R. Hsiao. A New Approach for Fuzzy Query Processing Based on Automatic Clustering Techniques. Information and Management Sciences, 18(3):223–240 (2007).

[2] P.J. Garcés, J.A. Olivas and F.P. Romero. FISS: Aplicación de la Relación Borrosa de Sinonimia y de Ontologías Borrosas a un Metabuscador. Congreso Español de Tecnologías y Lógica Fuzzy (2002).

[3] P. Julián and C. Rubio. A Similarity-based WAM for Bousi∼Prolog. In: Springer LNCS 5517, pp. 245–252 (2009).

[4] P. Julián and C. Rubio. An Efficient Fuzzy Unification Method and its Implementation into the Bousi∼Prolog System. In: *FUZZ-IEEE 2010*, pp. 658–665 (2010).

[5] C. Rubio-Manzano and P. Julián-Iranzo. Fuzzy linguistic prolog and its applications. Journal Intelligent and Fuzzy Systems, DOI: 10.3233/IFS-130834, pp. 12. IOS Press (2013).

[6] M. Kamel et al. Fuzzy Query using Clustering techniques Information Processing and Management Vol. 26, No. 2, pp. 279–293 (1990).

[7] J.M. Medina, O. Pons, M.A. Vila. Gefred: A generalized model of Fuzzy Relational Databases. In: Information Sciences, Volume 76, Issues 1-2, pp. 87–109 (1994).

[8] R.A. Orchard. FuzzyClips Version 6.04A. User's Guide. Institute for Information Technology, Canada (1998).

[9] T. Pedersen et al. WordNet::Similarity - Measuring the Relatedness of Concepts. In: *Proc. AAAI-04*, pp. 1024–1025 (2004).

[10] M. I. Sessa. Approximate reasoning by similarity-based SLD resolution. *Theoretical Computer Science*, 275(1–2):389–426 (2002).

[11] V. Tahami. A conceptual framework for fuzzy query processing. Information Processing and Management, Vol 13, pp 289–303 (1977).

[12] Y. Takahashi. A fuzzy query language for relational databases. In: Kacprzyk, J., Bosc, P. (Eds.), Fuzziness in Database Management Systems. Physica-Verlag, Berlin (1995).

[13] L. A. Zadeh. The Concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate Reasoning I, II and III. J. of Information Sciences 8 and 9, Elsevier (1975).

Un método de Agrupamiento Semisupervisado difuso: Aplicación en el ámbito de la clasificación de publicaciones científicas.

Irene Diaz-Valenzuela[1], **Maria J. Martin-Bautista**[1], **M. Amparo Vila**[1]

[1] *CITIC-UGT / Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial. Universidad de Granada*, {idiazval,mbautis,vila}@decsai.ugr.es

Resumen

En este trabajo presenta un método de agrupamiento semisupervisado difuso que introduce las restricciones a nivel de instancia difusas en el agrupamiento jerárquico. Este método es utilizado para afrontar el problema de la clasificación por autor de publicaciones científicas en bibliotecas digitales en la web.

Palabras Clave: Agrupamiento semisupervisado, Restricciones a nivel de instancia difusas, Bibliotecas Digitales.

1 Introducción

Con el desarrollo de Internet se ha cambiado la forma de buscar información bibliográfica. Esto ha ayudado al desarrollo y la popularización de las bibliotecas digitales en la web. Este tipo de servicios ofrecen información sobre un determinado tema en forma de registros similares a los de las bibliotecas. Poniendo como ejemplo el ámbito de las publicaciones científicas, pueden encontrarse diversos ejemplos como DBLP, CiteSeerX, INSPEC y Google Scholar. En cambio, en este tipo de servicios, aunque resulta muy fácil localizar publicaciones concretas, si lo que se pretende es encontrar todos los trabajos de un autor concreto puede ser una tarea ardua.

Específicamente, si se considera que el nombre de un autor puede escribirse de distintas formas (completo, abreviado, usando iniciales, etc.), los resultados que se obtendrán van a variar según la búsqueda que se haga. Del mismo modo, si existe más de un autor con el mismo nombre, es probable que sus publicaciones se confundan entre sí. Los problemas anteriores son conocidos como *Multirepresentación* e *Incertidumbre de la autoría*, respectivamente. El primero se refiere a la existencia de distintas representaciones para el mismo nombre de autor, mientras que el segundo se define como la imposibilidad de distinguir entre dos autores diferentes que comparten el mismo nombre.

Ilústrense estos problemas con un ejemplo: realizar la búsqueda en una biblioteca digital de un autor llamado J. García. Usando esta consulta los resultados pueden referirse, entre otros, a José García, Juan García o Julia García. Del mismo modo, si se busca José García, los resultados de la consulta no incluirán aquellas entradas bajo J. García, aunque el autor buscado tenga publicaciones bajo ese nombre.

Como consecuencia de eso, se dispone de una serie de datos que probablemente se encuentren mezclados y pueden presentar ruido. Sin embargo, es posible desambiguar estos resultados y obtener una clasificación limpia de publicaciones por autor usando un método de Control de Autoridades Automático [7]. Dicha propuesta está basada en un algoritmo de agrupamiento jerárquico combinado con una medida de proximidad adecuada. Además, durante el proceso de validación se recurre a un experto para valorar la solución obtenida. Aunque los resultados de ese método fueron bastante satisfactorios, la inclusión del experto en ese proceso llevó a pensar que se le podía dar un uso adicional a toda la información que éste proporcionaba.

Una forma de incorporar información externa al proceso de clasificación de publicaciones científicas es mediante el uso de *agrupamiento semisupervisado*[2]. Éste puede definirse como un conjunto de técnicas intermedias entre la clasificación plenamente supervisada y el agrupamiento no supervisado. Estos métodos se valen de una pequeña cantidad de información adicional que ayuda a guiar el proceso de agrupamiento hacia una solución más favorable.

La principal ventaja del agrupamiento semisupervisado frente a la clasificación supervisada es que requiere de mucha menos información adicional. Esto hace que puedan aplicarse a un rango más amplio de problemas. Concretamente, centrándose en uno de los tipos de semisupervisión, como son las *restricciones a nivel de instancia*, solo se necesita información sobre si algunos pares de instancias pertenecen o no a la misma clase. Por lo tanto, estos métodos

se pueden aplicar en situaciones en las que no es posible, o es muy costoso, etiquetar las instancias en clases como ocurre en la clasificación de publicaciones.

Esta técnica es muy apropiada para la clasificación por autor de publicaciones científicas, puesto que es un problema en el que, dado un conjunto de publicaciones obtenidas de una biblioteca digital no es posible saber a cuántos autores corresponden. Al no disponer de este dato, no se sabe cuántos grupos hay, y por tanto, asignar una etiqueta a estos datos no resulta posible. Sin embargo, un experto viendo dos publicaciones puede decir si pertenecen o no a la misma persona, al menos con cierto grado de creencia.

La semisupervisión no ha sido una técnica muy utilizada en procesos de agrupamiento jerárquico. Además, siempre se ha introducido en estos algoritmos durante el proceso de agrupar elementos. Normalmente se ha usado para conducir los resultados hacia una solución que encaje en las restricciones. Sin embargo, nosotros proponemos usar estas técnicas de un modo diferente. Nuestro algoritmo no modifica el propio proceso de agrupamiento, sino que ayuda a encontrar el α-corte óptimo de un dendograma. Esto permite usar una técnica de agrupamiento jerárquico que no necesite conocer a priori el número de grupos que van a obtenerse. Como se ha mencionado anteriormente, para el problema que estamos tratando no se dispone de esa información.

Las restricciones a nivel de instancia se han venido usando siempre de forma nítida, por lo que estaban limitadas a aquellos problemas en los que el experto tenía certeza absoluta sobre la información que estaba proporcionando. Sin embargo, se propone relajar estas restricciones mediante el uso de *restricciones a nivel de instancia difusas*. El uso de estas restricciones permitirá que el experto de un grado de creencia acerca de si dos elementos deben o no estar en el mismo grupo.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se dan unas breves nociones bibliográficas sobre los antecedentes de este problema. En la Sección 3 se introduce una formalización que nos ayudará a resolver el problema de la clasificación de publicaciones. A continuación, en la Sección 4 se propone un nuevo algoritmo de agrupamiento jerárquico semisupervisado difuso que introduce la semisupervisión en forma de restricciones a nivel de instancia difusas. Este modelo se ha usado experimentalmente en la Sección 5. Finalmente, se dan algunas conclusiones y trabajos futuros en la Sección 6.

2 Trabajos previos

Últimamente, el agrupamiento semisupervisado ha sido un área bastante popular en la literatura relacionada. De entre las diferentes versiones de este tipo de técnicas, las *restricciones a nivel de instancia* propuestas por Wagstaff [17], resultan un modelo muy interesante y que está recibiendo mucha atención. Algunos de los trabajos más relevantes basados en este modelo se pueden encontrar en [2].

El problema de la clasificación por autor de publicaciones se ha tratado desde distintos puntos de vista. Sin embargo, las soluciones ofrecidas se han restringido típicamente al problema de la *Incertidumbre de la Autoría*. Entre dichas soluciones se puede encontrar un rango muy amplio de métodos de agrupamiento, tanto supervisados como no supervisados. Entre las propuestas supervisadas, se encuentran algunas que hacen uso de Support Vector Machines (SVM) [12, 9], o variaciones de las mismas como LASVM [10]. Otras propuestas incluyen: Naïve-Bayes [9], Random Forest [16], Latent Dirichlet Allocation [8] o Cadenas de Markov [15]. Entre los métodos no supervisados se pueden encontrar propuestas basadas en el método de WAD [13] o métodos basados en jerarquías heurísticas [1].

En contraste con las propuestas previas, en este trabajo se resuelve al mismo tiempo los problemas de *Incertidumbre de la Autoría* y *Multirepresentación*. Adicionalmente, los trabajos previos usan información que generalmente no es posible encontrar en todas las bibliotecas digitales, tales como el email del autor. El método que se describe en este documento se centra solo en información que puede ser encontrada en cualquier biblioteca digital. Una primera versión de este sistema que no hace uso de las técnicas semisupervisadas puede encontrarse en:[5, 4, 7]. Los resultados de dichos trabajos llevaron al desarrollo del modelo teórico general del que se hace uso en este trabajo.

En [6] se hizo una propuesta inicial de incorporación de restricciones a nivel de instancia en el agrupamiento jerárquico de una forma diferente a cómo se había realizado tradicionalmente. Al usar las restricciones para encontrar el α-corte óptimo de un dendograma, se rompe con la tendencia tradicional de incorporarlas para guiar el proceso de agrupamiento. Sin embargo, esa propuesta usaba restricciones nítidas, lo que llevó a abordar el problema del uso de restricciones a nivel de instancia difusas. Esto permite su utilización en problemas en los que existe incertidumbre o no es posible encontrar un experto fiable. El uso de restricciones a nivel de instancia difusas es un problema que, hasta donde sabemos, no se ha abordado en la literatura. Por lo tanto, en este documento se propone un método de agrupamiento jerárquico semisupervisado difuso basado en restricciones a nivel de instancia difusas y se plantea su aplicación en la clasificación por autor de publicaciones científicas.

3 Formalización del problema de clasificación

En esta sección se describe una formalización genérica del modelo teórico para encontrar un conjunto $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$

representando cualquier tipo de entidad que pueda expresarse como un conjunto de *nombres*, tales como las autoridades o las entidades. Se define:

- $N = \{n_1, \ldots, n_k\}$, un conjunto de *nombres*.
- $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$, un conjunto de *entidades* o casos, tales que $\forall t \in T \,|\, t = (n, \overrightarrow{f})$; con $n \in N$, donde n puede aparecer en distintos casos y f es un vector de *factores* extraídos de textos. $N \equiv \{n_i | \exists t \in T; t = (n, \overrightarrow{f})\}$

Esto permite definir cada entidad como un conjunto de *nombres*, por lo que el problema de encontrar E se puede traducir a encontrar una partición del espacio de nombres: $\mathscr{P}(N) = \{N_1, \ldots, N_n\}$ tal que $\forall i$; $N_i \equiv e_i$. Esta partición del espacio de nombres estará inducida por una partición del espacio de casos. De hecho, se obtendrá por medio de un proceso de agrupamiento difuso $\mathscr{P}(T) = (C_1, \ldots, C_n)$. Por lo tanto, para cada $C_i = \{t_{ij} = (n_{ij}, \overrightarrow{f_{ij}})\}$, se establece $S_i = \{n | \exists t_{ij} \in C_i; t_{ij} = (n, f_{ij})\}$. Obviamente, $\cup_{i=1}^{l} S_l = N$ i.e. $\mathscr{S}(N) = \{S_i, \ldots, S_n\}$ es un recubrimiento del espacio de nombres.

Como se ha indicado anteriormente, la partición $\mathscr{P}(T)$ se obtiene usando un proceso de agrupamiento que utiliza una medida de proximidad que determina la comparación entre los elementos. Por ese motivo es necesario utilizar una medida que permita comparar los t de forma apropiada según el contenido de N.

El recubrimiento $\mathscr{S}(N)$ puede transformarse en una partición del espacio de nombres $\mathscr{P}(N)$ a través de un proceso de validación. Este proceso implica el uso de un experto y devuelve un conjunto de nombres, que son los prototipos de la partición.

Se propone utilizar este modelo para encontrar *autoridades* definidas como los diferentes nombres por los que un autor puede identificarse. Para hacer esto, se propone una metodología usando las publicaciones de las bibliotecas digitales como *casos* y una medida de proximidad específicamente diseñada para este problema. Todos estos conceptos serán descritos con detalle en la Sección 3.1.

3.1 Clasificación de publicaciones desde el modelo formal

El modelo previo puede aplicarse a la resolución del problema de clasificación por autor de publicaciones en bibliotecas digitales. Podemos definir una *autoridad* como un grupo de distintas representaciones para el nombre de un autor. Usando esta definición, encontrar el conjunto de autoridades contenidas en un grupo de publicaciones obtenidas de una biblioteca digital es equivalente a encontrar el conjunto E de entidades. Los elementos del modelo se pueden identificar en este problema como:

- El conjunto de entidades E es el conjunto de autoridades.
- El conjunto T de casos es el conjunto de publicaciones a clasificar. Cada t_i es una publicación del conjunto.
- $t = (n, \overrightarrow{f})$, donde n es un nombre y f es un vector de factores. Específicamente, $t = (n, f_1, f_2)$ donde n es el nombre del autor, f_1 es una representación de términos extraídos de los títulos y el abstract y f_2 es una lista de coautores.
- $\mathscr{P}(T)$ es una partición del conjunto de publicaciones.
- $\mathscr{S}(N)$ puede obtenerse tomando los nombres n de $\mathscr{P}(T)$.

Las bibliotecas digitales ofrecen un amplio rango de información que puede ser usada como *factores*, tales como los títulos, autores, año de publicación, lugar, abstract, email, etc. Dado que lo que se pretende es diseñar un sistema lo más general posible, se han seleccionado aquellos datos disponibles en cualquier biblioteca digital. Específicamente, *términos de los títulos y abstracts* y *autores*. Se considera que estos factores permiten distinguir entre publicaciones correctamente y son lo suficientemente generales como para que aparezcan en cualquier biblioteca digital.

La medida de proximidad que se ha usado en este proceso es la opuesta de una medida de divergencia usada para comparar los diferentes factores incluidos en t. Esta medida m se puede definir como:

$$m(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & \text{if } m_n = 1; \\ (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \times m_n & \\ +\lambda_1 \times d_t + \lambda_2 \times m_c, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

Donde m_n es una *medida de divergencia de nombres*, d_t es una *distancia de términos*, m_c es *medida de divergencia coautores* y λ_1, λ_2 son dos pesos en el intervalo [0,1] usados para controlar la influencia de cada componente. Para este problema específico, d_t es la distancia del coseno [14]. La medida de nombres m_n se obtiene usando una pseudo-distancia diseñada específicamente para nombres que comparten una componente común [4]. La medida de coautores, m_c es una modificación de la medida anterior para nombres que no tienen subcadenas comunes [4]. La validación se ha realizado siguiendo el proceso descrito en [7].

4 Agrupamiento semisupervisado difuso

En esta sección, se introduce una forma de incorporar la semisupervisión en el agrupamiento jerárquico mediante el uso de *restricciones a nivel de instancia*. Concretamente, se pretende introducir este tipo de restricciones en un algoritmo de agrupamiento jerárquico.

El agrupamiento jerárquico es una familia de algoritmos de agrupamiento que, en lugar de crear una partición del conjunto de datos de entrada, crea una jerarquía de elementos en un árbol binario llamado dendrograma. Cada dendrograma es equivalente a una matriz de distancia ultramétrica $\mathscr{U}$ y genera una matriz de similitud difusa entre los datos de entrada [11]. Este tipo de agrupamiento no genera una partición de los datos de entrada pero sí un conjunto de particiones anidadas según diferentes niveles α. Estos α son simplemente los α-cortes de la matriz de similitud difusa. Entonces el problema de encontrar la partición del dendrograma es equivalente al problema de encontrar el mejor α-corte de la matriz difusa. Existen métodos no supervisados objetivos para encontrar esta partición como el que aparece en [3].

En trabajos previos estos métodos han sido usados para encontrar el α-corte óptimo de la partición sin usar más información que los datos iniciales [4, 5, 7]. Ahora, es nuestro objetivo encontrar la partición usando *restricciones a nivel de instancia* [17]. Estas restricciones vienen dadas por un experto que tiene algún tipo de conocimiento sobre los datos a agrupar. Sin embargo, no es necesario disponer de información acerca de todos los datos.

Estas restricciones indican si dos elementos pertenecen o no al mismo grupo. Podemos distinguir dos tipos: *must-link* y *cannot-link*. Definámoslas como:

- *MUST-LINK* $\mathscr{M}$: Dados t_i y t_j, si existe un $\mathscr{M}(t_i,t_j)$, entonces t_i y t_j pertenecen al mismo grupo y deben estar agrupados juntos.
- *CANNOT-LINK* $\mathscr{H}$: Dados t_i y t_j, si existe un $\mathscr{H}(t_i,t_j)$, entonces t_i y t_j no pertenecen al mismo grupo y no deben estar agrupados juntos.

Tradicionalmente, este tipo de restricciones solo se han proporcionado de forma nítida. Sin embargo, este tipo de información no es apropiada para problemas en los que existe incertidumbre o no es posible encontrar un experto que indique a ciencia cierta lo que deseamos conocer. En estos casos, el uso de restricciones difusas permite relajar las condiciones dando un grado de creencia sobre si dos elementos pertenecen o no al mismo grupo. Por lo tanto, la definición anterior se redefiniría como:

- *FUZZY MUST-LINK* $\mathscr{M} = \beta$: Dados t_i y t_j, si existe un $\mathscr{M}(t_i,t_j) = \beta$, entonces t_i y t_j pertenecen al mismo con grado $\beta \in [0,1]$.
- *FUZZY CANNOT-LINK* $\mathscr{H} = \gamma$: Dados t_i y t_j, si existe un $\mathscr{H}(t_i,t_j)$, entonces t_i y t_j no pertenecen al mismo grupo con grado $\gamma \in [0,1]$.

Es posible representar las restricciones entre los distintos elementos a agrupar usando dos matrices E_m y E_c tales que:

$$E_m(t_i,t_j) = \begin{cases} \beta, & \text{si} \exists \mathscr{M}(t_i,t_j) \\ -1, & \text{si} \nexists \mathscr{M}(t_i,t_j) \end{cases} \tag{2}$$

$$E_c(t_i,t_j) = \begin{cases} \gamma, & \text{si} \exists \mathscr{H}(t_i,t_j) \\ -1, & \text{si} \nexists \mathscr{H}(t_i,t_j) \end{cases} \tag{3}$$

Tales que $\nexists(t_i,t_j) \in T | \mathscr{M}(t_i,t_j) = \beta$ y $\mathscr{H}(t_i,t_j) = \gamma$, es decir, no puede haber para una misma pareja de elementos una restricción *must-link* y una restricción *cannot-link*.

Del mismo modo, para cada α-corte en el dendograma también es posible crear una matriz C para la matriz U representando los elementos que se han unido en cada momento. Así que, para cada α-corte, tenemos una matriz C_α con la información de los elementos a ese nivel α específico. Cada $C_\alpha(t_i,t_j)$ tendrá dos valores posibles:

- $C_\alpha(t_i,t_j) = 1$ si los elementos t_i y t_j están en el mismo grupo
- $C_\alpha(t_i,t_j) = 0$ si los elementos t_i y t_j no están en el mismo grupo

La matriz E puede compararse con las distintas matrices C_α según (4).

$$s_e(E(t_i,t_j), C_\alpha(t_i,t_j)) = \begin{cases} v, & \text{si } E_m(t_i,t_j) \geq \alpha \text{ y } C_\alpha(t_i,t_j) = 1; \\ -w, & \text{si } E_m(t_i,t_j) \geq \alpha \text{ y } C_\alpha(t_i,t_j) = 0; \\ v, & \text{si } E_c(t_i,t_j) \geq \alpha \text{ y } C_\alpha(t_i,t_j) = 0; \\ -w, & \text{si } E_c(t_i,t_j) \geq \alpha \text{ y } C_\alpha(t_i,t_j) = 1; \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases} \tag{4}$$

Por lo tanto, el α-corte óptimo se puede obtener maximizando la expresión: (5)

$$\max_{\alpha \in [0,1]} s(E, C_\alpha) \tag{5}$$

El valor α correspondiente a la matriz C_α para el cual (5) toma su valor máximo es el α-corte óptimo del dendrograma. Cortando el árbol a ese nivel, se obtendrá la partición óptima buscada.

5 Resultados experimentales

En esta sección se mostrará el comportamiento de las restricciones a nivel de instancia difusas, comparándolas con las restricciones nítidas y con los métodos clásicos de obtención del α-corte óptimo.

Para esto se toma un dataset real compuesto por 485 publicaciones obtenidas de la búsqueda del apellido Smith en

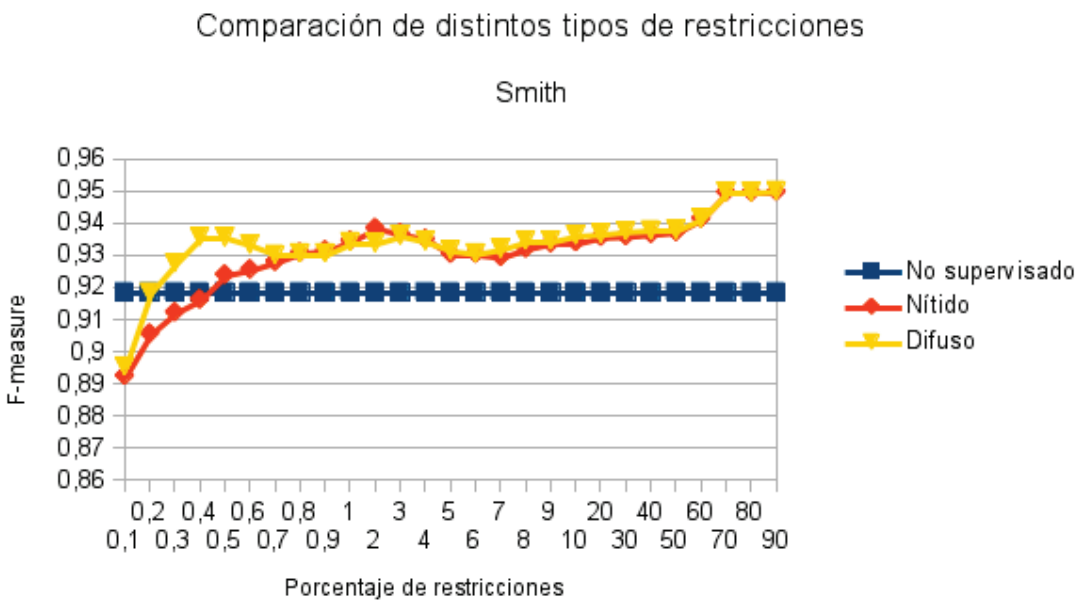


Figura 1: Comparación de los distintos métodos de obtener un α-corte de un dendrograma. El eje horizontal indica el porcentaje de restricciones con el que se aplicó el algoritmo.

citeseerx. Con estos datos, se pide a un experto que proporcione información sobre un determinado porcentaje de los pares de instancias a agrupar, porcentaje que se ira aumentando paulatinamente para ver cuánta información adicional es necesaria. De esa información proporcionada por el experto, se descartarán aquellas restricciones para las que se haya proporcionado un valor de certeza menor que 0.5, dado que no se considera que la información por debajo de ese nivel sea fiable.

A los datos anteriores se le aplicara un algoritmo de agrupamiento jerárquico, con la medida de distancia descrita en [7]. El dendrograma obtenido es cortado utilizando tres métodos distintos: un método no supervisado clásico descrito en [3], restricciones a nivel de instancia nítidas [6] y restricciones a nivel de instancia difusas. Para cada uno de los cortes con restricciones, se aplica un determinado porcentaje que varia incrementalmente. Los resultados de este experimento pueden verse en la Figura 1.

En dicha figura, las líneas correspondientes a los métodos con restricciones difusas, marcados como nítido y difuso, respectivamente, superan al método no supervisado a partir de un cierto nivel de restricciones. Si se comparan los métodos semisupervisados entre sí, se puede comprobar que se comportan de forma muy parecida, lo cual indica que permiten su aplicación en casos en los que exista incertidumbre.

Además, como puede verse los resultados tienden a estabilizarse a partir de un determinado conjunto de restricciones, lo que indica que solo es necesaria información acerca de aproximadamente un 5 % de los pares de instancias a agrupar. El que no existan grandes diferencias entre el método nítido y el difuso indica que es posible aplicar de forma efectiva el clustering semisupervisado en aquellos casos en los que no se puede estar seguros de la información que nos proporciona el experto.

6 Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado la utilización de restricciones a nivel de instancia difusas en el agrupamiento jerárquico semisupervisado. Estas restricciones tienen la ventaja frente a las nítidas de que permiten incertidumbre dentro del conocimiento que proporciona el experto.

Como se ha visto, su utilización para clasificar publicaciones científicas produce resultados que mejoran los métodos clásicos. Además, su comportamiento es muy similar a las restricciones a nivel de instancia nítidas, lo que permite su aplicación en aquellos casos en los que el experto no pueda dar una fiabilidad absoluta.

Queda como trabajo futuro el estudio de la influencia de la entropía de las restricciones proporcionadas por el experto, así como el estudio de la importancia de los distintos tipos de restricciones en la solución final. Otra línea de investi-

gación interesante derivada de este problema sería la aplicación de las restricciones difusas en otros tipos de agrupamiento o incluir las restricciones no solo en el proceso de obtención del α-corte óptimo del dendrograma, sino en el proceso de agrupamiento propiamente dicho.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por los proyectos de la Junta de Andalucía P10-TIC6109 y P11-TIC7460, así como por el Ministerio de Educación a través del "Programa de Formación del Profesorado Universitario (FPU)".

Referencias

[1] Ricardo G. Cota, Anderson A. Ferreira, Cristiano Nascimento, Marcos Andre Gonçalves, and Alberto H. F. Laender. An unsupervised heuristic-based hierarchical method for name disambiguation in bibliographic citations. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 61(9):1853 – 1870, 2010.

[2] Ian Davidson and Sugato Basu. A survey of clustering with instance level constraints. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*, pages 1 –41, 2007.

[3] M. Delgado, A. F. Gomez-Skarmeta, and M. Amparo Vila. On the use of hierarchical clustering in fuzzy modeling. *International Journal of Approximate Reasoning*, 14(4):237 – 257, 1996.

[4] Irene Diaz-Valenzuela, Maria J. Martin-Bautista, and M. Amparo Vila. A proposal for automatic authority control in digital libraries. *Information Processing and Magnament*, (Submitted), 2012.

[5] Irene Diaz-Valenzuela, Maria J. Martin-Bautista, and M. Amparo Vila. Un sistema automatico de control de autoridades para bibliotecas digitales. In *ESTYLF 2012, XVI CONGRESO ESPAÑOL SOBRE TECNOLOGIAS Y LOGICA FUZZY*, pages 450 – 455, Valladolid, España, February 2012.

[6] Irene Diaz-Valenzuela, Maria J. Martin-Bautista, and M. Amparo Vila. Using a semisupervised fuzzy clustering process for identity identification in digital libraries. In *IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS), 2013 Joint*, pages 831–836, 2013.

[7] Irene Diaz-Valenzuela, Maria J. Martin-Bautista, M. Amparo Vila, and Jesus R. Campaña. An automatic system for identifying authorities in digital libraries. *Expert Systems with Applications*, 40(10):3994 – 4002, 2013.

[8] Anderson A. Ferreira, Marcos Andre Gonçalves, Jussara M. Almeida, Alberto H. F. Laender, and Adriano Veloso. A tool for generating synthetic authorship records for evaluating author name disambiguation methods. *Information Sciences*, 206(0):42 – 62, 2012.

[9] H. Han, L. Giles, H. Zha, C. Li, and K. Tsioutsiouliklis. Two supervised learning approaches for name disambiguation in author citations. In *Digital Libraries, 2004. Proceedings of the 2004 Joint ACM/IEEE Conference on*, pages 296 – 305, June 2004.

[10] Jian Huang, Seyda Ertekin, and C. Lee Giles. Efficient name disambiguation for large-scale databases. In *PKDD*, pages 536 – 544. Springer-Verlag, 2006.

[11] A. Kaufmann. *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*. Academic Pr, 1975.

[12] Hsin-Tsung Peng, Cheng-Yu Lu, William Hsu, and Jan-Ming Ho. Disambiguating authors in citations on the web and authorship correlations. *Expert Systems with Applications*, 39(12):10521 – 10532, 2012.

[13] Denilson Alves Pereira, Berthier Ribeiro-Neto, Nivio Ziviani, Alberto H.F. Laender, Marcos Andre Gonçalves, and Anderson A. Ferreira. Using web information for author name disambiguation. In *Proceedings of the 9th ACM/IEEE-CS joint conference on Digital libraries*, JCDL '09, pages 49 – 58, Austin, TX, USA, 2009. ACM.

[14] Gerard Salton and Michael J. McGill. *Introduction to Modern Information Retrieval*. McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 1986.

[15] Jie Tang, Alvis C. M. Fong, Bo Wang, and Jing Zhang. A unified probabilistic framework for name disambiguation in digital library. *IEEE Trans. on Knowl. and Data Eng.*, 24(6):975 – 987, June 2012.

[16] Pucktada Treeratpituk and C. Lee Giles. Disambiguating authors in academic publications using random forests. In *Proceedings of the 9th ACM/IEEE-CS joint conference on Digital libraries*, JCDL '09, pages 39 – 48, Austin, TX, USA, 2009. ACM.

[17] Kiri Wagstaff and Claire Cardie. Clustering with instance-level constraints. In *Proceedings of the Seventeenth International Conference on Machine Learning*, pages 1103 – 1110, 2000.

Estudio comparativo sobre el empleo de diccionarios en el análisis de sentimientos en textos cortos

Andrés Soto, Carlos Cabrero, Antonio Menta, David Corbatón, Pedro Martín, Asier Ruiz de Alegría

[1] *BityvipTechnology, Zaragoza, España*, {andres.soto, carlos.cabrero, antonio.menta, david.corbaton, pedro.martin, asier.ruizdealegria}@bityvip.es

Resumen

Se presentan las experiencias sobre el empleo de distintos tipos de diccionarios para el análisis de sentimientos basado en textos cortos tales como mensajes de Twitter. Se analizaron las posibilidades de su uso tanto de forma independiente como combinada, integrados en uno solo. Además se desarrollo una ampliación de los diccionarios, mediante la adición de sinónimos de las palabras ya existentes en los diccionarios. Para ello se desarrolló un método basado en asignarles pesos a las diferentes interpretaciones de dichas palabras. Los resultados obtenidos muestran ventajas en la incorporación de los sinónimos y son satisfactorios comparados con otros obtenidos en condiciones similares.

Palabras Clave: análisis de sentimientos, diccionario, Twitter.

1 INTRODUCCIÓN

La gran cantidad de información disponible en internet ha motivado grandes esfuerzos de la comunidad científica para procesar esta información y poder extrapolar conocimientos útiles de la misma. Esta información sirve para expresar opiniones y sentimientos, en muchos casos, sobre diferentes aspectos de la sociedad, productos, servicios, aficiones, etc. Por ello, diversos colectivos desde empresas hasta los propios gobiernos se encuentran interesados en conocer dichas opiniones y sentimientos relacionadas con sus actividades. En este sentido, Twitter ha devenido en una herramienta fundamental para conocer las opiniones de los usuarios sobre muy diversos temas. El análisis de los mensajes de Twitter plantea nuevos retos a la comunidad científica teniendo en cuenta la brevedad de los mismos y el lenguaje especifico empleado en este medio.

Muchos de los trabajos realizados hasta el momento sobre análisis de sentimientos trabajan mayormente en documentos en inglés. Esta situación se debe probablemente a la relativa escasez de recursos tales como diccionarios y corpus en otros idiomas. El español ocupa la tercera posición entre los 10 idiomas más utilizados en internet[1], solo por debajo del inglés y del chino. Con este trabajo pretendemos contribuir a subsanar esta situación.

De acuerdo con B. Liu [9], existen dos enfoques fundamentales en el contexto del análisis automatizado de sentimientos: 1) basado en el empleo de vocabularios sobre sentimientos, 2) basado en el empleo de corpora pre etiquetados.

El trabajo que se presenta a continuación se encuentra enfocado en el empleo de vocabularios sobre sentimientos [16], [18], [10], [3], estando orientado al estudio sobre la influencia de utilizar diferentes diccionarios en el análisis de sentimientos en textos cortos (i.e. mensajes de Twitter) en español. Para el estudio, se dispuso de 3 diccionarios [13], [14], [15], los cuales presentan muy diferentes características, por lo cual nos pareció interesante tratar de determinar las ventajas y desventajas de usar uno u otro o una combinación de los mismos y, en este último caso, determinar cómo integrarlos.

Para poder medir la efectividad debida al empleo de uno u otro diccionario se decidió emplear el corpus de mensajes denominado TASS2013 [19], el cual contiene alrededor de 68000 mensajes de Twitter, escritos.

A continuación explicaremos brevemente las principales características de los diccionarios empleados. Posteriormente nos referiremos a los resultados obtenidos en los experimentos con uno u otro. Después explicaremos las diferentes formas en que los hemos combinado y haremos una comparación entre unos y otros resultados.

[1] Internet World Users By Language, Top 10 Languages, http://www.internetworldstats.com/stats7.htm

2 DICCIONARIOS UTILIZADOS EN EL ESTUDIO

Los vocabularios (diccionarios) sobre sentimientos que se emplearon en el trabajo fueron tres, los cuales se explican brevemente a continuación.

El diccionario de Pérez-Rosas et al [13] es un léxico[2] en español obtenido de forma semiautomática a partir de otros diccionarios existentes en inglés, utilizando WordNet para vincular el sentido de las palabras en uno y otro idioma. El diccionario contiene 1347 palabras con una precisión del 90%, de acuerdo con la revisión efectuada por dos hispanohablantes, según se explica en dicho trabajo. En el diccionario aparecen las palabras etiquetadas como positivas (pos) o negativas (neg).

LIWC (Linguistic Inquiry and Word Count) [11], [12] es un programa desarrollado para analizar las implicaciones psicológicas del uso de las palabras que ha sido utilizado con éxito en el área de las ciencias sociales y en psicología. El programa viene acompañado con un diccionario de palabras que utiliza en su funcionamiento. El diccionario original en inglés ha sido traducido al español [14] manualmente y dicha versión es la que se emplea en el presente estudio. El diccionario contiene 7515 palabras clasificadas en 68 categorías (ver Tabla 1). Las categorías del LIWC están organizadas jerárquicamente; por ejemplo, todas las palabras relacionadas con la categoría 'enojo', se organizan además en las categorías de emociones negativas o palabras afectivas. Es por ello que las palabras aparecen generalmente catalogadas en varias categorías. Por ejemplo, el verbo abandonar aparece catalogado en las categorías Afectiva, Emoneg, Tristeza y MecCog. En muchos casos se ofrece una "raíz" de la palabra terminada en '*' para indicar que, en ese caso, se acepta cualquiera de las terminaciones. Por ejemplo, abandonaré*, abandonaste*.

Tabla 1: Categorías del diccionario LIWC.

Pronom	Causa	Espacio	cuerpo
Yo	Insight	Arriba	Sexual
Nosotros	Discrep	Abajo	Comer
unomismo	Inhib	Incl	Dormir
Tu	Tentat	Excl	Asearse
Otro	Certeza	Moción	Maldecir
Negación	Sentidos	Ocupa	Nonfl
Asentir	Ver	Escuela	Fillers
Artículo	Oír	Trabajo	
Prepo	Sentir	Logro	
Número	Social	Placer	
Afectiva	Comu	Casa	
Emopos	Refotro	Deportes	
Sentpos	Amigos	TV	
Optimi	Familia	Música	
Emoneg	Humanos	Dinero	
Ansiedad	Tiempo	Metafo	
Enojo	Pasado	Relig	
Tristeza	Presente	Muerte	
MecCog	Futuro	Físico	

El diccionario SANEW [15] es la adaptación al español de la versión original del diccionario ANEW [4], el cual ofrece un conjunto de normas de evaluación para 1034 palabras en diferentes dimensiones con carácter sicolingüístico. La adaptación se llevo a cabo en base a las valoraciones de un panel de 720 participantes. En este caso las valoraciones aparecen expresadas en valores reales positivos, entre 1.1 y 8.54, correspondientes a promedios y desviaciones estándar con relación a las diferentes dimensiones, donde los valores mayores correspondían a la valoración positiva y los valores más cercanos a cero se consideraban negativos.

Para poder integrar de manera uniforme las palabras y la valoración de los sentimientos asociados a las mismas, se determinó normalizar dicha valoración, determinando los valores correspondientes en el intervalo [0,1]. Al integrar los diccionarios en uno solo, el valor del sentimiento asociado a una palabra del diccionario unificado se definió mediante el promedio de los valores de los demás diccionarios. Conviene señalar que la intersección entre los 3 diccionarios no era tan grande como cabía esperar, por lo que, en muchos casos, el promedio solo se realizaba entre dos diccionarios o no se hacía promedio.

Teniendo en cuenta los tres diccionarios originales y el diccionario unificado se procedió a evaluar los resultados con cada uno de ellos.

3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para medir el grado de validez alcanzado al emplear uno u otro diccionario, se utilizó el corpus de mensajes de Twitter utilizado en el Taller de Análisis de Sentimientos de la Sociedad Española de Procesamiento de Lenguaje Natural, TASS 2013 [19]. Este es un corpus general que contiene alrededor de 68000 mensajes de Twitter, escritos en español por diversas personalidades públicas entre 2011 y 2012. Cada mensaje está clasificado en una de las categorías: muy positivo (p+), positivo (p), neutro o mixto (neu), negativo (n), muy negativo (n+) o sin opinión (none).

El experimento consistió en procesar uno a uno los tweets del corpus y evaluar el sentimiento asociado a los mismos y comparar el resultado obtenido con el resultado que aparecía asociado al tweet en el corpus. Cabe señalar que

[2] Léxico: vocabulario o conjunto de palabras de un idioma Real Academia de la lengua Española http://lema.rae.es/drae/?val=l%C3%A9xico

los tweets catalogados como muy positivos (p+) o muy negativos (n+) se consideraron simplemente como positivos (p) o negativos (n) según el caso.

Para descomponer las oraciones en sus componentes léxicos (tokens) se utilizó la librería BeautifulSoup[3] de Python y la librería CLiPS Pattern[4], la cual nos facilita acceder a las palabras que componen en sí la oración.

Teniendo en cuenta que los tweets emplean muchas palabras deformadas (con letras repetidas, o que les faltan letras, etc.), característico del lenguaje SMS, se desarrollaron funciones especificas para tratar este tipo de situaciones, eliminando las letras repetidas, reconociendo emoticonos, sustituyendo las palabras mal escritas (las más comunes), etc., antes de buscarlas en el diccionario que se estaba evaluando.

Por otra parte, como los tweets son mensajes muy cortos en general, con una sintaxis particular, se consideró no realizar el análisis sintáctico (parser) de las oraciones y hacer el tratamiento tipo bolsa de palabras (bag of words), analizando solo si la palabra está presente en la oración.

Considerando la oración como un vector, donde cada elemento es una palabra.

$$O = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \quad (1)$$

Para cada una de las palabras de la oración se tiene en cuenta si aparece en el diccionario (i.e. si tiene un sentimiento asociado), en cuyo caso se obtiene la valoración del mismo. Dichas valoraciones se recolectan en un nuevo vector.

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \quad (2)$$

Observe que las longitudes de ambos vectores no se corresponden, por cuanto no todas las palabras se encuentran en el diccionario y, por tanto, no tienen sentimientos asociados. La valoración del sentimiento asociado a O se define mediante el promedio de las valoraciones reflejadas en el vector V (ver ecuación 3).

$$S(O) = \sum_{i=1}^{K} v_i \Big/ K \quad (3)$$

La valoración obtenida de esta manera se compara con la expresada en el corpus TASS.

Todos los experimentos se realizaron con el total del corpus (68020 tweets)[5], obteniéndose los resultados que se muestran en la tabla 2.

La precisión de los resultados se determina comparando la valoración obtenida según la ecuación (3) con la expresada en el corpus TASS y calculando el porciento de casos en que coinciden.

Como se aprecia en la tabla 2, los resultados con el diccionario unificado superaron a los obtenidos por cada una de los diccionarios por separado, lo cual hace pensar que estos últimos no estaban completos y que se podían mejorar.

Tabla 2: Resultados obtenidos en los experimentos.

Diccionario	precisión
SANEW	0.4656
LIWC	0.4470
Pérez-Rosas	0.4928
Unión	0.5225

4 AMPLIANDO EL DICCIONARIO

Con la intención de mejorar el diccionario de sentimientos, se decidió incluir otras palabras que también sirvieran para expresar sentimientos y que no estaban incluidas. La extensión más lógica pareciera ser incluir los sinónimos de las palabras ya incluidas. La dificultad estriba en determinar qué sinónimos se deben incluir y cuáles no.

Con vistas a determinar cuáles sinónimos se deberían incluir, se decidió incluir preferentemente aquellos sinónimos correspondientes a interpretaciones o significados que estuvieran mayoritariamente representados en el diccionario unificado. Para lograr este propósito se procedió como se explica a continuación.

Consideramos que, cada palabra p del diccionario U (diccionario unificado) tiene asociados un conjunto de significados S = {s_1, s_2,…} Por otra parte, un significado puede tener asociadas diferentes palabras que comparten dicho significado, las cuáles serán sinónimos bajo ese significado.

Sea P = {$p_{1,i}$, $p_{2,i}$,…} el conjunto de palabras del diccionario U que comparten el significado s_i Como cada palabra de U tiene un único sentimiento asociado, ese sentimiento no dependerá, según el diccionario, de uno u otro significado de la palabra. Sea V = {$v_{1,i}$, $v_{2,i}$,…} el conjunto de valoraciones de los sentimientos asociados a las palabras del conjunto P. Podemos definir entonces que la valoración V^S del sentimiento asociado al significado s_i viene dada como la media aritmética de las valoraciones de los sentimientos asociados a las palabras que comparten dicho significado en el diccionario (ver ecuación 4).

$$V^S(s_i) = \sum_j v_{j,i} \Big/ card(V) \quad (4)$$

Como ya habíamos mencionado, una palabra puede tener varios significados asociados y, puede suceder que, algunos de ellos estén asociados a sentimientos y otros no. Por tanto, se decidió que las valoraciones de los sentimientos asociados a los significados (según se explicó en el párrafo anterior) solo se aplicarán si el significado estaba "mayormente cubierto" por las palabras del diccionario.

Veamos qué entendemos por "mayormente cubierto". Sea N el número de palabras del diccionario que comparten un significado S. Por tanto, dichas palabras son sinónimos bajo ese significado. Sea N^S el número total de sinónimos

[3] BeautifulSoup http://www.crummy.com/software/BeautifulSoup/

[4] Pattern CLiPS (Computational Linguistics & Psycholinguistics) http://www.clips.ua.ac.be/pattern

[5] De ese total, 158 tweets no pudieron ser clasificados por no estar disponible el texto de los mismos.

asociados al significado S. Entonces, si se cumple que la proporción de palabras del diccionario que comparten el significado S es suficientemente grande (mayor que un cierto porcentaje α) con respecto al número total de sinónimos asociados a S (ver ecuación 5), diremos que el significado S está cubierto por el diccionario, en cuyo caso dicho significado debe corresponder a un cierto sentimiento.

$$N/N^S \succ \alpha \qquad (5)$$

Por otra parte, si un significado S corresponde a un cierto sentimiento, resulta lógico suponer que todos los sinónimos que comparten dicho significado deberán compartir, de la misma manera, ese sentimiento. Por tanto, si hay algunos de dichos sinónimos que no se encuentran en el diccionario, se deberían incorporar al mismo.

Una vez determinados los sinónimos faltantes en el diccionario, para poder proceder a incorporarlos, se requiere asignarles una valoración del sentimiento que tienen asociado. La valoración más lógica en este caso resulta la valoración que tiene asociado el significado o interpretación al cual corresponde el sinónimo. Pero, ¿qué sucede si el sinónimo tiene a su vez varias interpretaciones? En ese caso, se promedian las valoraciones asociadas a cada significado asociado al sinónimo.

Sea p una palabra del diccionario U. Sea p′ un sinónimo de p bajo el significado S, tal que p′ no pertenece a U. Entonces para incorporar a p′ a U, debemos asignarle una valoración de sentimiento. Supongamos que p′ tiene varios significados S_i asociados, los cuales tienen una valoración sentimental $V^S(S_i)$ asociada; si no la tienen, no se consideran, por cuanto dicho significado no está cubierto por el diccionario. Entonces, se define la valoración sentimental de p′ según la ecuación 6:

$$v(p') = \sum_i V^S(S_i) \Big/ card(\{S_i\}) \qquad (6)$$

Para buscar los sinónimos de las palabras se utilizó el diccionario MCR [1], [8], un repositorio multilingüe basado en WordNet 3.0 que integra 5 idiomas: inglés, español, catalán, vasco y gallego, ampliado con diferentes ontologías.

De esta manera, los sinónimos de las palabras del diccionario U, que no se encontraban en el mismo, se incorporaron formándose entonces un diccionario ampliado A. Con este nuevo diccionario, se repitió el experimento aplicado a cada uno de los diccionarios anteriores, con los resultados que se muestran a continuación. Para mayor claridad se copiaron en esta tabla los resultados reflejados anteriormente. Todos los experimentos se realizaron con el total del corpus (68020 tweets), obteniéndose los resultados que se muestran en la tabla 3. La precisión de los resultados se determina comparando la valoración obtenida según la ecuación (3) con la expresada en el corpus TASS y calculando el porciento de casos en que coinciden.

Tabla 3: Resultados obtenidos incluyendo el diccionario ampliado.

Diccionario	precisión
SANEW	0.4656
LIWC	0.4470
Pérez-Rosas	0.4928
Unión	0.5225
Ampliado	0.5801

Como se aprecia en la tabla 3, los resultados con el diccionario unificado y el diccionario ampliado superaron a los obtenidos por cada una de los diccionarios por separado, lo cual hace pensar que estos últimos no estaban completos y que se podían mejorar.

Teniendo en cuenta que todos los experimentos fueron realizados con ayuda del corpus TASS 2012, cabe comparar los resultados obtenidos con los obtenidos por los diferentes participantes en dicho taller. En la tabla 5 del trabajo de Villena-Román et al [19], se encuentran resumidos los resultados de las 17 participaciones, de las cuales 9 obtuvieron una precisión por debajo de la obtenida en el presente experimento. Las 8 participaciones restantes corresponden a 5 colectivos científicos, ya que un mismo colectivo podía presentar más de una participación. Los clasificadores utilizados fueron el modelo de máxima entropía [4], kNN (k vecinos más cercanos) [7], clasificador bayesiano ingenuo multinomial [17] y dos de los colectivos utilizaron máquinas de soporte vectorial (SVM) [6].

5 CONCLUSIONES

Este trabajo presenta los resultados de una investigación en curso sobre análisis de sentimientos en textos cortos, más concretamente mensajes de Twitter. Como parte de la investigación se analizaron las diferentes ventajas y desventajas del empleo de varios diccionarios: LIWC, SANEW y el de Pérez-Rosas con características y enfoques bien diferenciados. También se experimentó con el diccionario obtenido mediante la unión de los 3 anteriores y con una ampliación del mismo en la cual se incluyeron los sinónimos de las palabras que aparecían en los diccionarios originales.

Para valorar el sentimiento reflejado en los tweets solo se utilizaron los diccionarios para valorar los sentimientos asociados a las palabras incluidas en los mismos, sin utilizar las etiquetas asociadas a los tweets en el corpus, ni métodos de aprendizaje automático.

Para la ampliar el diccionario se planteó un modelo para determinar cuáles significados de las palabras de los diccionarios originales resultaban más importantes, desde el punto de vista de los sentimientos, y cómo asociarles una valoración sentimental a dichos significados. También se planteó un mecanismo para poder determinar qué valoración sentimental asociarles a los sinónimos incorporados

al diccionario ampliado. Todas las fórmulas empleadas fueron desarrolladas o adaptadas para este trabajo.

Los experimentos realizados muestran que la integración y ampliación de los 3 diccionarios contribuyó a mejorar los resultados, pasando los mismos de una precisión máxima de 49% a un 58%, con un incremento de la precisión del 10%.

Para medir la efectividad del empleo de uno u otro diccionario se utilizó el corpus de mensajes de Twitter del Taller de Análisis de Sentimientos TASS 2013. El experimento consistió en procesar cada uno de los tweets del corpus y evaluar el sentimiento asociado a los mismos y comparar el resultado obtenido con la valoración sobre el tweet que aparecía en el corpus.

En comparación con los resultados presentados en TASS 2013, consideramos que los resultados de este trabajo son satisfactorios, habiendo sobrepasado los resultados de más de la mitad de los participantes, lo cual es más significativo si se tiene en cuenta que dichos participantes utilizaron métodos de aprendizaje automático y en este trabajo no se utilizaron.

En trabajos futuros se plantea continuar estudiando posibles formas de extender y mejorar el diccionario obtenido, mediante la integración con otros diccionarios disponibles como SentiWordNet [[2]19]. También se pretende evaluar el efecto de analizar sintácticamente los tweets.

Referencias

[1] J. Atserias, L. Villarejo , G. Rigau, E. Agirre, J. Carroll, B. Magnini and P. Vossen: The MEANING Multilingual Central Repository. In Proceedings of the Second International Global WordNet Conference (GWC'04). ISBN 80-210-3302-9. Brno, Czech Republic. January, 2004.

[2] S. Baccianella, A. Esuli and F. Sebastiani: SentiWordNet 3.0: An Enhanced Lexical Resource for Sentiment Analysis and Opinion Mining, Proceedings of the Seventh International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'10), 2010.

[3] F. Balbachan, D. Dell'Era: Análisis Automatizado de Sentimiento en Textos Breves de la Plataforma Twitter, Revista Infosur no.6 de Junio 2012.

[4] A. L. Berger, S. A. Della Pietra and V. J. Della Pietra: A Maximum Entropy approach to Natural Language Processing, Computational Linguistics, 1996, 22, pp. 39—71.

[5] M. M. Bradley, P. J. Lang: Affective norms for English words (ANEW): Instruction manual and affective ratings. Gainesville, FL: Center for Research in Psychophysiology, University of Florida, 1999.

[6] C. Cortes, and V.N. Vapnik; "Support-Vector Networks", Machine Learning, 20, 1995.

[7] E. Fix, J.L. Hodges: "(1951): An Important Contribution to Nonparametric Discriminant Analysis and Density Estimation: Commentary on Fix and Hodges (1951)". International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique 57 (3): pp. 233-238, 1989.

[8] A. Gonzalez-Agirre, E. Laparra and G. Rigau: Multilingual Central Repository version 3.0: upgrading a very large lexical knowledge base. In Proceedings of the Sixth International Global WordNet Conference (GWC'12). Matsue, Japan. January, 2012.

[9] B. Liu: Sentiment Analysis and Opinion Mining, Morgan & Claypool Publishers, 2012 - 180 pages.

[10] B. Pang, L. Lee, and S. Vaithyanathan: Thumbs up? Sentiment classification using machine learning techniques, Proceedings of EMNLP, pp. 79--86, 2002.

[11] J. W. Pennebaker, M. E. Francis, & R. J. Booth: Linguistic Inquiry and Word Count (LIWC), 2001.

[12] J. W. Pennebaker, & A. Graybeal: Patterns of natural language use: Disclosure, personality, and social integration. Current Directions in Psychological Science, 10, pp. 90-93, 2001.

[13] V. Perez Rosas, C. Banea, R. Mihalcea: Learning Sentiment Lexicons in Spanish, in Proceedings of the International Conference on Language Resources and Evaluations (LREC 2012), Istanbul, Turkey, May 2012.

[14] N. Ramírez-Esparza, J. W. Pennebaker, F. A. García, y R. Suriá: La Psicología del Uso de las Palabras: Un Programa de Computadora que Analiza Textos en Español, Revista Mexicana de Psicología, 24, pp. 85-99.

[15] J. Redondo, I. Fraga, I. Padrón, And M. Comesaña: The Spanish adaptation of ANEW (Affective Norms for English Words), Behavior Research Methods, 39 (3), 600-605, 2007.

[16] D. R. Rice, C. Zorn: Corpus-Based Dictionaries for Sentiment Analysis of Specialized Vocabularies, New Directions in Analyzing Text as DataWorkshop, September 27-28, London, England, 2013.

[17] S. J. Russell and P. Norvig: Artificial Intelligence: A Modern Approach (2 ed.). Pearson Education, 2003.

[18] P. D. Turney: Thumbs Up or Thumbs Down? Semantic Orientation Applied to Unsupervised Classification of Reviews. ACL 2002: pp. 417-424.

[19] J. Villena-Román, S. Lana-Serrano, E. Martínez-Cámara, J. C. González-Cristóbal: Revista de Procesamiento del Lenguaje Natural, 50, pp 37-44, 2013.

Aplicación de la lógica borrosa para la calificación de información clínica bajo criterios de calidad de datos

Francisco P. Romero[1], **José A. Olivas**[1], **Jesús Serrano-Guerrero**[1], **Ismael Caballero**[1], **Mauro J. Ourezabal**[2], **Israel Alonso**[3], **David Contreras**[3]

[1]*Depto. de Tecnologías y Sistemas de la Información, Univ. de Castilla La Mancha*, {FranciscoP.Romero, JoseAngel.Olivas, Jesus.Serrano, Ismael.Caballero}@uclm.es

[2]*Hospital Universitario Rey Juan Carlos*, mauro.oruezabal@hospitalreyjuancarlos.es

[3]*Depto. de Sistemas Informáticos, Univ. Pontificia de Comillas - ICAI*, {ialonso, davidcb}@dsi.icai.upcomillas.es

Resumen

En este trabajo se presenta una aplicación de la lógica borrosa con el fin de calificar textos clínicos en base a su calidad de datos. El método propuesto parte del procesamiento del lenguaje natural del texto con el fin de extraer aquellos conceptos que más contribuyen a su significado. Para ello se han utilizado diferentes herramientas basadas en el MetaTesauro UMLS (Unified Medical Language System). Con estos conceptos y su distribución en el texto se realizan las mediciones de las dimensiones de calidad de datos relevantes para la información clínica como son la completitud, la corrección, la utilidad, la brevedad y la relevancia. Una vez realizadas estas mediciones y mediante la utilización de mecanismos de inferencia borrosa se consigue la calificación del texto clínico en base a su calidad de datos.

Palabras Clave: Lógica Borrosa, Calidad de Datos, Información Clínica, UMLS.

1 Introducción

Medicine 3.0 es un entorno que permite la interacción entre profesionales de la medicina como parte del tratamiento al paciente, pero también pretende el aprovechamiento de la información para investigación, educación y desarrollo profesional del personal sanitario. Actualmente, con el masivo uso de Internet, la cantidad de información biomédica a la que un profesional de la salud tiene acceso es realmente difícil de manejar. Es por ello que cada vez se hace más necesario contar con sistemas de recuperación de información (S.R.I) que permitan, además de localizar la información necesaria, permitir ordenarla y entregarla de forma eficiente a los usuarios con el fin de satisfacer sus necesidades de información sobre enfermedades, síntomas, etc. Las tecnologías vinculadas a la Web Semántica pueden contribuir a mejorar la práctica médica y a potenciar el aprovechamiento de la información clínica. El objetivo es contar con una atención médica más efectiva.

Dentro de este contexto se están desarrollando muchos sistemas que hacen uso de recursos externos como ontologías que demuestran que la integración la integración de conocimiento puede ayudar a mejorar los sistemas [6]. Entre estos recursos semánticos cabe destacar los recogidos en el Metatesauro UMLS[1] (Unified Medical Language System) como son entre otros: Medical Subject Headings [2] (MeSH), SNOMED CT (Systematized Nomenclature of Medicine – Clinical Terms) [3] e International Classification of Diseases, Ninth Revision (ICD9)[4]. La utilización de estos recursos semánticos permite el desarrollo de modelos de representación, acceso y tratamiento de la semántica de los documentos dentro de este dominio de conocimiento.

Una estrategia que se puede utilizar para aumentar el grado de satisfacción de los usuarios respecto a la información a la que puede acceder es la aplicación de técnicas que permitan clasificar la información en base a diferentes criterios (relevancia, temática, etc.). En este caso, las herramientas necesarias para construir un sistema clasificador de historias clínicas van desde la gestión de la calidad de datos de las fuentes de información hasta la clasificación de estas informaciones según diferentes criterios, pasando por algunos procesos intermedios como el tratamiento de abreviaturas o la representación conceptual de los documentos.

El resto del trabajo se organiza como sigue: en la sección 2 se describirán brevemente aquellos conceptos claves para el desarrollo de esta propuesta; en la Sección 3 se detallará el proceso de calificación de un texto clínico, y en la Sección 4 se presentarán las pruebas llevadas a cabo para verificar la viabilidad de los métodos explicados en la sección anterior; para concluir en la sección 5 con las líneas de trabajo futuro.

[1]http://www.nlm.nih.gov/research/umls/
[2]http://www.ncbi.nlm.nih.gov/mesh
[3]http://www.ihtsdo.org/snomed-ct/
[4]http://www.cdc.gov/nchs/icd9.htm

2 Antecedentes

En esta sección se describen brevemente los dos conceptos clave en los que se basa esta propuesta: la calidad de datos y las relaciones borrosas.

2.1 Calidad de Datos

Los marcos de trabajo para la gestión de la calidad de los datos (en adelante DQ), proporcionan a los usuarios un conjunto de técnicas y herramientas fundamentales para evaluar la calidad de los contenidos de un texto. De esta manera, conociendo el nivel global de calidad de datos de un texto, un usuario o un sistema pueden decidir si utilizarlo o descartarlo. Para determinar si el texto es útil es necesario analizar si los datos contenidos para comprobar presentan un nivel adecuado de calidad estudiado con respecto a ciertas dimensiones de calidad de datos. Teniendo en cuenta que la "adecuación para el uso" depende de la tarea y del rol del agente o *stakeholder* que maneje las fuentes y los textos, es necesario identificar a partir de los requisitos de usuario, aquellas dimensiones que mejor representan las necesidades de calidad de datos para cada uno de los tipos de usuarios.

Un intento de desarrollar un conjunto de medidas para evaluar la calidad de la documentación clínica se puede ver en [9], trabajo en el cual se desarrolla un modelo de 22 dimensiones denominado "*22-item PDQI*" (Physician Documentation Quality Instrument) entre las que se incluyen dimensiones como la claridad, la completitud, la consistencia y la coherencia entre otras. A su vez se destaca que las principales dimensiones que influyen en la calidad de datos de un nota clínica son la comprensibilidad, la corrección, la compacidad y la organización. A este respecto, y con el fin de manejar un menor número de dimensiones en [10] se desarrolla el 9-item PDQI en el que se seleccionan los 9 items más relevantes del modelo anterior. Por otro lado, en [12] se identifican cinco dimensiones importantes como son la completitud, la corrección, la concordancia, la plausibilidad y la oportunidad, identificándose a su vez siete grandes categorías de métodos de evaluación de calidad de datos sobre información clínica entre los que cabe destacar la comparación con normas de oro, la detección de elementos clave y la comparación entre notas y entre fuentes de datos.

2.2 Relaciones Borrosas

El concepto de relación borrosa es una generalización del concepto de relación de la teoría clásica de conjuntos. Mientras que una relación entre dos conjuntos clásicos describe la existencia o no de asociación entre los elementos de ambos conjuntos, una relación borrosa describe el grado de asociación o interacción entre los elementos de dos o más conjuntos borrosos.

Formalmente, una relación borrosa R entre dos variables x e y, cuyos dominios están en X e Y respectivamente, se define por una función que proyecta pares ordenados $X \star Y$ a su grado en la relación, la cual es un número entre 0 y 1, por ejemplo:

$$R : X \star Y \leftarrow [0,1]$$

Si los valores posibles de x e y son discretos o pueden ser discretizados, se puede expresar una relación borrosa en forma de matriz, denominada matriz relacional borrosa, cuyos elementos toman valores en el intervalo $[0,1]$.

Las relaciones borrosas se usan en sistemas de inferencia borrosa (*if X then Y*) de la siguiente forma: dada una relación borrosa bidimensional y los valores posibles de una variable, inferir los valores posibles de la otra variable. Para combinar las relaciones difusas se usan operaciones de composición como la composición max-min propuesta por Zadeh, la max-producto, o la suma-producto. Supongamos que es una relación binaria borrosa R en el universo $X \star Y$. A' y B' son conjuntos borrosos en $X e Y$ respectivamente. Si conocemos R y A' podríamos conocer B' mediante la denominada Regla composicional de inferencia:

$$B' = A'(x) \circ R(x,y)$$

$$B'(y) = sup(x \in X)$$

$$min[A'(x), R(x,y)]$$

donde $R(x,y) = I(A(x), B(y))$ siendo I una función de implicación.

2.3 Extracción de conceptos

Para el procesamiento, análisis y división del texto en sentencias y frases, se pueden utilizar diferentes herramientas como OpenNLP[5] , ScopeFinder[6] y MetaMap[7].

La más apropiada para su utilización para información clínica es el programa MetaMap [1] proporcionada por la National Library of Medicine (NLM). Esta herramienta detecta todas las variaciones terminológicas que pueden existir dentro de un texto a partir de las características morfosintácticas de los vocablos. MetaMap ofrece unos buenos resultados de exhaustividad pero es necesario incorporar otros procesos al tratamiento de los textos clínicos si se requiere obtener una precisión aceptable. Además ofrece un eficiente tratamiento de la negación, identificando aquellos conceptos que se encuentran en el ámbito lingüístico de la negación, gracias a su implementación del algoritmo NegEx [3].

[5] http://incubator.apache.org/opennlp/
[6] http://scopefinder.sourceforge.net/
[7] http://metamap.nlm.nih.gov/

3 Sistema Clasificador de Notas Clínicas

Este sistema clasificador de notas clínicas está basado en diferentes dimensiones de calidad de datos que deben ser calculadas tras la representación de cada una de las notas. Esta representación se va a basar en los conceptos que han sido tratados en los textos así como en la estructura que presentan.

3.1 Representación Conceptual de las Notas Clínicas

MetaMap nos va a permitir obtener de cada texto el identificador del concepto dentro de UMLS y su tipo semántico. El tipo semántico viene dado por la función semántica dentro del dominio biomédico que tiene el concepto en el contexto en el que aparece. Existe una amplia lista de tipos semánticos, concretamente 113, que incluyen todas las posibles funciones del concepto como diagnóstico, enfermedad, prueba diagnóstica, etc. En este trabajo, el tipo semántico cobra especial relevancia ya que permite la utilización de reglas que capturan el estilo y las propiedades lingüísticas que pueden dar lugar a la estructura de la nota clínica.

Con el resultado que MetaMap nos ofrece al procesar un documento clínico se plantea representar conceptualmente cada uno de los documentos clínicos mediante el conjunto de conceptos que aparecen en él que se va a denotar por C_v (*Concepts of the visit*).

$$C_v = \left[C_v^1, \ldots, C_v^m,\right]$$

siendo m el número de conceptos distintos detectado en el mismo. En este contexto, hay que hacer notar que se está trabajando con documentos clínicos almacenados en XML (siguiendo un estándar o no). Es por ello, que los propios documentos son procesados previamente para extraer el texto libre que contienen.

Por ejemplo, si aplicamos MetaMap a la frase "*Chronic dementia.*" el resultado es el siguiente:

```
Processing 00000000.tx.4: Chronic dementia.

Phrase: "Chronic dementia."
1. Meta Mapping (888):
   694   C0205191:chronic (chronic) [Temporal Concept]
   861   C0497327:Dementia (Dementia) [Mental/Behavioral Dysf.]
2. Meta Mapping (888):
   694   C0205191:chronic (chronic) [Temporal Concept]
   861   C0011265:dementia (Presenile dementia)[Mental/Behavioral Dysf.]
```

De este resultado se puede extraer un conjunto de conceptos procedente de la unión del concepto con identificador (CUI) $C0205191$ para el texto "*Chronic*", junto con los conceptos $C0497327$ y $C0011265$ para el texto "*dementia*". Por lo tanto, los elementos del conjunto C_v serían los siguientes:

$$C_v = [C0205191, C0497327, C0011265]$$

De igual manera, y como ejemplo de representación de la negación, el resultado ofrecido por MetaMap al tratar la la frase "*No evidence of pneumothorax*" es el siguiente:

```
Processing 00000000.tx.3: No evidence of pneumothorax.

Phrase: "No evidence of pneumothorax."
1. Meta Mapping (810):
   833 N C0332120:Evidence of (Evidence of)  [Functional Concept]
   604 N C0032326:Pneumothorax (Pneumothorax)  [Disease  or Syndrome]
2. Meta Mapping (810):
   833 N C0332120:Evidence of (Evidence of)  [Functional Concept]
   604 N C1963215:Pneumothorax (Pneumothorax Adverse  Event) [Finding]
```

En este resultado se puede observar como aquellos conceptos identificados en un contexto de negación, son marcados con el valor "N". Estos conceptos, no se tendrán en cuenta a la hora de evaluar su similitud con respecto a los conceptos de la consulta, ya que representan la ausencia de ellos.

3.2 Estructura de las Notas Clínicas

Para valorar un texto médico hay muchos parámetros que hay que tener en cuenta. Uno de los más importantes que se va a considerar como criterio de calidad es que la nota siga una estructuración de una historia clínica orientada a problemas. Una de las posibles alternativas es la denominada *SOAP* (Subjetivo, Objetivo, Evaluación y Plan)[2] que presenta los siguientes elementos relevantes en el proceso asistencial (explícitos o no):

- Subjetiva (S): Se consignan impresiones subjetivas tanto del médico como del enfermo. En esta zona de la nota debemos encontrar conceptos que son síntomas o signos (tipo Semántico *Sign or Symptom* en UMLS) y enfermedades previas del paciente (*Diseases or Syndrome*).
- Objetiva (O): Deben aparecer los datos del examen físico y constantes vitales. Se pueden encontrar las diferentes actividades diagnósticas que se hayan realizado (*Health Care Activity, Diagnostic Procedure*, etc.).
- Evaluación (A): Se deben encontrar afirmaciones sobre el problema encontrado (*Disease or Syndrome*, etc.).
- Plan (P): Se debe contar con la planificación de las conductas que se tomarán, como por ejemplo diagnósticos, terapias, seguimientos y actuaciones (*Therapeutic or Preventive Procedure*).

Esta estructuración va a permitir que se puedan calcular algunas de las cinco dimensiones de calidad de las que van utilizarse para calificar las notas en este sistema y que se explican a continuación.

3.3 Dimensiones de Calidad de Datos

En este trabajo se han determinado algunas de las dimensiones indicadas en trabajos como [8], [9], [10] y [12]. Todas ellas se detallan a continuación organizadas en tres grupos: estructurales, léxicas y semánticas.

3.3.1 Dimensiones Estructurales

La primera dimensión estructural a analizar es la *completitud*. En este caso, una nota se va a considerar completa cuando contiene todas las características relevantes del proceso asistencial, es decir, una nota será completa en el caso de que contenga todos los elementos correspondientes a una historía clínica basada en problemas (SOAP). La proporción de presencia de estos elementos nos dará un grado de completitud posible. Por ejemplo, si la nota presenta todas las partes de una nota SOAP, pero una de las partes, por ejemplo el plan, no se ve del todo completa, entonces el valor de la completitud vendrá dado por el intervalo $[0.8\ 0.9]$.

La segunda dimensión a analizar es la *correctitud*, estudiada desde el punto de vista estructural, es decir, un texto será correcto si cada elemento del proceso asistencial se representa utilizando estructuras adecuadas, es decir, si los tipos semánticos de cada una de las partes corresponden en su totalidad y no se presentan mezclados. Por ejemplo, no sería lógico que en las impresiones subjetivas del profesional se mezclaran diagnósticos o acciones a realizar.

3.3.2 Dimensiones Léxicas

La primera de las dimensiones léxicas a analizar es la *legibilidad*. En este caso, la nota debe ser clara, sin ambigüedad y sin secciones que son difíciles de entender. Existen diferentes métodos estadísticos que permiten evaluar el grado de legibilidad de los textos que suelen basarse en la corrección de ortográfica y gramatical de éstos y el uso de vocabulario frecuente Esto se realiza mediante la utilización de los resultados ofrecidos por el análisis del texto realizado mediante MetaMap.

Otra de las dimensiones léxicas importantes es la *brevedad*. Un texto será breve si es concreto y sin redundancias. La brevedad se calcula a partir del número de conceptos tratados en el texto, teniendo en cuenta si existe repetición de éstos dentro de la propia nota clínica.

3.3.3 Dimensiones Semánticas

En este caso la dimensión semántica analizada va a ser la relevancia, interpretada como utilidad. Una nota es útil siempre y cuando proporcione información relevante dentro de un contexto identificado con una consulta. En este caso se entiende como relevancia de una nota con respecto a una consulta en la capacidad del texto para responder a la necesidad de información expresada por la consulta. Siguiendo esta definición, se puede medir esta dimensión mediante la similitud conceptual entre la consulta y la nota.

De esta manera, se define una relación borrosa S que representa a la similitud semántica entre los dos conjuntos de conceptos el que representa al texto C_v y el que representa a la consulta C_t. Esta similitud semántica es un valor entre 0 y 1 el cual va a ser calculado a partir de la aplicación de la métrica path[7], sobre la totalidad de los recursos contenidos en UMLs y sus relaciones jerárquicas directas (PAR/CHD) lo que viene dado por la función $F_{path-UMLS}$, calculada utilizando la librería UMLS-Similarity [5]. Dado que estos valores son discretos se puede expresar una relación borrosa en forma de matriz, denominada matriz relacional borrosa, cuyos elementos toman valores en el intervalo $[0,1]$.

La relevancia de un documento clínico frente a un tema de búsqueda, se obtiene en función de la localización de los valores de proximidad en la matriz similitud semántica. De esta manera se definen tres niveles de relevancia: "relevante", "parcialmente relevante", y "no relevante". Sin embargo, no es posible establecer niveles de relevancia mediante intervalos de valores precisos ya que no existe la suficiente nitidez para distinguir entre los diferentes niveles.

Una relación binaria borrosa como S, se puede definir como unión de α-cortes de un determinado nivel α de la siguiente manera:

$$S = U_\alpha\ \alpha\ S\alpha$$

donde $\alpha\ \in\ \nabla$, siendo ∇ el conjunto nivel de S y donde αS_α es una relación borrosa definida por:

$$\mu_{\alpha\ S_\alpha}(c_v^i, c_t^j) = \alpha * \mu_{S_\alpha}(c_v^i, c_t^j) \quad \forall (c_v^i, c_t^j) \in C_v \times C_t$$

De esta manera podemos construir un α-corte para cada uno de los niveles de relevancia especificados, en concreto, los α-cortes $S_{0,5}$, $S_{0,2}$ y S_0 van a ser los conjuntos representativos de los niveles "relevante", "parcialmente relevante" y "no relevante" mencionados anteriormente. De esta manera, un documento será "relevante" para la consulta en el caso de que el conjunto nivel $S_{0,5}$ no sea vacío, es decir, la matriz resultante no sea la matriz nula ya que esto supone que existe información en el documento clínico basada en mismos conceptos o sinónimos de los contenidos en el criterio de inclusión. Por otro lado, un documento será "no relevante" en el caso de que ambos conjuntos $S_{0,5}$ y $S_{0,2}$ sean vacíos. En el caso de que el conjunto nivel $S_{0,5}$ sea vacío, pero no el $S_{0,2}$ no se puede asegurar que el documento sea "parcialmente relevante". Esta situación va a hacer necesario realizar nuevos cálculos para distinguir entre aquellos pares (C_v^i, c_t^j) con valor en el conjunto nivel cuyo valor $F_{path-UMLS}$ cuenta con una tendencia positiva, caso en el cual el documento será calificado como "parcialmente relevante", o con una tendencia negativa, caso en el cual el documento será calificado como "no relevante".

3.4 Clasificador de Notas

El profesional comienza su indagación sobre el paciente siempre haciendo una pregunta sobre lo que quiere buscar, generalmente suele ser una pregunta sobre una determinada enfermedad (*"Infarto Agudo de Miocardio"*), o relacionada con un síntoma (*"Dolor torácico"*). Esta consulta va a servir para recuperar una serie de notas clínicas que van a ser evaluadas según las diferentes dimensiones de calidad de datos mencionadas anteriormente. Con el fin de realizar una manipulación personalizada de estas dimensiones se cuenta con una lista o vector sobre el que se asignaran diferentes prioridades a las distintas medidas de calidad de datos obtenidas. Esto es así, dado que según el rol del profesional sus necesidades pueden ser muy distintas, por ejemplo, un médico consultará por enfermedades, síntomas, pruebas diagnósticas o tratamientos; mientras que a un investigador le puede interesar grupos relacionales de diagnóstico, la rareza de la enfermedad atendida,etc. y por último a un gestor le pueden interesar temas relacionados con la calidad y seguridad del paciente.

La metodología de clasificación de notas clínicas se basa en la definición de una relación borrosa ϕ entre notas y dimensiones de calidad de datos sobre la cual se va a aplicar la composición suma producto.

De esta manera, se tienen en cuenta dos conjuntos, por un lado, D que tiene por elementos los criterios de calidad de datos que nos permitirán calificar/evaluar a cada nota según cada una de las dimensiones explicada en el apartado anterior ($D = \{d_1, \ldots, d_5\}$) y por otro lado N que tiene como elementos cada una de las notas resultantes de la consulta del profesional ($N = \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$). Por ejemplo, para el tratamiento del problema representamos la relación borrosa ϕ que se muestra en la siguiente matriz, suponiendo que la consulta ha devuelto tres notas.

$$\begin{pmatrix} [0.8\ 0.9] & [0.6\ 0.7] & [0.7\ 0.8] & [0.6\ 0.7] & [0.9\ 1.0] \\ [0.9\ 1.0] & [0.3\ 0.4] & [0.7\ 0.8] & [0.5\ 0.6] & [0.8\ 0.9] \\ [0.9\ 1.0] & [0.8\ 0.9] & [0.6\ 0.8] & [0.9\ 1.0] & [0.9\ 0.9] \end{pmatrix}$$

En la matriz anterior se han evaluado mediante intervalos de confianza en $[0,1]$ para cada nota n_j con $j = 1,2,3,4,5$ (filas), los criterios de calidad de datos d_i con $i = 1,2,3$ (columnas). Las valoraciones se han realizado de forma que el valor asignado es directamente proporcional a la calidad de datos que presenta la nota con respecto a ese criterio. De esta manera, se dispone de una evaluación nota-criterio cuyos valores han sido calculados de forma automática.

A partir de la relación borrosa planteada se puede construir una lista ordenada por preferencia de las notas. Para lo cual se realizan el siguiente proceso:

1. Se utiliza la lista de dimensiones de calidad de datos priorizada que exista para el rol del usuario. Esta lista va a ser manejada en forma de vector borroso V cuyos valores van a ser los pesos con los que se haya valorado a cada una de las dimensiones de calidad de datos pre-establecida:

   $$V = [w_1, w_2, w_3, w_4, w_5]$$

   por ejemplo:

   $$V = [0,7\ \ 0,8\ \ 0,6\ \ 0,9\ \ 0,7].$$

2. Este vector debe ser normalizado mediante la división de cada valor por la suma de todos los valores del vector), por lo que se obtiene el vector V^N cuya suma de todos sus valores es 1. Siguiendo el ejemplo propuesto:

   $$V^N = [0,19\ \ 0,22\ \ 0,16\ \ 0,24\ \ 0,19]$$

3. Finalmente, se calcula $\phi \star V^N$, siendo la composición suma-producto (operación $\star$) . En nuestro ejemplo:

   $$\begin{pmatrix} [0.71\ 0.81] \\ [0.62\ 0.72] \\ [0.83\ 0.0,92] \end{pmatrix}$$

   Con este resultado se puede llegar a calificar cada nota según su calidad de datos. En este caso la n_3 y n_1 tendrían una calidad alta y n_1 una calidad media. Además nos permite ofrecer al usuario la notas ordenadas de la siguiente forma: $n_3 > n_1 > n_2$.

4 Experimento

Con el fin de evaluar esta propuesta de calificación de notas clínicas de texto libre se ha utilizado como base el conjunto de notas clínicas procedentes del BLU-Lab NLP Repository[8] de la Universidad de Pittsburgh que fueron facilitadas para la 2011 Text REtrieval Conference (TREC) Medical Records Track [9]. Esta base documental consta de más de cien mil documentos clínicos de diversos tipos y naturaleza.

Este experimento preliminar se ha llevado a cabo sobre un conjunto concreto de notas clínicas extraídas mediante una consulta de propósito general sobre esta colección de notas. En concreto el propósito de la consulta es extraer aquellas notas que correspondan a los cursos clínicos de urgencias por lo que la cadena de la consulta ha sido "*Emergency Clinical Course*". Este tipo de documentos no es muy común pero puede ser muy útil para los médicos residentes que tienen que realizar diferentes estancias en Urgencias y pueden

[8] http://www.dbmi.pitt.edu/nlpfront
[9] http://trec.nist.gov/pubs/call2011.html/

así aprender como estructurar y redactar un documento de este tipo y con ello su proceso asistencial.

El resultado de esta consulta fueron 34 documentos clínicos los cuales fueron calificados por un experto y ordenados según su calidad de datos. Esta clasificación teórica es comparada con la ofrecida por el sistema lo cual nos va a medir la capacidad de la propuesta para reproducir el razonamiento experto. A su vez, con el fin de disponer de una línea base se ha utilizado Lucene [4] como herramienta de recuperación de información. En este caso se ha utilizado el *score* de Lucene y su división en tres niveles por densidad como calificador de las notas clinicas recuperadas.

Como medidas de rendimiento, se han calculado, siguiendo su definición estándar, los valores de precisión (P), exhaustividad (R) y métrica F (la media armónica entre precisión y exhaustividad) [11]. Para la evaluación del rendimiento medio para todas las categorías se utilizará el método basado en *micro-medias* (*micro-averaging*).

