

Actas del
VIII Congreso Español
sobre Tecnologías
y Lógica Fuzzy

Pamplona, 8-10 de septiembre de 1998

Universidad Pública
de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa



EUSPLAT



EUROPEAN SOCIETY
FOR FUZZY LOGIC
AND TECHNOLOGY

Título: Actas del VIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy
Editor Científico: Pedro Burillo López
Comité Editorial: Gregorio Buldain
Ana Burusco
Humberto Bustince
Noé Frago
Ramón Fuentes
Ángel Marín
M^a Victoria Mohedano
Edita: Universidad Pública de Navarra. Departamento de Automática y Computación
European Society for Fuzzy Logic and Technology
© Los autores
© VIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy
© Universidad Pública de Navarra
ISBN: 84-95075-10-5
D.L.: NA 1.698/1998
Fotocomposición: Página S. L.

Imprime: Digitalia. Impresión digital
Impreso en papel ecológico

La Caja de Ahorros de Navarra ha financiado la publicación de esta obra.

Estas actas han sido impresas mediante un proceso digital, que reproduce íntegramente los originales suministrados por los autores, incluidas sus características tipográficas. Por este motivo en el presente volumen aparecen distintas familias de letras.

Esta publicación no puede ser reproducida, almacenada o transmitida total o parcialmente sea cual fuere su medio y el procedimiento, incluidas las fotocopias, sin permiso previo concedido por escrito por los titulares del copyright.

Coordinación y distribución: Dirección de Publicaciones
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía
31006 Pamplona
Fax: (948) 16 93 00
E-mail: publicaciones@upna.es

Presidente

Pedro Burillo López

Comité Científico

Josep Aguilar
Pedro Albertos
Claudi Alsina
Jaime Gil Aluja
Senen Barro
Humberto Bustince
Juan Luis Castro
Miguel Delgado
Francesc Esteva
Ramón Fuentes
Pere García
M^a Ángeles Gil
Pedro Gil
Lluís Godó
Antonio González
José R. González de Mendivil
Julio Gutiérrez

Joan Jacas
Ramón López de Mántaras
Luis Magdalena
Roque Marín
Gaspar Mayor
M^a Victoria Mohedano
Eduard Montseny
Aníbal Ollero
Enric Plaza
M^a José Pérez-Ilzarbe
Alejandro Sobrino
Enric Trillas
Llorenç Valverde
José Luis Verdegay
Amparo Vila
Juan José Villanueva

Comité Organizador

Gregorio Buldain
Ana Burusco
Humberto Bustince
Noé Frago

Ramón Fuentes
Ángel Marín
M^a Victoria Mohedano

Entidades Colaboradoras

Universidad Pública de Navarra - Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Departamento de Educación y Cultura del Gobierno de Navarra
Ayuntamiento de Pamplona
Caja de Ahorros de Navarra

DGICYT

Oficina de Transferencia de Resultados de Investigación (Universidad Pública de Navarra)
B.I.A.N.B.I.

Sun Microsystems

Know How & Planning

Índice

Presentación	1
 Sesión Especial: Fundamentos y Límites de la Lógica Fuzzy	3
<i>Sistemas inteligentes borrosos. Una visión personal</i>	<i>3</i>
S. Barro	
<i>Los límites de la lógica difusa: una visión general</i>	<i>15</i>
J. L. Castro	
<i>Reflexiones acerca de una teoría de computación borrosa</i>	<i>21</i>
C. Moraga	
<i>Verdad y utilidad en lógica Fuzzy</i>	<i>23</i>
A. Sobrino	
<i>Reglas y objetos</i>	<i>31</i>
E. Trillas	
 Sesión de Comunicaciones: Teoría I	41
<i>Equivalencias entre preórdenes y operadores de consecuencias difusos</i>	<i>41</i>
J. Elorza; P. Burillo	
<i>Caracterización de las columnas de un operador de T-indistinguibilidad.....</i>	<i>47</i>
D. Boixader; J. Jacas; J. Recasens	
<i>Menger and Ovchinnikov on indistinguishabilities, revisited</i>	<i>53</i>
E. Trillas; S. Cubillo; E. Castiñeira	
<i>Sobre "medir" la condicionalidad.....</i>	<i>57</i>
L. Garmendia; E. Trillas; A. Salvador	
 Sesión de Comunicaciones: Teoría II.....	63
<i>Representación lingüística de perfiles temporales borrosos.....</i>	<i>63</i>
P. Félix; S. Fraga; R. Marín; S. Barro	
<i>Viabilidad de problemas lineales infactibles mediante técnicas fuzzy.</i>	<i>71</i>
T. León; V. Liern	
<i>¿Cómo manejar un algoritmo difuso?.</i>	<i>77</i>
J.L. Castro; M. Delgado; C.J. Mantas	
<i>Método de los mínimos cuadrados aplicado al GMP con conjuntos intervalo-valorados fuzzy"</i>	<i>85</i>
E. Agustench; H. Bustince; V. Mohedano	