La propuesta logra un resultado aceptable en cuanto a la precisión (91 %), exhaustividad (84 %) y métrica F (87 %) de las clasificaciones efectuadas (Tabla 1). Comparativamente además se consiguen unos mejores resultados que las herramientas clásicas de recuperación de información, lo cual implica que la utilización de criterios de calidad de datos es un procedimiento de ordenación más próximo al que podría hacer un experto, ya que los procedimientos clásicos únicamente se basan en un único aspecto la proximidad más o menos semántica entre la consulta realizada y el documento regresado.

Tabla 1: Resultados

	P	**R**	**F**
Propuesta	**91 %**	**84 %**	**87 %**
Lucene	74 %	62 %	67 %

5 Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto un sistema que permite clasificar las notas clínicas de texto libre según criterios de calidad de datos. De esta manera se permite evaluar el grado de calidad de datos de las notas procesadas lo cual puede ser un buen indicador para medir la calidad asistencial.

Además, esta clasificación permite que las notas que tengan un alto grado de calidad puedan ser utilizadas en un futuro para la extracción de conocimiento mediante la aplicación de herramientas que intenten extraer conceptos, por ejemplo, agregaciones de conceptos, modo de pensamiento del médico, etc. y con ello ayudar a los expertos en la extracción de hipótesis que generarán conocimiento.

Referencias

[1] Aronson A., Lang F.: An overview of MetaMap: historical perspective and recent advances. J Am Med Inform Assoc. 2010 May-Jun;17(3) : 229–3.

[2] Cantale C. R.: Historia Clínica Orientada a Problemas El Generalista Nº 1, 29–32, 2002.

[3] Chapman W., Bridewell W., Hanbury P., Cooper G.F., Buchanan B.G.: A simple algorithm for identifying negated findings and diseases in discharge summaries. J Biomed Inform 2001:301-10.

[4] Hatcher E., Gospodnetic O.: Lucene in Action. Manning Publications. 2005.

[5] McInnes B., Pedersen T., Pakhomov S.: UMLS-interface and UMLS-similarity: Open source software for measuring paths and semantic similarity. AMIA annual symposium proceedings; American Medical Informatics Association; pp. 431-35. 2009.

[6] Patwardhan S, Pedersen T.: Using WordNet-based context vectors to estimate the semantic relatedness of concepts. Making Sense of Sense: Bringing Psycholinguistics and Computational Linguistics Together. 2006:1

[7] Pedersen T., Pakhomov, S. Patwardhan S., Chute C.: Measures of semantic similarity and relatedness in the biomedical domain. J.B.I. 2007;40(3):288-99.

[8] Sharique H., Padman R.: Analyzing the Effect of Data Quality on the Accuracy of Clinical Decision Support Systems: A Computer Simulation Approach AMIA 2006 Symposium, 324–328, 2006.

[9] Stetson, P.D., Morrison, F.P., Bakken, S., Johnson, S.B.: Research Paper: Preliminary Development of the Physician Documentation Quality Instrument. JAMIA **15**(4) (2008) 534–541

[10] Stetson, P.D., Bakken, S., Wrenn, J.O., Siegler, E.L.: Assessing Electronic Note Quality Using the Physician Documentation Quality Instrument (PDQI-9). Applied Clinical Informatics **3**(2) (April 2012) 164–174

[11] Van Rijsbergen C. : Information Retrieval. Butterworth, London, 1979.

[12] Weiskopf, N.G., Weng, C.: Methods and dimensions of electronic health record data quality assessment: enabling reuse for clinical research. JAMIA **20**(1) (2011) 144–151

Identifying Citation Classics in Fuzzy Set Field using the Concept of H-Classics

M.J. Cobo[1], **M.A. Martínez**[2], **S. Alonso**[3], **A.G. López-Herrera**[4], **E. Herrera-Viedma**[4]

[1]*Dept. Computer Science, University of Cádiz, Spain*, manueljesus.cobo@uca.es
[2]*Dept. Social Work, International University of La Rioja (UNIR), Spain*, mundodesilencio@hotmail.com
[3]*Dept. of Software Engineering, University of Granada, Spain*, zerjioi@ugr.es
[4]*Dept. Computer Science and A.I. (CITIC-UGR), University of Granada, Spain*, {lopez-herrera, viedma}@decsai.ugr.es

Abstract

Identifying citation classics in a research field is one of the main approaches used to conduct a systematic evaluation of research performance. Highly cited articles are interesting due to the potential association between high citation counts and high quality research.

The aim of this study is to identify and analyze the most frequently cited papers published into the Fuzzy Sets research field, using the H-Classics approach which is based in the well-known H-index.

Keywords: Citation classics, bibliometric measures, h-index, fuzzy sets.

1 INTRODUCTION

Systematic evaluation of research performance has been emphasised for optimising research allocation, reorientating research support, rationalising research organisations, restricting research in particular fields, or augmenting research productivity [1]. Identifying citation classics in the field is one of the key methodologies to achieve these goals.

Citation classics is a bibliometric concept introduced by Eugene Garfield [4] to designate those highly cited papers of a scientific discipline. It is currently defined as a highly cited publication as identified by the Science Citation Index, the Social Sciences Citation Index, or the Arts and Humanities Citation Index [8]. Citation classics help to discover potentially important information for the development of a discipline and also to understand the past, present and future of its scientific structure. According to [7] an analysis of the citation classics of a research field, i) allows to recognize the major advances in the discipline, ii) gives a historical perspective on the scientific progress of the speciality and iii) identifies also the main intellectual markers of the research field.

Although the citation classics is a concept well understood by the scientific community, there is still no standard way to identify them [7]. There are two main approaches: setting citation thresholds [9] or choosing a number of papers in the top of the list of highly cited papers [4]. Although both methods have been widely used by the research community, they have as main drawback the identification of the specific threshold which will change depending on the analyzed field.

To overcome this drawback, recently M.A. Martínez et. al. proposed a method [7] to identify the citation classics based on the robust bibliometric measure H-index [1, 6].

The main aim of this contribution is to identify the papers (articles and reviews) considered as classic in the Fuzzy Sets research field. Furthermore, the universities or institutions, authors, countries and journals which more have contributed to those citation classics are analyzed. Moreover, the thematics covered by those highly cited papers are shown.

This contribution is organized as follows: Section 2 describes the method used to identify the citation classics and the data used in this analysis. Section 3 shows the obtained results. Finally, some conclusions are drawn in Section 4.

2 METHOD AND DATA

Bibliometrics is a science based on the citation analysis of the research documents and used mainly to evaluate research performance [7, 8]. A basic assumption of citation analysis is that the more often a paper becomes cited the greater its influence on the field [5]. So, a higher citation rate indicates a higher quality [10]. In this sense, citation classics identify those highly cited papers which are an important reference point in a research field. Awareness of the citation classics in a field is advantageous to identify the authors who have published significant findings on particular research topics as well as the short- or long-term impact of

their work from the literary perspective [10].

As aforementioned, the classic methods to identify the citation classics consist on to set a specific threshold (number of documents or citations count) [4, 9]. The documents which exceed this threshold will be considered to belong to the set of citation classics. The selection of the threshold will depend on the research field to analyze, but there is no rigorous scientific argument to select it. In order to overcome this drawback a new approach based on the H-index is proposed in [7], called H-Classics.

Formally, the H-Classics is defined as [7]: "*H-Classics of a research area A could be defined as the H-core of A that is composed of the H highly cited papers with more than H citations received.*"

The identification process of the H-Classics of the Fuzzy Sets research field consists on the the following steps [7]:

- Selection of the bibliographic database to retrieve the scientific production and citations. ISI Web of Science (ISIWoS) was selected as bibliographic database due to it contains the most reliable and accurate citations data.

- Define a query to retrieve the articles and reviews of whole research field. We select those journals (JCR 2012) containing the word "*fuzzy*", moreover, the corpus was completed by adding those documents containing the word "*fuzzy*" or some variants in the title, abstract or keywords of the documents. Since the term fuzzy could be used in other scientific areas such as, biology or psychology, we limit the search to those journals contained in the ISI subject category *Computer Science*. The query used to retrieve the corpus is: *(SO=("FUZZY SETS AND SYSTEMS" OR "IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS" OR "INTERNATIONAL JOURNAL OF UNCERTAINTY FUZZINESS AND KNOWLEDGE BASED SYSTEMS" OR "JOURNAL OF INTELLIGENT FUZZY SYSTEMS" OR "INTERNATIONAL JOURNAL OF FUZZY SYSTEMS" OR "FUZZY OPTIMIZATION AND DECISION MAKING" OR "FUZZY LOGIC AND APPLICATIONS" OR "ROUGH SETS FUZZY SETS DATA MINING AND GRANULAR COMPUTING") OR TS=(*fuzzy*)) AND SU=(Computer Science)*, which returns an amount of 31766 documents.

- Calculate the H-index of the research field. Using the ISIWoS capabilities, the list of returned documents was ordered by citations count in order to compute the H-index of the Fuzzy Sets research area, obtaining a H-index of 169.

- Recover the H highly cited papers that are included in the H-Core. Then, we retrieve the 169 documents belonging to the H-Core in order to analyze the affiliation, publications data, and the topics covered by those documents. The list of full references is shown in Appendix A.

We should point out that the retrieved raw data was imported into the science mapping analysis open source software SciMAT [2, 3] in order to build a knowledge base and perform a preprocessing step. In particular, a deduplication step was carried out over authors, affilliations and keywords in order to merge into one entity those items that represent the same author, affiliations, or concept, respectively. Finally, Wordle[1] was used to build the cloud tags.

3 RESULTS

The research carried out by the Fuzzy Sets community has a H-index of 169, so we identify as citation classics the top 169 highly cited documents. Those documents are published from 1965 to 2008 as it is shown in Figure 1. We should remark that in the period 1995-2000 there was a great increase in the number of papers, and in fact, the highest number of H-classics is achieved in 2000.

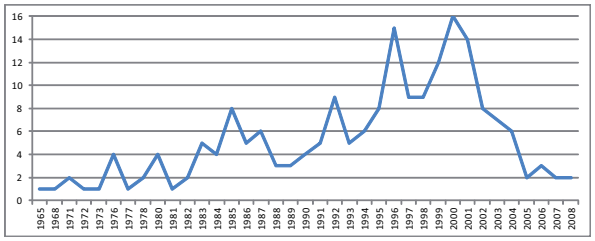


Figure 1: Distribution of classics per year

The quantitative measured of affiliations, authors, universities or institutions, and countries are shown in Tables 1–3, respectively; where only those authors, universities or countries with more than three papers are shown.

Analyzing Tables 1–3 we should remark that although Spain is the fourth country in number of highly cited articles, the Spanish *University of Granada* is on the first positions of the list. Furthermore, in Table 1 are shown the main authors that have published more than 3 H-Classics, and we can see that there are three authors (Prof. Herrera, Herrera-Viedma and Verdegay) from University of Granada together with the father of Fuzzy Sets, Prof. Zadeh.

In Table 4 the journals which have published more than three highly cited papers are shown. We can appreciate that both journals FSS and IEEE T. FS present the biggest numbers of citation classics, i.e., 66 and 39, respectively.

[1] http://www.wordle.net/

Therefore, the most important journals in the Fuzzy Sets area present the majority of the citation classics.

Finally, in order to discover the thematics covered by those 169 citation classics, a cloud tags (Figure 2) was built using the authors and ISI keywords (after a de-duplication process). In Figure 2, the size of the terms, are proportional to its frequency.

Table 1: Authors with more than three classics.

Authors	#documents
ZADEH, LA	12
HERRERA, F	10
TANAKA, K	8
YAGER, RR	8
DUBOIS, D	7
HERRERA-VIEDMA, E	7
PRADE, H	7
SUGENO, M	7
MENDEL, JM	6
BEZDEK, JC	5
CHEN, BS	4
WANG, HO	4
ATANASSOV, KT	3
ISHIBUCHI, H	3
JUANG, CF	3
MARTINEZ, L	3
PEDRYCZ, W	3
SKOWRON, A	3
SONG, Q	3
TANAKA, H	3
TSENG, CS	3
UANG, HJ	3
VERDEGAY, JL	3
ZIMMERMANN, HJ	3

Analyzing Figure 2 some remarks could be done:

- The terms *Fuzzy-Sets*, *Fuzzy-Logic* and *Fuzzy-Control* are the most frequent.
- The hybrid technique *Fuzzy-Neural-Network* has a great importance in the Fuzzy Set community.
- The thematic Fuzzy-Rule-Based-Systems, Image-Segmentation and Genetic-Algorithm have contributed widely to the development of Fuzzy Sets research field.

Table 2: Universities or institutions with more than tree classics.

Institution	#documents
UNIV CALIF BERKELEY	28
UNIV GRANADA	11
IONA COLL	8
TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY	7
NATL TSING HUA UNIV	6
UNIV OSAKA PREFECTURE	6
DELFT UNIV TECHNOL	4
NATIONAL CHIAO TUNG UNIVERSITY	4
TSING HUA UNIV	4
UNIV PAUL SABATIER	4
BOSTON UNIV	3
CITY UNIV HONG KONG	3
PURDUE UNIV	3
STANFORD UNIV	3
UNIV ALABAMA	3
UNIV JAEN	3
UNIV W FLORIDA	3
WARSAW UNIV	3

We should remark that the citation classics of the Fuzzy Set research field are composed by theoretical articles, and

Table 3: Countries with more than three classics.

Country	#documents
USA	78
JAPAN	21
TAIWAN	17
SPAIN	14
FRANCE	12
PEOPLES R CHINA	11
UNITED KINGDOM	9
POLAND	7
GERMANY	6
SOUTH KOREA	6
NETHERLANDS	5
CANADA	4
INDIA	4
ITALY	4
BELGIUM	3
BULGARIA	3
SWEDEN	3

Table 4: Journals with more than three classics.

Journal	#documents
FUZZY SET SYST	66
IEEE T FUZZY SYST	39
INFORM SCIENCES	17
IEEE T SYST MAN CY B	8
IEEE T NEURAL NETWOR	7
IEEE T SYST MAN CYB	7
INFORM CONTROL	5
PATTERN RECOGN	5
INT J UNCERTAIN FUZZ	4
COMPUT MATH APPL	3
IEEE T MED IMAGING	3
IEEE T PATTERN ANAL	3
INT J GEN SYST	3

techniques related with soft computing and different applications. The former are related with the foundation of the field such as *Fuzzy-Logic*, *Fuzzy-Set* and *Fuzzy-Control*, and with new theoretical developments, such as, *Type-2-Fuzzy-Logic-Systems* or *Interval-Valued-Fuzzy-Set*, *Rough-Set*. The latter are related with *Genetic-Algorithm*, *Classification*, *Neural-Networks*, *Group-Decision-Making*, *Clustering*, etc.

Figure 2: Cloud tags

4 CONCLUDING REMARKS

In this contribution a bibliometric analysis in order to identify the citation classics of the Fuzzy Set research area is performed. Citation classics allow to identify those highly cited papers which are an important reference point in a research field.

The characterization of the citation classics is performed through the concept of H-Classics [7] which is based in the robust and rigorous bibliometric measure H-Index [6]. Moreover, the H-Classics is not biased by the dimension or citation patterns of the research area.

An amount of 169 citation classics were identified in the Fuzzy Set research field. Those documents, have been analyzed in order to show their affiliations, journals and topics covered.

Acknowledgements

This work has been supported by the Excellence Andalusian Projects TIC-5299 and TIC-5991, and National Project TIN2010-17876.

References

[1] S. Alonso, F.J. Cabrerizo, E. Herrera-Viedma, and F. Herrera. h-index: A review focused in its variants, computation and standardization for different scientific fields. *Journal of Informetrics*, 3(4):273–289, 2009.

[2] M. J. Cobo, A. G. López-Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Herrera. Science mapping software tools: Review, analysis and cooperative study among tools. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 62(7):1382–1402, 2011.

[3] M. J. Cobo, A. G. López-Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Herrera. Scimat: A new science mapping analysis software tool. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 63(8):1609–1630, 2012.

[4] E. Garfield. Introducing citation classics. the human side of scientific reports. *Current Comments*, 1(1):5–7, 1977.

[5] E. Garfield. *Citation Indexing: Its Theory and Application in Science, Technology, and Humanities*. John Wiley & Sons, Inc. NY, 1979.

[6] J. Hirsch. An index to quantify an individuals scientific research out-put. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102:16569–16572, 2005.

[7] M.A. Martínez, M. Herrera, J. López-Gijón, and E. Herrera-Viedma. H–classics: Characterizing the concept of citation classics through h–index. *Scientometrics*, in press.

[8] HF. Moed. New developments in the use of citation analysis in research evaluation. *Archivum Immunologiae et Therapiae Experimentalis*, 57(1):13–18, 2009.

[9] F. Ponce and A. Lozano. The most cited works in parkinson's disease. *Movement Disorders*, 26(3):380–390, 2011.

[10] W.S. Wilson, L.Y. Wong Eliza, C.Y. Wong Faye, and Anie W.L. Cheung. Citation classics in the integrative and complementary medicine literature: 50 frequently cited articles. *European Journal of Integrative Medicine*, 4(1):e77–e83, 2012.

A H-Core research documents list

Table 5: H-Core: list with the 169 highly cited documents of Fuzzy Set research field

Rank	Paper	#Citations
1	ZADEH, LA, Fuzzy Sets. INFORM CONTROL 8:3 338-353 (1965).	16573
2	TAKAGI, T, et. al., Fuzzy Identification Of Systems And Its Applications To Modeling And Control. IEEE T SYST MAN CYB 15:1 116-132 (1985).	5828
3	JANG, JSR, Anfis - Adaptive-network-based Fuzzy Inference System. IEEE T SYST MAN CYB 23:3 665-685 (1993).	3339
4	LEE, CC, Fuzzy-logic In Control-systems - Fuzzy-logic Controller .1. IEEE T SYST MAN CYB 20:2 404-418 (1990).	2202
5	ATANASSOV, KT, Intuitionistic Fuzzy-sets. FUZZY SET SYST 20:1 87-96 (1986).	1239
6	WANG, LX, et. al., Generating Fuzzy Rules By Learning From Examples. IEEE T SYST MAN CYB 22:6 1414-1427 (1992).	1171
7	PAL, NR, et. al., A Review On Image Segmentation Techniques. PATTERN RECOGN 26:9 1277-1294 (1993).	1128
8	WANG, HO, et. al., An Approach To Fuzzy Control Of Nonlinear Systems: Stability And Design Issues. IEEE T FUZZY SYST4:1 14-23 (1996).	1112
9	TANAKA, K, et. al., Stability Analysis And Design Of Fuzzy Control-systems. FUZZY SET SYST 45:2 135-156 (1992).	1100
10	SUGENO, M, et. al., Structure Identification Of Fuzzy Model. FUZZY SET SYST 28:1 15-33 (1988).	1034
11	ZADEH, LA, Similarity Relations And Fuzzy Orderings. INFORM SCIENCES 3:2 177-200 (1971).	920
12	ZADEH, LA, Fuzzy Logic Equals Computing With Words. IEEE T FUZZY SYST4:2 103-111 (1996).	854
13	CARPENTER, GA, et. al., Fuzzy Artmap - A Neural Network Architecture For Incremental Supervised Learning Of Analog Multidimensional Maps. IEEE T NEURAL NETWOR 3:5 698-713 (1992).	782
14	DUBOIS, D, et. al., Operations On Fuzzy Numbers. INT J SYST SCI 9:6 613-626 (1978).	769
15	ZADEH, LA, Toward A Theory Of Fuzzy Information Granulation And Its Centrality In Human Reasoning And Fuzzy Logic. FUZZY SET SYST 90:2 111-127 (1997).	768
16	CARPENTER, GA, et. al., Fuzzy Art - Fast Stable Learning And Categorization Of Analog Patterns By An Adaptive Resonance System. Neural Networks 4:6 759-771 (1991).	763
17	SWEENEY, L, K-anonymity: A Model For Protecting Privacy. INT J UNCERTAIN FUZZ 10:5 557-570 (2002).	758
18	ZADEH, LA, A Computational Approach To Fuzzy Quantifiers In Natural Languages. COMPUT MATH APPL 9:1 149-184 (1983).	721
19	TANAKA, K, et. al., Fuzzy Regulators And Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions And Lmi-based Designs. IEEE T FUZZY SYST6:2 250-265 (1998).	686
20	LIN, CT, et. al., Neural-network-based Fuzzy-logic Control And Decision System. IEEE T COMPUT 40:12 1320-1336 (1991).	643
21	LEE, CC, Fuzzy-logic In Control-systems - Fuzzy-logic Controller .2.. IEEE T SYST MAN CYB 20:2 419-435 (1990).	629
22	LIU, BD, et. al., Expected Value Of Fuzzy Variable And Fuzzy Expected Value Models. IEEE T FUZZY SYST10:4 445-450 (2002).	614
23	BEZDEK, JC, et. al., Fcm - The Fuzzy C-means Clustering-algorithm. COMPUT GEOSCI 10:2-3 191-203 (1984).	613
24	DUBOIS, D, et. al., Rough Fuzzy-sets And Fuzzy Rough Sets. INT J GEN SYST 17:2-3 191-209 (1990).	591
25	TANAKA, K, et. al., Robust Stabilization Of A Class Of Uncertain Nonlinear Systems Via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, H-infinity Control Theory, And Linear Matrix Inequalities. IEEE T FUZZY SYST4:1 1-13 (1996).	587
26	DELUCA, A, et. al., Definition Of Nonprobabilistic Entropy In Setting Of Fuzzy Sets Theory. INFORM CONTROL 20:4 301-312 (1972).	587
27	MAMDANI, EH, Application Of Fuzzy Logic To Approximate Reasoning Using Linguistic-synthesis. IEEE T COMPUT 26:12 1182-1191 (1977).	570
28	KOSKO, B, Fuzzy Cognitive Maps. INT J MAN MACH STUD 24:1 65-75 (1986).	563

Continued on next page

Table 5 – *Continued from previous page*

Rank	Paper	#Citations
29	CHEN, CT, Extensions Of The Topsis For Group Decision-making Under Fuzzy Environment. FUZZY SET SYST 114:1 1-9 (2000).	560
30	BUCKLEY, JJ, Fuzzy Hierarchical Analysis. FUZZY SET SYST 17:3 233-247 (1985).	543
31	PAWLAK, Z, et. al., Rudiments Of Rough Sets. INFORM SCIENCES 177:1 3-27 (2007).	519
32	MENDEL, JM, et. al., Type-2 Fuzzy Sets Made Simple. IEEE T FUZZY SYST10:2 117-127 (2002).	496
33	CHENG, HD, et. al., Color Image Segmentation: Advances And Prospects. PATTERN RECOGN 34:12 2259-2281 (2001).	491
34	KWAKERNAAK, H, Fuzzy Random-variables .1. Definitions And Theorems. INFORM SCIENCES 15:1 1-29 (1978).	473
35	YAGER, RR, Families Of Owa Operators. FUZZY SET SYST 59:2 125-148 (1993).	469
36	ZADEH, LA, Toward A Generalized Theory Of Uncertainty (gtu) - An Outline. INFORM SCIENCES 172:1-2 1-40 (2005).	463
37	SANCHEZ, E, Resolution Of Composite Fuzzy Relation Equations. INFORM CONTROL 30:1 38-48 (1976).	458
38	HERRERA, F, et. al., A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model For Computing With Words. IEEE T FUZZY SYST8:6 746-752 (2000).	449
39	ZADEH, LA, Fuzzy Algorithms. INFORM CONTROL 12:2 94-102 (1968).	446
40	HALKIDI, M, et. al., On Clustering Validation Techniques. J INTELL INF SYST 17:2-3 107-145 (2001).	437
41	HERRERA, F, et. al., Linguistic Decision Analysis: Steps For Solving Decision Problems Under Linguistic Information. FUZZY SET SYST 115:1 67-82 (2000).	428
42	CAO, YY, et. al., Analysis And Synthesis Of Nonlinear Time-delay Systems Via Fuzzy Control Approach. IEEE T FUZZY SYST8:2 200-211 (2000).	419
43	DUBOIS, D, et. al., A Review Of Fuzzy Set Aggregation Connectives. INFORM SCIENCES 36:1-2 85-121 (1985).	413
44	JUANG, CF, et. al., An On-line Self-constructing Neural Fuzzy Inference Network And Its Applications. IEEE T FUZZY SYST6:1 12-32 (1998).	412
45	ZIMMERMANN, HJ, et. al., Latent Connectives In Human Decision-making. FUZZY SET SYST 4:1 37-51 (1980).	411
46	ZADEH, LA, Fuzzy-logic, Neural Networks, And Soft Computing. COMMUN ACM 37:3 77-84 (1994).	409
47	UDUPA, JK, et. al., Fuzzy Connectedness And Object Definition: Theory, Algorithms, And Applications In Image Segmentation. GRAPH MODEL IM PROC 58:3 246-261 (1996).	406
48	DUBOIS, D, et. al., Fuzzy-sets In Approximate Reasoning .1. Inference With Possibility Distributions. FUZZY SET SYST 40:1 143-202 (1991).	403
49	CHEN, BS, et. al., H-infinity Tracking Design Of Uncertain Nonlinear Siso Systems: Adaptive Fuzzy Approach. IEEE T FUZZY SYST4:1 32-43 (1996).	400
50	BORTOLAN, G, et. al., A Review Of Some Methods For Ranking Fuzzy Subsets. FUZZY SET SYST 15:1 1-19 (1985).	400
51	LIANG, QL, et. al., Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Theory And Design. IEEE T FUZZY SYST8:5 535-550 (2000).	396
52	YAGER, RR, A Procedure For Ordering Fuzzy Subsets Of The Unit Interval. INFORM SCIENCES 24:2 143-161 (1981).	396
53	ANDREWS, R, et. al., Survey And Critique Of Techniques For Extracting Rules From Trained Artificial Neural Networks. KNOWL-BASED SYST 8:6 373-389 (1995).	392
54	ZADEH, LA, The Role Of Fuzzy-logic In The Management Of Uncertainty In Expert Systems. FUZZY SET SYST 11:3 199-227 (1983).	382
55	AHMED, MN, et. al., A Modified Fuzzy C-means Algorithm For Bias Field Estimation And Segmentation Of Mri Data. IEEE T MED IMAGING 21:3 193-199 (2002).	381
56	JANG, JSR, Self-learning Fuzzy Controllers Based On Temporal Back Propagation. IEEE T NEURAL NETWOR 3:5 714-723 (1992).	380
57	PHAM, DL, et. al., Adaptive Fuzzy Segmentation Of Magnetic Resonance Images. IEEE T MED IMAGING 18:9 737-752 (1999).	379
58	SUGENO, M, An Introductory Survey Of Fuzzy Control. INFORM SCIENCES 36:1-2 59-83 (1985).	378
59	KALEVA, O, Fuzzy Differential-equations. FUZZY SET SYST 24:3 301-317 (1987).	377
60	KIM, E, et. al., New Approaches To Relaxed Quadratic Stability Condition Of Fuzzy Control Systems. IEEE T FUZZY SYST8:5 523-534 (2000).	375
61	FENG, G, A Survey On Analysis And Design Of Model-based Fuzzy Control Systems. IEEE T FUZZY SYST14:5 676-697 (2006).	367
62	ISHIBUCHI, H, et. al., Selecting Fuzzy If-then Rules For Classification Problems Using Genetic Algorithms. IEEE T FUZZY SYST3:3 260-270 (1995).	365
63	BERENJI, HR, et. al., Learning And Tuning Fuzzy-logic Controllers Through Reinforcements. IEEE T NEURAL NETWOR 3:5 724-740 (1992).	365
64	DUBOIS, D, et. al., Ranking Fuzzy Numbers In The Setting Of Possibility Theory. INFORM SCIENCES 30:3 183-224 (1983).	362
65	KASABOV, NK, et. al., Denfis: Dynamic Evolving Neural-fuzzy Inference System And Its Application For Time-series Prediction. IEEE T FUZZY SYST10:2 144-154 (2002).	361
66	HOMAIFAR, A, et. al., Simultaneous Design Of Membership Functions And Rule Sets For Fuzzy Controllers Using Genetic Algorithms. IEEE T FUZZY SYST3:2 129-139 (1995).	359
67	KARNIK, NN, et. al., Type-2 Fuzzy Logic Systems. IEEE T FUZZY SYST7:6 643-658 (1999).	357
68	ESTEVA, F, et. al., Monoidal T-norm Based Logic: Towards A Logic For Left-continuous T-norms. FUZZY SET SYST 124:3 271-288 (2001).	356
69	TANAKA, K, et. al., A Robust Stabilization Problem Of Fuzzy Control-systems And Its Application To Backing Up Control Of A Truck-trailer. IEEE T FUZZY SYST2:2 119-134 (1994).	356
70	KUNCHEVA, LI, et. al., Decision Templates For Multiple Classifier Fusion: An Experimental Comparison. PATTERN RECOGN 34:2 299-314 (2001).	354
71	ZIMMERMANN, HJ, Description And Optimization Of Fuzzy Systems. INT J GEN SYST 2:4 209-215 (1976).	354
72	SPOONER, JT, et. al., Stable Adaptive Control Using Fuzzy Systems And Neural Networks. IEEE T FUZZY SYST4:3 339-359 (1996).	341
73	YAGER, RR, On A General-class Of Fuzzy-connectives. FUZZY SET SYST 4:3 235-242 (1980).	336
74	LIOU, TS, et. al., Ranking Fuzzy Numbers With Integral Value. FUZZY SET SYST 50:3 247-255 (1992).	335
75	DAVE, RN, et. al., Robust Clustering Methods: A Unified View. IEEE T FUZZY SYST5:2 270-293 (1997).	332
76	YUAN, YF, et. al., Induction Of Fuzzy Decision Trees. FUZZY SET SYST 69:2 125-139 (1995).	332
77	LIN, CF, et. al., Fuzzy Support Vector Machines. IEEE T NEURAL NETWOR 13:2 464-471 (2002).	331
78	YAGER, RR, Quantifier Guided Aggregation Using Owa Operators. INT J INTELL SYST 11:1 49-73 (1996).	330
79	TANAKA, K, et. al., A Multiple Lyapunov Function Approach To Stabilization Of Fuzzy Control Systems. IEEE T FUZZY SYST11:4 582-589 (2003).	328
80	CHEN, SH, Ranking Fuzzy Numbers With Maximizing Set And Minimizing Set. FUZZY SET SYST 17:2 113-129 (1985).	325
81	ATANASSOV, K, et. al., Interval Valued Intuitionistic Fuzzy-sets. FUZZY SET SYST 31:3 343-349 (1989).	323
82	TUAN, HD, et. al., Parameterized Linear Matrix Inequality Techniques In Fuzzy Control System Design. IEEE T FUZZY SYST9:2 324-332 (2001).	313
83	JOHANSSON, M, et. al., Piecewise Quadratic Stability Of Fuzzy Systems. IEEE T FUZZY SYST7:6 713-722 (1999).	313
84	MITRA, S, et. al., Neuro-fuzzy Rule Generation: Survey In Soft Computing Framework. IEEE T NEURAL NETWOR 11:3 748-768 (2000).	309
85	CHICLANA, F, et. al., Integrating Three Representation Models In Fuzzy Multipurpose Decision Making Based On Fuzzy Preference Relations. FUZZY SET SYST 97:1 33-48 (1998).	307
86	SWEENEY, L, Achieving K-anonymity Privacy Protection Using Generalization And Suppression. INT J UNCERTAIN FUZZ 10:5 571-588 (2002).	306
87	GOETSCHEL, R, et. al., Elementary Fuzzy Calculus. FUZZY SET SYST 18:1 31-43 (1986).	305
88	PEDRYCZ, W, An Identification Algorithm In Fuzzy Relational Systems. FUZZY SET SYST 13:2 153-167 (1984).	300
89	BEZDEK, JC, Convergence Theorem For The Fuzzy Isodata Clustering Algorithms. IEEE T PATTERN ANAL 2:1 1-8 (1980).	298
90	HERRERA, F, et. al., A Model Of Consensus In Group Decision Making Under Linguistic Assessments. FUZZY SET SYST 78:1 73-87 (1996).	297
91	PAWLAK, Z, et. al., Rough Sets And Boolean Reasoning. INFORM SCIENCES 177:1 41-73 (2007).	292
92	LEE, CH, et. al., Identification And Control Of Dynamic Systems Using Recurrent Fuzzy Neural Networks. IEEE T FUZZY SYST8:4 349-366 (2000).	291
93	MAMDANI, EH, Advances In Linguistic-synthesis Of Fuzzy Controllers. INT J MAN MACH STUD 8:6 669-678 (1976).	291
94	MA, XJ, et. al., Analysis And Design Of Fuzzy Controller And Fuzzy Observer. IEEE T FUZZY SYST6:1 41-51 (1998).	285
95	SETNES, M, et. al., Ga-fuzzy Modeling And Classification: Complexity And Performance. IEEE T FUZZY SYST8:5 509-522 (2000).	275
96	JUANG, CF, A Hybri Of Genetic Algorithm And Particle Swarm Optimization For Recurrent Network Design. IEEE T SYST MAN CY B 34:2 997-1006 (2004).	273
97	CHEN, BS, et. al., Mixed H-2/h-infinity Fuzzy Output Feedback Control Design For Nonlinear Dynamic Systems: An Lmi Approach. IEEE T FUZZY SYST8:3 249-265 (2000).	273
98	LIN, YH, et. al., A New Approach To Fuzzy-neural System Modeling. IEEE T FUZZY SYST3:2 190-198 (1995).	273
99	DAVE, RN, Characterization And Detection Of Noise In Clustering. PATTERN RECOGN LETT 12:11 657-664 (1991).	268
100	CORDON, O, et. al., Ten Years Of Genetic Fuzzy Systems: Current Framework And New Trends. FUZZY SET SYST 141:1 5-31 (2004).	267
101	HERRERA, F, et. al., A Model Based On Linguistic 2-tuples For Dealing With Multigranular Hierarchical Linguistic Contexts In Multi-expert Decision-making. IEEE T SYST MAN CY B 31:2 227-234 (2001).	266
102	BUSTINCE, H, et. al., Vague Sets Are Intuitionistic Fuzzy Sets. FUZZY SET SYST 79:3 403-405 (1996).	266
103	JANIKOW, CZ, Fuzzy Decision Trees: Issues And Methods. IEEE T SYST MAN CY B 28:1 1-14 (1998).	264
104	KACPRZYK, J, Group Decision-making With A Fuzzy Linguistic Majority. FUZZY SET SYST 18:2 105-118 (1986).	264
105	BUCKLES, BP, et. al., A Fuzzy Representation Of Data For Relational Databases. FUZZY SET SYST 7:3 213-226 (1982).	264
106	HAGRAS, HA, A Hierarchical Type-2 Fuzzy Logic Control Architecture For Autonomous Mobile Robots. IEEE T FUZZY SYST12:4 524-539 (2004).	262
107	SANTINI, S, et. al., Similarity Measures. IEEE T PATTERN ANAL 21:9 871-883 (1999).	261
108	YAGER, RR, et. al., Induced Ordered Weighted Averaging Operators. IEEE T SYST MAN CY B 29:2 141-150 (1999).	259
109	DUBOIS, D, et. al., The Mean-value Of A Fuzzy Number. FUZZY SET SYST 24:3 279-300 (1987).	258
110	ANGELOV, PP, et. al., An Approach To Online Identification Of Takagi-suigeno Fuzzy Models. IEEE T SYST MAN CY B 34:1 484-498 (2004).	257
111	TANINO, T, Fuzzy Preference Orderings In Group Decision-making. FUZZY SET SYST 12:2 117-131 (1984).	254
112	MOLODTSOV, D, Soft Set Theory - First Results. COMPUT MATH APPL 37:4-5 19-31 (1999).	253
113	ZADEH, LA, Is There A Need For Fuzzy Logic?. INFORM SCIENCES 178:13 2751-2779 (2008).	252
114	DESCHRIJVER, G, et. al., On The Relationship Between Some Extensions Of Fuzzy Set Theory. FUZZY SET SYST 133:2 227-235 (2003).	252
115	BISTARELLI, S, et. al., Semiring-based Constraint Satisfaction And Optimization. J ACM 44:2 201-236 (1997).	251

Continued on next page

Table 5 – *Continued from previous page*

Rank	Paper	#Citations
116	DONG, WM, et. al., Fuzzy Weighted Averages And Implementation Of The Extension Principle. FUZZY SET SYST 21:2 183-199 (1987).	249
117	KARNIK, NN, et. al., Centroid Of A Type-2 Fuzzy Set. INFORM SCIENCES 132:1-4 195-220 (2001).	248
118	XU, ZS, et. al., An Overview Of Operators For Aggregating Information. INT J INTELL SYST 18:9 953-969 (2003).	247
119	GORZALCZANY, MB, A Method Of Inference In Approximate Reasoning Based On Interval-valued Fuzzy-sets. FUZZY SET SYST 21:1 1-17 (1987).	247
120	SZMIDT, E, et. al., Distances Between Intuitionistic Fuzzy Sets. FUZZY SET SYST 114:3 505-518 (2000).	246
121	TEIXEIRA, MCM, et. al., Stabilizing Controller Design For Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models. IEEE T FUZZY SYST7:2 133-142 (1999).	246
122	CAO, YY, et. al., Stability Analysis And Synthesis Of Nonlinear Time-delay Systems Via Linear Takagi-sugeno Fuzzy Models. FUZZY SET SYST 124:2 213-229 (2001).	244
123	HERRERA, F, et. al., Direct Approach Processes In Group Decision Making Using Linguistic Owa Operators. FUZZY SET SYST 79:2 175-190 (1996).	244
124	CASTRO, JL, Fuzzy-logic Controllers Are Universal Approximators. IEEE T SYST MAN CYB 25:4 629-635 (1995).	244
125	VANLAARHOVEN, PJM, et. al., A Fuzzy Extension Of Saatys Priority Theory. FUZZY SET SYST 11:3 229-241 (1983).	244
126	SONG, Q, et. al., Forecasting Enrollments With Fuzzy Time-series .1.. FUZZY SET SYST 54:1 1-9 (1993).	243
127	SAHINIDIS, NV, Optimization Under Uncertainty: State-of-the-art And Opportunities. COMPUT CHEM ENG 28:6-7 971-983 (2004).	242
128	HONG, DH, et. al., Multicriteria Fuzzy Decision-making Problems Based On Vague Set Theory. FUZZY SET SYST 114:1 103-113 (2000).	242
129	DIAMOND, P, Fuzzy Least-squares. INFORM SCIENCES 46:3 141-157 (1988).	242
130	ISHIBUCHI, H, et. al., Performance Evaluation Of Fuzzy Classifier Systems For Multidimensional Pattern Classification Problems. IEEE T SYST MAN CY B 29:5 601-618 (1999).	241
131	HALL, LO, et. al., A Comparison Of Neural Network And Fuzzy Clustering-techniques In Segmenting Magnetic-resonance Images Of The Brain. IEEE T NEURAL NETWOR 3:5 672-682 (1992).	241
132	PAL, SK, et. al., Multilayer Perceptron, Fuzzy-sets, And Classification. IEEE T NEURAL NETWOR 3:5 683-697 (1992).	239
133	LIU, BD, et. al., Chance Constrained Programming With Fuzzy Parameters. FUZZY SET SYST 94:2 227-237 (1998).	238
134	SONG, Q, et. al., Fuzzy Time-series And Its Models. FUZZY SET SYST 54:3 269-277 (1993).	237
135	SUGENO, M, et. al., Successive Identification Of A Fuzzy Model And Its Applications To Prediction Of A Complex System. FUZZY SET SYST 42:3 315-334 (1991).	236
136	MENDEL, JM, et. al., Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple. IEEE T FUZZY SYST14:6 808-821 (2006).	234
137	LEE, HJ, et. al., Robust Fuzzy Control Of Nonlinear Systems With Parametric Uncertainties. IEEE T FUZZY SYST9:2 369-379 (2001).	234
138	JOSANG, A, A Logic For Uncertain Probabilities. INT J UNCERTAIN FUZZ 9:3 279-311 (2001).	232
139	CHENG, CH, A New Approach For Ranking Fuzzy Numbers By Distance Method. FUZZY SET SYST 95:3 307-317 (1998).	232
140	MIZUMOTO, M, et. al., Some Properties Of Fuzzy Sets Of Type-2. INFORM CONTROL 31:4 312-340 (1976).	232
141	YAGER, RR, et. al., Uninorm Aggregation Operators. FUZZY SET SYST 80:1 111-120 (1996).	231
142	ISHIBUCHI, H, et. al., Distributed Representation Of Fuzzy Rules And Its Application To Pattern-classification. FUZZY SET SYST 52:1 21-32 (1992).	231
143	CHEN, SM, Forecasting Enrollments Based On Fuzzy Time Series. FUZZY SET SYST 81:3 311-319 (1996).	230
144	MIZUMOTO, M, et. al., Comparison Of Fuzzy-reasoning Methods. FUZZY SET SYST 8:3 253-283 (1982).	230
145	TSENG, CS, et. al., Fuzzy Tracking Control Design For Nonlinear Dynamic Systems Via T-s Fuzzy Model. IEEE T FUZZY SYST9:3 381-392 (2001).	229
146	GUAN, XP, et. al., Delay-dependent Guaranteed Cost Control For T-s Fuzzy Systems With Time Delays. IEEE T FUZZY SYST12:2 236-249 (2004).	227
147	YAO, YY, Two Views Of The Theory Of Rough Sets In Finite Universes. INT J APPROX REASON 15:4 291-317 (1996).	224
148	MUROFUSHI, T, et. al., An Interpretation Of Fuzzy Measures And The Choquet Integral As An Integral With Respect To A Fuzzy Measure. FUZZY SET SYST 29:2 201-227 (1989).	223
149	FRIGUI, H, et. al., A Robust Competitive Clustering Algorithm With Applications In Computer Vision. IEEE T PATTERN ANAL 21:5 450-465 (1999).	222
150	HALL, LO, et. al., Clustering With A Genetically Optimized Approach. IEEE T EVOLUT COMPUT 3:2 103-112 (1999).	221
151	DONG, WM, et. al., Vertex Method For Computing Functions Of Fuzzy Variables. FUZZY SET SYST 24:1 65-78 (1987).	221
152	TURKSEN, IB, Interval Valued Fuzzy-sets Based On Normal Forms. FUZZY SET SYST 20:2 191-210 (1986).	221
153	SAHAI, A, et. al., Fuzzy Identity-based Encryption. Advances In Cryptology - LNCS 3494. 457-473 (2005).	220
154	WEST, D, Neural Network Credit Scoring Models. COMPUT OPER RES 27:11-12 1131-1152 (2000).	220
155	HERRERA, F, et. al., A Fusion Approach For Managing Multi-granularity Linguistic Term Sets In Decision Making. FUZZY SET SYST 114:1 43-58 (2000).	220
156	INUIGUCHI, M, et. al., Possibilistic Linear Programming: A Brief Review Of Fuzzy Mathematical Programming And A Comparison With Stochastic Programming In Portfolio Selection Problem. FUZZY SET SYST 111:1 3-28 (2000).	219
157	CHEN, BS, et. al., Robustness Design Of Nonlinear Dynamic Systems Via Fuzzy Linear Control. IEEE T FUZZY SYST7:5 571-585 (1999).	219
158	KALEVA, O, et. al., On Fuzzy Metric-spaces. FUZZY SET SYST 12:3 215-229 (1984).	219
159	VENKATASUBRAMANIAN, V, et. al., A Review Of Process Fault Detection And Diagnosis Part Ii: Quantitative Model And Search Strategies. COMPUT CHEM ENG 27:3 313-326 (2003).	218
160	JUANG, CF, A Tsk-type Recurrent Fuzzy Network For Dynamic Systems Processing By Neural Network And Genetic Algorithms. IEEE T FUZZY SYST10:2 155-170 (2002).	217
161	KIM, E, et. al., A New Approach To Fuzzy Modeling. IEEE T FUZZY SYST5:3 328-337 (1997).	217
162	CHEN, SM, et. al., Handling Multicriteria Fuzzy Decision-making Problems Based On Vague Set-theory. FUZZY SET SYST 67:2 163-172 (1994).	217
163	LIM, YW, et. al., On The Color Image Segmentation Algorithm Based On The Thresholding And The Fuzzy C-means Techniques. PATTERN RECOGN 23:9 935-952 (1990).	217
164	TANAKA, H, Fuzzy Data-analysis By Possibilistic Linear-models. FUZZY SET SYST 24:3 363-375 (1987).	217
165	WU, WZ, et. al., Generalized Fuzzy Rough Sets. INFORM SCIENCES 151 263-282 (2003).	213
166	WEBER, S, A General Concept Of Fuzzy-connectives, Negations And Implications Based On T-norms And T-conorms. FUZZY SET SYST 11:2 115-134 (1983).	213
167	WANG, XH, et. al., Reasonable Properties For The Ordering Of Fuzzy Quantities (i). FUZZY SET SYST 118:3 375-385 (2001).	211
168	SUGENO, M, et. al., Fuzzy Control Of Model Car. FUZZY SET SYST 16:2 103-113 (1985).	211
169	SETNES, M, et. al., Similarity Measures In Fuzzy Rule Base Simplification. IEEE T SYST MAN CY B 28:3 376-386 (1998).	210
170	BORDOGNA, G, et. al., A Linguistic Modeling Of Consensus In Group Decision Making Based On Owa Operators. IEEE T SYST MAN CY A 27:1 126-132 (1997).	210
171	GUILLAUME, S, Designing Fuzzy Inference Systems From Data: An Interpretability-oriented Review. IEEE T FUZZY SYST9:3 426-443 (2001).	209
172	FORTEMPS, P, et. al., Ranking And Defuzzification Methods Based On Area Compensation. FUZZY SET SYST 82:3 319-330 (1996).	209
173	PEDRYCZ, W, Why Triangular Membership Functions. FUZZY SET SYST 64:1 21-30 (1994).	208
174	CHICLANA, F, et. al., Integrating Multiplicative Preference Relations In A Multipurpose Decision-making Model Based On Fuzzy Preference Relations. FUZZY SET SYST 122:2 277-291 (2001).	206
175	HERRERA, F, et. al., A Sequential Selection Process In Group Decision-making With A Linguistic Assessment Approach. INFORM SCIENCES 85:4 223-239 (1995).	206
176	GEORGE, A, et. al., On Some Results In Fuzzy Metric-spaces. FUZZY SET SYST 64:3 395-399 (1994).	206
177	ZHU, W, et. al., Reduction And Axiomization Of Covering Generalized Rough Sets. INFORM SCIENCES 152 217-230 (2003).	205
178	UDUPA, JK, et. al., Multiple Sclerosis Lesion Quantification Using Fuzzy-connectedness Principles. IEEE T MED IMAGING 16:5 598-609 (1997).	205
179	VALVERDE, L, On The Structure Of F-indistinguishability Operators. FUZZY SET SYST 17:3 313-328 (1985).	203
180	GRABISCH, M, K-order Additive Discrete Fuzzy Measures And Their Representation. FUZZY SET SYST 92:2 167-189 (1997).	202
181	HUANG, LK, et. al., Image Thresholding By Minimizing The Measures Of Fuzziness. PATTERN RECOGN 28:1 41-51 (1995).	202
182	ATANASSOV, KT, More On Intuitionistic Fuzzy-sets. FUZZY SET SYST 33:1 37-45 (1989).	200
183	LEE, KR, et. al., Output Feedback Robust H-infinity Control Of Uncertain Fuzzy Dynamic Systems With Time-varying Delay. IEEE T FUZZY SYST8:6 657-664 (2000).	199
184	POLKOWSKI, L, et. al., Rough Mereology: A New Paradigm For Approximate Reasoning. INT J APPROX REASON 15:4 333-365 (1996).	198
185	BANDLER, W, et. al., Fuzzy Power Sets And Fuzzy Implication Operators. FUZZY SET SYST 4:1 13-30 (1980).	198
186	BELLMAN, R, et. al., Analytic Formalism Of Theory Of Fuzzy Sets. INFORM SCIENCES 5 149-156 (1973).	198
187	LEU, YG, et. al., Observer-based Adaptive Fuzzy-neural Control For Unknown Nonlinear Dynamical Systems. IEEE T SYST MAN CY B 29:5 583-591 (1999).	197
188	DUBOIS, D, et. al., The Three Semantics Of Fuzzy Sets. FUZZY SET SYST 90:2 141-150 (1997).	197
189	FODOR, JC, et. al., Structure Of Uninorms. INT J UNCERTAIN FUZZ 5:4 411-427 (1997).	197
190	ZADEH, LA, Quantitative Fuzzy Semantics. INFORM SCIENCES 3:2 159-176 (1971).	197
191	RAHNAMAYAN, S, et. al., Opposition-based Differential Evolution. IEEE T EVOLUT COMPUT 12:1 64-79 (2008).	196
192	XU, ZS, et. al., Some Geometric Aggregation Operators Based On Intuitionistic Fuzzy Sets. INT J GEN SYST 35:4 417-433 (2006).	196
193	KATZ, S, et. al., Hierarchical Mesh Decomposition Using Fuzzy Clustering And Cuts. ACM T GRAPHIC 22:3 954-961 (2003).	196
194	ZADEH, LA, Soft Computing And Fuzzy-logic. IEEE SOFTWARE 11:6 48-56 (1994).	196
195	LEE, ES, et. al., Comparison Of Fuzzy Numbers Based On The Probability Measure Of Fuzzy Events. COMPUT MATH APPL 15:10 887-896 (1988).	196
196	ZHAO, ZY, et. al., Fuzzy Gain Scheduling Of Pid Controllers. Ieee Transactions On Systems Man And Cybernetics 23:5 1392-1398 (1993).	196

Búsqueda conceptual en la Web basada en imágenes y su contexto

Abril Ayala-Sánchez[1], **José Ángel Olivas Varela**[1]

[1] *Universidad de Castilla-La Mancha. Escuela Superior de Informática.*
Paseo de universidad 4, Departamento de Tecnologías y Sistemas de Información.
Grupo SMILe. 13071. Ciudad Real, España,
Abril.Ayala@alu.uclm.es, JoseAngel.Olivas@uclm.es

Resumen

En este trabajo se propone un modelo de recuperación de información en la Web empleando los recursos textuales y de imagen contenidos en un documento. Se emplean técnicas de *Soft Computing* (lógica borrosa) y técnicas de procesamiento de imágenes. La recuperación de información se basa en recuperar datos textuales del documentos y datos extraídos de una imagen. La información extraída permite definir patrones que coadyuven para relacionarlos conceptualmente. Establecer esta relación permite localizar nuevos términos similares, no limitándose, sólo a los términos que introduce el usuario cuando inicia el proceso de búsqueda. Se busca además que las técnicas de procesamiento de imágenes se limiten procurando minimizar el uso de recursos computacionales dado el costo y tiempo que requieren.

Palabras clave: *Soft Computing*, Búsqueda de información, contexto, concepto, calidad, relación conceptual.

1 Introducción

La recuperación de información en la Web es actualmente una de las actividades más realizadas cuando se pretende estar informado sobre algún tema, concepto, actividad, persona, en sí, cualquier tipo de información que se requiera conocer. Almacenar información en la Web es una actividad que tiende a crecer y en algunas ocasiones de forma descontrolada y poco ordenada y aunado a esto, los distintos tipos de datos que se conocen (Texto, imágenes, audio y vídeo) vuelven más complejo el problema de recuperación.

Existen motores de búsqueda comerciales que resuelven, en alguna medida, el reto que implica realizar una búsqueda en la Web y ofrecen soluciones relevantes, aún cuando no siempre y del todo satisfactorias para el usuario. La recuperación de información puede llevarse a cabo desde diferentes enfoques, dependiendo de los datos que se pretende recuperar, y dado que existen diferentes tipos de datos almacenados en la web; recuperar información relacionada con cada uno de estos datos requiere de técnicas y procedimientos distintos que cuando se combinan entre sí, incrementan la complejidad en los sistemas.

Las imágenes forman parte de los datos almacenados en la Web pero no son, hoy en día, del todo utilizados en la recuperación de información, una de las causas es la complejidad que implica su manipulación. Una imagen puede ser considerada, en la web, como un dato o como un conjunto de datos a extraer; a diferencia de un elemento textual que tiene significado por sí mismo. Esto hace que el manejo de imágenes como datos en sí se considere una actividad compleja que requiere de la utilización de técnicas de procesamiento de imágenes y de grandes recursos computacionales. Es necesario contar con equipo de cómputo con características de *hardware* y *software* que permitan realizar esta labor de forma rápida y eficiente, cosa que se refleja como altos costos de procesamiento; dado que de esto depende la velocidad del procesamiento y por ende el tiempo de respuesta de una consulta en la web, lo que reduce la eficiencia en lo que a búsquedas de información en la Web se refiere.

Habitualmente la recuperación de una imagen se realiza utilizando sus metadatos, específicamente la etiqueta. Esto es común encontrarlo en los buscadores y en muchos de los casos revisados en el estado del conocimiento. Actualmente existen mecanismos que se emplean para extraer información, -como *data mining, web mining, image mining, text mining, rules mining, opinion mining,* entre otras-, que al utilizarse en las aplicaciones para búsquedas de información en la Web permiten obtener buenos resultados. Pero existen muy pocas menciones sobre búsquedas utilizando la información contenida en las imágenes.

En el grupo de investigación SMILe[1] de la Universidad de

[1] *Soft Management of Internet and Learning*

Castilla-La Mancha, se han desarrollado diversas investigaciones que abordan en alguna medida el problema de recuperar información de la Web y que dieron origen a modelos y aplicaciones como el FIS-CRM[2] [9], que utiliza la sinonimia para realizar la recuperación de información aplicando técnicas como lógica borrosa y ontologías temáticas de términos. Se desarrolla también GUMSe[3] que está basado en agentes o BuDI, que es una plataforma de Metabúsqueda para la Búsqueda Difusa de Información, entre otras varias aplicaciones desarrolladas y que en algunos casos complementan unas a otras para mejorar los resultados en la recuperación de información.

2 Recuperación de información en la Web utilizando imágenes

Cuando se recupera información en la web, la búsqueda puede ser tan amplia (o corta) como aproximados se deseen los resultados; lo que puede interpretarse como una mayor calidad (Para este caso se considera información de calidad a aquella que ofrece mayor satisfacción, en los resultados, al usuario). Cuando se realizan búsquedas utilizando imágenes se encuentran dos formas específicamente: (1) utilizando los metadatos y (2) buscando la información contenida en ella. Buscar la información contenida en una imagen utilizando procesos de tratamiento de imágenes se vuelve una tarea compleja cuando se requiere obtener información cognitiva relevante y suficiente para usarla en la recuperación de información y que ofrezcan resultados de calidad.

La utilización de imágenes en aplicaciones médicas son muy frecuentes en la revisión del estado del arte, son aplicaciones que apuestan fuertemente por el procesamiento de imágenes para obtener información; de la qué dependen directamente los resultados, por ejemplo Allampalli y colaboradores [1], evalúan la eficiencia de la recuperación de imágenes cuando están indexadas a través de una relación semántica y mediante una combinación de un lenguaje de ontologías web utilizando las características de bajo nivel de la imagen. Para ello, utilizan un formato MPEG-7 e imágenes en color y obtienen la información de las imágenes empleando técnicas de tratamiento de imágenes que extraen las características con las que se busca relacionar los conceptos que se están utilizando para buscar en la web.

Otras aplicaciones procesan imágenes para obtener información del contenido de una imagen, otras recuperan imágenes contenidas en diferentes puntos físicos y utilizan un sistema distribuido que permite tener acceso a ellas. La característica principal en este último tipo de aplicación es que la información contenida en las imágenes fue previamente analizada por un experto y calificada como "válida", la imagen, para esa aplicación. Esta característica reduce la complejidad porque se cuenta, primero con información en puntos específicos y segundo, con información estructurada y válida en su totalidad, ambas situaciones faciliten la recuperación de información.

Sánchez y González [10] diseñan e implementan un sistema web que soporta diagnóstico médico que está alimentado por una base de datos que contiene imágenes previamente clasificadas y analizadas por personal cualificado en el área que proporciona resultados y que finalmente terminan en un diagnostico arrojado por el sistema. Sistemas como este, ofrecen muy buenos resultados pero es importante señalar que contar con una base de datos organizados y previamente clasificados significa una gran ventaja para el sistema. Existen otros sistemas desarrollados que de igual forma utilizan bases de datos que contienen imágenes y que sirven para diagnosticar, como el realizado por Koremblum et al.[5].

2.1 Recuperación de información con técnicas de lógica borrosa y de procesamiento de imágenes

Hoy en día la lógica borrosa se encuentra inmersa de forma palpable en el lenguaje natural, ya que permite representar la subjetividad de este. Está presente en la tecnología que nos rodea y que usamos continuamente, aún cuando no se tenga conciencia de ello. Se aplica en muchos y diferentes enfoques, uno de ellos es en la búsqueda y recuperación de imágenes en la Web, y como objetivo principal se mencionan algunas investigaciones relevantes por sus resultados para tratar de ubicar hasta qué punto la lógica borrosa puede ayudar en la solución del problema presentado.

Considerando lo ya establecido por Zadeh [12] se emplea la teoría de la lógica borrosa para proporcionar un marco matemático que permita modelar la incertidumbre de los procesos cognitivos humanos de forma que pueda ser tratable por un computador. De los documentos revisados sobre la recuperación de información utilizando imágenes a través de lógica borrosa se comentan algunos que muestran resultados eficientes.

Javidi y su grupo de trabajo [3] realizan una investigación para recuperar imágenes utilizando la retroalimentación de relevancia borrosa. Utilizan imágenes convencionales que identifican como relevantes o irrelevantes, situación que es compleja cuando se trata de imágenes con gran contenido semántico. Las imágenes se representan con características agrupadas de bajo nivel. Utilizan histogramas de color y la desviación estándar de los componentes de un árbol de color en formato **RGB** *(Red, Green, Blue)*, además de etiquetado borroso para la retroalimentación y las evaluaciones borrosas, esto con el fin de identificar la similitud visual.

Las medidas se normalizan y se combinan para formar la medida de similitud global entre imágenes. Construyen un

[2] *Fuzzy Interrelations and Synonymy based Concept Representation Model*

[3] GUM *Search*

repositorio de transacción borrosa que es el que contiene las etiquetas que han sido obtenidas de la relevancia del procedimiento de retroalimentación. Son cinco las características almacenadas. La similitud semántica está basada en el repositorio antes mencionado y la similitud entre la imagen y la consulta de base de datos de cada imagen se calcula utilizando *Support Vector Machine* (SVM) [11] - que se basa en la similitud visual y de transacción y en la similitud semántica.

Las técnicas de retroalimentación (*feedback*) han sido muy utilizadas para recuperar imágenes basándose en su contenido (*CBIR*) ya que permiten etiquetar las imágenes como relevantes e irrelevantes, lo que entre otras cosas, permite refinar los resultados de recuperación aplicando aprendizaje a corto y largo plazo. Como en la investigación que plantean Barret y su grupo de trabajo [2] donde utilizan una técnica de aprendizaje a corto plazo partiendo de un conjunto de imágenes que se obtienen de la consulta del usuario. De estas imágenes se obtienen sus características almacenadas en etiquetas definidas y utilizadas en cada iteración. Utilizan un enfoque de aprendizaje combinado borroso y para cada iteración el sistema regresa *n* imágenes basándose en la similitud almacenada de la imagen; esto ocurre entre una imagen tomada de forma arbitraria y una imagen previamente almacenada.

La técnica de aprendizaje que aplica Barret es una técnica novedosa de agrupación semántica para aprender de forma adaptativa y actualizar los conceptos semánticos en cada sesión de consulta. Implementa un algoritmo de predicción que también se aplica para encontrar imágenes semánticamente relacionadas con la consulta basada en las agrupaciones semánticas generadas en el aprendizaje a largo plazo.

Continuamente cuando se trabaja con *CBIR* se utilizan el color, la textura, etiquetas objeto, entre otras. Jung [4] involucra la relación espacial a través de un método que modela la imprecisión y la vaguedad de los objetos en una imagen. Utiliza lógica borrosa para representar cada una de las imágenes en la base de datos y una estructura de grafos **ARG** (*Atribute Relational Graph*) donde una imagen está representada por un nodo con varios atributos. El conjunto de nodos está conectado por bordes que representan la relación entre ellos y definen una función que determina la relación, -baja, media o alta- entre los atributos etiquetados.

Otra investigación interesante es la de Lin [6] que evalúa imágenes de vídeo para identificar contenidos afectivos. Para ello realiza una evaluación de la imagen y busca identificar el contenido afectivo que exista en ella. Utiliza valores de evaluación del contenido utilizando un modelo borroso estableciendo etiquetas que corresponden a los tipos de emociones que están almacenadas en un vector.

Medasani y Krishnapuram [7] realizan recuperación de imágenes basándose en consultas lingüísticas, -tópico que no ha sido muy investigado- y presentan un enfoque borroso-conectivo para manejar consultas lingüísticas complejas compuestas por múltiples atributos. Las consultas lingüísticas se representan utilizando variables lingüísticas borrosas y valores lingüísticos borrosos. Generan relaciones por categorías utilizando un algoritmo de descomposición de *Gauss* y otras técnicas ya existentes y muy utilizadas. Realizan conexiones borrosas para representar los valores de los miembros que representan los grados de satisfacción de algunos de los atributos de la consulta, y utilizan coberturas lingüísticas para clasificar los atributos de la consulta. Representan cada atributo como una consulta compleja a través de una función de pertenencia. El grado en que una imagen satisface el atributo se da por el valor de asociación del vector que contiene las características correspondientes a la imagen en la función de pertenencia para el atributo. Utilizan conectivas borrosas para combinar los grados de satisfacción de los atributos en una consulta compleja para obtener un nivel de satisfacción global para poder clasificar las imágenes para su recuperación.

3 Modelo propuesto basado en texto e imágenes de un documento

El texto y las imágenes contenidos en un documento no necesariamente tienen una relación establecida que permita identificar que una imagen corresponda estrictamente a un determinado texto, por tal motivo es necesario establecer procedimientos que permitan hacer esta relación real, de forma que se pueda vincular conceptualmente el texto, dado un previo análisis de texto, con la o las imágenes, dado otro análisis previo de las imágenes. Establecer esta relación permitirá mejorar la búsqueda y recuperación de información en la web y proporcionar una calidad mayor como resultado a la consulta de un usuario.

El modelo inicia con la recuperación de documentos utilizando la términos del usuario, esto se hace a través de un metabuscador que se esta desarrollando y que entre otros, utiliza *Google* como motor de búsqueda porque ofrece resultados adecuados para la solución del problema según los resultados de la comparativa realizada por [8]. Los procedimientos planteados después se puede separar en tres etapas: 1) el análisis textual, 2) el análisis de la imagen y 3) las relaciones conceptuales, como se puede ver en el esquema de la figura 1.

La etapa uno de tres, como se muestra en la figura 2, realiza, con los documentos localizados, el análisis textual que consiste en el procesamiento lingüístico empleando técnicas de procesamiento de lenguaje natural, como la extracción de términos y su representación en vectores. También se identifican los términos relevantes utilizando medidas ponderadas. Este procedimiento sirve para localizar los términos que más aparecen en el texto justo alrededor de una imagen. Cuando se han localizado los términos relevantes del

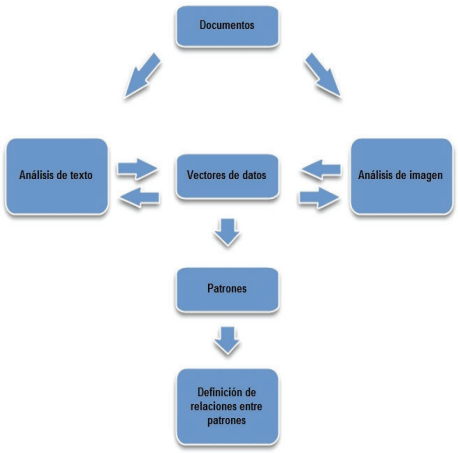


Figura 1: Etapas del modelo de recuperación de información relacionando conceptualmente texto e imágenes.

contexto de la imagen se buscan los términos similares y se establece un patrón de términos para el documento, esto permitirá hacer una comparación de patrones definidos con el que se haya obtenido de la imagen.

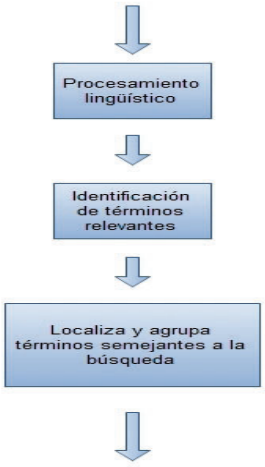


Figura 2: Etapa uno de tres. Procesos en la recuperación de datos de texto.

La etapa dos consiste en el tratamiento que se da a la imagen para extraer datos, como se muestra flujo en la figura 3. Esta etapa inicia con la extracción de las imágenes contenidas en el documento. Los datos de las imágenes se almacenan en un vector. Los datos son de dos tipos: 1) los metadatos correspondientes a la imagen y 2) los datos contenidos en la imagen. Los metadatos, como es conocido, existen con la imagen, pero los datos contenidos en la imagen deben ser extraídos utilizando técnicas de procesamiento de imágenes. Para esto se inicia estableciendo un tamaño constante para las imágenes que se analizan, cambiándolas si es necesario. Se puede aplicar un filtro para mejorar la imagen para después segmentarla y localizar los contornos que existan. También se identifican los colores que correspondan a cada área segmentada y toda esta información se almacena en los vectores, definiendo a su vez un patrón de color y de forma.

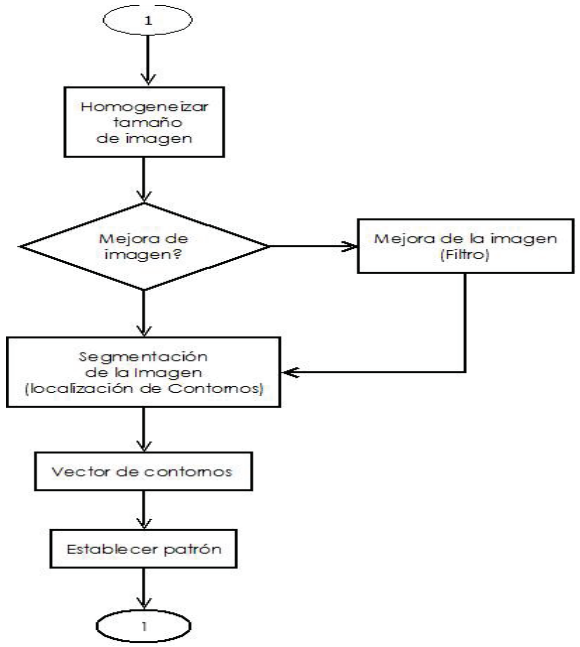


Figura 3: Etapa dos. Flujo del proceso de recuperación de información de una imagen.

La etapa tres consiste en definir la relación conceptual utilizando la información de los vectores. Se determina con la aplicación de lógica borrosa para determinar el grado de correspondencia entre patrones. Este grado de pertenencia incluye o excluye los documentos que se presentan en los resultados al usuario.

3.1 Ejemplo del problema a solucionar

A través de las imágenes que se muestran en la figura 4 se pretende explicar el problema para el que se ha presentado este modelo de solución. La imagen esta formada por tres grupos de imágenes indicadas por el inciso A, B y C. Las imágenes del inciso A fueron recuperadas utilizando la siguiente consulta: "Fresas con crema" para una búsqueda en México, las imágenes del inciso B se recuperaron utilizando la consulta: "fresas con nata" para una búsqueda en España y la consulta: "Frutillas con crema" para una búsqueda en Argentina muestra como resultado las imágenes del inciso C. Dada la variedad diatópica del idioma

Figura 4: Recuperación de imágenes para tres consultas con entradas diferentes A) "Fresas con crema", B) "Fresas con nata", C) "Frutillas con crema".

México-Expaña-Argentina, cada una de las consultas realizadas buscan lo mismo conceptualmente, aún cuando existan términos utilizados en cada una de ellas que son diferentes y determinen los resultados de la búsqueda.

Cuando se analizan estas imágenes se puede "ver" que existe una gran similitud en contenido. En cada una de ellas se identifican las mismas cosas y dominan las imágenes los mismos colores. Lo que, si no se conociera que se han hecho con términos de consulta diferentes, haría pensar que todas las imágenes son resultado de una misma consulta. Pero aún cuando los resultados tienen algunas cosas en común, no son los mismos, lo que sugiere que se tienen tres grupos de resultados similares que deberían estar en un solo resultado para cualquiera de las tres consultas presentadas.

Con base en este ejemplo, se puede explicar que el modelo busca recuperar aquellos términos similares en las tres consultas, con los términos de entrada y los que se recuperen por similitud, además de localizar las imágenes que correspondan al contexto y que en caso contrario sean descartadas al presentar los resultados.

Con este modelo se podrán excluir de los resultados a aquellos documentos que no contengan imágenes relacionadas al contexto y que la mayoría de las veces muestran resultados ajenos a la búsqueda planteada.

4 Conclusiones

En la revisión del conocimiento se puede identificar que en la mayoría de las investigaciones, las imágenes son tratadas de forma separada al texto, y cuando se trata de recuperarlas se hace a través de sus metadatos, específicamente utilizando las etiquetas con las que han sido almacenadas previamente. Bajo este criterio se recuperan imágenes que pueden o no tener alguna relación con el concepto de la búsqueda.

Cuando se utiliza el procesamiento de imágenes, ademas de ser en aplicaciones específicas, tiene un costo muy alto en recursos computacionales, característica que no favorece su total uso en las búsquedas en la Web dado el tiempo requerido que ello implica. Y cuando se utiliza significa una limitación en el tiempo de respuesta.

El modelo propuesto realiza un procesamiento limitado a localizar formas y definir un patrón para poder establecer una relación contextual y conceptual entre los términos de búsqueda iniciales al proceso, el texto alrededor de una imagen y la imagen. Esto permitirá disminuir el tiempo de respuesta al minimizar los tiempos de procesamiento de imágenes.

Agradecimientos

Investigación financiada parcialmente por el proyecto TIN2010-20395 FIDELIO, MEC-FEDER, y por el Programa de Mejoramiento al Profesorado (ProMep) para la educación en México en la Universidad Autónoma del Carmen.

Referencias

[1] G. Allampalli-Nagaraj and I. Bichindaritz. Automatic semantic indexing of medical images using a web ontology language for case-based image retrieval. *Engineering Applications of Artificial Intelligence.*, 3:18–25, 2009.

[2] S. Barrett, Ran Chang, and Xiaojun Qi. A fuzzy combined learning approach to content-based image retrieval. In *Multimedia and Expo, 2009. ICME 2009. IEEE International*, 2009.

[3] M. Javidi, B.S. Aski, H. Homaei, and H.R. Pourreza. A new approach for interactive image retrieval based on fuzzy feedback and support vector machine. *Computational Intelligence for Modelling Control and Automation*, 10(12):1205–1210, 2008.

[4] Sung-Hwan Jung. Content-based image retrieval using fuzzy multiple attribute relational graph. *Industrial Electronics*, 3:1508–1513, 2001.

[5] D. Korenblum, D. Rubin, S. Napel, C. Rodriguez, and C. Beaulieu. Managing biomedical image metadata for search and retrieval of similar images. *Journal of Digital Imaging*, 24(4):739–748, 2011.

[6] X. Lin. Affective content-based film clips retrieval algorithm using improved fuzzy comprehensive evaluation. *3rd International Symposium on Intelligent Information Technology Application*, 2:449–452, 2009.

[7] S. Medasani and R. Krishnapuram. A fuzzy approach to complex linguistic query based image retrieval. *Fuzzy Information Processing Society*, pages 590–594, 1999.

[8] José A. Olivas. *Búsqueda eficaz de información en la Web*. Editorial de la Universidad Nacional de la Plata (Edulp), 2011.

[9] F. Romero, M. Ferreira-Satler, I. Alonso, J. Olivas, and D. Contreras. Una aproximación a la representación semántica de documentos basada en medidas de similitud entre conceptos. *14th Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial - CAEPIA 2011.*, 7-11, 2011.

[10] A. Baltasar Sánchez and A. González-Sistal. Design of a web-tool for diagnostic clinical trials handling medical imaging research. *Journal of Digital Imaging*, 24, 2011.

[11] S. Tong and E. Chang. Support vector machine active learning for image retrieval. *ACM Press*, pages 107 – 118, 2001.

[12] L. A. Zadeh. Fuzzy sets*. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

MODELOS DE REPRESENTACIÓN DE IMPRECISIÓN E INCERTIDUMBRE EN FUSIÓN DE ALTO NIVEL

Juan Gómez-Romero[1], Jesús García[2], José M. Molina[2]

[1] *Departamento de Ciencias de la Computación e I. A., CITIC-UGR,* jgomez@decsai.ugr.es

[2] *Grupo de Inteligencia Artificial Aplicada, Univ. Carlos III de Madrid,* {jgherrer@inf, molina@ia}.uc3m.es

Resumen

Las técnicas de fusión de datos e información procedente de redes de sensores necesitan manejar información incierta e imprecisa, puesto que es habitual enfrentarse a problemas en los que el conocimiento disponible es vago o insuficiente y/o los aparatos de medición están sujetos a fallos. Con el reciente auge de la denominada "fusión de alto nivel", que tiene como objetivo reconocer la situación observada e identificar posibles riesgos, este problema se ha acentuado, ya que los formalismos que se utilizan habitualmente para construir un modelo simbólico del escenario, como la lógica de primer orden y las ontologías, no proporcionan soporte para este tipo de conocimiento. En este trabajo repasamos varias propuestas recientes para representación y razonamiento con información incierta e imprecisa en fusión de alto nivel. Nos centramos en dos tipos: (a) las que incorporan estos mecanismos en los propios modelos de representación, como las ontologías probabilísticas y difusas y las redes lógicas de Markov; (b) las que extien-den el proceso de fusión con una capa de gestión de incertidumbre adicional, como las basadas en argumentación probabilística.

Palabras Clave: Ontologías difusas, ontologías probabilísticas, redes lógicas de Markov probabilísticas, argumentación probabilística.

1 INTRODUCCIÓN

En el ámbito de las redes de sensores, se denomina fusión al procedimiento por el cual se obtiene una mejor estimación de la situación observada utilizando los datos procedentes de varios sensores, en lugar de uno solo, junto a información relacionada [20]. Históricamente, el concepto de fusión de información ha estado asociado a aplicaciones basadas en señales de radar, como por ejemplo, la detección y seguimiento de objetivos móviles en defensa, el control de tráfico aéreo y marítimo o la identificación de intrusos, que requieren identificar, segmentar y etiquetar de forma consistente los objetos móviles de la escena (tracking) a partir de varias fuentes de datos distribuidas. En la actualidad existen numerosas áreas que hacen uso de estas técnicas, como por ejemplo la videovigilancia, que realiza seguimiento de individuos con varias cámaras; la imagen médica, que puede beneficiarse de la capacidad de combinar datos de diferentes sensores o de distinta naturaleza; o la gestión de emergencias en catástrofes naturales, que comparte características con las tareas de comando y control militares.

La fusión de información es un proceso inherente al ser humano: el cerebro realiza continuamente el proceso de interpretar los estímulos recogidos por los sentidos de acuerdo al conocimiento disponible en la memoria para entender qué está ocurriendo en el entorno y actuar consecuentemente. Los métodos de fusión de información tienen como objetivo reproducir esta capacidad de forma automática.

Habitualmente, se distingue entre fusión de información de bajo nivel y de alto nivel. La fusión de bajo nivel aplica técnicas numéricas para estimar propiedades simples de los objetos, representadas como vectores de estado, a partir de múltiples fuentes de datos. Estos métodos numéricos resultan insuficientes cuando los objetos interactúan (mediante oclusiones, uniones o separaciones) y se alteran (por deformaciones), o se producen cambios en el escenario (iluminación). En general, la fusión de bajo nivel no se ocupa de descubrir las relaciones existentes entre los objetos y los posibles efectos de sus acciones, pues se centra en los aspectos individuales de los mismos. En cambio, la fusión de alto nivel busca construir un modelo más complejo del escenario a partir de las observaciones de bajo nivel que describa simbólica-mente las relaciones entre los objetos, con el objetivo de comprender la situación, valorar los posibles riesgos y ofrecer conocimiento al usuario para ayudarlo en la toma de decisiones. Esto requiere la construcción de un modelo lógico que extienda a los modelos puramente numéricos y que permita representar el mundo y razonar sobre sus hechos de forma similar a como hacemos los humanos [24]. Así lo refleja el modelo de referencia JDL (Joint Directors of Laboratories), que clasifica los procesos de fusión en varios niveles dentro de estos dos grupos [31]: (1) fusión de bajo nivel:

extracción de características de la señal (nivel 0, o L0) e identificación de objetos (L1); (2) fusión de alto nivel: reconocimiento de situaciones (L2), evaluación de amenazas (L3) y mejora del proceso (L4).

Uno de los problemas fundamentales que se plantea en fusión es el tratamiento de la información incierta y/o imprecisa. Por una parte, es habitual que los datos disponibles no sean completamente fiables, bien porque los sensores pueden proporcionar valores erróneos o bien porque existen circunstancias externas al sistema que afectan a su adquisición y procesamiento, como por ejemplo las condiciones meteorológicas en los radares marítimos. Por otra parte, el conocimiento experto necesario para interpretar una situación normalmente se expresa en términos imprecisos, como cuando se establece en un puerto la norma de que un barco no identificado no puede estar demasiado cerca de un carguero. Las personas somos capaces de gestionar apropiadamente ambos tipos de información y agregarlas de manera eficaz para obtener conclusiones razonables en un tiempo reducido. Los métodos de fusión, por su parte, necesitan formalismos adecuados que permitan representar imprecisión y incertidumbre.

En la literatura existen diversas propuestas para dotar a los métodos de fusión de alto nivel de la capacidad de procesar información incierta e imprecisa. Podemos clasificar estas aproximaciones en dos grupos:

- Extensiones de modelos simbólicos que ofrecen soporte para la imprecisión y la incertidumbre. Entre otros, destacan las ontologías difusas, las ontologías probabilísticas y las redes lógicas de Markov.
- Extensiones del proceso de fusión para dotarlo de una capa adicional que permita la gestión de imprecisión e incertidumbre, como por ejemplo la argumentación probabilística.

En este artículo estudiaremos las nociones de imprecisión e incertidumbre en el contexto de la fusión de información y revisaremos varias propuestas de modelos para su gestión en fusión de alto nivel. Además, discutiremos las ventajas y desventajas de ambos tipos de aproximaciones en diferentes ámbitos de aplicación. El objetivo fundamental es proporcionar una visión general de esta área y presentar diversas conclusiones obtenidas por nuestro grupo de investigación.

La siguiente sección trata los conceptos de imprecisión e incertidumbre y su importancia en el ámbito de la fusión. La sección 3 se centra en las propuestas que extienden directamente a los modelos simbólicos, mientras que la sección 4 explica cómo se puede implementar una capa de abstracción superior en el proceso de fusión. Finalmente, en la sección 5 exponemos algunas ideas sobre la evaluación de las distintas aproximaciones. Para terminar, resumimos las conclusiones alcanzadas y anticipamos algunas líneas de trabajo futuro.