Sesión de Comunicaciones: Modelización I	91
<i>Inferencia de gramáticas regulares difusas a partir de ejemplos.</i>	<i>91</i>
I. Fortes; R. Morales; J.L. Pérez; F. Triguero; M.A. Comino	
<i>Métodos de construcción de modelos guiados por el error.</i>	<i>97</i>
M. Delgado; A.F. Gómez-Skarmeta; L. J. Linares	
<i>Un modelo lingüístico para la descripción de conceptos.</i>	<i>103</i>
E. Hernández ; J. Recasens	
<i>Un modelo para la cuantificación de la persistencia en proposiciones temporales borrosas.</i>	<i>109</i>
M. P. Cariñena; A. Bugarín; S. Barro	
 Sesión de Comunicaciones: Aplicaciones I	 117
<i>Análisis del grado de sinonimia en un diccionario de sinónimos.</i>	<i>117</i>
S. Fernández; A. Sobrino	
<i>Aplicación de la lógica borrosa al cálculo de distancias entre componentes representativos de un dominio en un proceso global de análisis de dominios.....</i>	<i>125</i>
I. Díaz; M. Velasco; J. M. Molina	
<i>Extracción de características en imágenes difuminadas mediante lógica borrosa. ..</i>	<i>131</i>
M.J. Martín; J.M. Molina; P. Isasi; A. Sanchis	
 Sesión de Comunicaciones: Teoría III	 137
<i>Sobre funciones generadoras de Modus Ponens.</i>	<i>137</i>
A. Pradera; E. Trillas; S. Cubillo	
<i>Applications of intuitionistic fuzzy sets in decision making.</i>	<i>143</i>
E. Szmidt; J. Kacprzyk	
<i>Clausura transitiva y relaciones de "betweenness".</i>	<i>151</i>
D. Boixader; J. Jacas; J. Recasens	
<i>Una caracterización de medidas de borrosidad.</i>	<i>157</i>
P. Miranda; P. Gil	
 Sesión de Comunicaciones: Teoría IV	 163
<i>Operadores idempotentes sobre un conjunto finito.....</i>	<i>163</i>
M. Mas; J. Torrens; T. Calvo; M. Carbonell	
<i>Agregación multidimensional de números borrosos.</i>	<i>171</i>
G. Mayor; J. Suñer; P. Canet	
<i>Métodos de construcción de funciones de pertenencia.....</i>	<i>179</i>
A. Sancho-Royo; J. L. Verdegay	
<i>On qualitative weighted mean.....</i>	<i>185</i>
L. Godo; V. Torra	

Sesión de Comunicaciones: Modelización II	193
<i>Un método para la evaluación de sentencias con cuantificadores lingüísticos.</i>	<i>193</i>
M. Delgado; D. Sánchez; M. A. Vila	
<i>Una propuesta para mejorar la precisión del modelado lingüístico.</i>	<i>199</i>
O. Cordon; F. Herrera	
<i>ARDIES: ajustes de reglas difusas basado en enfriamiento simulado.</i>	<i>205</i>
J.M. Benítez; J.L. Castro; I. Requena	
 Sesión de Comunicaciones: Redes	 211
<i>Sistema neuro-fuzzy para la detección de desviaciones en la media y en la variabilidad de un proceso de fabricación.</i>	<i>211</i>
J. Puente; D. de la Fuente; R. Pino	
<i>Una arquitectura para controladores neuro-difusos CMOS mixtos de alta complejidad.</i>	<i>217</i>
R. Navas-González; F. Vidal; A. Rodríguez	
<i>Red neuro-fuzzy para clasificación de patrones.</i>	<i>225</i>
F.J. López; M. Macías; I. Acevedo; H. González; C.J. García	
 Sesión de Comunicaciones: Teoría V	 233
<i>Agregación de intervalos borrosos mediante el principio de extensión.</i>	<i>233</i>
A. R. de Soto; E. Trillas	
<i>Nota sobre el concepto de implicación borrosa.</i>	<i>239</i>
E. Trillas; C. del Campo; S. Cubillo	
<i>Particiones, indistinguibilidades y variables lingüísticas.</i>	<i>245</i>
A. R. de Soto, J. Recasens	
<i>On the learning of weights in some aggregation operators.</i>	<i>251</i>
V. Torra	
 Sesión de Comunicaciones: Teoría VI	 259
<i>Un orden total entre número graduales usado en problemas de decisión.</i>	<i>259</i>
J.A. Herencia; M.T. Lamata	
<i>Un algoritmo para reconstruir matrices recíprocas.</i>	<i>265</i>
M.T. Lamata; J.I. Peláez	
<i>Semánticas de lenguajes con datos borrosos.</i>	<i>271</i>
D. Sánchez; A. F. Gómez-Skarmeta	
<i>Función de distribución y mediana de variables aleatorias difusas.</i>	<i>279</i>
I. Couso; S. Montes; P. Gil	

Sesión de Comunicaciones: Control	285
<i>Análisis estructural de la base de reglas de un controlador difuso.</i>	<i>285</i>
P. Carmona; J.M. Zurita	
<i>An interconnected fuzzy logic controller for synchronous generator and turbine.</i>	<i>291</i>
Z. Lubosny; H. Tiliouine	
<i>Prototipado rápido de controladores borrosos dedicados orientados a cómputo.</i>	<i>297</i>
J.I. Martínez; J.P. Deschamps; M. Fernández	
<i>Estabilidad del modelo general de Takagi-Sugeno para sistemas continuos.</i>	<i>303</i>
F. Matía; B. Al-Hadithi; A. Jiménez	
<i>Validación formal de métodos de control borroso. Perspectivas.</i>	<i>309</i>
A. Sala; P. Albertos	
 Sesión de Comunicaciones: Aplicaciones II	 315
<i>Construcción de un clasificador borroso mediante programación genética basada en registros.</i>	<i>315</i>
L. Junco; L. Sánchez	
<i>Selección de variables con técnicas difuso-evolutivas en minería de datos</i>	<i>321</i>
A. F. Gómez-Skarmeta; F. Jiménez; J. Ibáñez	
<i>Circuito experimental de inferencia de Lukasiewickz.</i>	<i>327</i>
L. de Salvador; P. E. Bernad; J. Gutiérrez	
<i>Un modelo de selección para problemas de decisión con múltiples expertos e información lingüística multi-granular.</i>	<i>333</i>
F. Herrera; E. Herrera; L. Martínez	
 Sesión de Comunicaciones: Teoría VII	 339
<i>Putting together Lukasiewickz and product logics.</i>	<i>339</i>
F. Esteva; L. Godo	
<i>Characterization of revision operator defined by distances and ultrametrics.</i>	<i>347</i>
P. García; E. Giménez	
<i>Funciones de agregación localmente internas.</i>	<i>355</i>
G. Mayor; J. Martín	
<i>Subespacios vectoriales T-difusos asociados a aplicaciones lineales entre espacios vectoriales.</i>	<i>361</i>
P. Burillo; L. Garmendia; A. Salvador	

Sesión de Comunicaciones: Modelización III	367
<i>Tratamiento de información difusa en un modelo de mezcla de componentes Gaussianas.</i>	367
M.C. Garrido; J.M. Cadenas; A. Ruiz	
<i>Generación de morfologías matemáticas borrosas.</i>	373
P. Burillo; N. Frago; R. Fuentes	
<i>Adquisición automática de conocimiento basada en constructores personales y en aprendizaje automático.</i>	383
J.L. Castro; J.J. Castro-Sánchez; J.M. Zurita	
<i>Un estudio sobre la incorporación de modificadores semánticos en un algoritmo de aprendizaje de reglas difusas.</i>	391
A. González; R. Pérez	
 Sesión de Comunicaciones: Aplicaciones III	399
<i>Métodos de razonamiento aproximado basados en el concepto de mayoría difusa para sistemas de clasificación.</i>	399
O. Cordon; M.J. del Jesús; F. Herrera	
<i>Case-based decision: a characterization of preferences in a qualitative setting.</i>	405
L. Godo; A. Zapico	
<i>Semántica para segmentaciones sin clases previas, usando reglas difusas.</i>	413
J. M. Benítez; I. Requena; E. López	
<i>El método de acumulación aplicado al razonamiento numérico.</i>	419
J. Casasnovas	
 IV Jornada Sobre Transferencia de Tecnología Fuzzy	425
<i>Controlador borroso implementado en FPGA.</i>	425
G. Aranguren; M. Barrón; J. López de Arroyabe; A. Chavarría	
<i>Aproximación a la determinación de perfiles de clientes en entidades financieras utilizando técnicas fuzzy.</i>	431
A. Flores-Sintas; J. Cánovas; J. García	
<i>Desarrollo de una aplicación experimental de controladores difusos.</i>	437
C.J. Jiménez; I. Baturone; A. Barriga; S. Sánchez	
<i>Una arquitectura de agentes difusos para robots autónomos móviles.</i>	443
A. F. Gómez-Skarmeta; H. Martínez; P. García	
<i>Controlador fuzzy para la gestión de tráfico en un cruce aislado.</i>	449
J. Zabala; G. Arregi; J.P. Uribe	
 Índice alfabético de autores	457

PRESENTACIÓN

Este volumen recoge las comunicaciones y ponencias presentadas al VIII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy celebrado en la Universidad Pública de Navarra (Pamplona) durante los días 8, 9 y 10 de Septiembre de 1998.

Como en las ediciones anteriores, ESTYLF'98 quiere ser el vínculo colectivo anual bajo cuyos auspicios los estudiosos del mundo fuzzy intercambiamos personalmente ideas, opiniones, proyectos o resultados sobre nuestras investigaciones, tanto teóricas como aplicadas. Pero esta octava edición de nuestro Congreso presenta algunas peculiaridades que es conveniente mencionar: en primer lugar, y tras tres décadas de desarrollo y consolidación de la lógica fuzzy en España que han hecho de nuestro país uno de los más avanzados en cantidad y calidad de aportaciones, parecía conveniente propiciar una mirada global, retrospectiva y a la vez de futuro sobre los fundamentos y límites de nuestro objeto de conocimiento. Ha parecido oportuno incluir, pues, una sesión especial dedicada sobre todo a la reflexión.