2 IMPRECISIÓN E INCERTIDUMBRE EN FUSIÓN DE INFORMACIÓN

La incertidumbre y la imprecisión son dos características relacionadas pero diferentes de la información imperfecta. A continuación resumimos las diferencias fundamentales, que han sido tratadas por numerosos autores [11, 22, 34], y su importancia en fusión.

La incertidumbre se refiere a la falta de seguridad por parte del observador en la veracidad de una afirmación. Por ejemplo, la posición de un objeto proporcionada por un radar es un valor preciso de latitud y longitud, pero puede existir cierta duda sobre su exactitud, debido a la imprecisión del sensor, a su tasa de fallo o a otras circunstancias. En cualquier caso, se podría comparar la posición real del objeto y determinar si la estimación inicial era cierta o no. Así, en teoría de la incertidumbre, una aserción no es verdadera o falsa, sino que existen ciertas expectativas de que lo sea. Generalmente, esta incertidumbre se debe a la falta de un conocimiento absoluto sobre los hechos y las leyes que rigen el mundo observado. Dubois distingue tres tipos de incertidumbre según su origen [12]: aleatoria, cuando resulta de un proceso estocástico, como por ejemplo lanzar un dado; epistémica, cuando se debe a ignorancia; e inconsistente, cuando representa un conflicto entre varias fuentes. Existen diversos marcos teóricos para modelar esta incertidumbre en forma de probabilidad, posibilidad o creencia [28], siendo de los más destacados en fusión de información las redes bayesianas [23], la teoría de Dempster-Shafer [27] y la argumentación probabilística [14].

Una afirmación imprecisa es aquella que no es completamente verdadera o falsa, sino que su veracidad puede medirse con un grado. Por ejemplo, podemos decir que un objeto es grande. De este modo, “gran-de” es un predicado impreciso cuyo grado de verdad refleja el tamaño del objeto. Si el objeto supera cierto umbral máximo preestablecido, el grado de la afirmación será 1, mientras que si es inferior a un umbral mínimo, será 0. En cualquier situación intermedia, el grado de cumplimiento vendrá dado por una función dependiente del tamaño. Este tipo de enunciados son muy frecuentes en lenguaje natural, especialmente cuando se trata de enunciar percepciones subjetivas y de tipo lingüístico. El principal formalismo para representación de incertidumbre es la Lógica Difusa [34, 17]. En el ámbito de la fusión de información, la Lógica Difusa se ha utilizado en numerosas aplicaciones: agregación de información, toma de decisiones, inferencia y razonamiento, etc.

3 MODELOS SIMBÓLICOS CON IMPRECISIÓN E INCERTIDUMBRE

En fusión de alto nivel se han utilizado diferentes formalismos simbólicos para la representación del escenario

observado y la información adicional disponible [32]. Entre ellos, destacan las ontologías [18, 19]. Una ontología es una especificación formal de los conceptos, relaciones, instancias y restricciones de un dominio utilizando un lenguaje basado en una Lógica de Descripciones (Description Logic, DL) [1]. Este tipo de representaciones se han consolidado en la actualidad como el formalismo de representación en Web Semántica, y son la base del estándar para ontologías web OWL [33]. La principal ventaja de las DLs es que generan modelos decidibles (esto es, la inferencia siempre termina en tiempo finito), mientras que los modelos basados en Lógica de Primer Orden son más expresivos, pero también semidecidibles (no se garantiza que la inferencia termine en tiempo finito para sentencias que no son ciertas).

Las ontologías no permiten gestionar directamente información imprecisa o incierta, por lo que se han propuesto diferentes variaciones y extensiones que introducen constructores adecuados para representar este tipo de conocimiento [21]. Las diferentes aproximaciones posibles han sido estudiadas por el grupo de trabajo en incertidumbre en Web Semántica auspiciado por la organización de estandarización W3C[1] . En esta sección proponemos dos con interés para la fusión de alto nivel, como son las ontologías probabilísticas y las ontologías difusas. También incluimos las redes lógicas de Markov, que si bien no se pueden clasificar como formalismos basados en ontologías, comparten ciertas características con éstas por resultar de la combinación de la Lógica de Primer Orden, las redes semánticas y los modelos probabilísticos.

3.1. ONTOLOGÍAS PROBABILÍSTICAS

Una de las propuestas más relevantes para representación de incertidumbre con ontologías es PR-OWL 2, una extensión del lenguaje OWL basada en redes bayesianas [9]. PR-OWL 2 permite asociar un grado de certeza a los axiomas de instancias; en concreto, a los axiomas de pertenencia a clase –que declaran que una instancia es miembro de una clase– y de relación –que establecen que dos instancias están relacionadas. En la actualidad no existe ningún razonador que proporcione soporte para realizar inferencia con PR-OWL 2, pero es posible transformar la ontología probabilística resultante en una red probabilística y pro-cesarla con la herramienta UnBBayes[2]. PR-OWL 2 ha sido utilizado en problemas de fusión de alto nivel en el dominio marítimo con interesantes resultados [8].

Otra aproximación es la realizada en [16], donde se propone PRONTO, un razonador para una extensión probabilística de la DL *SHIQ*, que tiene una expresividad similar a OWL 2. Una propiedad interesante de la lógica de PRONTO es que, a diferencia de las redes bayesianas, permite describir conocimiento impreciso de forma declarativa sin necesidad de especificar distribuciones de probabilidad. Aunque PRONTO incluye diversas optimizaciones para mejorar la eficiencia y la escalabilidad del razonador, su utilidad en problemas reales aún no ha sido completamente contrastada.

3.2. ONTOLOGÍAS DIFUSAS

Las ontologías difusas combinan las DLs con la Lógica Difusa de forma que los conceptos denotan con-juntos difusos de instancias y las propiedades denotan relaciones binarias difusas. De esta manera, una instancia pertenece a un concepto en un grado en [0, 1] y un par de instancias pertenecen a una relación con un grado en [0, 1]. Los axiomas también se extienden al caso difuso; por ejemplo, dados dos conceptos difusos, un axioma de subsunción difuso establece una relación de inclusión difusa entre ambos. En la literatura se han propuesto diferentes DLs difusas, cada una incluyendo diferentes constructores. Entre ellos, destacamos la inclusión general de conceptos, los conjuntos aproximados, los tipos de datos o los operadores de agregación (ver por ejemplo [5, 7]). Estos nuevos constructores suelen expresarse con una nueva sintaxis, pero también existe la posibilidad de utilizar un lenguaje de ontología para crear un meta-modelo de representación [6]. En la mayoría de los casos, la interpretación de la ontología difusa depende de la familia de operadores difusos considerados (Zadeh, Gödel, etc.), lo que da lugar a diferentes representaciones con diferentes propiedades [2].

Las DLs difusas requieren nuevos algoritmos de razonamiento para realizar inferencias teniendo en cuen-ta los nuevos constructores. Existen dos aproximaciones básicas a este problema: (1) diseñar un nuevo algoritmo de razonamiento; (2) desarrollar un proceso que permita reducir la ontología difusa a una ontología no difusa que conserve la misma semántica y utilizar un motor de inferencia existente. fuzzyDL es una propuesta basada en la primera estrategia [4], mientras que DeLorean es el principal ejemplo de la segunda [3]. fuzzyDL tiene la ventaja de que permite operar directamente con la ontología difusa y aplicar optimizaciones directamente relacionadas con la representación original. Sin embargo, el esfuerzo necesario para su desarrollo es mucho mayor, lo que explica su reducido uso fuera del mundo académico. Por su parte, DeLorean permite explotar los beneficios de los razonadores y los lenguajes estándar, pero introduce cierta sobrecarga al realizar el proceso de transformación entre la representación difusa y la no difusa. En ambos casos, bajo ciertas condiciones que se dan con cierta frecuencia, estas desventajas pueden mitigarse. Por lo tanto, se puede esperar que próximamente sean utilizados más intensamente en aplicaciones de fusión de alto nivel.

[1] http://www.w3.org/2005/Incubator/urw3/

[2] http://unbbayes.sourceforge.net/

3.3. REDES LÓGICAS DE MARKOV

Las redes lógicas de Markov (Markov logic networks, MLNs), son una extensión de la lógica de primer orden con razonamiento probabilístico [25]. En lugar de asumir que una base de conocimiento (formada por un conjunto de fórmulas) es cierta o no bajo una determinada interpretación, se asocia un valor de probabilidad a los dominios (o 'mundos') que no satisfacen todas las fórmulas. Para calcular este valor, se asocia a cada fórmula un peso que denota cómo es de relevante para la satisfacción de la base de conocimiento. Este peso tiene un impacto directo en la asignación de probabilidades a los mundos: si un mundo satisface una fórmula con un peso alto, será más probable que otro que no.

Formalmente, una MLN L junto a un conjunto finito de constantes C define una red o campo aleatorio de Markov nivel. En general, no resulta fácil decidir qué aproximación es más apropiada en cada problema, aunque existen algunas propuestas para unificar los criterios de evaluación. En la mayor parte de las ocasiones, esta elección dependerá de los sistemas previos y la experiencia acumulada. De cualquier modo, es necesario continuar investigando en estas líneas, de manera que se pueda disponer de un catálogo de soluciones como ocurre en muchos problemas de fusión de bajo nivel. Un aspecto fundamental que se debe someter a estudio es la complejidad computacional de las propuestas. Los problemas de fusión suelen requerir procesamiento en tiempo real y los modelos simbólicos presentados en este artículo añaden un procesamiento adicional significativo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Junta de Andalucía (P11-TIC-7460), la Comunidad de Madrid (S2009/TIC-1485) y el Ministerio de Economía y Competitividad de España (TEC2012-37832-C02-01, TEC2011-28626-C02-02, TIN2012-30939).

Referencias

[1] F. Baader, I. Horrocks, U. Sattler: Description Logics. En: *Handbook of Knowledge Representation*, Elsevier, 2008.

[2] F. Bobillo, M. Delgado, J. Gómez-Romero, U. Straccia: Joining Gödel and Zadeh Fuzzy Logics in Fuzzy Description Logics. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems* 20 (4), pp. 475-508, 2012.

[3] F. Bobillo, M. Delgado, J. Gómez-Romero: DeLorean: A Reasoner for Fuzzy OWL 2. *Expert Systems with Applications* 39 (1), pp. 258-272, 2012.

[4] F. Bobillo, U. Straccia: fuzzyDL: An Expressive Fuzzy Description Logic Reasoner. En: *Proc. of the 17th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2008)*, pp. 923-930, Hong Kong (China), 2008.

[5] F. Bobillo, U. Straccia: Fuzzy Description Logics with General T-norms and Datatypes. *Fuzzy Sets and Systems* 160 (23), pp. 3382-3402, 2009.

[6] F. Bobillo, U. Straccia: Fuzzy ontology representation using OWL 2. *International Journal of Approximate Reasoning* 52 (7), pp. 1073-1094, 2011.

[7] F. Bobillo, U. Straccia: Aggregation Operators for Fuzzy Ontologies. *Applied Soft Computing* 13 (9), pp. 3816-3830, 2013.

[8] R.N. Carvalho, R. Haberlin, P.C.G. Costa, K.B. Laskey, K.C. Chang: Modeling a probabilistic ontology for maritime domain awareness. En: *Proc. of the 14th Int. Conf. on Information Fusion*, Chicago (USA), 2011.

[9] R.N. Carvalho, K.B. Laskey, P.C.G. Costa: PR-OWL 2.0 – Bridging the gap to OWL semantics. En: *Uncertainty Reasoning for the Semantic Web II*, Springer, pp. 1-18, 2013.

[10] P.C.G. Costa, K.B. Laskey, E. Blasch, A.L. Jousselme: Towards unbiased evaluation of uncertainty reasoning: the URREF ontology. En: *Proc. of the 15th Int. Conf. on Information Fusion*, Singapore, pp. 2301-2308, 2012.

[11] D. Dubois, H. Prade: Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: a clarification. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 32 (1-4), pp. 35–66, 2001.

[12] D. Dubois. Uncertainty theories: A unified view. En: *Summer course on Soft Computing and Statistics*, Lisboa (Portugal), 2009.

[13] J. García, J. Gómez-Romero, M.A. Patricio, J.M. Molina, G. Rogova: On the representation and exploitation of context knowledge in a harbor surveillance scenario. En: *Proc. of the 14th Int. Conf. on Information Fusion*, Chicago (USA), 2011.

[14] R. Haenni, J. Kohlas, N. Lehmann: Probabilistic Argumentation Systems. En: *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems* Vol. 5. Kluwer, 2001.

[15] J. Josephson: On the logical form of abduction. En: *AAAI Spring Symposium Series: Automated Abduction*, pp. 140-144, Stanford (USA), 1990.

[16] P. Klinov, B. Parsia: Pronto: a probabilistic Description Logic reasoner. En: *Uncertainty Reasoning for the Semantic Web II*, Springer, pp. 59-79, 2013.

[17] G.J. Klir, B. Yuan: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Addison Wesley, 1995.

[18] M. Kokar, C. Matheus, K. Baclawski: Ontology-based situation awareness. *Information Fusion* 10, pp. 83-98, 2009.

[19] E.G. Little, G. Rogova: Designing ontologies for higher level fusion. *Information Fusion* 10, pp. 70-82, 2009.

[20] J. Llinas, D.L. Hall: Multisensor data fusion. En: *Handbook of multisensor data fusion*. CRC Press, pp. 1-14, 2009.

[21] T. Lukasiewicz, U. Straccia: Managing uncertainty and vagueness in Description Logics for the Semantic Web. *Journal of Web Semantics* 6 (4), pp. 291-308, 2008.

[22] A. Motro, P. Smets: *Uncertainty management in information systems. From Needs to Solutions*. Springer, 1997.

[23] J. Pearl: *Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference*. Morgan Kaufmann, 1988.

[24] A. Pinz, H. Bischof, W. Kropatsch, G. Schweighofer, Y. Haxhimusa, A. Opelt, A. Ion: Representations for cognitive vision. *Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis* 7 (2), pp. 35–61, 2008.

[25] M. Richardson, P. Domingos: Markov logic netwoks. *Machine Learning* 62, pp. 107-136, 2006.

[26] G. Rogova, P. Scott, C. Lollett, R. Mudiyanur: Reasoning about situations in the early post-disaster response environment. En: *Proc. of the 9th Int. Conf. on Information Fusion*, Florencia (Italia), 2006.

[27] G. Shafer: *The Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.

[28] F.K.J. Sheridan: A survey of techniques for inference under uncertainty. *Artificial Intelligence Review* 5 (1-2), pp. 89–119, 1991.

[29] P. Smets, R. Kennes: The transferable belief model. Artificial Intelligence 66, pp. 191-243, 1994.

[30] L. Snidaro, I. Visentini, K. Bryan: Fusing uncertain knowledge and evidence for maritime situational awareness via Markov Logic Networks. *Information Fusion* (En Prensa), 2013.

[31] A.N. Steinberg, C.L. Bowman: Revisions to the JDL data fusion model. En: *Handbook of Multisensor Data Fusion*, CRC Press, pp. 45–68, 2009.

[32] A.N. Steinberg, G. Rogova: Situation and context in data fusion and natural language understanding. En: *Proc. of the 11th Int. Conf. on Information Fusion*, Colonia (Alemania), 2008.

[33] W3C OWL Working Group: *OWL 2 Web Ontology Language Document Overview*, 2009. Online: http://www.w3.org/TR/owl2-overview/. Acceso: octubre 2013.

[34] L.A. Zadeh. Fuzzy sets: *Information and Control* 8 (3), pp. 338–353, 1965.

IN-VEHICLE SENSOR FUSION METHODOLOGY FOR PEDESTRIAN DETECTION WITH DANGER ESTIMATION

David Martín, Fernando García, Arturo de la Escalera and José María Armingol

Intelligent System Lab, University Carlos III de Madrid, Leganés, Spain
{dmgomez, fegarcia, escalera, armingol}@ing.uc3m.es

Abstract

Present work discusses a sensor fusion methodology to be included in a vehicle equipped with devices that provide environment data. The collection of data from in-vehicle devices allows the proposed method to fuse data to obtain a safe response. This approach, based on sensor fusion, focuses on pedestrian detection, and later classification according to danger estimation levels. So, the proposed work depicts pedestrian detection based on the use of in-vehicle sensors and context information. The work takes advantage of the use of Joint Probabilities Data Association (JPDA) and context information to enhance the pedestrian detection. Context information, such as safety regulation, velocity and GPS data, improves the fusion process in whole levels from low level to high level by the use of a priori knowledge of the application. Thus, this multilevel fusion solution is provided for road safety application. Moreover, context is used in the fusion levels, which improves the perception of the road environment and the relations among detections. By the fusion of information sources, accurate and trustable detection is provided and complete situation assessment obtained, with estimation of the danger that involves any detection.

Keywords: Context information, sensor fusion, ADAS and pedestrian detection

1 INTRODUCTION

Nowadays data fusion is becoming one of the main issues for Advance Driver Assistant Systems (ADAS) to overcome the limitations of the available sensors and fulfill their requirements, such as, road safety applications that requires the most reliable data. The recent advances in computer vision, laser scanner, GPS positioning or road map allow to create sensor fusion applications to be used in ADAS, which help to detect and warn the driver in advance in case of hazardous situations. So, one of the topics in the context of ADAS researches is the detection of pedestrians where, main works focus in the signal processing level and does not pay attention to the interactions among detections. But in real driving situations it is important to deal with complex vehicle environment problems that arise in the data association process, e.g: pedestrians merging into groups, as well as to take into account the interactions among them. It is in this field where this work tries to provide a step forward, by first providing fused pedestrian detection and later by studying the interactions of the pedestrians and providing efficient data association for the challenging situations. The approach tries to use the modern tools of information fusion to provide multilevel pedestrian detection based on multiple information sources.

2 STATE OF THE ART

In recent years, sensor fusion approaches are increasing in Intelligent Transport Systems (ITS) due to the necessity of reliable obstacle detection. Among safety applications, the pedestrian detection is one of the most important since it deals with the most vulnerable users of urban roads, where computer vision and laser scanner are the two main sensors used for pedestrian detection. CCD and CMOS cameras offer a wide amount of unstructured information, which is useful to provide classification, but its inferences lack of reliability and demands high computational costs. On the other hand, information provided by the laser scanner is reliable, but presents limitations due to sensor device, which is usually limited to one or four scan planes, or the excessive cost of modern devices with more planes. Thus low-level combination of both devices aids to overcome limitations inherent to each one.

As mentioned before, in ITS most of the works focus in the low or medium level detection process. In [14] and [13] authors present centralized works, combining medium-level features from different low-level sensors (laser scanner and digital cameras), and different approaches are presented for final classification: Naïve Bayes, Gaussian Mixture Model Classifiers, Neural Networks, Fuzzy Logic Decision Algorithm, and Support Vector Machines (SVM).

Figure 1: IVVI platform for ADAS test used in the work.

High-level schemes are frequent in ITS, such as in [12] that performs Adaboost based on visual pedestrian detection and Gaussian Mixture Model (GMM) for laser scanner classification, a Bayesian method is used to combine detections at high level. In [15] multidimensional features for laser scanner are used and the Histograms of Oriented Gradients (HOG) with SVM for computer vision detection, so high-level fusion is again performed by Bayesian model. In [5] pattern matching approach is used for laser scanner and stereovision with vertical projection of the human silhouette for computer vision detection, in this case the high-level fusion stage is based on a Global Nearest Neighbor (GNN) association algorithm. Other approaches have used the advantages of the different sensors in a different way. So, in [3], authors identify where pedestrians are more vulnerable or difficult to be identified by the driver, in this case after laser scanner, the pedestrian detection is done by the visual HOG features.

Context information is a recent concept in data fusion, which takes advantage of the a priori knowledge of a given application to aid in the data fusion process. So, there are works that already deals with the possibility of using context in vehicle applications: [6] uses context in a Bayesian Network implementation to determine the evolution of a detection probability of each track along time, and [11] applies Bayesian methods for exploiting digital road maps and realistic GMTI sensor modelling.

Focusing in present work, a decentralized scheme is presented, which is based on two independent low-level classifiers (laser scanner and computer vision) and a high-level approach based on a powerful Multiple Target Tracking (MTT) algorithm, that is, Joint Probabilities Data Association (JPDA). This scheme represents a robust configuration, which is able to provide detection even in extreme situations whether one of the two sensors is not available, and to provide reliable detection by fusing on the detections at high level. So, whole levels of the fusion process take advantage of the context information to enhance the fusion process.

3 ARCHITECTURE DESCRIPTION FOR PEDESTRIAN DETECTION

The aim of the architecture for pedestrian detection is to enhance the detection by means of a fusion procedure that uses information from in-vehicle available sensors such as: laser scanner, computer vision camera and a GPS with inertial measurements (Figure 1).

The main factors of the fusion process are the association process that is based on JPDA to face difficult situations, and the context of the road that is used to assist in the fusion process at all levels. So, at levels 0 and 1 the architecture is based on the reliability of the detections and the fusion levels 2 and 3 use context information to determine the threat that a given detection represents. The purpose is to provide the fusion solution taking into account all the available information: online such as pedestrian detections, vehicle velocity or GPS position and offline like digital maps, safety regulation, among others. This way, it is possible to enhance the security of the road users. Figure 2 depicts the general scheme of the architecture, where road context information is included from lower to higher levels.

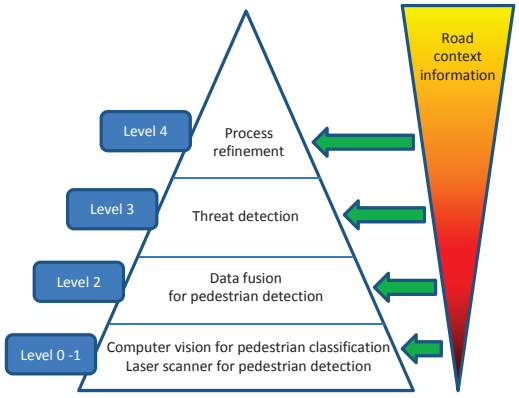


Figure 2: Architecture diagram that represents the information included in each level

This architecture for pedestrian detection improves road safety applications, due to the reduction of the raw data belonging to low-risk or safe pedestrians in urban environments. That is, the detection of pedestrians with risk of collision are warned only to the driver, so the stress of the driver caused by all low-risk or non-risk detections is avoided. This is possible by reporting only the safety threats i.e. pedestrians with high probability of interacting with the vehicle, and the driver can focus in the driving process. The safety threats are estimated according to three aspects: danger estimation according to the distance to the car [5], the risk area estimation of the pedestrians (based on GPS positioning and digital maps) and collision times. The proposed architecture is explained following, which provides connection among all levels and takes advantages of the context information:

- Level 0. Related with data preprocessing, it deals with the alignment of the data and the synchronization. The online information is used to compensate the movement of the vehicle. First, in the acquisition phase of the laser scanner points, and later in the extrapolation of the points to the moment where the images are acquired.
- Level 1. Related with the object assessment, at this point the low level detections given by the laser scanner and the cameras are calculated. In both context information plays an important role, where in the first sensor case, it is used to detect the relevant obstacles that fit the anthropological model of human beings. Later, in the second sensor case, it is used to provide the region of interest to the vision system, again based on anthropometric information.
- Level 2. In this level, final detections are provided according to the association process based on JDPA Filter. So, context information was used to adapt the filter to the specific situation of relevant detection. The important parameters, such as, track creation or deletion policy, varies according to relevant context information, like danger estimation or distance to the vehicle, among others.
- Level 3. The relevant information is used to provide threat detection, thus those pedestrian that presents a risk of collision are reported to the driver. Here, context information is mandatory, whether by offline information (e.g. traffic safety regulation and relevant distances) and online information (vehicle velocity, pedestrian areas in digital maps, time to collision, etcetera).
- Level 4. The process refinement is also connected to the context information, i.e. according to the information of threat provided in level 3, that is the tracking processes and the behavior of the system changes, allowing the system to focus in the relevant detections.

4 DANGER ESTIMATION BASED ON DETECTION ZONES

The detection zones are available according to the sensor ranges. So, the first zone uses only the laser scanner, and second one, is the fusion zone with both subsystems. Moreover, danger estimation takes into account the driving response time as well as the breaking time. So, according to this, three detection zones have been created, first, a green safe zone in which pedestrian detections are safe, due to the speed of the vehicle and the distance to the target are appropriate enough to stop the vehicle avoiding the collision. A second zone is integrated within the limits of the breaking distance and the response distance, which is the distance according to the actual speed of the car, where the driver can perform a maneuver to avoid the pedestrian collision, so it is called, the danger zone. Finally, the closest zone is the danger zone where pedestrian collision is imminent. So, in this zone, the collision is not possible to be avoided and only a pre-collision system can try to mitigate the pedestrian damage. The detection zones are shown in Figure 3.

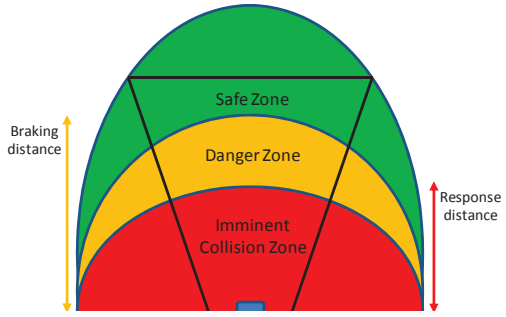


Figure 3: Detection zones with the relevant pedestrian distances.

Following, detailed explanations of the reference distances are explained. Vehicle braking distance and response distance allow to estimate the distances where the vehicle can be stopped or the pedestrian can be avoidable. Response distance is the distance that the vehicle covers meanwhile the driver responses to a visual or auditory stimulus. It is accepted that the response time is up to 0.66 seconds, as showed Johansson and Rumar [8]. To corroborate this measurement we have performed a statistical test that confirms it, so the response time for human beings when driving by means of auditory stimulus is 0.66 seconds. Other authors have proved this approach [9] with very similar results.

Braking distance is the distance that vehicle takes to stop completely. The distance, that vehicles need to break, depends on each vehicle and different external conditions, such as weather, road condition, tires, break efficiency, among others. The approach that has been used in presented work is based on the mathematics of the basic accident reconstructions [4]. So, the worst-case scenario is a loaded vehicle with basic weather conditions, where the difference according to weather conditions can change by changing the road coefficient like asphalt, concrete, snow, etc. In traffic reconstruction, the worst-case scenario means that only one of the vehicle axis has blocked, and the forces associated to the weight of the car are displaced to the front. So different coefficient is applied depending on the distance of the axis to the mass center. The correction applied to the coefficient is denoted by [4].

$$\eta = \frac{b_2}{L - h\mu} \tag{1}$$

Where b_2 is the mass distance to the rear axis, L is the longitude of the car, h the height of the mass center, μ is the friction coefficient. Following, to calculate the mass center several approaches are possible and some authors give mass center height approximation of 0.4. So, d is the breaking distance which is velocity dependant in this way:

$$d = \frac{v^2}{\eta \mu g} \quad (2)$$

Finally, the response time has to be added to this distance value because is the time that the driver needs to start to press the braking pedal:

$$d_{bracking} = v t_{response} + \frac{v^2}{\eta \mu g} \quad (3)$$

5 PEDESTRIAN TRACKING AND DATA ASSOCIATION

The tracking procedure uses the high frequency of the data given by the sensors: laser scanner detection frequency is configured at 19Hz and stereo camera frame rate is 10Hz. Data association and tracking was performed by a Joint Probabilistic Data Association Filter ([1] and [2]). This method is augmented by the contextual information of the vehicle environment that allows the system to focus in those pedestrians that interact with the vehicle.

So, JPDA denotes the association event $\theta_{kj}{}^{m}$ that associates measurement m to track j as:

$$P(\theta \mid Z_k) = \frac{1}{c} p(z_k \mid \theta, X_k) P(\theta \mid X_k) \quad (4)$$

where c is the normalization constant, X_k is the target state vector. Meanwhile, $p(\theta \mid X_k)$ is the probability of the assignment θ conditioned to the sequence of the target state vector. Following, assuming M=2 dimensional Gaussian association likelihood for all the measurements to the target, the joint probability of a single measurement j to the target i is:

$$g_{i,j} = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{|S_{ij}|}} e^{-\frac{d_{i,j}{}^2}{2}} \quad (5)$$

where $d_{i,j}$ is the distance between the prediction and the observation. The Cartesian approach was used, hence $\sqrt{|S_{ij}|} = \sigma_x \sigma_y$ as given per laser scanner obstacle detection test.

The resulting $P(\theta \mid Z_k)$ is:

$$P(\theta \mid Z_k) = P_D{}^{M-n} (1 - P_D)^n P_{FA}{}^{m_k - (1-M)} \prod_{j=1}^{m_k} g_{i,j} \quad (6)$$

where P_D is the detection probability, P_{FA} is the false alarm probability. n is the number of assignments to the clutter, m_k is the number of detections and M is the number of targets.

In present approach, m_k is the number of observed pedestrians for each laser scan time, with the information about the classification of both subsystems. Thus a detection Z_i it is obtained from the sensor defined as [x_i , y_i , c_i , l_i] where (c_i, l_i) are the Boolean values that define the positive or not detection (that is, true or false) by the computer vision approach or laser scanner respectively.

Finally, all possible combinations that are included in the region of the gate (square gate), for a given track, are weighted using the likelihood of the given association calculated using the joint probabilities:

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{P(\theta \mid Z_k)}{C} \left(Z_{i,k} - H_k \hat{X}_{k|k-1} \right) \right] \quad (7)$$

where R_k is the innovation covariance for the Kalman Filter of a given track at a given moment k, $\hat{X}$ is the state estimation of the KF, H is the state transition matrix of the KF, Z is the observation and C is the normalization factor that makes the sum of $P(\theta \mid Z_k)$ for all k in the gate equal to 1.

6 PEDESTRIAN DETECTION WITH DANGER ESTIMATION

This section presents three aspects that have been taken into account for estimating the threat of a given pedestrian track: danger estimation, distance to the road and time to collision. So, initially, the danger estimation according to the distance to the vehicle is analysed. The application was developed taking into account the danger zones (table 1). The first zone represents the part of the environment, according to the velocity of the vehicle where it can be stopped before entering to this area. The second zone is the area of the road where driver can perform avoidance maneuvers. The last one is the area of the road where there is no option to avoid the collision.

The actions to perform in each of the zones are out of the scope of this work. So, a first approximation to a real application should be to trigger a visual image, as for example a bounding box, to highlight the pedestrian in the first one. In danger zone, sound and visual alarm should be necessary to avoid the possible collision. Finally when a pedestrian is detected within imminent collision zone, measures to reduce injuries should be taken.

Table 1: Correspondence between distances and detections zones

	FROM	TO
Safe zone	Infinite	Braking distance
Danger Zone	Braking distance	Response distance
Imminent Collision Zone	Response distance	0 meters

In addition to the three detection zones, a degree of danger that involves any of the detections should be given.

The idea is to provide to upper layer applications a value that gives an estimation of the danger that involves any of the pedestrian detected in the field of view.

Before creating the estimation, several factors were taken into account. The estimation that represents the degree of danger that involves any of the pedestrians was from 0 to 1. To summarize table 2 shows the correspondence:

Table 2: Correspondence between detection zones and danger estimation

	FROM	TO
Safe Zone	0	0.6
Danger Zone	0.6	1
Imminent Collision Zone	1	1

It was also necessary to use exponential approximation because dangers increase with distance in an exponential way, so finally exponential distribution was used as follows:

$$f(r) = \begin{cases} e^{-\lambda(r-d_r)}, \ for \ 80 \le r \le d_r \\ 1 \qquad\quad , \ for \quad d_r < r \le 0 \end{cases} \tag{8}$$

Where r is the distance of the car to the pedestrian and d_r is the reaction distance. Finally the value of λ has to be calculated to assure a value of 0.6 in when the pedestrian is in the breaking distance.

$$e^{-\lambda(d_b - d_r)} = 0.6 \Rightarrow \lambda = \frac{-\ln 0.6}{(d_b - d_r)} \tag{9}$$

Where d_b is the braking distance, and r the response distance.

The distance to the road is the second aspect. So, using digital maps, the distance of a given detection to the road where the vehicle is moving can be calculated. The use of this distance allows to give an estimation of the danger that involves a given detection, based on an accurate location of the pedestrian. For this reason, the accurate pedestrian position is obtained from the laser scanner and the vehicle location by GPS with inertial measurement available in the IVVI 2.0 [10].

The estimation $(est(d))$ of the danger is modeled in a Gaussian manner, using width of the road as standard deviation:

$$est(d) = e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}} \tag{10}$$

where d is the distance to the center of the road and σ is width/2 of the road. By this estimation, pedestrians inside the road have danger estimation bigger than 0.6.

Collision estimation is the last parameter to take into account, that is, the pedestrian collision time that is calculated by means of the velocities of both the vehicle and the pedestrian. According to [7], the collision solution can be obtained as follows: The estimation of the state of the targets, defined by its position (x,y), and velocity vectors (v_x, v_y) is obtained by the Kalman Filter. On the other hand, information from the GPS with inertial system allows estimation of the same kinematic information related to the vehicle. Thus, the diagram shown in Figure 4 can be used to calculate the collision using (11)-(13) based on the aforementioned information.

$$x_c = \frac{(y_2 - y_1) - (x_2 \tan\theta_2 - x_1 \tan\theta_1)}{(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)} \tag{11}$$

$$y_c = \frac{(x_2 - x_1) - (y_2 \cot\theta_2 - y_1 \cot\theta_1)}{(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)} \tag{12}$$

where x_c and y_c are the coordinates of the collision point.

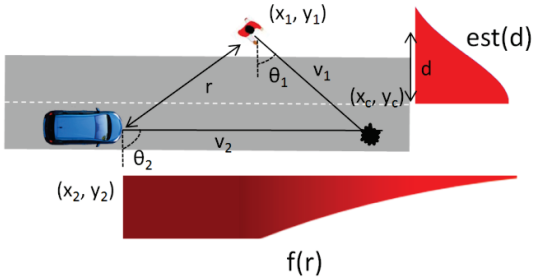


Figure 4: Representation of the trajectories, with the estimation of the danger for road proximity (est(d)) and the danger estimation according to the vehicle velocity (f(r)).

Following, once the collision point has been calculated, the next step is to calculate the time of each of the obstacles to this point according to their respective velocity. If the time coincides, this is considered the time to the collision. But, in order to provide a safety margin, it is established a δ parameter that defines the security margin, as depicted in equation (13). So, the higher the δ parameter, the more conservative is the approach:

$$ttc_d = |TX1 - TX2| < \delta \tag{13}$$

A Gaussian estimation method has been created to determine the danger that involves a given detection, called collision estimation (ce), according to the time distance (*ttc_d*) and using the security margin δ as the standard deviation:

$$ce(d) = \begin{cases} e^{-\frac{ttc_d^2}{2\delta^2}}, \ for \ collision \ \ trajectories \\ 0.4, for \ no \ collision \ \ trajectories \end{cases} \tag{14}$$

Moreover, no-collision trajectories are also taken into account with ce=0.4. This allows the detection of possible danger pedestrians that are not colliding with the vehicle, e.g: a pedestrian walking parallel to the vehicle within the road.

Finally, the threat priority classification has been explored as a decision-making solution using expert knowledge that has been presented in this work. That is, the use of an expert module that includes knowledge, data and decision-making can be conducted. So, danger estimation, distance to the road and time to collision are easily com-

bined for estimating the priority classification of a given pedestrian track as low, medium or high threat. The decision-making allows a safe solution to determine if a given detection represent a threat to the vehicle or not, highlighting the individual knowledge of each danger estimation studied in this work.

The tests to demonstrate the reliability of the architecture have performed in three scenarios: test, urban and interurban. Thus, first structured scenarios have been used, where the pedestrian detections are easy, thus low false positive rate is expected. However, these scenarios were useful to configure the detection subsystems. Interurban scenarios are real scenarios, with low false positive rate expected due to the absence of other obstacles. The last one, urban scenarios, are less structured with high amount of obstacles that can lead to higher false positive rates. More than 10,000 frames where used with more than 4,000 pedestrians detections involved. Two examples are displayed in Figure 5.

Figure 5: Two detections with the estimation of the threat priority highlighted, green for detection low or medium and red for high.

So, Figure 5 depicts how thanks to the threat priority detection it is possible to reduce the load of the detections provided to the driver, since only those with high probability of interact with the vehicle are reported.

7 CONCLUSIONS

A data fusion application has been presented based on a knowledge-based architecture. This combines information from two different sensors that are able to fulfill the requirements of in-vehicle safety applications. The results demonstrates the viability of the fusion and how it improves the overall performance of the system. The improvements of the architecture are: the rate of positive detection is increased in all tests and the improvements in the false positive rate that are reduced to 1%.

Acknowledgements

This work was supported by the Spanish Government through the Cicyt projects (GRANT TRA2010-20225-C03-01) and (GRANT TRA 2011-29454-C03-02). CAM through SEGAUTO-II (S2009/DPI-1509).

References

[1] Y. Bar-Shalom, X.-R. Li: *Estimation and tracking - Principles, techniques, and software*, Artech, Boston.

[2] S. Blackman, R. Popoli: *Design and analysis of modern tracking systems*, Artech House, 1999.

[3] A. Broggi, P. Cerri, S. Ghidoni, P. Grisleri, H. G. Jung: Localization and analysis of critical areas in urban scenarios. In: *Proceedings of Intelligent Vehicles Symposium*, IEEE, 2008, pp. 1074–1079.

[4] J. C. Collins: *Accident Reconstruction*, Charles C. Thomas Publisher, Springfield, USA, 1979.

[5] F. Garcia, A. de la Escalera, J. M. Armingol, J. G. Herrero, J. Llinas: Fusion based safety application for pedestrian detection with danger estimation. In: *Proceedings of FUSION'11*, pp. 1–8, 2011.

[6] B. Jida, R. Lherbier, M. Wahl, J. C. Noyer: Bayesian Networks and Probabilistic Data Association Methods for Multi-Object Tracking: Application to Road Safety. In: *Proceedings of ICTTA*, pp1-6, 2008.

[7] F. Jiménez, J. Naranjo, F. García: An Improved Method to Calculate the Time-to-Collision of Two Vehicles. *International Journal of Intelligent Transportation Systems Research* 11, pp. 34–42, 2013.

[8] Johansson G, Rumar K.: Drivers' brake reaction times. *Hum Factors* 13, pp. 23-27, 1971.

[9] Makishita H, Matsunaga K: Differences of drivers' reaction times according to age and mental workload. *Accid Anal Prev.* 40, pp.567-575, 2008.

[10] E. D. Martí, D. Martín, J. García, A. de la Escalera, J. M. Molina, J. M. Armingol: Context-aided sensor fusion for enhanced urban navigation. *Sensors* 12, pp. 16802–16837, 2012.

[11] M. Mertens, M. Ulmke: Ground Moving Target Tracking with context information and a refined sensor model. In: *Proceedings of FUSION'08*, Cologne, Germany, pp. 1497–1504, 2008.

[12] C. Premebida, G. Monteiro, U. Nunes, P. Peixoto: A Lidar and Vision-based Approach for Pedestrian and Vehicle Detection and Tracking. In: *Proceedings of ITSC*, Seattle, USA, pp. 1044–1049, 2007.

[13] C. Premebida, O. Ludwig, U. Nunes: LIDAR and Vision-Based Pedestrian Detection System. *Journal of Field Robotics* 26, pp. 696–711, 2009.

[14] C. Premebida, O. Ludwig, M. Silva, U. Nunes: A Cascade Classifier applied in Pedestrian Detection using Laser and Image-based Features. In: *Proceedings of ITSC*, Funchal, Portugal pp. 1153–59, 2010.

[15] L. Spinello, R. Siegwart: Human detection using multimodal and multidimensional features. In: *Proceedings of ICRA'08*, pp. 3264–3269, 2008.

Sistema de localización en interiores basado en la fusión de información

Gabriel Villarrubia[1], Juan F. De Paz[1], Javier Bajo[2], Juan M. Corchado[1]

[1] *Informática y Automática, Universidad de Salamanca (España)*, {gvg, fcofds, corchado}@usal.es

[2] *Informática y Automática, Universidad Politécnica de Madrid (España)*, jbajo@fi.upm.es

Resumen

En la actualidad están tomando relevancia los sistemas de localización basados en Wi-Fi ya que es aplicable a los dispositivos móviles muy abundantes en la sociedad actual. La precisión de estos sistemas, en ocasiones, no es muy alta por lo que es de interés crear un sistema que permita fusionar la información procedente de diferentes sensores de los dispositivos móviles para realizar el proceso de localización. Además de la señal Wi-Fi, se puede hacer uso de otros elementos como el acelerómetro, brújula y cámara para realizar una localización más precisa en conjunción con la localización Wi-Fi. En este trabajo, se propone un sistema de localización que integran los elementos indicados para la realización de una localización más precisa.

Palabras Clave: localización en interiores, Wi-Fi, sensores.

1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad existen diferentes tipos de sistemas de localización que varían sobre todo en función de si se tratan de sistemas de localización de interiores o de exteriores. Para los sistemas de localización en exteriores el uso de GPS (Global Positioning System) está ampliamente extendido proporcionando una precisión aceptable en la mayoría de los casos. Sin embargo para interiores es necesario crear sistemas que permitan realizar localizaciones precisas de los usuarios. En interiores es necesario crear redes de sensores que posibiliten la realización de la localización de forma precisa pero en ocasiones esta información se puede combinar con otros tipos de sensores para mejorar la precisión de los resultados. Los dispositivos móviles presentan muchas posibilidades ya que incorporan diferentes tipos de sensores, Wi-Fi y cámara por lo que sería interesante crear un sistema que permita realizar una localización que combine todos estos tipos de sensores como en el trabajo aquí propuesto.

Los sistemas de localización en exteriores con GPS permiten alcanzar una precisión de unos 10 metros en función del número de satélites disponibles. Esta precisión suele ser suficiente para estos entornos. En interiores, la señal de satélite no siempre está disponible por lo que se puede usar la señal GSM (Global System for Mobile) para localización, no obstante el error suele ser bastante alto y es complicado incluso detectar la planta en la que se encuentra un individuo [[4]]. En interiores la localización se suele realizar mediante la instalación de redes de sensores inalámbricas bajo diferentes tecnologías. Una de las posibilidades es usar ZigBee [[1]], no obstante esta tecnología no se incorpora en los dispositivos móviles por lo que su despliegue es caro ya que requiere de la instalación de las balizas y los dispositivos de usuario a localizar. También se puede hacer uso de otro tipo de tecnología como RFID (Radio Frequency IDentification) [[2]] pero esta presenta también deficiencias como la distancia de localización o y tampoco se encuentra integrada en los móviles. Como alternativa al ZigBee o RFID se puede usar Wi-Fi [[5]] o Bluetooth [[3]] para sistema de localización, los sistemas de localización por Wi-Fi suelen presentar una precisión inferior a los de localización por ZigBee pero el coste de despliegue es mucho inferior. Como alternativa a las redes de sensores y el escaneo de niveles de señal se pueden usar otros sistemas para la realización de la localización como es el uso de la cámara de los dispositivos o el acelerómetro y la brújula. Además de los tipos de señales y los sensores usados, existen diferentes tipos de algoritmos que se pueden emplear para la realización de la localización aplicados a los niveles de señal como pueden ser triangulación, multilateración o fingerprint [[6]][[13]][[14]], en lugar de usar estos algoritmos se pueden crear mapas de intensidades para la estimación de la localización de objetos.

En este trabajo se propone un sistema que permite localizar objetos en interiores mediante la fusión de la información. El sistema de localización se basa en el uso de los niveles de señal Wi-Fi, red GSM, acelerómetros, brújula y cámara para obtener la posición de un objeto. El sistema fusiona la información de los datos obtenidos anteriormente para la localización de objetos en entornos cerrados. El sistema incorpora mapas de intensidades y técnicas probabilísticas para la estimación de la posición por los diferentes métodos e incorpora y una red neuronal para el cálculo de la posición final del objeto en el interior. La red neuronal permite fusionar la estimación de la posición de los objetos minimizando el error en función

de la precisión detectada durante el cálculo de las intensidades.

El artículo se estructura como sigue: en la sección 2 se realiza una revisión del estado del arte sobre sistemas de localización y posteriormente de algoritmos de localización. En la sección 3 se muestra la propuesta y en la sección 4 se indican los resultados y conclusiones.

2 ESTADO DEL ARTE

Los sistemas de localización permiten identificar y localizar diferentes elementos en un entorno. Los sistemas de localización se componen de dos elementos: sensores y dispositivos móviles a localizar, también denominados tags. Los tags se sitúan en los elementos a localizar mientras que los sensores se sitúan normalmente en puntos fijos generando así una red de sensores que permite localizar a los diferentes dispositivos.
En la actualidad, existen diferentes sistemas de localización en función de la tecnología usada, así se tienen las diferentes alternativas:

- GPS: El funcionamiento de un sistema de localización en tiempo real basado en GPS básicamente en un conjunto de satélites (transmisores fijos) que envían constantemente información, la cual es recogida por dispositivos móviles (receptores). Los receptores calculan su posición basándose en las coordenadas de los satélites, por lo que entre más referencias de satélites se tengan, la precisión es mayor. Es necesario tener al menos 3 referencias de satélites para poder calcular la posición.
- GSM/GPRS: Las operadoras de teléfonos móviles también ofrecen servicios de localización. Su funcionamiento se basa en utilizar la misma red de antenas que proveen el servicio de telefonía. En este caso, la localización puede ser realizada tanto en el dispositivo móvil como por el proveedor del servicio, debido a que tanto las antenas como los dispositivos son transmisores y receptores. Para calcular la localización se emplean parámetros como el tiempo de llegada de la señal, ángulos de incidencia, triangulación de señales o células de pertenencia.
- RFID: RFID [[7]] es otra de las alternativas utilizadas para desarrollar sistemas de localización en tiempo real. Su funcionamiento se basa en una red de lectores y etiquetas RFID. Los lectores transmiten una señal RF constante, la cual es recogida por las etiquetas, quienes a su vez responden a los lectores enviando un número de identificación. En este tipo de localización, cada lector cubre una determinada zona mediante su señal RF (campo de lectura). Cuando una etiqueta pasa por el campo de lectura del lector, se dice que la etiqueta está en esa zona. Un sistema RFID se compone principalmente de cuatro elementos: 1) Etiquetas, 2) Lectores, 3) Antenas y Radios y 4) Hardware de Procesamiento [[8]][[9]]. Las etiquetas o chips RFID pueden ser pasivos (sin baterías), en cuyo caso reciben el nombre de transpondedores [[7]]. Los transpondedores son mucho más baratos y tienen un tamaño mucho menor que los chips activos (con baterías), pero tienen un rango de alcance mucho menor. Las principales aplicaciones de la tecnología RFID han tenido lugar en entornos industriales, de transporte, etc., pero su aplicación en otros sectores, incluyendo la medicina, es cada vez más importante [[7]][[8]][[9]].
- Wi-Fi: Los sistemas de localización basados en tecnologías Wi-Fi [[10]] emplean dispositivos de red inalámbricos para calcular la posición. Se emplea una malla de nodos (transmisores y receptores fijos) que funcionan como referencia para los nodos móviles. El sistema calcula la posición de los nodos móviles a partir de las señales recibidas por los nodos fijos. Existen gran cantidad de técnicas para procesar dichas señales y determinar su posición, entre ellas localización simbólica o signpost, triangulación, trilateración, etc. La localización basada en redes Wi-Fi tiene tres componentes principales: 1) Un tag RFID que emite y recibe señales bajo la norma 802.11[[11]], 2) una infraestructura WLAN, formada por puntos de acceso y controladores, y 3) un motor de localización, consistente en un software capaz de interpretar la información proporcionada por la infraestructura Wi-Fi y los tags para proporcionar datos relativos a la ubicación de los usuarios [[10]].
- UWB: Estos sistemas utilizan la banda de frecuencia UWB (Ultra Wide Band) [[12]] como protocolo de comunicación. El funcionamiento es similar a los sistemas de localización por Wi-Fi pero mejoran considerablemente la precisión, logrando rangos de error optimistas de hasta 10cm. Un ejemplo práctico es el desarrollado por la compañía Ubisense [[16]] para el seguimiento y localización de pacientes

Las tecnologías más adecuadas para la localización en interiores son las basadas en UBW, ya que otras como GPS sólo se pueden usar en exteriores ya que es necesario recibir señales de satélites. Otras redes como la GSM permite realizar la localización pero el margen de error es demasiado alto por lo que no se considera adecuado su uso.

Existen tres algoritmos principales empleados por los sistemas de localización en tiempo real para determinar la ubicación de los nodos móviles (tags): Triangulación,

Fingerprinting y Multilateración [[13]]. La triangulación permite obtener coordenadas de localización mediante el cálculo de la longitud de los lados de un triángulo a partir de los ángulos de entrada de la señal recibida en cada antena, para lo cual es necesario disponer de al menos 3 puntos de referencia. El Fingerprinting, también conocido como signpost o localización simbólica, se basa en el estudio de las características de cada zona de localización, realizando mediciones de las características de radiofrecuencia y estimando en qué área de influencia se encuentra cada tag [[14]]. Por último, la Multilateración se basa en la estimación de distancias desde los lectores a los tags midiendo parámetros como el RSSI (ReceivedSignalStrengthIndication) o el TDOA (Time Difference Of Arrival) [[15]], de modo que intersectando las distancias estimadas desde cada tag a tres o más nodos fijos se pueden determinar los puntos en los que se encuentran dichos tags. La multilateración permite obtener mejores resultados en exteriores que con triangulación, pero su rendimiento baja notablemente en interiores. Esto es porque en interiores los niveles de RSSI varían en función de la presencia de elementos (personas, objetos o animales) y además se basa en el cálculo de distancias, por lo que es necesario realizar una estimación previa de dichas distancias a partir de valores RSSI que cambian constantemente.

Las técnicas de localización basados en Triangulación y Multilateración no son eficientes puesto que las señales se ven muy atenuadas por los diferentes elementos de las habitaciones. Para estos casos es más recomendable aplicar heurísticas aplicadas a procesos de clasificación y realizar entrenamientos para crear algoritmos de localización ya que de esta forma se consigue mejorar la precisión final de los algoritmos. Las heurístsicas permitirán recoger diferentes medidas en posiciones concretas y a partir de dichas medidas se puede calcular la posición más probable.

3 SISTEMA PROPUESTO

El sistema propuesto en este trabajo se compone de un sistema de localización basado en tres procedimientos diferentes. El primero se basa en la obtención de datos procedente de niveles de señales RSSI de redes Wi-Fi y sistema GSM. El segundo de ellos se basa en el uso de acelerómetro y la brújula de móvil y el último de ellos en el manejo de la cámara. Los tres procedimientos capturan la información y la mandan a un servidor que es el encargado de procesarla y devolver la ubicación mediante la fusión de las predicciones de cada uno de los sistemas.

3.1 Posicionamiento basado en RSSI

El sistema de posicionamiento basado en redes de sensores inalámbricas se basa en el uso de los niveles de señales de RSSI procedente de las Wi-Fi y la señal GSM. El algoritmo usado para la localización es el mismo con independencia del tipo de señal con la que se esté trabajando. En ambos casos se realiza un mapa de intensidades en la los diferentes puntos del entorno. La recolección de los datos se realiza siguiendo las posibles rutas y tomando mediciones de los routers Wi-Fi detectados y las señales GSM. En la figura 1 se toma la medida para el punto rojo en el que se captura los niveles de señal Wi-Fis y GSM procedente de las diferentes antenas. Durante la fase de escaneo se realiza este procedimiento en diferentes puntos del plano que se quieren estimar. Según se puede ver en la figura, se han obtenido medidas de 4 puntos de acceso Wi-Fi y 3 redes GSM. A partir de los datos de RSSI, los BSSID y los identificadores de las celdas GSM se realiza una predicción de la probabilidad de pertenencia a cada uno de los puntos. La probabilidad de pertenencia se realiza mediante una el algoritmo KStar, la posición final dada viene dada por un clasificador que incorpora la información de las redes GSM y las redes Wi-Fi de modo simultáneo obteniendo así una estimación del punto más probable del recorrido.

Figura 1. Escaneo de intensidad para un punto correspondiente a la fase de calibrado o estimación.

Una vez obtenidos los valores de la tabla mostrados en la figura 1, se procede a entrenar un clasificador. El clasificador seleccionado se corresponde con KStar. Los datos de entrada durante el entrenamiento se muestran en la figura 2. El último de los valores contiene la información del identificar del punto escaneado, el punto escaneado.

BSSID	RSSI	BSSID	RSSI	...	CELID	RSSI	CELID	RSSI	Id

Figura 2. Escaneo de intensidad para un punto correspondiente a la fase de calibrado o estimación.

Posteriormente a la realización del calibrado, se repite el recorrido y se realiza un cálculo del error del sistema y comprobar el correcto funcionamiento del sistema de clasificación. Los datos de la figura 2 son los enviados periódicamente al servidor para que realice el cálculo de la posición de los usuarios.

3.2 Posicionamiento basado en la brújula y el acelerómetro

Los acelerómetros sirven para la detección de pasos que realiza el usuario. La detección de los pasos se realiza de modo sencillo mediante la fijación de umbrales superiores e inferiores. Los umbrales se fijan por configuración según la sensibilidad de los diferentes dispositivos. En la figura 3 se pueden ver las variaciones de los acelerómetros del eje x, y, z y los pasos detectados. Como es evidente el valor de los acelerómetros cambia en función de la orientación del móvil. En lugar de tener en cuenta el giroscopio para determinar la orientación del móvil, lo que se hace es calcular el vector de fuerza general representado por la fuerza en la figura 2. Observando la figura se pueden definir umbrales para el vector de fuerza de modo que cuando su módulo oscile entre dos valores se considere que se ha realizado un paso. En rojo se representa la detección de pasos.
El vector de fuerza (1) se calcula sumando los vectores de cada una de las coordenadas y calculando su módulo tal y como se indica en la ecuación (2) . Las fuerzas en los terminales móviles vienen dadas por la fuerza en el eje x, y, z.

$$\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z) \tag{1}$$

$$\left|\vec{f}(x,y,z)\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$

Finalmente se tiene en cuenta la brújula para determinar los cambios de dirección y la detección de pasos. Cuando se detecta un cambio de dirección y se detectan pasos se ajusta la posición del usuario a la posición de un grafo a modo de sincronización con este algoritmo. La localización estimada a partir de la brújula. Los posibles caminos a realizar en el entorno se representan a modo de un grafo dirigido.

Al servidor se envían los datos cada vez que se detecta un paso o un conjunto de pasos junto con la información de la brújula cada vez que se captó un paso.

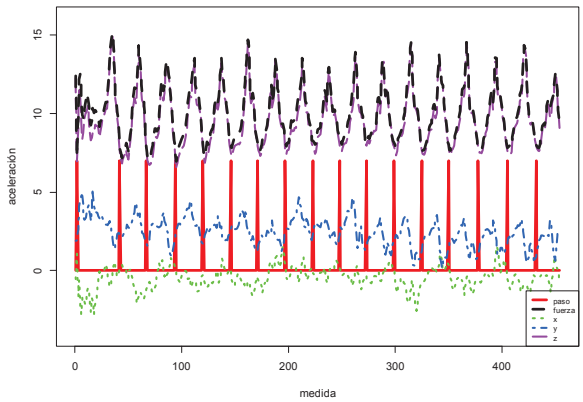


Figura 3. Medidas obtenidas con el acelerómetro

3.3 Posicionamiento basado en la cámara

Para mejorar la precisión de la localización, se capturan fotos a objetos situados a menos de un metro en los diferentes recorridos realizados. Las fotos se realizan con los terminales móviles y se crea una base de datos de imágenes que se asocian con posiciones en el plano. Para cada una de las imágenes se realiza una extracción de características y descriptores aplicando el algoritmo FAST [[17]] y posteriormente se aplica un kd-tree [[18]] para facilitar la búsqueda de imágenes. En los terminales móviles se aplica el algoritmo FAST y se envían los datos a un servidor que realiza la búsqueda de los patrones..

3.4 Algoritmo final del cálculo de posición

La posición final de los dispositivos móviles se realiza mediante una red neuronal, concretamente se ha aplicado un perceptrón multicapa. A la red se le pasan las estimaciones del posicionamiento calculado mediante RSSI, sensores y cámara y el sistema calcula la posición final en la que se encuentra en el usuario. Las entradas por tanto vienen definidas por los datos de la tabla 1.

El número de las neuronas de la capa intermedia se fijó a 31 ya que dio buenos resultados. La función de activación de las neuronas de la capa de intermedia y de salida es la sigmoidal. Los valores de entrada y salida se redimensionaron para que variaran en el intervalo [0.2, 0.8], esto se realiza debido a la función de activación seleccionada para las neuronas.

variables	E/S	Descripción
PosiciónRSSI	E	(x,y) con la posición x,y estimada. Se corresponde con dos entradas en la red neuronal.
PosiciónSesores	E	(x,y) con la posición x,y estimada. Se corresponde con dos entradas en la red neuronal.
PosiciónCámara	E	(x,y) con la posición x,y estimada. Se corresponde con dos entradas en la red neuronal.
PosiciónReal	S	(x,y) con la posición x,y estimada. Se corresponde con dos entradas en la red neuronal.

Tabla 1. Variables de entrada y salida a la red neuronal.

4 RESULTADO Y CONCLUSIONES

Para validar el funcionamiento del sistema se procedió a calibrar la planta baja del edificio mostrado en la figura 4. La planta baja tiene una extensión de 1700m^2. Se realizó un calibrado de los pasillos del edificio y de las salas de libre acceso. En total se tomaron 165 mediciones en los niveles de RSSI que se corresponden de igual modo con 165 pasos a lo largo del edificio. De igual modo se tomaron un total de 20 imágenes correspondientes a extintores, puertas, carteles y otros objetos fácilmente diferenciables del resto. Las zonas escaneadas en el recorrido se corresponden con líneas pintadas sobre la figura 4

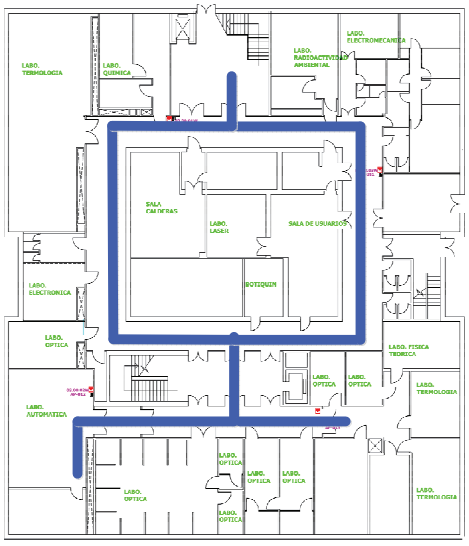


Figura 4. Zonas de calibrado representadas con líneas.

Como primer paso se procedió a realizar un pequeño análisis del funcionamiento de cada uno de los sistemas de posicionamiento obteniendo resultados variantes en función del comportamiento de los usuarios. El error medio obtenido por cada uno de estos procedimientos se puede ver en la tabla 2.

Clasificador	Error medio
RSSI	2,53 metros
Sensores	2,31 metros
Cámara	3,73 metros

Tabla 2. Error medio obtenido por cada uno de los clasificadores

Aunque el error dado por los sensores es bajo, este error varía mucho en funcíon del comportamiento del usuario ya que si el usuario varía la longitud de los pasos o se gira, anda hacia atrás el error se incrementa de modo considerable. El error también dependerá de la longitud de los pasillos y el algoritmo siempre está supeditado a conocer la ubicación inicial de partida.

El error en el caso de la cámara no es muy significativo puesto que el número de imágenes medidas es bajo considerando el número de mediciones tomadas para las Wi-Fi y sensores y en caso de no detectar una nueva imagen la posicción actual es la última detectada. No obstante, tiene como característica que cuando detecta la imágen se tiene un error bastante bajo.

Para realizar una estimación del sistema global se procedió a analizar el funcionamiento del sistema completo. El entrenamiento de la red neuronal encargada de fusionar los datos se entrena de tal modo que para cada patrón que disponga de datos de señales RSSI, sensores y cámara se introducen los siguientes patrones: uno que contiene las tres medidas, todos los que contienen pares de dos dejando el otro con valores a -1,-1. En caso de haber datos de un solo procedimiento de medida la posición es la dada por este procedimiento y no se llega a usar la red neuronal. El error medio obtenido aplicando el sistema es de 1.67 metros lo cual reduce considerablemente el error obtenido por lo algoritmos anteriores.

El sistema permite fusionar la información procedente de diferentes sistemas para obtener una localización más precisa. La red neuronal permite realizar esta tarea de modo eficiente mejorando la precisión dada por otros sistemas como los niveles de señal RSSI. Sistemas como la localización mediantes los sensores pueden dar buena precisión siempre y cuando el usuario no tenga un comportamiento errático, en cuanto presente este tipo de comportamiento el error sería muy alto, por ejemplo, sería complicado de usar en museos o exposiciones. Como trabajo futuro se está mejorando el posicionamiento por cámara para poder determinar de manera precisa la distancia a un objeto reconocido, por ahora cuando se reconoce un objeto se sitúa en la posición en la que se capturó la imagen inicialmente.

Agradecimientos. Este trabajo ha sido soportado por el ministerio de economía y competitividad (INNPACTO) IPT-2011-0726-430000.

REFERENCIAS

[1] Huang, C.N., Chan, C.T.: ZigBee-based indoor location system by k-nearest neighbor algorithm with weighted RSSI, Procedia Computer Science 5, pp. 58–65, 2011.

[2] Kuoa, R.J., Tsengd, W.L., Tienb, F.C., Warren T.: Application of an artificial immune system-based fuzzy neural network to a RFID-based positioning system, Computers & Industrial Engineering 63(4), pp. 943–956, 2012.

[3] Aalto, L., Gothlin, N.,Korhonen, J., Ojala T.: Bluetooth and WAP push based location-aware mobile advertising system Proceedings of the 2nd International Conference on Mobile Systems, Applications, and Services, ACM Press, 2004.

[4] Varshavsky, A., de Lara, E., Hightower, J., LaMarca, A., Otsason, V.: GSM indoor localization, Pervasive and Mobile Computing 3(6), pp. 698–720, 2007.

[5] Gallagher, T., Li, B., Dempster, A., Rizos, C.: A sector-based campus-wide indoor positioning system, in: IEEE International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN10), pp. 1–8, 2010.

[6] Ducatel, K., Dogdanowicz, M., Scapolo, F., Leijten, J., Burgelman, J.C.: That's what friends are for. ambient intelligence (ami) and the IS in 2010. Congress pre-prints, "Innovations for an e-society. Challenges for technology assessment", 2001.

[7] Razavi, R., Perrot, J., Guelfi, N.: Adaptive modeling: an approach and a method for implementing adaptive agents. Lecture Notes in Artificial Intelligence 3446 pp. 136-1408, 2005.

[8] Giunchiglia, F., Mylopoulos, J., Perini, A.: The tropos software development methodology: Processes, models and diagrams. In: AAMAS'02 Workshop on Agent Oriented Software Engineering (AOSE-2002), pp. 63–74, 2002.

[9] Erickson, P., Wilson, R., & Shannon, I. Years of Healthy Life. Statistical Notes 7, 1995.

[10] Martin, D., Burstein, M., Hobbs, J., Lassila, O., McDermott, D., McIlraith, S., Narayanan, S., Paolucci, M., Parsia, B., Payne, T., Sirin, E., Srinivasan, N., Sycara, K.: OWL-S: Semantic Markup for Web Services, W3C Member Submission, http://www.w3.org/Submission/OWL-S, 2004.

[11] Emiliani, P.L., Stephanidis, C.: Universal access to ambient intelligence environments: opportunities and challenges for people with disabilities. IBM Systems Journal, 2005.

[12] Fernández, A., Ossowski, S.: Exploiting Organisational Information for Service Coordination in Multiagent Systems. Int. Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, ACM-IFAAMAS, pp. 257-264, 2008.

[13] Glassner, A.: Principles of digital image synthesis. Morgan Kaufmann, 1995.

[14] Georgé, J.P., Gleizes, M.P., Glize, P.: Emergence of organisations, emergence of functions. Symposium on adaptive agents and multi-agent systems, pp. 103-108, 2003.

[15] De Paz, J.F., Rodríguez, S., Bajo J. and Corchado J.M. Multi-agent system for security control on industrial environments. International transactions on system science and applications journal 4(3), pp. 222-226, 2008.

[16] Kaemarungsi, K., Krishnamurthy, P.: Modeling of indoor positioning systems based on location fingerprinting. 23rd Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM 2004) 2, pp. 1012-1022, 2004.

[17] Rosten. E.: Machine Learning for High-speed Corner Detection, 2006.

[18] Kang, Y.S., Naha, J.H., Park, W.C., Yang, S.B.: gkDtree: A group-based parallel update kd-tree for interactive ray tracing, Journal of Systems Architecture, 59(3), pp. 166–175, 2013.

SENTENCIAS CUANTIFICADAS DIFUSAS: APLICACIONES A LA FUSIÓN DE INFORMACIÓN

M. Dolores Ruiz[1], **Juan Gómez-Romero**[1], **Daniel Sánchez**[1,2], **Maria J. Martin-Bautista**[1]

[1]*Dpto. Ciencias de la Computación e I.A., CITIC-UGR, Universidad de Granada*,
{mdruiz,jgomez,daniel,mbautis}@decsai.ugr.es
[2]*European Centre for Soft Computing, Mieres*, daniel@softcomputing.es

Resumen

Las sentencias cuantificadas difusas ofrecen un modelo formal para procesar conocimiento expresado en términos del número de individuos de un conjunto (difuso) que cumplen una propiedad imprecisa. Por su carácter expresivo, este tipo de sentencias han sido utilizadas en diversos dominios que requieren representación del lenguaje natural. Sin embargo, su uso en sistemas de fusión de información es escaso, a pesar de la creciente necesidad de incorporar fuentes de datos *soft* que plantean los problemas de fusión de alto nivel más recientes. En este trabajo realizamos un repaso de los modelos de sentencias cuantificadas descritos en la literatura y sus aplicaciones en problemas relacionados con la fusión de información.

Palabras Clave: Cuantificación difusa, fusión de información.

1 INTRODUCCIÓN

La fusión de información tiene como objetivo combinar datos procedentes de sensores distribuidos y heterogéneos e información relacionada para mejorar los resultados que podrían obtenerse utilizando un único sensor [30]. Tradicionalmente, la investigación en esta área se ha centrado en la denominada *fusión de bajo nivel*, que abarca las etapas de extracción de características de la señal y reconocimiento de objetos. En los últimos años, no obstante, ha crecido sustancialmente el interés en la *fusión de alto nivel*, que tiene como objetivo descubrir las relaciones cualitativas existentes entre las entidades observadas para analizar si suponen algún riesgo y, en consecuencia, ayudar a la toma de decisiones. Así, la fusión de alto nivel trata menos de la adquisición de datos de sensores tradicionales (o *sensores hard*), y más de la agregación e interpretación de información secuenciada para obtener una visión global del escenario sometido a observación. Un elemento cada vez más habitual en estos sistemas son los *sensores soft*, que recogen datos generados por humanos en forma no estructurada (informes de texto, OSINT, etc.). Este cambio de paradigma de la fusión de bajo nivel a la fusión de alto nivel ha puesto de manifiesto la necesidad de incorporar en los sistemas técnicas destinadas a modelar y procesar información expresada en lenguaje natural (e.g. [31]).

Un tipo interesante de expresiones del lenguaje natural son las sentencias cuantificadas, esto es, aquellas que involucran algún tipo de cuantificador. Los cuantificadores más simples son los utilizados habitualmente en la lógica de primer orden $\forall$ y $\exists$. Sin embargo, es frecuente encontrar en el lenguaje natural otro tipo de cuantificación que no puede modelarse utilizando únicamente estos símbolos, como por ejemplo en las expresiones "más de 3 (personas)" o "la mitad". Es más, en muchas situaciones esta cantidad se expresa de forma vaga, como por ejemplo en "casi todos", "alrededor de 3", "pocos", etc. Por otra parte, puede ocurrir que la propiedad sobre la que se expresa la cuantificación sea imprecisa, como en "la mitad de los alumnos son *bajos*" o "casi todos los objetos detectados son *grandes*". Las sentencias cuantificadas difusas ofrecen un marco formal para el manejo de este tipo de conocimiento y, en consecuencia, han sido utilizadas en dominios directamente relacionados con el modelado del lenguaje natural, como por ejemplo en acceso y recuperación de información, resumen lingüístico o sistemas expertos [22, 10].

En este trabajo se describen varias aplicaciones de las sentencias cuantificadas difusas de interés para la fusión de información, con el objetivo de explotar posibles sinergias entre las dos áreas. Explicaremos, en primer lugar, los fundamentos teóricos del formalismo de las sentencias cuantificadas difusas (Sección 2), para repasar a continuación varias propuestas relevantes clasificadas por áreas (Sección 3). Finalizaremos el artículo con un resumen de las conclusiones más importantes del estudio y algunas ideas de trabajo futuro.

2 CUANTIFICACIÓN DIFUSA

Históricamente, los primeros trabajos que consideran cuantificación lingüística son los de A. Mostowski, que estudian los operadores lógicos $\exists$ y $\forall$ desde un punto de vista operacional [36]. Más tarde, N. Rescher describe más tipos de cuantificadores además de "todos" y "existe" [41]. Una de las primeras propuestas en el ámbito de la Lógica Difusa sobre sentencias cuantificadas se debe al propio L. Zadeh [51]. En ella se consideran dos tipos de cuantificadores: los absolutos ("existe", "exactamente 5", "aproximadamente 8"), que representan una cantidad absoluta; y los relativos ("al menos la mitad", "la mayoría", "alrededor del 20 %"), que representan proporciones o porcentajes. A su vez, Zadeh clasifica las sentencias cuantificadas en dos tipos: sentencias de tipo I, que tienen la estructura "Q de los X son A", siendo Q un cuantificador y A una propiedad difusa sobre el referencial X (por ejemplo,"la mayoría de los objetos detectados son grandes"); y sentencias de tipo II, con estructura "Q de los D son A", siendo Q un cuantificador y A, D propiedades difusas (por ejemplo, "casi todos los [objetos detectados] grandes son rojos"). En esta propuesta, un cuantificador es un subconjunto difuso convexo y normal de los enteros (para los absolutos) o del intervalo [0, 1] (para los relativos). En las figuras 1 y 2 podemos ver algunos ejemplos de cuantificadores de este tipo.

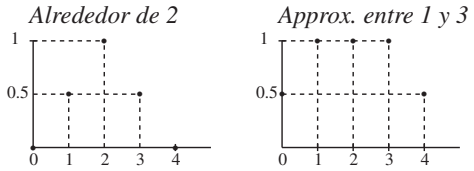


Figura 1: Ejemplos de cuantificadores absolutos

No obstante, en lenguaje natural encontramos cuantificaciones que no pueden modelarse con cuantificadores absolutos o relativos. Para poder resolver este problema, I. Glöckner propone en [17] una estrategia distinta para generalizar la cuantificación difusa a cualquier tipo de cuantificador basándose la Teoría de los Cuantificadores Generalizada (TGQ, Theory of Generalized Quantifiers) [2, 29]. La TGQ reconoce más de 30 tipos de cuantificadores, que se clasifican en unarios ("Juan es A") o n-arios ("algunos As son Bs"); cuantitativos ("alrededor de diez") o no cuantitativos ("todos excepto uno"); simples ("muchos") o compuestos ("la mayoría de los casados de A son B o C") (siendo A, B, C conjuntos difusos). Formalmente se define un *cuantificador difuso n-ario* como una función $\widetilde{Q} : \widetilde{\mathscr{P}}(X)^n \longrightarrow [0,1]$ donde $\widetilde{\mathscr{P}}(X)$ es el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos difusos definidos sobre X. Un ejemplo de cuantificador de este tipo podría ser

$$\widetilde{todos}(X_1, X_2) = \inf\Big\{\min\Big(1 - X_1(x), X_2(x)\Big) \,|\, x \in X\Big\}.$$

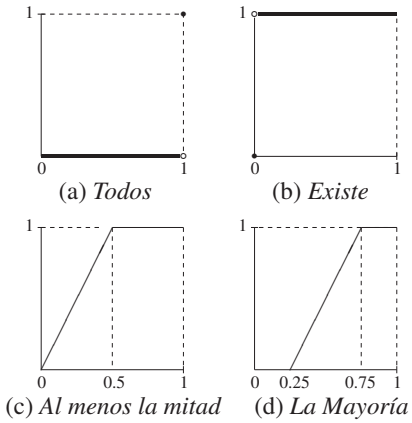


Figura 2: (a)-(b) Ejemplos de cuantificadores unarios, (c)-(d) cuantificadores relativos

representando *todos los* X_1 *son* X_2. Lo más interesante de esta propuesta es que Glöckner desarrolla un proceso para generalizar cuantificadores crisp a sus análogos difusos. A este tipo de transformaciones se las llama QFM (Quantifier Fuzzification Mechanism), y el término cuantificador se denomina *determinante*. El beneficio principal de usar este tipo de procedimiento es que no es necesario definir el cuantificador difuso caso por caso.

Una vez establecidas las bases para definir distintos tipos de cuantificadores difusos, podemos encontrar en la literatura diversos métodos de evaluación de sentencias cuantificadas, que calculan en qué grado una sentencia cuantificada es cierta o no. Una buena recopilación de las numerosas propuestas desarrolladas en la literatura se pueden encontrar en [10]. Algunas de las más utilizadas son el método de Zadeh usando el cardinal Σ-count, el método de R. Yager basado en operadores OWA y los métodos basados en la cardinalidad de un conjunto difuso [10].

3 APLICACIONES

3.1 AGREGACIÓN DE INFORMACIÓN

Uno de los principales ámbitos de aplicación de las sentencias cuantificadas ha sido la agregación de información en problemas de decisión multi-objetivo o multi-criterio. En estos, los criterios se representan mediante conjuntos difusos definidos sobre el espacio de decisiones y se agregan usando operadores difusos para obtener la función de decisión global. En este contexto, Yager define varios métodos de agregación de criterios en base a su importancia [45, 47, 50]; entre ellos, el uso de conectivos y cuantificadores difusos para definir las medidas de media y de inclusión difusa [48]. Por su parte, J. Kacprzyk et al. [20, 21] proponen aplicar cuantificadores lingüísticos en toma de

decisiones en grupo. Los cuantificadores son empleados para representar una mayoría difusa que simboliza la percepción humana de la esencia de la mayoría, asumiendo que las relaciones de preferencia individuales son dadas.

Cuando los datos proceden de diferentes fuentes, los criterios de agregación pueden representarse mediante sentencias cuantificadas, que resultan fáciles de interpretar y utilizar [18]. Una aproximación mixta es la que proponen Eciolaza y Triviño [16], que agregan descripciones lingüísticas cuantificadas basadas en lenguaje natural. En particular, se centran en la detección de eventos de riesgo durante la conducción de vehículos usando datos de simulaciones. Una vez realizada la evaluación de las sentencias cuantificadas, generan informes basados en la detección y descripción de los eventos que tienen lugar durante las sesiones de conducción. En la sección 3.3 se detallan más aproximaciones destinadas a la creación de resúmenes lingüísticos de conjuntos de datos.

3.2 MINERÍA DE DATOS Y RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN

En Minería de Datos destacan las propuestas que utilizan un tipo particular de sentencia cuantificada para extraer reglas de asociación. Así, la definición de una regla del tipo $D \rightarrow A$ se modela mediante una sentencia s de tipo II "Q de los D son A", donde $Q = la\ mayoría$. De esta forma, la validez de la regla $D \rightarrow A$ se calcula como la evaluación de la sentencia s [11].

De manera similar, el aprendizaje inductivo puede considerarse un proceso por el que se infiere la descripción de una clase usando un conjunto de ejemplos conocidos. Los ejemplos se describen por pares del tipo *atributo-valor* y son clasificados como positivos o negativos. La propuesta presentada en [22] trata de determinar hasta qué punto cada tupla satisface un criterio (como por ejemplo ser un ejemplo positivo o negativo) evaluando el grado de satisfacción usando sentencias cuantificadas.

Respecto a la recuperación de información, en [22, 4, 19] encontramos varias propuestas para realizar consultas usando sentencias cuantificadas del tipo "encuentra las áreas en las que la mayoría de las edificaciones son oscuras". Estas aproximaciones permiten obtener información de manera flexible de una base de datos [9], así como expresar la información recuperada de forma comprensible para los usuarios [5, 32, 33, 12]. Los trabajos de J. Kacprzyk et al. son pioneros en este campo [28, 27]. También podemos encontrar en la literatura algunos avances en el desarrollo de buenas medidas para calcular la efectividad de los sistemas de recuperación de información. En [35] se proponen dos nuevas extensiones para medir la precisión y el *recall* de forma difusa que se basan en métodos para medir la validez de sentencias cuantificadas.

3.3 RESUMEN LINGÜÍSTICO

En el ámbito de la fusión de información son de especial relevancia las técnicas de resumen de datos, dado el gran volumen que se maneja en los sistemas actuales. En particular, los resúmenes lingüísticos permiten presentar de forma simplificada y comprensible grandes cantidades de datos al usuario. R. Yager define el resumen lingüístico como una tupla $< S, R, Q, T >$ donde S es un *summarizer* (un término lingüístico difuso; por ejemplo, $S = joven$), R es un $qualifier$ (un término lingüístico difuso; por ejemplo, $R = contratado\ recientemente$), Q una cantidad acordada (un cuantificador; por ejemplo, $Q = la\ mayoría$) y T un valor de verdad (un grado de evaluación de la sentencia "Q de los R en D son S"; por ejemplo, "la mayoría de los empleados contratados recientemente son jóvenes") [44]. Este concepto fue desarrollado en [44, 49], donde se ofrece además una medida de cómo de informativo es un resumen, y modificado posteriormente por S. Zadrozny en [55].

En [37] se puede encontrar un análisis de diferentes métodos para resumen lingüístico. En este trabajo se analiza la idoneidad de diferentes métodos según distintas combinaciones de cuantificadores con un número creciente o decreciente de *summarizers* y de *qualifiers*. Por su parte, F. Díaz-Hermida et al. [13] proponen una arquitectura funcional para el resumen lingüístico estructurada en tres capas. La primera se basa en una gramática difusa que se utiliza para definir las expresiones resumidas; la segunda incluye un conjunto de procedimientos y mecanismos de decisión para definir o filtrar resúmenes; la tercera es una capa de generación textual cuyo objetivo es adecuar los resúmenes para los usuarios. Estos autores, además, clasifican el problema de resumen lingüístico en dos grandes casos: generación de resúmenes a través de la instanciación de secuencias lingüísticas difusas y composición coherente de resúmenes atómicos o simples.

Una aplicación significativa de las sentencias cuantificadas para construir resúmenes lingüísticos con aplicación a fusión es el procesamiento de datos temporales. Los primeros trabajos acerca del concepto de resumen de series temporales se deben también a J. Kacprzyk et al. [23, 24]. Estas ideas han sido aplicadas en diversos dominios: cuidado de personas mayores a partir de datos de sensores de movimiento [43], análisis de datos hospitalarios [7, 6], estudios comerciales [26] o categorización de textos [25]. Otro uso interesante es la descripción lingüística de imágenes. En [1] se propone un método para generar descripciones de imágenes de satélite de la superficie del planeta Marte. En esta trabajo se asigna un grado de validez a las denominadas *percepciones computacionales*, que son sentencias cuantificadas del tipo "la imagen contiene un círculo grande". Por su parte, J. Chamorro et al. utilizan sentencias cuantificadas para la generación de histogramas lingüísticos en [8]. Estos histogramas se definen como una función que asigna un cuantificador lingüístico a cada color difuso. Para construir

el histograma se usan cuantificadores adecuados que representan la cantidad o la proporción de píxeles que tiene cada color en el histograma. La elección se hace evaluando el grado de cumplimiento de la siguiente sentencia cuantificada *Q de los píxeles en la imagen están pintados con el color difuso C* para cada *Q* en el conjunto de cuantificadores lingüísticos difusos proporcionados por el usuario.

El resumen lingüístico es también uno de los objetivos de los sistemas de consulta-respuesta flexible. Por ejemplo, en [3] se describe un método para generar un resumen lingüístico de un atributo numérico que aparece en una consulta difusa. También se presenta un procedimiento para obtener dichos resúmenes que se basa en resolver un problema de optimización usando sentencias cuantificadas del tipo "Q elementos de B son F", donde B es una bolsa difusa que representa la respuesta de la consulta difusa y F es un número difuso definido en el mismo soporte que B. Otros autores han desarrollado un lenguaje de consulta difuso denominado SummarySQL, que permite incluir los resúmenes lingüísticos como un operador más de consulta difusa y evaluar después el resumen mediante una medida de validez de las disponibles en la literatura [39, 40].

3.4 REPRESENTACIÓN Y RAZONAMIENTO CON LENGUAJE NATURAL

Además del resumen lingüístico, las sentencias cuantificadas se han empleado en otras áreas relacionadas con la gestión de conocimiento expresado en lenguaje natural. En concreto, las sentencias cuantificadas difusas permiten realizar razonamiento deductivo, entendido como la capacidad de inferir nuevas aserciones implícitas a partir de un conjunto dado de premisas explícitas. En particular, es posible realizar razonamiento silogístico con premisas y conclusiones expresadas como sentencias cuantificadas. Un ejemplo de silogismo clásico es el siguiente, donde PR_1 y PR_2 denotan la primera y la segunda premisa, respectivamente, y C la conclusión:

$PR1$	Q_1 of X are A
$PR2$	Q_2 of Y are X
C	Q_3 of Y are A

Algunos trabajos notables en este área son los de L. Zadeh [52, 53, 54], R. Yager [46], D. Dubois et al. [15, 14] y M. Pereira-Fariña et al. [38]. Este último propone transformar un problema de razonamiento silogístico en un problema de optimización, permitiendo usar cualquier tipo de cuantificador compatible con la TGQ.

También se han realizado propuestas para representación y razonamiento con sentencias cuantificadas en formalismos lógicos derivados de las Lógicas de Descripción (DLs, Description Logics). Las DLs son una familia de lógicas especialmente orientadas a la representación de conocimiento estructurado que, si bien son menos expresivas que la lógica de primer orden, garantizan que el razonamiento con ellas es decidible. Las Lógicas de Descripciones Difusas (fDLs, fuzzy DLs) extienden a las DLs tradicionales permitiendo que un concepto denote un conjunto difuso de individuos, una propiedad un conjunto difuso de individuos, y un axioma una fórmula que se cumple con un grado [34]. Entre las diversas propuestas de fuzzy DLs, existen algunas que ofrecen cuantificadores difusos como constructores [42].

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo hemos revisado algunas áreas de aplicación de las sentencias cuantificadas difusas de interés para la comunidad investigadora en fusión de investigación. Especialmente, destacamos dos de ellas: (1) la generación de resúmenes de grandes volúmenes de datos mediante frases en lenguaje natural; (2) la agregación de información heterogénea y de carácter lingüístico. Mientras que la segunda puede ser de utilidad en muchos de los sistemas ya existentes, la primera se presenta como una herramienta muy útil para afrontar los retos que plantean los sistemas multisensor y multi-criterio actuales, así como las dificultades derivadas del uso de información textual en fusión *soft*.

De cara al futuro conviene tener en cuenta que en fusión de información existen numerosos paradigmas para representación de información incierta e imprecisa, y que será necesario estudiar cómo pueden combinarse con ellos los distintos tipos y propuestas de sentencias cuantificadas difusas. Asimismo, será necesario tener en cuenta las restricciones de tiempo de procesamiento propias de los sistemas de fusión, un aspecto que en muchas de las aplicaciones descritas en este trabajo no ha sido tenido en cuenta.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Junta de Andalucía dentro del proyecto P11-TIC-7460 y por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España dentro los proyectos TIN2009-14538-C02-01 y TIN2012-30939.

Referencias

[1] A. Álvarez Álvarez, D. Sánchez-Valdes, and G. Triviño. Automatic linguistic description about relevant features of the Mars' surface. In *Proc. ISDA 2011*, pages 154–159, 2011.

[2] J. Barwise and R. Cooper. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy*, 4:159–219, 1981.

[3] I. Blanco, D. Sánchez, J.M. Serrano, and M.A. Vila. A new proposal of aggregation functions: The linguistic

summary. In *Proc. IFSA'03*, pages 127–134. Springer, 2003.

[4] P. Bosc, L. Lietard, and O. Pivert. Quantified statements and database fuzzy querying. In *Fuzziness in Database Management Systems, Studies in Fuzziness*, pages 275–308. Physica-Verlag, 1995.

[5] P. Bosc and O. Pivert. Fuzzy querying in conventional databases. In *Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty*, pages 645–671. Wiley and Sons, 1992.

[6] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez. *LNCS 5788*, chapter Fuzzy Quantification-Based Linguistic Summaries in Data Cubes with Hierarchical Fuzzy Partition of Time Dimension, pages 578–585. Springer Berlin / Heidelberg, 2009.

[7] R. Castillo-Ortega, N. Marín, and D. Sánchez. A fuzzy approach to the linguistic summarization of time series. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 17(2-3):157–182, 2011.

[8] J. Chamorro-Martínez, D. Sánchez, J.M. Soto-Hidalgo, and P.M. Martínez-Jiménez. Histograms for fuzzy color spaces. In *Proc. EUROFUSE 2011*, pages 339–350, 2011.

[9] J.C. Cubero, J.M. Medina, O. Pons, and M.A. Vila. Using OWA operator in flexible query processing. In *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory, Methodology and Applications*, pages 258–274. Kluwer Academic Publishers, 1997.

[10] M. Delgado, M.D. Ruiz, D. Sánchez, and M.A. Vila. Fuzzy quantification: a state of the art. *Fuzzy Sets and Systems*, In Press, 2013.

[11] M. Delgado, D. Sánchez, M.J. Martín-Bautista, and M.A. Vila. Mining association rules with improved semantics in medical databases. *Artificial Intelligence in Medicine*, 21:241–245, 2001.

[12] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena, M. Mucientes, and D.E. Losada. Fuzzy quantification in two real scenarios: Information retrieval and mobile robotics. *Int. Journal of Intelligent Systems*, 24:572–586, 2009.

[13] F. Díaz-Hermida, A. Ramos-Soto, and A. Bugarín. On the role of fuzzy quantified statements in linguistic summarization of data. In *Proc. ISDA 2011*, pages 166–171, 2011.

[14] D. Dubois, L. Godo, R.L. de Mántaras, and H. Prade. Qualitative reasoning with imprecise probabilities. *Journal of Intelligent Information Systems*, 2:319–363, 1993.

[15] D. Dubois and H. Prade. On fuzzy syllogisms. *Computational Intelligence*, 4(2):171–179, 1988.

[16] L. Eciolaza, M. Pereira-Fariña, and G. Trivino. Automatic linguistic reporting in driving simulation environments. *Applied Soft Computing*, 2012.

[17] I. Glöckner. DFS–an axiomatic approach to fuzzy quantification. Technical Report TR97-06, Technical Faculty, University Bielefeld, 1997.

[18] I. Glöckner and A. Knoll. Fuzzy quantifiers: A natural language technique for data fusion. In *Proc. Fusion 2001*, 2001.

[19] J. Gutiérrez-Ríos, L. Magdalena, and B. Bouchon-Meunier. Quantified statements and database fuzzy querying. In *Technologies for Constructing Intelligent Systems, Studies in Fuzziness and Soft Computing*, volume 89, pages 337–350. Springer Heidelberg, 2002.

[20] J. Kacprzyk. Group decision-making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(2):105–118, 1986.

[21] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, and H. Nurmi. Group decision-making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 49(1):21–31, 1992.

[22] J. Kacprzyk and C. Iwanski. Inductive learning from incomplete and imprecise examples. In *Uncertainty in Knowledge Bases*, pages 424–430. Springer-Verlag, 1991.

[23] J. Kacprzyk, A. Wilbik, and S. Zadrozny. *Soft Methods for Integrated Uncertainty Modelling*, chapter A linguistic quantifier based aggregation for a human consistent summarization of time series, pages 183–190. 2006.

[24] J. Kacprzyk, A. Wilbik, and S. Zadrozny. Linguistic summarization of time series using a fuzzy quantifier driven aggregation. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(12):1485–1499, 2008.

[25] J. Kacprzyk and S. Zadrozny. Fuzzy linguistic summaries in text categorization for human-consistent document-driven decision support systems. *Advances in Soft Computing*, 2, 2005.

[26] J. Kacprzyk and S. Zadrozny. Linguistic database summaries and their protoforms: towards natural language based knowledge discovery tools. *Information Sciences*, 173, 2005.

[27] J. Kacprzyk, S. Zadrozny, and A. Ziolkwski. Fquery iii+: a "human - consistent" database querying system based on fuzzy logic with linguistic quantifiers. *Information Systems*, 14(6):443–453, 1989.

[28] J. Kacprzyk and A. Ziolkwski. Database queries with fuzzy linguistic quantifiers. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 16(3):474–479, 1986.

[29] E.L Keenan and D. Westerståhl. Generalized quantifiers in linguistics and logic. In *Handbook of Logic and Language*, chapter 15, pages 837–893. Elsevier, 1997.

[30] J. Llinas and D.L. Hall. *Handbook of Multisensor data fusion*, chapter Multisensor data fusion, pages 1–14. CRC Press, 2009.

[31] J. Llinas, R. Nagi, D. Hall, and J. Lavery. A multidisciplinary university research initiative in hard and soft information fusion: overview, research strategies and initial results. In *Proc. FUSION 2010*, 2010.

[32] D.E. Losada, F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, and S. Barro. Experiments on using fuzzy quantified sentences in adhoc retrieval. volume 2, pages 1059–1066, Nicosia, Cyprus, 2004.

[33] D.E. Losada, F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, and S. Barro. Semi-fuzzy quantifiers for information retrieval. *Soft Computing in Web Information Retrieval: Models and Applications*, pages 195–220, 2006.

[34] T. Lukasiewicz and U. Straccia. Managing uncertainty and vagueness in description logics for the semantic web. *Journal of Web Semantics*, 6(4):291–308, 2008.

[35] M.J. Martín-Bautista, D. Sánchez, M.A. Vila, and H.L. Larsen. Measuring effectiveness in fuzzy information retrieval. In *Proc. FQAS 2000*, pages 396–402, 2000.

[36] A. Mostowski. On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae*, 44:12–36, 1957.

[37] A. Niewiadomski and O. Korczak. Methods of evaluating degrees of truth for linguistic summaries of data: A comparative analysis. In *Proc. ICAISC 2010*, pages 160–167, Zakopane, Poland, 2010.

[38] M. Pereira-Fariña, J.C. Vidal-Aguiar, F. Díaz-Hermida, and A. Bugarín. A fuzzy syllogistic reasoning schema for generalized quantifiers. *Fuzzy Sets and Systems*, 2013.

[39] D. Rasmussen. SummarySQL - a general purpose fuzzy query language. *Datalogiske Skrifter*, 75, 1997. University of Roskilde.

[40] D. Rasmussen and R.R. Yager. SummarySQL - a fuzzy tool for data mining. *Intelligent Data Analysis*, 1:49–58, 1997.

[41] N. Rescher. Plurality-quantification: Abstract. *Journal of Symbolic Logic*, 27:373–374, 1962.

[42] D. Sánchez and A.G.B. Tettamanzi. Generalizing quantification in fuzzy description logics. In *Computational Intelligence, Theory and Applications*, volume 33, pages 397–411. 2005.

[43] A. Wilbik, J.M. Keller, and G.L. Alexander. Linguistic summarization of sensor data for eldercare. In *SMC 2011*, pages 2595–2599, 2011.

[44] R.R. Yager. A new approach to the summarization of data. *Information Sciences*, 28:69–86, 1982.

[45] R.R. Yager. General multiple-objective decision functions and linguistically quantified statements. *International Journal of Man-Machine Studies*, 21:389–400, 1984.

[46] R.R. Yager. Reasoning with fuzzy quantified statements: Part II. *Kybernetes*, 15:111–120, 1986.

[47] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1988.

[48] R.R. Yager. Connectives and quantifiers in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 40:39–76, 1991.

[49] R.R. Yager. On linguistic summaries of data. In *Knowledge Discovery in Databases*, pages 347–363. AAAI/MIT Press, 1991.

[50] R.R. Yager. Quantifier guided aggregation using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11:49–73, 1996.

[51] L.A. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computing and Mathematics with Applications*, 9(1):149–184, 1983.

[52] L.A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(2):103–111, 1996.

[53] L.A. Zadeh. From computing with numbers to computing with words - from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, 45(1):105–119, 1999.

[54] L.A. Zadeh. Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)-an outline. *Information Sciences*, 172:1–40, 2005.

[55] S. Zadrozny and J. Kacprzyk. On the use of linguistic summaries for text categorization. In *Proc. IPMU'2004*, volume 2, pages 1373–1380, 2004.

Scientific Progress and Cognitive Development and Fuzzy Concepts – Historical-philosophical remarks

Rudolf Seising

European Centre for Soft Computing, Mieres, Asturias (Spain), rudolf.seising@softcomputing.es

Abstract

This paper presents views on Kuhn's theory of scientific paradigms and paradigm changes on the one hand and Piagest's Genetic Epistemology of cognitive development. We present parallels of these two structuralist approaches and we introduce "unsharp concepts" into these views. Then the paper throws a glance at their fuzzy extensions. Because of these "fuzzifications" we make an argument for using fuzzy instead of crisp concepts in education science.

Keywords: Scientific progress, cognitive development, structuralism, Fuzzy Concepts.

1 Introduction

In History and Philosophy of science as well as in Education science and Psychology we are particular interested to understand the process of the development of knowledge. Philosophy of science is concerned with preconditions, foundations, methods, implications and goals of science; philosophers of science reflect scientific theories and their changes. Educationists and psychologists want to know how human beings – especially young human beings – learn. They develop and apply theories of human cognitive developments. In science of education pedagogues and psychologists are concerned with the development of conceptual knowledge as individual mental processes of children and students. In the 20th century the two academic fields, history and philosophy of science on the one hand and education science and psychology on the other hand emerged approaches that are called Structuralism.

1.1 Structuralism in philosophy of science

Philosophy of science concerns scientific explanations of real systems and phenomena. Scientists connect these real systems and phenomena with theoretical structures. They create these structures to have a "mapping" from the real world to the world of logics and mathematics. In this abstract "paradise" they can formulate constants, variables, axioms or laws that represent the real systems and phenomena. It is supposed that there is a connection between the real world and the logical-mathematical world – otherwise it doesn't make sense to speak about empirical science.

Structuralism in philosophy of science pursue to obtain systematic rational reconstructions of empirical theories. It was set against the approach of the German-US-American philosopher Rudolf Carnap (1891-1970) who proposed to axiomatize scientific theories in a formal language. In contrast to that the American mathematician and philosopher Patrick Suppes (born 1922) suggested to determine the mathematical structure of a theory by use of informal set theory. Thus, one is able to axiomatize theories in a precise way without recourse to formal languages. This approach can be traced back to the metamathematical programme of the French group Bourbaki [3].

In the last third of the 20th century the structuralist approach in philosophy of science has been elaborated and continued by Joseph D. Sneed, Wolfgang Stegmüller, C. Ulises Moulines and Wolfgang Balzer and others. Their new developments in the structuralist approach act as a bridge between Philosophy of science and History of science because they could reconstruct theory dynamic in the sense of Thomas Kuhn's concept of paradigm and paradigm change, i.e. scientific revolutions. To sum up: this structuralist approach is a way to describe the logical structure and the dynamics of scientific theories.

1.2 Structuralism in education science and psychology

The structuralist approach in education science and psychology was intended by the Swiss developmental psychologist and philosopher Jean Piaget (1896-1980) who used the structuralism of the Swiss linguist and semiotician Ferdinand de Saussure (1857-1913) as a methodology in psy-

chology. However, in Piaget's view humans have adaptive mental structures. These mental structures assimilate external events; humans convert these external events to fit their mental structures. The most simple level of these mental structures is that of the so-called schema. Piaget introduced schemata as categories of knowledged to describe mental or physical actions.

In this paper we give brief surveys of history and philosophy of science in section 2 and education science and psychology in section 3. We show that recently in both academic fields "unsharp" concepts play important roles (subsections 2.4 and 3.3). We introduce the fuzzy structuralist approach in philosophy of science (subsection 2.5) and as future prospects we argue for a fuzzy structuralist approach to Genetic epistemology (section 4) because of parallels between the Kuhnian and the Piagetian model (subsection 3.2).

2 Philosophy and History of Science

2.1 Mapping empirical into theoretical structures

The introduction to the *Principles of Mechanics presented in a new form* [7] written by the German physicist Heinrich Hertz (1857-1894) most notably became a significant document for the philosophy of science where Hertz established his theory of knowledge: he viewed physical theories as "pictures" of reality.

This epistemology and his view of scientific theories as mind-created "images", based on the scientist's experience, was contrary to the dominant view at his time. Most scientists during the years around the turn of the 20th century regarded empirical theories as objective, and in particular, most of them believed in the existence of one unique theory. On the other hand, Hertz knew from the experience he had gathered in the genesis of electrodynamics that various theories with different systems of concepts are possible, and that one theory may eventually become accepted. Hertz also emphasized that images of facts do not have to be unambiguous; thus there may be different theories in science representing the same fact.

Hertz' new epistemologye influenced the Austrian-British philosopher Ludwig Wittgenstein (1889-1951), in writing the *Tractatus logico-philosophicus* [31] as was explicitly said: "In the proposition there must be exactly as many things distinguishable as there are in the state of affairs which it represents. They must both possess the same logical (mathematical) multiplicity (cf. Hertz's Mechanics, on Dynamic Models)." [31, prop. 4.04]

2.2 Scientific development and Theory change

Concerning the dynamics of scientific theories the US-American historian and philosopher of science Thomas S. Kuhn (1922-1996) argued in *The Structure of Scientific Revolutions* [8] that there is no linear accumulation of new knowledge in the development of science. Moreover, he wrote that science undergoes periodic revolutions and that there are "paradigm shifts" in history of science, in which the nature of scientific inquiry within a particular field is transformed. Kuhn claimed that there are three different stages of science: Prescience lacks a central paradigm. Later, when scientists attempt to enlarge the central paradigm by "puzzle-solving" prescience is followed by normal science. Normal science reaches a crisis when anomalous results build up. At this point a new paradigm can emerge, which subsumes the old results along with the anomalous results into one framework. This new paradigm is termed revolutionary science [8].

2.3 Architectonics for Science

Drawing our attention back to the philosophical topic of the gap between theoretical and real entities in science we mention that already the German philosopher Immanuel Kant (1724-1804) named his construction of the system of science with a progression from the formal to the most empirical phases an "Architectonic of Science".

An Architectonic for Science was published as *A structuralist program* in 1987 by Balzer, Moulines and Sneed [2]. Their program was based on the structuralist approach using informal set theory to axiomatize physical theories in a precise way without recourse to formal languages and it can be traced back to Suppes' proposal in the 1950s [28, 26, 27] to include the axiomatization of empirical theories in the metamathematical programme of the French group Bourbaki [3].

In the Suppes approach, one is able to axiomatize real physical theories in a precise way without recourse to formal languages. In the 1970s, one of Suppes' Ph D.-students, the US-American physicist Joseph D. Sneed (born 1938), developed informal semantics meant to include not only mathematical aspects, but also application subjects of scientific theories in the framework, based on this method. In [24] he presented the view that all empirical claims of phys- ical theories have the form "x is an S", where "is an S" is a set-theoretical predicate (e.g., "x is a classical particle mechanics"). Every physical system that fulfills this predicate is called a model of the theory. For example, the class M of a theory's models is characterized by empirical laws that consist of conditions governing the connection of the components of physical systems. Therefore, we have models of a scientific theory, and by removing their empirical laws, we get the class M_p of so-called potential models of the theory. Potential models of an empirical theory consist of theoretical terms, i.e. observables with values that can be measured in accordance with the theory. This connection between theory and empiricism is the basis of the

philosophical "problem of theoretical terms". If we remove the theoretical terms of a theory in its potential models, we get structures that are to be treated on a purely empirical layer; we call the class M_{pp} of these structures of a scientific theory its "partial potential models". Finally, every physical theory has a class I of intended systems (or applications) and, of course, different intended systems of a theory may partially overlap. This means that there is a class C of constraints that produces cross connections between the overlapping intended systems. In brief, this structuralist view of scientific theories regards the core K of a theory as a quadruple $K =< M_p, M_{pp}, M, C >$. This core can be supplemented by the class I of intended applications of the theory $T =< K, I >$. To make it clear that this concept reflects both sides of scientific theories, these classes of K and I are shown in Fig. 1. Thus we notice that M_{pp} and I are entities of an empirical layer, whereas M_p and M_{pp} are structures in a theoretical layer of the schema.

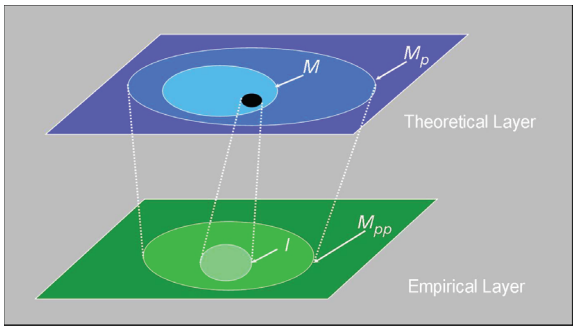


Figure 1: Empirical and theoretical structural layers.

Stegmüller, Sneed, Moulines and Balzer also started to reconstruct the change of theories, i.e. "scientific revolutions" or "paradigm shifts", e.g. the change from Ptolemy's geocentric universe to Copernicus' heliocentric world picture or from Newtonian Mechanics to Einstein's Special Relativity Theory by using the structuralist program in philosophy of sciene. For this purpose they defined an intertheorical relation that is called "Approximate Reduction". However, this "Approximate Reduction" is – as its name says, an approximation of the "pure" intertheoretical relation that is called "Reduction" (see Fig. 2 and it is defined as follows:

There are two theories, say T_{old} and T_{new}. T_{old} reduces T_{new} by the reduction relation ρ if the following two conditions are fulfilled:

$$\rho \subseteq M_p(T_{old}) \times M_p(T_{new}). \quad (1)$$

$$\forall x, x' : \langle x, x' \rangle \in \rho \text{ and } x' \in M(T_{new}), \text{ then } x \in M(T_{old}) \quad (2)$$

This "reduction" is not the best choice to represent theory changes as in scientific revolutions because these paradigm shifts are not pure rational changes and between the old and the new theory there is no one-to-one-relation. Therefore we have to respect some fuzziness in these transformations that cannot be represented by hard mathematics! Nevertheless, the methods that the structuralists proposed to reconstruct the "Approximative Reduction" are within classical mathematics, e.g. converging series of models of a theory or topological entities in spaces of such models. However, in our view it will be appropriate to define an approximative version of the "Reduction" by using fuzzy set theory. The "Fuzzy Reduction" will be a very interesting intertheoretical fuzzy relation because it could act as an fuzzy modeling for paradigm changes in history of science!

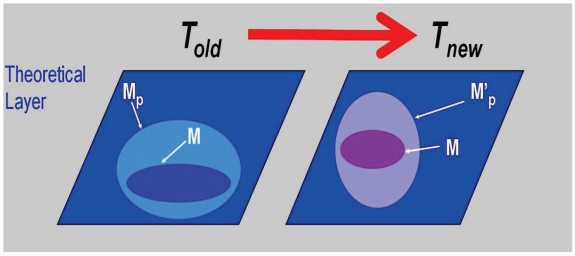


Figure 2: Intertheoretical relation "Reduction".

2.4 Unsharp concepts in science

In his *Grundgesetze der Arithmetik* (*Foundations of Arithmetic*) the the German philosopher and mathematician Gottlob Frege (1848-1925) called for concepts with sharp boundaries, because otherwise we could break logical rules and, moreover, the conclusions we draw could be false [4]. About half a century later Wittgenstein argued the converse in his *Philosophical Investigations*:

> "One might say that the concept 'game' is a concept with blurred edges. 'But is a blurred concept a concept at all?' Is an indistinct photograph a picture of a person at all? Is it even always an advantage to replace an indistinct picture by a sharp one? Isn't the indistinct one often exactly what we need? Frege compares a concept to an area and says that an area with vague boundaries cannot be called an area at all. This presumably means that we cannot do anything with it. But is it senseless to say: 'Stand roughly there'?" [32, § 71]

Thus, Wittgenstein had turned away from the epistemological system of the *Tractatus* with its ideal mapping between the objects of reality and a logically precise language. If we are not able to find such an exact logical language, then we have to accept the fact that there is unsharp or vague linguistic usage in all languages. Then the images, models, and theories that we build with the words and propositions

of our languages to communicate with them are and will also be unsharp or vague. In other words, our conceptions, images, and symbols of external things or objects are entities without sharp borders. They are fuzzy entities and it is time to establish a "fuzzy epistemological system" to master these complex circumstances with an appropriate theory of science!

We also find an epistemological system of unsharp concepts in the works of Hertz: Ten years before his *Principles of Mechanics* were published he wrote a manuscript of his lecture on *The Constitution of matter* when he was a professor at the University in Kiel. Unfortunately this book was not published. The manuscript was found in the 1990s by Albrecht Fölsing, Hertz's biographer, see [5], who edited it in German [6]. In this lecture, Hertz sought to describe sensually perceptible matters of fact as simply as possible, arguing that what is beyond these sensually perceptiblematters of fact is fiction that makes a simpler description possible [6, p. 35]. Then, he argued that physicists are not obligated to restrict their research activities in this manner: It is a general and necessary quality of the human mind that we are not able to bring something to mind or to define external things conceptually without adding properties that they inherently do not have. We cannot do this either in everyday life or in science. [6, p. 35] Hertz devoutly believed that we need imaginary constructs of conceptions in exact science, and gave two examples:

1. Geometry: "If anything deserves to be called an exact science, this does. It deals with the attributes of spatial conceptions. And to define these, it requires us to imagine a series of spatial conceptions. But all these are constituted in such a manner that sensual imagination of them is not possible if we do not give them attributes that geometry knows nothing about and which are explicitly supposed to formthe basis of our abstractions. If we are asked to imagine an infinitely thin spherical shell or an infinitesimal component of space, the designated objects will appear in our mind's eye. But neither will they appear infinitely thin nor infinitesimal, nor without colour, nor without other attributes that are absolutely foreign to the intended object." [6, p. 35]

2. Physics: "Imagine an atom as a ball-shaped space filled with matter that has a diameter of 1 millionth [. . .] Indeed, we are not able to imagine this space in with glass, iron, or some other specific substance. However, we can bring to mind which attributes are circumstantial and a core will remain that constitutes the basic attributes in which we are interested. What we add will always be fictitious imaginings; we cannot remove them and replace them with better ones, but must add them or abandon all imagining in this domain." [6, p. 36][1]

[1] Translation of both paragraphs by R. S.

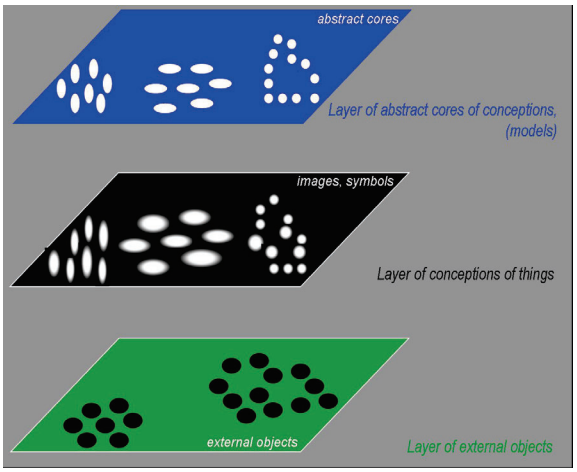


Figure 3: Abstract cores, images and external objects in the epistemological theory of Heinrich Hertz.

Here Hertz emphasized the difference between conceptions (images, symbols) and their "cores". He postulated imaginary constructs that are conceptions of things and held that an abstraction of each of these images or symbols that is unimaginable exists. Fig. 3 shows an illustration of this epistemological system in a three-layer structure with the highest level of abstract cores of our conceptions. Later on we will model the abstract cores of images or symbols by means of mathematical objects and figures, where the unsharp ones will become "fuzzy" entities in mathematics.

2.5 Fuzzy Structuralism

Referring to *The Structure and Dynamics of Theories* [25] by the Austrian philosopher of science Stegmüller (1923-1991), the Iranian-German philosopher and physician Kazem Sadegh-Zadeh stated in his article "The Fuzzy Revolution: Goodbye to the Aristotelian Weltanschauung" – that concepts as Kuhn's and his combatants "are still too vague and inadequate to be useful". [17, p. 3] He continued that

> "we may, nevertheless, learn from these studies that in contrast to our accustomed views on the development of science and scientific knowledge, this very development is not a cumulative process. Science does not progress continuously and by accumulating knowledge. It does not add to an antecedent knowledge or theory T_i a subsequent knowledge or theory T_{i+1} of the same type such that one could reasonably consider science as the open ordered series of related theories $T_1, T_2, \ldots, T_{i+1}$. Scientific ideas, theories, and worldviews evolve discontinuously in that a body of knowledge or theory T_i, which is held over a particular period of time, is dislodged by

another body of knowledge or theory T_j, because the disciplinary matrix[2] within which the former theory T_i had grown, changes to another disciplinary matrix which gives rise to the new theory, T_j, that is incompatible and incommensurable with its predecessor T_i."

12 years later, in his *Handbook on Analytical philosophy of Medicine*, he demands an "overhaul" to adapt the structuralist approach in philosophy of science to fuzzy set theory [18, p. 439f]. He requires "to render the metatheory applicable to real world scientific theories, it needs to be fuzzified because like everything else in science, scientific theories are vague entities and implicitly or explicitly fuzzy. Thebn he lists two ways of scientific theories' explicit fuzzifications:

1. Introduction of the theory's set-theoretical predicate as a fuzzy predicate ("x is a fuzzy S" instead of "x is an S").

2. In addition to 1. also any other component of the theory appearing in the structure that defines the predicate may be fuzzified.

Unfortunately, Sadegh-Zadeh did not go into details at this point but he concludes this section with an outlook: "Fuzzifications of both types will impact the application and applicability of theories as well as the nature of the knowledge produced by using them. This is true because fuzzification will change the conception of models; potential models; partial, potential models; and the core and intended applications of a theory, on the one hand; and the epistemological relationships between empirical claims of the theory and the 'real world', on the other, e.g., support, confirmation, falsification, etc." At the end of this chapter he wrote: "The above considerations suggest that the entities a theory is concerned with, be construed as vague entities. For similar analyses and assessments he referred to [21, 22, 23]. " [18, p. 441].

2.6 Between theoretical and empirical structures

Following Jerry Mendel's suggestion I actualized the idea of a "real" (or "empirical") and a "theoretical layer" (see Fig. 4) by naming the gap between these two layers the "Fuzzy Space" of unsharp concepts or perceptions. I introduced the variables *Theoretization* T and *Empirization* E of concepts to be more or less in the class of theoretical entities or of real phenomena. A concept (or perception) c with $T(c) = 1$ is completely theoretical and if $T(c) = 0$ then c is completely empirical. Variable empirization E is the complement of variable theoretization T. If $E(c) = 1$ then c is completely empirical and if $E(c) = 0$ then c is completely theoretical. However, in most cases c's T- and E-values lay between 0 and 1 because our concepts are unsharp or fuzzy.

[2]In later times Kuhn used the term "disciplinary matrix" instead of "paradigm".

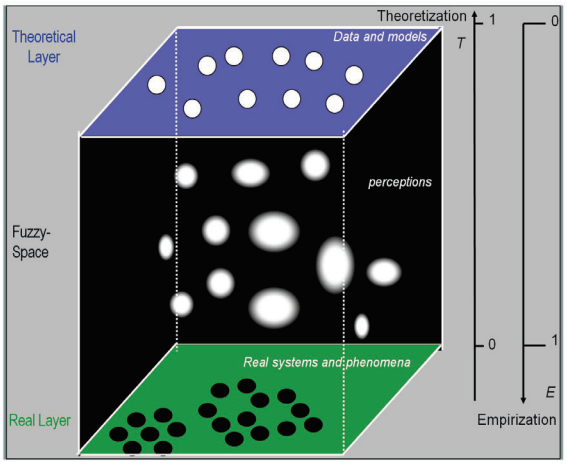


Figure 4: Fuzzy space of concepts or perceptions between the empirical and the theoretical layer.

3 From scientific to cognitive development

Thomas S. Kuhn wrote in his famous book *The Structure of Scientific Revolutions* [8]: "A footnote encountered by chance led me to the experiments by which Jean Piaget has illuminated both the various worlds of the growing child and the process of transition from one to the next" and he referred to Piaget works [14, 15] in his own footnote. Many years later he clarified that he "discovered Piaget" and especially the last mentioned book [15] when he read the important thesis on history of science, written by American sociologist Robert Merton (1910-2003) [13]. He then thought that "these children develop ideas just the way scientists do, except – and this was something I felt Piaget did not himself sufficiently understand, and I'm not sure that I realized it early – they are being taught, they are being socialized, in this not spontaneous learn

With reference to [9, p. 172f] also D. I. O Anele wrote that "Kuhn applied some of the insights revealed by Jean Piaget's classic laboratory experiments on how children interpreted motion in his analysis of how a child learns to differentiate various kinds of birds in perceptual space through a means of processing data into similarity sets or categories which does not depend on a prior answer to the question: similar with respect to what." [1]

3.1 Genetic Epistemology

The Swiss biologist, psychologist and philosopher Piaget was intended by the structuralism of the Swiss linguist and semiotician Ferdinand de Saussure (1857-1913) to establish a structuralist approach in education sciences. Sassure

used structuralism as a methodology in psychology when he focused not on the use of language (parole), but rather on the underlying system (structure) of language (langue). He called this theory *semiotics*. He was interested in how the elements of language are related to each other. Piaget abstracted Saussure's theory of structural organization. In his view, language depends upon operational intelligence (logical structures) and, therefore, it is not the fundament of cognition. Piaget was the first psychologist to make a systematic study of cognitive development. His contributions include a theory of cognitive child development, detailed observational studies of cognition in children, and a series of simple but ingenious tests to reveal different cognitive abilities. Before Piaget's work, the common assumption in psychology was that children are merely less competent thinkers than adults. Piaget showed that young children think in strikingly different ways compared to adults.

3.2 Parallels between Piaget's and Kuhn's theories

As a biologist by training Piaget was skilled to observe that organism adapted to their environment. He then applied this model to cognitive development and in his theory the mind organizes internalized regularities or operations into dynamic cognitive structures. Piaged named these structures "schema". Schemata are structured clusters of concepts, that can be used to represent objects, scenarios or sequences of events or relations between concepts. As we mentioned already (see subsection 2.3, the original idea was proposed by philosopher Kant as innate structures used to help us perceive the world. Piaget's concept of a schema covers category of knowledge and a process to receive that knowledge. When we obtain new knowledge then our schema may be modified or changed. In his view, the cognitive development (the adaption to the environment) is a process of four aspects: *schema*, *assimilation*, *accommodation*, and *equilibrium*.

- *Schema*: As we said already, humans develop "cognitive structures" or "mental categories" that Piaget named schemata in order to name and organize, and to make sense of life and reality. [29, p. 10]
- *Assimilation*: An individual uses its existing schemata to make sense of a new event. This process involves trying to understand something new by fitting it into what we already know.
- *Accommodation*: Also existing schemata can change to respond to a new situation. If new information cannot be made to fit into existing schemata, a new, more appropriate structure must be developed. There are also instances when an individual encounters new information that is too unfamiliar that neither assimilation nor accommodation will occur because the individual may choose to ignore it.
- *Equilibration*: This is the complex act of searching for the balance in organizing, assimilating, and accommodating. On the other hand, it is the state of Disequilibrium that motivates us to search for a solution through assimilation or accommodation.

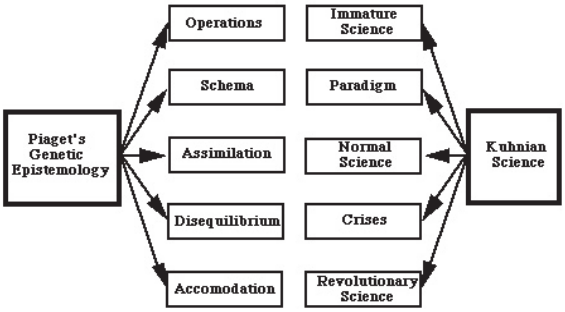


Figure 5: Parallels between Piaget's Epistemology and Kuhn's view on theory change.

In *Psychogenesis and the History of Science* – a co-authored and posthume published book of Piaget with the physicist Rolando Garcia, Piaget refers to Kuhn's view of theory change in science as Dan MacIsaac [12] quoted: "Our notion of epistemic framework ...", which describes "...an explanatory schema for the interpretation of the evolution of knowledge, both at the level of the individual and that of social evolution". Piaget further recognizes the role of social construction in schemata, stating "... when language becomes the dominating means of communication ... what we might call direct experience of objects becomes subordinated ... to the system of interpretations attributed to it by the social environment." He claimed that there is a connection of the psychogenesis of logico-mathematical thinking and historical development, he distinguished between "prescientific" (other authors name it "immature") (see Fig. 5) and "scientific" periods in each field, he mentions "analogies" between ontogenesis and historical development in both periods. [16, p. 63] Following MacIsaac, Piaget believed that his notion of epistemic framework "... includes that of paradigm ... but is simply different" (ibid). Paradigm belongs to the sociology of knowledge rather than with epistemology (concerned with the acquisition of knowledge)." [12]

Quoting Barry J. Wadsworth, "...the child's active assimilation of objects and events results in the development of structures (schemata) that reflect the childs' concepts of the world or reality. As the child develops these structures, reality or his knowledge of the world changes." [30] He concludes: "However, schema[ta] are not directly derived from raw objects and events, but from operations. While schema[ta] are the highest-order mental organizations, schema[ta] never appear alone; structures are always related to other structures and many structures are substructures of larger structures [30]. [12]

3.3 Unsharp concepts in Genetic epistemology

Piaget defined four stages of cognitive development:

1. *Sensorimotor stage*: Birth through ages 18-24 months.

   "In this stage, infants construct an understanding of the world by coordinating experiences (such as seeing and hearing) with physical, motoric actions. Infants gain knowledge of the world from the physical actions they perform on it. An infant progresses from reflexive, instinctual action at birth to the beginning of symbolic thought toward the end of the stage."[19]

2. *Preoperational stage*: 18-24 months – 7 years.

   The children do not yet understand concrete logic and cannot mentally manipulate information. They increase in playing but this is mainly categorized by symbolic play and manipulating symbols. They still have trouble seeing things from different points of view. The children lack basic logic. An example of transitive inference would be when a child is presented with the information "a is greater than b and b is greater than c." This child may have difficulty here understanding that a is also greater than c. [11, ch. 3] [20, ch. 8]

3. *Concrete operational stage*: Ages 7 – 12 years.

   In this stage children use logic appropriate. They start solving problems in a more logical fashion but abstract, hypothetical thinking has not yet developed. The children can only solve problems that apply to concrete events or objects. They can draw inferences from observations in order to make a generalization (inductive reasoning) but they struggle with deductive reasoning, which involves using a generalized principle in order to try to predict the outcome of an event. The Children can not figure out logic, e.g., a child will understand $A > B$ and $B > C$, however when asked is $A > C$, the child might not be able to logically figure the question out in their heads."

4. *Formal operational stage*: Adolescence – adulthood.

   Now, the person has the ability to distinguish between their own thoughts and the thoughts of others. He or she recognizes that their thoughts and perceptions may be different from those around them. The children are now able to classify objects by their number, mass, and weight, they can think logically about objects and events and they have the ability to fluently perform mathematical problems in both addition and subtraction.

However, it was quite plain to Piaget that not all children may pass through the stages at the exactly the same age. Also he acknowledged that children could show at a given time the characteristics of more than one of the stages above. Nevertheless he emphasized that cognitive development always follows the sequence of the enumeration above. No stage can be skipped, and every stage prepares the child with new intellectual abilities and a more complex understanding of the world. Therefore, Piaget's four stages tages of cognitive development are unharp defined stages. Also MacIsaac's analysis of the parallels between Piaget's and Kuhn's model leads to the assumption that Piaget's model comprises non-crisp concepts, e.g.: "Comparisons between Kuhnian normal science and Piagetian assimilation reveal that assimilation is a much more complex and fluid activity. There is a great deal of flexibility displayed within assimilation, while normal science is rigidly constrained." [12]

4 Towards a Fuzzy Genetic Epistemology

In analogy to our "fuzzification" of the structuralist approach in history and philosophy of science that we presented in section 2.5 and because of the parallelism between the Kuhnian model of theory change and the Piagetian model of conceptual development that we discussed in section 3.2 we propose now to establish a "fuzzy" view on Piaget's Genetic Epistemology. In our view the concepts that Piaget named "schema" are fuzzy concepts, Piaget's processes of assimilation and accomodation are fuzzy relations, and the stages in Piaget's constitution of the series of the cognitive development of children have no sharp borders but are fuzzy stages. A fuzzy structuralist approach to Piaget's structuralist theory, i.e. a "Fuzzy Genetic Epistemology" could be established as follows:

Fuzzy structuralism uses fuzzy sets and fuzzy relations instead of usual sets and relations. Fuzzy structures are models for concepts or perceptions that scientist use to think on and to create new scientific theories. Fuzzy relations are appropriate to model intertheoretical relations between fuzzy structures to model developments, e.g. scientific revolutions or paradigm changes. A "Fuzzy Genetic Epistemology" could be useful to create a fuzzy modeling of Piaget's theory. With fuzzy structures we will create fuzzy models for unsharp concepts and perceptions ("fuzzy schemata") that children use to represent objects, scenarios or sequences of events or relations between them. Fuzzy relations will model changes of fuzzy schemata like Piaget's "assimilation" and "accomodation".

Acknowledgements

Work leading to this paper was partially supported by the *Foundation for the Advancement of Soft Computing* Mieres, Asturias (Spain).

References

[1] D. I. O Anele: Development in Thomas Kuhn's Theory of Perception of Similarity Relationships in Science, *Lumina*, vol. 22(1), March 2011, pp. 1–25.

[2] W. Balzer, C. U. Moulines, J. D. Sneed: *An Architectonic for Science. The Structuralist Program*, Dordrecht: Reidel 1987.

[3] N. Bourbaki (pseudo.): *Elements of Mathematics: Theo-ry of Sets*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.

[4] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 2, Jena: Hermann Pohle, 1893-1903.

[5] A. Fölsing: *Heinrich Hertz*, Hamburg: Hoffmann und Campe, 1997.

[6] H. Hertz: *Die Constitution der Materie*, edited by Albrecht Fölsing), Berlin: Springer, 1999.

[7] H. Hertz: *The Principles of Mechanics Presented in a New Form*, New York: Dover 1956.

[8] Th. S. Kuhn: *The Structure of Scientific Revolutions* (1st ed.), University of Chicago Press, 1962

[9] Th. S. Kuhn: *The Essential Tension*, Chicago: The University of Chicago Press, 1977, pp. 297–308.

[10] Th. S. Kuhn: *The Road Since Structure: Philosophical Essays, 1970-1993*, ed. by J. Conant and J. Haugeland, Chicago: University of Chicago Press, 2000.

[11] G. Loftus et al. 8eds.): *Introduction to Psychology*, London, UK: Cengage, 15th Ed., 2009.

[12] D. MacIsaac: The Pedagogical Implications of Parallels between Kuhn's Philosophy of Science and Piagets' Model of Cognitive Development. http://physicsed.buffalostate.edu/danowner/kuhn-piaget/KP1.html

[13] R. Merton: Science, Technology and Society in Seventeenth Century England, *Osiris*, vol. IV(2), pp. 360–632, 1938

[14] J. Piaget: *The Child's Conception of Causality*, transl. by M. Gabain, London, 1930.

[15] J. Piaget: *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, 1946.

[16] J. Piaget, R. Garcia: *Psychogenesis and the history of science*. (H. Fieder, Trans.). New York: Columbia University Press, 1988 (Original published in 1983).

[17] K. Sadegh-Zadeh: The Fuzzy Revolution: Goodbye to the Aristotelian Weltanschauung, *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 21, 2001, pp. 1–25.

[18] K. Sadegh-Zadeh: *Handbook of Analytical Philosophy of Medicine*, Dordrecht [et al.]: Springer (Philosophy and Medicine, vol. 113, 2012.

[19] J. W. Santrock: *A Topical Approach To Life-Span Development*, New York: McGraw-Hill, 2008, pp. 211–216.

[20] J. W. Santrock: Life-Span Development, 9th Ed., Boston, MA: McGraw-Hill College, 2004.

[21] R. Seising: Between Empiricism and Rationalism: A layer of perception modeling fuzzy sets as intermediary in philosophy of science. In: P. Melin et al. (eds.): *Theoretical Advances and Applications of Fuzzy Logic and Soft Computing* (Proc. of the IFSA 2007 World Congress Theory and Applications of Fuzzy Logic and Soft Computing, Cancun Mexico, 2007), Berlin [et al.]: Springer (Advances in Soft Computing 42, LNCS, vol. 4529), 2007, pp. 101–108.

[22] R. Seising: Scientific theories and the computational theory of perceptions: A structuralist view including fuzzy sets. In: M. Stepnika et al. (eds.): *New Dimensions in Fuzzy Logic and Related Technologies*. Proc. of the 5th EUSFLAT Conference, Ostrava, Czech Republic, vol. 1, 2007, pp. 401–408.

[23] R. Seising: Fuzzy Sets and Systems and Philosophy of Science. In: R. Seising, (ed.): *Views on Fuzzy Sets and Systems*, Berlin: Springer (Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 243), 2009, pp. 1–35.

[24] J. D. Sneed: *The Logical Structure of Mathematical Physics*, Dordrecht: Reidel 1971.

[25] W. Stegmüller: *The Structure and Dynamics of Theories*, New York: Springer 1976.

[26] P. Suppes: A set of independent axioms for extensive quantities, 1951. See: http://suppes-corpus.stanford.edu/browse.html?c=mpm&d=1950

[27] P. Suppes: Some remarks on problems and methods in the philosophy of science, 1954. See: http://suppes-corpus.stanford.edu/browse.html?c=mpm&d=1950

[28] P. Suppes: *Introduction to Logic*, New York: Van Nostrand, 1957.

[29] B. Wadsworth: *Piaget's Theory of Cognitive Development: An Introduction for Students of Psychology and Education*, NY: David McKay & Comp., 1971.

[30] B. Wadsworth: *Piaget for the classroom teacher*, New York: Longman, 1978.

[31] L. Wittgenstein: *Tractatus logico-philosophicus*, London: Routledge & Kegan Paul, 1922.

[32] L. Wittgenstein: *Philosophical Investigations*, Oxford: Blackwell Publishing 1953.

Reflexiones sobre el tratamiento de lo incierto en Educación Primaria en España

Ángela Blanco-Fernández[1], **Itziar García-Honrado**[1], **Ana Belén Ramos-Guajardo**[1], **Luis J. Rodríguez-Muñiz**[1]

[1] *Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Didáctica de las Matemáticas, C/Calvo Sotelo s/n, 33007, Oviedo (España),* {blancoangela,garciaitziar,ramosana,luisj}@uniovi.es

Resumen

En este trabajo se reflexiona sobre el tratamiento de lo incierto o impreciso desde la educación matemática en los niveles de Educación Primaria en España. Sin contradecir el currículo que marca los contenidos y criterios de evaluación de cada nivel, se proponen diversas actividades para la introducción de algunos conceptos de la lógica borrosa para el tratamiento de situaciones imprecisas, relacionadas generalmente con el bloque de Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

Palabras Clave: Educación Primaria, incierto, imprecisión.

1 Introducción

La incertidumbre y la imprecisión no son temas muy tradicionales en educación matemática a un nivel primario en España. La primera vez que se introdujo el tratamiento de la incertidumbre en el currículo de Educación Primaria fue en 1991, bajo la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE [10]). Este primer acercamiento se centró en la aleatoriedad y en su importancia a la hora de clasificar eventos simples en posibles, imposibles o seguros. Este enfoque ha perdurado en los desarrollos de las leyes posteriores (Ley Orgánica de Educación, LOE [11] y su desarrollo normativo [14]), estableciendo cierto paralelismo con las normas del consejo nacional de profesores de matemáticas (NCTM [15]). Por otro lado, nunca se ha introducido la imprecisión como un contenido en sí mismo en el programa de Educación Primaria español, aunque sí el concepto de cálculo aproximado (no relacionado directamente con el concepto de probabilidad) en la última reforma educativa (LOE) como una primera introducción del razonamiento aproximado. Batanero y Díaz [1] apuntan la necesidad de un cambio en la mentalidad de los profesores acerca de la enseñanza de la probabilidad: de un modelo basado en fórmulas a una enseñanza de la probabilidad orientada a los datos que permite a los estudiantes formular preguntas o predecir. Este cambio de mente es un reto ya que la base probabilística de los maestros de Educación Primaria normalmente carece de este método didáctico y está más enfocado a fórmulas [3].

El acercamiento general a la probabilidad en Educación Primaria está basado en frecuencias, ya que la manipulación de números naturales resulta más sencilla para los estudiantes, aunque resulta difícil justificar que eventos pasados condicionan eventos futuros. Sin embargo, el acercamiento subjetivo es prácticamente nulo en libros de texto y materiales didácticos. Kapadia [7] subraya que "... el acercamiento subjetivo conlleva muchos problemas y, como su propio nombre indica, su naturaleza subjetiva conduce a diferentes respuestas de los individuos. Además también conserva los emocionantes elementos de la incertidumbre". Este factor endurece el rol del profesor, quien normalmente asocia las matemáticas a conceptos e ideas precisas. Como señalan Laskey y Martignon [12]: "... el objetivo primario se centra en abordar las diferencias tradicionales entre enseñar matemáticas tradicionales (las matemáticas de la certeza y la deducción ejemplificadas por la geometría y el álgebra) y enseñar estadística y probabilidad (las matemáticas de la incertidumbre)".

Un segundo problema a la hora de enseñar y aprender es que la incertidumbre aparece en aquellas situaciones donde también está involucrada la imprecisión. La imprecisión no viene asociada a situaciones aleatorias, sino que está presente en el conocimiento previo del alumno por el carácter impreciso del lenguaje: el significado de las palabras [5], las percepciones y la descripción de fenómenos físicos. Por lo tanto, proponemos como primer acercamiento a lo desconocido el

tratamiento de situaciones imprecisas conocidas, para más adelante definir una situación probabilística con datos precisos y con datos imprecisos, pudiendo llegar incluso a mencionar un acercamiento intuitivo a las probabilidades imprecisas con datos imprecisos, teniendo en cuenta que no existe un modelo consensuado ni definitivo para tratar con probabilidades imprecisas [4, 8, 9, 20].

En este trabajo mostramos cómo se podrían desarrollar algunas de estas ideas en el contexto del currículo español de enseñanzas mínimas en Educación Primaria (entre 6 y 12 años). El principal propósito es identificar estrategias de trabajo y analizar si éstas encajarían en los criterios oficiales o, por el contrario, se necesitaría introducir un cambio en el currículo de Educación Primaria.

2 Análisis de la incertidumbre y la imprecisión en el currículo de Educación Primaria

El currículo oficial español de Educación Primaria [14] está organizado en tres niveles: el primer nivel abarca alumnos de 6 y 7 años, el segundo alumnos de 8 y 9 años, y el tercero alumnos de 10 y 11 años. En lo que se refiere a Matemáticas, cada nivel está organizado en cuatro bloques, siendo el cuarto de ellos "Tratamiento de la información, azar y probabilidad", que es en el que nos vamos a centrar.

En el primer se incluye "distinguir entre imposible, seguro y lo que es posible pero no seguro, y usar en lenguaje común expresiones relacionadas con la probabilidad". Los criterios de evaluación establecen "evaluar si los alumnos están familiarizados con conceptos básicos y términos del azar: seguro, posible e imposible".

En el segundo nivel los contenidos en probabilidad se centran en la "evaluación de los resultados de experimentos que contienen aleatoriedad, con el fin de apreciar que hay eventos más o menos probables y la incapacidad de predecir un resultado específico". Sin embargo, los criterios de evaluación únicamente hacen alusión a estadísticos descriptivos.

Finalmente, en el tercer nivel los contenidos curriculares se refieren a la "presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un evento", mientras que el correspondiente criterio de evaluación incluye "Realización de estimaciones sobre los posibles resultados basadas en la experiencia (posibles, imposibles, seguros, más o menos posibles) en situaciones simples que incluyan azar y análisis de los resultados. [...] También, comprobar que los alumnos comienzan a darse cuenta de que existen sucesos imposibles, sucesos que pueden ocurrir casi seguro, o periódicamente, siendo más o menos probable su repetición. Estas nociones se basarán en la experiencia".

Como se puede observar, la descripción de las líneas curriculares utiliza términos imprecisos en cuanto a probabilidad se refiere. Es claro que el principal fin del uso de la probabilidad en un primer nivel no consiste en establecer una cuantificación exacta en términos, por ejemplo, de la fórmula de Laplace, sino manejar ideas sobre certeza, posibilidad, azar, etc.

3 Propuestas de aplicación en el aula

Serradó y otros [17] describen diferentes obstáculos que aparecen a la hora de estudiar probabilidad. Uno de los más importantes es un obstáculo epistemológico, debido a la falta de explicaciones de las nociones de azar y probabilidad, que incluso se vuelven más complicadas dentro del aula de Educación Primaria. Además, el lenguaje probabilístico en sí mismo constituye otro gran obstáculo, especialmente con alumnos de este nivel. Sobre la base de este conocimiento no es difícil ver que estudiantes de Educación Primaria se aproximan al concepto de probabilidad utilizando términos imprecisos. Por este motivo tiene sentido preguntarnos si la probabilidad imprecisa [19] puede ser una herramienta útil en este contexto. Obviamente, en este trabajo no se pretende profundizar la noción de probabilidad imprecisa en Educación Primaria, sino introducir en el aula pequeñas pinceladas mientras nos aproximamos al concepto de probabilidad.

Tanto el valor de las probabilidades como el de los conjuntos borrosos asignan a los elementos valores entre el 0 y el 1, por lo que a priori se podría relacionar el concepto de conjunto borroso con el de probabilidad, llegando a considerar que las probabilidades forman una subclase dentro de los conjuntos borrosos. No obstante, somos conscientes que esta relación no es en absoluto inmediata. En primer lugar, porque para definir una probabilidad se necesita una estructura de σ-álgebra, no necesaria para definir un conjunto borroso. En segundo lugar, porque algunas propiedades de los conjuntos borrosos no son aplicables a las probabilidades. Por ejemplo:

- las probabilidades no son comparables bajo el orden puntual de los conjuntos borrosos ya que si $p_1 \leq p_2$, o dicho de otra manera $p_1(a) \leq p_2(a)$, para todo a sobre el universo que se defina, tomando $'$ la operación negación, se tiene que $p_1(a') \leq p_2(a')$, y entonces, $1 - p_1(a) \leq 1 - p_2(a)$ de donde se obtiene que $p_2(a) \leq p_1(a)$, para todo a. Con lo cual, sólo cabe el caso $p_1 = p_2$.

- No tiene sentido componer probabilidades con los conectivos propios de las álgebras de conjuntos

borrosos, ya que se obtiene que tanto la intersección como la unión de dos probabilidades son iguales a las dos probabilidades iniciales e iguales entre ellas.

- No tiene sentido definir la negación de una probabilidad, ya que no sería una operación cerrada, es decir, la negación de una probabilidad no es una probabilidad porque no cumple las condiciones de frontera.

3.1 Acercamiento a conceptos inciertos

En el primer nivel de educación que fija el currículo podemos proponer como trabajo de los términos seguro/posible/imposible varias actividades de forma que los alumnos asignen estas etiquetas a hechos cotidianos. Por ejemplo:

- Trabajar el predicado soleado a través de la pregunta "¿Qué día hace hoy?".

  Habrá días que *seguro* que son soleados, otros que es *imposible* que se consideren soleados y otros que lo son parcialmente, es decir, que es *posible* considerarlos soleados.

  Una posible representación sería indicar, a través de un círculo, dónde se sitúa cada día respecto al sol como indica la Figura 1 .

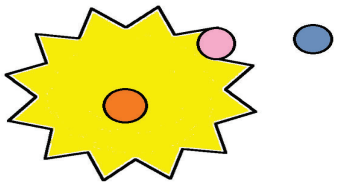


Figura 1: "¿Qué día hace hoy?"

- Describir la propia percepción sobre la altura de un compañero. ¿Es seguro que un compañero concreto se puede considerar alto? ¿Es imposible? ¿Es posible? En este primer nivel de educación los alumnos pueden tomar datos aproximados de las alturas de sus compañeros, seleccionar alguno de ellos, representarlos gráficamente ordenados respecto a sus alturas e indicar qué etiqueta se asigna a cada uno respecto al predicado "ser alto", como aparece en la Figura 2.

En el segundo ciclo, además ser capaces de medir de forma aproximada han de comparar números. Por lo tanto, siguiendo con la idea anterior, como un acercamiento al tratamiento de la imprecisión se van a proporcionar algunas técnicas sencillas basadas en la utilización de números borrosos que podrían ser utilizadas para describir la imprecisión existente en las opiniones de los alumnos, trabajando siempre sobre ejemplos concretos y fáciles de comprender por parte del alumnado.

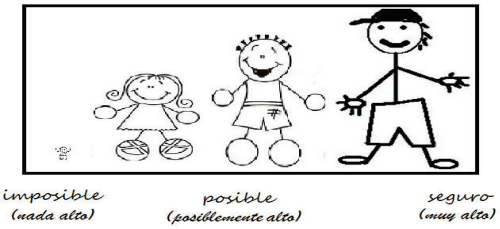


Figura 2: Etiquetas para "ser alto"

Supongamos que Pepe es un alumno de un aula de 4º de Primaria. Se propone a sus compañeros de clase que nos digan qué opinan acerca de la estatura de Pepe sin conocer la medida exacta de la misma. Es posible que ante esta pregunta y recurriendo a su conocimiento previo los alumnos en general contesten que según su opinión o bien "Pepe es alto" o bien "Pepe es bajo". Sin embargo, también es posible que alguno de los alumnos conteste que "Pepe no es ni alto ni bajo", "Pepe es más bien alto", "Pepe es bastante bajo", etc. Por tanto, es claro que las respuestas de los alumnos contienen un alto grado de imprecisión en algunas situaciones. En primer lugar se propone que el alumno elija como respuesta a la cuestión anterior una categoría elegida dentro de una escala Likert [13] que tome valores, por ejemplo, entre 1 y 7, donde 1 significa que "Pepe es muy bajo", 2 que "Pepe es bastante bajo", 3 que "Pepe es algo bajo", 4 que "Pepe no es ni bajo ni alto", 5 que "Pepe es algo alto", 6 que "Pepe es bastante alto" y 7 que "Pepe es muy alto". Algunos de los problemas que presenta la utilización de este tipo de escalas son los siguientes:

- Los alumnos en general tienden a evitar los valores correspondientes a categorías extremas.
- En muchas ocasiones resulta complicado resumir las percepciones u opiniones personales mediante un único valor.
- Dos alumnos distintos pueden percibir la misma categoría de un modo diferente.

Estas razones nos llevan a proponer una flexibilización de las opiniones o percepciones de los alumnos mediante el empleo de los denominados números borrosos [20]. Como se observará posteriormente, una de las ventajas más importantes de este tipo de números es que son más expresivos y capturan la variabilidad y el subjetivismo de las opiniones de los estudiantes.

En la teoría clásica de conjuntos un objeto específico o bien pertenece o bien no pertenece a un conjunto (no hay posibilidades intermedias). Este concepto puede generalizarse permitiendo a los objetos tener un grado de pertenencia al conjunto variando entre 0 y 1. De este modo, si el grado de pertenencia es 0 el

objeto no pertenecerá al conjunto, mientras que si el grado de pertenencia es 1 el objeto pertenecerá completamente al conjunto. Si el grado de pertenencia está en el intervalo (0,1), entonces el objeto pertenecerá al conjunto parcialmente con cierto grado. Esto nos lleva a definir el concepto de número borroso, introducido inicialmente por Zadeh en 1965 [20].

Matemáticamente, un número borroso U es una función convexa entre $\mathbb{R}$ y [0, 1] de manera que a cada valor $x \in \mathbb{R}$ se le asigna una función de pertenencia $U(x) \in [0, 1]$. Los intervalos determinados por el conjunto de valores que satisfacen $U(x) \geq \alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ se denominan α-cortes o α-niveles del número borroso U y se denotan por U_α. Los números borrosos más comunes en la práctica son los números borrosos triangulares o trapezoidales [2, 6].

De este modo es posible extender las opiniones de los alumnos acerca de la estatura de Pepe, por ejemplo, utilizando los números borrosos triangulares de la Figura 3.

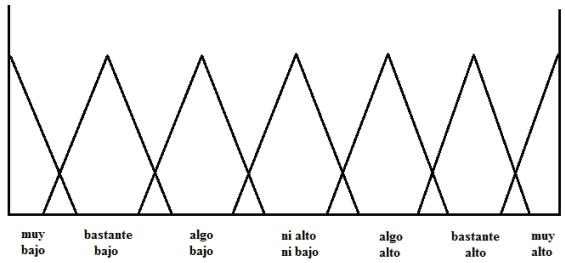


Figura 3: Identificación de categorías de una escala Likert con números borrosos

Se podría variar la representación anterior utilizando otro tipo de números borrosos, incluyendo más categorías, o modificando la escala de variación (usualmente se consideran escalas variando en los intervalos [0,10] ó [0,100]) y su posición en dicha escala. La escala representada en la Figura 3 es más informativa que la escala Likert ya que recoge parte de la imprecisión inherente en las opiniones de los alumnos. Sin embargo, la toma de decisiones por parte del alumno en cuanto a su elección de respuesta resulta igual de limitada que en el caso de escalas Likert puesto que el alumno debe elegir entre un total de 7 categorías o respuestas previamente delimitadas. Es también posible usar una escala de números borrosos con una mayor libertad de representación de la opinión del alumno. Se propone a continuación una técnica que permite que los alumnos reflejen sus percepciones u opiniones de un modo más versátil e informativo.

Las valoraciones de los alumnos sobre distintos aspectos pueden venir dadas por números borrosos trapezoidales, cuya introducción e interpretación resulta sencilla ya desde la Educación Primaria. La escala de oscilación de estos números depende del aspecto que se observa, variando entre las valoraciones más pequeña y más alta posibles de dicho concepto. El alumno describe su percepción sobre el aspecto considerado mediante uno de estos números borrosos. El 0-nivel del número representa el conjunto de valores que considera compatible con su opinión (es decir, el alumno considera que su opinión no puede estar fuera de ese conjunto). El 1-nivel es el conjunto de valores que considera completamente compatible con su opinión (intervalo de valores por el que el estudiante estaría dispuesto a apostar). Así, una posible percepción de un alumno sobre la estatura de Pepe podría ser la reflejada en la Figura 4.

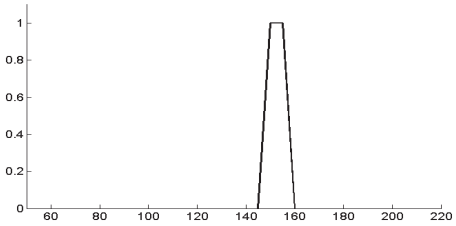


Figura 4: Percepción de un alumno sobre la estatura de Pepe mediante un número borroso trapezoidal

La escala del número borroso en la Figura 4 está medida en centímetros y varía en el intervalo $[50, 220]$, considerando que un alumno de la clase de Pepe no mide menos de 50 centímetros ni más de 220. La interpretación de ese número como representación de la percepción de un alumno es la siguiente: el alumno considera que la estatura de Pepe no puede ser menor de 145 centímetros ni mayor de 160 (0-corte). Además, estaría dispuesto a apostar a que la estatura de Pepe está entre 150 y 155 centímetros (1-corte).

3.2 Acercamiento al concepto incierto con intervención del azar

En el segundo nivel del currículo se hace referencia al concepto azar. Para tratar este aspecto no basta hacer una actividad como las indicadas en la sección anterior, pero sí podemos apoyarnos en ellas.

Como primeras actividades en este nivel se construyen tablas de frecuencias destinadas al estudio de la estadística descriptiva, en las que aparecen los distintos valores que puede tomar una variable en la primera columna, y las frecuencias de cada valor en columnas adyacentes. Estas frecuencias se representan también en diagramas de barras (si los valores que toma la variable son un número discreto) o histogramas (si la variable es continua).

En este punto se puede proponer una actividad que

relacione estas gráficas con los números borrosos. En primer lugar, se pide al alumno que diseñe mediante un número borroso su percepción sobre un aspecto de la clase; por ejemplo, la estatura general de todos alumnos de la clase ("cómo de alta es la clase"). Este proceso se hace como se ha indicado en la sección 3.1 (Figura 4). Tras ello, se recogen los datos sobre las estaturas de toda la clase y se representan en un histograma (o en un diagrama de barras si son pocos valores distintos). Superponiendo ambos gráficos y comparándolos cada alumno puede comprobar si su percepción individual se ajusta a la distribución real de la variable estatura en la clase. Un ejemplo se muestra en la Figura 5.

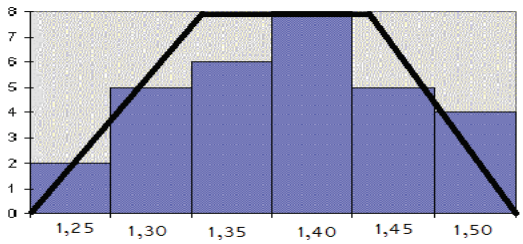


Figura 5: Percepción de un alumno e histograma sobre la estatura en la clase

Siguiendo esta idea se pueden introducir experiencias que involucren azar, cómo puede ser el lanzamiento de un dado. En el segundo nivel de educación simplemente se asociará la probabilidad al concepto de azar y se valorarán intuitivamente situaciones más o menos probables. Para esto creemos útil el uso de la representación de su percepción mediante conjuntos borrosos, llegando incluso a hacer una representación *naïve* de probabilidades imprecisas. Por ejemplo, se podría representar la probabilidad de obtener un número par en el lanzamiento del dado como en la Figura 6.

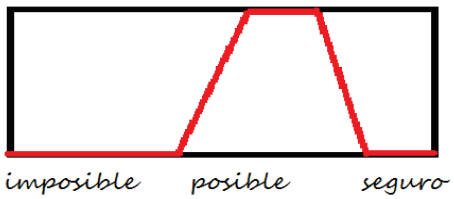


Figura 6: "Sacar par en el lanzamiento de un dado"

En el tercer nivel del currículo la noción de probabilidad se basa en la probabilidad frecuentista. A partir de las tablas de frecuencias los alumnos deben calcular probabilidades de sucesos simples ("obtener 5") o compuestos ("obtener un número par"). En el caso de un dado ideal o en condiciones de equiprobabilidad es inmediata la utilización de la fórmula de Laplace para el cálculo de probabilidades y para la comparación de las probabilidades de distintos sucesos. Uniendo este proceso con la representación de la Figura 6 los alumnos llegarían a comprender cómo poder representar la probabilidad de un suceso mediante un número y compararlo con su percepción de suceso seguro/posible/imposible.

3.3 Azar e imprecisión

Ambos conceptos pueden combinarse para la aparición de probabilidades con datos imprecisos o incluso probabilidades imprecisas con datos imprecisos. La complejidad de este tema dificulta una aplicación directa en las aulas de Educación Primaria. Sin embargo, gracias al conocimiento de los conjuntos borrosos para representar imprecisión y de las probabilidades para representar situaciones de azar vistas anteriormente, se pueden introducir en cursos de niveles superiores ejemplos como el que sigue:

Una urna contiene 20 pelotas del mismo tamaño y de tres colores distintos. Sabemos que alrededor de la mitad son azules, alrededor de un quinto negras y menos de un tercio rojas. Se extrae una bola de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola azul?

En este ejemplo aparecen datos imprecisos. Si queremos construir una probabilidad de forma clásica podemos diseñar el conjunto borroso y calcular su cardinal, según indican Zadeh [21] y [18]. Si además queremos que esa probabilidad sea también imprecisa podemos utilizar el cardinal borroso de los conjuntos. Dado que dicho cardinal se diseña de forma individual, los propios estudiantes participarán activamente en el problema del cálculo de la probabilidad del evento. En la Figura 7 se muestra un posible ejemplo.

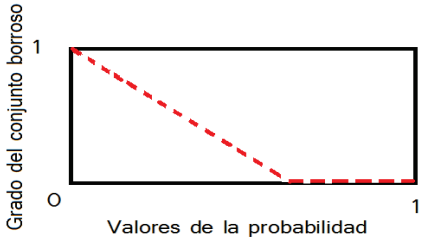


Figura 7: Probabilidad borrosa

4 Conclusiones

En este trabajo se han propuesto varias alternativas para introducir y reflexionar sobre situaciones en las que están involucrados aspectos inciertos o imprecisos en los distintos niveles de Educación Primaria fijados por el currículo español. Es fácil descubrir que la mayoría de estas situaciones están relacionadas con el área de Probabilidad y Estadística, en la que aparecen conceptos como azar, incertidumbre, probabilidad, posibilidad, entre otros. La introducción de lo incierto en estos niveles educativos permite mostrar la variabili-

dad de soluciones a un mismo problema según la percepción individual de cada uno, la generación de discusiones en grupo en las que cada alumno argumente su propio diseño, etc.

Este proceso se pretende extender al tratamiento de lo incierto en niveles educativos superiores, siguiendo los contenidos del currículo en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato ([16]). Se analizará si la introducción de nuevos conceptos imprecisos, como las medidas de posibilidad, es factible en estos niveles.

La experiencia práctica con alumnos se considera también clave para la confirmación de que las reflexiones realizadas son aplicables de forma efectiva en las aulas.

Agradecimientos

El trabajo ha sido realizado con el soporte de una Ayuda Económica para Proyectos de Equipos de Investigación Emergentes de la Universidad de Oviedo 2013 y el proyecto del MICINN TIN2011-29827-C02-01.
Las tres primeras firmantes del artículo son investigadoras afiliadas al European Centre for Soft Computing.

Referencias

[1] C. Batanero, C. Díaz: Training school teachers to teach probability. *Reflections and challenges: Chilean Journal of Statistics* 3(1), 3-13, 2012.

[2] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris, H. Prade: Probability-Possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities. *Reliable Computing* 10 (4), 273-297, 2004.

[3] C. Franklin, D. Mewborn: The statistical education of PreK-12 teachers: a shared responsibility. *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and Reasoning with Data and Chance*, 335-344, 2006.

[4] J.P. Dunyak, D. Wunsch: Fuzzy probability for System Rekiability. *Prod. 73th. IEEE Conference on Decision and Control*, 2934-2935, 1998.

[5] I. García-Honrado, E. Trillas: An essay on the linguistic roots of fuzzy sets. *Information Sciences* 181(19), 4061-4074, 2011.

[6] G. González-Rodríguez, A. Colubi, P. D'Urso, M. Montenegro: Multi-sample test-based clustering for fuzzy random variables. *International Journal of Approximate Reasoning* 50, 721–731, 2009.

[7] R. Kapadia: Chance and necessity: the languages of probability and mathematics. *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society*. Proc. ICOTS8, Ljubljana, 2010.

[8] J. Halliwell, Q. Shen: Linguistic probabilities: Theory and Applications. *Soft Computing* 13, 169-183, 2009.

[9] P. Jauin, A. M. Agogino: Stochastic sensitive analysis using fuzzy inference diagrams. *Uncertainty in Artificial Intelligence*, 79-92, 1990.

[10] Jefatura del Estado: Ley 1/1990, de 3 de octubre, Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado* 238, 28927–28942, 1990.

[11] Jefatura del Estado: Ley 2/2006, de 3 de mayo, Orgánica de Educación. *Boletín Oficial del Estado* 106, 17158–17207, 2006.

[12] K.B. Laskey, L. Martignon: Exploration and induction versus confirmation and deduction. En: C. Reading (ed.) *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society*. Proc. ICOTS8, Ljubljana, 2010.

[13] R. Likert: A technique for the measurement of attitudes. *Archives of Psychology* 140, 1–55, 1932.

[14] Ministerio de Educación: Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado* 293, 43053–43102, 2006.

[15] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM):*Curriculum and evaluation standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 1989.

[16] L.J. Rodríguez-Muñiz, P. Díaz: *Imprecision, uncertainty and probability in Spanish Secondary School: a working proposal*. Proc. EUROFUSE 2013, Oviedo, 2013.

[17] A. Serradó, J. Cardeñoso, P. Azcárate: Los Obstáculos en el Aprendizaje del Conocimiento Probabilístico: Su incidencia desde los Libros de Texto. *Statistics Education Research Journal* 4(2), 59–81, 2005.

[18] E. Trillas, T. Nakama, I. García-Honrado: Fuzzy probabilities: Tentative discussions on te Mathematical Concepts. *IPMU 2010* LNAI 6178, 139-148, 2010.

[19] P. Walley: *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. London: Chapman and Hall, 1991.

[20] L. A. Zadeh: Fuzzy probabilities. *Inf. Proc. Managment* 20, 363-372, 1984.

[21] L.A. Zadeh: Fuzzy sets. *Information Control* 8, 338–353, 1965.

EJEMPLIFICACIÓN DEL USO DE CONJUNTOS BORROSOS EN LA VALORACIÓN DE LA CALIDAD DE LA ENSEÑANZA

Miquel Ferrer [1], Itziar García-Honrado[2]

[1] *Universitat Autònoma de Barcelona*, miquel.ferrer.puigdellivol@uab.cat

[2] *Universidad de Oviedo e investigadora afiliada en el ECSC*, garciaitziar@uniovi.es

Resumen

Numerosas investigaciones experimentales en didáctica de las matemáticas utilizan sistemas de rúbricas en sus análisis empíricos. En esta comunicación consideramos el potencial de la lógica borrosa y lo aplicamos al instrumento Instructional Quality Assessment (IQA) con el fin de redefinir los niveles que constituyen sus rúbricas y obtener interpretaciones graduales de los diversos elementos que analiza. Utilizamos los casos de dos profesores, Luis y Pilar, para ejemplificar la aplicación del instrumento y evidenciar cómo la lógica borrosa mejora la interpretación de los resultados que de él se desprenden.

Palabras Clave: Rúbricas, IQA, Conjunto borroso.

1 INTRODUCCIÓN

El uso de rúbricas para realizar investigaciones en didáctica de las matemáticas es algo frecuente y útil en muchos contextos. Podemos entenderlas como conjuntos de criterios y estándares que se utilizan para medir el nivel de desarrollo de una tarea y permiten homogeneizarla de acuerdo a unos criterios específicos y preestablecidos.

Diversos instrumentos de análisis incluyen rúbricas en sus diseños. Un ejemplo es el IQA (Instructional Quality Assessment), elaborado en el marco del proyecto MIST, de la Universidad de Vanderbilt, con los trabajos de M. Boston. Este instrumento mide la calidad de las oportunidades de aprender matemáticas que presentan los estudiantes en un aula [1].

En la presente comunicación nos centraremos en las rúbricas del IQA y nuestro objetivo es aplicar el potencial de los conjuntos borrosos [6] diseñando en cada caso un reflejo más próximo a la realidad de distintas situaciones de aula, que el que nos proporciona una clasificación en los niveles que constituyen las rúbricas.

Como ya han hecho otros autores [3] con escalas Likert, proponemos una flexibilización de la escala utilizada en estas rúbricas, la cual utiliza en su definición una compleja descripción lingüística de cómo asignar valores de evaluación. Así, obtendremos interpretaciones graduales de los diversos elementos que analiza. Para ello, utilizaremos los casos de dos profesores de matemáticas de 3º de ESO, Luis y Pilar, y ejemplificaremos la aplicación de tres rúbricas con el fin de evidenciar la mejora que la lógica borrosa proporciona en la interpretación de sus resultados.

2 DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO

El IQA presenta un conjunto de diez rúbricas ampliamente validadas ([1], [2] y [4]) planteadas para medir el grado de demanda cognitiva de la tarea, tal y como aparece en los materiales curriculares que se distribuyen a los alumnos, la demanda cognitiva de la actividad cuando se implementa en clase, y la calidad de la discusión en gran grupo posterior a la resolución por parejas [1]. No mide directamente lo que los estudiantes aprenden a través de la instrucción, pero sí que puede determinar las oportunidades que se presentan a los alumnos para aprender matemáticas en una clase. Como en [4], consideraremos que cuanto mayor sea la puntuación en cada una de las rúbricas del instrumento, más probable es que los estudiantes sean capaces de aprovechar mejor las oportunidades de aprendizaje que se les presentan en la situación de instrucción analizada.

En esta comunicación nos centramos únicamente en tres de las diez rúbricas del instrumento: Participación en la comunidad de aprendizaje, Conexiones entre las contribuciones de los estudiantes y Preguntas del profesor a los alumnos. A continuación describimos cada rúbrica y detallamos su aplicación más adelante.

Rúbrica A. Participación en la comunidad de aprendizaje: indica el grado de implicación de los estudiantes de la clase en la discusión en gran grupo. Consideramos que un alumno participa en la discusión en gran grupo si realiza cualquier tipo de intervención oral susceptible de aportar algún contenido que pueda cambiar algo de la situación de enseñanza. Si ningún alumno participa en el debate, la puntuación es de 0. Se obtiene 1 punto si menos del 25% de los estudiantes participan en la discusión en gran grupo. Una puntuación de 2 indica que entre el 25% y el 50% de los estudiantes participan en el debate. Se obtienen 3 puntos si entre el 50% y el 75% de los alumnos participan en la discusión. Finalmente, una puntuación de 4 muestra que más del 75% de los estudiantes del grupo han participado en la sesión de clase.