En segundo lugar, en ESTYLF'98 participan, aproximadamente, un 23% de estudiantes. Esta satisfactoria circunstancia es una prueba fehaciente del interés que la teoría y técnicas fuzzy despiertan entre aquellos que, pese a todo, han elegido la investigación como parámetro prioritario de su desarrollo profesional.

En tercer lugar y no en último, asistimos en esta edición a la puesta de largo de la European Society for Technology and Fuzzy Logic (EUSFLAT) cuya precursora, la Asociación Española de Tecnologías y Lógica Fuzzy (FLAT), ha sido hasta ahora el marco de referencia de estos eventos anuales. La ampliación y extensión de nuestra asociación deberá aportar indudables beneficios académicos sobre todo en el aspecto de la transferencia de tecnología, que representa aún nuestra gran asignatura pendiente. Saludemos pues, expectantes, a EUSFLAT a la vez que recordemos entrañablemente a FLAT que ha sido instrumento muy valioso para esta nueva singladura.

En nombre del Comité Organizador, deseo expresar nuestro agradecimiento a FLAT y EUSFLAT por la confianza con que nos han distinguido. A cuantas personas (conferenciantes, ponentes, miembros del Comité de Programa, personal auxiliar, etc.) han contribuido con sus aportaciones, opiniones, sugerencias y ayudas al mejor desarrollo y calidad de ESTYLF'98 y a cuantas instituciones y empresas (Rectorado de la Universidad Pública de Navarra, Departamento de Educación y Cultura del Gobierno de Navarra, Ayuntamiento de Pamplona, Caja de Ahorros de Navarra) nos han apoyado.

Pedro Burillo

SISTEMAS INTELIGENTES BORROSOS. UNA VISIÓN PERSONAL

Senén Barro

Grupo de Sistemas Inteligentes. Dept. de Electrónica y Computación
Universidad de Santiago de Compostela
senen@dec.usc.es

Resumen

Este artículo trata sobre los sistemas inteligentes borrosos. En él se recogen algunas ideas personales sobre cuál es el papel que desempeña la lógica borrosa en el diseño de dichos sistemas y, en particular, en ciertos dominios para los que se preveía una aportación mucho más significativa de la que, de momento, se ha logrado. Finalmente, se nombran y comentan algunas líneas de investigación en las que es previsible obtener un avance significativo en los próximos años, que será potenciado en parte por la lógica borrosa. El trabajo ha sido escrito para promover la reflexión y discusión sobre el tema tratado y es en ese sentido donde espero que resida su principal valor.

1 INTRODUCCIÓN

Comenzaré el trabajo haciendo algunas consideraciones que me parecen importantes. En primer lugar, recordemos que la utilización usual del término "lógica borrosa" (LB) está ligada a una semántica de muy amplio espectro, que es entendida básicamente como sinónimo de todo aquello que arranca del trabajo seminal de Zadeh [32] sobre conjuntos borrosos; el mismo uso le daremos aquí. Como apunta el propio Zadeh, la principal razón de este uso extensivo tiene motivos eufónicos y aunque anteriormente haya sido entendido como un contrasentido una "lógica borrosa", hoy dicho problema está casi plenamente superado. Por otra parte, cuando nos reframos a métodos, técnicas y herramientas basadas en la teoría de conjuntos borrosos, con una clara vocación de aplicación, hablaremos también de tecnología borrosa.

No todos los sistemas borrosos han de ser considerados inteligentes, aun con la alegría con la que aplicamos dicho adjetivo a lo artificial. Normalmente se considera

asociada cierta inteligencia a un sistema, incorpore o no en su diseño lógica borrosa, cuando, por ejemplo, es capaz de aprender a través de la experiencia en el entorno en el que opera, posee una elevada autonomía y riqueza de comportamiento en dominios dinámicos y complejos, o presenta un elevado nivel de competencia en ciertas áreas del conocimiento humano. En cualquier caso, la inteligencia de un sistema ha de ser considerada como algo dinámico y relativo a otros sistemas, al menos a aquéllos que operan en su mismo ámbito de competencia. A lo largo del trabajo volveremos a tratar este punto.