Rúbrica B. Conexiones entre las contribuciones de los estudiantes: establece el grado en el que las conexiones de los estudiantes se vinculan y conectan entre sí durante la sesión de discusión. El foco de atención son los alumnos y las relaciones entre sus intervenciones. Una puntuación de 0 indica que no se realizó la discusión en gran grupo, o bien que ésta no estaba relacionada con las matemáticas. Se obtiene 1 punto si los estudiantes no realizan ningún esfuerzo para conectar las aportaciones de los otros compañeros cuando participan en la discusión. Una puntuación de 2 indica que en uno o más momentos de la sesión los estudiantes conectan entre sí las contribuciones de otros compañeros, pero no manifiestan cómo sus ideas o posiciones se relacionan (p.ej.: "Estoy en desacuerdo con Ana"); o bien, sólo se realiza un esfuerzo claro para conectar las aportaciones de dos alumnos. Se obtienen 3 puntos si al menos dos veces durante la sesión, los estudiantes realizan intervenciones orales para conectar entre sí las aportaciones de unos y otros compañeros, y explicitan cómo se relacionan sus ideas y posiciones (p.ej.: "Estoy en desacuerdo con Ana, porque…"). Finalmente, se obtienen 4 puntos si los alumnos consistentemente conectan las contribuciones de los demás estudiantes y exponen oralmente cómo se relacionan sus ideas o posiciones.

Rúbrica C. Preguntas del profesor a los alumnos: mide el grado en que el profesor fomenta la participación de los estudiantes durante la discusión en gran grupo, realizando preguntas que promueven la aportación de pruebas y argumentos matemáticos. Una puntuación de 0 indica que no se realizó la discusión en gran grupo, o bien que ésta no estaba relacionada con las matemáticas. Se obtiene 1 punto si el docente no realiza esfuerzos para preguntar a los estudiantes con el fin de que prueben sus contribuciones, y no hay esfuerzos para preguntarles sobre explicaciones relativas a sus ideas y pensamientos. Una puntuación de 2 indica que el profesor pregunta esencialmente cuestiones relativas a explicaciones procedimentales sobre hechos memorizados a priori; o bien que hay uno o más esfuerzos generales, dirigidos a todo el grupo, para preguntar a los alumnos pruebas sobre sus evidencias o explicaciones de sus razonamientos (i.e. preguntar a todo el mundo; p.ej.: "¿Cómo obtuvisteis esta solución?). En cambio, se obtienen tres puntos si una o dos veces durante la clase se pregunta a los estudiantes por pruebas argumentadas sobre sus contribuciones orales y razonamientos matemáticos. Finalmente, se obtienen 4 puntos si el profesor invita consistentemente (casi siempre) a los estudiantes a que expliquen oralmente sus razonamientos, aportando pruebas empíricas o razonamientos deductivos.

3 EL USO DE CONJUNTOS BORROSOS FLEXIBILIZANDO LAS ESCALAS

Los parámetros de evaluación de las rúbricas contienen imprecisión en su formulación. Por ejemplo, se le asigna un 4 a la tarea del profesor para realizar preguntas a los alumnos si éste lo hace *casi siempre*. En otras ocasiones, comprobamos que el modo de romper con esta imprecisión es bastante artificial, ya que se evalúan de una forma distinta las conexiones entre los estudiantes si éstos enlazan 2 o 3 veces las aportaciones de sus compañeros, considerando que si lo hacen en 3 ocasiones se realiza de forma sistemática. En el caso de la participación, hacer esta escala categórica implica que se pierde la información obtenida en el trascurso de la actividad, ya que se evalúa igual una actividad en la que intervino un 74% de la clase que una donde intervino un 51%.

En primer lugar, en el caso de la participación se podría calcular el porcentaje exacto de participantes y realizar esa escala categórica entre 100 valores. No obstante, creemos que no es relevante distinguir entre dos porcentajes muy próximos. Por ejemplo, una participación del 74% y una del 75% no podría diferenciarse adecuadamente en una escala categórica de 4 puntos, ni en una escala categórica de 100 puntos, la cual además nos dificultaría el estudio.

Como segunda aproximación a una evaluación de la calidad de la enseñanza más fiel a la realidad, la cual recoge más matices que la utilización de la escala Likert propuesta, podemos pensar en describir un continuo haciendo uso de los intervalos flexibles. Así, permitimos que si se producen 2 conexiones entre las aportaciones de los estudiantes durante la clase, el valor se pueda situar entre el 3 y el 4 (para diferenciar el caso de que sólo haya una conexión).

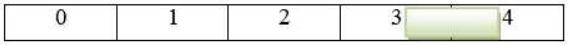


Figura 1: Valoración de las conexiones de los estudiantes.

De este modo, refiriéndonos a la participación, podemos hablar de que intervinieron aproximadamente un 74% de los estudiantes, sin adscribir el valor a un nivel concreto.

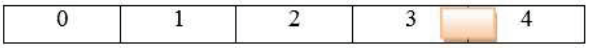


Figura 2: Valoración de la participación.

En cualquier caso, al describir un intervalo también aparecen problemas. El fundamental es: ¿cómo definir adecuadamente los extremos de ese intervalo?

No parece natural exigir exactitud en la definición de los extremos si justamente se habla de preguntas y respuestas imprecisas. Por este motivo, la propuesta que haremos en la comunicación es hacer una evaluación de un continuo, asignando un valor de creencia entre el 0 y el 1 a cada punto del intervalo. Este hecho nos permitirá flexibilizar la elección de los extremos. Así, una clase en la que haya participado alrededor de un 70% de los alumnos podría quedar definida de la siguiente forma (ver Figura 3):

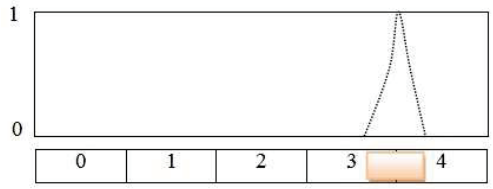


Figura 3: Valoración imprecisa de la participación.

Por tanto, estamos utilizando los conjuntos borrosos. Según la forma del gráfico que describen hay dos tipos de conjuntos borrosos simples de reconocer: los triangulares, que poseen un prototipo (elemento que se le asigna grado 1) y su crecimiento y decrecimiento es lineal; y los trapezoidales, que mantienen un crecimiento y decrecimiento lineal pero poseen un continuo de prototipos.

En este estudio proponemos utilizar los conjuntos borrosos trapezoidales, ya que es relativamente fácil trabajar con ellos si se conocen los extremos del intervalo que serán su soporte y los extremos del intervalo de prototipos.

La idea de utilizar estos conjuntos para describir términos imprecisos está muy ligada al concepto de variable lingüística introducido por Zadeh [7]. Se considera una variable lingüística aquella que toma valores lingüísticos, lo cual es menos preciso que el uso de números. Un ejemplo podría ser la variable altura tomando los valores: Muy bajo, bajo, ni alto ni bajo, alto y muy alto. Cada uno de los términos lingüísticos que puede tomar la variable se modela por un conjunto borroso. Existen valores de la variable que pueden ser asignados a dos de estos conjuntos borrosos y, por lo tanto, se flexibilizan los límites entre dos valores lingüísticos consecutivos.

Es frecuente el uso de 5 valores lingüísticos, p.ej.: muy bajo, bajo, medio, alto o muy alto. Todos ellos representados por conjuntos borrosos con posibilidad de intersecciones entre ellos.

En cada caso particular la percepción o valoración del experto, o del evaluador, se hace a través de un conjunto borroso. Para ello se tienen en cuenta los valores lingüísticos que puede tomar la variable y, así, se asigna una etiqueta lingüística a su conjunto borroso por comparación con los 5 valores lingüísticos citados anteriormente.

En la Figura 4 se muestra la representación de un conjunto borroso sobre las variables lingüísticas frecuentes, que por comparación con ellas puede corresponder a un valor lingüístico entre medio y alto.

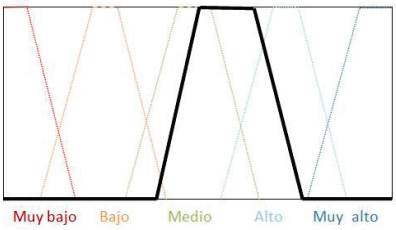


Figura 4: Variable lingüística.

4 APLICACIÓN PRÁCTICA DEL IQA. LOS CASOS DE LUIS Y PILAR.

En este apartado aplicamos las tres rúbricas en las discusiones en gran grupo de un problema de semejanza realizadas por dos profesores de secundaria, Luis y Pilar. Observamos las diferencias en sus resultados y exponemos algunas limitaciones operativas, las cuales tratamos en profundidad más adelante.

4.1. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La recogida de datos se ha realizado en dos centros de secundaria, ambos ubicados en un ámbito sociocultural medio-alto, con estudiantes de 14 y 15 años (3º de ESO). Nos centramos en las discusiones en gran grupo de un problema de semejanza en el plano (ver Figura 5) realizadas por dos profesores de secundaria: Luis (centro A) y Pilar (centro B).

Actividad introductoria 1: ¡Doblar figuras!

Dada la siguiente letra del abecedario, representa otra que sea el doble de grande. A continuación explica brevemente como la has obtenido y compárala con la original.

Figura 5: Enunciado de la actividad estudiada.

Ambos profesores presentan experiencias docentes medias en sus centros de trabajo, pero Luis pone énfasis en los algoritmos y en la aplicación de resultados en la enseñanza de las matemáticas. En cambio Pilar está altamente interesada en ser capaz de anticipar el aprendizaje de su alumnado y durante las clases procura fomentar que sus estudiantes resuelvan problemas y argumenten, oralmente y por escrito, los procedimientos que han seguido para encontrar la solución.

Los datos de las intervenciones de los profesores y los estudiantes se obtienen después de registrar en vídeo las discusiones en gran grupo y de realizar una transcripción escrita. Los investigadores estuvieron presentes durante

todas las sesiones realizando las grabaciones, pero sin participar en el desarrollo de las actividades de cada clase.

La tarea presenta un planteamiento abierto y la estrategia de resolución no es inminente al estar directamente relacionada con la interpretación del enunciado que realiza el alumno. Su demanda cognitiva es alta, ya que la resolución no es única y requiere que los estudiantes realicen conexiones con los conceptos matemáticos subyacentes y que para resolverla exitosamente deban elaborar diversas explicaciones y justificaciones [5].

Aunque en esta comunicación sólo analizaremos algunos aspectos de las discusiones en grupo de Luis y Pilar, destacamos que el ciclo de trabajo que siguen los alumnos es colaborativo y se inicia con la resolución por parejas y con lápiz y papel de la actividad, sigue con una discusión en grupo de 12 minutos en el caso de Luis y de unos 20 minutos en el de Pilar, y finaliza con la reflexión individual y escrita de los estudiantes, donde incorporan en sus protocolos de resolución los elementos tratados en la sesión de discusión y que no habían considerado en el trabajo por parejas.

4.2. APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

Recordemos que el objetivo de la comunicación es aplicar el potencial de los conjuntos borrosos para matizar los niveles que constituyen algunas de las rúbricas del IQA y, así, mejorar la interpretación de los resultados que de él se desprenden. A continuación ejemplificamos la aplicación del instrumento en tres de sus diez rúbricas (ver Tabla 1).

Rúbrica A. Participación en la comunidad de aprendizaje. En la clase de Luis asisten 22 alumnos, pero únicamente realizan intervenciones orales 9 estudiantes, es decir, aprox. el 41%. Por tanto, la puntuación en la rúbrica es un 2. En cambio, en la clase de Pilar hay 16 alumnos, de los cuales 9 intervienen en la discusión en gran grupo. Es decir, aprox. el 69% de los estudiantes participan en el debate. De este modo, se obtienen 3 puntos en la rúbrica.

Rúbrica B. Conexiones entre las contribuciones de los estudiantes. En la sesión de Luis los alumnos realizan intervenciones muy breves y exposiciones de corta duración. Cuando participan no manifiestan una conexión entre su explicación y las observaciones de los demás compañeros. Por este motivo, la puntuación en la rúbrica es un 1. En cambio, en la clase de Pilar, los estudiantes conectan en diversas ocasiones sus intervenciones con las contribuciones de los demás compañeros, pero no manifiestan cómo se relacionan sus ideas o posiciones. Por tanto, se obtienen 2 puntos en la rúbrica.

Rúbrica C. Preguntas del profesor a los alumnos. Luis no realiza esfuerzos claros para preguntar a sus estudiantes con el fin de que realicen argumentaciones sobre los hechos observados. Aún así, algunas veces sí les pregunta por explicaciones muy breves sobre aspectos procedimentales y casi siempre dirige sus cuestiones a todo el grupo, sin particularizar en ningún alumno concreto. Por tanto, la puntuación en esta rúbrica oscila entre el 1 y el 2. En cambio, Pilar realiza esfuerzos consistentes para que los estudiantes casi siempre expliquen oralmente sus evidencias y aporten pruebas o razonamientos deductivos. Por este motivo, se obtienen 4 puntos en la rúbrica.

Tabla 1: Resumen de la aplicación de las tres rúbricas.

	LUIS	PILAR
Rúbrica A	2	3
Rúbrica B	1	2
Rúbrica C	1 ó 2	4

4.3. INTERPRETACIÓN BORROSA DE LAS RÚBRICAS DEL INSTRUMENTO

En esta sección evaluamos las tres rúbricas anteriores con un conjunto borroso específico para cada clase: la de Pilar y la de Luis. Cada conjunto borroso representará lo ocurrido en las sesiones basando su construcción en el significado de las rúbricas.

Respecto al primer caso, en el que se hace referencia a la participación, tras el análisis crítico de los visionados de las grabaciones se percibe muchísima más participación de los alumnos en la clase de Pilar que en la de Luis. Por tanto, además de basarnos en el porcentaje de participación estricto de los estudiantes que han intervenido al menos una vez en la clase (69%), incluimos otras variables que hemos tenido en cuenta en nuestra percepción de la participación: los intentos de participación (i.e. los alumnos que levantan la mano); la participación que se produce al contestar en conjunto respuestas generales (i.e. mayoría de los estudiantes diciendo sí o no); la frecuencia con que participan los alumnos; la iniciativa de la participación que puede ser por parte del alumno o del profesor; y si las contestaciones parecen reflexivas y con argumentación, o por el contrario aparentan aleatoriedad. Estas consideraciones hacen que diseñemos un conjunto borroso que dé una valoración más amplia que la atribuida por el conjunto unipuntual formado por el 69%. La Figura 6 muestra un diseño de la valoración de la participación tras la visualización del vídeo de la clase de Pilar.

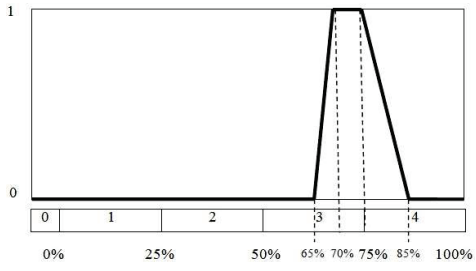


Figura 6: Participación en la clase de Pilar.

Refiriéndonos a las etiquetas lingüísticas podemos asignar en este caso una participación alta de los estudiantes. En el caso de Luis, la participación según el porcentaje de alumnos que han intervenido al menos una vez es del

41%, pero sus alumnos no participan habitualmente de forma voluntaria y contestan fundamentalmente con monosílabos. Por estos motivos, el diseño del conjunto borroso de la valoración de la participación de sus estudiantes refleja una participación media de acuerdo con su etiqueta lingüística (ver Figura 7).

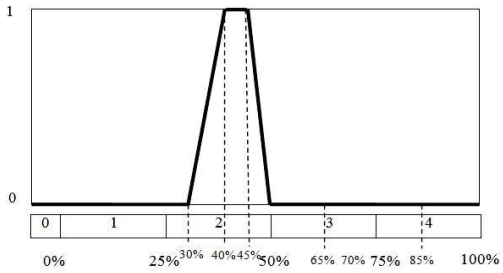


Figura 7: Participación en la clase de Luis.

Atendiendo a la Rúbrica B, referida a las conexiones entre las contribuciones de los estudiantes, en ningún grupo los alumnos basan sus razonamientos en las intervenciones de otros compañeros. A lo sumo en la clase de Pilar algunos estudiantes explicitan aprobación con otros, pero sin realizar argumentaciones. Así pues, clasificaríamos como bastante bajas las conexiones de los estudiantes en la clase de Pilar. Dentro del estadio que la rúbrica asigna el valor 2, lo aproximaríamos al valor 1 al no ser frecuente entre sus alumnos este comportamiento (ver Figura 8).

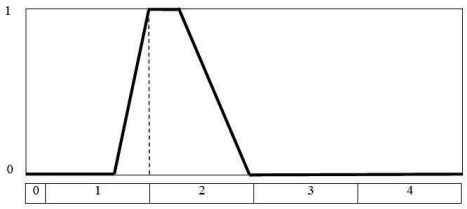


Figura 8: Conexiones entre los estudiantes de Pilar.

En la clase de Luis ningún alumno se esfuerza en comparar o reforzar sus resultados con otros compañeros. Por esto, la valoración corresponde con una conexión baja o muy baja entre los estudiantes (ver Figura 9).

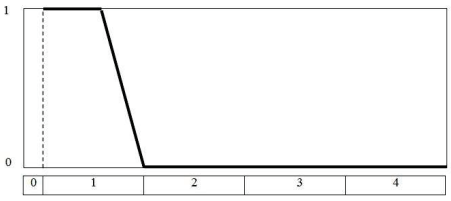


Figura 9: Conexiones entre los estudiantes de Luis.

En cuanto a la Rúbrica C, relativa a las preguntas del profesor a los alumnos, aparecen notables diferencias entre los dos docentes, aunque estas diferencias están llenas de matices. Las preguntas que hacen los dos se podrían clasificar de procedimentales, aunque por la retroalimentación de sus estudiantes Pilar es capaz de llegar a diálogos con ellos en los que les demanda argumentación y razonamientos. No obstante, Luis también intenta hacer alguna comprobación empírica con sus alumnos (p.ej.: computar el área de la figura que ha de ser el doble de grande), pero sus preguntas van más encaminadas a respuestas cortas por parte de sus estudiantes.

Con el fin de intentar reflejar estos matices, la valoración de las preguntas de los dos profesores se recoge en las Figuras 10 y 11.

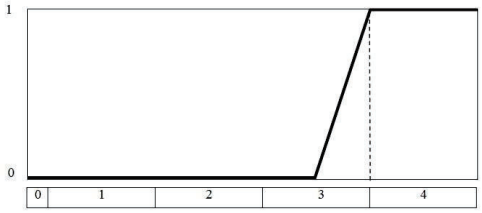


Figura 10: Preguntas de Pilar a sus alumnos.

En ellas vemos que las preguntas de Pilar se podrían valorar como muy buenas (muy altas) y las de Luis se podrían valorar entre medias y pobres (bajas).

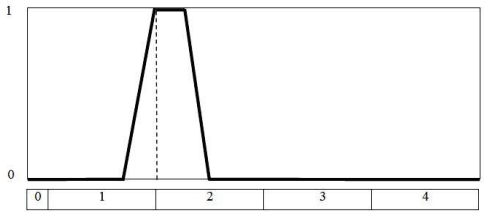


Figura 11: Preguntas de Luis a sus alumnos.

5 CONCLUSIONES

Realizamos una comparación entre la aplicación original del instrumento y su interpretación borrosa, y presentamos las consideraciones finales del estudio.

5.1. DIFERENCIAS ENTRE LA APLICACIÓN ORIGINAL DEL INSTRUMENTO Y LA APLICACIÓN BORROSA

La aplicación original del instrumento IQA sólo permite obtener coeficientes numéricos rígidos de los diversos aspectos que analizan sus rúbricas. En cambio, su aplicación borrosa posibilita realizar valoraciones más detalladas de los parámetros estudiados en cada grupo de alumnos. De este modo, se obtienen interpretaciones graduales de los elementos analizados, las cuales se recogen en los conjuntos borrosos que evalúan cada rúbrica.

En definitiva, la aplicación borrosa supone una ventaja en la interpretación de los resultados, porque a parte de considerar la frecuencia de alumnos distintos que participan en la discusión en gran grupo; o el número de conexiones realizadas entre estudiantes y cómo se relacionan sus razonamientos; o bien la frecuencia con la que el profesor

pregunta a los alumnos y el grado con el que fomenta su participación en la sesión de clase, la utilización de conjuntos borrosos permite tener en cuenta más variables. Algunos ejemplos son los intentos de participación de los estudiantes durante la clase, el tipo de preguntas que realizan al profesor o a otros compañeros y la calidad de sus razonamientos (argumentados o aleatorios). Además, permite matizar la naturaleza de las conexiones entre las aportaciones de los distintos alumnos y la calidad de las preguntas que el profesor formula durante la clase.

5.2. CONSIDERACIONES FINALES Y PROSPECTIVO

En esta comunicación hemos observado que una de las principales dificultades de implementar instrumentos como el IQA es que sus rúbricas se definen en base a coeficientes numéricos rígidos. No obstante, la definición de cada nivel está lingüísticamente descrita utilizando términos imprecisos. Por este motivo, a veces resulta complejo seleccionar un único valor, como hemos observado anteriormente para el caso de la Rúbrica C (Preguntas del profesor a los alumnos). En ocasiones dos evaluadores distintos analizando la misma situación pueden no determinar la misma categoría. Además, dentro de una misma categoría, frecuentemente es deseable poder distinguir matices propios de cada situación, lo que no permite la rigidez de la escala.

Gracias a una lectura borrosa de los niveles indicados en las rúbricas, hemos podido elaborar una propuesta gradual que es susceptible de facilitar una interpretación más fiel a la realidad de los datos de investigación y una mejora en la interpretación de los resultados. Así, hemos dado respuesta al objetivo de la comunicación, matizando los niveles que constituyen tres rúbricas del IQA. Del mismo modo, destacamos que el procedimiento ejemplificado en este documento es generalizable a las demás rúbricas del instrumento.

En un futuro nos gustaría poder llegar a un conjunto borroso compendio de todas las valoraciones obtenidas en las distintas rúbricas, el cual dé una idea global de la calidad de la enseñanza. En el instrumento IQA no existe un método que resuma la tendencia general de las rúbricas. No obstante, en [4] se constata que cuanto mayores sean las puntuaciones en las rúbricas del instrumento, mejor se puede considerar la calidad de la enseñanza, quizás agregando las rúbricas a través del máximo se podría en algún caso conseguir un único output.

En el ámbito educativo creemos que es muy positiva la utilización de conjuntos borrosos para obtener valoraciones en cuanto a situaciones de aula. De hecho, en el intento por modelar muy rígidamente situaciones que encierran una gran complejidad, se pierden muchos matices que pueden ser recogidos por un conjunto borroso. Además, se cambiaría la concepción de evaluar, actualmente entendida como realizar una clasificación, para dar paso a una evaluación que consista en un diseño individualizado a cada caso y más ajustado a la realidad. Por lo tanto, proponemos la popularización de la existencia de los conjuntos borrosos y su capacidad de modelar la imprecisión, dentro del gremio de profesores y personas dedicadas a la investigación de cuestiones didácticas.

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente financiado por los proyectos EDU2011-23240 y TIN2011-29827-C02-01, por la Beca FPI BES-2012-053575 y la ayuda económica de Proyectos de grupos emergentes de la U. de Oviedo.
Agradecemos al profesor Josep Mª Fortuny, de la Universitat Autònoma de Barcelona, los comentarios de una versión previa de este documento, así como la participación de los profesores con pseudónimos Luis y Pilar.

Referencias

[1] M. D Boston: Assessing the quality of mathematics instruction. *Elementary School Journal, 113*(11). pp.76–104, 2012.

[2] M. D. Boston, M. K. Wolf: Assessing academic rigor in mathematics instruction: The development of Instructional Quality Assessment Toolkit. *Los Angeles, CA: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing,* Report No. 672, 2006.

[3] M.A. Gil, G. González: Fuzzy vs. Likert Scales in Statistics. *Studies in Fuzziness and Soft Computing. Combining Experimentation and Theory.A Hommage to Abe Mamdani* (Eds. E. Trillas, P. Bonissone, L. Magdalena, J. Kacprzyk) Springer Berlin Heidelberg, vol. 271, pp.470-420, 2012.

[4] K.. Jackson, A. Garrison, J. Wilson, L. Gibbons, E. Shahan: Exploring Relationships Between Setting Up Complex Tasks and Opportunities to Learn in Concluding Whole-Class Discussions in Middle-Grades Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(4), pp. 646-682, 2013.

[5] M.K. Stein, M.S Smith: Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematic Teaching in the Middle School*, 3(1), pp. 268-275, 1998.

[6] E. Trillas, S. Guadarrama: Fuzzy representations need a carful design. *International Journal of General Systems*. London: Taylor & Francis, 39(3), pp.329-346, 2010.

[7] L.A. Zadeh: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – III. *Information Sciences,* 9(1), pp. 43-80, Dec. 1975.

UNA EXPERIENCIA DOCENTE SOBRE EL USO COTIDIANO DE LAS DIFERENTES LÓGICAS

J. Tinguaro Rodríguez[1], Carely Guada[1], Javier Montero[1,2]

[1]Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid 28040

[2]Instituto de Geociencias, CSIC-UCM, Madrid 28040

RESUMEN

En este artículo se presentan los resultados de una experiencia realizada con dos grupos de alumnos, uno de Ciencias Sociales y otro de Ciencias Matemáticas, con la finalidad de observar las posibles disimilitudes en la percepción y uso de diferentes lógicas. El resultado de esta experiencia inicial mostrará, sobre todo, cómo el científico acepta más fácilmente que el humanista modelos que su propio sentido común rechaza, lo cual es un aspecto que se debe tomar en cuenta en estudios formales posteriores.

Palabras Clave: Lógica binaria, Lógica trivalente, Lógica difusa.

1 EL PROBLEMA DE LA GRADUALIDAD

Uno de los problemas más críticos con los que se enfrenta el desarrollo de las tecnologías difusas, es la estimación de los grados de pertenencia; esto es, cómo medir de manera objetiva (o al menos intersubjetiva) la gradualidad que se observa en los conceptos difusos, como son la mayor parte de las nociones que se usan en la vida cotidiana. Pensemos en el almacenamiento y la recuperación de información imprecisa de una base de datos, en donde los registros pertenecen en un cierto grado de pertenencia a los conjuntos identificados implícitamente definidos mediante ciertas *querys* o consultas [7]. Y es que, para muchas aplicaciones las estimaciones subjetivas de la gradualidad resultan insuficientes.

Por ejemplo, la Teoría de la Probabilidad dispone de una herramienta bien desarrollada, que a través de experimentos perfectamente definidos y consistentes con la lógica binaria [3], permite calcular frecuencias relativas, y de este modo estimar o contrastar empíricamente cada probabilidad.

Este problema de *estimabilidad* de los grados borrosos ha sido abordado por algunos autores, asignando a los grados de pertenencia una estimación basada en la frecuencia con que los usuarios escogen determinada palabra [1]. Estas propuestas producen una cierta confusión entre probabilidad y borrosidad [4], ya que sugieren, por ejemplo, que una persona es "alta" en la medida en que los demás nos referimos a esa persona como "alta". De algún modo, por ejemplo, a partir de esta propuesta consideraríamos que una persona sería "alta" en grado 0.90, si el 90% de la gente escoge la palabra "alta" para referirse a ella.

En cierto modo, este enfoque implica o conlleva implícitamente aproximar un concepto impreciso mediante su versión binaria o precisa, de manera que en el ejemplo anterior se obliga a asignar la valoración 1 a la verificación del concepto “alto” y la valoración 0 a su complemento “no-alto”, no admitiendo en principio valoraciones o grados intermedios (cada usuario debe elegir entre las dos valoraciones extremas 0 y 1). Entonces, bajo esta aproximación el grado de pertenencia de una persona a la categoría “alto” se computa mediante un argumento frecuentista, asociándolo a la media de las valoraciones en {0,1} que recibe la altura de esa persona por parte de los usuarios (i.e. a la proporción de usuarios que consideran que esa persona es “alta”).

En otras palabras, el grado de verificación en este caso se asimila a la Probabilidad con la que los individuos escogen una u otra opción, 0 o 1. Sin embargo, cuando la persona se encuentra cercana a la frontera entre las categorías “alto” y “no-alto”, es decir cuando en un contexto borroso la graduación de esta persona estaría cercana al punto de simetría 0.5 (i.e. al punto equidistante entre los dos extremos 0 y 1), una pequeña desviación (digamos la correspondiente por ejemplo a unas valoraciones teóricas 0.45 o 0.55), puede hacer que los usuarios asignen con cierta

unanimidad uno de los dos valores extremos (0 o 1) como el más cercano al forzar la consideración de esas nociones como nítidas o precisas.

Por este motivo, la visión frecuentista no ofrece una buena estimación de la gradualidad borrosa (el grado de verificación del concepto "alto" puede estar en el entorno de 0.5, pero la frecuencia con la que los usuarios escogen la valoración "alto" puede estar cercana al 100%). Como se desprende del análisis anterior, parte del problema está en que de manera implícita se está obligando a los usuarios a pensar en términos binarios, proporcionándoles solo dos opciones para expresar su valoración.

2 SOBRE EL OBJETIVO INICIAL DE LA EXPERIENCIA

El objetivo inicial de la experiencia que nos planteamos consistía en determinar en qué medida es posible asociar el grado de verificación de un concepto con el tiempo que los usuarios necesitan para hacer una elección nítida entre su verificación (1) y no-verificación (0). De algún modo, este planteamiento se basa en la hipótesis de que cuando el concepto claramente se verifica o no se verifica, el usuario rápidamente identifica cuál de las dos situaciones es la correcta. Pero a medida que la verificación del concepto se aproxima al punto de simetría, se asume que las dificultades aumentarán y se necesitará más tiempo para discernir una diferencia que permita escoger una de las dos opciones disponibles. Así pues, si esta hipótesis es correcta, podríamos asociar tiempos de respuesta mayores con grados más cercanos a 0.5, y tiempos de respuesta menores con grados cercanos a 0 o 1.

Es importante resaltar que la experiencia que se relata en este trabajo es una aproximación preliminar destinada a verificar la posibilidad de llevar a cabo un experimento más formal para comprobar o descartar la hipótesis anterior. En este sentido, antes de llevar a cabo ese experimento formal, decidimos tantear preliminarmente algunos posibles procedimientos experimentales. Por ejemplo, la información a partir de la cual los usuarios han de discernir la verificación o no verificación de la categoría lingüística bajo análisis, ¿ha de presentarse directamente (digamos de manera visual) o ha de facilitarse mediante una descripción numérica? ¿Es adecuado permitir a los usuarios solo dos opciones en su valoración? Por este motivo, en principio decidimos dividir esta experiencia preliminar en dos cuestiones o experiencias más básicas, de manera que en la primera la información se provea de manera visual y en la segunda esta descripción visual se acompañe de información numérica. Se decidió también en principio solo admitir respuestas binarias, pero prestando una atención especial a las posibles dificultades que esta restricción pudiera plantear a los usuarios.

Por otro lado, en tanto que las habilidades matemáticas de los usuarios pueden distorsionar gravemente el experimento cuando se facilita la información de manera numérica [5], se decidió asimismo observar el comportamiento de dos grupos diferenciados: por una parte, los alumnos de un curso de Máster en Matemáticas (Área de Ciencias), y por otra parte, los alumnos de un Máster en Ciencias de la Información (Área de Ciencias Sociales). Nótese que estas dos áreas de conocimiento difieren no solo en su grado de utilización de las Matemáticas y las habilidades numéricas y de cálculo, sino que también difieren en cuanto a sus criterios de *cientificidad* del conocimiento, que en Ciencias Sociales se aproxima más a un proceso de coherencia *subjetiva*, mientras que en Ciencias se suele asociar a una verificación experimental o empírica *objetiva* [5].

Por tanto, mediante la sencilla experiencia que se relata a continuación, se pretendía dilucidar si efectivamente las habilidades matemáticas suponen un factor relevante a la hora de estimar los grados de pertenencia en base a información con contenido numérico. Adicionalmente, se intenta verificar otros factores a tener en cuenta en el diseño de un experimento más formal, como la frecuencia con la que la gente escoge cada una de las dos opciones admitidas, o si existen diferencias entre los dos grupos a la hora de aceptar esta representación binaria de la realidad.

El procedimiento de esta experiencia es muy sencillo: en primer lugar, se exhiben en una pantalla las imágenes de dos ciudades A y B interconectadas por una línea, mostrándose a continuación la figura de un automóvil posicionado sobre esa línea. Posteriormente, se pregunta a los estudiantes cuál es la ciudad que se encuentra más cercana al emplazamiento del coche. Evidentemente, si el automóvil se ubica muy cerca de una de las dos ciudades, es de esperar que todos los encuestados señalen dicha ciudad de manera inmediata. La imagen sencillamente es ilustrativa a efectos del estudio, por lo que la misma no es a escala. Además, nótese que deliberadamente se introduce cierta imprecisión en la información en tanto que no se

especifica qué punto concreto del coche (i.e. su límite anterior o posterior, o el centro) ha de considerarse como estableciendo la localización exacta (i.e. precisa) del objeto. La cuestión es observar el comportamiento de los estudiantes y sus tiempos de respuesta a medida que el automóvil se va desplazando hacia la zona intermedia entre las ciudades, y percibir ese comportamiento en función del tipo de información que se maneja (numérico o gráfico).

3 RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA

Así pues, con el propósito de formalizar el procedimiento de esta experiencia preliminar, se dividió el estudio en dos cuestiones, proporcionando primero la información solo en términos visuales y, posteriormente, en la segunda pregunta, también en términos numéricos. En ambos casos, para cada uno de los alumnos, se recogió la alternativa (A o B) seleccionada así como el tiempo utilizado para facilitar la respuesta, con el fin de obtener un tiempo promedio de respuesta ponderado con un operador OWA [8], probablemente cercano al máximo. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, las habilidades numéricas podrían distorsionar gravemente las respuestas a la segunda pregunta, por lo que la experiencia se realizó de manera separada en un grupo de Ciencias y otro de Ciencias Sociales.

El número de alumnos de Ciencias Matemáticas y Ciencias Sociales que respondieron las dos preguntas fueron de unas 10 y 15 personas respectivamente. Al primer grupo se le hicieron dos preguntas: cuál es la ciudad más cercana respecto a una posición (imprecisa) entre el segmento que las une, primero solo con la referencia visual y luego con información numérica (distancia en kilómetros hasta la ciudad A). A continuación, al segundo grupo se les formalizaron las mismas preguntas pero en orden inverso. Y finalmente, al primer grupo se les repitió la primera pregunta pero esta vez agregando una tercera opción a las posibles respuestas con la finalidad de observar si modificaban su respuesta original.

El motivo por el cual se llevaron a cabo las cuestiones en orden inverso para los dos grupos se basaba en plantear a cada grupo en primera instancia la cuestión establecida mediante una información menos familiar, por ejemplo, la numérica para los estudiantes de Ciencias Sociales.

3.1 ENCUESTA 1: ALUMNOS DE CIENCIAS MATEMÁTICAS SIN INFORMACIÓN NUMÉRICA

La primera experiencia se llevó a cabo con los alumnos de Ciencias Matemáticas, presentándoles en la pantalla una imagen (ver Figura 1) en la que aparecían dos ciudades conectadas por una línea, en la cual se ubica un coche desplazándose sobre ella.

Como era de esperar, en el momento en que el coche salía de la ciudad A, los alumnos fueron unánimes y rápidos en identificar que esa ciudad estaba más cerca del coche (respuesta lograda en menos de 2 segundos como máximo). Sin embargo, en el entorno del punto medio del recorrido, los tiempos de respuesta se fueron alargando sensiblemente, y el esfuerzo por discernir qué distancia era mayor se hizo notable en sus expresiones al enfocar vehementemente hacia la imagen. Tras un intervalo de tiempo considerablemente mayor, los alumnos seleccionaron de forma sorprendentemente equitativa las dos ciudades.

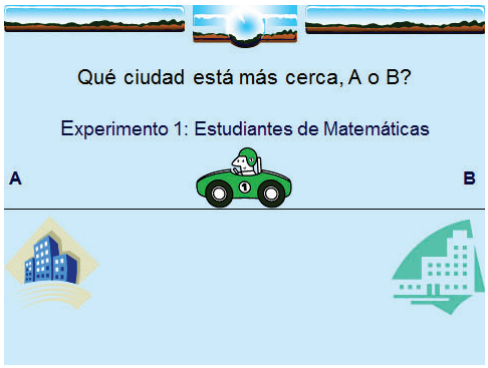


Figura 1: Estudiantes de Matemáticas (no numérica).

3.2 ENCUESTA 2: ALUMNOS DE CIENCIAS MATEMÁTICAS CON INFORMACIÓN NUMÉRICA

Seguidamente, a los mismos alumnos se les indicó que la distancia entre las dos ciudades era de 500 kilómetros, y luego se les suministró información numérica de la distancia a la ciudad A a la que se encontraba el coche (en la primera experiencia sólo disponían de la imagen con las dos ciudades y el coche), aunque sin precisar qué punto concreto del automóvil era el que se encontraba a esa distancia (ver Figura 2).

En este caso, el tiempo de respuesta cuando el coche se situó en algunos puntos todavía cercanos a la ciudad A fue ligeramente más largo (mayor a 4 segundos en algunos alumnos) que en la situación equivalente del ejemplo anterior basado solamente en información anumérica. Este pequeño aumento en el tiempo de respuesta puede asociarse a que los alumnos se cercioran ahora de que la impresión visual que reciben es correcta numéricamente. No obstante, alcanzado el kilómetro 251, en menos de 2 segundos y de manera unánime, todos señalaron a la ciudad B como la más cercana.

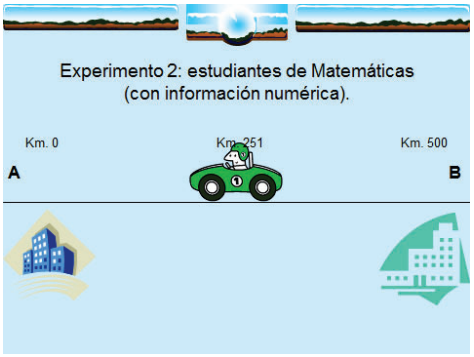


Figura 2: Estudiantes de Matemáticas (numérica).

Nótese que no se obligó a los alumnos a escoger qué ciudad es la más cercana al situar el coche en el kilómetro 250, puesto que sólo se quería observar sus respuestas bajo el supuesto de que la graduación está cercana al punto de simetría.

3.3 ENCUESTA 3: ALUMNOS DE CIENCIAS SOCIALES CON INFORMACIÓN NUMÉRICA

Una vez efectuadas las dos preguntas anteriores al grupo de alumnos de Ciencias Matemáticas, se procedió a realizarlas al grupo de alumnos de Ciencias Sociales en orden inverso.

En primer lugar, por tanto, se elaboró la pregunta con información numérica. En este caso, los estudiantes de Ciencias Sociales parecieron tardar ligeramente más que los alumnos de Ciencias Matemáticas en responder en cada una de las localizaciones del coche que se les plantearon. Y si bien todos unánimemente señalaron a la ciudad B como la más cercana cuando se les mostró que el coche estaba en el kilómetro 251, el tiempo de respuesta en este punto medio fue en algunos casos mayor a 2 segundos (ver Figura 3).

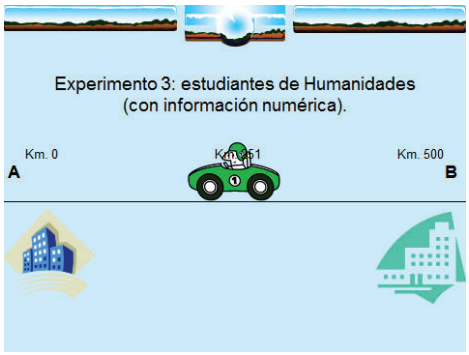


Figura 3: Estudiantes de Ciencias Sociales (numérica).

En cierto modo, estos resultados parecen sugerir que, similarmente a los de Ciencias Matemáticas, los estudiantes de Ciencias Sociales también deciden aprovechar la información numérica extra que se les facilita para intentar cerciorarse de que su impresión visual es correcta. Pero al tener menos familiaridad con la representación numérica de la información, sus tiempos de respuesta parecen aumentar en relación a los de los estudiantes de Ciencias Matemáticas.

3.4 ENCUESTA 4: ALUMNOS DE CIENCIAS SOCIALES SIN INFORMACIÓN NUMÉRICA

Inmediatamente después de responder a la pregunta con información numérica, se realizó a los estudiantes de Ciencias Sociales la misma serie de preguntas, ahora sólo con los gráficos y sin datos numéricos de distancias.

Aunque sus reacciones y tiempos de respuesta mostraron un patrón similar a los ya observados en los alumnos de Ciencias Matemáticas al ir acercándose el automóvil a la posición central, de forma inesperada, cuando el coche se colocó en el centro del eje que separa las dos ciudades y se les solicitó seleccionar la ciudad más cercana, varios estudiantes simultáneamente señalaron que el coche estaba en "medio", y en menos de 3 segundos todos unánimemente se negaron a escoger una de las dos ciudades como la más próxima. Todos estuvieron de acuerdo en que el coche estaba "a mitad de camino" y que no se podía escoger entre las dos ciudades.

Y en la discusión que surgió con este motivo, muchos alumnos revisaron la respuesta ofrecida en el caso numérico, al darse cuenta de que el kilómetro 251 no era significativamente diferente al kilómetro 250, y que en cualquier caso, ese

kilómetro 251 también debiera haberse interpretado como estar "a mitad de camino" entre ambas ciudades.

Figura 4: Estudiantes de Ciencias Sociales (no numérica).

3.5 ENCUESTAS 5 Y 6: VUELTA A LOS ALUMNOS DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Tras observar cómo el comportamiento de los alumnos de Ciencias Sociales al plantearles las cuestiones mediante información no numérica presentaba sensibles diferencias respecto a los alumnos de Ciencias Matemáticas, llegando incluso a rechazar el planteamiento binario del problema, decidimos retornar a los estudiantes de Ciencias Matemáticas para plantearles las mismas cuestiones, esta vez ofreciéndoles la opción de estar "a mitad de camino" como una tercera opción de respuesta.

Ahora, al presentarles la información no numérica en primer lugar (encuesta 5), todos los alumnos escogieron la opción "a mitad de camino" de manera inmediata y unánime cuando el coche se situó en la zona intermedia entre ambas ciudades. En la discusión que surgió se les señaló la potencial inconsistencia entre las diferentes respuestas (unánimes) que habían dado a la misma pregunta al permitirles opciones diferentes. No obstante, la mayoría estuvo de acuerdo en que si el primer día (encuesta 2) no existía la tercera opción, ésta no se podía introducir a posteriori, y por tanto no veían ninguna contradicción entre las opiniones que habían expresado en días diferentes.

La introducción de la información numérica produjo resultados no unánimes cuando el coche se situó en el kilómetro 251: unos siguieron basando su razonamiento en que 251 es mayor que 250 (y por tanto afirmaron que el coche estaba más cerca de la ciudad B), y otros aceptaron que en este caso la tercera opción ("a medio camino") era la más adecuada de las tres.

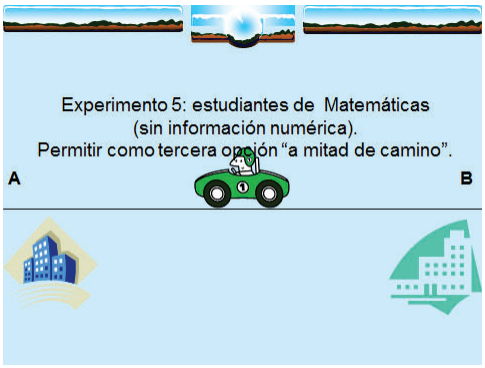


Figura 5: Estudiantes de Ciencias Matemáticas (tres opciones).

4 CONCLUSIONES

A pesar de que con esta experiencia se perseguía sólo una observación preliminar para el diseño posterior de un experimento más formal, con un sistema de medición de tiempo de respuestas más fiable y con una población controlada, los resultados sugieren que efectivamente esos tiempos de respuesta dependen de las habilidades numéricas de los sujetos, lo cual puede considerarse ciertamente un problema si se aborda esta cuestión fuera de un modelo subjetivo.

No obstante, quizá más importante que esta observación provisional, son las siguientes percepciones:

- La experiencia sugiere que es más fácil lograr el consenso sin información numérica que con información numérica.

- Los alumnos de Ciencias Matemáticas parecen tener una mayor predisposición a aceptar las opciones que se les presentan, y a no plantearse la posibilidad de construir o aceptar opciones que se adapten mejor a la información que reciben.

- Los estudiantes de Ciencias Sociales, sin embargo, tienden a responder las preguntas desde una racionalidad más práctica que con un criterio de objetividad empírico.

- El cómo se hace la pregunta (qué información se suministra y qué opciones se presentan) influyen decisivamente en los encuestados.

- Las reglas lógicas (binarias) que en ocasiones se imponen de manera artificial pueden conllevar un sesgo muy apreciable en la interpretación de la realidad.

En cierto modo, de acuerdo con este estudio preliminar, podría concluirse que las reglas lógicas (binarias) con las que en ciertos casos nos dotamos para la comprensión de la realidad pueden resultar no tan lógicas. La introducción de una lógica diferente (no binaria) puede cambiar decisivamente nuestra percepción y visión de la realidad [9].

Debemos no obstante subrayar que la experiencia relatada en este trabajo constituye tan solo un estudio preliminar de cara a la concepción de un experimento más formal, y en este sentido las conclusiones que hemos aportado solo pretenden reseñar ciertos problemas que podemos encontrar al plantear una experiencia más rigurosa, sugiriendo la existencia de diferencias cuantitativas (en términos de los tiempos de respuesta a cada cuestión) y cualitativas (en términos de las opciones de respuesta consideradas) entre los estudiantes de ciencias y letras cuando la información se presenta de manera numérica o anumérica.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de España, proyecto TIN2012-32482.

REFERENCIAS

[1] E. Hisdal: Are grades of membership probabilities. *Fuzzy Sets an Systems* 25:325-348, 1988.

[2] J. Montero: Fuzzy logic and science. *Studies in Fuzziness and Soft Computing* 243:67-78,2009.

[3] J. Montero: La ilógica de nuestra lógica. *Seminario del Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Informática,* Noviembre 23, 2012.

[4] J. Montero, M. Mendel: Crisp acts, fuzzy decisions. *Advances in Fuzzy Logic* (S. Barro, A. Sobrino, A. Bugarin, eds.), Universidad de Santiago de Compostela 1998.

[5] J.R. Núñez: Metodología de las Ciencias Sociales. *Alfadil,* 1989.

[6] J. A. Paulos: Innumeracy, mathematical illiteracy and its consequences. *Hill and Wang,* 2001.

[7] A. Urrutia, M. Varas, J. Galindo: Diseño de una Base de Datos Difusa Modelada con UML. *VIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación,* 1027-1038, 2002.

[8] R.R. Yager: On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, 183-190, 1988.

[9] L.A. Zadeh: Fuzzy sets. *Information and Control* 8:338-353, 1965.

Diseño de Métodos de Combinación de Clasificadores Difusos para Problemas de Alta Dimensionalidad Mediante Random Oracles

Krzysztof Trawiński[1], **Arnaud Quirin**[2], **Oscar Cordón**[3]

[1,3]*European Centre for Soft Computing, 33600 - Mieres (Asturias), España*,
{krzysztof.trawinski,oscar.cordon}@softcomputing.es
[2]*Galician Research and Development Center in Advanced Telecommunications (GRADIANT), Communications Area, Edif. CITEXVI, local 14, University of Vigo, 36310 Vigo, España*, aquirin@gradiant.org
[3]*Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial (DECSAI) y Centro de Investigación en Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (CITIC-UGR), Universidad de Granada, 18071 Granada, España*, ocordon@decsai.ugr.es

Resumen

Los sistemas basados en reglas difusas sufren de la denominada "maldición de las dimensiones" (*curse of dimensionality*) cuando se aplican a conjuntos de datos de alta complejidad (es decir, con un gran número de variables y/o ejemplos). Los métodos de combinación de clasificadores difusos han demostrado ser una buena técnica para afrontar este tipo de problemas. En esta contribución, proponemos la extensión de nuestra metodología previa de diseño de multiclasificadores difusos basada en el uso de *bagging* y FURIA, mediante el uso de dos variantes de *random oracles*, un enfoque avanzado para el diseño de métodos de combinación de clasificadores clásicos. El objetivo final es inducir una mayor diversidad en la generación de los clasificadores difusos individuales, obteniendo de este modo una mejora en el rendimiento del sistema. La nueva propuesta se valida en una amplia experimentación que considera 29 conjuntos de datos de alta complejidad procedentes de los repositorios UCI y KEEL. Los resultados obtenidos demuestran el buen comportamiento de los métodos propuestos en comparación con los generados considerando la metodología anterior y los basados en clasificadores clásicos del estado del arte.

Palabras Clave: Combinaciónes de clasificadores basados en reglas difusas, *random oracles*, datos de alta complejidad.

1 INTRODUCCIÓN

Los *sistemas de clasificación basados en reglas difusas* (SCBRD) [11, 12] son conocidas herramientas de soft computing que han demostrado una alta capacidad de extracción y representación del conocimiento a la hora de modelar problemas de clasificación complejos y no lineales.

Sin embargo, cuando se aplican a conjuntos de datos de alta complejidad, es decir, con un gran número de variables y/o ejemplos, sufren la denominada "maldición de las dimensiones" (*curse of dimensionality*) [11]. Este fenómeno provoca también un problema de escalabilidad en términos de tiempo de ejecución y consumo de memoria.

Los *métodos de combinación de clasificadores basados en reglas difusas* (MCCBRDs) han demostrado ser una buena solución para afrontar esta problemática. En [19], propusimos una metodología para la generación de MCCBRD que integraba el método "Fuzzy Unordered Rule Induction Algorithm" (FURIA) [10] en un marco clásico de métodos de combinación de clasificadores (MCC) basado en la inducción de diversidad en los clasificadores individuales mediante el uso de "bagging" [2], "random subspace" [9] y selección de atributos [1]. Los experimentos realizados mostraron como la filosofía que consideraba únicamente el uso de bagging obtenía el mejor rendimiento cuando se combinaba con SCBRD derivados a partir de FURIA.

En los últimos años, se han realizado varias propuestas avanzadas en el área de los MCC. En concreto, una de las más prometedoras son los *random oracles* (RO) [14, 17]. Los RO son métodos de diseño de MCC que consideran el uso de un mini-MCC que reemplaza cada clasificador individual por un par de subclasificadores. Un oráculo aleatorio (una función aleatoria, p.ej. un hiperplano aleatorio) elige cuál de los dos aplicar para cada instancia de entrada concreta. Durante la fase de entrenamiento, el RO divide el conjunto de datos en dos partes y aprende cada subclasificador con los datos de cada uno de esos "medio-espacios". Durante la fase de clasificación, escoge qué subclasificador toma la decisión final que se utilizará a nivel global, convirtiéndose así en un MCC dinámico. Se ha demostrado que el uso de ROs mejora el rendimiento de las metodologías clásicas de generación de MCCs [14, 17]. En concreto, se ha enfatizado que la combinación con los enfoques de bag-

ging o random subspace es muy beneficiosa.

En esta contribución, proponemos la extensión de nuestra metodología previa de diseño de MCCBRD [19] mediante el uso de dos variantes de RO. El objetivo final es inducir una mayor diversidad en la generación de los clasificadores difusos individuales, obteniendo de este modo una mejora en el rendimiento global del sistema. De este modo, pretendemos demostrar que: i) el MCCBRD resultante puede manejar adecuadamente conjuntos de datos de alta complejidad, y ii) su rendimiento es competitivo con los MCC basados en RO del estado del arte, que consideran algoritmos clásicos de aprendizaje automático tales como arboles de decisión C4.5 [16] y Naïve Bayes (NB) [7] para generar los clasificadores individuales [14, 17].

Con este objetivo, hemos realizado experimentos exhaustivos con 29 conjuntos de datos de alta complejidad (en lo que respecta al número de atributos y al número de ejemplos), procedentes de los repositorios UCI [1] y KEEL [2], para demostrar el buen comportamiento de los MCCBRD derivados en términos de precisión y complejidad. En esta experimentación, compararemos la nueva metodología de diseño de MCCBRD basada en RO tanto con la propuesta en [19] como con los MCC basados en RO del estado del arte comentados.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección, se revisan los conocimientos necesarios para introducir nuestro trabajo. La Sección 3 describe los RO y su incorporación en nuestra metodología de diseño de MCCBRD. En la Sección 4 se presentan los experimentos desarrollados y los resultados obtenidos. Finalmente, en la Sección 5 se muestran algunas conclusiones y se proponen algunas vías de trabajo futuro.

2 PRELIMINARES

2.1 DISEÑO DE MCC

Clásicamente, podemos distinguir dos etapas de diseño de MCC, cada una de las cuales opera a un nivel diferente en su estructura [5]. La primera está relacionada con la metodología de aprendizaje de los clasificadores individuales (*weak learners*) que integrarán el MCC. Su objetivo es la generación de un conjunto de clasificadores diversos que obtenga conjuntamente una alta precisión. A lo largo de las últimas décadas se han propuesto varios enfoques para esta tarea. Probablemente las técnicas de re-muestreo de datos (*data resampling*) constituyen el enfoque más popular. El bagging [2] y el boosting [18] son los dos métodos más importantes dentro de esta familia. Por otro lado, existe otro grupo formado por un conjunto de métodos que inducen la diversidad de los clasificadores individuales a través de algunos mecanismos específicos alternativos [21] tales como selección de atributos [9] o el uso de métricas de diversidad [15]. También se han propuesto enfoques híbridos que combinan ambos grupos, siendo los "random forests" [3] el más representativo.

La segunda tarea de diseño se centra en la combinación de las decisiones proporcionadas por los clasificadores individuales para calcular la decisión final de MCC. Los dos enfoques más comunes son la fusión y la selección de clasificadores (*classifier fusion and selection*) [20].

Una de las características más interesantes de los RO es que consideran conjuntamente las dos etapas de diseño de MCC, metodologías de generación y métodos de combinación, como veremos en la Sec. 3.

2.2 MCCBRD USANDO BAGGING

En este trabajo, tomaremos la metodología propuesta en [19]. En ese enfoque, incorporamos FURIA [10] en un marco basado en enfoques clásicos de diseño de MCC [1, 2, 9]. Llegamos a la conclusión de que el uso independiente de la estrategia de bagging, sin considerar una selección de atributos adicional, proporcionaba el mejor rendimiento.

Para generar los MCCBRD, se divide el conjunto de datos normalizado en dos partes, un conjunto de entrenamiento y un conjunto de test. El conjunto de entrenamiento se somete a un procedimiento de selección (remuestreo) de instancias con el fin de obtener K conjuntos de entrenamiento (denominados *bags*) para aprender los K clasificadores difusos individuales usando FURIA. Como es habitual, los *bags* se generan con el mismo tamaño que el conjunto de entrenamiento original.

Las reglas de clasificación difusas R_j^k, que consideramos muestran una clase C_j^k y un grado de certidumbre CF_j^k en el consecuente: Si x_1^k es A_{j1}^k y ... y x_n^k is A_{jn}^k entonces Clase C_j^k con CF_j^k, $j = 1,2,\ldots,N$; $k = 1,2,\ldots,K$. El método de razonamiento difuso basado en votación es el considerado en cada clasificador individual [4].

Aplicando la etapa de entrenamiento sobre todos los *bags* en paralelo, se obtiene un MCCBRD, que se valida usando tanto los errores de aprendizaje y test como una medida de la complejidad basada en el número total de reglas de los SCBRDs componentes (clasificadores difusos individuales). Como método de fusión de clasificadores del MCC se aplica el método estándar de votación por mayoría [13].

3 USO DE RANDOM ORACLES PARA DISEÑAR MCCBRD

Un RO [14, 17] es un clasificador estructurado, también denominado mini-MCC, que encapsula el clasificador individual del MCC. Se compone de dos subclasificadores

[1] http://archive.ics.uci.edu/ml
[2] http://www.keel.es

y un oráculo que decide cuál usar en cada caso. Básicamente, el oráculo es una función cuyo objetivo es dividir aleatoriamente el conjunto de datos en dos subconjuntos, dividiendo así el espacio de atributos en dos regiones. Cada región generada se asigna a un subclasificador junto con el subconjunto de datos correspondiente. Se puede considerar cualquier forma para la superficie de decisión de la función oráculo aleatoria.

El enfoque RO presenta varias características interesantes que lo hacen único entre los MCC existentes: 1) Forma un marco de diseño genérico en el que los RO sólo necesitan incorporar el clasificador individual. Permite una opción de diseño en dos niveles diferentes: se puede aplicar cualquier estrategia de diseño de MCC y se puede emplear cualquier algoritmo de aprendizaje de los clasificadores individuales; 2) Induce una diversidad adicional a través de la aleatoriedad asociada a la propia naturaleza de los RO. La generación de un conjunto de clasificadores individuales diverso ha demostrado ser fundamental para el rendimiento global de los MCC [15]; 3) Incorpora los dos métodos de combinación de MCC más comunes y complementarios, es decir, fusión y selección de clasificadores.

Hasta el momento, se han desarrollado dos tipos de RO: random linear oracle (RLO) [14, 17] y random spherical oracle (RSO) [17] (usando un hiperplano y una hipersfera respectivamente).

3.1 MARCO DE DISEÑO DE MCCBRD CON RANDOM ORACLES

En este apartado, vamos a detallar cómo se diseñan los MCCBRD usando bagging, RO y FURIA. Para ello, se divide primero el conjunto de datos normalizado en dos partes, un conjunto de entrenamiento y otro de test. El conjunto de entrenamiento se somete a un procedimiento de selección de instancias con el fin de obtener las K *bags* para aprender un mini-MCC RO (RLO o RSO) compuesto por el oráculo y dos subclasificadores difusos individuales. Los oráculos dividen aleatoriamente los *bags* en dos partes y aprenden cada subclasificador ejecutando FURIA [10] sobre los datos de cada “medio-espacio". En total, se generan $2 \times K$ subclasificadores tipo FURIA.

Durante la fase de clasificación, el oráculo acomete una selección clasificadores interna, es decir, decide qué subclasificador FURIA tomará la decisión final para el ejemplo concreto. El razonamiento difuso se realiza de la forma descrita en la Sec. 2.2. La decisión de dicho subclasificador será la utilizada después a nivel global en la fusión de clasificadores, para la que se vuelve a emplear el método estándar de votación por mayoría [13].

El marco global de la metodología de diseño de MCCBRD se presenta en la Fig. 1.

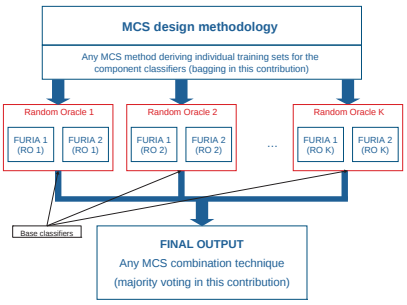


Figura 1: Nuestro marco de diseño de MCCBRD.

4 ESTUDIO EXPERIMENTAL

Esta sección está dedicada a validar nuestro marco de diseño de MCCBRD basado en el uso de bagging, RO y FURIA. En primer lugar, se introduce el diseño experimental considerado. A continuación, se comparan los MCCBRD basados en bagging y RO obtenidos con los basados únicamente en bagging con el fin de demostrar que los RO tienen una influencia positiva en el rendimiento. Posteriormente, se comparan los MCCRBD generados con los MCC clásicos. De esta manera, pretendemos demostrar que los MCCBRD basados en bagging y RSO son competitivos con (e incluso mejoran a) los métodos del estado del arte que consideran arboles de decisión C4.5 y NB con la misma configuración de MCC [14, 17] al afrontar conjuntos de datos de alta complejidad.

4.1 DISEÑO EXPERIMENTAL

La Tabla 1 recoge los 29 conjuntos de datos seleccionados, procedentes de los repositorios UCI y KEEL. Cada atributo está etiquetado como real, entero o nominal (R/E/N). El número de características oscila entre 7 y 617, el número de ejemplos entre 1.941 y 58.000, y el número de clases entre 2 y 28. La tabla muestra también un índice de complejidad (“cmpl.”), calculado como $\frac{\#ex. \times \#attr.}{10000}$.

Con el fin de realizar una comparación justa entre las dos familias de MCCBRD basados en bagging, el propuesto en [19] y el actual que además incorpora RO, mediremos su complejidad como el número total de reglas en los SCBRDs individuales que los componen y no el número de esos clasificadores individuales como es habitual. Esto se debe a que, aunque la incorporación de los RO en el MCC duplica el número de clasificadores del sistema final (RO incluye un oráculo y dos subclasificadores para cada *bag*), el número total de reglas en el MCCBRD no necesariamente aumenta en la misma proporción ya que los subclasificadores son mucho más simples (como de hecho se observa en la Tabla 4). Para considerar este hecho, los MCCBRD basados en bagging estarán compuestos por 50 clasificadores mientras que los que incorporan RO sólo

Nombre	#ej.	#at.	(R/E/N)	cmpl.	#cl.
abalone	4178	8	(7/0/1)	3.3	28
bioassay_688red	27190	153	(27/126/0)	416.0	2
coil2000	9822	85	(0/85/0)	83.5	2
gas_sensor	13910	128	(128/0/0)	178.0	7
isolet	7797	617	(617/0/0)	481.1	26
letter	20000	16	(0/16/0)	32.0	26
magic	19020	10	(10/0/0)	19.0	2
marketing	6876	13	(0/13/0)	8.9	9
mfeat_fac	2000	216	(0/216/0)	43.2	10
mfeat_fou	2000	76	(76/0/0)	15.2	10
mfeat_kar	2000	64	(64/0/0)	12.8	10
mfeat_zer	2000	47	(47/0/0)	9.4	10
musk2	6598	166	(0/166/0)	109.5	2
optdigits	5620	64	(0/64/0)	36.0	10
pblocks	5474	10	(4/6/0)	5.5	5
pendigits	10992	16	(0/16/0)	17.6	10
ring_norm	7400	20	(20/0/0)	14.8	2
sat	6436	36	(0/36/0)	23.2	6
segment	2310	19	(19/0/0)	4.4	7
sensor_read_24	5456	24	(24/0/0)	13.1	4
shuttle	58000	9	(0/9/0)	52.2	7
spambase	4602	57	(57/0/0)	26.2	2
steel_faults	1941	27	(11/16/0)	5.2	7
texture	5500	40	(40/0/0)	22.0	11
thyroid	7200	21	(6/15/0)	15.1	3
two_norm	7400	20	(20/0/0)	14.8	2
waveform_noise	5000	40	(40/0/0)	20.0	3
waveform1	5000	21	(21/0/0)	10.5	3
wquality_white	4898	11	(11/0/0)	5.4	7

Tabla 1: Conjuntos de datos considerados.

considerarán 37 clasificadores (74 subclasificadores) para obtener una complejidad en terminos de número total de reglas similar en ambos MCCBRD. Estos valores se fijaron mediante un estudio preliminar.

Para comparar la precisión de los MCCs diseñados, utilizaremos un esquema de validación cruzada 5×2 de Dietterich [6]. Se emplearán los tests estadísticos de Friedman e Iman-Davenport para evaluar si las diferencias entre los métodos son estadísticamente significativas [8]. También se utilizará el test de rangos con signo de Wilcoxon para las comparaciones pareadas. El nivel de confianza para el rechazo de la hipótesis nula es un 5 % en todos los casos.

4.2 COMPARACIÓN DE MCCBRD

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2, que recoge los errores de test para los tres MCCBRD estudiados. El mejor resultado para un determinado conjunto de datos se presenta en negrita. Los valores del promedio "Media" y de la desviación estándar "Dev. Std." de los 29 conjuntos de datos se presentan en la parte inferior de la tabla.

Se puede observar que ambos bagging MCCBRDs basados en RO superan los bagging MCCBRDs originales teniendo en cuenta el error global promedio de test. Teniendo en cuenta cada conjunto de datos por separado, bagging MCCBRDs basados en RLO superan bagging MCCBRDs en 20 de los 29 casos (+1 empate), mientras que bagging MCCBRDs basados en RSO lo hacen en 20 de los 29 casos (+2 empates).

Parece que bagging MCCBRDs basados en RSO es el enfoque para destacar, como obtiene el menor error global promedio de test, así como el mayor número de los mejores resultados individuales (13+2 empates). Sin embargo, una conclusión clara no puede ser sacada como bagging MCCBRDs basados en RLO no son muy inferiores en términos de error global promedio de test.

Nombre	BAG Test err.	BAG+RLO Test err.	BAG+RSO Test err.
abalone	0.7460	**0.7450**	0.7472
bioassay_688red	**0.0090**	**0.0090**	**0.0090**
coil2000	**0.0601**	0.0602	**0.0601**
gas_sensor	0.0091	0.0082	**0.0081**
isolet	0.0790	**0.0717**	0.0727
letter	0.0799	0.0761	**0.0760**
magic	0.1346	0.1322	**0.1304**
marketing	0.6764	**0.6686**	0.6690
mfeat_fac	0.0549	0.0475	**0.0461**
mfeat_fou	0.1993	0.1969	**0.1924**
mfeat_kar	0.0829	**0.0728**	0.0737
mfeat_zer	0.2221	**0.2193**	0.2220
musk2	0.0351	0.0329	**0.0321**
optdigits	0.0329	**0.0287**	0.0289
pblocks	**0.0288**	0.0350	0.0341
pendigits	0.0160	0.0142	**0.0136**
ring_norm	0.0438	0.0442	**0.0326**
sat	0.1022	0.1011	**0.1007**
segment	0.0333	0.0307	**0.0296**
sensor_read_24	**0.0221**	0.0228	0.0231
shuttle	**0.0008**	0.0009	0.0009
spambase	**0.0579**	0.0643	0.0640
steel_faults	**0.2376**	0.2389	0.2379
texture	0.0305	0.0291	**0.0280**
thyroid	**0.0216**	0.0218	0.0218
two_norm	0.0312	**0.0277**	0.0288
waveform	0.1492	**0.1474**	0.1482
waveform1	0.1484	0.1466	**0.1459**
wquality_white	0.3935	0.3852	**0.3825**
Media	0.1289	0.1269	**0.1262**
Dev. Std.	0.1836	0.1826	0.1830

Tabla 2: Comparación de la precisión de los MCCBRD.

Estas conclusiones se confirman en Tabla 3, que presenta los p-valores del test de rangos con signo de Wilcoxon para las distintas combinaciones de los tres enfoques de diseño MCCBRD (los resultados que muestran una diferencia significativa se presentan en negrita). Los dos MCCBRD basados en RO muestran diferencias significativas en comparación con el que no los emplea. Sin embargo, el test estadístico no indicó diferencias significativas entre ellos.

Comparación	valor p
BAG+RLO vs BAG	**+(0.0024)**
BAG+RSO vs BAG	**+(0.0022)**
BAG+RLO vs BAG+RSO	=(0.1741)

Tabla 3: Wilcoxon de rangos con signo para la comparación de MCCBRDs.

La Tabla 4 muestra los valores de complejidad de los tres métodos. Se puede observar claramente como los dos MCCBRD basados en RO obtienen una complejidad menor que los MCCBRD originales en términos del promedio global del número de reglas.La variante RLO obtiene el menor número medio de reglas, así como la menor complejidad individual en 25 de los 29 casos (aún así, los valores de la variante RSO son bastante similares). Los valores globales de la desviación típica son muy altos debido al gran número de reglas obtenidos para el conjunto de datos *letter*. Por esta razón, también presentamos el promedio del

número de reglas y la desviación típica global para los otros 28 conjuntos de datos en la parte inferior de la tabla.

Nombre	BAG # Rules	BAG+RLO # Rules	BAG+RSO # Rules
abalone	**3990.9**	4298.9	4611.3
bioassay_688red	2754.2	**2311.0**	2374.6
coil2000	2139.7	**1843.0**	1977.6
gas_sensor	4311.8	**3488.9**	3608.0
isolet	6107.6	**5192.9**	5343.9
letter	23533.2	**19452.2**	20189.3
magic	**3881.2**	6381.3	7142.6
marketing	**3198.5**	3593.9	3663.4
mfeat_fac	1736.4	**1502.2**	1537.7
mfeat_fou	2741.4	**2320.2**	2410.6
mfeat_kar	2473.4	**2193.4**	2255.4
mfeat_zer	2504.4	**2147.4**	2246.6
musk2	2163.1	**1763.8**	1770.1
optdigits	3584.6	**3137.7**	3230.0
pblocks	**1329.4**	1431.3	1397.5
pendigits	4395.3	**3628.2**	3701.1
ring_norm	3658.1	3069.8	**2954.5**
sat	4207.2	**3429.5**	3514.7
segment	1175.3	**1084.1**	1169.8
sensor_read_24	1704.8	**1651.9**	1688.2
shuttle	914.3	**849.7**	853.2
spambase	2220.9	**1617.7**	2074.3
steel_faults	2750.4	**2368.9**	2404.4
texture	2912.2	**2621.0**	2725.9
thyroid	1656.5	**1405.4**	1458.1
two_norm	3078.3	**2449.3**	2616.6
waveform	3484.3	**3315.7**	3381.7
waveform1	4152.5	**3457.7**	3503.1
wquality_white	6734.3	**6015.9**	6217.6
Media	3775.7	**3380.1**	3518.0
Dev. Std.	4032.7	3382.3	3525.1
Media (No letter)	3070.0	**2806.1**	2922.6
Dev. Std. (No letter)	1375.0	1398.0	1491.6

Tabla 4: Comparación de la complejidad de los MCCBRD.

En definitiva, podemos concluir que los MCCBRD basados en bagging y RO son significativamente superiores a los que sólo consideran el uso de bagging. La decisión de qué RO elegir, RLO o RSO, no es sencilla porque RLO obtiene una precisión ligeramente inferior pero también presenta una menor complejidad, mientras que RSO se comporta al contrario (precisión ligeramente superior a costa de una complejidad ligeramente mayor). Puesto que el propósito de esta contribución es la obtención de MCCBRD de alta precisión, elegiremos el método RSO para las comparaciones siguientes.

4.3 COMPARACIÓN DE MCCBRD CON MCC BASADOS EN BAGGING Y RSO

En este apartado se comparan los MCCBRD basados en bagging, RSO y FURIA con los MCC clásicos basados en el mismo enfoque usando árboles de decisión y NB como clasificadores individuales [14, 17]. En este caso, no es posible comparar la complejidad de los tres modelos puesto que NB no es un clasificador basado en reglas y C4.5 considera reglas no difusas derivadas de los árboles de clasificación. Por esta razón, nos centraremos en la precisión de los tres MCC.

La Tabla 5 presenta los resultados de test obtenidos por el MCCBRD y los dos MCCs en los 29 conjuntos de datos. Se puede observar como los MCCBRD basados en bagging y RSO superan a los otros dos métodos teniendo en cuenta el error promedio global de test. También obtienen el mayor número de victorias (16 y 2 empates) en los conjuntos de datos individuales. Por el contrario contrario, los MCC basados en bagging, RSO y NB resultan ser la peor elección tanto considerando el error promedio de test como el número de mejores resultados individuales.

Nombre	BAG+RSO+FURIA Test err.	BAG+RSO+C4.5 Test err.	BAG+RSO+NB Test err.
abalone	**0.7472**	0.7696	0.7624
bioassay_688red	**0.0090**	**0.0090**	0.0153
coil2000	**0.0601**	0.0616	0.1820
gas_sensor	**0.0081**	0.0094	0.3003
isolet	**0.0727**	0.0813	0.1253
letter	0.0760	**0.0658**	0.2926
magic	0.1304	**0.1268**	0.2366
marketing	**0.6690**	0.6745	0.6875
mfeat_fac	**0.0461**	0.0501	0.0655
mfeat_fou	**0.1924**	0.1948	0.2205
mfeat_kar	0.0737	0.0867	**0.0597**
mfeat_zer	**0.2220**	0.2294	0.2473
musk2	0.0321	**0.0283**	0.1121
optdigits	**0.0289**	0.0297	0.0717
pblocks	0.0341	**0.0330**	0.0705
pendigits	**0.0136**	0.0161	0.0861
ring_norm	0.0326	0.0397	**0.0202**
sat	0.1007	**0.0967**	0.1731
segment	**0.0296**	0.0326	0.1198
sensor_read_24	**0.0231**	0.0232	0.3703
shuttle	**0.0009**	**0.0009**	0.0157
spambase	**0.0640**	0.0658	0.1777
steel_faults	0.2379	**0.2286**	0.3429
texture	**0.0280**	0.0351	0.1426
thyroid	0.0218	**0.0215**	0.0393
two_norm	0.0288	0.0327	**0.0222**
waveform	**0.1482**	0.1698	0.1672
waveform1	**0.1459**	0.1654	0.1541
wquality_white	0.3825	**0.3737**	0.5216
Avg.	**0.1312**	0.1357	0.2068
Std. Dev.	0.1819	0.1856	0.1892

Tabla 5: Comparación de la precisión de los MCC basados en bagging y RSO usando FURIA, C4.5 y NB como métodos de generación de clasificadores individuales.

Los rangos medios de cada MCC obtenidos con el test de Friedman se muestran en Tabla 6. El test de Iman-Davenport indica diferencias significativas entre los métodos, al ser el valor de p igual a 3.025066×10^{-7}, muy inferior al nivel de confianza considerado (0.05).

Algorithm	Ranking
FURIA	1.414
C4.5	1.896
NB	2.689

Tabla 6: Rangos medios del test de Friedman

El test de Wilcoxon confirma estas conclusiones en la Tabla 7. Se observan diferencias significativas a favor del MCCBRD al comparar con el MCC basado en bagging, RSO y NB. Ese no es el caso cuando se compara con el MCC que considera C4.5. Aún así, se puede ver que el p-valor es igual a 0.0561, valor situado en la frontera del nivel de confianza asumido (0.05).

En resumen, los MCCBRD basados en bagging, RSO y FURIA superan a los MCC basados en bagging y RSO que usan C4.5 y NB. Podemos concluir entonces que los métodos propuestos pueden manejar con éxito los conjuntos de

Comparación	valor p
FURIA vs C4.5	=(0.0561)
FURIA vs NB	**+(8.00e-006)**

Tabla 7: Test de Wilcoxon para la comparación de los MCC basados en bagging y RSO usando FURIA, C4.5 y NB.

datos de alta complejidad, siendo competitivos con métodos clásicos del estado del arte en la disciplina.

5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El objetivo de este trabajo era demostrar que la combinación del enfoque RO de diseño de MCC con la metodología de diseño de MCCBRD basada en bagging y FURIA de [19] permitiría mejorar el rendimiento de estos últimos.

Las conclusiones prometedoras obtenidas conducen a una serie de nuevos desarrollos que podrían ser desarrollados en un futuro próximo. Sin duda, la combinación de ROs con otros métodos de fusión o selección de clasificadores es un objetivo exigente, que planteamos realizar.

Agradecimientos

Este trabajo está soportado por el Ministerio de Economía y Competitividad (proyecto SOCOVIFI2, ref. TIN2012-38525-C01) y la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía (ref. TIC-2011-7745), incluyendo fondos FEDER.

Referencias

[1] R. Battiti. Using mutual information for selecting features in supervised neural net learning. *IEEE Trans. Neural Netw.*, 5(4):537–550, 1994.

[2] L. Breiman. Bagging predictors. *Mach. Learn.*, 24(2):123–140, 1996.

[3] L. Breiman. Random forests. *Mach. Learn.*, 45(1):5–32, 2001.

[4] O. Cordón, M.J. del Jesus, and F. Herrera. A proposal on reasoning methods in fuzzy rule-based classification systems. *Int. J. Approx. Reason.*, 20:21–45, 1999.

[5] B.V. Dasarathy and B.V. Sheela. A composite classifier system design: Concepts and methodology. *Proc. IEEE*, 67(5):708–713, 1979.

[6] T.G. Dietterich. Approximate statistical test for comparing supervised classification learning algorithms. *Neural Comput.*, 10(7):1895–1923, 1998.

[7] P. Domingos and M. J. Pazzani. On the optimality of the simple bayesian classifier under zero-one loss. *Mach. Learn.*, 29(2-3):103–130, 1997.

[8] S. García and F. An extension on "statistical comparisons of classifiers over multiple data sets" for all pairwise comparisons. *J. Mach. Learn. Res.*, 9:2677–2694, 2008.

[9] T. Ho. The random subspace method for constructing decision forests. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 20(8):832–844, 1998.

[10] J. C. Hühn and E. Hüllermeier. FURIA: an algorithm for unordered fuzzy rule induction. *Data Mining Knowl. Discovery*, 19(3):293–319, 2009.

[11] H. Ishibuchi, T. Nakashima, and M. Nii. *Classification and Modeling With Linguistic Information Granules*. Springer, 2005.

[12] L. I. Kuncheva. *Fuzzy Classifier Design*. Springer, 2000.

[13] L. I. Kuncheva. *Combining Pattern Classifiers: Methods and Algorithms*. Wiley, 2004.

[14] L. I. Kuncheva and J. J. Rodríguez. Classifier ensembles with a random linear oracle. *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, 19(4):500–508, 2007.

[15] L. I. Kuncheva and Ch. J. Whitaker. Measures of diversity in classifier ensembles and their relationship with the ensemble accuracy. *Mach. Learn.*, 51(2):181–207, 2003.

[16] J. R. Quinlan. *C4.5: Programs for Machine Learning*. Morgan Kaufmann Publishers, 1993.

[17] J. J. Rodríguez and L. I. Kuncheva. Naïve bayes ensembles with a random oracle. In *Lect. Notes in Comput. Sci.*, volume 4472, pages 450–458. Springer-Verlag, 2007.

[18] R. Schapire. The strength of weak learnability. *Mach. Learn.*, 5(2):197–227, 1990.

[19] K. Trawiński, O. Cordón, and A. Quirin. On designing fuzzy rule-based multiclassification systems by combining FURIA with bagging and feature selection. *Int. J. Uncert. Fuzz. Knowl.-Based Syst.*, 19(4):589–633, 2011.

[20] K. Woods, W. P. Kegelmeyer, and K. Bowyer. Combination of multiple classifiers using local accuracy estimates. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 19(4):405–410, 1997.

[21] Z.H. Zhou. Ensembling local learners through multimodal perturbation. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, 35(4):725–735, 2005.

ANALYZING FUZZY RULE-BASED SYSTEMS WITH FINGRAMS IN KNIME

David P. Pancho[1], **Jose M. Alonso**[1], **Tobias Kötter**[2], **Michael R. Berthold**[3], **Luis Magdalena**[1]

[1]*European Centre for Soft Computing, Edificio de Investigación,*
C/ Gonzalo Gutiérrez Quirós s/n, 33600 Mieres, Asturias, Spain,
{david.perez,jose.alonso,luis.magdalena}@softcomputing.es
[2]*Carnegie Mellon University, 5000 Forbes Avenue,*
Pittsburgh, PA 15213, USA, koettert@cs.cmu.edu
[3]*Department of Computer and Information Science, University of Konstanz,*
Universitätsstr. 10, 78484 Konstanz, Germany, michael.berthold@uni-konstanz.de

Abstract

This work presents an implementation of fuzzy inference-grams (Fingrams) in the Konstanz Information Miner (KNIME). Fingrams graphically represent multi-dimensional fuzzy rule-based systems (FRBSs) in 2D-graphs, illustrating the interaction among fuzzy rules in terms of rule co-firing, i.e., paying attention to pairs of rules fired at the same time by a given input. We take advantage of the fuzzy and social network plug-ins available in KNIME. In addition, a new Fingrams layout, based on multi-dimensional scaling, is proposed. We sketch the potentials and drawbacks of the new layout with two illustrative examples.

Keywords: Fuzzy System Software, Social Network Analysis, Fuzzy Rule Based Sytems, Fingrams, KNIME.

1 INTRODUCTION

There are not many works tackling with visual analysis of the fuzzy system inference process. A complete analysis of visualization requirements for fuzzy systems is provided in [15]. It gives an overview on existing methodologies to yield 2D and 3D graphical representations of fuzzy systems. However, that analysis just sketches some possibilities from a conceptual viewpoint not providing any solution to produce such representations.

One of the most relevant proposals on the design of visual representations for multi-dimensional fuzzy classification rules was developed by Gabriel et al [8]. They made a mapping from high dimensional feature spaces onto two-dimensional spaces which maintains the pairwise distances between rules. This mapping also displays an approximation of each rule spread and overlap. As a result, it is possible to visualize and explore multi-dimensional fuzzy rule-based classifiers in a 2D graphical representation. The authors claim such representation yields a user friendly and interpretable exploratory analysis. Nevertheless, the complexity of the analysis grows exponentially with the number of variables and rules to be displayed. In consequence, the interpretation of the resulting graph is not straightforward in case of complex and high dimensional problems, affected by the so-called curse of dimensionality of fuzzy systems.

Fingrams have recently arisen as a tool for visual representation and analysis of fuzzy systems [13]. Fingrams make it easy to graphically analyze the fuzzy inference layer of fuzzy systems from a comprehensibility point of view. With that aim, fuzzy rule bases are represented by social networks that display the interactions among rules. Experts can comfortably analyze Fingrams, even for a large number of rules. Fingrams favor the understanding of the structure and behavior of the represented fuzzy system. Moreover, they have proved to be a powerful tool which supports an interpretability-driven design of fuzzy systems [14].

Fingrams were firstly implemented into the fuzzy modeling tool GUAJE [1]. Then Fingrams Generator [12], a stand alone command line software available online[1], was developed to create and visualize them.

This contribution shows the Fingram nodes implemented in the data mining software tool KNIME[2] and how they can be used to visualize and analyze fuzzy systems. In addition, we propose a new layout for Fingrams based on [8].

The rest of the manuscript is structured as follows. Section 2 presents some preliminaries about the software tool KNIME and Fingrams. Section 3 introduces the new Fingram nodes implemented in KNIME. Section 3.1 presents a new Fingram layout based on multi-dimensional scaling, and its use in two illustrative examples is given in Section 3.2. Finally, some conclusions and future work are pointed

[1]http://sourceforge.net/projects/fingrams/

[2]This work was done during a research stay of the first author in the University of Konstanz (Germany).

out in Section 4.

2 PRELIMINARIES

2.1 KNIME

The Konstanz Information Miner (KNIME) [4] is an open source data mining framework which is widely used in industry as well as in academia. The major focus of KNIME is the development of a collaboration platform for teaching and research which enables simple integration of new algorithms and tools as well as data manipulation and visualization methods.

With KNIME, the user can model workflows in an intuitive way using a user-friendly interface. A workflow consist of a set of nodes, which encapsulate operations such as reading, writing, transforming, visualizing and analyzing data. The data is transported via connections between the nodes whereas the specific input and output ports depend on the nodes functionality. The most common port type in KNIME is the data table, which stores the data in an internal table-based format consisting of columns with a certain data type (integer, string, image, molecule, etc.) and an arbitrary number of rows conforming to the column specifications. A workflow is visually assembled by dragging nodes from the node repository onto an open workflow and by connecting their corresponding input and output ports. Fig. 1 shows the KNIME workbench with an example workflow. In the center, it reads input data from a source and processes it. On the left the workflow repository containing all saved workflows as well as he node repository listing all available nodes are displayed. The node description window, which provides a detailed description of the currently selected node, is shown on the right.

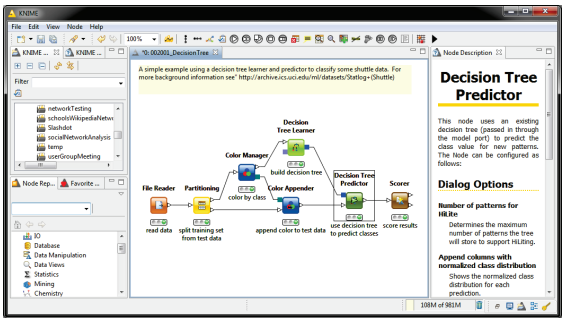


Figure 1: Screenshot of the KNIME workbench.

A major benefit of KNIME is its easy extensibility, which allows other users to add functionality in the form of new nodes, port and data types. Since KNIME bases on Eclipse[3] as the core platform extending its basic functionality in the form of plug-ins is a very simple and standardized procedure. This has already been done by universities, commercial vendors as well as by a growing user community[4] contributing several plug-ins e.g. for text and image processing as well as bioinformatics and cheminformatics. The official KNIME website also offers several plug-ins that enhance the standard KNIME distribution e.g. for statistical analysis with R[5] or extended machine learning capabilities from Weka [19].

It is worth noting that KNIME provides a plug-in[6] that allows to process attributed graphs such as social networks. This provides the infrastructure as well as nodes to manage, represent and analyze large networks. It supports (un)directed, (un)weighted multi graphs e.g. networks with more than one edge between a given vertex pair. It further allows to assign attributes to all network elements e.g. vertices, edges and the network itself.

Moreover, KNIME disposes several nodes to deal with fuzzy sets and systems [5]. A couple of nodes permit the induction and use of fuzzy rules for classification, they induce them by the fuzzy rule learning algorithm presented in [3]. There exist other nodes that allow visual fuzzy clustering and visual representation of fuzzy systems.

2.2 Social Network Analysis and FRBSs: Fingrams

Social network analysis is a discipline that predates Facebook and Twitter by 30 years and has been applied in diverse fields such as psychology (to represent the cognitive structure of a subject [6, 16]), scientometrics (for the analysis of large scientific domains [11, 18]) or software development (for debugging of multi-agent systems [17]).

Fingrams represent fuzzy systems as social networks made of rules that collaborate/compete to produce a final behavior. Each fuzzy rule is represented by a circular vertex, and the relations among rules are represented by weighted edges whose values are computed using a specific metric. Fingrams are actually adapted to deal with fuzzy association rule systems [12] and fuzzy rule-based classifiers and regressors [13].

We proposed a methodology for visual representation and exploratory analysis of the fuzzy inference process in FRBSs based on Fingrams [13]. Usually, FRBSs heavily cover the input space, i.e. a given input can fire simultaneously (co-fire) various rules. Taking advantage of this quirk, Fingrams show graphically the interaction among rules at the inference level in terms of co-fired rules.

Fig. 2 shows an illustrative example of Fingram. It represents a fuzzy rule-based regressor formed by 5 rules. The rule identifier, coverage and goodness (metric introduced in [13]) are displayed inside the vertex. The size of the

[3] http://www.eclipse.org

[4] http://tech.knime.org/community

[5] http://www.r-project.org/

[6] http://tech.knime.org/network-mining

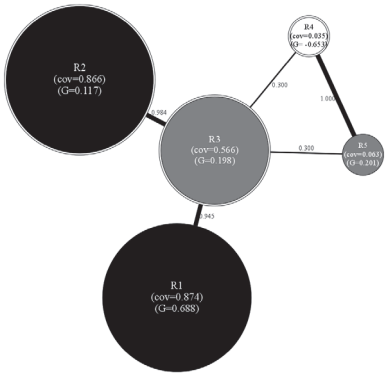


Figure 2: Example of Regression Fingram.

vertex is proportional to the number of examples covered by the rule. An edge shows relation between a pair or rules and its thickness is proportional to the level of co-firing between them. You can find more details about the representation in [13].

The procedure to build Fingrams is as follows: (1) create the network; (2) scale it while keeping the most important information; and finally (3) display the network using an appropriate drawing algorithm.

(1) Network generation: Web social networks usually use the friendship or the mentions as metric to construct a network. Fingrams present the relation among rules according to the following metric that reflects the co-firing among them.

$$m_{ij} = \frac{\#\ instances\ that\ simultaneously\ fire\ R_i\ \&\ R_j}{\sqrt{\#\ instances\ fire\ R_i \cdot \#\ instances\ fire\ R_j}}$$

(2) Network scaling: Given a network, the scaling algorithms look at proximity information and yield structures revealing the underlying organization. They consider similarities, correlations or distances in order to prune the initial network regarding the proximity among pairs of vertices. Fingrams remove the less important relations among rules by means of Pathfinder algorithm [16].

(3) Network drawing: Force-based or force-directed algorithms are the most widely used class of algorithms for drawing networks in the area of information science [7, 10]. Their purpose is to locate the vertex of a graph in a 2D or 3D space so that all the edges are approximately of equal length and there are as few crossing edges as possible, trying to obtain the most aesthetically pleasing view. Fingrams are displayed using Kamada-Kawai [9], one of the most representative and used methods of this family.

3 FINGRAMS IN KNIME

We designed and developed a set of KNIME nodes that permit the creation and visualization of Fingrams in KNIME. Those nodes take advantage of the KNIME plug-in for social networks as well as the KNIME fuzzy types and nodes. The modular environment of KNIME allows us to reuse the social networks plug-in nodes to filter, visualize and analyze Fingrams. Moreover, we develop a new Pathfinder node to filter not only Fingram edges but any social network in KNIME.

Fingram Generator: This is in charge of creating Fingrams from a given fuzzy rule-based classifier, a set of examples, and an empty social network. The output is a social network with fuzzy rules as vertices and edges reflecting rule interaction.

Fingram Generator From File: This node creates a Fingram from a configuration file (the structure and content of that file is detailed in [12]) that provides information related to fuzzy rules along with the lists of data examples firing them. As result, this node admits fuzzy association rules, fuzzy rule-based classifiers and regressors developed outside KNIME. It is important to remark that it requires an empty network as input, like all social network nodes in KNIME. The output is a social network like the one given by the previous "Fingram Generator" node.

Edge Pathfinder Filter: It permits the scaling of social networks using the Pathfinder Algorithm [16]. An edge between a vertex pair is filtered if and only if it exists a path of length Q or smaller with higher associated value (minimum of the values along the path) than the direct link between the selected vertices. The parameter Q can be set in the configuration dialog and takes values between $[1, N-1]$ (with N the number of vertices).

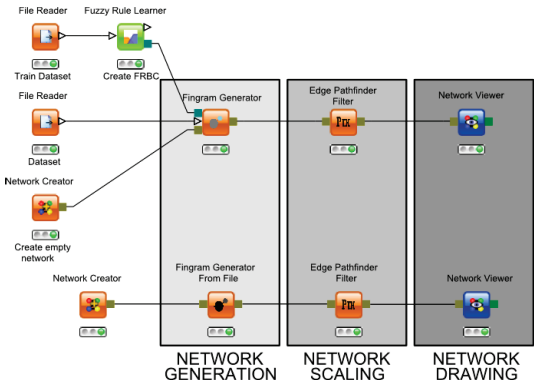
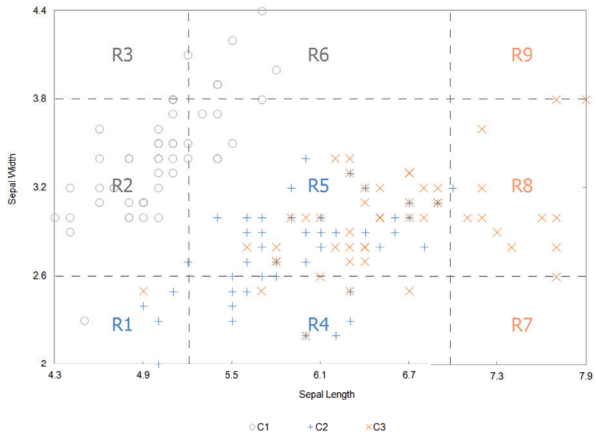
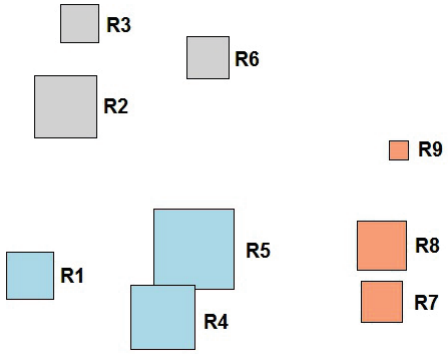


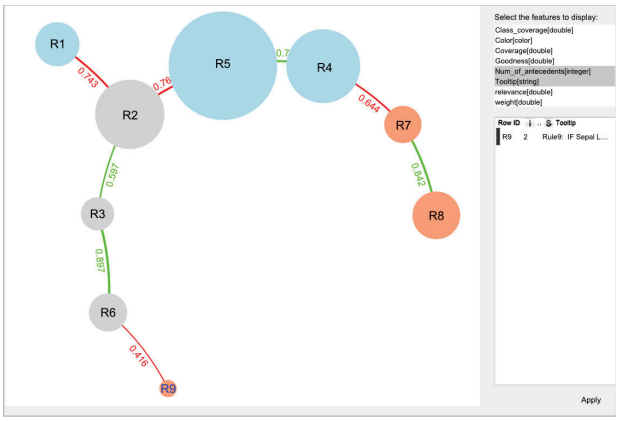
Figure 3: Fingrams workflow in KNIME.



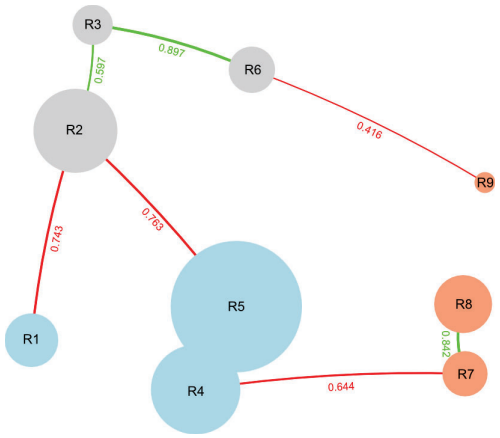
(a) Set of examples.



(b) Multi-dimensional scaling of the FRBS.



(c) Fingram using Kamada Kawai layout.



(d) Fingram using the new layout.

Figure 4: Illustrative example (IRIS).

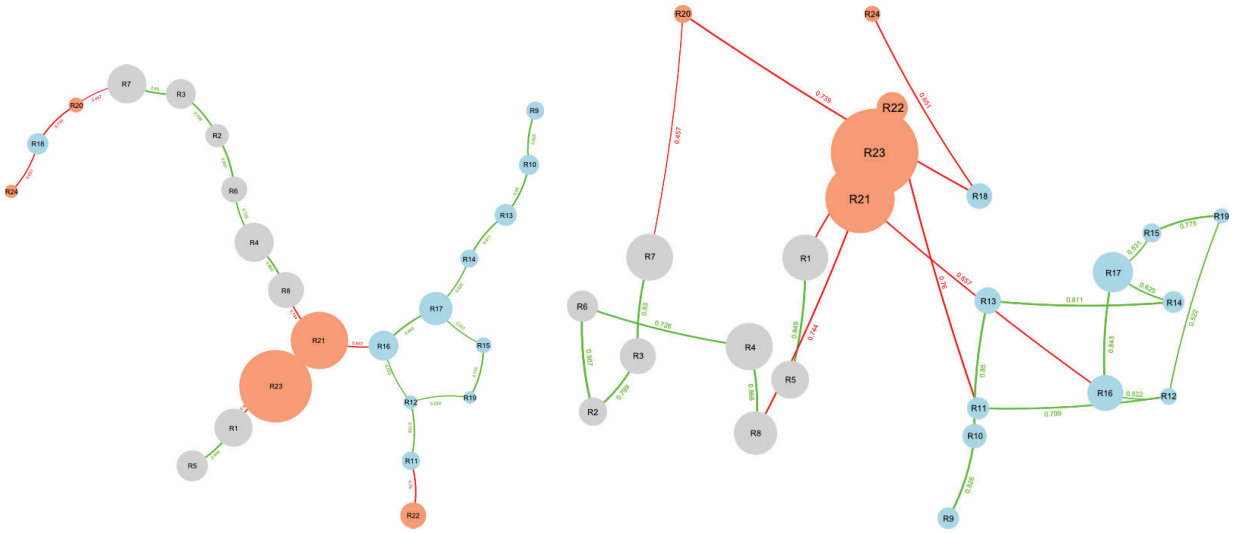
Fig. 3 illustrates the common use of the nodes introduced above. “Fingram Generator” and “Fingram Generator From File” construct Fingrams that are then scaled using “Edge Pathfinder Filter”, and finally presented to the user with the KNIME “Network Viewer” node. Fig. 4(c) shows an example of Fingram created with KNIME. There you can select vertices or edges to obtain more information about them in the right side of the window.

3.1 A new fingram layout based on multi-dimensional scaling

The basic Fingram layout is based on Kamada-Kawai algorithm which places Fingrams in the canvas looking for an aesthetical pleasing layout. However, this layout sometimes fails to present closer rules because it is metric dependent and it has no topological meaning regarding the underlying data.

As previously introduced in Section 1, Gabriel et al. [8] proposed a mapping from high dimensional feature spaces onto two-dimensional spaces which maintains the pairwise topological distances between fuzzy classification rules. That method uses multi-dimensional scaling to place the rule centers and subsequently extends the rules regions to depict their overlap. This results not only in a visualization of the distribution of rules (coherent with the underlying data distribution) but also enables the relationship to their immediate neighbors to be judged. Notice that such relationship does not pay attention to rule co-firing.

Here, we develop a new Fingram layout based on the multi-dimensional scaling approach. First, the multi-dimensional scaling yields the position of vertices in a 2D projection. Then, edges are plotted after network scaling with Pathfinder. Finally, we enrich the graphical representation with colors, sizes, labeled texts, and so on. This new algorithm adds intrinsical information to the representation, enriching the final result.



(a) Kamada Kawai layout.

(b) Multi-dimensional based layout.

Figure 5: Illustrative example (WINE).

3.2 Illustrative examples

We will illustrate our proposal with two examples.

IRIS: We use the well-known dataset IRIS from UCI [2] to construct a fuzzy rule-based classifier made of 9 rules[7]. For illustrative purpose, the rules only include two of the four input variables (*Sepal Length* and *Sepal Width*, shown with the related examples and rules in Fig. 4(a)) with the aim of allowing a 2D representation that facilitates the understanding of the new layout.

Firstly, we apply the multi-dimensional scaling method to obtain the visual representation of Fig. 4(b). Then, Fig. 4(c) shows the Fingram of this FRBS with the usual Kamada-Kawai layout algorithm. Finally, we combine the information of the two previous figures to produce Fig. 4(d), where the vertices of Fig. 4(c) are repositioned according to the topological positions determined by Fig. 4(b).

WINE: Fig. 5 shows Fingrams for a second more complex/realistic example. We use the dataset WINE from UCI [2], made up of 178 instances of 3 classes of wine, to create a fuzzy rule-based classifier. The 13 attributes of the dataset are partitioned by 3 homogeneous strong fuzzy partitions. We induce 24 rules using Wang and Mendel algorithm in the software tool GUAJE[8]. Kamada-Kawai and the new proposed layout presents the final representations in Fig. 5(a) and Fig. 5(b) respectively.

[7] A deeper description of this fuzzy system is available in [13].
[8] http://sourceforge.net/projects/guajefuzzy/

On the one hand, the new multi-scaling based layout better reflects the proximity of rules (in position and distance) than Kamada-Kawai. As an example, R21, R22 and R23 in Fig.5(b) overlap in the new layout, but Kamada-Kawai layouts R22 far away because the scaling algorithm filters the edges that connect it with the other two.

On the other hand, the new layout lacks in the correct visualization of some elements of the Fingrams where Kamada-Kawai does not have those problems. For example, the overlapping of R4 and R5 in Fig. 4(d) produces a missing edge between them in the representation. Similar problems occur in the Fingram of Fig. 5(b).

We can conclude that both layouts provide complementary information. Kamada-Kawai offers a symbolic representation whereas the mew multi-scaling layout yields a topological representation that helps in the comprehension of the system.

4 CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

We have introduced the implementation of Fingrams into KNIME along with a new layout based on multi-dimensional reduction. The approach is illustrated in a very simple 2D example and then exploited in a complex case with 13 attributes and 24 rules.

By integrating Fingrams into KNIME we are leveraging Fingrams into the data mining community beyond the fuzzy community where they were born.

We have implemented the “Edge Pathfinder Filter” node that can be used with any kind of social network in

KNIME. This enriches the possibilities when dealing with social networks.

The new layout has the benefit of better showing the proximity of rules, but neglects aesthetical issues. This layout complements the Kamada-Kawai layout and helps in the understanding of the system behavior.

The new layout, presented here only for fuzzy rule-based classifiers, will be extended and tested with fuzzy association rules and regression FRBSs.

Acknowledgements

This work has been funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness under Grants TIN2011-29824-C02-01 and TIN2011-29824-C02-02 (ABSYNTHE project).

References

[1] J. M. Alonso, D. P. Pancho, and L. Magdalena. Enhancing the fuzzy modeling tool GUAJE with a new module for fingrams-based analysis of fuzzy rule bases. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1082–1089, Brisbane, Australia, 2012.

[2] K. Bache and M. Lichman. UCI machine learning repository, 2013.

[3] M. R. Berthold. Mixed fuzzy rule formation. *International journal of approximate reasoning*, 32(2):67–84, 2003.

[4] M. R. Berthold, N. Cebron, F. Dill, T. R. Gabriel, T. Kötter, T. Meinl, P. Ohl, C. Sieb, K. Thiel, and B. Wiswedel. KNIME: The Konstanz Information Miner. In *Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization (GFKL)*. Springer, 2007.

[5] M. R. Berthold, B. Wiswedel, and T. R. Gabriel. Fuzzy logic in knime–modules for approximate reasoning–. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 6(sup1):34–45, 2013.

[6] D. W. Dearholt and R. W. Schvaneveldt. Properties of pathfinder networks. In R. Schvaneveldt, editor, *Pathfinder associative networks: Studies in knowledge organization*, pages 1–30. Ablex Publishing Corporation, 1990.

[7] G. di Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I. Tollis. *Graph drawing: algorithms for the visualization of graphs*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J, 1998.

[8] T. R. Gabriel, K. Thiel, and M. R. Berthold. Rule visualization based on multi-dimensional scaling. In *IEEE Interational Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 66–71, 2006.

[9] T. Kamada and S. Kawai. An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing Letters*, 31(1):7–15, 1989.

[10] S. G. Kobourov. Force-directed drawing algorithms. In R. Tamassia, editor, *Handbook of Graph Drawing and Visualization*, chapter 12. CRC Press, 2012.

[11] F. Moya-Anegón, B. Vargas-Quesada, V. Herrero-Solana, Z. Chinchilla-Rodríguez, E. Corera-Álvarez, and F. J. Muñoz-Fernández. A new technique for building maps of large scientific domains based on the cocitation of classes and categories. *Scientometrics*, 61(1):129–145, 2004.

[12] D. P. Pancho, J. M. Alonso, and J. Alcalá-Fdez. A new fingram-based software tool for visual representation and analysis of fuzzy association rules. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pages 1–6, Hyderabad, India, 2013.

[13] D. P. Pancho, J. M. Alonso, O. Cordón, A. Quirin, and L. Magdalena. FINGRAMS: visual representations of fuzzy rule-based inference for expert analysis of comprehensibility. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(6):1133 – 1149, 2013.

[14] D. P. Pancho, J. M. Alonso, and L. Magdalena. Quest for interpretability-accuracy trade-off supported by fingrams into the fuzzy modeling tool GUAJE. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 6:46–60, 2013.

[15] B. Pham and R. Brown. Analysis of visualisation requirements for fuzzy systems. In *International conference on computer graphics and interactive techniques (GRAPHITE)*, pages 181–187, 2003.

[16] R. W. Schvaneveldt, F. T. Durso, and D. W. Dearholt. Network structures in proximity data. *The psychology of learning and motivation: advances in research and theory*, 24:249–284, 1989.

[17] E. Serrano, A. Quirin, J. Botia, and O. Cordón. Debugging complex software systems by means of pathfinder networks. *Information Sciences*, 180(5):561–583, 2010.

[18] B. Vargas-Quesada and F. Moya-Anegón. *Visualizing the structure of science*. Springer-Verlag, 2007.

[19] I. H. Witten, E. Frank, and M. A. Hall. *Data Mining: Practical machine learning tools and techniques*. Morgan Kaufmann Publishers, 3 edition, 2011.

MEJORANDO LA CLASIFICACIÓN MULTI-CLASE EN FARC-HD MEDIANTE EL USO DE LA ESTRATEGIA UNO-CONTRA-UNO: ADAPTANDO EL SISTEMA DE INFERENCIA

Mikel Elkano[1], **Mikel Galar**[1], **Jose Sanz**[1], **Edurne Barrenechea**[1], **Francisco Herrera**[2], **Humberto Bustince**[1]

[1]*Dpto. de Automática y Computación (Universidad Pública de Navarra)*, {joseantonio.sanz,mikel.galar}@unavarra.es
[2]*Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial (Universidad de Granada)*, herrera@decsai.ugr.es

Resumen

En este trabajo estudiamos el comportamiento de FARC-HD al afrontar problemas multi-clase. Para ello, nos planteamos el uso de la descomposición Uno-contra-Uno (*One-vs-One*, OVO). Sin embargo, mostraremos el hecho de que las confianzas proporcionadas por FARC-HD (debido al uso del producto en el proceso de inferencia) no son adecuadas para esta estrategia. Además, esto provoca que estrategias robustas como el voto ponderado obtengan resultados pobres. Por este motivo, proponemos dos mejoras: 1) reemplazar el producto por agregaciones mayores cuya salida sea independiente del número de elementos; 2) definir una nueva estrategia de agregación para OVO, basada en el voto ponderado, en la que solo consideramos la confianza de la clase predicha. Los resultados experimentales muestran que las dos propuestas realizadas tienen un efecto beneficioso en el sistema final.

Palabras Clave: Clasificación, Uno-contra-Uno, Sistemas de Clasificación Basados en Reglas Difusas, Agregaciones

1 INTRODUCCIÓN

Existen numerosas técnicas para resolver problemas de clasificación en el campo de la minería de datos. Entre ellas los Sistemas de Clasificación Basados en Reglas Difusas (SCBRDs) son utilizados debido a que proporcionan un modelo interpretable por medio de la utilización de etiquetas lingüísticas en sus reglas. En este trabajo vamos a utilizar FARC-HD [2], que actualmente es uno de los SCBRDs más preciso e interpretable.

En clasificación podemos distinguir dos tipos de problemas: binarios (con dos clases) y multi-clase. Normalmente, la clasificación con múltiples clases es más difícil debido a que aumenta la complejidad para establecer las fronteras de decisión. Una forma de afrontar los problemas multi-clase es mediante técnicas de descomposición [9], que tratan de dividir el problema multi-clase original en problemas binarios más sencillos de resolver.

En la literatura especializada existen numerosas estrategias de descomposición [9]. Una de las más utilizadas es la estrategia Uno-contra-Uno (*One-vs-One*, OVO) [8]. En OVO se obtienen tantos nuevos subproblemas como pares de clases a clasificar, donde cada uno de ellos es afrontado por un clasificador base independiente. A la hora de clasificar una nueva instancia, ésta se somete a todos los clasificadores base y se combinan sus salidas. Esta técnica suele funcionar mejor que afrontar el problema directamente [3].

En este trabajo vamos a tratar de mejorar el rendimiento de FARC-HD al afrontar problemas multi-clase utilizando la estrategia OVO (FARC-HD puede afrontar problemas multi-clase directamente). Lógicamente, la agregación de los clasificadores en la estrategia OVO depende directamente de las confianzas obtenidas por los clasificadores base; en el caso de FARC-HD, consideramos como confianza del clasificador los grados de asociación obtenidos para cada clase del problema.

Sin embargo, veremos como utilizando estrategias de agregación de las confianzas que suelen tener un comportamiento robusto y preciso (como el voto ponderado [6]), no obtenemos buenos resultados al utilizar FARC-HD como clasificador base. Esto es debido a que el uso del producto en el proceso de inferencia de FARC-HD produce confianzas muy pequeñas para cada par de clases de los clasificadores base. Además, el uso del producto implica que las reglas con un mayor número de antecedentes sean penalizadas. Otro problema surge por el hecho de que no existe relación entre las confianzas devueltas por cada clasificador binario. Con el objetivo de tratar estos problemas, presentamos una solución para adecuar las confianzas de FARC-HD a OVO y así, poder agregarlas de forma más precisa, mejorando la clasificación del modelo OVO.

En la solución que presentamos aplicamos agregaciones mayores que el producto en el proceso de inferencia, para lo que les exigimos que no disminuyan su valor según aumenta el número de antecedentes de la regla. Además, proponemos una alternativa al uso del voto ponderado en la fase de agregación de OVO. En concreto, proponemos utilizar una estrategia de agregación de las confianzas denominada WinWV en la que no consideramos las confianzas obtenidas por la clase perdedora, ya que su uso no es adecuado para realizar la clasificación.

Para evaluar la validez de los resultados obtenidos, hemos utilizado 20 conjuntos de datos numéricos y hemos contrastado los resultados por medio de técnicas estadísticas no paramétricas. Estudiamos las mejores agregaciones en el proceso de inferencia de FARC-HD que nos lleven a una mejor clasificación OVO y mostramos la bondad de esta nueva hibridación frente al clasificador FARC-HD original en problemas multi-clase.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la sección 2 introducimos brevemente los SCBRDs. La sección 3 muestra una introducción a la descomposición de problemas multi-clase. En la sección 4 describimos detalladamente las propuestas realizadas para utilizar FARC-HD y OVO de manera conjunta. Las secciones 5 y 6 contienen la descripción del marco experimental y el análisis de los resultados obtenidos, respectivamente. Finalmente, en la sección 7 presentamos las conclusiones.

2 SISTEMAS DE CLASIFICACIÓN BASADOS EN REGLAS DIFUSAS

Cualquier problema de clasificación consiste en P ejemplos de entrenamiento $x_p = (x_{p1}, \ldots, x_{pn})$, $p = 1, 2, \ldots, P$ donde x_{pi} es el valor del i-ésimo atributo $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del p-ésimo ejemplo de entrenamiento. Cada ejemplo pertenece a una clase $y_p \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{C} = \{1, 2, ..., m\}$, siendo m el número de clases del problema.

En este trabajo consideramos FARC-HD [2], un SCBRDs que hace uso de la siguiente estructura de reglas:

$$\begin{array}{l} \text{Regla } R_j: \text{ Si } x_1 \text{ es } A_{j1} \text{ y } \ldots \text{ y } x_n \text{ es } A_{jn} \\ \text{entonces Clase} = C_j \text{ con } RW_j \end{array} \quad (1)$$

donde R_j es la etiqueta de la regla j-ésima, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector n-dimensional que representa el ejemplo, A_{ji} es un conjunto difuso, $C_j \in \mathbb{C}$ es la etiqueta de la clase y RW_j es el peso de la regla que calculamos utilizando la confianza de la regla [7].

El método de aprendizaje de las reglas difusas utilizado por FARC-HD se compone de la siguientes 3 etapas:

1. *Extracción de reglas de asociación difusas para clasificación*: Se emplea un árbol de búsqueda para cada clase mediante el que se obtienen las reglas difusas, cuyo número de antecedentes es limitado por la profundidad máxima del árbol.
2. *Filtrado de las reglas candidatas*: En esta fase se seleccionan las reglas más interesantes entre las obtenidas en la fase anterior por medio de un esquema de ejemplos ponderados.
3. *Selección evolutiva de reglas*: Se emplea un algoritmo genético para ajustar los conjuntos difusos y seleccionar las reglas más precisas a partir de la base de reglas generada en la etapa anterior.

Para clasificar un nuevo ejemplo, FARC-HD emplea un método de razonamiento difuso denominado combinación aditiva que predice la clase que obtiene una mayor confianza según la Ecuación 2.

$$conf_l(x_p) = \sum_{R_j \in BR;\, C_j = l} b_j(x_p), \qquad l = 1, 2, \ldots, m \quad (2)$$

con

$$b_j(x_p) = \mu_{A_j}(x_p) \cdot RW_j = T(\mu_{A_{j1}}(x_{p1}), \ldots, \mu_{A_{jn_j}}(x_{pn_j})) \cdot RW_j \quad (3)$$

donde $b_j(x_p)$ es el grado de asociación del ejemplo x_p con la regla j, $\mu_{A_j}(x_p)$ es el grado de emparejamiento del ejemplo x_p con todos los antecedentes de la regla, siendo $\mu_{A_{ji}}(x_{pi})$ el grado de emparejamiento del ejemplo con el antecedente i-ésimo de la regla, T una t-norma (en el caso de FARC-HD el producto), y n_j el número de antecedentes de la regla j.

3 DESCOMPOSICIÓN DE PROBLEMAS MULTI-CLASE: ESTRATEGIA UNO-CONTRA-UNO

Las estrategias de descomposición [9] permiten afrontar problemas multi-clase mediante clasificadores binarios, denominados *clasificadores base*. Este tipo de estrategias son válidas tanto al utilizar clasificadores que solo permiten trabajar con solo dos clases como al considerar clasificadores con soporte multi-clase. Incluso en este segundo caso, se suelen obtener mejores resultados cuando se emplean estrategias de descomposición [3].

3.1 ESTRATEGIA UNO-CONTRA-UNO

Entre las estrategias de descomposición más utilizadas se encuentra la estrategia OVO [8], donde se divide un problema de m clases en $m(m-1)/2$ subproblemas binarios (todos los posibles pares de clases) que son afrontados por clasificadores base independientes. Una nueva instancia se clasifica combinando la salida de cada uno de los clasificadores base. Cada clasificador base que distingue un par de clases $\{C_i, C_j\}$ devuelve un par de grados de confianza $r_{ij}, r_{ji} \in [0, 1]$ en favor de las clases C_i, C_j. Estas salidas

se almacenan en lo que se denomina matriz de votos de la siguiente forma:

$$R = \begin{pmatrix} - & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & - & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & - \end{pmatrix} \quad (4)$$

Finalmente las salidas de los clasificadores base se agregan y se obtiene la clase a la que pertenece el ejemplo. En la siguiente sección presentamos las estrategias de agregación de las matrices de votos que consideramos en este trabajo.

3.2 MÉTODOS DE AGREGACIÓN

La forma en la que se agregan las salidas de los clasificadores base es otro de los factores cruciales para la clasificación. En este trabajo consideramos tres métodos de agregación bien estudiados en la literatura.

- *Voto simple (VOTE):* Cada clasificador base vota por la clase predicha y se predice la que obtiene más votos.

$$Clase = arg \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{1 \le j \ne i \le m} s_{ij} \quad (5)$$

  donde s_{ij} es 1 si r_{ij}>r_{ji} y 0 en caso contrario.

- *Voto ponderado (WV):* Cada clasificador base vota por ambas clases. La clase con el mayor valor obtenido en la suma es la ganadora.

$$Clase = arg \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{1 \le j \ne i \le m} r^n_{ij} \quad (6)$$

  donde R^n es a la matriz de votos normalizada.

- *Criterio de la No-Dominancia (ND):* La matriz obtenida con las salidas de los clasificadores base es considerada como una relación de preferencia difusa. Posteriormente se calcula el grado de no-dominancia, siendo la clase ganadora la que mayor valor obtenga.

$$Clase = arg \max_{i=1,\ldots,m} \left\{ 1 - \sup_{j \in \mathscr{C}} r'_{ji} \right\} \quad (7)$$

  donde R' es la matriz de votos normalizada y estricta.

3.3 CONFIANZA DE LOS CLASIFICADORES BASE

Atendiendo a los métodos de agregación, queda claro que uno de los factores más importantes es el valor que utilizamos como confianza. En el caso de FARC-HD, tomaremos la confianza como el grado de asociación de cada clase, es decir, el valor obtenido en la Ecuación 2. Sin embargo, como veremos al utilizar la estrategia del voto ponderado (considerada una de las más robustas [6]), estos valores no ofrecen los resultados esperados. En caso de utilizar este clasificador de manera directa para afrontar problemas multi-clase, las confianzas obtenidas por el mismo carecen de importancia una vez clasificado el ejemplo. Sin embargo, en el caso de utilizar FARC-HD como clasificador base, las confianzas de todas las clases son agregadas independientemente de si es la clase ganadora o no y por tanto, es de vital importancia obtener confianzas de calidad de cara a su agregación.

Otro problema inherente al método de descomposición de OVO es el de los clasificadores no competentes [4]. Cada clasificador es entrenado únicamente con instancias de las dos clases que debe distinguir, ignorando las instancias del resto de clases. Es decir, son clases desconocidas para el clasificador y por tanto las salidas de estos clasificadores son irrelevantes para la clasificación de instancias de dichas clases. Sin embargo, estas salidas son agregadas de la misma forma que lo son las relevantes por lo que pueden llevar a etiquetar incorrectamente la instancia en determinadas situaciones, lo que todavía acentúa más el problema de la baja calidad de las confianzas.

4 FARC-HD Y OVO: MEJORANDO LA COMBINACIÓN

Siguiendo la Ecuación (3) mostrada en la Sección 2, podemos observar como el método de inferencia utilizado por FARC-HD penaliza mucho a los grados de asociación de las reglas con más antecedentes, afectando a la combinación en OVO. Esto es debido a que hace uso de la t-norma producto para realizar el cálculo del grado de emparejamiento del ejemplo con las reglas. De esta forma, las reglas con más antecedentes obtendrán confianzas menores.

Con el objetivo de proporcionar una solución a este problema y de obtener confianzas más apropiadas para su posterior tratamiento con la estrategia OVO, proponemos modificar tanto las dos primeras etapas del proceso de inferencia de FARC-HD (Sección 4.1) como la fase de agregación de OVO (Sección 4.2).

4.1 MODIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE AGREGACIÓN PARA EL CÁLCULO DEL GRADO DE ASOCIACIÓN

En este trabajo planteamos la utilización de t-normas mayores que el producto o incluso medias con ciertas propiedades como método de agregación para el cálculo del grado de asociación. Para ello, hemos optado por utilizar el mínimo como alternativa al producto puesto que también es una t-norma y la media geométrica como representante de las medias puesto que tiene algunas propiedades similares a las del producto. Además, el valor agregado al utilizar el mínimo y la media geométrica no se ve afectado por el aumento en el número de antecedentes de la regla.

La solución que planteamos modifica la Ecuación 3, donde sustituimos la t-norma producto por el mínimo ó la media geométrica. Este cambio afecta al cálculo del grado de asociación $b_j(x_p)$, que a su vez modifica el valor de $conf_l(x_p)$, es decir, las confianzas que utilizamos en OVO. De esta forma, pretendemos mostrar que el uso de los métodos de agregación planteados en este trabajo en lugar del producto puede mejorar significativamente las confianzas de los clasificadores base para su posterior tratamiento en la matriz de votos. A continuación mostramos las ecuaciones propuestas para sustituir a la Ecuación 3.

- *Mínimo:* El grado de asociación obtenido es el mínimo entre los grados de emparejamiento de los antecedentes y el peso de la regla.

$$b_j(x_p) = min(\min_{i=1,\ldots,n_j} \mu_{A_{ji}}(x_{pi}), RW_j) \quad (8)$$

- *Media geométrica:* El grado de asociación obtenido es la media geométrica de los grados de emparejamiento de los antecedentes y el peso de la regla.

$$b_j(x_p) = \left(\sqrt[n_j]{\prod_{i=1}^{n_j} \mu_{A_{ji}}(x_{pi})} \cdot RW_j \right)^{1/2} \quad (9)$$

4.2 UNA MODIFICACIÓN DEL VOTO PONDERADO: WINWV

Además de la modificación de los métodos de agregación en la inferencia de los clasificadores base, proponemos la utilización de una modificación del método del voto ponderado, denominada *WinWV*. Dada la matriz de votos *R*, el elemento r_{ij} es la confianza que devuelve FARC-HD si se predice la clase *i* frente a la *j*. Debido a que las confianzas obtenidas por medio de FARC-HD no son adecuadas para usar el voto ponderado, proponemos considerar únicamente la confianza de la clase predicha:

$$Clase = arg \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{1 \le j \ne i \le m} s_{ij} \quad (10)$$

donde s_{ij} es r_{ij}^n si r_{ij}>r_{ji} y 0 en caso contrario. De esta forma evitamos la confianza de la clase perdedora y a su vez, el voto por la clase ganadora es relativo a su confianza.

5 MARCO EXPERIMENTAL

Para el estudio experimental utilizamos 20 conjuntos de datos numéricos del repositorio de KEEL[1], los cuales presentamos en la Tabla 1.

La configuración empleada en FARC-HD es la configuración recomendada por los autores: 5 etiquetas por partición difusa, 3 antecedentes por regla como máximo, soporte mínimo de 0.05, confianza mínima de 0.8, poblaciones formadas por 50 individuos, 30 bits por gen para la codificación Gray, y un máximo de 20000 evaluaciones.

Tabla 1: Descripción de los conjuntos de datos

Conjunto de datos	#Ej.	#Atr.	#Clas.
autos	159	25	6
balance	625	4	3
cleveland	297	13	5
contraceptive	1473	9	3
ecoli	336	7	8
glass	214	9	7
hayes-roth	132	4	3
iris	150	4	3
newthyroid	215	5	3
pageblocks	548	10	5
penbased	1100	16	10
satimage	643	36	7
segment	2310	19	7
shuttle	2175	9	5
tae	151	5	3
thyroid	720	21	3
vehicle	846	18	4
vowel	990	13	11
wine	178	13	3
yeast	1484	8	10

Para la realización del experimento, hemos empleado una validación cruzada de 5 particiones. Hemos validado los resultados se han empleado test estadísticos no-paramétricos. Concretamente, utilizamos el test de rangos de Wilcoxon [10] para la comparación entre dos métodos, el test de Friedman alineado para buscar diferencias estadísticas significativas entre un grupo de métodos, y el test de Holm [5] para encontrar qué algoritmos rechazan la hipótesis de igualdad con respecto a un método de control seleccionado.

6 ESTUDIO EXPERIMENTAL

Este estudio tiene tres objetivos:

1. Examinar la mejora que se obtiene cuando se combina la técnica de descomposición OVO con FARC-HD respecto a la utilización directa de FARC-HD en problemas multi-clase.
2. Mostrar la necesidad de la nueva estrategia de agregación (WinWV) para FARC-HD utilizando OVO.
3. Observar la mejora que obtenemos cuando utilizamos OVO y sustituimos en la fase de inferencia de FARC-HD el producto por la t-norma mínimo y la media geométrica que devuelven valores más altos.

La Tabla 2 muestra la precisión en test obtenida por todos los métodos estudiados en cada dataset. Observamos 5 grupos de resultados, el primero de ellos corresponde al algoritmo FARC-HD original utilizando los 3 métodos considerados para calcular el grado de asociación. Los 4 restantes corresponden a las diferentes estrategias de agregación consideradas en OVO. El mejor resultado de cada grupo de está resaltado en **negrita** mientras que el mejor resultado global en cada fila está subrayado.

6.1 EFECTO DE LAS AGREGACIONES EN LA INFERENCIA

En esta sección vamos a analizar el efecto que tiene la modificación del cálculo del grado de asociación en FARC-

Tabla 2: Precisión en test obtenida por cada método

	FARC			OVO											
				VOTE			ND			WV			WinWV		
Conj. Datos	PROD	MIN	GM	PROD	MIN	GM	PROD	MIN	GM	PROD	MIN	GM	PROD	MIN	GM
autos	**83,26**	81,44	77,49	78,85	80,66	**80,84**	78,85	79,32	**80,89**	75,76	**79,89**	79,62	76,30	**81,26**	78,35
balance	86,08	85,59	**88,16**	84,79	84,77	**85,90**	84,31	85,10	**86,22**	**80,95**	79,82	**80,95**	83,99	83,81	**85,26**
cleveland	**56,93**	56,30	54,89	57,97	55,24	**59,29**	56,92	54,90	**59,99**	55,93	57,24	**60,66**	56,94	56,58	**59,66**
contraceptive	**53,91**	53,57	53,56	**54,31**	54,04	53,23	**53,97**	53,70	53,37	53,97	**54,58**	54,25	**53,97**	53,84	53,57
ecoli	**83,50**	82,60	81,37	**83,77**	83,68	83,18	83,72	**84,26**	82,66	84,96	**85,27**	81,97	**85,24**	84,62	84,62
glass	66,25	66,86	**71,59**	68,22	**72,08**	72,00	67,27	69,68	**71,93**	68,23	**72,55**	68,44	67,68	**72,00**	70,66
hayes-roth	**81,26**	79,73	78,19	81,92	81,92	**83,41**	81,15	81,15	**82,64**	81,92	81,92	**83,41**	81,92	81,92	**83,41**
iris	**96,00**	95,33	95,33	**94,67**	**94,67**	**94,67**	**94,67**	**94,67**	94,00	**95,33**	**95,33**	94,67	**94,67**	**94,67**	**94,67**
newthyroid	94,88	**97,67**	94,42	96,28	**96,74**	96,28	96,28	**96,74**	96,28	**95,81**	94,42	94,88	96,28	**96,74**	96,28
pageblocks	94,01	93,63	**94,72**	93,45	**94,89**	94,36	93,99	**94,69**	94,53	93,63	**93,97**	93,27	93,63	**95,07**	94,35
penbased	93,20	91,65	**94,01**	94,02	93,92	**94,37**	**94,83**	94,37	93,55	**93,83**	93,64	91,93	94,19	**94,29**	93,83
satimage	80,60	**80,75**	80,10	**83,07**	82,92	82,44	**81,52**	81,22	80,27	78,09	75,45	**80,10**	82,44	82,00	**83,54**
segment	93,03	92,77	**93,12**	92,77	94,42	**95,46**	93,33	94,33	**95,33**	92,25	**93,25**	90,74	93,33	**94,37**	94,07
shuttle	94,39	98,44	**99,54**	93,80	98,71	**99,77**	93,66	98,75	**99,77**	**93,34**	91,77	92,78	93,75	97,65	**98,62**
tae	55,48	**58,78**	54,88	54,70	58,75	**60,77**	55,35	58,75	**61,42**	53,44	55,42	**58,77**	56,73	59,42	**61,42**
thyroid	**93,62**	92,51	92,51	**93,47**	92,65	92,51	**93,47**	92,65	92,37	**93,06**	92,65	92,51	**93,47**	92,65	92,51
vehicle	68,80	**73,04**	70,68	73,41	71,85	**73,62**	73,29	72,92	**73,74**	72,82	72,33	**72,91**	**74,00**	72,09	73,86
vowel	**75,35**	72,63	66,77	89,80	89,09	**91,92**	**90,00**	89,49	**90,00**	**82,53**	81,82	81,82	86,46	86,77	**87,37**
wine	**95,03**	94,38	94,43	95,01	96,09	**97,78**	95,55	96,09	**97,19**	95,01	96,04	**97,17**	94,96	95,50	**96,63**
yeast	58,97	58,77	**59,17**	60,72	**61,00**	59,10	61,33	**61,46**	59,84	60,04	**60,65**	57,69	61,19	**61,67**	59,57
Total	80,23	**80,32**	79,75	81,25	81,90	**82,54**	81,17	81,71	**82,30**	80,05	80,40	**80,43**	81,06	81,85	**82,11**

HD con agregaciones diferentes al producto. Observando la Tabla 2 podemos comprobar que en el caso del FARC-HD original, sustituir el producto por una agregación mayor no produce modificaciones importantes en los resultados. Por contra, en el caso de las estrategias de agregación consideradas en OVO, en todas ellas el mejor resultado medio lo obtiene la media geométrica, en general con diferencias mayores. En cualquier caso, no podemos basar nuestras conclusiones en los resultados globales, por lo que vamos a llevar a cabo una comparativa múltiple incluyendo las alternativas presentadas junto con la t-norma producto en el caso de FARC-HD y en cada una de las agregaciones OVO.

La Tabla 3 muestra los resultados obtenidos por los test de Friedman alineados y de Holm. Estos están agrupados según el método en el que realizamos la comparativa (FARC-HD o cada una de las agregaciones OVO) y por los métodos de agregación utilizados para el cálculo del grado de asociación (lo que es objeto del estudio). La primera columna corresponde a las propuestas con FARC-HD original, mientras que el resto de columnas son las diferentes estrategias OVO planteadas en este trabajo (ND, VOTE, WV y WinWV). En cada fila tenemos el método utilizado para el cálculo del grado de asociación (PROD, MIN y GM). El valor de cada celda corresponde al rango obtenido en el test de Friedman alineado que considera las tres formas de calcular el grado de asociación en cada columna. El valor indicado entre paréntesis corresponde al p-valor ajustado obtenido por medio del test de Holm, utilizando como método de control aquel que haya obtenido el menor rango de esa misma columna y que se muestra en negrita. El p-valor ajustado está subrayado en caso de que haya diferencias estadísticas ($\alpha = 0.05$).

Tal y como podemos ver en la primera columna de la Tabla 3, el mejor método de agregación cuando aplicamos FARC-HD directamente es el producto, aunque no existen diferencias estadísticas entre las 3 agregaciones. Sin embargo, en el caso de las agregaciones OVO podemos ver que los rangos obtenidos muestran que el mejor método para el cálculo del grado de asociación es la media geométrica en todos los casos. Además, la media geométrica es estadísticamente mejor que el producto y existe una tendencia a su favor con respeto al mínimo. La excepción a esta situación es cuando utilizamos el voto ponderado puesto que se ve muy afectado por la mala estimación de las confianzas de las clases perdedoras (lo que estudiamos en la siguiente subsección). De esta forma, la agregación para el cálculo del grado de asociación que mejores resultados da es aquella que obtiene valores más altos, es decir, la media geométrica.

Tabla 3: Test de alineado de Friedman y Holm

	FARC	OVO^{VOTE}	OVOND	OVO^{WV}	OVO^{WinWV}
PROD	**28,00**	39,05 (0,003)	36,90 (0,057)	31,67 (1,489)	39,55 (0,006)
MIN	28,75 (0,891)	30,72 (0,103)	29,80 (0,365)	**29,87**	28,70 (0,324)
GM	34,75 (0,443)	**21,72**	**24,8**	29,95 (1,489)	**23,25**

6.2 ANÁLISIS DEL VOTO PONDERADO: WINWV VS. WV

Observando los resultados anteriores, podemos ver como los obtenidos por el WV difieren bastante de los obtenidos por el resto de agregaciones OVO. En esta subsección vamos a mostrar que a pesar de que la diferencia aparente entre WV y WinWV es pequeña, en FARC-HD nos permite obtener diferencias estadísticamente significativas.

Para ello, hemos llevado a cabo una serie de comparativas por pares mediante el test de Wilcoxon, donde enfrentamos el WV original frente a la modificación propuesta, con cada una de las agregaciones consideradas para calcular el grado de emparejamiento en FARC-HD. La Tabla 4 muestra los resultados obtenidos en estas comparativas. En ella podemos observar como el uso de la nueva estrategia de agre-

gación ofrece resultados significativamente mejores que el WV original.

Tabla 4: Test de Wilcoxon para comparar el voto ponderado y WinWV.

Comparativa		R+	R-	Hipótesis	p-valor
OVO^{WV}_{PROD}	vs. OVO^{WinWV}_{PROD}	56,5	153,5	Rech. OVO^{WinWV}_{GM} 90 %	0,059
OVO^{WV}_{MIN}	vs. OVO^{WinWV}_{MIN}	46,5	163,5	Rech. OVO^{WinWV}_{GM} 95 %	0,018
OVO^{WV}_{GM}	vs. OVO^{WinWV}_{GM}	28,0	182,0	Rech. OVO^{WinWV}_{GM} 95 %	0,003

6.3 MEJOR MODELO MULTI-CLASE PARA FARC-HD: FARC-HD VS. FARC-HD_OVO

Finalmente, queremos comprobar cuál es mejor modelo para afrontar problemas multi-clase con FARC-HD. Hemos visto que la media geométrica se comporta mejor para cualquiera de las agregaciones OVO, mientras que en el caso de FARC-HD el producto ofrece mejores resultados. Por ello, vamos a llevar a cabo diferentes comparativas por pares (Wilcoxon) para comprobar si efectivamente el uso de OVO (con la media geométrica) permite mejorar estadísticamente el comportamiento de FARC-HD original (hemos visto que frente a OVO con el producto esto ocurría en la mayoría de los casos).

Los resultados de estas comparativas los mostramos en la Tabla 5. En base a ellos, podemos confirmar que utilizar los modelos OVO es estadísticamente mejor que FARC-HD en todos los casos excepto al emplear el voto ponderado original (lo que se soluciona con WinWV).

Tabla 5: Test de Wilcoxon para comparar FARC-HD original y las combinaciones FARC-HD_OVO consideradas.

Comparativa		R+	R-	Hipótesis	p-valor
$FARC_{PROD}$ vs.	OVO^{ND}_{GM}	164,0	46,0	Rechazada para OVO^{ND}_{GM} 95 %	0,03
	OVO^{VOTE}_{GM}	173,0	37,0	Rech. OVO^{VOTE}_{GM} 95 %	0,01
	OVO^{WinWV}_{GM}	171,0	39,0	Rech. OVO^{WinWV}_{GM} 95 %	0,01
	OVO^{WV}_{GM}	108,5	101,5	No Rechazada	0,84

7 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos afrontado problemas de clasificación multi-clase con FARC-HD. Para mejorar los resultados obtenidos hemos hecho uso de la estrategia OVO, para lo cual hemos tenido que adaptar la inferencia de FARC-HD (sustituyendo en la fase de inferencia la t-norma producto por agregaciones mayores) y la agregación WV de OVO (no utilizando las confianzas devueltas para la clase no predicha).

Estas adaptaciones nos han permitido mostrar la importancia de la inferencia cuando usamos el modelo OVO, ya que los valores de las confianzas se utilizan más allá de la clasificación de FARC-HD. Además, hemos comprobado que el uso de OVO resulta beneficioso en FARC-HD, pero que este beneficio es aún mayor cuando adaptamos la inferencia apropiadamente.

Referencias

[1] J. Alcalá-Fdez, A. Fernandez, J. Luengo, J. Derrac, S. García, L. Sánchez, F. Herrera: KEEL data-mining software tool: Data set repository, integration of algorithms and experimental analysis framework. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing 17(2-3), 255–287 (2011)

[2] J. Alcala-Fdez, R. Alcala, F. Herrera: A fuzzy association rule-based classification model for high-dimensional problems with genetic rule selection and lateral tuning. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 19(5), 857–872 (2011)

[3] M. Galar, A. Fernández, E. Barrenechea, H. Bustince, F. Herrera: An overview of ensemble methods for binary classifiers in multi-class problems: Experimental study on one-vs-one and one-vs-all schemes. Pattern Recognition 44(8), 1761 – 1776 (2011)

[4] M. Galar, A. Fernández, E. Barrenechea, H. Bustince, F. Herrera: Dynamic classifier selection for one-vs-one strategy: Avoiding non-competent classifiers. Pattern Recognition 2013 in press doi: 10.1016/j.patcog.2013.04.018 (2013)

[5] S. Holm: A simple sequentially rejective multiple test procedure. Scandinavian Journal of Statistics 6, 65–70 (1979)

[6] E. Hüllermeier, S. Vanderlooy: Combining predictions in pairwise classification: An optimal adaptive voting strategy and its relation to weighted voting. Pattern Recognition 43(1), 128–142 (2010)

[7] H. Ishibuchi, T. Yamamoto: Rule weight specification in fuzzy rule-based classification systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 13(4), 428–435 (2005)

[8] S. Knerr, L. Personnaz, G. Dreyfus: Single-layer learning revisited: A stepwise procedure for building and training a neural network. En: Fogelman Soulié, F., Hérault, J. (eds.) Neurocomputing: Algorithms, Architectures and Applications, NATO ASI Series, vol. F68, pp. 41–50. Springer-Verlag (1990)

[9] A.C. Lorena, A.C. Carvalho, J.M. Gama: A review on the combination of binary classifiers in multiclass problems. Artificial Intelligence Review 30(1-4), 19–37 (2008)

[10] D. Sheskin: Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures. Chapman & Hall/CRC (2006)

MULTILAYER PERCEPTRON ENSEMBLES (MLP Ensembles) IN MODELLING MICROHABITAT SUITABILITY FOR FRESHWATER FISH

Rafael Muñoz-Mas [1], Juan Diego Alcaraz-Hernández[1], Francisco Martínez-Capel [1].

1 Institut d'Investigació per a la Gestió Integrada de Zones Costaneres (IGIC), Universitat Politècnica de València (UPV). C/ Paranimf 1, 46730 Grau de Gandia, València, España. pitifleiter@hotmail.com

Abstract

Some Iberian native fish species should be the targets of conservation actions, given the decline of their populations and the vulnerable/threatened status of conservation. In this context, species distribution models (SDM) play a significant role in understanding habitat requirements and guiding any conservation action. Multilayer Perceptron (MLP) has been used in the development of SDM at different scales. However, many real-world problems are too complex for a single MLP. Therefore the use on MLP Ensembles was proposed by averaging the forecasts of several MLP. The active selection of the involved MLP could outperform the inclusion of every trained MLP. We tested two approaches in the selection of the proper MLPs in the development of a SDM at the micro-scale for an endemic freshwater fish species, the Bermejuela (*Achondrostoma arcasii* Steindachner, 1866). The first method was based on the Forward selection and the second one in Genetic Algorithms. The results showed the Forward methodology can outperform the more complex Genetic Algorithm. The sensitivity analysis showed that Bermejuela is a shelter-oriented limnophilic species.

Keywords: *Achondrostoma arcasii*, MLP Ensemble, Genetic algorithms, Microhabitat.

1 INTRODUCTION

The native fish species of the Iberian Peninsula present a high degree of endemicity; therefore, they should be the target of biodiversity conservation actions [9]. Species distribution models (SDM) are being used in nearly all branches of life and environmental sciences [11], playing a significant role in understanding habitat requirements of fish species and providing a framework from which spatial and temporal patterns in their distribution can be predicted [24] thereby improving the effectiveness of any restoration and management action. The most popular Artificial Neural Networks architecture has been the Multilayer Perceptron (MLP) appearing most often in the ecological literature because it is considered to be a universal approximation of any continuous function [25]. There are several examples about the use of a single MLP in the development of SDM at the microscale (hereafter microhabitat suitability models) [4, 14] as well as in other models focused on fish conservation [23]. However several studies have demonstrated that SDM do not perform equally even providing discrepant forecasts depending on several factors, such as the initial conditions or the selected modelling technique [6]. To deal with this issue, and considering that many real-world problems are too large and too complex for a single monolithic system to solve alone [33], the use of MLP Ensembles was proposed [12]. The main idea behind ensemble learning is to minimize that discrepancies combining several models, which can be generated by using either different subsets of training examples or the whole training dataset but with different settings and, finally, combining each single forecast [31]. In regression problems, the aggregated prediction is usually calculated by averaging the prediction of each of the considered MLPs, whereas in classification problems the majority vote or the winner-takes-all approaches are common [12]. Originally in ensemble modelling, the ensemble forecast included every developed MLP [12], but promptly it was demonstrated that the active selection of the proper networks improve the final predictions [27, 34]. There are several methods to produce and select the proper MLPs [31, 33, 34] but some inklings have suggested that in some cases more straightforward methodologies can outperform more complex algorithms achieving or at least achieve similar performance [1, 15].

In the present study we modelled the microhabitat suitability for the Bermejuela (*Achondrostoma arcassi* Steindachner, 1866), an Iberian endemic fish classified as vulnerable by the IUCN (International Union for Conservation of Nature), by means of MLP ensembles. Two approaches were used in the active selections of the MLPs included in the final ensemble. The first one based on the Forward selection of the candidates and the second one by means of Genetic Algorithms. A graphical sensitivity

analysis was applied to the model that presented the best performance, and results in terms of habitat suitability were discussed.

2 METHODS

2.1. MICROHABITAT DATA COLLECTION

The microhabitat data collection took place by snorkelling in 2009 during spring and summer in the Guadiela and Escabas Rivers, both within the Tagus River basin (Figure 1). The microhabitat study was done in complete Hydro-Morphological Units (HMU), such as pools or riffles with similar proportion of fast and slow HMU. In general this approach reduces the bias on the dataset, surveying the different habitat conditions in similar proportions. The physical environmental parameters used by the Bermejuela were surveyed during daylight with minimum disturbance to the fish according to standard procedures [13].The Bermejuela showed the trend to gather in shoals encompassing individuals of different sizes; therefore, Presence/Absence was considered the proper approach in modelling fish habitat requirements at the microscale. Fish were observed in 87 locations, whereas the habitat in the surrounding area was measured in 798 locations organized in cross-sections uniformly placed along the HMU, finally providing a Prevalence of 0.10. The four usual variables on microhabitat studies were measured; mean water column velocity, water depth, substrate type and the presence of different of cover types. Velocity was measured with an electromagnetic current meter (Valeport®) and depth was measured with a wading rod at the nearest cm. The substrate type percentages were visually estimated around the sampling point or fish location [3].

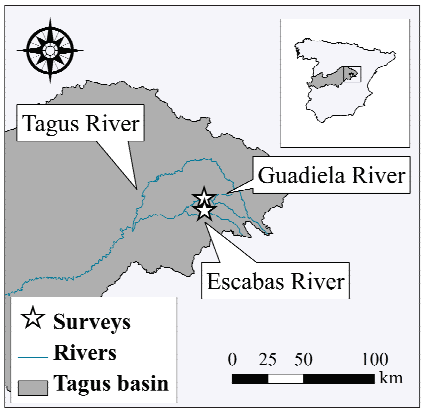


Figure 1 : Location of the sites where surveys of microhabitat selected by brown trout were performed, in rivers of the Tagus River Basin.

The substrate classification was simplified from the American Geophysical Union size scale in: bedrock, boulders (>256 mm), cobbles (256–64mm), gravel (64–8 mm), fine gravel (8–2 mm), sand (2 mm - 62 µm), silt (< 62 µm) and vegetated soil (i.e. substrate covered by macrophytes); accordingly, a Substrate index (S) [20] was calculated. The cover types were vegetation, shadow, boulders, caves, roots or woody debris. The maximum surveyed mean velocity was 1.01 m/s and the maximum depth was 2.05 m, the most abundant substrate type was cobble (Subtrate index = 6) and the maximum presence of cover types for a single location was of 3.

2.2. MICROHABITAT SUITABILITY MODELLING

2.2.1. MLP candidates training

The selected modelling technique was the Multilayer Perceptron Ensemble (MLP Ensemble) [12]. In accordance with Waters [32], who firstly introduced the use of habitat suitability curves, the microhabitat suitability was desired to be standardised in a value ranging from zero to one, with zero (absence) being unsuitable and one (presence) fully suitable. Therefore, the hyperbolic tangent and linear transformation functions were used to construct each of the MLP candidates. In the present study the MLP training was carried out in *R* [30] with the package *monmlp* [7] which allows a versatile generation of different MLP architectures and optimizes the MLP weights using the non-linear minimization (*nlm)* routine [30]. The number of neurons in the hidden layer was determined as two, thus produced a good trade-off between bias and variance.

In MLP Ensemble modelling each member of the committee should complements each other, improving the prediction capability [1], but differences between the members of the Ensemble are also advisable. There are a variety of ways to construct an MLP Ensemble with certain diversity between its members; using different training sets, architectures or learning methods; *Bagging* has been demonstrated to be effective for achieving diversity [1, 5, 26]. Therefore each MLP was trained with the 60 % randomly selected Presence cases (52 cases), and considering that prevalence has an strong effect on model performance [16], similar amount of Absence cases that were also randomly selected, thus providing datasets with prevalence 0.5, hereafter Training dataset, with 104 cases. The remaining cases were gathered in the Validation dataset. At this step, no care was taken about the overfitting and training was left freely. It has been reported that the diversity among classifiers generally compensates for the increase in error rate of any individual classifier, both in the Training datasets and in the Validation datasets [26]. However, for the active selection of the considered MLPs in the Ensemble, it is advisable to analyse the error in Training and Validation for each of the ensemble members. Therefore we analysed the error that each member of the MLP Ensemble would commit on each

Training and Validation datasets of the selected candidates.

The objective function was the one that minimised the Mean Absolute Error (MAE). Additionally, the objective function included a penalty if the outcomes did not covered the whole considered range (i.e. from 0 to 1). The amount of trained MLPs was heuristically determined, because the trial of all the possible combinations of 0.5 Prevalence datasets was considered unaffordable. The number of trained MLPs was the one that produced stable mean error considering every trained MLP. Therefore, 2000 MLPs were trained and pooled. Finally, the classification strength of the developed MLP Ensembles was also considered, then the Sensitivity (i.e. ratio of presences classified as presences), the Specificity (i.e. ratio of absences classified as absences) and the global performance criterion True Skill Statistic (TSS) [2] were also calculated.

2.2.2. Forward selection of candidates

The Forward selection of the best combination of MLPs has been previously applied [1, 15] and was carried out as follows: Starting with each of the pooled MLP, the remaining were added one by one, and their predictions were averaged. The one that produced the largest improvement on the model performance was selected and the remaining MLPs were tried following the same procedure, until no improvement of the objective function was achieved.

2.2.3. Genetic Algorithms in candidates selection

Genetic Algorithms (GA) comprise search and optimization algorithms that work based on the process of natural selection [1]. GA has also been used for Network selection in the development of MLP Ensembles [1, 34]. In the present study the optimization was carried out in R [30] by means of the *rgenoud* package [19]; this is a function that combines evolutionary algorithm methods with a derivative based (quasi-Newton) method to solve difficult optimization problems. *rgenoud* presents 9 operators driving the optimization which correspond to: cloning, uniform mutation, boundary mutation, non-uniform mutation, polytope crossover, simple crossover, whole non-uniform mutation, heuristic crossover and local-minimum crossover [see 19 for further details]. These operators were set up to, 0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0.5, 0.1, 0.2 and 0 respectively. The 2000 available MLPs were encoded in a 2000 length bit strings chromosomes. The population size was formed by 40000 individuals and 100 generations were considered.

2.3. GRAPHICAL SENSITIVITY ANALYSIS

A graphical sensitivity method [29] was applied to investigate the effect of the input variables on the output. This methodology presents an easy interpretation and has been successfully applied in the analysis of several problems [8]. The graphical method uses modified scatter plots which permits to assess the effects of model inputs on the output [see 8 for a deeply explanation]. For each variable i, the variation of the model output due to variation of i (Δ_i) is calculated considering an arbitrary baseline and plotted as segments, with slope equal to the partial derivative of the model output with respect to X_i. The visualization of the partial derivatives as segments allows the identification of trends and types of non-linear relationships between each input variable and the output. The plots contain information about:

i. The effect of input variables on the output. Variables with no effect on the model appear as horizontal lines.
ii. The variable importance, described by the overall Δi vertical range. The greater the overall Δi vertical range, the greater the influence of the variable on the model.
iii. The interaction with other variables, described by the spread of Δi along the y-axis. Variables with no interaction appear as single lines.
iv. Trends and non-linearity shown by trends and non-linearity of the derivatives. If the small segments describe curves, the function computed by the network is not linear.

3 RESULS

3.1. TRAINING RESULTS

The Forward selection of MLPs showed a lower value of the objective function 0.15, whereas the Genetic Algorithm (GA) provided a slightly higher value of 0.17 (**Error! No s'ha trobat l'origen de la referència.**). The whole MLPs set provided a large value, 74.00 whereas the best single net provided a value of 0.31. The Forward procedure selected 6 MLPs whereas the GA only 3 However, regarding the classificatory strength they did not differed substantially (**Error! No s'ha trobat l'origen de la referència.**) because sensitivity (Sn), specificity (Sp) and TSS were similar. Therefore, the MLP Ensemble developed by means of the Forward procedure was selected for further analysis. The inspection of the errors distribution in Training and Validation showed differences (Figure 2). However, considering that most of the data belonged to the Validation dataset, it was finally considered acceptable; thus the difference was not extreme, even presenting a slight overlap, and the classificatory strength was high (**Error! No s'ha trobat l'origen de la referència.**).

Table 1: Results summary, Number of selected networks, Value of the Objective function (weighted aggregation of MAE), Sensitivity (Sn), Specificity (Sp) and TSS obtained using two approaches, the Forward method and the Genetic Algorithm (G.A.).

	Forward	GA
Nets	6	3
Objective	0.15	0.17
Sn	0.92	0.91
Sp	0.74	0.75
TSS	0.66	0.65

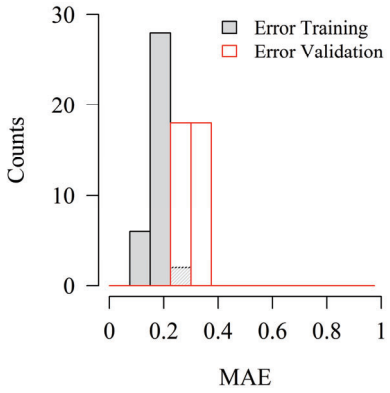


Figure 2: Distribution of error that each MLP member would commit on each Training and Validation datasets of the selected candidates. 6 MLPs were selected yielding 36 Training and 36 Validation datasets. As expected, the selection of datasets with 0.5 Prevalence (104 cases) produced a larger error in Validation, but a small overlap was observed.

3.2. SENSITIVITY ANALYSIS

The sensitivity analysis (Figure 3) showed that all the variables presented some interactions (i.e. they presented a vertical spread at each of the considered values). Velocity showed a negative effect on the presence of Bermejuela, thus no positive values were observed beyond 0.2 m/s. Depth showed a positive effect on presence, but shallow waters also presented positive effects due to some combinations with the remaining variables. Substrate showed a negative effect as it gets coarser, thus the larger positive effects corresponded to substrate index of 0. Cover presented the largest positive effect if present, but the increment on the suitability was mitigated as the amount of elements of cover increased. The ranking of variables showed that the most important variable was cover, followed by depth and velocity.

4 DISCUSSION

The developed Multilayer Perceptron Ensemble (MLP Ensemble) could be considered good and the results consistent for further applications. The microhabitat suitability model achieved higher values of the performance criteria than previous studies on freshwater fish at the microscale, specifically considering its classificatory strength [21, 22].

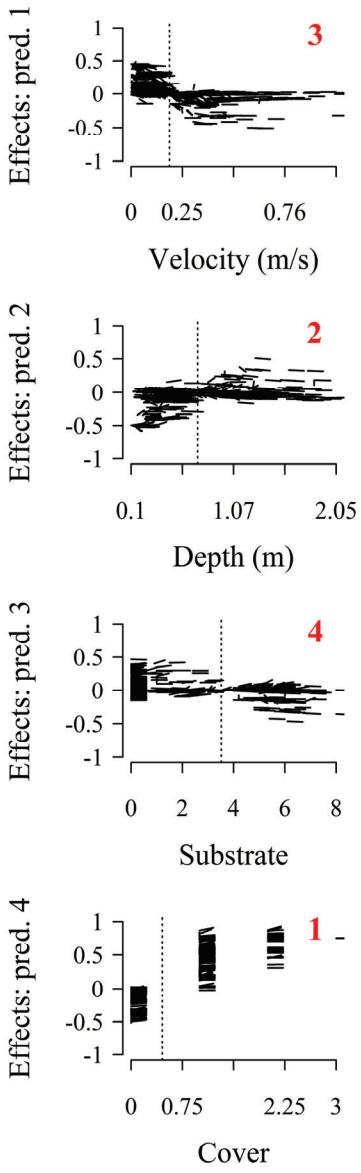


Figure 3: Sensitivity analysis. Dots represent the base line corresponding to the mean value. The four considered variables showed interactions thus presented local and general spread. Red values represent the variable importance. The most important variable was cover.

The results agreed previous studies [34], regarding that the active selection of the MLP Ensemble outperformed the inclusion of the whole set. However, the extreme observed difference (i.e. 0.15 *versus* 74) could be certainly attenuated by constraining the overfitting on the Training dataset. The results partially agree with previous studies where more straightforward methodologies outperform more complex algorithms, achieving at least similar performance [1, 15]. Theoretically the use of GA is a promising tool which allow to test alternatives that could not be tested in the Forward procedure, and it has been recognized that relatively bad models can provide satisfactory results since errors are compensated [26]. However, the optimization problem was relatively simple whereas the searching space was too large. Therefore the Forward successfully searched for the best core of complementary MLP thus conditioning the final results and hence providing a lower error. The GA started from a broader searching space hindering the achievement of better results. The main factors controlling the results derived from the *rgenoud* are the population size and the amount of generations [19], then an alternative lais on the increment of that parameters, but the GA lapsed longer than the Forward procedure dissuading us from using this procedure. Recently the use of GA has been satisfactorily applied in the selection of MLPs [31] with different approach. In that study, the amount of MLPs in the ensemble was increased iteratively thus [31] the best pair of MLPs was found by means of GA, then the best trio, and so on. That approach could be faster than the Forward approach and the combinations would be not conditioned by previous steps. However, we considered that regarding the present problem the results shall not differ substantially. Nevertheless it should be thoroughly studied in future research. At this point we recommend the Forward methodology. However, other alternatives such as the negatively correlated MLPs Ensembles [33] or the aforementioned approach should be tested in order to determine without peradventure the properness of a given methodology.

Regarding the sensitivity analysis, the Bermejuela can be classified as a shelter-oriented limnophilic species, because cover was the most important variable. The other relevant variables indicated the maximum suitability for slow and deep microhabitat, related with the natural local deposition of silt in the riverbed. The observed interactions corroborated the critics to the univariate approach. The consideration of each habitat variable independently would produced larger errors [28], because usually fish, and specifically Bermejuela, do not select the habitats based on single variables, but considering them as a whole. No examples of microhabitat suitability appear in the literature, but their status and distribution [9] and some technical reports at the local level [17, 18]. Therefore, the selected model is considered valuable in its application on restoration efforts, which should be encouraged because the Bermejuela has disappeared from some of the main streams of the Iberian Peninsula [10].

Acknowledgements

This study was partially funded the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness within the project SCARCE (Consolider-Ingenio 2010 CSD2009-00065).

References

[1] M. A. H. Akhand, K. Murase: Neural network ensemble construction fusing multiple popular methods. *IAENG International Journal of Computer Science* 2010, pp.º.

[2] O. Allouche, A. Tsoar, R. Kadmon: Assessing the accuracy of species distribution models: prevalence, kappa and the true skill statistic (TSS). *Journal of Applied Ecology* 2006, pp.º 1223–1232.

[3] K. D. Bovee, J. R. Zuboy: Proceedings of a workshop on the development and evaluation of habitat suitability criteria: A compilation of papers and discussions presented at Colorado State University, Fort Collins, Colorado, December 8-12, 1986. In*: 1988*; 1988: 407.

[4] S. Brosse, S. Lek: Modelling roach (Rutilus rutilus) microhabitat using linear and nonlinear techniques. *Freshwater Biology* 2000, pp.º 441-452.

[5] G. Brown, J. Wyatt, R. Harris, X. Yao: Diversity creation methods: A survey and categorisation. *Information Fusion* 2005, pp.º 5-20.

[6] L. Buisson, W. Thuiller, N. Casajus, S. Lek, G. Grenouillet: Uncertainty in ensemble forecasting of species distribution. *Global Change Biology* 2010, pp.º 1145-1157.

[7] A. J. Cannon: monmlp: Monotone multi-layer perceptron neural network. . In., R package version 1.1.2. edn; 2012.

[8] A. J. Cannon, I. G. McKendry: A graphical sensitivity analysis for statistical climate models: Application to Indian monsoon rainfall prediction by artificial neural networks and multiple linear regression models. *International Journal of Climatology* 2002, pp.º 1687-1708.

[9] I. Doadrio: Origen y Evolución de la Ictiofauna Continental Española. En: Atlas y Libro Rojo de los Peces Continentales de España, 2da edn. Madrid: CSIC y Ministerio del Medio Ambiente; 2002.

[10] B. Elvira: Conservation status of endemic freshwater fish in Spain. *Biological Conservation* 1995, pp.º 129-136.

[11] A. Guisan, W. Thuiller: Predicting species distribution: offering more than simple habitat models. *Ecology Letters* 2005, pp.º 993-1009.

[12] L. K. Hansen, P. Salamon: Neural network ensembles. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 1990, pp.º 993-1001.

[13] J. Heggenes, Å. Brabrand, S. Saltveit: Comparison of Three Methods for Studies of Stream Habitat Use by Young Brown Trout and Atlantic Salmon. *Transactions of the American Fisheries Society* 1990, pp.º 101-111.

[14] P. Laffaille, E. Feunteun, A. Baisez, T. Robinet, A. Acou, A. Legault, S. Lek: Spatial organisation of European eel (Anguilla anguilla L.) in a small catchment. *Ecology of Freshwater Fish* 2003, pp.º 254-264.

[15] T. Lofstrom, U. Johansson, H. Bostrom: Comparing methods for generating diverse ensembles of artificial neural networks. *Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN),* Barcelona, 2010, pp.º 6.

[16] S. C. W. H. C. W. Manel, H. Ormerod, S. J.: Evaluating presence-absence models in ecology: The need to account for prevalence. *Journal of Applied Ecology* 2001, pp.º 921-931.

[17] F. Martínez-Capel, R. Muñoz-Mas, R. M. S. Costa: Estudio comparativo y de transferibilidad de las curvas de preferencia para el establecimiento de caudales ecológicos. . In. València: Universitat Politècnica de València (UPV); 2011.

[18] F. Martínez-Capel, R. Muñoz-Mas, R. M. S. Costa, D. Argibay: Curvas de idoneidad de microhábitat en las cuencas del Tajo y Duero y estudio específico de curvas para la bermejuela y trucha común adulta. In. València: Universitat Politècnica de València (UPV); 2009.

[19] W. R. Mebane Jr, J. S. Sekhon: Genetic optimization using derivatives: The rgenoud package for R. *Journal of Statistical Software* 2011, pp.º 1-26.

[20] A. M. Mouton, J. D. Alcaraz-Hernández, B. De Baets, P. L. M. Goethals, F. Martínez-Capel: Data-driven fuzzy habitat suitability models for brown trout in Spanish Mediterranean rivers. *Environmental Modelling and Software* 2011, pp.º 615-622.

[21] A. M. Mouton, M. Schneider, A. Peter, G. Holzer, R. Müller, P. L. M. Goethals, N. De Pauw: Optimisation of a fuzzy physical habitat model for spawning European grayling (Thymallus thymallus L.) in the Aare river (Thun, Switzerland). *Ecological Modelling* 2008, pp.º 122-132.

[22] R. Muñoz-Mas, F. Martínez-Capel, M. Schneider, A. M. Mouton: Assessment of brown trout habitat suitability in the Jucar River Basin (SPAIN): Comparison of data-driven approaches with fuzzy-logic models and univariate suitability curves. *Science of the Total Environment* 2012, pp.º 123-131.

[23] E. J. Olaya-Marín, F. Martínez-Capel, R. M. Soares Costa, J. D. Alcaraz-Hernández: Modelling native fish richness to evaluate the effects of hydromorphological changes and river restoration (Júcar River Basin, Spain). *Science of the Total Environment* 2012, pp.º 95-105.