Aunque con frecuencia se apunta que la LB permite solucionar problemas que serían insolubles bajo otro tipo de aproximaciones, conviene matizar lo que hay de verdad en esta expresión. Fijar altas cotas de precisión en la resolución de muchos problemas complejos puede suponer un gasto ingente, tanto de tipo económico como en tiempo de desarrollo y de computación. La precisión y el valor semántico evolucionan juntos pero en sentidos opuestos -recordemos el principio de incompatibilidad entre precisión y significado¹ enunciado por Zadeh-. Muchos problemas no requieren soluciones muy precisas y de ello sacamos ventaja las personas, que somos capaces de resolver problemas complejos si éstos admiten una descripción y tratamiento mediante pocos símbolos o datos de alto contenido semántico, aunque a menudo de significado impreciso. La LB, al igual que nosotros, explota la tolerancia frente a la imprecisión, lo que a nivel de resolución de problemas significa, sobre todo, una reducción de coste y de esfuerzo de diseño y aplicación de las soluciones aportadas. Por otra parte, la LB nos facilita el realizar valoraciones continuas y suaves del mundo real, lo que permite no renunciar a la muy valiosa información relativa al grado de ubicación de sus objetos en las clases

¹ "...as the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behaviour diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics." [34].

de discernimiento que establecemos a través del conocimiento que vamos adquiriendo de dicho mundo. En un conjunto clásico no existen mecanismos para diferenciar los elementos que se encuentran próximos a su frontera frente a aquéllos que no lo están y ésta es una información tremendamente importante en la resolución de problemas en muchos dominios de aplicación. Si se me permite la metáfora: "aunque no tengamos forma de ver el horizonte, la suavidad de la pendiente del terreno nos suele anunciar el final de la montaña".

Pocas tecnologías han experimentado un avance tan rápido y explosivo como la tecnología borrosa tras el momento en que se establecen sus fundamentos teóricos. Al margen de las cualidades intrínsecas de la LB, existen, a mi juicio, una serie de factores que han jugado a su favor [3]. Por una parte está la habilidad y el esfuerzo de algunos investigadores del campo para y por aclarar desde el principio ciertos conceptos clave derivados de la introducción de los conjuntos borrosos -resulta paradigmático, en este sentido, el caso del profesor Zadeh; pensemos, simplemente a modo de ejemplo, en el concepto de variable lingüística-, y su clarividencia al sugerir dominios y tipos de aplicación potenciales donde proyectar tales conceptos de un modo práctico². Por otra, la rápida aparición de aplicaciones en el control de procesos, un campo que comenzaba a necesitar soluciones alternativas al control analítico clásico, y su buena acogida y frenética expansión en Japón [16].

Aunque algunos investigadores creen que la evolución de la tecnología borrosa está tendiendo actualmente a una situación de estabilidad, que se corresponde con la etapa final en la evolución típica que sigue a la aparición de una nueva tecnología [8], personalmente creo que todavía vivimos un estado de sobreexpectación en relación a la tecnología borrosa, que es conveniente aprovechar pero también asimilar con cierta cautela.

²Otros dominios en los que "el primer huevo" se ha puesto bastante antes, han tenido que esperar más tiempo para verlo "eclosionar". Tal es el caso del campo de las Redes Neuronales Artificiales (RNA) en el que, no obstante, el "boom" que todavía viven se originó por factores en cierta medida semejantes. Así, la introducción de las redes de Hopfield [18], considerado como uno de los catalizadores del renacimiento de las RNA, logró en buena medida una gran transcendencia a través de la clara y detallada forma en que Hopfield expuso las principales ideas y aportaciones de su trabajo, sin perder la rigurosidad matemática. Ello permitió un inmediato contacto con las aplicaciones y con la, por aquel entonces, floreciente tecnología de los circuitos integrados, lo que originó una gran transcendencia pública de sus aportaciones.

2 ÉXITO DE LA LÓGICA BORROSA EN EL CONTROL DE PROCESOS

El desarrollo inicial de la teoría de conjuntos borrosos fue motivado en buena medida por los problemas en la clasificación de patrones y el análisis de agrupamientos (*clustering*). De ahí surgió la generalización del concepto de función característica de un conjunto, pasándose a admitir grados de pertenencia intermedios. De hecho, no fue casualidad que la primera propuesta dirigida al dominio de las aplicaciones estuviese orientada a la clasificación de patrones [7]. Sin embargo, ha sido en el ámbito del control de procesos donde se ha obtenido, con gran diferencia, la principal repercusión práctica de la lógica borrosa, sustentada en buena medida en los siguientes pilares:

- Economía: Resulta muy clarificador, en este sentido, comentar los resultados que presenta von Altrock [30] en un análisis de la experiencia de diversas empresas europeas en la realización de diseños basados en la LB. De un total de 311 empresas consultadas, prácticamente en ningún caso se utilizó la LB para reemplazar controladores PID o controladores multivariable convencionales. Por el contrario, sí reconocieron que había servido para reducir el coste del *hardware* de control y, sobre todo, el de los sensores. Mayoritariamente, también, valoraron como significativa la reducción en los costes de producción o el incremento en el valor del producto y el importante ahorro en el tiempo de diseño de éste (en general superior a un 50%). Éstas y otras consideraciones hicieron que 303 de las 311 empresas considerasen su experiencia como un éxito y se mostrasen plenamente a favor de repetirla.
- Oportunidad: el control borroso apareció como una respuesta al interés por encontrar soluciones alternativas al control analítico clásico como vía para abordar algunas aplicaciones de control de procesos.
- Robustez: la LB permite diseñar sistemas que se degradan en sus prestaciones de un modo suave a medida que se alejan de las zonas de operación usuales para las que han sido diseñados.
- Sencillez: La mayor parte de los controladores borrosos tienen un número de reglas muy reducido -abundan las soluciones que integran únicamente entre 7 y 15 reglas³ [23]- y en ellos se asumen mo-

³Fuera del ámbito de control son frecuentes las bases de conocimiento más complejas. El sistema de gestión de salud de OMRON, por ejemplo, utiliza aproximadamente 500 reglas [19].

dos de operación rudimentarios -el controlador de Mamdani y Assilian, del que hablaremos a continuación, consideraba el mínimo como operador de implicación ligado a la aplicación de una regla, algo que siguen manteniendo muchos de los controladores borrosos actuales-.