[24] J. D. Olden, D. A. Jackson, P. R. Peres-Neto: Predictive models of fish species distributions: A note on proper validation and chance predictions. *Transactions of the American Fisheries Society* 2002, pp.º 329-336.

[25] J. D. Olden, J. J. Lawler, N. L. Poff: Machine learning methods without tears: A primer for ecologists. *Quarterly Review of Biology* 2008, pp.º 171-193.

[26] D. Opitz, R. Maclin: Popular Ensemble Methods: An Empirical Study. *Journal of Artificial Intelligence Research* 1999, pp.º 169-198.

[27] D. W. Opitz, J. W. Shavlik: Actively Searching for an Effective Neural Network Ensemble. *Connection Science* 1996, pp.º 337-353.

[28] D. J. Orth, O. E. Maughan: Evaluation of the incremental methodology for recommending instream flows for fishes. *Transactions of the American Fisheries Society* 1982, pp.º 413–445.

[29] T. A. Plate, J. Bert, J. Grace, P. Band: Visualizing the function computed by a feedforward neural network. *Neural Computation* 2000, pp.º 1337-1353.

[30] R Development Core Team: R: A language and environment for statistical computing. In. Vienna, Austria.: R Foundation for Statistical Computing; 2012.

[31] D. Wang, M. Alhamdoosh: Evolutionary extreme learning machine ensembles with size control. *Neurocomputing* 2013, pp.º 98-110.

[32] B. F. Waters: A Methodology for Evaluating the Effects of Different Streamflows on Salmonid Habitat - Proceedings of the Symposium and Specialty Conference on Instream Flow Needs. In*: 1976; Bathesda, MD*: American Fisheries Society; 1976: 13.

[33] X. Yao, Y. Xu: Recent advances in evolutionary computation. *Journal of Computer Science and Technology* 2006, pp.º 1-18.

[34] Z. H. Zhou, J. Wu, W. Tang: Ensembling neural networks: Many could be better than all. *Artificial Intelligence* 2002, pp.º 239-263.

UN ESTUDIO PRELIMINAR SOBRE CLASIFICACIÓN DE HUELLAS DACTILARES CON SISTEMAS DE CLASIFICACIÓN BASADOS EN REGLAS DIFUSAS

Mikel Galar[1], **Jose Sanz**[1], **Miguel Pagola**[1], **Humberto Bustince**[1], **Francisco Herrera**[2]

[1]*Dpto. de Automática y Computación (Universidad Pública de Navarra),* {joseantonio.sanz,mikel.galar}@unavarra.es
[2]*Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial (Universidad de Granada),* herrera@decsai.ugr.es

Resumen

En este trabajo estudiamos cómo de competitivos pueden llegar a ser los modelos basados en reglas difusas frente a modelos de caja negra como pueden ser las Maquinas de Soporte Vectorial en el problema de clasificación de huellas dactilares. Llevamos a cabo un estudio experimental con diferentes modelos de extracción de características (abarcando prácticamente todos los tipos de características utilizadas) y tres bases de datos de huellas dactilares con diferentes calidades. Los resultados obtenidos muestran la competitividad de los modelos basados en reglas difusas y permiten pensar en nuevas líneas futuras de trabajo para mejorar la clasificación con estos modelos.

Palabras Clave: Clasificación, Reglas Difusas, Huellas Dactilares, Aprendizaje.

1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas de reconocimiento de huellas dactilares son los sistemas de autenticación biométrica más extendidos. Una huella dactilar puede definirse como la imagen visible que producen los valles y las crestas papilares de un dedo de la mano. La individualidad de las huellas viene dada por las características locales de las crestas y de las relaciones entre ellas [8]. Entre todas las posibles características, las minucias son las más utilizadas a la hora de decidir si dos huellas corresponden al mismo individuo o no [3].

Uno de los mayores problemas en los sistemas de identificación, aquellos en los que se trata de saber a qué individuo de la base de datos (BBDD) pertenece la huella de entrada (o detectar si no pertenece a ninguno), es el coste computacional asociado, ya que cada huella de entrada debe ser comparada con todas las huellas almacenadas en el sistema. Es por ello que la reducción del tiempo en la fase de emparejamiento es un factor de vital importancia en sistemas con grandes BBDD. Una forma común de reducir el tiempo de emparejamiento consiste en dividir la BBDD en otras de menor tamaño que almacenen huellas que compartan ciertas características globales [13], de tal forma que solo sea necesario llevar a cabo el proceso comparación de una nueva huella con las que comparten dichas características. Este problema es el denominado como clasificación de huellas dactilares, en el que generalmente se consideran cinco clases de huellas: *left-loop, right-loop, whorl, arch y tented-arch* [13]. Lógicamente, dentro del sistema de autenticación la clasificación debe ser fiable, ya que esta afecta directamente al posterior proceso de emparejamiento, y un fallo en la clasificación puede acarrear un fallo en el proceso de emparejamiento o un aumento importante en el ratio de penetración (porcentaje de la BBDD que es comparado con la huella de entrada).

En la literatura especializada existen una gran variedad de métodos para la clasificación de huellas dactilares [13]. Estos pueden dividirse en dos fases:

- *Extracción de características:* Consiste en el procesamiento de la imagen de huella dactilar a partir del cual se obtienen las características que definirán a cada huella.
- *Clasificación:* Es el proceso en el que, a partir de las características extraídas en la fase de extracción, se clasifica cada huella en una de las cinco clases a las que puede pertenecer. Para ello, habitualmente se considera el uso de algoritmos de aprendizaje de clasificadores [10], aunque en algunos casos también se han propuesto modelos de clasificación fija [11], que ofrecen generalmente resultados algo más pobres.

En este trabajo vamos a considerar tres modelos diferentes de extracción de características. El primero hace uso de la característica denominada como FingerCode [10], al igual que el segundo [7], aunque este añade información de los puntos singulares de la huella dactilar. Los puntos singulares son las zonas de la huella en las que las orientaciones de las crestas varían más rápidamente (*cores* y *deltas*) [13].

El último de los métodos únicamente considera las relaciones entre los puntos mencionados [12]. Estos métodos son algunos de los más recientes y precisos presentados en la literatura.

Una vez fijados dichos métodos de extracción, nos vamos a centrar en la fase de clasificación y aprendizaje. Nuestra intención es considerar diferentes modelos de aprendizaje de reglas difusas con el objetivo de investigar si dichos modelos pueden alcanzar la precisión obtenida por otros comúnmente utilizados en este problema, como son las Máquinas de Soporte Vectorial (SVMs) [17].

Los Sistemas de Clasificación Basados en Reglas Difusas (SCBRDs) [2] son empleados en múltiples ocasiones debido a que proporcionan un modelo interpretable por medio de la utilización de etiquetas lingüísticas en sus reglas. Sin embargo, se les suele achacar el hecho de que no llegan a ser tan precisos como otros modelos no interpretables, como son las SVM. En este trabajo queremos llevar a cabo un estudio preliminar sobre clasificación de huellas dactilares con estas técnicas, con la intención de mostrar que pueden ser competitivas con las SVMs en el problema de clasificación de huellas dactilares, además de ser modelos interpretables. Para ello, consideramos tres modelos recientes como son FARC-HD [2], IVTURS [16] y FURIA [9].

Para poder llevar a cabo el estudio planteado, hemos generado tres BBDD de diferentes calidades con 10000 huellas cada una mediante la herramienta SFinGe [1] [4, 13], que nos permite generar huellas sintéticas similares a las reales, y cuya ventaja principal es el hecho de que la etiqueta de clase puede ser codificada de manera sencilla. Además, consideramos los tres métodos de extracción de características propuestos con cada uno de los clasificadores que analizamos: los tres basados en reglas difusas, C4.5 [14] y la SVM con dos configuraciones diferentes.

El resto del trabajo está organizado como sigue. En la Sección 2, describimos los métodos de extracción de características considerados. Posteriormente, introducimos los clasificadores estudiados en la Sección 3. El marco experimental utilizado está descrito en la Sección 4, mientras que los resultados obtenidos los presentamos en la Sección 5. Finalmente, la Sección 6 concluye el trabajo.

2 MÉTODOS DE EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS DE HUELLAS DACTILARES

En esta sección describimos brevemente los métodos de extracción de características que hemos considerado para llevar a cabo el estudio. Cabe destacar que mediante estos tres métodos cubrimos prácticamente todas los tipos de características comúnmente utilizadas para clasificación de huellas dactilares. Además de que se trata de métodos del estado del arte que suelen obtener resultados precisos.

2.1 FINGERCODE (JAIN)

El método de Jain [10] utiliza una representación global del flujo de los valles y crestas en la huella, lo que permite que sea invariante ante la presencia de minucias. Para obtener dicha representación primero es necesario encontrar el core o punto de referencia de la huella (la zona con mayor cantidad de información para la clasificación), para lo que se usa el método de Poincarè [13] (si no se encuentra, se utiliza una estimación basada en covarianzas de orientaciones).

Esta zona es posteriormente descompuesta en 4 componentes utilizando el filtro de Gabor con diferentes orientaciones. Mediante este filtro, se hace que los valles y las crestas en la orientación correspondiente a cada componente queden más definidos, mientras que los que tienen otras orientaciones desaparezcan. Así pues, las zonas más definidas presentan una gran variación del nivel de gris, al contrario que las otras zonas.

Por ello, como características finales para la clasificación se divide cada componente en pequeños bloques sobre los que se calcula la desviación estándar del nivel de gris. Estos valores son los que finalmente forman el vector de características asociado al método de Jain y que suele denominarse FingerCode. El modelo propuesto por Jain considera 48 sectores en cada una de las cuatro componentes mencionadas, por lo que el vector de características consiste en 192 valores que indican el nivel de respuesta que tiene cada sector a cada orientación del filtro correspondiente.

2.2 FINGERCODE Y PUNTOS SINGULARES (HONG)

El método de Hong [7] consiste en una evolución del método propuesto por Jain. Para ello, sigue manteniendo el uso del FingerCode sin cambios respecto al original propuesto por Jain, pero añade nueva información basada en los puntos singulares (también obtenidos mediante el método de Poincarè) de la huella y en pseudo-crestas (línea trazada que trata de seguir el flujo global de las crestas).

Por tanto, a las 192 características aportadas por el FingerCode, se le unen 10 características nuevas (haciendo un total de 202 características) entre las que se encuentran, el número de cores y deltas, localizaciones y distancias relativas de los deltas y los finales de las pseudo-crestas respecto al core principal.

2.3 PUNTOS SINGULARES (LIU)

El método de Liu [12] extrae una serie de características directamente a partir de los puntos singulares de la huella.

[1] Synthetic Fingerprint Generator: `http://biolab.csr.unibo.it/research.asp?organize=Activities&select=&selObj=12&pathSubj=111||12&`

Estas características son principalmente medidas relativas a dichos puntos y la confianza obtenida en su detección. Esta confianza puede estimarse debido al método utilizado para su detección, que en vez de considerar el método de Poincarè, hace uso del método basado en filtros complejos.

Además, con el objetivo de mejorar la detección de los puntos y las características obtenidas, el método de Liu hace uso de un modelo multi-escala del mapa de orientaciones, lo que hace que se obtengan las mismas características pero en diferentes escalas del mapa. En concreto, en cada escala se obtienen 16 características, y el modelo propuesto hace uso de 4 escalas, por lo que el vector de características final tiene un total de 64 características.

3 CLASIFICADORES

En esta sección vamos a describir brevemente los cinco clasificadores que vamos a utilizar para afrontar el problema de la clasificación del tipo de huella dactilar.

3.1 C4.5

C4.5 [14] es un algoritmo de generación de árboles de decisión. El árbol se construye descendentemente utilizando la ganancia de información normalizada (diferencia en entropía) que se obtiene al elegir un atributo para particionar el espacio de ejemplos en el siguiente nodo del árbol. El atributo con la mayor ganancia de información es el elegido para ramificar el árbol (tomar la decisión).

3.2 FARC-HD

FARC-HD [1] (*Fuzzy Association Rule-based Classification model for High-Dimensional problems*) es un clasificador basado en el uso de reglas de asociación que proporciona un conjunto de reglas difusas compacto y preciso. Para generar la base de conocimiento aplica tres etapas:

- Generación de las reglas difusas: aplica un árbol de búsqueda para cada clase en el que en base al soporte y la confianza se extraen las reglas difusas.
- Selección de las reglas más interesantes: en la primera fase del algoritmo se puede generar un gran número de reglas por lo que se aplica una estrategia de ejemplos ponderados, utilizando el cubrimiento de los ejemplos, para seleccionar las reglas más interesantes de cada clase.
- Selección de reglas y ajuste lateral: la última etapa de este método consiste en aplicar un algoritmo evolutivo en el que se selecciona el conjunto de reglas junto con la mejor posición de los conjuntos difusos que proporcione el mejor rendimiento.

3.3 IVTURS

IVTURS [16] (*Interval-Valued fuzzy rule-based classification system with TUning and Rule Selection*) es una modificación de FARC-HD. Concretamente realiza las siguientes modificaciones con respecto a FARC-HD:

- Representa las etiquetas lingüísticas por medio de conjuntos intervalo-valorado difusos. De esta forma se modela el grado de ignorancia [15] asociado al establecimiento de valores numéricos como grados de pertenencia de los elementos al conjunto difuso.
- Extiende el método de razonamiento difuso para que se trabaje con información intervalar en lugar de numérica a lo largo de todo el proceso de inferencia.
- Sustituye el ajuste de la posición lateral de las funciones de pertenencia por el ajuste de los valores de los parámetros introducidos en el primer paso del método de razonamiento intervalo-valorado difuso.

3.4 FURIA

FURIA [9] (*Fuzzy Unordered Rule Induction Algorithm*) es un algoritmo basado en RIPPER [5] que introduce las siguientes modificaciones:

- Cambia la representación de las reglas ya que genera reglas difusas en lugar de reglas convencionales.
- Elimina la inclusión de la regla por defecto y genera un conjunto de reglas para cada clase por lo que el orden de las mismas es irrelevante.
- No aplica el procedimiento de poda en la fase de aprendizaje de las reglas.
- Añade un mecanismo de modificación local de las reglas para clasificar los ejemplos no cubiertos por las reglas difusas generadas.

3.5 MÁQUINAS DE SOPORTE VECTORIAL

Máquinas de Soporte Vectorial (SVM) [17]. Tratan de mapear el espacio de entrada original en un espacio de alta dimensionalidad mediante una función kernel (para evitar el cómputo del producto interno de dos vectores). En el nuevo espacio de características, determinan el hiperplano de separación óptimo, que es aquel con máximo margen de separación entre las clases. De esta forma, en vez de minimizar el riesgo esperado, se minimiza el riesgo empírico. Las SVM son muy empleadas por los buenos resultados que obtienen, pero por contra son sistemas poco interpretables.

4 MARCO EXPERIMENTAL

En esta sección presentamos el marco experimental utilizado para llevar a cabo los experimentos y obtener los resultados mostrados en la Sección 5.

Para llevar a cabo el estudio experimental, hemos considerado tres bases de datos de imágenes de huellas dactilares con diferentes calidades. Para su obtención, hemos hecho uso de la herramienta software SFinGe [4, 13], que permite la creación de huellas sintéticas con aparencia muy realista

con diferentes niveles de calidad (traslaciones, rotaciones y deformaciones geométricas).

A continuación describimos los tres perfiles de calidad de huellas dactilares que hemos considerado para la generación de las bases de datos en la herramienta SFinGe:

- *High Quality No Perturbations* (HQNoPert): Bases de datos generadas con calidad alta y sin llevar a cabo perturbaciones de ningún tipo sobre la huella.
- *Default*: Calidad por defecto. Se trata de huellas de calidad media con ligeras perturbaciones de localización y rotaciones.
- *Varying Quality and Perturbations* (VQandPert): Bases de datos con huellas con todo tipo de calidades, buenas, medias, malas y muy malas. Además, las huellas pasan por una fase de perturbación, tanto de localización, rotación y distorsiones geométricas.

Para cada uno de estos perfiles, hemos generado 5 bases de datos, cada una compuesta por 2000 huellas dactilares, lo que nos permite obtener un total de 10000 huellas por cada tipo de calidad con las que evaluar los modelos. Debemos mencionar que las huellas han sido generadas siguiendo la distribución natural de las clases. Para acelerar los experimentos, en lugar de llevar a cabo una validación cruzada de 5 particiones, hemos considerado un esquema cruzado en el que cada base de datos de 2000 huellas se emplea como partición de test, para la base de datos de entrenamiento de 2000 huellas anterior (es decir, para la base de datos 2, empleamos como base de datos de entrenamiento la base de datos 1 y para la 1 empleamos como entrenamiento la 5).

Debido a las dimensiones y a la cantidad de ejemplos en la base de datos, se hace imposible su aprendizaje directo mediante los métodos FARC-HD e IVTURS. Por ello, como método de selección de características preliminar, hemos considerado únicamente las características que utiliza C4.5 para construir el árbol. Así pues, obtenemos una base de datos de menores dimensiones para el aprendizaje de FARC-HD e IVTURS. El resto de métodos son aprendidos mediante la base de datos original (para mantener una comparativa fiel a sus posibilidades, ya que la selección de características previa puede ser un elemento limitador en el resto de métodos).

Finalmente, las configuraciones de los clasificadores utilizados en el estudio las presentamos en la Tabla 1. Debemos destacar que hemos considerado dos configuraciones de SVMs diferentes. La primera de ellas utiliza un kernel polinomial (SVM_{Pol}) y la segunda un kernel de base radial (SVM_{RBF}).

Tabla 1: Especificación de parámetros.

Algoritmo	*Parámetros*
C4.5	Poda: verdadero, Nivel de confianza: 0.25 Número mínimo de ejemplos por hoja: 2
FARC-HD e IVTURS	Número de etiquetas por variable: 5, Soporte mínimo: 0.05 Confianza mínima: 0.8, Profundidad máxima: 3, Parámetro k: 2 Evaluaciones: 20000, Número de individuos: 50, Parametro alpha: 0.02 Bits por gen: 30, Tipo de inferencia: combinación aditivia
FURIA	Número de optimizaciones: 2, Número de etiquetas por variable: 3
SVMs	C: 1.0, Tolerancia: 0.001, ε: 1.0E-12, RBFKernel$_\gamma$: 0.01 Modelo logístico: Verdadero

5 ESTUDIO EXPERIMENTAL

Como ya hemos mencionado anteriormente, de manera previa a la clasificación de las huellas es necesario extraer las características que las van a tratar de caracterizar y a partir de las cuales llevaremos a cabo la clasificación. Dos de los tres métodos de extracción de características considerados (Jain y Hong, los basados en FingerCode) pueden rechazar la clasificación de una huella debido a su colocación (no se puede colocar la malla centrada en la huella dentro de la imagen), por lo que estas huellas son descartadas de las bases de datos generadas. Así mismo, para poder comparar los diferentes métodos de extracción entre sí, estas huellas también han sido eliminadas de las bases de datos cuando utilizamos el método de Liu. Las tasas de rechazo obtenidas (que lógicamente incrementan según decrece la calidad de las huellas) son las siguientes:

- HQNoPert: 1.44 %.
- Default: 5.38 %.
- VQandPert: 15.90 %.

Los resultados de clasificación en las bases de datos de test para cada uno de los tres métodos de extracción de características y clasificadores los mostramos en las Tablas 2, 3 y 4. Los resultados mostrados son la precisión obtenida respecto al número de huellas total una vez eliminadas las rechazadas por los métodos de extracción. Cada una de las tablas representa los resultados para los diferentes niveles de calidad considerados, es decir, base de datos de alta calidad y sin perturbaciones (HQNoPert) en la Tabla 2, calidad por defecto (Default) en la Tabla 3 y calidad variable con perturbaciones (VQandPert) en la Tabla 4. Las tablas se dividen a su vez en 3 secciones, una por cada método de extracción estudiado, y para cada método mostramos los resultados en cada una de las bases de datos con cada clasificador. El mejor resultado para cada método de extracción está resaltado en **negrita**.

A tenor de los resultados obtenidos debemos destacar los siguientes puntos.

- Los métodos difusos ofrecen unos resultados muy competitivos cuando utilizamos el método de Liu para extraer las características. Esto puede ser debido a que las reglas ganan sentido cuando se consideran las relaciones entre puntos singulares y son más difíciles de extraer del FingerCode. Hay que destacar que en la base de datos más difícil (VQandPert) esta sinergia permite sobrepasar a las SVMs. Debemos destacar el comportamiento de FURIA ya que obtiene el mejor resultado en todas las BBDDs.
- De manera similar, los método de Jain y Hong funcionan en general mejor con las SVMs. En el caso de Hong (el más preciso), los modelos de reglas difusas

Tabla 2: Resultados obtenidos en test sobre el tipo de base de datos HQNoPert y los tres métodos de extracción de características estudiados.

Características	BBDD	C4.5	FARC-HD	FURIA	IVTURS	SVM_{Pol}	SVM_{RBF}
Jain	1	92.09	94.53	93.56	94.02	**95.64**	95.08
	2	90.48	93.69	93.69	93.84	95.62	**95.73**
	3	92.12	92.93	93.43	93.68	**96.01**	95.00
	4	92.69	94.31	94.31	93.91	**96.45**	95.89
	5	91.52	93.40	92.79	93.40	**95.12**	94.06
	Media	91.78	93.77	93.56	93.77	**95.77**	95.15
Hong	1	95.54	95.74	94.93	95.64	**96.45**	95.89
	2	95.27	96.54	95.57	96.08	95.93	**97.30**
	3	94.19	95.30	95.50	95.35	95.40	**96.46**
	4	94.37	96.45	95.99	96.55	96.90	**97.16**
	5	95.33	**96.60**	95.23	95.99	95.58	96.55
	Media	94.94	96.13	95.44	95.92	96.05	**96.67**
Liu	1	**94.78**	93.92	94.17	94.02	93.72	89.25
	2	94.76	94.61	**95.17**	94.10	94.40	89.92
	3	**94.80**	93.89	**94.80**	93.73	94.34	93.89
	4	94.67	94.21	**95.63**	94.52	94.97	93.96
	5	93.80	93.65	93.75	93.40	**93.91**	92.48
	Media	94.56	94.05	**94.70**	93.95	94.27	91.90

Tabla 3: Resultados obtenidos en test sobre el tipo de base de datos Default y los tres métodos de extracción de características estudiados.

Características	BBDD	C4.5	FARC-HD	FURIA	IVTURS	SVM_{Pol}	SVM_{RBF}
Jain	1	89.25	91.78	92.31	91.25	**94.20**	94.10
	2	89.78	92.22	90.95	91.69	**94.76**	94.02
	3	89.60	91.72	92.25	91.62	94.43	**95.07**
	4	91.48	92.91	92.65	93.12	94.97	**95.08**
	5	90.00	91.89	91.95	91.84	**94.00**	93.58
	Media	90.02	92.11	92.02	91.90	**94.47**	94.37
Hong	1	93.05	93.78	93.15	93.99	**95.05**	94.84
	2	92.48	93.70	92.69	93.44	95.24	**95.29**
	3	92.94	93.90	94.01	94.16	95.86	**96.07**
	4	92.80	94.13	94.60	95.71	95.93	**96.08**
	5	92.53	93.95	93.95	94.11	**95.11**	94.84
	Media	92.76	93.89	93.68	94.28	**95.44**	95.43
Liu	1	92.83	**93.52**	93.41	86.67	93.10	90.20
	2	93.01	93.49	**93.91**	93.12	93.01	92.91
	3	93.42	93.53	**94.27**	93.00	93.47	92.63
	4	93.86	**94.55**	94.44	93.70	94.50	92.38
	5	**94.47**	93.79	94.37	93.58	93.42	92.11
	Media	93.52	93.78	**94.08**	92.01	93.50	92.04

no quedan muy lejos (menos de 1 % en HQNoPert y alrededor de un 2 % en las otras BBDD).

- El caso de C4.5 es similar al de los modelos de reglas difusas, ofrece un comportamiento bastante bueno con Liu (sin llegar al nivel de FURIA), pero bastante más pobre que los difusos cuando se enfrenta a problemas con muchas características como Hong y Jain.
- FARC-HD e IVTURS son competitivos con FURIA cuando utilizamos los métodos de Hong y Jain, pero su comportamiento decae algo más cuando consideramos el método de Liu, aunque en este caso están algo por encima de las SVM. Debemos recordar que, en el caso de Hong y Jain, FARC-HD e IVTURS consideran únicamente las características utilizadas por C4.5, el cual siempre es mejorado por ambos modelos con esas mismas características. Por esta razón, parece razonable pensar que estos clasificadores con un mecanismo de selección de características más potente podrían alcanzar resultados muy competitivos con respecto a las SVMs.
- En cuanto a los métodos de extracción de características, Hong es mejor (como es de esperar) que Jain en todas las bases de datos y clasificadores, ya que añade información a la BBDD de Jain. Con respecto a Liu, que solo utiliza puntos singulares, hay que destacar su comportamiento competitivo, que si bien con BBDD más fáciles no se acerca a los resultados de SVMs + Hong/Jain, logra desbancarlos cuando se considera la BBDD más difícil.

Tabla 4: Resultados obtenidos en test sobre el tipo de base de datos VQandPert y los tres métodos de extracción de características estudiados.

Características	BBDD	C4.5	FARC-HD	FURIA	IVTURS	SVM_{Pol}	SVM_{RBF}
Jain	1	86.36	90.94	90.30	90.94	92.45	**92.56**
	2	84.72	87.36	86.40	85.68	**90.79**	88.87
	3	84.21	87.11	87.35	86.98	**90.99**	89.64
	4	83.38	86.85	87.10	88.50	89.59	**90.14**
	5	82.69	86.99	86.80	88.50	**89.56**	89.50
	Media	84.27	87.85	87.59	88.12	**90.68**	90.14
Hong	1	87.87	93.21	92.51	93.37	93.32	**94.12**
	2	88.21	88.69	89.17	88.69	**91.64**	89.95
	3	87.05	89.02	88.40	88.96	**90.44**	90.38
	4	84.97	88.50	88.80	89.47	**91.54**	90.87
	5	84.65	89.01	88.21	89.01	90.12	**90.55**
	Media	86.55	89.68	89.42	89.90	**91.41**	91.17
Liu	1	92.29	91.91	**92.83**	92.13	91.54	88.79
	2	90.43	90.67	**91.16**	89.59	89.83	88.51
	3	88.96	89.45	**91.30**	89.57	89.27	87.17
	4	90.44	90.69	**91.48**	89.29	88.68	88.07
	5	89.93	90.12	**90.79**	89.93	89.20	87.78
	Media	90.41	90.57	**91.51**	90.10	89.70	88.06

Para finalizar esta sección, cabe reseñar el hecho de que las SVMs para afrontar el problema multi-clase están haciendo uso de un modelo Uno-contra-Uno ("One-vs-One", OVO) [6], el cual generalmente suele permitir mejorar los resultados obtenidos al afrontar problemas multi-clase. Si bien en el caso de las SVMs no queda otro remedio que utilizar este tipo de modelos, en el resto de los casos podrían aplicarse, aunque al tener soporte nativo para problemas multi-clase esto no es necesario. Es por ello que una forma de mejorar la precisión de estos modelos podría ser tratar el problema de huellas dactilares mediante la descomposición del problema original en problemas binarios. Esto unido a un buen modelo de selección de características puede permitir obtener resultados realmente competitivos con modelos que

son cajas negras (SVMs).

6 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos llevado a cabo un estudio preliminar de modelos basados en reglas difusas para la clasificación de huellas dactilares. Para ello hemos considerado bases de datos de huellas de diferentes calidades, tres métodos de extracción de características que han sido probados en tres modelos difusos y dos clásicos.

Los resultado obtenidos nos permiten destacar la competitividad de estos modelos en cuanto a la precisión obtenida en el problema de clasificación de huellas dactilares. También hemos destacado dos líneas futuras importantes para mejorar la precisión de estos modelos, como pueden ser un buen mecanismo de selección de características y la descomposición del problema multi-clase. Otra opción sería ampliar el estudio con nuevas BBDD y métodos de extracción de características.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia bajo los proyectos TIN2010-15055 y TIN2011-28488 y el plan Andaluz de investigación P10-TIC-6858.

Referencias

[1] J. Alcala-Fdez, R. Alcala, and F. Herrera. A fuzzy association rule-based classification model for high-dimensional problems with genetic rule selection and lateral tuning. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(5):857–872, 2011.

[2] J. Alcalá-Fdez, A. Fernández, J. Luengo, J. Derrac, S. García, L. Sánchez, and F. Herrera. KEEL data-mining software tool: Data set repository, integration of algorithms and experimental analysis framework. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 17(2–3):255–287, 2011.

[3] R. Cappelli, M. Ferrara, and D. Maltoni. Minutia cylinder-code: A new representation and matching technique for fingerprint recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 32(12):2128–2141, 2010.

[4] R. Cappelli, D. Maio, and D. Maltoni. Sfinge: an approach to synthetic fingerprint generation. In *Eighth International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV2004)*, Kunming, China, December 2004.

[5] W. W. Cohen. Fast effective rule induction. In *Proceedings of the 12th international conference on Machine learning*, 1995. Lake Tahoe, CA.

[6] Mikel Galar, Alberto Fernández, Edurne Barrenechea, Humberto Bustince, and Francisco Herrera. An overview of ensemble methods for binary classifiers in multi-class problems: Experimental study on one-vs-one and one-vs-all schemes. *Pattern Recognition*, 44(8):1761 – 1776, 2011.

[7] J.-H. Hong, J.-K. Min, U.-K. Cho, S.-B. Cho, and C. H. Leung. Fingerprint classification using one-vs-all support vector machines dynamically ordered with naive bayes classifiers. *Pattern Recognition*, 41:662–671, 2008.

[8] L. Hong, Y. Wan, and A. Jain. Fingerprint image enhancement: algorithm and performance evaluation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20(8):777–789, 1998.

[9] Jens Hühn and Eyke Hüllermeier. FURIA: an algorithm for unordered fuzzy rule induction. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 19(3):293–319, 2009.

[10] A. K. Jain, S. Prabhakar, and L. Hong. A multichannel approach to fingerprint classification. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(4):348–359, 1999.

[11] K. Karu and A. K. Jain. Fingerprint classification. *Pattern Recognition*, 29(3):389–404, 1996.

[12] M. Liu. Fingerprint classification based on adaboost learning from singularity features. *Pattern Recognition*, 43(3):1062–1070, 2010.

[13] D. Maltoni, D. Maio, A.K. Jain, and S. Prabhakar. *Handbook of fingerprint recognition*. Springer-Verlag New York Inc, 2009.

[14] J. R. Quinlan. *C4.5: Programs for Machine Learning*. San Mateo-California: Morgan Kaufmann Publishers, 1st edition, 1993.

[15] J. Sanz, A. Fernández, H. Bustince, and F. Herrera. A genetic tuning to improve the performance of fuzzy rule-based classification systems with interval-valued fuzzy sets: Degree of ignorance and lateral position. *International Journal of Approximate Reasoning*, 52(6):751–766, 2011.

[16] J. A. Sanz, A. Fernandez, H. Bustince, and F. Herrera. IVTURS: A linguistic fuzzy rule-based classification system based on a new interval-valued fuzzy reasoning method with tuning and rule selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(3):399–411, 2013.

[17] V. Vapnik. *Statistical Learning Theory*. New York: Wiley, 1998.

Diseño de un Sistema de Clasificación Basado en Reglas Difusas para *one-class* mediante el aprendizaje genético de la base de datos

Pedro Villar[1], **Ana María Sánchez**[1], **Rosana Montes**[1], **Francisco Herrera**[2]

[1]*Dpto. Lenguajes y Sistemas Informáticos. Universidad de Granada*, {pvillarc,amlopez,rosana}@ugr.es
[2]*Dpto. Ciencias de la Comptuación e Inteligencia Artificial. Universidad de Granada*, herrera@decsai.ugr.es

Resumen

En este trabajo se propone un Algoritmo Genético para aprender un Sistema de Clasificación Basado en Reglas Difusas para clasificación con una única clase o *one-class classification*, una situación que está presente en numerosos problemas reales en la que los ejemplos disponibles para el aprendizaje son todos de una misma clase (clase objetivo). El Algoritmo Genético aprende la granularidad y las particiones difusas utilizando una función de escala no lineal.

Palabras Clave: *One-Class Classification*, Sistemas de Clasificación Basados en Reglas Difusas, Algoritmos Genéticos.

1 Introducción

Dentro del aprendizaje automático, los métodos tradicionales de clasificación intentan clasificar un objeto desconocido dentro de un conjunto finito y discreto de categorías (o clases). En el paradigma de *one-class classification* [11], una de las clases está suficientemente caracterizada en los ejemplos del conjunto de entrenamiento y se suele denominar clase positiva o clase objetivo (*target*). Para el resto de clases, que caracterizan el concepto negativo (o simplemente la no pertenencia a la clase objetivo) o no hay ejemplos disponibles, o hay tan pocos ejemplos que no son representativos de ese concepto negativo.

Un Sistema de Clasificación Basado en Reglas Difusas (SCBRD) tiene dos componentes principales: un Sistema de Inferencia y una Base de Conocimiento (BC). En un SCBRD lingüístico, la BC está compuesta de la Base de Reglas (BR), constituida por el conjunto de reglas difusas y la Base de Datos (BD), que contiene las funciones de pertenencia de las particiones difusas asociadas a las variables de entrada.

Dentro de la literatura especializada, hay numerosos métodos para el aprendizaje automático de la BC de un SCBRD, tanto para el aprendizaje completo de la BC como para el aprendizaje o ajuste de alguna de sus partes, pero la mayoría están diseñados para problemas multi-clase, especialmente en el caso del aprendizaje de la BR. Por eso, dentro de nuestro método de aprendizaje de la BC proponemos un nuevo método de aprendizaje de reglas difusas específico para *one-class*, que intenta obtener un conjunto reducido de reglas que caractericen bien a la clase objetivo y utilizaremos un sistema de razonamiento difuso diseñado para *one-class*, que nos permite determinar si un nuevo ejemplo desconocido pertenece o no a la clase objetivo.

En un trabajo previo [14], se proponía un método de clasificación para *one-class* utilizando los SCBRDs, donde un Algoritmo Genético (AG) se utilizaba para el aprendizaje del número de etiquetas difusas (granularidad) de cada variable, manteniendo particiones difusas uniformes. En el método presentado en esta trabajo, el AG incluye también la posibilidad de ajustar el domino de las variables y un mecanismo de aprendizaje de las funciones de pertenencia donde las particiones difusas utilizan una función de escala no lineal que permite definir áreas con mayor "sensibilidad" dentro del dominio. El hecho de añadir el aprendizaje de las particiones difusas permite obtener SBRDCs más compactos (con menos reglas) por lo que resultan mucho más interpretables. El método aprende la BC al completo (BD y BR), usando el AG para el aprendizaje de la BD, mientras que para la generación de la BR se utiliza el algoritmo de aprendizaje de reglas específico para *one-class* mencionado anteriormente.

Para el estudio experimental nos hemos basado en trabajos del paradigma *one-class* [4, 13], que utilizan conjuntos de datos del repositorio UCI [2], que se convierten en problemas de *one-class* al considerar todos los ejemplos de una clase como ejemplos de la clase anómala (*outlier*), eliminándolos del conjunto de entrenamiento y pasándolos al conjunto de datos de test.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. Prime-

ro, en la Sección 2 se realiza una breve introducción al paradigma de *one-class classification*, resaltando sus diferencias frente a la clasificación multi-clase convencional. A continuación, en la Sección 3 se detalla el algoritmo de generación de reglas difusas junto con el método usado para clasificar los ejemplos y en la Sección 4 presentamos los aspectos fundamentales del AG que se propone. La Sección 5 muestra el estudio experimental realizado. Finalmente, las conclusiones de este trabajo se exponen en la Sección 6.

2 Clasificación con una única clase

El término *one-class classification* fue propuesto por primera vez en [9], aunque varios autores han utilizado otros términos para designar paradigmas similares, como son detección de anomalías (*outlayer detection* o *anomaly detection*), detección de novedades (*novelty detection*) o aprendizaje de conceptos (*concept learning*). Esa variación de términos tiene que ver más con las aplicaciones en las que se ha utilizado el paradigma *one-class* que con diferencias en los modelos utilizados o en la forma de diseñarlos.

Dentro de la tradicional clasificación multi-clase, los métodos de aprendizaje automático se encuentran con una serie de problemas como la reducción de la tasa de error de clasificación, la capacidad de generalización del modelo, la complejidad del mismo o el tratamiento de la dimensionalidad. Dentro del paradigma *one-class* esos problemas siguen apareciendo y, en algunos casos, son más difíciles de abordar. Por ejemplo, determinar una frontera entre los datos que nos permita separar las clases es más difícil cuando sólo se disponen ejemplos de una clase, ya que no tenemos información sobre la "distancia" a la que se encuentran los ejemplos anómalos en cada dirección y es difícil decidir cómo de ajustada a los ejemplos positivos debe estar esa frontera. Por tanto, es de esperar que se requieran más ejemplos para el aprendizaje que en una clasificación convencional. Una revisión de trabajos de *one-class* se puede encontrar en [7], junto con una taxonomía que distingue tres categorías para agrupar los trabajos publicados:

- Disponibilidad de ejemplos para el conjunto de entrenamiento: se distinguen dos posibilidades, que sólo se disponga de ejemplos de la clase positiva (incluyendo o no muy pocos ejemplos de la clase anómala) o que también se disponga de ejemplos sin clasificar.
- Metodología/algoritmos: en este caso se distinguen los algoritmos basados en máquinas vectores de soporte para *one-class* (*One-Class Support Vector Machines*, OCSVM), paradigma seguido por muchas propuestas en la literatura especializada, y el resto de algoritmos (no basados en OCSVM).
- Dominio de aplicación: donde se distingue el campo de clasificación de textos/documentos (ámbito muy representado dentro de los trabajos de *one-class*) y otros ámbitos de aplicación.

Debido a la gran cantidad de propuestas basadas en máquinas vectores de soporte, hemos seleccionado una implementación clásica de OCSVM [10] como algoritmo para comparar el rendimiento de nuestra propuesta.

Algunas propuestas de *one-class* presentes en la literatura especializada [4, 13] utilizan conjuntos de datos multi-clase como *benchmarks* para validar los resultados de sus propuestas. La forma usual de actuar supone convertir a dichos conjuntos de datos en problemas binarios (con dos clases), agrupando todas los ejemplos de todas las categorías excepto una dentro de una clase y los ejemplos de la categoría restante en la otra clase. A continuación, se divide el conjunto de datos total en un conjunto de datos de entrenamiento y otro de test, de forma que el conjunto de datos de entrenamiento sólo dispone de un porcentaje de ejemplos representativos de una de las dos nuevas clases (clase objetivo) y el conjunto de datos de test lo constituye el resto de ejemplos de la clase objetivo y todos los ejemplos representativos de la otra clase (clase anómala). Dentro de este esquema se distinguen dos posibilidades:

- Los ejemplos de la categoría que contiene una única clase del conjunto original constituyen el conjunto de datos de la clase positiva mientras que los ejemplos del resto de categorías caracterizarían a la clase anómala, lo que se corresponde con el paradigma de aprendizaje de conceptos.
- Los ejemplos de la categoría que contiene una única clase del conjunto original constituyen la clase anómala mientras que los ejemplos del resto de categorías serían los representantes de la clase objetivo, que se correspondería con el paradigma de detección de anomalías. Esta opción es la que hemos seguido en nuestro trabajo utilizando tres conjuntos de datos del repositorio UCI, usados en algunos de los trabajos que siguen este procedimiento [4, 13].

Obviamente, para el caso de conjunto de datos binarios (dos clases), ambos enfoques son el mismo y sólo cabría hacer consideraciones sobre la diferencia entre escoger una clase u otra como clase positiva en el caso de que el conjunto de datos fuese no balanceado.

La mayoría de propuestas para aprendizaje automático de clasificadores multi-clase utilizan alguna medida de precisión del modelo como el porcentaje de ejemplos bien clasificados. Sin embargo, cuando no se dispone de ejemplos de una clase para entrenar el modelo, ese tipo de medidas pueden llevar a conclusiones erróneas cuando se trabaja con el conjunto de datos de test, ya que es necesario encontrar un equilibrio entre el porcentaje de acierto en la clasificación de ejemplos de la clase positiva (único valor de este tipo

que se podría aplicar dentro del proceso de aprendizaje) y el porcentaje de acierto sobre ejemplos de clase anómala (que sí estan disponibles en el conjunto de datos de test). En varios trabajos que siguen el mismo esquema de esta propuesta [4, 13] se utiliza para el conjunto de datos de test la medida denominada área bajo la curva o *Area Under the Curve* (AUC). En este trabajo utilizaremos, aparte del AUC, los porcentajes de clasificación correcta para el análisis de los resultados experimentales.

3 Generación de la BR y clasificación de nuevos ejemplos

En esta sección describiremos el algoritmo que se ha usado para generar la BR, propuesto en [14], que está diseñado específicamente para el paradigma *one-class*, además de detallar el método de razonamiento difuso que, una vez determinada la BR, decide si un nuevo ejemplo pertenece a la clase positiva.

3.1 Algoritmo de generación de las reglas difusas

La BR está compuesta por un conjunto de reglas difusas que, en este trabajo, tienen la siguiente estructura para un problema con N variables:

$$R_k: \text{ If } X_1 \text{ is } A_1^k \text{ and } \ldots \text{ and } X_N \text{ is } A_N^k \quad \text{then } Y \text{ is } C$$

donde $X_1, \ldots, X_N$ son las variables consideradas en el problema y $A_1^k, \ldots, A_N^k$ son las etiquetas lingüísticas que representan los valores que toma cada variable. En este tipo de reglas, el antecedente representa un subespacio del espacio completo de búsqueda y el consecuente es la etiqueta de la clase positiva del problema (C).

El método de generación de reglas intenta generar un conjunto de reglas compacto, que caracterice de forma ajustada a los ejemplos de la clase positiva del conjunto de entrenamiento mediante la selección de reglas que agrupen a muchos ejemplos. El algoritmo de generación del conjunto de reglas difusas que constituyen la BR sólo decide cuáles son los antecedentes de las reglas (ya que el consecuente sería el mismo para todos, la clase positiva) y su funcionamiento se describe a continuación:

Para cada uno de los ejemplos del conjunto de entrenamiento (todos representativos de la clase positiva) se realizan las acciones siguientes:

- Seleccionar el mejor antecedente posible para ese ejemplo, buscando la etiqueta de cada variable con máximo grado de pertenencia difuso para la componente de dicha variable en el ejemplo.
- Comprobar si esa combinación de antecedentes se ha explorado anteriormente con otro ejemplo. Si no ha sido así, se decide si se acepta o no la regla correspondiente en base al valor de dos medidas calculadas sobre dicha regla:
  - **Media_cubrimiento**, que es la media de los grados de emparejamiento de todos los ejemplos del conjunto de entrenamiento cuyo grado de emparejamiento con dicha regla sea mayor que cero. Para calcular el grado de emparejamiento de un ejemplo con el antecedente de la regla se utiliza la t-norma del producto.
  - **Soporte**, que es la fracción de ejemplos cubiertos por la regla (con grado de emparejamiento mayor que cero) respecto del total de ejemplos de entrenamiento.

  El propósito de utilizar estas dos medidas es generar un número compacto de reglas con elevado valor medio en el cubrimiento de los ejemplos que emparejan con ellas y que soporten a muchos ejemplos, por lo que un antecedente explorado se aceptará como regla de la BR si cumple los siguientes dos requisitos:
  - $Media_cubrimiento > umbral_cubrimiento$
  - $Soporte > umbral_soporte$

  Siendo $umbral_cubrimiento$ y $umbral_soporte$, parámetros del método con valores en el intervalo $[0,1]$.

3.2 Mecanismo de razonamiento difuso para clasificar nuevos ejemplos

Una vez determinada la BR, el mecanismo de inferencia que decide si un ejemplo nuevo se clasifica o no como perteneciente a la clase positiva consta de dos pasos:

- Se seleccionan todas las reglas con grado de emparejamiento mayor que cero para ese ejemplo (considerando la t-norma del producto) y se calcula el valor medio de dichos grados de emparejamiento.
- Si dicho valor medio es mayor o igual que el parámetro $umbral_regla$ (con valores en el intervalo $[0,1]$), el ejemplo se clasifica como perteneciente a la clase positiva. En caso contrario, se considera un ejemplo "anómalo".

4 Algoritmo Genético para aprendizaje de la granularidad de la BD

En este apartado se propone un método de aprendizaje automático de la BC de un SCBRD mediante un AG generacional que permite definir el dominio, la granularidad y la partición difusa de cada variable. El proceso de evaluación de las posibles soluciones incluye el método de generación de la BR y de razonamiento difuso explicado en la sección anterior. Notaremos nuestra propuesta como AG-Gr-P-OC

(Algoritmo Genético de aprendizaje de la Granularidad y Particiones para *One-Class*). Dicho método trata de mejorar la interpretabilidad del método presentado en [14], donde el AG únicamente aprendía la granularidad y las particiones difusas se generaban de forma uniforme.

El AG propuesto es una adaptación del método propuesto en [5] para regresión que considera funciones difusas triangulares para representar las etiquetas. En dicho método se codifican en el cromosoma los límites del universo de discurso de las variables (que pueden ampliarse hasta un 25 %), lo que permite que las etiquetas más situadas a los extremos de la partición se puedan ajustar mejor a las características del problema. Además, en dicho método se utiliza una función de escala no lineal que permite definir áreas con mayor "sensibilidad" dentro del dominio de las variables, es decir, áreas de la partición difusa donde las etiquetas están más concentradas y permiten discriminar mejor. Como todos los componentes de la BD se van a adaptar mediante un AG, no es conveniente que el espacio de búsqueda sea muy extenso. Por tanto, se deben usar funciones de escala no lineales parametrizadas con un reducido número de parámetros. Usaremos la función propuesta en [5], que sólo tiene un parámetro a de "sensibilidad" ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$):

$$f : [-1,1] \rightarrow [-1,1] \qquad f(x) = signo(x) \cdot |x|^a$$

El resultado final es una partición en el intervalo $[-1,1]$, donde el parámetro a puede originar una partición uniforme ($a = 1$), mayor sensibilidad para los valores centrales ($a > 1$) o mayor sensibilidad para los valores extremos ($a < 1$). La función de escala no lineal sólo se aplica a los tres puntos que definen las etiquetas triangulares en una partición uniforme. La Figura 1 muestra esas opciones para una partición de nueve etiquetas.

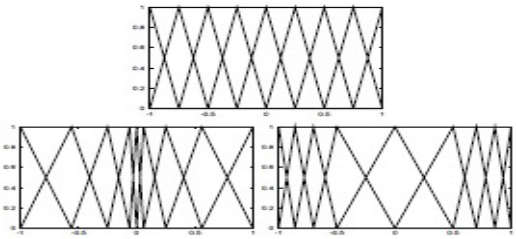


Figura 1: Particiones difusas con $a = 1$ (arriba), $a > 1$ (izquierda) y $a < 1$ (derecha)

Esta función de escala es válida para variables simétricas ya que produce los mismos efectos en la partición difusa de forma simétrica sobre el centro de dicha partición. Para permitir que el área de mayor sensibilidad de la partición se desplace sobre un único extremo de la misma, se añade un nuevo parámetro (S) como se describe también en [5]. Dicho parámetro no aumenta significativamente la complejidad del espacio de búsqueda ya que únicamente puede tomar dos valores ($\{0,1\}$), que permiten desplazar el área de mayor sensibilidad hacia un extremo u otro si $S = 1$ tal y como se puede ver en la Figura 2. Si $S = 0$ no se produce desplazamiento y las particiones quedarían como en la figura 1.

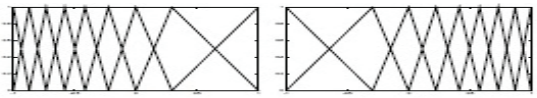


Figura 2: Particiones difusas con $S = 1$ (izquierda con $a > 1$ y derecha con $a < 1$)

Como los puntos que definen cada una de las funciones de pertenencia se calculan a partir de una partición difusa uniforme, lo único que hace falta para construir la partición de una variable es su dominio, su granularidad y los dos parámetros de "sensibilidad" (a y S). Los siguientes apartados describen los principales componentes de AG-Gr-P-OC.

4.1 Codificación de las soluciones

Cada cromosoma está compuesto de las cuatro partes necesarias para construir la partición difusa de cada variable. Para un problema de clasificación de N variables de entrada, el dominio se codifica en un vector de números reales de longitud $2N$, el número de etiquetas se codifica en un vector entero de longitud N (los posibles valores considerados son el conjunto $\{2 \ldots 7\}$), los parámetros a de cada variable se representan en un vector de números reales de longitud N y se utiliza un vector binario de longitud N para los parámetros S.

4.2 Población inicial

La población inicial está dividida en tres partes. El primer grupo tiene $5g$ individuos, siendo g el número de posibles valores para la granularidad (en nuestro caso, $g = 6$) y todos esos individuos tienen los dominios originales y el mismo número de etiquetas en todas sus variables. Para cada valor posible de granularidad se generan cinco individuos, uno con $a = 1$, dos con $a < 1$ (uno con $S = 0$ y otro con $S = 1$) y dos con $a > 1$ (uno con $S = 0$ y otro con $S = 1$). El segundo grupo tiene una estructura igual al primero excepto en los dominios, que se generan aleatoriamente dentro de los límites establecidos para ellos. El tercer grupo contiene el resto de cromosomas y su inicialización es aleatoria en todos sus componentes.

4.3 Evaluación de los cromosomas

La evaluación de un cromosoma consta de varias etapas:

1. Generar la BD utilizando la información del cromosoma. Para cada variable se construye una partición difusa de acuerdo al dominio, número de etiquetas y parámetros de "sensibilidad".

2. Generar la BR a partir de la BD mediante el proceso de generación de reglas descrito en la Sección .

3. De acuerdo al mecanismo de inferencia descrito en la sección , clasificar todos los ejemplos del conjunto de aprendizaje. El valor de la función de evaluación será el número de ejemplos del conjunto de entrenamiento correctamente clasificados. El AG evoluciona para maximizar dicho valor a lo largo de las generaciones.

4.4 Operadores genéticos

El mecanismo de selección empleado ha sido el Muestreo Universal Estocástico, propuesto por Baker en [3], incorporando una selección elitista.

El operador de cruce varía en función de la igualdad de los padres en el número de etiquetas de cada variable. Si ambos cromosomas tienen la misma granularidad, se supone que el AG ha encontrado una zona prometedora dentro del espacio de búsqueda que conviene explotar. Por eso, se aplica el cruce max-min-aritmético (MMA) [6] sobre la parte de codificación real del cromosoma, es decir, los dominios y los parámetros a manteniendo los mismos valores de granularidad en los descendientes. Se generan los cromosomas hijos de ese tipo de cruce con los dos posibles valores para el parámetro S y se seleccionan los dos mejor adaptados para sustituir a los padres. Si los padres tienen alguna diferencia en la granularidad de alguna de las variables, se escoge aleatoriamente un punto de cruce p (entre el rango de valores $\{2 \ldots N\}$) y los dos padres se cruzan sobre la variable p en cada una de las cuatro partes del cromosoma.

El operador de mutación dependerá de la parte del cromosoma en que se encuentra el gen que debe mutar. Si es un valor de granularidad, el operador es el propuesto por Thrift en [12]. En el gen al que corresponde mutar se cambia el valor de número de etiquetas que tiene por el inmediatamente superior o inferior (esta última decisión se toma aleatoriamente). En caso de que el gen a mutar fuese un parámetro S, se aplica la mutación binaria. Si el gen es de alguno de los componentes de codificación real (dominios y parámetros a), el operador de mutación utilizado es el de Michalewicz [8].

5 Estudio experimental

Vamos a analizar el comportamiento de AG-Gr-P-OC en tres conjuntos de datos del repositorio UCI [2]: *Pima*, *Glass* y *Wisconsin breast cancer*, utilizados en otros trabajos de *one-class* [4, 13]. Para convertir esos tres problemas en problemas del paradigma *one-class*, se ha seleccionado siempre la clase menos representada dentro del conjunto de datos como clase anómala y el resto de clases se han unido en una única característica que es la clase objetivo. Se ha realizado una validación cruzada con 5 particiones distintas, y se han utilizado las particiones disponibles dentro del repositorio KEEL [1], que están disponibles en la página web del proyecto KEEL (http://www.keel.es/dataset.php). Como dichas particiones estaban preparadas para clasificación multi-clase, el procentaje de ejemplos en cada conjunto de entrenamiento no es exacatamente del 80 % ya que se han eliminado todos los ejemplos de la clase anómala y se han pasado a los respectivos conjuntos de test, que contienen más del 20 % de ejemplos. La Tabla 1 tiene la información básica sobre los conjuntos de datos.

Tabla 1: Descripción resumida de los conjuntos de datos

Conj. de datos	#Ej.	#Var.	#Clases	Clase anómala
Glass1	214	9	7	6
Wisconsin	683	9	2	malignant
Pima	768	8	2	tested-positive

Con objeto de analizar el comportamiento de nuestra propuesta, comparamos los resultados obtenidos por AG-Gr-P-OC con los obtenidos por un método clásico del paradigma *one-class*, como son las máquinas vectores de soporte para *one-class* (OCSVM) [10] y con la versión previa del método propuesto aquí [14], que denominamos AG-Gr-OC. Los parámetros específicos del AG del método AG-Gr-P-OC se muestran a continuación, siendo N el número de variables del problema: Número de evaluaciones: $500 \cdot N$, Tamaño de población: 100, Probabilidad de cruce: 0.6, Probabilidad de mutación: 0.2, Parámetro *umbral_cubrimiento*: 0.07, Parámetro *umbral_soporte*: 0.07, Parámetro *umbral_regla*: 0.25.

La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos por los dos métodos (media de las cinco particiones que componen la validación cruzada). Para el caso del conjunto de entrenamiento se muestra solamente la tasa de acierto en clasificar la clase positiva mientras que para el conjunto de test se muestra la tasa de clasificación correcta total, las tasas para cada una de las dos clases (siendo *CP* la clase positiva y *CA* la clase anómala) y el AUC. Para el caso de los métodos que generan SBRDC se muestra también la media del número de reglas de los modelos obtenidos.

Como puede observarse, los dos métodos de generación de SBRDC obtienen mejores resultados que OCSVM en AUC sobre el conjunto de test, que es la medida más adecuada en este entorno ya que la detección correcta de la mayoría de las anomalías no debe derivar en bajos porcentajes de clasificación de ejemplos de la clase objetivo. Por otro lado, AG-Gr-P-OC obtiene unos resultados muy similares en AUC frente a AG-Gr-OC aunque reduce bastante el número de reglas, mejorando notablemente la interpretabilidad de los modelos obtenidos. Además, AG-Gr-P-OC obtiene mejor porcentaje de acierto que AG-Gr-OC sobre el total del conjunto de test, siendo algo peor el porcentaje de acierto sobre la clase positiva pero algo mejor el porcentaje de acierto sobre la clase anómala, por lo que funciona mejor como mecanismo de detección de anomalías, que es el en-

Tabla 2: Resultados detallados para los métodos analizados

Método	Conjunto de datos	Entrenamiento	Test				Número de reglas
		$Acierto_{CP}$	$Acierto_{CP}$	$Acierto_{CA}$	$Acierto_{Total}$	AUC	
OCSVM	Glass	0.0	0.0	1.0	0.171	0.5	–
	Wisconsin	0.583	0.598	1.0	0.891	0.799	–
	Pima	0.489	0.046	0.983	0.728	0.514	–
	Media	0.357	0.215	0.994	0.596	0.604	–
AG-Gr-OC	Glass	0.771	0.585	1.0	0.659	0.792	29.4
	Wisconsin	0.967	0.969	0.943	0.950	0.956	10.0
	Pima	0.718	0.696	0.625	0.645	0.661	31.4
	Media	0.818	0.750	0.856	0.751	0.803	23.6
AG-Gr-P-OC	Glass	0.667	0.619	0.911	0.672	0.765	7.2
	Wisconsin	0.954	0.941	0.994	0.979	0.968	7.0
	Pima	0.619	0.723	0.694	0.614	0.669	6.0
	Media	0.747	0.725	0.876	0.782	0.801	6.73

foque considerado para la distribución de la clase positiva y la clase anómala en los conjuntos de datos, tal y como se comentó en la sección 2.

6 Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un sistema de Clasificación Basado en Reglas Difusas dentro del paradigma *one-class* utilizando un Algoritmo Genético para aprender una partición difusa adecuada para cada variable y un método específico para la generación de las reglas difusas que permite obtener modelos con buena precisión y muy interpretables. Como trabajo futuro, esperamos mejorar los resultados al ampliar el estudio a más conjuntos de datos.

Agradecimientos

Este trabajo está soportado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en el marco del proyecto TIN2011-28488 y por la Junta de Andalucía en el marco del proyecto P10-TIC-06858.

Referencias

[1] J. Alcalá-Fdez, A. Fernández, J. Luengo, J. Derrac, S. García, L. Sánchez, F. Herrera. KEEL Data-Mining Software Tool: Data Set Repository, Integration of Algorithms and Experimental Analysis Framework. *Journal of Multi-Valued Logic and Soft Computing* 17(2-3):255–287, 2011.

[2] A. Asuncion, D.J. Newman. UCI machine learning repository, 2007. University of California, Irvine, School of Information and Computer Sciences. http://www.ics.uci.edu/ mlearn/MLRepository.html

[3] J. E. Baker. Reducing bias and inefficiency in the selection algorithms. En: *Proc. of the Second International Conference on Genetic Algorithms (ICGA'87)*, pages 14–21, Hillsdale, 1987.

[4] G. Cabral, A. Oliveira, C. Cahú. Combining nearest neighbor data description and structural risk minimization for one-class classification. *Neural Computation & Applications*, 18:175–183, 2009.

[5] O. Cordón, F. Herrera, L. Magdalena, P. Villar. A genetic learning process for the scaling factors, granularity and contexts of the fuzzy rule-based system data base. *Information Sciences*, 136(1-4):85–107, 2001.

[6] F. Herrera, M. Lozano, J. Verdegay. Fuzzy connectives based crossover operators to model genetic algorihtms population diversity. *Fuzzy Sets and Systems*, 92(1):21–30, 1997.

[7] S. Khan, M. Madden A Survey of Recent Trends in One Class Classification. En: *Lecture notes in Artificial Intelligence*, 6206:188–197, 2010.

[8] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Program*. Springer-Verlag, 1996.

[9] M. Moya, M. Koch, L. Hostetler. One-class classifier networks for target recognition applications. En: *Proc. of World Congress on Neural Networks*, pages 797–801, 1993.

[10] B. Schölkopf, J. Platt, J. Shawe-Taylor, A. Smola, R. Williamson. A Survey of Recent Trends in One Class Classification. En: *Neural Computation*, 13:1443-1471, 2001.

[11] D. Tax, R. Duin. Uniform object generation for optimizing one-class classifiers. *Journal of Machine Learning Research* 2:155–173, 2001.

[12] P. Thrift. Fuzzy logic synthesis with genetic algorithms. En: *Proc. Fourth International Conference on Genetic Algorithms (ICGA'91)*, 509–513, 1991.

[13] J. Tian, H. Gu, C. Gao, J. lian. Local density one-class support vector machines for anomaly detection. *Nonlinear Dynamics*, 64:127–139, 2011.

[14] P. Villar, A. M. Sánchez, R. Montes, F. Herrera Un Algoritmo Genético para aprendizaje de Sistemas de Clasificación Basados en Reglas Difusas dentro del paradigma *one-class*. *Actas CAEPIA'13*:1105-1114, 2013.

Minería de Datos y Gestión Energética: tendencias actuales

Miguel Molina-Solana, **María Ros**, **María José Martín-Bautista**, **Amparo Vila**

Dept. Ciencias la Computación e IA, Universidad de Granada, {miguelmolina,marosiz,mbautis,vila}@ugr.es

Resumen

Este trabajo revisa algunos de los desarrollos llevados a cabo hasta la fecha en cuanto a la aplicación de técnicas de Minería de Datos en el contexto de la gestión energética. Asimismo, discute las perspectivas y retos que el campo tiene por delante con la irrupción del *Big Data*.

Palabras Clave: Data Mining, Big Data, Energy.

1 Introducción

El empleo de técnicas de Minería de Datos en el campo de la gestión energética pretende, mediante el análisis de grandes cantidades de datos recogidos en procesos de monitorización, descubrir información relevante sobre el funcionamiento de los edificios, los equipamientos instalados y los hábitos de los usuarios.

En esta área, la Minería de Datos ha sido tradicionalmente utilizada para el apoyo y mejora de tres aspectos fundamentales:

- Análisis del estado y fallos del equipamiento y las redes de distribución
- Predicción de la demanda energética
- Análisis económico y comercial del consumo eléctrico de los usuarios

El presente trabajo revisa diversas contribuciones llevadas a cabo en estas tres direcciones, y presenta las perspectivas futuras del campo dentro del Big Data, la evolución de la Minería de Datos en contextos de ingentes cantidades de datos heterogéneos.

2 Análisis del funcionamiento y estado de las infraestructuras. Herramientas de soporte

En los últimos años, la consideración de aspectos relacionados con la eficiencia energética y el desarrollo sostenible, no ha sido únicamente debida a las nuevas normativas, sino que es una clara prioridad para diseñadores y propietarios de edificios, ya sean éstos de nueva construcción o reformados.

En este contexto, se hace preciso estudiar exhaustivamente la relación entre las energías demandadas y realmente consumidas y los diferentes componentes de los edificios, como por ejemplo, paredes, ventanas, puertas y techos, iluminación, calefacción, ventilación y aire acondicionado (HVAC). Con el objetivo de ayudar en la decisión a los diseñadores de los edificios, la Minería de Datos se ha convertido en una herramienta de gran potencia para la extracción de patrones y correlaciones entre dichos elementos. Algunos ejemplos de este tipo de aplicaciones podrían ser [1, 11, 16, 17].

Ahmed et al., en su trabajo [1] y anteriores, investigan metodologías para mejorar la escalabilidad y aplicabilidad de la luz solar en interiores. Mediante la observación de las correlaciones existentes entre las características de los edificios y las condiciones ambientales exteriores, persiguen la construcción de modelos más fiables que incluyan dicha información. Concretamente, proponen el uso de modelos de clasificación para estimar diferentes indicadores del funcionamiento de los edificios, como por ejemplo, el confort o el uso de determinadas habitaciones. Los resultados de su estudio muestran que el uso de técnicas de minería de datos proporciona mejores resultados que las herramientas analíticas tradicionales.

Por otra parte, Kim et al. [11] proponen la utilización de herramientas de Minería de Datos para extraer interrelaciones y patrones de interés que ayuden en el diseño de edificios de bajo consumo. Según los autores, un patrón es considerado *útil* cuando los expertos pueden reducir el consumo

energético de los edificios a partir de la información proporcionada por dichos patrones. Estos se extraen mediante una selección de características basada en la construcción de árboles de decisión usando el algoritmo C4.5, y tratan de determinar qué elementos básicos de los edificios (ventanas, paredes, suelos, etc.) podrían mejorar su eficiencia energética significativamente.

Morbitzer et al. [16] fueron de los pioneros en utilizar la Minería de Datos para descubrir patrones relevantes que no resultan obvios de encontrar en los datos de monitorización de los edificios. Así, haciendo uso de herramientas y algoritmos ya probados y validados en otros campos, como las finanzas o el marketing, pretendían obtener información relevante y presentarla de manera legible a los usuarios finales y a los encargados de mantenimiento.

Patnaik et al. [17] utilizaron las herramientas de data mining para optimizar el rendimiento de las enfriadoras en grandes centros de datos. Su propuesta permite encontrar patrones de funcionamiento dentro de los grandes flujos de información de monitorización y mostrarlos de forma cualitativa y cuantitativa a los responsables. En el momento de publicación del trabajo, el sistema estaba siendo probado en un centro de datos de HP.

3 Predicción de la demanda energética de edificios. Factores influyentes

Como ya hemos indicado, uno de los métodos más extendidos para el control del consumo energético consiste en la predicción de la demanda energética a corto o largo plazo. El objetivo de estos modelos es conseguir una aproximación fiable de la energía que se necesitará a lo largo de un periodo de tiempo dado, y así, poder anticiparse a posibles problemas en la generación o el suministro, y optimizar ambos aspectos.

Tradicionalmente, los métodos analíticos clásicos como la regresión múltiple han sido los más utilizados, aunque en los últimos años, los modelos basados en históricos (capaces de aprender las tendencias temporales y extrapolarlas a otras situaciones) han ganado protagonismo. En este sentido, los algoritmos de Minería de datos se presentan como una poderosa herramienta para procesar grandes volúmenes de datos [12].

Precisamente, en [12] los autores presentan un modelo basado en Minería de Datos y una Red Neuronal Multicapa para la predicción de la demanda calorífica y de frío necesaria para un edificio. Los algoritmos de Minería de datos son utilizados para seleccionar los parámetros que permitan desarrollar un mapeo no lineal entre las cargas internas y las condiciones climáticas exteriores.

Entre los diversos factores que se han descubierto que influyen se encuentran: la temperatura del aire, la capacidad para anticiparse a la lluvia o las nevadas, los niveles de exposición a la luz solar, la velocidad del viento o la humedad relativa de los edificios del sistema de control.

En [14], la influencia de los factores externos en los picos de energía es tratada mediante el desarrollo de un árbol de decisión para aprender diferentes índices de los climas donde se encuentran los edificios. Conjuntamente, los autores proponen dos algoritmos de regresión que utilizan la información del árbol de decisión para predecir la carga máxima esperada en cada momento del día siguiente.

3.1 Comportamiento energético de los usuarios

Además de las condiciones climáticas exteriores, entre los parámetros más influyentes en la predicción de la demanda energética, se encuentran los propios usuarios de los edificios. El uso que un edificio tenga por parte del usuario marcará las necesidades energéticas del mismo. Varios estudios [9] confirman este papel crucial que los usuarios tienen en el consumo energético, en ocasiones mayor que el del propio equipamiento.

Por ejemplo, conocer el número de personas que se acudirán al edificio o el horario de funcionamiento de las distintas salas facilita el desarrollo de modelos capaces de predecir la energía requerida. Así, es posible crear *perfiles energéticos* del consumo energético para los distintos usuarios de los diferentes edificios.

Hawarah et al. [7] proponen un modelo estadístico para la predicción de la demanda energética de un hogar con una anticipación de 24 horas. Para tal fin, los autores usan una Red Bayesiana para aprender y predecir el consumo energético de los usuarios.

Por otro lado, en [19] se presenta un método basado en el descubrimiento de reglas de asociación con el objetivo de identificar el comportamiento energético de los usuarios de un edificio y de proponer actuaciones conducentes a modificar hábitos perjudiciales o poco eficientes.

4 Análisis económico del consumo eléctrico

Finalmente, otro de los usos más extendidos de la Minería de Datos en el campo de la gestión energética consiste en el estudio de históricos temporales y la extracción de patrones con el objetivo de conocer correlaciones o evoluciones temporales que sean útiles para el control del consumo energético en diferentes campos. Esta vía ha sido explotada (y está siendolo mucho más en la actualidad) por numerosas compañías energéticas que han encontrado en la Minería de Datos una herramienta para conocer cómo y cuándo sus clientes consumen la energía que ellos les proporcionan. El desarrollo de herramientas para extraer este tipo de conocimiento se convierte así en ventajas competitivas entre diferentes compañías.

Uno de los primeros trabajos en este ámbito fue el de Figueiredo et al. [6], que proponía un framework donde desarrollar y explotar los históricos compuesto por dos módulos: un módulo de perfiles de carga, encargado de crear un conjunto de clases para la clasificación de los consumidores mediante clustering supervisado y no supervisado; y un módulo de clasificación, que utiliza el conocimiento proporcionado por el módulo anterior para construir un modelo de clasificación para etiquetar a los diferentes tipos de consumidores.

Debido a que los todos los frameworks en este contexto deben ser capaces de analizar de forma eficiente el constante flujo de información que se recibe, Silva et al. [3] proponen un algoritmo *Incremental Summarization and Pattern Characterization (ISPC)* capaz de estructurar el flujo continuo de información, conocido como *Stream data*, en Data Warehouse basado en dimensiones claves permitiendo resúmenes constantes. Estos resúmenes se usan cada cierto tiempo para consolidar los patrones extraídos facilitando el análisis de los datos y la predicción de las tendencias en el consumo eléctrico.

Conjuntamente con la predicción de la demanda, los perfiles energéticos de los edificios también pueden ayudar en la detección de fraudes y pérdidas en el suministro eléctrico. Por ejemplo, [15] presenta diversos métodos y herramientas que están siendo probadas sobre bases de datos reales de clientes de la empresa Endesa.

5 El futuro: Big data

Big Data, tan de moda en los últimos tiempos, encuentra su definición en tres términos: volumen, variedad y velocidad. El volumen se refiere a la ingente cantidad de datos que circulan en la actualidad en las organizaciones; la variedad a su carácter diverso al provenir de varias fuentes: estructurado o no, multimedia, textual...; y la velocidad está relacionada con la rapidez con la que se accede a estos datos.

En torno a este concepto giran múltiples tecnologías que contribuyen a organizar, almacenar y, sobre todo, analizar en profundidad los datos, convirtiéndolos en información de valor para la empresa. Unas tecnologías en las que, según los últimos datos de Gartner [10], el 64 % de las organizaciones a escala mundial ya está invirtiendo o esperaba hacerlo en 2013.

El valor de esta nueva tendencia tecnológica reside en su capacidad como herramienta de apoyo a la toma de decisiones a partir del análisis de los grandes volúmenes de datos estructurados y no estructurados que entran, salen y giran alrededor de las organizaciones; es decir, en su potencial para convertir los datos en valor de negocio.

Las promesas de Big data alcanzan a prácticamente todos los sectores de actividad, como demuestran las primeras experiencias de éxito emprendidas por organizaciones de finanzas, sanidad, turismo, banca o telecomunicaciones. En el campo de la gestión energética también existe movimiento, resumiendo el trabajo de IBM [8] los retos y oportunidades que el Big Data supone para la gestión energética y para los actores involucrados.

En particular, las compañías energéticas están cada vez más interesadas en soluciones para el análisis de datos, toda vez que sus redes de distribución se están volviendo inteligentes con la inclusión de sensores que continuamente monitorizan el estado. Este inmenso flujo de información necesita de unos procesos de resumen y análisis donde las herramientas propias del Data Mining tienen mucho que decir.

Eso sí, con unas cantidades tan ingentes de datos, se presentan nuevos retos a las herramientas tradicionales, siendo el *Big Data* la evolución natural de dichas tecnologías. No en vano, según algunos analistas [13] cuando los contadores inteligente estén completamente desplegados, podrían llegar a generar hasta 1000 petabytes de datos anualmente.

Esta tendencia tiene incluso implicaciones en otras áreas, ya que la red eléctrica puede llegar a convertirse en una de los mayores ejemplos del potencial del "Internet de las Cosas".

Entre los movimientos que se están produciendo en este sector, E.ON y Ericsson han llegado recientemente a un acuerdo para la instalación de una red de contadores inteligentes en más de 600,000 hogares suecos [5].

Siemens y Teradata también han llegado a un acuerdo para trabajar conjuntamente en soluciones de data mining aplicadas a control y monitorización de la infraestructura energética [18].

El interés por este campo ha dado lugar también a la creación de varias startups que, de una manera u otra, aplican técnicas de Big Data a la eficiencia energética. Entre las más relevantes podemos citar *Wegowise* (https://www.wegowise.com/), *Autogrid* (http://www.autogrid.com/), *Retroficiency* (http://www.retroficiency.com/), *5Twenty* (http://www.5twenty.com/), *Opower* (http://opower.com/), *Bidgely* (http://bidgely.com/), *Stem* (http://www.stem.com/) o *Cloogy* (http://www.cloogy.com/).

6 Otros retos: Incertidumbre e imprecisión

Como hemos indicado, una de las características de los datos dentro del contexto de Big Data es su heterogeneidad y en muchos casos, su falta de estructura. Esta falta de precisión hace necesario el empleo de técnicas como la lógica difusa, capaces de modelar la información subyacente de una manera apropiada, ya que la mayoría de las técnicas clasicas trabajan sobre datos estructurados y precisos.

Por otro lado, es necesario tener en consideración que, den-

tro del Big Data los datos no son relevantes de forma aislada, sino que lo importante es la textura general: la tendencia. Modelar de forma apropiada dichos flujos de información imprecisa e incierta es el objetivo de trabajos como el de Delgado et al. [4].

Finalmente, existe otro aspecto en el que la lógica difusa puede aportar al Big Data: la representación de las conclusiones y su interpretabilidad. Mediante técnicas de resumen lingüístico es posible incrementar la legibilidad los resultados que las herramientas de minería de datos ofrecen, de cara a presentarlas a usuarios humanos. En esta línea existen ya trabajos como el de Chen [2], que ya en 2006 revisó diferentes técnicas de minería de datos en las cuales la introducción de mecanismos de lógica difusa proporcionaba resultados más entendibles y aplicables.

7 Conclusiones

El descubrimiento y aprovechamiento de la información que se encuentra oculta en los datos recopilados en numerosas áreas es de gran utilidad en todos los campos y, en particular, en el del suministro energético. En él, encontrar patrones de consumo de equipamiento y usuarios puede permitir el ahorro de dinero, la mejora del confort y la reducción de emisiones contaminantes.

Aunque el uso de técnicas de Minería de Datos en problemas relacionados con la gestión energética no es nueva, la aparición de nuevos sensores y la incorporación de dispositivos inteligentes en la redes de distribución han hecho que se produzca una explosión en la cantidad de información disponible, dando lugar a un resurgido interés por la Minería de Datos en este contexto. Ahora bien, debido a la gran heterogeneidad de la información y la diversidad de fuentes, las técnicas tradicionales han debido ser adaptadas y escaladas, dando lugar al concepto de Big Data.

Este nuevo contexto plantea retos para la investigación relacionada, incluyendo la gestión y tratamiento de ingentes cantidades de datos heterogéneos en tiempo real, así como el tratamiento de la incertidumbre asociada a estos.

No obstante, el interés económico en este sector es inmenso, y prueba de ello es la multitud de nuevas empresas creadas que aplican técnicas de Minería de datos sobre información de consumo energético, así como los acuerdos entre grandes compañías energéticas y empresas de gestión de la información.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto nacional de investigación TIN2012-30939, al que los autores pertenecen.

Referencias

[1] A. Ahmed, N.E. Korres, J. Ploennigs, H. Elhadi, and K. Menzel. Mining building performance data for energy-efficient operation. *Advanced Engineering Informatics*, 25(2):341–354, 2011.

[2] Hang Chen. Applications of fuzzy logic in data mining process. In Y. Bai, H. Zhuang, and D. Wang, editors, *Applications of Fuzzy Logic in Data Mining Process*, pages 249–260. 2006.

[3] D. De Silva, X. Yu, D. Alahakoon, and G. Holmes. A data mining framework for electricity consumption analysis from meter data. *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, 7(3):399–407, 2011.

[4] Miguel Delgado, Waldo Fajardo, and Miguel Molina-Solana. Correlated trends: a new representation for imperfect and large dataseries. In *LNCS, International Conference on Flexible Query Answering Systems 2013*, volume 8132, pages 305–316. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[5] Ericsson. E.ON steps up to big data metering with Ericsson. [Online; accessed: 2013-10-21] http://www.ericsson.com/news/1693659.

[6] V. Figueiredo, F. Rodrigues, Z. Vale, and J.B. Gouveia. An electric energy consumer characterization framework based on data mining techniques. *IEEE Trans. on Power Systems*, 20(2):596–602, 2005.

[7] L. Hawarah, S. Ploix, and M. Jacomino. User behavior prediction in energy consumption in housing using bayesian networks. In L. Rutkowski, R. Scherer, R. Tadeusiewicz, L. Zadeh, and J.M. Zurada, editors, *Artificial Intelligence and Soft Computing*, volume 6113 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 372–379. 2010.

[8] IBM. Managing big data for smart grids and smart meters. White paper, IBM Software, 2012.

[9] K. Jessoe and D. Rapson. Knowledge is (less) power: Experimental evidence from residential energy use. Working Paper 18344, National Bureau of Economic Research, August 2012.

[10] L. Kart, N. Heudecker, and F. Buytendijk. Survey Analysis: Big Data adoption in 2013 shows substance behind the hype. Technical report, Gartner, 2013.

[11] H. Kim, A. Stumpf, and W. Kim. Analysis of an energy efficient building design through data mining approach. *Automation in Construction*, 20(1):37–43, 2011.

[12] A. Kusiak, M. Li, and Z. Zhang. A data-driven approach for steam load prediction in buildings. *Applied Energy*, 87(3):925–933, 2010.

[13] Adam Lesser. How energy data will impact the smart grid, 2013. [Online; accessed: 2013-10-20] http://research.gigaom.com/report/how-energy-data-will-impact-the-smart-grid/.

[14] Zhi Yong Li. An empirical study of knowledge discovery on daily electrical peak load using decision tree. *Advanced Materials Research*, 433-440:4898–4902, 2012.

[15] I. Monedero, F. Biscarri, C. León, J.I. Guerrero, J. Biscarri, and R. Millán. Detection of frauds and other non-technical losses in a power utility using Pearson coefficient, Bayesian networks and decision trees. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 34(1):90–98, 2012.

[16] C. Morbitzer, P. Strachan, and C. Simpson. Data mining analysis of building simulation performance data. *Building Services Engineering Research & Technology*, 25(3):253–267, 2004.

[17] D. Patnaik, M. Marwah, R. Sharma, and N. Ramakrishnan. Sustainable operation and management of data center chillers using temporal data mining. In *Proceedings of the 15th ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 1305–1314, 2009.

[18] Teradata. Siemens and Teradata form global strategic partnership for big data in the utility sector. [Online; accessed: 2013-10-21] http://www.teradata.com/News-Releases/2013/Siemens-and-Teradata-form-global-strategic-partnership-for-big-data-in-the-utility-sector/.

[19] Z. Yu, F. Haghighat, B.C.M. Fung, E. Morofsky, and H. Yoshino. A methodology for identifying and improving occupant behavior in residential buildings. *Energy*, 36(11):6596–6608, 2011.

Reglas de Asociación Difusas para la Detección de Anomalías

M. Dolores Ruiz[1], **Daniel Sánchez**[1,2], **Maria J. Martin-Bautista**[1], **M. Amparo Vila**[1], **Miguel Delgado**[1]

[1]*Dpto. Ciencias de la Computación e I.A., CITIC-UGR, Universidad de Granada*,
{mdruiz,daniel,mbautis,vila}@decsai.ugr.es, mdelgado@ugr.es
[2]*European Centre for Soft Computing, Mieres*, daniel@softcomputing.es

Resumen

Las técnicas de Minería de Datos ofrecen herramientas muy potentes para la extracción de información novedosa, no trivial, fácilmente entendible y potencialmente útil en conjuntos de datos. Recientemente se han propuesto algunos métodos para extraer nuevos tipos de información, como las reglas anómalas o anomalías. Este tipo de reglas es útil para reconocer cuál es el comportamiento normal y el anómalo considerado así con respecto al normal. Este tipo de reglas es de interés en diversos campos como en seguridad de sistemas, análisis financiero, procesos químicos y biológicos, etc.