El primer controlador borroso fue desarrollado por Mamdani y Assilian [22]. En esta aplicación se resolvió un problema académico, consistente en el control de una planta compuesta de un motor de vapor y una caldera. Según los autores el controlador borroso fue obtenido a partir de un modelo interno "borroso" de dicha planta establecido por un operador humano, con dos entradas: el calor aportado a la caldera y la apertura de la válvula a la entrada del cilindro del motor, y dos salidas: la presión de vapor en la caldera y la velocidad del motor. De esta experiencia me gustaría destacar dos aspectos: 1) constituyó el punto de arranque de una vía alternativa a la teoría del control analítico, a la que se sumaron las redes neuronales y los algoritmos genéticos, en general las aproximaciones conocidas bajo el nombre de computación flexible (*soft computing*), abriendo un nuevo frente de interés y aplicación de la Inteligencia Artificial (IA) -sobre esta relación "lógica borrosa-IA" volveremos luego-; 2) Fue el trabajo de Zadeh de 1973 el que inspiró la utilización de una aproximación basada en reglas borrosas para la síntesis del controlador -de la lectura y comprensión del primero a la síntesis del segundo transcurrió únicamente una semana [23]-.

La primera aplicación industrial del control borroso fue desarrollada por la F.L. Smidth & Co.A/S, para el control de un horno de cemento -las primeras experiencias realizadas en un horno de cemento real fueron hechas a comienzos de 1978 en una cementera danesa, utilizando las reglas de control de Østergaard [25]-. De nuevo aparece el trabajo de Zadeh de 1973 como principal inspirador de la aproximación seguida, pero en este caso existe un aspecto añadido sobre el que es importante incidir: antes de los años 60 el operador de las plantas de cemento controlaba el horno de cemento mirando directamente hacia la zona de combustión, situada en el fondo del horno, así como al humo que salía por la chimenea del mismo. La posterior introducción de sensores para medir la temperatura, la presión, medidores de voltaje e intensidad de corriente, trazadores gráficos, alarmas y otros indicadores, y su disposición en una sala de control central, no sólo facilitó enormemente la labor del operador humano sino que condujo a la idea de implementar una estrategia de control basada en una descripción grosera del proceso de control manual. Esta estrategia se proyectó en una tabla de decisión que establecía el incremento de combustible para alimentar el horno en función de

dos variables de estado del proceso [17]. La incorporación de la LB sirvió con posterioridad para acomodar mejor la estrategia de decisión al modo de operación humano -recordemos el comentario anterior sobre la "oportunidad" del control borroso-.

El comentario anterior debe hacernos reflexionar sobre cómo los sistemas de medida e instrumentación han ido cambiando los hábitos humanos de análisis, monitorización, modelado y control de procesos, tanto naturales como artificiales, facilitando, con la ayuda de las adecuadas herramientas teóricas, metodológicas y de diseño, la consecución de sistemas que mimetizan en alto grado dichos hábitos. La LB, por su parte, aproxima el ámbito de la computación a los modelos cognitivos -propósito original de la LB, aunque a menudo se olvide- y de comportamiento humano. Ambos factores, tirando en sentidos opuestos, permiten la creación de puntos de encuentro. El caso paradigmático a día de hoy es el control borroso, aunque este proceso puede ir haciéndose extensivo a muchos otros ámbitos y dominios de aplicación.

Debemos recordar que la teoría de sistemas y, en general, la física, se ha visto impulsada por el aumento en la capacidad de "medir". Pero lo mismo que existen barreras a la capacidad de medir en física (pensemos si no en el principio de incertidumbre de Heisenberg) también existen limitaciones, aunque de otro tipo, en cuanto a la capacidad de nuestros sentidos y nuestro cerebro por discriminar, almacenar y manejar información. Por ello, nos vemos obligados a establecer gránulos [37], caracterizados por atributos ligados a los conceptos de proximidad, tanto a nivel espacial como temporal, de funcionalidad, de homogeneidad o de similitud. Cuando estos atributos se pueden "medir" de algún modo, estamos facilitando su proyección y manipulación computacional. Sin embargo, el carácter borroso que en general presentan dichos conceptos a nivel humano, conlleva el carácter borroso de dichos gránulos, y es aquí donde entra en juego la lógica borrosa.

3 ADECUACIÓN A OTROS DOMINIOS DE APLICACIÓN

Con frecuencia se insiste en que existen dominios de aplicación para la LB más prometedores que aquellos en los que hasta ahora ha alcanzado su mayor repercusión, tal es el caso de las ciencias sociales o de las ciencias de la vida. El profesor Zadeh así lo ha manifestado en reiteradas ocasiones a lo largo del tiempo. Sirvan las siguientes a modo de ejemplo:

"Indeed, the complexity of biological systems may force us to alter in radical ways our traditional ap-

proaches to the analysis of such systems. Thus, we may have to accept as unavoidable a substantial degree of fuzziness in the description of the behavior of biological systems as well as in their characterization. This fuzziness, distasteful though it may be, is the price we have to pay for the ineffectiveness of precise mathematical techniques in dealing with systems comprising a very large number of interacting elements or involving a large number of variables in their decision trees" [33].

"By relying on the use of linguistic variables and fuzzy algorithms, ..., its main applications lie in economics, management science, artificial intelligence, psychology, linguistics, information retrieval, medicine, biology, and other fields in which the dominant role is played by the animate rather than inanimate behaviour of system constituents" [34].

"... *humanistic systems* are typified by socioeconomic systems, transportation systems, environmental control systems, food production systems, education systems, health care-delivery systems, criminal justice systems, information dissemination systems, and the like ... The systems theory of the future -the systems theory that will be applicable to the analysis of humanistic systems- is certain to be quite different in spirit as well as in substance from systems theory as we know it today. I will take the liberty of referring to it as *fuzzy systems theory*" (L. A. Zadeh 1982).

Aunque la lógica y la tecnología borrosas han producido ya muchos e importantes resultados de índole práctica en los dominios citados, existe un acuerdo casi generalizado de que todavía no se ha llegado a obtener la repercusión esperada. Siendo evidente que muchas de las aplicaciones de interés en dichos dominios presentan un nivel de complejidad muy alto, lo que pone dificultades no a ésta sino a cualquier otra aproximación que se adopte, ¿de dónde viene el "papel especial" que auguramos a la tecnología borrosa en estos campos?

La LB permite manejar de un modo natural el parecido, la posibilidad y la preferencia, así como su graduación. Estas "tres pes", las dos primeras conocidas más frecuentemente como similitud e imprecisión [12, 13], son conceptos que pueden ser asociados al uso de los conjuntos borrosos desde un punto de vista eminentemente pragmático. El concepto de similitud está íntimamente ligado a la idea de carácter prototípico de un elemento en relación a un conjunto (borroso)

-como ocurre cuando valoramos el grado de satisfacción o cumplimiento de la parte antecedente de una regla: "si la tensión arterial es alta entonces ..." - y entronca directamente con las aplicaciones desarrolladas en procesos de clasificación y con los controladores borrosos. El concepto de imprecisión está relacionado con la idea de distribución de posibilidad -como ocurre cuando afirmamos: "la tensión arterial es alta"-, y es la base del razonamiento aproximado. Finalmente, el concepto de preferencia hace referencia a las soluciones aceptables de una restricción que ha de ser satisfecha -como ocurre cuando hacemos una consulta del tipo: "dame los instantes en los que la tensión arterial ha sido alta"-, siendo el soporte de los procesos de optimización. Este triple enfoque es particularmente interesante en aquellas tareas modeladas a través de lo que puede "ser dicho por" un humano o cuyo resultado debe "ser dicho a" un humano. En cualquier caso, sea en procesos de clarificación (abstracción y estructuración), de recuperación o de explotación de la información, estas distintas formas de manejar conceptualmente los conjuntos borrosos sirven principalmente a procesos que tratan de mimetizar el comportamiento, el conocimiento y la comunicación en las personas, y es en este sentido donde cabe esperar que se encuentren las aplicaciones más genuinas de la lógica borrosa.

Por otra parte, la inmensa mayoría de las aplicaciones actuales de la LB están basadas, aunque a menudo de un modo implícito, en el uso del denominado cálculo de reglas borrosas, operando como un pseudo-lenguaje para la síntesis computacional de modos de operación humanos expresados lingüísticamente. Por supuesto existen muchas más técnicas de interés práctico en el amplio contexto de la LB, pero son las variables lingüísticas y las reglas borrosas, junto con los grafos borrosos, los que juegan un papel clave en lo que en un sentido amplio podemos denominar "computación con palabras" [36] -cuyo punto de partida es la observación de que en un lenguaje natural las palabras juegan el papel de etiquetas de gránulos borrosos [37]- y éste es el eje fundamental de la tecnología borrosa.