El propósito de este trabajo es desarrollar un método para la extracción de este tipo de patrones (normal y anómalo) en datos que pueden estar afectados por algún tipo de imprecisión o incertidumbre y que obtenga conocimiento útil para el usuario. Para ello definiremos las reglas anómalas difusas. Presentaremos una propuesta para la extracción de dichas reglas y la aplicaremos en algunos ejemplos de bases de datos difusas.

Palabras Clave: Minería de Datos, reglas de asociación difusas, reglas anómalas, detección de anomalías

1 INTRODUCCIÓN

La extracción de patrones normales y anómalos es de vital importancia hoy en día en diversas áreas como seguridad, análisis de datos financieros, análisis de flujos de redes de datos, en procesos biológicos y químicos, etc. Por eso, el desarrollo de técnicas que nos permitan reconocer y clasificar este tipo de patrones es muy importante en la actualidad. Hasta ahora la mayoría de las técnicas usadas pueden englobarse en sistemas expertos [7], redes neuronales [12, 28] o técnicas de clustering [24, 6].

En particular, en el área de minería de datos, podemos destacar los trabajos dedicados a descubrir los perfiles *usuales* del comportamiento de los clientes para después buscar anomalías asociadas a estos comportamientos usando técnicas como el agrupamiento o clustering [15]. Las reglas de asociación pueden ser también muy útiles en este contexto, ya que permiten identificar nuevo conocimiento útil y comprensible para el usuario. El tipo de conocimiento que representan es la aparición conjunta de un conjunto de ítems en la mayoría de las transacciones de una base de datos. Un ejemplo de regla de asociación es "la mayoría de las transacciones que contienen hamburguesa también contienen cerveza" y se representa por "*hamburguesa* $\rightarrow$ *cerveza*". Recientemente se han extendido estas técnicas para buscar nuevos modelos que encuentren información en conjuntos de datos que no son frecuentes pero que contienen conocimiento que puede ser útil para el usuario. En particular, nos centraremos en aquellos que permiten la extracción de conocimiento inusual o anómalo [4, 9] que descubren ambos tipos de patrones: el normal (o usual) y el anómalo asociado a este último. En general, este tipo de enfoques permiten extraer reglas que son infrecuentes pero que contienen un tipo de información específica que viene representada por una regla de asociación.

Por otra parte, mucha de la información disponible es imprecisa, ambigua o incierta. En estos casos se ha comprobado que el uso de la Teoría de Subconjuntos difusos propuesta por L.A. Zadeh [25] para representar este tipo de información es una buena opción. Algunas ventajas del uso de conjuntos difusos son, por un lado, el suavizado de los bordes y, por otro lado, tener una representación formal para la mayoría del conocimiento semánticamente significante para el usuario. En particular, se ha empleado con resultados satisfactorios para la extracción de reglas difusas en diversos ámbitos [16, 10].

El objetivo de este trabajo es aplicar este tipo de reglas "infrecuentes" para detectar reglas anómalas de forma auto-

mática, así como las reglas que representan el comportamiento normal o usual. Este tipo de reglas nos ayudarán a detectar el comportamiento usual y la desviación del mismo. Para ello, nuestra propuesta es usar reglas difusas para extraer tanto las reglas frecuentes como las anómalas. Además ofreceremos los resultados obtenidos en varias bases de datos difusas.

El documento está organizado como sigue: la siguiente sección ofrece un resumen de los conceptos básicos sobre reglas de asociación crisp y difusas. En la sección 3 presentamos el concepto de regla de asociación anómala y describimos los trabajos relacionados. Seguiremos con nuestra propuesta para extraer reglas anómalas difusas en la sección 4. En la sección 5 presentaremos un método para extraer este tipo de reglas y lo aplicaremos a varias bases de datos difusas. Por último, la sección 6 contiene las conclusiones y los trabajos futuros.

2 CONCEPTOS PREVIOS

2.1 REGLAS DE ASOCIACIÓN CRISP

Dado un conjunto de ítems I y una base de datos D formada por un conjunto de transacciones, siendo cada una un subconjunto de I, una *regla de asociación* [1] es una "implicación" de la forma $A \to B$ que relaciona la presencia de los conjuntos de ítems A y B en transacciones de D, donde $A, B \subseteq I$, $A \cap B = \emptyset$ y $A, B \neq \emptyset$.

Las medidas ordinarias propuestas en [1] para validar las reglas de asociación son la *confianza* (la probabilidad condicionada $P(B|A)$) y el *soporte* (la probabilidad conjunta $P(A \cup B)$). En [5] se propuso una alternativa para medir la validez por medio de los factores de certeza propuestos por Shortliffe and Buchanan's [18], de la siguiente forma:

Definición 1. [8] Sea $\text{sop}(B)$ el soporte del conjunto de ítems B, y $\text{Conf}(A \to B)$ la confianza de la regla. El *factor de certeza* de la regla, notado por $FC(A \to B)$, se define como

$$\begin{cases} \dfrac{\text{Conf}(A \to B) - \text{sop}(B)}{1 - \text{sop}(B)} & \text{si } \text{Conf}(A \to B) > \text{sop}(B) \\ \dfrac{\text{Conf}(A \to B) - \text{sop}(B)}{\text{sop}(B)} & \text{si } \text{Conf}(A \to B) < \text{sop}(B) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El factor de certeza es un valor contenido en el intervalo [-1, 1] y mide cómo nuestra creencia de que B está en una transacción cambia cuando sabemos que A está en dicha transacción. Un valor positivo nos indica que nuestra creencia crece, uno negativo que nuestra creencia decrece y 0 que no cambia. Cuando el FC supere un umbral impuesto por el usuario, diremos que la regla es *fiable*.

El factor de certeza tiene mejores propiedades que la confianza, y ayuda a resolver algunos de sus inconvenientes (ver [5, 8] para más detalles). En particular, el FC reduce el número de reglas obtenidas ya que filtra aquellas que corresponden a dependencias negativas o independencia estadística.

2.2 REGLAS DE ASOCIACIÓN DIFUSAS

En [8], se extiende el modelo de reglas de asociación para su extracción en bases de datos difusas. La propuesta se basa en la definición de transacciones difusas como subconjuntos difusos definidos sobre el conjunto de ítems I.

Definición 2. Sea $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ un conjunto finito de ítems. Una transacción difusa es un subconjunto difuso no vacío $\tilde{\tau} \subseteq I$.

Para cada ítem $i \in I$ y cada transacción $\tilde{\tau}$, un ítem i pertenecerá a $\tilde{\tau}$ con grado[1] $\tilde{\tau}(i)$ donde $\tilde{\tau}(i)$ es un número real en el intervalo $[0, 1]$. Sea $A \subseteq I$ un conjunto de ítems. El grado de pertenencia de A a la transacción difusa $\tilde{\tau}$ se define como

$$\tilde{\tau}(A) = \min_{i \in A} \tilde{\tau}(i).$$

Observemos que una transacción crisp será un caso especial de transacción difusa donde todos los ítems tendrán grado 1 o 0 dependiendo de si están o no en la transacción respectivamente.

Definición 3. Sea I un conjunto de ítems, $\tilde{D}$ una base de datos transaccional difusa y $A, B \subset I$ dos conjuntos de ítems disjuntos, i.e. $A \cap B = \emptyset$. Una regla de asociación difusa $A \to B$ se cumplirá completamente en $\tilde{D}$ si y solo si, $\tilde{\tau}(A) \leq \tilde{\tau}(B)$ para cualquier $\tilde{\tau} \in \tilde{D}$, es decir, el grado de pertenencia de B es mayor o igual que el de A para todas las transacciones difusas $\tilde{\tau}$ de $\tilde{D}$.

Esta definición mantiene el significado original de regla de asociación crisp ya que si imponemos que se cumpla $A \subseteq \tilde{\tau}$, también se cumplirá $B \subseteq \tilde{\tau}$. En nuestro caso esto puede traducirse a que $\tilde{\tau}(A) \leq \tilde{\tau}(B)$. De esta forma, puesto que una transacción crisp es un caso especial de transacción difusa, una regla de asociación crisp será un caso especial de regla de asociación difusa.

Para medir la validez de una regla difusa emplearemos un enfoque semántico basado en la evaluación de sentencias cuantificadas usando el cuantificador difuso $Q_M(x) = x$, de la siguiente forma:

- El soporte de un conjunto de ítems X es la evaluación de la sentencia cuantificada "Q_M de los $\tilde{D}$ son $\tilde{\Gamma}_X$" donde $\tilde{\Gamma}_X$ es un conjunto difuso definido como $\tilde{\Gamma}_X(\tilde{\tau}) = \tilde{\tau}(X)$.
- El soporte de la regla difusa $A \to B$ en $\tilde{D}$, notado por $\text{FSop}(A \to B)$, es la evaluación de la sentencia cuantificada "Q_M de los $\tilde{D}$ son $(\tilde{\Gamma}_A \cap \tilde{\Gamma}_B)$".

[1] Por simplicidad, notaremos $\mu_{\tilde{\tau}}(i)$ como $\tilde{\tau}(i)$ donde $\mu_{\tilde{\tau}} : I \to [0, 1]$ es la función de pertenencia asociada al conjunto difuso $\tilde{\tau}$.

- La confianza de la regla difusa $A \to B$ en $\tilde{D}$, FConf$(A \to B)$, es la evaluación de la sentencia cuantificada "Q_M de los $\tilde{\Gamma}_A$ son $\tilde{\Gamma}_B$" .
- El factor de certeza de la regla difusa $A \to B$ en $\tilde{D}$, FFC$(A \to B)$, se obtiene del soporte y la confianza anteriores usando la definición 1.

Para evaluar la sentencia cuantificada "Q de los F son G" usaremos el método GD, definido en [11] como

$$GD_Q(G/F) = \sum_{\alpha_i \in \Lambda(G/F)} (\alpha_i - \alpha_{i+1})\, Q\left(\frac{|(G \cap F)_{\alpha_i}|}{|F_{\alpha_i}|}\right) \quad (1)$$

donde $\Lambda(G/F) = \Lambda(G \cap F) \cup \Lambda(F)$, siendo $\Lambda(F)$ el conjunto de niveles de F, y $\Lambda(G/F) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ con $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ donde $\alpha_{p+1} = 0$. El conjunto F deberá estar normalizado. Si no, F se normalizará y el mismo factor de normalización se le aplicará a $G \cap F$. Otras propiedades importantes de esta propuesta vienen dadas por las fórmulas (2) y (3).

$$\text{FConf}(A \to B) = 1 \text{ si y solo si } \tilde{\tau}(A) \leq \tilde{\tau}(B) \quad \forall \tilde{\tau} \in \tilde{D}. \quad (2)$$

$$\text{FFC}(A \to B) = 1 \text{ si y solo si FConf}(A \to B) = 1. \quad (3)$$

Ejemplo 1. Consideremos el conjunto de ítems $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ y el conjunto de transacciones difusas dado en la tabla 1.

Tabla 1: Conjunto de transacciones difusas $\tilde{D}_1$

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5
$\tilde{\tau}_1$	1	0.2	1	0.9	0.9
$\tilde{\tau}_2$	1	1	0.8	0	0
$\tilde{\tau}_3$	0.5	0.1	0.7	0.6	0
$\tilde{\tau}_4$	0.6	0	0	0.5	0.5
$\tilde{\tau}_5$	0.4	0.1	0.6	0	0
$\tilde{\tau}_6$	0	1	0	0	0

En particular, podemos observar que $\tilde{\tau}_6$ es una transacción de tipo crisp. Algunos grados de pertenencia que podemos encontrar son los siguientes: $\tilde{\tau}_1(\{i_3, i_4\}) = 0.9$, $\tilde{\tau}_1(\{i_2, i_3, i_4\}) = 0.2$ y $\tilde{\tau}_2(\{i_1, i_2\}) = 1$.

Si consideramos el conjunto de α-cortes $\Lambda = \{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2\}$, podemos ver en la tabla 2 algunas de las reglas difusas que podrían encontrarse en $\tilde{D}_1$. Observemos que para calcular FConf y FFC el conjunto difuso $\{i_4\}$ se ha normalizado y el mismo factor se ha aplicado a $\{i_4, i_5\}$.

Tabla 2: Algunas de las reglas obtenidas en $\tilde{D}_1$

Regla	FSop	FConf	FFC
$\{i_1, i_2\} \to \{i_3\}$	0.167	0.8	0.6
$\{i_4\} \to \{i_5\}$	0.2	0.767	0.68

3 REGLAS DE ASOCIACIÓN ANÓMALAS

Una regla de asociación *anómala* es una regla que se cumple cuando la regla frecuente falla. En otras palabras, la regla anómala surge cuando se elimina el efecto dominante producido por la regla frecuente [4]. La tabla 3 muestra la definición formal, donde cuanto mayor es la confianza de las reglas $X \wedge \neg Y \to A$ y $X \wedge Y \to \neg A$, más fuerte es la anomalía. En esta propuesta no se impone nada a los soportes de las reglas anómala y de referencia.

Tabla 3: Esquema para la extracción de reglas anómalas dada por Berzal et al. [4]

$X \to Y$	R. common sense	(alto *sop* y alta *conf*)
$X \wedge \neg Y \to A$	R. anómala	(alta *conf*)
$X \wedge Y \to \neg A$	R. de referencia	(alta *conf*)

Un ejemplo de regla anómala es:

"si un paciente tiene síntomas X
entonces normalmente tendrá la enfermedad Y;
si no, tendrá la enfermedad A".

Las reglas anómalas tratan de capturar la desviación de la regla common sense (i.e. la desviación del comportamiento frecuente). Con otras palabras: cuando se da X, entonces tendremos Y (usual) o A (inusual). En este caso A es el comportamiento alternativo cuando el usual o "normal" falla.

El denominador común a la hora de extraer reglas de asociación es su alto soporte. Generalmente los procesos de extracción, como por ejemplo el algoritmo Apriori [2], usan un proceso para generar candidatos que explota la propiedad de anti-monotonía del soporte que garantiza que en un conjunto formado por conjuntos de ítems frecuentes, todos sus subconjuntos son también frecuentes. El problema es que las reglas anómalas no son frecuentes, y por tanto no puede usarse dicha propiedad. Por eso utilizamos la regla de referencia, que actúa como un criterio de poda para reducir la gran cantidad de anomalías obtenidas en un proceso de extracción. A continuación, daremos un breve vistazo a otros tipos de información que pueden obtenerse usando reglas que no son frecuentes.

3.1 Trabajos relacionados

Además de las reglas anómalas, se pueden encontrar varios trabajos que usan reglas infrecuentes para capturar otro tipo de conocimiento oculto en los datos. Entre ellos podemos destacar las siguientes propuestas.

Las *reglas peculiares* se extraen mediante la búsqueda de datos relevantes entre aquellos que contienen un valor pe-

culiar [26]. Un valor peculiar será aquel que difiere del resto de los valores para el mismo atributo.

Las *reglas infrecuentes* son reglas que se obtienen sin imponer que su soporte exceda ningún tipo de umbral. Existen varias propuestas para su extracción, entre las que destacan las siguientes [19, 27, 13].

Las *reglas de excepción* fueron definidas por primera vez como reglas que contradicen la creencia usual del usuario [20]. En otras palabras, se trata de encontrar un ítem (al que se le llamará excepción de la regla) que cambie el consecuente de una regla usual (con alto soporte y confianza) [22, 17, 21]. Existen distintas técnicas para extraer reglas de excepción. En [14, 23, 9] podemos encontrar recopilados dichos métodos.

Aunque las reglas anómalas pueden resultar parecidas a las reglas de excepción, son semánticamente distintas ya que las reglas anómalas representan el comportamiento inusual complementando el representado por la regla common sense [4, 9].

4 REGLAS ANÓMALAS DIFUSAS

Nuestra propuesta para la extracción de reglas anómalas difusas se basa principalmente en dos ideas:

1. Definir reglas anómalas difusas usando el dominio $\tilde{D}_X = \{t \in \tilde{D} : X \subseteq t\}$.
2. Usar el factor de certeza en lugar de la confianza. El factor de certeza reduce el número de reglas common sense en el proceso de extracción obteniendo reglas más fiables. Como consecuencia, el número de reglas anómalas también se ve reducido, obteniendo un conjunto más manejable para el usuario.

En [9] se analiza con detalle la propuesta de Berzal et al. Este análisis afirma que el aumento de $\mathrm{Conf}(X \wedge Y \rightarrow \neg A)$ es mayor cuanto mayor es $\mathrm{Sop}(X \rightarrow Y)$. Esto prueba que la condición impuesta para la regla de referencia en la tabla 3 depende del valor de los soportes $\mathrm{Sop}(X \rightarrow Y) = \mathrm{sop}(X \cup Y)$ y $\mathrm{sop}(X \cup Y \cup A)$, que a su vez dependen de los soportes de la regla common sense y de la regla anómala. Para solucionar este inconveniente, en [9] proponemos una formulación alternativa para extraer reglas anómalas cambiando la regla de referencia por una condición más fuerte que la dada por Berzal et al. en [4].

A continuación desarrollamos dicha propuesta para el caso de reglas anómalas difusas en una base de datos difusa $\tilde{D}$.

Definición 4. Sean X, Y dos conjuntos no vacíos de ítems y A un ítem en $\tilde{D}$. Se define una *regla anómala difusa* como la tupla $(Fcsr, Fanom, Fref)$ compuesta por tres reglas difusas cumpliendo las siguientes condiciones:

- $X \rightarrow Y$ es una regla difusa frecuente y fiable ($Fcsr$).
- $\neg Y \rightarrow A$ es fiable en $\tilde{D}_X$ ($Fanom$).
- $A \rightarrow \neg Y$ es fiable en $\tilde{D}_X$ ($Fref$).

donde se usan las versiones difusas del soporte y el factor de certeza dadas en la sección 2.2.

Nuestra propuesta es parecida y equivalente a la de Berzal et al. para el caso crisp (ver [9] para más detalles) pero no tiene el inconveniente de que la confianza de la regla $X \wedge Y \rightarrow \neg A$ se vea afectada por un aumento del soporte de $X \cup Y$.

Además se puede probar que $\mathrm{Conf}_X(A \rightarrow B) = \mathrm{Conf}(X \wedge A \rightarrow B)$, pero no se cumple para el factor de certeza. Esto es debido a que utilizamos el soporte del consecuente en D o D_X para calular el factor de certeza:

$$FC(X \wedge \neg Y \rightarrow X \wedge A) \neq FC_X(\neg Y \rightarrow A)$$
$$FC(X \wedge A \rightarrow X \wedge \neg Y) \neq FC_X(A \rightarrow \neg Y)$$

puesto que, en general,

$$\mathrm{sop}(X \wedge A) = \frac{|X \cap A|}{|D|} \neq \frac{|X \cap A|}{|X|} = \mathrm{sop}_X(A).$$

5 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

Nuestra propuesta utiliza una versión difusa del factor de certeza y del soporte para extraer las reglas anómalas difusas. Mediante este tipo de reglas conseguimos extraer y representar el comportamiento inusual y anómalo asociado a una regla frecuente o usual representado por la regla difusa common sense ($Fcsr$). Para desarrollar un algoritmo que sea eficiente para extraer este tipo de reglas, nos encontramos principalmente con dos problemas: (1) la extracción de reglas difusas es algorítmicamente más costoso que extraer reglas crisp, y (2) las reglas anómalas difusas son infrecuentes, y por tanto no se pueden usar las técnicas de poda (anti-monotonía del soporte) usadas en algoritmos como Apriori. Para solventar estos problemas, proponemos usar el algoritmo desarrollado en [8] para descubrir las reglas difusas y después adaptarlo, como se hizo para reglas crisp en [9], para extraer las reglas anómalas asociadas.

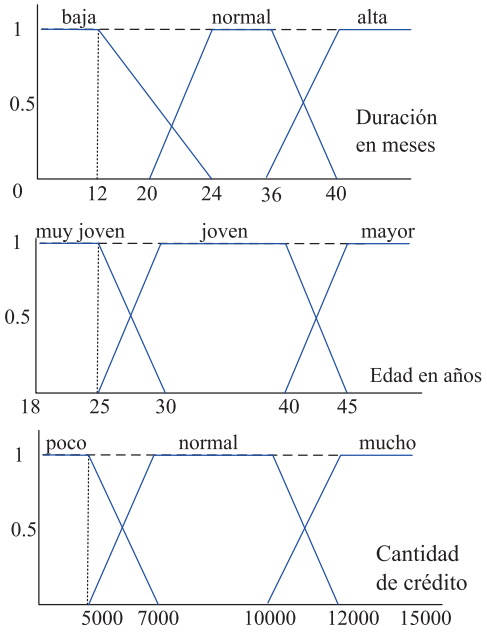
Para evaluar nuestra propuesta hemos elegido dos bases de datos: Auto-mpg y German-statlog del conocido repositorio UCI Machine Learning [3].

El conjunto de datos Auto-mpg trata de predecir el consumo de gasolina a partir de una serie de atributos del coche (cilindrada, peso, aceleración, etc.). La base de datos consta de 398 tuplas y 8 atributos que son multi-valuados o continuos. Para que sirva a nuestros propósitos, hemos fuzzificado sus atributos continuos usando las etiquetas lingüísticas: bajo, medio y alto.

La base de datos German-statlog contiene datos sobre créditos y clientes de un banco alemán. Se compone de 1000

transacciones y 21 atributos, de los cuales 3 son continuos. Estos 3 han sido fuzzificado como indica la figura 1 empleando etiquetas lingüísticas que pueden ser de interés para el usuario final. En los experimentos realizados hemos considerado 10 niveles (α-cortes) equidistribuidos en el intervalo unidad.

Figura 1: Representación de las etiquetas lingüísticas difusas para los atributos continuos de la base de datos German-Statlog



Queremos destacar algunas de las reglas extraídas en ambos conjuntos de datos que podrían ser interesantes. La primera se obtuvo en la base de datos Auto-mpg y la segunda en German-statlog.

"*SI* `consumo = alto`
ENTONCES `cilindrada = 4`
(FSop = 0.206 & FFC = 0.912)
O `n. de cilindros = en la media`
(inusual con $FFC_1 = 1$, $FFC_2 = 1$)".

La interpretación de esta regla es: *si* el consumo de gasolina es alto entonces la cilindrada es 4 con soporte 0.206 y factor de certeza 0.912, *o bien inusualmente* el número de cilindros está en la media con factor de certeza 1.

"*SI* `Propósito = perfeccionamiento`
ENTONCES `duración = baja`
(FSop = 0.008 & FFC = 0.781)
O `duración = normal`
(inusual con $FFC_1 = 1$, $FFC_2 = 1$)".

Esta otra regla extraída de German-statlog puede interpretarse como: *si* el propósito del crédito es para perfeccionamiento entonces la duración del crédito es baja con soporte 0.008 y factor de certeza 0.781, *o bien inusualmente* la duración del crédito es normal con factor de certeza 1.

En general, una vez que obtenemos el conjunto de reglas, estas deben ser validadas con el conocimiento de un experto y así reconocer cuáles reglas son realmente interesantes, útiles y/o novedosas.

6 CONCLUSIONES

La extracción de reglas anómalas puede ser de utilidad en diversas áreas. En este trabajo hemos propuesto el uso de reglas anómalas difusas para representar el comportamiento anómalo o inusual que se desvía del normal, descubriendo de forma conjunta el patrón usual y su anomalía asociada. Nuestra propuesta se basa en el uso del factor de certeza como alternativa a la confianza, obteniendo un conjunto más pequeño y más fiable de reglas anómalas.

Además hemos propuesto adaptar un algoritmo ya desarrollado para reglas difusas que nos permite obtener de forma conjunta las reglas usuales y las anómalas. Esta propuesta podría mejorarse en el futuro mediante una paralelización del proceso en cada α-corte. Hemos probado nuestra propuesta en dos bases de datos difusas obteniendo prometedores resultados.

Como se menciona en este trabajo, existen otros métodos que extraen nuevos tipos de información usando otros tipos de reglas, como por ejemplo las reglas de excepción, que pueden ser de utilidad para aplicarlas en seguridad. Sería, por tanto, interesante desarrollar en el futuro nuevas propuestas para su extracción que tengan en cuenta la imprecisión o incertidumbre de los datos. También es necesario ampliar en el futuro el número de experimentos en otras bases de datos difusas en las que pueda ser interesante la extracción de anomalías.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente sufragado por la Junta de Andalucía bajo los proyectos P11-TIC-7460 y por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España bajo los proyectos TIN2009-14538-C02-01 y TIN2012-30939.

Referencias

[1] R. Agrawal, T. Imielinski, and A. Swami. Mining associations between sets of items in massive databases. In *ACM-SIGMOD International Conference on Data*, pages 207–216, 1993.

[2] R. Agrawal, H. Manilla, R. Sukent, A. Toivonen, and A. Verkamo. *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*, chapter Fast discovery of Association rules, pages 307–328. AAA Press, 1996.

[3] A. Asuncion and D.J. Newman. UCI machine learning repository, 2007.

[4] F. Berzal, J.C. Cubero, N. Marín, and M. Gámez. Anomalous association rules. In *IEEE International Conference on Data Mining*, 2004.

[5] F. Berzal, M. Delgado, D. Sánchez, and M.A. Vila. Measuring accuracy and interest of association rules: A new framework. *Intelligent Data Analysis*, 6(3):221–235, 2002.

[6] F. Cai, N.A. Le-Khac, and M.T. Kechadi. Clustering approaches for financial data analysis: A survey. In *Proc. of the 8th Int. Conference on Data Mining*, pages 105–111, Las Vegas, USA, 2012.

[7] P. Chemouil and D. Stern. A diagnosis expert system for network traffic management. *Networks*, 1992.

[8] M. Delgado, N. Marín, D. Sánchez, and M.A. Vila. Fuzzy association rules: General model and applications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(2):214–225, 2003.

[9] M. Delgado, M.D. Ruiz, and D. Sánchez. New approaches for discovering exception and anomalous rules. *Int. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 19(2):361–399, 2011.

[10] M. Delgado, M.D. Ruiz, D. Sánchez, and J.M. Serrano. A formal model for mining fuzzy rules using the RL representation theory. *Information Sciences*, 181(23):5194–5213, 2011.

[11] M. Delgado, D. Sánchez, and M.A. Vila. Fuzzy cardinality based evaluation of quantified sentences. *Int. Journal of Approximate Reasoning*, 23:23–66, 2000.

[12] E. Didelet, B. Dubuisson, and D. Stern. A neural technique approach to network traffic management. In *14th International Teletraffic Congress*, pages 1321–1330, Antibes Juan-les-Pins (France), 1994.

[13] J. Ding and Stephen S.T. Yau. TCOM, an innovative data structure for mining association rules among infrequent items. *Computers & Mathematics with Applications*, 57(2):290–301, 2009.

[14] B. Duval, A. Salleb, and C. Vrain. On the discovery of exception rules: A survey. *Studies in Computational Intelligence*, 43:77–98, 2007.

[15] T. Fawcet and F. Provost. Adaptative fraud detection. *Data Mining and Knowledge Discovery*, pages 291–316, 1997.

[16] E. Hüllermeier. Fuzzy sets in machine learning and data mining. *Applied Soft Computing, In Press*, 11(2):1493–1505, 2011.

[17] F. Hussain, H. Liu, E. Suzuki, and H. Lu. Exception rule mining with a relative interestingness measure. In *Proc. of the 4th Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 86–97, 2000.

[18] E. Shortliffe and B. Buchanan. A model of inexact reasoning in medicine. *Mathematical Biosciences*, 23:351–379, 1975.

[19] A.T.H. Sim, M. Indrawan, and B. Srinivasan. Mining infrequent and interesting rules from transaction records. In *7th WSEAS Int. Conf. on AI, Knowledge Engineering and Databases*, pages 515–520, UK, 2008.

[20] E. Suzuki. Discovering unexpected exceptions: A stochastic approach. In *Proceedings of the fourth international workshop on RSFD*, pages 225–232, 1996.

[21] E. Suzuki. Discovering interesting exception rules with rule pair. In *Proc. Workshop on Advances in Inductive Rule Learning at PKDD-04*, pages 163–178, 2004.

[22] E. Suzuki and M. Shimura. Exceptional knowledge discovery in databases based on information theory. In *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 275–278. AAAI Press, 1996.

[23] D. Taniar, W. Rahayu, V. Lee, and O. Daly. Exception rules in association rule mining. *Applied Mathematics and Computation*, 205:735–750, 2008.

[24] S. Thiprungsri and M.A. Vasarhelyi. Cluster analysis for anomaly detection in accounting data: An audit approach. *The International Journal of Digital Accounting Research*, 11:69–84, 2011.

[25] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[26] N. Zhong, M. Ohshima, and S. Ohsuga. Peculiarity oriented mining and its application for knowledge discovery in amino-acid data. In *Proc. of the 5th Pacific-Asia Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 260–269, London, UK, 2001.

[27] L. Zhou and S. Yau. Efficient association rule mining among both frequent and infrequent items. *Computers & Mathematics with Applications*, 54(6):737–749, 2007.

[28] M. Ziaii, F.D. Ardejani, M. Ziaei, and A.A. Soleymani. Neuro-fuzzy modeling based genetic algorithms for identification of geochemical anomalies in mining geochemistry. *Applied Geochemistry*, 27:663–676, 2012.

Complexity Reduction in Classification Based on Asocciations over DataCubes

Carlos Molina[1], **Belén Prados-Suárez**[2], **Daniel Sánchez**[3], **M. Amparo Vila**[3]

[1]*Department of Computer Sciences, University of Jaen, Jaen, Spain*, carlosmo@ujaen.es
[2]*Department of Software Engineering, University of Granada, Granada, Spain*, belenps@ugr.es
[3]*Department of Computer Sciences and A.I. , University of Granada, Granada, Spain*, {daniel,vila}@decsai.ugr.es

Abstract

Most of the classification methods proposed so far are based on the use of heuristics, greedy techniques or associations. Among them the ones that stand out more are those with a great capability to reduce the noise, to do it easily and to supply higher precision in real situations. However, even the most precise rule based classification methods consume a high execution time, since they work with the whole set of rules. Here we propose an iterative association rules based classification technique that reduces the complexity of the result as well as the size and number of rules in the resultant set, by stopping the construction of the classifier through the identification of the conditions under which there is no improvement in the classification. With it we don't only diminish the usual over-fitting problem of these methods, but also decrease the execution time and increase the interpretability of the final set. **Keywords:** CBA, Complexity Reduction, Classification, DataCube, Multidimensional Model.

1 INTRODUCTION

Nowadays it is undeniable, the need to count on classification methods that provide an accurate and efficient arrangement of the elements under consideration. As a proof can be found wide variety of applications like intrusion detection [7], credit card marketing [6] or extracting defect patterns in the garment industry [4]. To face these problems can be found in the literature greedy and heuristic based classification methods but, as mentioned in [10, 2], it is difficult to get a high accuracy with these proposals, specially when they must be applied on real problems or systems due to their sensitivity to noise and the usual over-fitting of the classifier.

This is why the research on association rule based classifiers has progressed so much in the last few years. Among them can be found techniques based on predictive association rules [12] or associative classifiers based on maximum entropy [6]or equivalence class rule trees [5]There are also multiclass classification methods which can be based on multiple levels [11], by clustering partition; on multiple tables [14], that hide association rules for privacy preserving; or on multiple layers [3], based on gene expression programming.According to [9] the most accurate algorithms are those based on class-association-rules (CAR).

Nevertheless these techniques don't use to deal with the efficiency issue, since the huge number of rules that they produce makes them useless when the application requires a low time consumption. To solve this problem Yusof et al. [15] proposed a production function which produced as result only relevant rules for prediction On the other hand, Vo and Le [13] proposed a tree structure to store the frequent itemsets and datasets and to group those with the same attributes. Recently, based on this proposal, Nguyen et al. [10] present a special structure and some theoretical results that avoid some calculations.

Despite with these methods the rule testing is faster, the search space is still too big due to the great number of rules to be checked. Moreover, there is a drawback from the point of view of the user: the more rules to revise the more difficult the comprehension of the full system is. The cause of it is that proposals above consider the resulting classifier as a ordered list of rules such that in the classification process only the first rule satisfying the antecedent is considered. It means that to understand the system the user should take into account, not only the fired rule, but also all the previous discarded ones and their ordering. Even more there

Work partially supported by research project TIN2012-36951, "NOESIS: Network-Oriented Exploration, Simulation, and Induction System," funded by the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness" and also by project UJA11/12/56 from the University of Jaen.

also exists the inconvenient issue of the over-fitting.

This is why we propose a classification based on association rules method with two main purposes: On the one hand to improve the interpretability of the results, making easier for the user to understand the system and the reason why a given result is obtained; on the other hand, obtain a set of rules generic enough to avoid the data over-fitting problem. The two targets can be achieved generating a less complex result set by reducing the size and number of the rules in it.

In section 2 we present the association rule extraction algorithm used as starting point of our proposal. Next, in section 3, we show the adaptation of the algorithm to reduce the complexity of the resultant set of rules. Examples about the performance of our proposal are presented in section 4, and finally we indicate our conclusions and final remarks in section 5.

2 COGARE

Our proposal is based on an association rule extraction algorithm that works over datacubes called COGARE ([8]).The method extracts rules over datacubes and diminishes the complexity by using the concepts defined in the hierarchy over each dimension to reduce the number of rules. There are three main stages in the method:

- *Itemsets generation*: the algorithm uses the apriori algorithm ([1]) adapted to the multidimensional model. It takes into account the hierarchy of the dimension when an itemset is not frequent and looks for a generalization that may be frequent (bottom-up approach). In this generalization the support threshold is adapted such that the more general the items are, the higher the threshold is (see [8] for details).

- *Rule generation*: the algorithm extracts rules using an a priori like algorithm ([1]).

- *Rule generalization*: the rule set obtained in the previous stage is generalized to reduce the complexity of the result. In this step, the algorithm tries to generalize the elements in the association rules by defining the items at a higher level (more abstract). If the generalized rules include another ones (are defined over more concrete values but represent the same knowledge) those are deleted. On each step, the quality of the rule set is controlled so if it decreases down to an established threshold, the operation is not applied.

The associations rules are pruned according to a *certainty factor (CF)* instead of *confidence* to avoid some of the well known problems of this quality measure. The method obtains an average complexity reduction of 39 % ([8]) and this is why we have chosen it as starting point for our proposal.

3 Algorithm

In this section we present the modification of COGARE method to extract association rules adapted for classification. Next we comment the changes that must be introduced.

3.1 Itemset generation

When generating the frequent itemsets we only change the candidates: the method only considers as candidates the itemsets containing an item of the class variable. If the itemset is not frequent the method applies the generalization process but not on the class item (the granularity of this variable does not change in any moment).

3.2 Rule generation

At the rule generation stage, the method only takes into account the association rules of the form $A \rightarrow C$, where C only has one item that belongs to the class variable. So for each frequent itemset found, the method only generates one rule.

3.3 Rule generalization

In the rule generalization phase the scheme is similar to the one used in the itemset generation, because the method tries to generalize the rule set considering all the variables but the class.

3.4 Iterative approach

One of the main changes of the algorithm is the use of an iterative approach. Most of the proposals first generate all the association rules and later select the classification rules from this set. In our approach we use the following iterative approach:

- First the method generates frequent itemsets of size 2 (one item from the class variable and another one from other variable),

- Then it generates the association rules of size two, prunning those with a CF under the threshold given as parameter, and selects the rules from this set, so the method generates a classification model using simple rules (one antecedent and the class).

- Next the method calculates the frequent itemset of size 3 using frequent itemsets of size 2. In this stage the method tries to reduce the number of rules deleting unnecessary frequent itemsets, as explained in the next subsection.

- After it the method generates the rules for the frequent itemsets of size 3, and selects the rules to classify.

- The method stops if the result is not better than using rules of size 2. If we obtain a better classification then we continue the process with itemsets of size 4, and so on.

This iterative schema is shown with more detail in Algorithm 1.

Algorithm 1 Iterative process for rule generation

- N = Number of variables
- FI_2 = Generate frequent item sets of size 2
- R_2 = Generate rules from FI_2
- R' = Sort R_2 according to rules quality (CF) descending
- R_a = Selected rules from R'
- FI_2 = reduceSpace(FI_2,R_a)
- for $i = 3$ to N do
  - FI_i = Generate frequent item sets of size i from FI_{i-1}
  - R_i = Generate rules from FI_i
  - $R = \cup_{j=2}^{i} R_i$
  - R' = Sort R according to rules quality descending
  - R_c = Selected rule from R'
  - If $Quality(R_c) > Quality(R_a)$ then
    - $R_a = R_c$
    - FI_i=reduceSpace(FI_i,R_a)
  - else
    - Finish and *return* R_a
- end-for
- *return* R_a

3.4.1 Space reduction

In this section we describe the process *reduceSpace*(FI_i,R_a) that appears in Algorithm 1. The aim of this process is to reduce the candidate frequent itemsets to be generated. The main idea is to avoid building more specific rules/bigger itemsets in areas of the search space where the classification was made correctly with simpler rules.

The method takes the current classification rule set, and looks for areas correctly classified with the current rule set. Those areas are delimited by the rules with CF equal to 1 (all the elements which satisfy the antecedent of the rule have the same class). Next the process keeps out from the frequent itemsets those including the antecedent of any of these rules, and in the next iteration no itemset in those areas wil be considered.

In Algorithm 2 this step is shown in detail.

Avoiding the generation of larger and more complex rules in these areas, the use of unnecessary inserted items in the antecedent of the rules is also avoided, and hence the overfitting the could introduce.

3.4.2 Rule selection

On each iteration the algorithm selects a set of rules to build the classifier.

Algorithm 2 reduceSpace: Space reduction of candidate frequent itemsets generation

Inputs:

- R_c: Rule sets
- FI: Frequent itemsets
- D: Data set to classify

Algorithm:

- for each r in R_c with $CF = 1$ do
  - for each I in FI do
    - a_r is the antecedent of r
    - if the antecedent of r is included in I then FI=$FI - a_r$
  - end-for
- end-for
- *return* FI

First the method sorts the rules according to the quality of each one in decreasing order (better rules first). Then it uses the first rule as initial classifier a computes its quality. The rest of the process checks iteratively whether the next rule improves the quality or not. If there is an improvement the technique selects the rule and proceeds to the next iteration. Otherwise, the rule is dismissed.

More details can be found in the algorithm 3.

Algorithm 3 ruleSelection: Obtain a subset of rules to classify the data.

Inputs:

- R: Rule sets
- D: Data set to be classified

Algorithm:

- R' = sort R descending according to rule quality
- r = first element of R'
- $R_a = \{ r \}$
- $R = R - \{r\}$
- while ($R \neq \emptyset$ and $Quality(R_a) < 1$) do
  - r = first element of R'
  - $R = R - \{r\}$
  - $R_c = R_a \cup r$
  - if $Quality(R_c) > Quality(R_a)$ then $R_c = R_a$
- end-while
- *return* R_a

3.4.3 Rule evaluation

As mentioned above in most of the CAR proposals the rule set obtained is used as an ordered list of rules. In our proposal, we do not establish an order between rules since we use a classic inference schema, considering that a rule is satisfied with a degree $\otimes(\mu(A_1),...\mu(A_n))$, where A_is are the items in the antecedent and $\mu(A_i)$ the degree at which the record satisfies the item. As t-norm we use the *minimum*. We combine the result of each fired rule with

the same consecuent (class) with a t-conorm to obtain one unique value for each class (we use the *maximum*). The class with higher degree is the one selected to classify the new record.

4 Examples

In this section we apply the algorithm on different problems. First, we use the well known IRIS dataset from UCI repository to explain the algorithm. Then, since we haven't found any standard repository of datacubes nor proposal with examples that we can use to compare the results, we use two DataCubes obtained from real situations to test the process in more realistic examples.

4.1 Iris dataset example

This classification problem consists on identifying the class of some iris flowers according to four variables: sepal length, sepal width, petal length and petal width. There are three classes: Iris senotosa, Iris versicolor and iris virginica. In the dataset we can find 150 records.

We first establish hierarchies over the domain of the variables. In this example only one level is defined with three fuzzy labels (*low*, *average* and *high*). We have just divided the domain in three labels with the same size.

The parameters used for the methods are the following ones (see [8] for a detailed explanation of each one):

- Support: 0.01
- CF: 0.4 (we set a strong threshold for the quality of the rules).
- Max complexity: 0.2. This value is for the association rule extraction part and establishes that we want a high reduction of the number of rules in this part.
- acceptRatio: 1.2 (we can accept a rule set that may be worse if the complexity reduction is high).
- β: 10. This value is used for the generalization process and is a penalty for used values which produce a rule set that was not accepted in the past.
- α: 0.7 (for us is more important to reduce the number of rules than to improve the abstraction).

In next paragraphs, the method is explained step by step with this dataset.

4.1.1 First iteration

Frequent Itemsets of size 2 . The first step consists on generating the frequent itemset with two items (one is the class and the other one corresponds to the other variables used to classify). In this example we get 21 frequent itemsets.

Rule generation of size 2 . With the 21 frequent itemset, the algorithm generates 17 rules that satisfy the threshold (0.4).

Rule generalization . The technique tries to reduce it by using the hierarchies. Due to the parameter's values, we have forced the method to apply a strong reduction. The details of the process can be found in [8]. After this process we get only 8 association rules.

Rule selection : the rules are sorted according to their quality and we consider as first candidate the set with the best rule and the iterative process begins:

- First we consider the second rule too (a classifier with two rules) and test the quality comparing it with the one obtained when we only considered the first rule. The quality of the classifier with the two rules is 32,65 % which is the same as with only the first rule, and the coverage does not improve, so this classifier is not selected.
- Next the method tries to introduce the third rule. In this case the quality grows from 32,65 % to 69.39 % so this new rule set with two rules (the first and third) is accepted as better classifier.
- Next two rules (4th and 5th) have a similar effect and the quality increases up to 97.27 %, having coverage of 100 %.
- 6th rule does not improve the coverage nor the classification, so it is not included in the rule set. Rules 7th and 8th have the same behavior.

After this step, we have the first classifier that contains four rules:

petallen is Low $\rightarrow$ Iris-setosa Support: 0.3265 CF: 0.988
petalwi is High $\rightarrow$ Iris-virginica Support: 0.2596 CF: 0.952
petallen is High $\rightarrow$ Iris-virginica Support: 0.245 CF: 0.894
petalwi is Average $\rightarrow$ Iris-versicolor Support: 0.325 CF: 0.719

Reduce space . With this rule set the method tries to reduce the next frequent itemset generation by not considering the candidates that are in an area already correctly classified. In this case, none of the 4 rules has $CF = 1$ so there is no possibility to reduce the cantidate itemsets. Therefore we consider 21 itemsets to build the candidates for the next iteration.

4.1.2 Second iteration

Frequent Itemsets of size 3 . The method uses an a priori like approach to build the candidates from frequent itemset of size 2. From the 21 itemsets the method found 7 frequent itemsets more with three elements.

Rule generation of size 3 . With the 28 frequent itemsets, the algorithm generates 24 rules that satisfy the threshold (0.4).

Rule generalization . The generalization process reduces the number of rules to 12 (including the 8 from first iteration).

Rule selection . After sorting the rules and selecting the first one, the iterative selection of rule begins. In this case, after considering the 12 rules, only 4 are included in the rule set with a quality of 97,27 % and coverage 100 %.

Stop condition . With this rule set the classification is not improved so the method keeps the previous rule set and stops the process.

4.1.3 Final remarks

After the second iteration, the process stops without calculating the frequent itemset of size 3 and 4, and no more rules are generated. The final classifier is very simple with only four rules with one item in the antecedent.

To compare the results we use 10 fold cross validation an get the average results. In the case of iris problem we get 96,9 % of correct classification and 4 rules. The quality is similar to other CAR methods (CBA 92 %, GARC 94 %) and the number of rules is lower (CBA 14,GARC 7).

4.2 DataCubes: Financial and Stock market

In this section we present the results over two datacubes. The dimensions and hierarchies can be found inf Figure 1. The Financial Datacube represents information related to entreprises during several years with 9 dimensions and 1200 records. In this DataCube we need to predict if the enterprise closed due to economic problems (dimension *Failure*) with two classes: *Yes* or *No*.

The Stocks DataCube represents data from automatic technics to invest in stock markets with different indicators of the past performance in several markets. In this case we have 13 dimensions and 4957 records and we need to predict the profit expected (dimension *Profit*) with three classes: *High*, *Normal* or *Low*.

For both problems we have selected the same parameters used with the IRIS problem except the support threshold: 0.05 instead of 0.01.

Problem	Quality	# rules
Financial	75.84 %	30.7
Stocks	69.29 %	52.2

Tabla 1: Average results using 10 folder cross validation.

5 Conclusions

In this paper we have presented a modification of the COGARE algorithm for the extraction of association rules, explaining the adaptations that must be performed on it to reduce the size of the rules generated, as well as the number of them. With it three goals are achieved: having simpler rules and a lower number of them the interpretability and comprehension of the system is easier for the user; in addition, the number of rules to be checked is lower and so the system's response can be faster; moreover, the quality of the classifier increases due to the generalization that avoids the over-fitting of the data.

Since the order in the rules is not relevant, we foresee two additional advantages of this proposal that will be tested in the future. On the one hand, it is possible to use this approach for decission support: each rule is a result per se that can be interpreted independently. It means that each rule helps to understand not only the criterias under which the classification is being performed, but also the characteristics that determine each class. On the other hand we also intuit an improvement in the robustness to noise regarding the methods based in the ordering of the rules, since they consider one rule at a time, if it is affected by the noise, the classification could be wrong. In turn, in our case, the classification is performed considering several rules at the same time so the noise in one rule has less incidence in the final classification.

This research is still in progress and the algorithm is being tested under more data sets to be able to quantify the improvements in the above mentioned goals.

Referencias

[1] R. Agrawal and R. Sritkant. Fast algorithms for mining association rules in large databases. In *Proceedings of 20th International Conference on Very large data Bases*, pages 478–499, 1994.

[2] S. Ghosh, S. Biswas, D. Sarkar, and P.P. Sarkar. Association rule mining algorithms and genetic algorithm: A comparative study. In *Emerging Applications of Information Technology (EAIT), 2012 Third International Conference on*, pages 202–205, 2012.

[3] Cai Hong-guo, Yuan Chang-an, Luo Jin-Guang, and Huang Jin-de. A novel gep-based multiple-layers association rule mining algorithm. In *Computation-*

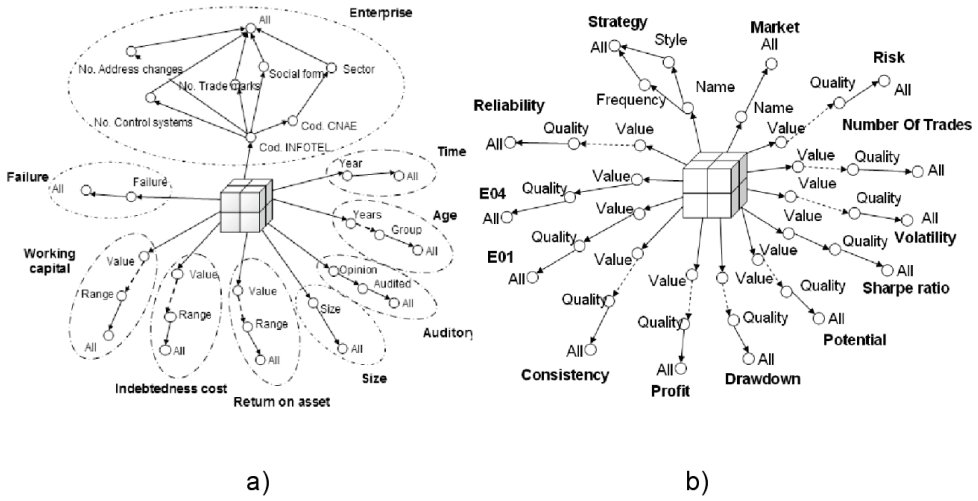


Figura 1: Example datacubes. a) Financial b) Stocks.

al Intelligence and Security (CIS), 2010 International Conference on, pages 68–72, 2010.

[4] C.K.H. Lee, K.L. Choy, G.T.S. Ho, K.S. Chin, K.M.Y. Law, and Y.K. Tse. A hybrid olap-association rule mining based quality management system for extracting defect patterns in the garment industry. *Expert Systems with Applications*, 40(7):2435 – 2446, 2013.

[5] Huijun Li and Zhiquan Li. Research on algorithm and application of mining fuzzy association rules based on rapid prefix tree. In *Pervasive Computing Signal Processing and Applications (PCSPA), 2010 First International Conference on*, pages 1318–1322, 2010.

[6] Yan li Zhu, Yu-Fen Wang, Shun-Ping Wang, and Xiao juan Guo. Mining association rules based on cloud model and application in credit card marketing. In *Wearable Computing Systems (APWCS), 2010 Asia-Pacific Conference on*, pages 165–168, 2010.

[7] S. Mabu, Ci Chen, Nannan Lu, K. Shimada, and K. Hirasawa. An intrusion-detection model based on fuzzy class-association-rule mining using genetic network programming. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, 41(1):130–139, 2011.

[8] Nicolás Marín, C. Molina, José María Serrano, and A. Vila. A complexity guided algorithm for association rule extraction on fuzzy datacubes. *IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS*, 16:693–714, 2008.

[9] Loan T.T. Nguyen, Bay Vo, Tzung-Pei Hong, and Hoang Chi Thanh. Classification based on association rules: A lattice-based approach. *Expert Systems with Applications*, 39(13):11357 – 11366, 2012.

[10] Loan T.T. Nguyen, Bay Vo, Tzung-Pei Hong, and Hoang Chi Thanh. Car-miner: An efficient algorithm for mining class-association rules. *Expert Systems with Applications*, 40(6):2305 – 2311, 2013.

[11] Huang Qinglan and Duan Longzhen. Multi-level association rule mining based on clustering partition. In *Intelligent System Design and Engineering Applications (ISDEA), 2013 Third International Conference on*, pages 982–985, 2013.

[12] R. Sumithra and S. Paul. Using distributed apriori association rule and classical apriori mining algorithms for grid based knowledge discovery. In *Computing Communication and Networking Technologies (ICCCNT), 2010 International Conference on*, pages 1–5, 2010.

[13] B. Vo and B. Le. A novel classification algorithm based on association rule mining. In *LNAI 5465 Pacific rim knowledge acquisition workshop, held with PRICAI 2008, Viet Nam.*, pages pp. 61–75., 2008.

[14] Shyue-Liang Wang, Tzung-Pei Hong, Yu-Chuan Tsai, and Hung-Yu Kao. Multi-table association rules hiding. In *Intelligent Systems Design and Applications (ISDA), 2010 10th International Conference on*, pages 1298–1302, 2010.

[15] Y. Yusof and M.H. Refai. Mmcar: Modified multi-class classification based on association rule. In *Information Retrieval Knowledge Management (CAMP), 2012 International Conference on*, pages 6–11, 2012.

Clustering with fuzzy coverings

Daniel Sánchez[1,2], **José-María Serrano**[3]

[1]*Department of Computer Science and A. I.*
University of Granada, Spain, daniel@decsai.ugr.es
[2]*European Centre for Soft Computing*
Mieres, Asturias, Spain, daniel.sanchezf@softcomputing.es
[3]*Dept. of Computer Science.*
University of Jaén, Spain, jschica@ujaen.es

Abstract

Fuzzy indistinguishability relations allow to properly model existing resemblances between a set of objects, in a more natural way. Seen as graph vertices, objects in this set relate others if they are connected by an edge. Following this, and relying on resemblance between data, we can define a fuzzy clustering as fuzzy coverings. The authors extend the theoretical model, previously introduced, proposing an implementation based on the notion of finding maximal frequent itemsets, as well as some experiments on real-word data are carried out.

Keywords: Fuzzy clustering, fuzzy coverings, resemblance relations.

1 Introduction

In [8] the authors introduced a new approach for fuzzy clustering from fuzzy resemblance relations, based on the notion of fuzzy covering. Several authors have pointed out that binary relations built in terms of natural concepts are not transitive most of the time, but reflexive and symmetric *indistinguishability relations*, also called *resemblance relations* [16, 13, 14], i.e., fuzzy relations R on O satisfying:

- $R(x,x) = 1\ \forall x \in O$
- $R(x,y) = R(y,x)\ \forall x,y \in O$

When indistinguishability is represented by a reflexive and symmetric, but not transitive relation, what can be reasonably expected is to obtain not a partition, but a *covering* of the set of objects, in which an object may appear in more than one cluster. This is also the case in fuzzy clustering, though objects may appear in different clusters to a certain degree.

In this paper we discuss about our implementation of the proposal in [8] together with some experiments and future work.

2 Coverings for non-transitive crisp relations

When the indistinguishability relation between objects is not transitive, we can only expect to obtain a collection of clusters that form a covering of the data. However, this does not mean at all that any covering is a good clustering of the objects according to the crisp relation R. We want a set of clusters $\{C_1,\ldots,C_m\}$ satisfying:

1. $C_i \times C_i \subseteq R\ \forall C_i$
2. The covering reflects *all* the information given by R in the following sense: let $O' \subseteq O$ such that $O' \times O' \subseteq R$. Then, there is at least one C_i such that $O' \subseteq C_i$, i.e., every group of objects that are completely related appear together in at least one cluster. This requirement also implies $\bigcup_{i=1}^{m}(C_i \times C_i) = R$.
3. There is no other clustering verifying 1 and 2 with less clusters.

Let R be a reflexive and symmetric crisp relation defined on a set O and let $G_R = (O,D)$ be a graph in which objects are the vertices and there is an edge in D between vertices x and y iff xRy. As explained in [8], in order to obtain the best clustering by coverings we just need to calculate all the maximal cliques in the graph G_R. The resulting covering is obviously biunivocally related to the relation R. The main difficulty with this approach is that the computation of all maximal cliques of a graph is an NP-complete problem. Hence, when the set of objects is very large, it may be the case that only approximate results can be achieved. We will come back to this problem later.

3 Coverings for fuzzy clustering

Following the ideas of representation by levels of fuzziness introduced in [11], the approach introduced in [8] consists in solving the corresponding crisp clustering problem for each α-cut of R, obtaining a crisp covering at each level, always possible. Let Λ_R be the collection of significant levels in $[0,1]$ considered and let ρ_{C_R} be a function assigning to every value $\alpha \in \Lambda_R$ the optimum covering of O following the crisp relation R_α. We call the pair (Λ_R, ρ_{C_R}) a *gradual covering* (or *RL-covering*).

For example, consider the fuzzy relation S in Table 1.

	a	b	c	d	e
a	**1**	**1**	0	0.8	0.3
b	**1**	**1**	0.8	**1**	0.3
c	0	0.8	**1**	0.8	0.8
d	0.8	**1**	0.8	**1**	0.5
e	0.3	0.3	0.8	0.5	**1**

Table 1: Example of a reflexive, symmetric, and non-transitive fuzzy relation S.

Then $\Lambda_S = \{1, 0.8, 0.5, 0.3\}$. Table 2 shows the crisp relations corresponding to the α-cuts S_α with degrees $\alpha \in \Lambda_S$ and the corresponding optimum coverings on each level. The result is the gradual covering (Λ_S, ρ_{C_S}).

α	**Crisp relation** S_α	**Covering** $\rho_{C_S}(\alpha)$
1	$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$\{a,b\},\{b,d\},\{c\},\{e\}$
0.8	$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{c,e\}$
0.5	$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{c,d,e\}$
0.3	$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$	$\{a,b,d,e\},\{b,c,d,e\}$

Table 2: Gradual covering for fuzzy relation S of Table 1

Notice that, on each level α_i, the crisp covering $\rho_{C_S}(\alpha_i)$ and the crisp relation S_{α_i} corresponding to the α_i-cut of S are biunivocally related and can be obtained one from the other, as we saw in the previous section. In addition, the fuzzy relation S and its level representation by α-cuts are also biunivocally related by the representation theorem of fuzzy sets. Hence, so are S and the gradual covering (Λ_S, ρ_{C_S}). This holds for any fuzzy relation.

3.1 Fuzzy clustering

Our objective in this section is to show that it is possible to derive a fuzzy covering from a gradual covering so that the former describes all the information in the latter, and they are biunivocally related. For that purpose, let us recall the notion of gradual cluster introduced in [8]:

Definition 3.1 *Let (Λ_R, ρ_{C_R}) be a gradual covering for a fuzzy relation R. Let $\Lambda_R = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ with $1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > \alpha_{k+1} = 0$. Let $\rho_{C_R}(\alpha_i) = \{C_{i1}, \cdots, C_{in_i}\}$ be the set of clusters forming the optimum covering of R_{α_i}. A gradual cluster of (Λ_R, ρ_{C_R}) is a pair $Z = (\Lambda_Z, \rho_Z)$ defined by:*

- $\Lambda_Z = \Lambda_R$
- $\rho_Z(\alpha_i) = C_{ip_i}$ *with* $1 \leq p_i \leq n_i$ *satisfying* $\rho_Z(\alpha_i) \subseteq \rho_Z(\alpha_{i+1})\ \forall 1 \leq i \leq k-1$

That is, a gradual cluster can be obtained from a gradual covering by picking up one single crisp cluster from each level under the restriction that the clusters are nested according to the levels like α-cuts of fuzzy sets. Notice that, given a cluster in level α_i, it is always possible to find a cluster in level α_{i+1} such that the former is a subset of the latter since $R_{\alpha_i} \subset R_{\alpha_{i+1}}$ and hence a maximal clique of R_{α_i} is either a maximal clique of $R_{\alpha_{i+1}}$, or it is strictly included in a maximal clique of $R_{\alpha_{i+1}}$. By construction consecutive families $\rho_{C_R}(\alpha_i)$ and $\rho_{C_R}(\alpha_{i+1})$ satisfy a generalised containment property in the sense that

- $\forall C_{il} \in \rho_{C_R}(\alpha_i), \exists C_{i+1,j} \in \rho_{C_R}(\alpha_{i+1})$ s.t. $C_{il} \subseteq C_{i+1,j}$
- $\forall C_{i+1,j} \in \rho_{C_R}(\alpha_{i+1}), \exists C_{il} \in \rho_{C_R}(\alpha_i)$ s.t. $C_{il} \subseteq C_{i+1,j}$

So we can consider the graph made of all clusters at all levels, with arcs joining all $C_{il} \in \rho_{C_R}(\alpha_i)$ to all $C_{ij} \subseteq C_{i+1,j}$ whenever $C_{il} \subseteq C_{i+1,j}$. This graph is a directed acyclic graph which is unique since the set of clusters at each level is uniquely defined. Gradual clusters are then in one-to-one correspondence with paths of nested clusters from level 1 to level k in the graph. When the fuzzy relation is an equivalence relation this graph becomes a standard Hasse diagram.

Table 3 shows all the gradual clusters for the gradual covering (Λ_S, ρ_{C_S}) in Table 2. Notice that there are six gradual clusters whilst there are only four crisp clusters in the covering at level 1, and only five objects, that is, the number of clusters is related neither to the number of objects nor the

number of clusters in the covering at level 1. As indicated in Section 3.1, the gradual clusters correspond to every possible choice of one set from each level that respect the usual set inclusion of α-cuts with respect to α.

As shown in [8], there is a one-to-one relation between a gradual covering (Λ_R, ρ_{C_R}) and the set $Z(R)$ containing *all* the possible gradual clusters that can be obtained from (Λ_R, ρ_{C_R}) according to definition 3.1.

Now, obtaining a fuzzy covering $F(R)$ from the set of gradual clusters $Z(R)$ is straightforward. Given a gradual covering (Λ_R, ρ_{C_R}) each gradual cluster $Z \in Z(R)$ corresponds to the representation by levels of a fuzzy subset of O, which is a fuzzy cluster that we shall denote $\mu_Z \in F(R)$. It is easy to show that:

- Since level 1 is a covering of O, every object in O appears with degree 1 in at least one fuzzy cluster.
- All fuzzy clusters $\mu_Z \in F(R)$ are normalized fuzzy subsets of O
- For every $\mu_Z \neq \mu'_Z \in F(R)$ it is neither $\mu_Z \subset \mu'_Z$ nor $\mu'_Z \subset \mu_Z$
- The set of fuzzy clusters forms a fuzzy covering of O that is our fuzzy clustering on the basis of R. Particularly, for any t-conorm

$$\bigcup_{F(R)} \mu_Z = O$$

- μ_Z is biunivocally related to Z, hence $F(R)$ is biunivocally related to $Z(R)$ and as a consequence, as we saw before, also to (Λ_R, ρ_{C_R}) and R.

The fuzzy clusters corresponding to the gradual clusters in Table 3 are the following:

- $1/a + 1/b + 0.8/d + 0.3/e$
- $0.8/a + 1/b + 1/d + 0.3/e$
- $1/b + 0.8/c + 1/d + 0.3/e$
- $0.8/b + 1/c + 0.8/d + 0.3/e$
- $0.3/b + 1/c + 0.5/d + 0.8/e$
- $0.3/b + 0.8/c + 0.5/d + 1/e$

4 Convex decompositions

In [4], Bezdek and Harris study convex decompositions of fuzzy relations as a way to determine possible crisp partitions. They conclude that it is not always possible to find a convex decomposition, even when the fuzzy relation verifies certain kinds of transitivity like max-Lukasiewicz transitivity. However, as explained in [8], it is always possible to find a convex decomposition of a fuzzy indistinguishability relation using crisp coverings, even when the fuzzy relation does not satisfy any kind of transitivity.

Proposition 4.1 *Consider a fuzzy relation R and let (Λ_R, ρ_{C_R}) be the optimum gradual covering of R following our approach. Let $\Lambda_R = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ with $1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > \alpha_{k+1} = 0$. Then*

$$R = \sum_{\alpha_i \in \Lambda_R} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \bigcup_{C \in \rho_{C_R}(\alpha_i)} C \times C \qquad (1)$$

is a convex decomposition of R in terms of coverings.

As example

for relation S, the convex decomposition obtained on the basis of the gradual covering in Table 2 is

$$S = 0.2 \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} + 0.3 \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$+ \quad 0.2 \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} + 0.3 \times \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

5 IMPLEMENTATION ISSUES

The main practical drawback in our proposal is the complexity associated to the maximal cliques computing. finding all the maximal cliques of a graph is an NP-complete problem, that cannot be even approximated in polynomial time [9]. Hence, this procedure is feasible if the size of the set O allows to compute the maximal cliques in acceptable time for the desired application.

In our approach to this issue we are representing vertices as items, and cliques, as itemsets (as defined in association rules extraction). Apriori algorithm [1] relies on the property that holds on all frequent (those appearing in the database over a given threshold) itemsets; each of their possible subsets is also a frequent itemset. Hence, a number of former candidates can be properly pruned in the search stage, leading to a minor time and space consumption. Even so, the number of frequent itemsets can be very large. In [17], maximal frequent itemsets are defined, allowing us to discard all those frequent itemsets covered by a larger one. In our case, each 2-itemset (itemset of size 2) is viewed as an edge in a given graph, and extending this representation, larger size itemsets can be easily viewed as cliques between vertices.

α	RL-Clust. 1	RL-Clust. 2	RL-Clust. 3	RL-Clust. 4	RL-Clust. 5	RL-Clust. 6
1	$\{a,b\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{e\}$
0.8	$\{a,b,d\}$	$\{a,b,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{c,e\}$	$\{c,e\}$
0.5	$\{a,b,d\}$	$\{a,b,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{b,c,d\}$	$\{c,d,e\}$	$\{c,d,e\}$
0.3	$\{a,b,d,e\}$	$\{a,b,d,e\}$	$\{b,c,d,e\}$	$\{b,c,d,e\}$	$\{b,c,d,e\}$	$\{b,c,d,e\}$

Table 3: Gradual clusters for the gradual covering in Table 2

This way, starting from the set of edges, we transform the problem of finding maximal cliques in that of finding maximal frequent itemsets. Even more, we only need to read the database once, since each k-itemset is a clique whenever all its subsets are, and there is no need to perform additional computation (in the original Apriori algorith, for each new candidate k-itemset, you need to compute if it remains frequent in the database).

There are a number of algorithms in the literature that try to compute maximal cliques as efficiently as possible [12, 15, 5]. A comparative efficiency study between our method and these is pending, and will be addressed in a future work.

Finally, we must also consider the fact that, since we represent each α-cut of the resemblance relation as a graph, we need to find the set of maximal cliques for each α-cut. We can reduce the computational cost, knowing that, since a clique found in a given α-cut is included in at least one of the cliques in the remaining lower levels, there is no need to find it again.

5.1 Practical cases

As said before, our fuzzy clustering proposal can be applied based only on resemblance relations, avoiding the strong restrictions imposed by similarity relations, that can even distort the original relations between a set of objects. This is the case of the following examples regarding some agricultural soil properties (see [3] for a more detailed description about data sources and features). The methodology proposed in that work required of similarity relations, even when the own nature of data asked for less restrictive relations, as resemblance ones.

As a token of our proposal, we have selected two nominal attributes, 'FAO key' and 'Hue' soil color component. Tables 4 and 5 show the resemblance relations values defined over each attribute values.

Resemblance relations shown in table 4 allow the definition of crisp equivalence relations at each α-cut (1, 0.5, 0.3, 0.1, in this particular case). These relations between values can be seen as edges connecting vertices (values) in a graph. Figure 1.a shows the connections between vertices with resemblance 0.5, figure 1.b shows all vertices with resemblance 0.3 or higher, and figure 1.c shows the edges connecting all vertices with resemblance above 0.1.

Table 4: Resemblance relation (Attribute FAO). Keys: Arenosol (1), Cambisol (2), Chernozems (3), Fluvisol (4), Kastanozems (5), Litosol (6), Luvisol (7), Phaeozems (8), Regosol (9), Rendzina (10), Solonchack (11), Xerosol (12), Yermosol (13)

FAO	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0.1	0	0.5	0	0	0.3	0	0.5	0	0.5	0.3	0.3
2		0.1	0.3	0.1	0	0.3	0.3	0.3	0	0.3	0.5	0.1
3			0.1	0.5	0	0	0.5	0	0.3	0	0	0
4				0.1	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0.1
5					0	0	0.5	0.1	0.3	0	0	0
6						0	0	0	0.3	0	0	0
7							0.1	0	0	0	0.3	0
8								0	0.3	0	0	0
9									0.1	0.3	0.3	0.5
10										0	0	0
11											0.1	0.3
12												0.3

Starting from these relations, we can generate the following set of all fuzzy clusters, grouping the different soil types, according to the existing resemblances within them.

$0 : 1.0/Arenosol + 0.1/Cambisol + 0.5/Fluvisol + 0.5/Regosol + 0.3/Solonchack + 0.1/Yermosol$

$1 : 1.0/Arenosol + 0.1/Cambisol + 0.5/Fluvisol + 0.3/Regosol + 0.5/Solonchack + 0.1/Yermosol$

$2 : 0.1/Arenosol + 1.0/Cambisol + 0.3/Luvisol + 0.5/Xerosol$

$3 : 0.1/Arenosol + 1.0/Cambisol + 0.3/Regosol + 0.1/Solonchack + 0.5/Xerosol + 0.1/Yermosol$

$4 : 1.0/Chernozems + 0.5/Kastanozems + 0.5/Phaeozems + 0.3/Rendzina$

$5 : 0.5/Arenosol + 0.1/Cambisol + 1.0/Fluvisol + 0.5/Regosol + 0.3/Solonchack + 0.1/Yermosol$

$6 : 0.5/Arenosol + 0.1/Cambisol + 1.0/Fluvisol + 0.3/Regosol + 0.5/Solonchack + 0.1/Yermosol$

$7 : 0.5/Chernozems + 1.0/Kastanozems + 0.5/Phaeozems + 0.3/Rendzina$

$8 : 1.0/Litosol + 0.3/Rendzina$

$9 : 0.3/Arenosol + 0.1/Cambisol + 1.0/Luvisol + 0.3/Xerosol$

$10 : 0.1/Arenosol + 0.3/Cambisol + 1.0/Luvisol + 0.3/Xerosol$

$11 : 0.5/Chernozems + 0.5/Kastanozems + 1.0/Phaeozems + 0.3/Rendzina$

$12 : 0.3/Arenosol + 0.1/Cambisol + 0.1/Fluvisol + 1.0/Regosol + 0.3/Solonchack + 0.5/Yermosol$

$13 : 0.3/Arenosol + 0.1/Cambisol + 1.0/Regosol + 0.3/Solonchack + 0.1/Xerosol + 0.5/Yermosol$

$14 : 0.3/Arenosol + 0.1/Cambisol + 1.0/Regosol + 0.1/Solonchack + 0.3/Xerosol + 0.5/Yermosol$

$15 : 0.5/Arenosol + 0.1/Cambisol + 0.5/Fluvisol + 1.0/Regosol + 0.3/Solonchack + 0.1/Yermosol$

$16 : 0.3/Litosol + 1.0/Rendzina$

$17 : 0.3/Chernozems + 0.3/Kastanozems + 0.3/Phaeozems + 1.0/Rendzina$

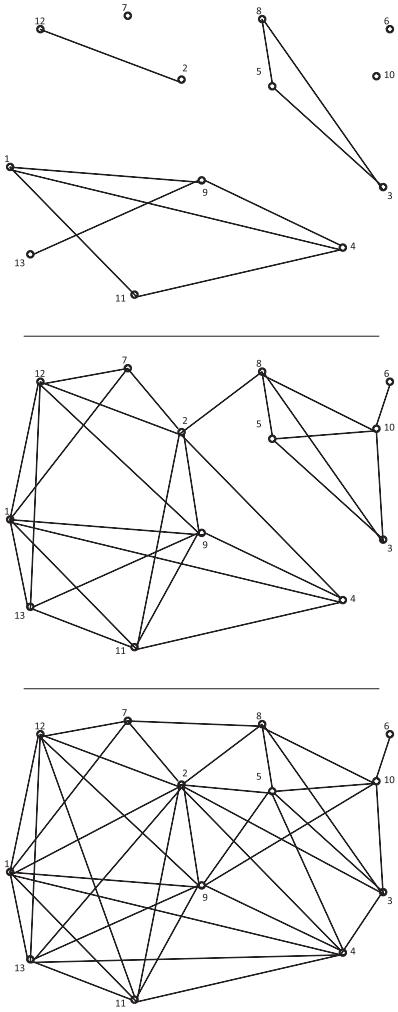


Figure 1: Top to bottom, resemblance values {0.5, 0.3, 0.1}, from table 4, seen as edges of a graph

$18 : 0.5/Arenosol + 0.1/Cambisol + 0.5/Fluvisol + 0.3/Regosol + 1.0/Solonchack + 0.1/Yermosol$

$19 : 0.1/Arenosol + 0.5/Cambisol + 0.3/Luvisol + 1.0/Xerosol$

$20 : 0.1/Arenosol + 0.5/Cambisol + 0.3/Regosol + 0.1/Solonchack + 1.0/Xerosol + 0.1/Yermosol$

$21 : 0.3/Arenosol + 0.1/Cambisol + 0.1/Fluvisol + 0.5/Regosol + 0.3/Solonchack + 1.0/Yermosol$

$22 : 0.3/Arenosol + 0.1/Cambisol + 0.5/Regosol + 0.3/Solonchack + 0.1/Xerosol + 1.0/Yermosol$

$23 : 0.3/Arenosol + 0.1/Cambisol + 0.5/Regosol + 0.1/Solonchack + 0.3/Xerosol + 1.0/Yermosol$

As a second example, table 5 shows resemblances between 'Hue' (color property related to the dominant wavelength in the reflected radiation from soil surface) attribute values. According to our proposal, all fuzzy clusters derived from the example are the following:

Table 5: Resemblance relations (Attribute Hue)

Hue	1.25YR	2.5YR	3.75YR	6.75YR	7.5YR	8.75YR	10YR	1.25Y	2.5Y	5Y	10Y
10R	0.3	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.25YR		0.3	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
2.5YR			0.3	0	0	0	0	0	0	0	0
3.75YR				0.1	0	0	0	0	0	0	0
6.75YR					0.5	0.3	0	0	0	0	0
7.5YR						0.3	0.1	0	0	0	0
8.75YR							0.3	0.1	0	0	0
10YR								0.3	0.1	0	0
1.25Y									0.3	0	0
2.5Y										0.1	0
5Y											0

$0 : 1.0/10R + 0.3/1.25YR + 0.1/2.5YR$

$1 : 0.3/10R + 1.0/1.25YR + 0.1/2.5YR$

$2 : 0.1/10R + 1.0/1.25YR + 0.3/2.5YR$

$3 : 1.0/1.25YR + 0.3/2.5YR + 0.1/3.75YR$

$4 : 0.1/10R + 0.3/1.25YR + 1.0/2.5YR$

$5 : 0.3/1.25YR + 1.0/2.5YR + 0.1/3.75YR$

$6 : 0.1/1.25YR + 1.0/2.5YR + 0.3/3.75YR$

$7 : 0.1/1.25YR + 0.3/2.5YR + 1.0/3.75YR$

$8 : 1.0/6.75YR + 0.5/7.5YR + 0.3/8.75YR$

$9 : 0.5/6.75YR + 1.0/7.5YR + 0.3/8.75YR$

$10 : 0.1/7.5YR + 1.0/8.75YR + 0.3/10YR$

$11 : 1.0/8.75YR + 0.3/10YR + 0.1/1.25Y$

$12 : 0.3/6.75YR + 0.3/7.5YR + 1.0/8.75YR$

$13 : 0.1/7.5YR + 0.3/8.75YR + 1.0/10YR$

$14 : 0.3/8.75YR + 1.0/10YR + 0.1/1.25Y$

$15 : 0.1/8.75YR + 1.0/10YR + 0.3/1.25Y$

$16 : 1.0/10YR + 0.3/1.25Y + 0.1/2.5Y$

$17 : 0.1/8.75YR + 0.3/10YR + 1.0/1.25Y$

$18 : 0.3/10YR + 1.0/1.25Y + 0.1/2.5Y$

$19 : 0.1/10YR + 1.0/1.25Y + 0.3/2.5Y$

$20 : 0.1/10YR + 0.3/1.25Y + 1.0/2.5Y$

$21 : 0.1/2.5Y + 1.0/5Y$

$22 : 1.0/10Y$

6 Conclusions and future work

In this paper we have recalled the proposal of fuzzy clustering based on coverings presented in [8], and we have presented our implementation and some experiments. The main features of the proposal are: i) no fuzzy transitivity of the fuzzy relation is required, ii) there is a one-to-one relationship between the set of fuzzy clusters obtained and the original fuzzy relation, iii) the fuzzy clustering is a fuzzy covering, for any t-conorm, of the set of objects satisfying that no cluster is a subset of another, iv) the notion of fuzzy partition given by Ruspini is not satisfied in general, being also not necessary, and v) it is always possible to find a convex decomposition of the original relation in terms of crisp reflexive and symmetric relations and, therefore, in

terms of the corresponding optimum coverings, solving the problem stated by Bezdek and Harris in [4].

As main drawbacks of the proposal, calculating maximal cliques is NP-complete, and the number of clusters obtained can be rather high (since we intend to obtain all possible clusters of similar objects). Future work will be to study the situations in which current algorithms can be applied, as well as algorithms to obtain good approximations to the optimum solution in reasonable time when the problem is too large, saving time and offering a good tradeoff between time and utility.

As a future extension of the present work, we will offer a comparison between our method and other clustering techniques, as well as, with the assistance of pedologist experts, a semantic explanation of the obtained results.

Acknowledgements

Work partially supported by research project TIN2012-36951, "NOESIS: Network-Oriented Exploration, Simulation, and Induction System", cofunded by the Spanish Ministry of Economy and the European Regional Development Fund (FEDER).

References

[1] R. Agrawal, T. Imielinski, A. Swami. *Mining Association Rules between Sets of Items in Large Databases*. Proc. of the 1993 ACM SIGMOD Conf., Washington DC, USA, 1993

[2] J. Aslam, K. Pelekhov, and D. Rus. Static and dynamic information organization with star clusters. In *Proc. 7th Int. Conf. on Information and Knowledge Management*, 1998.

[3] F. Berzal, I. Blanco, D. Sánchez, J.M. Serrano, and M.A. Vila. *A definition for fuzzy approximate dependencies*. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 149, Issue 1, pp 105–129, 2005

[4] J.C. Bezdek and J.D. Harris. Fuzzy partitions and relations: An axiomatic basis for clustering. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(2):111–127, 1978.

[5] J. Cheng, Y. Ke, A. Wai-Chee Fu, J. Xu Yu, and L. Zhu. Finding maximal cliques in massive networks by H*-graph. In *SIGMOD '10 Proceedings of the 2010 international conference on Management of data*, 2010.

[6] D. Dubois and H. Prade, editors. *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[7] D. Dubois and H. Prade. Bridging gaps between several frameworks for the idea of granulation. In *Symposium on Foundations of Computational Intelligence (in Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI'11)) (FOCI 2011)*, pages 59–65, 2011.

[8] D. Dubois and D. Sánchez. Fuzzy Clustering based on Coverings. In C. Borgelt,M.A. Gil,J.M.C. Sousa, and M. Verleysen, editors,*Towards Advanced Data Analysis by Combining Soft Computing and Statistics*, pages 319–330, Springer-Verlag, 2012.

[9] C. Lund and M. Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems. *Journal of the ACM*, 41:960–981, 1994.

[10] S. Mohseni-Zadeh, P. Brézellec, and J.-L. Risler. Cluster-c, an algorithm for the large-scale clustering of protein sequences based on the extraction of maximal cliques. *Computational Biology and Chemistry*, 28:211–218, 2004.

[11] D. Sánchez, M. Delgado, M.A. Vila, and J. Chamorro-Martínez. On a non-nested level-based representation of fuzziness. *Fuzzy Sets and Systems*, 192:159–175, 2012.

[12] E. Tomita, A. Tanaka, and H. Takahashia. The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments. *Theoretical Computer Science*, 363:28–42, 2006.

[13] E. Trillas and L. Valverde. An inquiry into indistinguishability operators. In H.J. Skala, S. Termini, and E. Trillas, editors, *Aspects of Vagueness*, pages 231–256. D. Reidel Publishing Company, 1984.

[14] L. Valverde. On the structure of f-indistinguishability operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:313–328, 1985.

[15] B. Wu, S. Yang, H. Zhao, and B. Wang. A distributed algorithm to enumerate all maximal cliques in mapreduce. In *FCST '09. Fourth International Conference on Frontier of Computer Science and Technology*, 2009.

[16] L.A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3(2):177–200, 1971.

[17] M.J. Zaki. *Scalable Algorithms for Association Mining*. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, Vol. 12, No. 3, pp 372–390, May/June 2000

ESTYLF2014

XVII CONGRESO ESPAÑOL SOBRE
TECNOLOGÍAS Y LÓGICA FUZZY

SPONSORS

Universidad Zaragoza

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad Zaragoza

Instituto Universitario de Investigación de Ingeniería de Aragón
Universidad Zaragoza

Escuela de Ingeniería y Arquitectura
Universidad Zaragoza

EUSFLAT
EUROPEAN SOCIETY FOR FUZZY LOGIC AND TECHNOLOGY

GENIL
GRANADA EXCELLENCE NETWORK OF INNOVATION LABORATORIES

estylf2014.unizar.es

9 788415 688761