Como ya hemos comentado, la introducción de sistemas de medida e instrumentación ha ido cambiando el tipo de información en el que se sustenta el análisis, la monitorización y el control humanos de sistemas complejos. Esto ha favorecido, por otra parte, el que el conocimiento y el "modus operandi" del humano puedan ser formulados de un modo más concreto y comprensible, facilitando el desarrollo de sistemas a través de enfoques de tipo antropomimético -volvemos a reiterar que es en este sentido en el que la LB se muestra como una herramienta de especial utilidad-. Sin embargo, este hecho está ocurriendo de modo desigual en aquellos dominios a los que nos referíamos al principio de este apartado. Así, resulta notable en el caso de la

medicina [4] y la economía⁴, pero es mucho más tenue en las ciencias sociales, la lingüística o la psicología, por ejemplo. En estos últimos dominios la información involucrada en la resolución de los problemas que en ellos se plantean es, por tanto, más difícil de manejar desde la perspectiva computacional, al carecer, en general, de formas de medida de tipo cuantitativo. Aunque ello no deja de ser un inconveniente importante, debemos decir en favor de los conjuntos borrosos que si bien su origen y su uso tienen una marcada relación con universos de discurso de tipo numérico, donde podemos explotar, por ejemplo, la potencialidad de la aritmética borrosa, para su definición es suficiente disponer de un conjunto ordenado que no necesariamente ha de ser numérico.

4 ALGUNOS PROBLEMAS Y PROPUESTAS

Las aplicaciones reales de la LB que resultan ciertamente novedosas y complejas no abundan en las revistas y congresos del "ramo". Un comentario de Zimmermann [38], aunque en su caso particularizado fundamentalmente a aplicaciones industriales, puede entenderse en el marco de ciertas justificaciones que podemos denominar de "corte optimista":

"Practitioners normally are not writers. Their objective function calls for solving problems with techniques that are as safe, as inexpensive, and as efficient as possible, not for the publication of a new approach. In addition, attractive real-world applications are rather complex when explained in detail. Therefore, such applications are not necessarily suited for publication in a journal. Furthermore, competitive considerations often prevent the publication of attractive applications before the patenting of novel technology used in the application."

A esta consideración creo que habría que añadir el hecho de que algunos de los resultados más valiosos son publicados en lugares propios del dominio de aplicación al que se dirigen (revistas de las distintas ramas de la ingeniería, por ejemplo, y menos frecuentemente de la medicina o la economía) y no en aquellos usuales para la publicación de resultados relativos a la LB. En cualquier caso, me temo que actualmente existe una cierta atonía en el ámbito de la tecnología borrosa, tal

⁴Simplemente a modo de ilustración diremos que existen índices para medir la corrupción de un país, basados en una valoración de la percepción que se tiene de ella. Uno de los más famosos, el *Transparency International*, de Berlín, sitúa a España con un valor de 5.9 en una escala de 0 a 10 [15].

como se refleja por el reducido nivel de aportaciones realmente originales en los foros usuales de presentación y discusión de resultados -como contraposición a la anterior, podríamos decir de esta justificación que es de "corte pesimista"-.

En el terreno de las aportaciones teóricas, mi opinión es que muchos trabajos publicados resultan ser buenos ejercicios desde un punto de vista matemático, pero no aportan, o al menos no lo hacen de una forma suficientemente diáfana, conceptos novedosos y trascendentes. Por supuesto los trabajos netamente teóricos no son negativos *per se*, pero carecen con demasiada frecuencia de aportaciones que trasciendan al mero desarrollo matemático, lo que puede causar cierta confusión en quienes se aproximan al campo en busca de nuevas vías de solución a sus problemas o de inspiración para el avance en las metodologías y los útiles para construir dichas soluciones. Recogiendo palabras de Dubois y Prade [12]:

"there exists a very nice and mathematically sound framework for combining fuzzy sets, but it is often presented without casting it into an interpretative framework."

Por otra parte, existe una tendencia casi obsesiva a tomar cualquier concepto preciso (C), sea éste abstracto o concreto, y hacerlo borroso (C borroso), dejando a un lado la reflexión relativa a su sentido o utilidad directa o potencial -no debemos olvidar que en buena medida la LB ha de reflejar el discurso humano, por lo que los aspectos semánticos deberían cobrar un valor más importante que los algebraicos o matemáticos, en general-. Se toma como si fuese un reto o una moda el *borrosificarlo* todo. Parece que se está repitiendo la época que algunos de los investigadores de la Inteligencia Artificial (IA) conocen como "Mira, mamá, ahora sin manos", ilustrando de este modo tan expresivo la respuesta que los investigadores de la IA daban a aquellos que decían que "una máquina nunca podrá hacer X", y que consistía en realizar una X tras otra. En el ámbito de las aplicaciones ocurre un fenómeno similar, aunque quizás no tan intenso. En un intento de resumir dicho fenómeno, diríamos que el reto se transforma en mejorar por n-ésima vez el control del péndulo invertido.

Aunque cada vez menos, todavía la LB está denostada entre una parte de los investigadores e ingenieros que trabajan en el diseño e implementación de sistemas inteligentes, de tal modo que muchos excluyen completamente su utilización. Curiosamente, también se da el fenómeno inverso, representado por aquéllos que se ponen "gafas fuzzy" e intentan abordarlo todo bajo esta perspectiva. Conviene recordar en este sentido una

frase que Zadeh repite a menudo, aunque él lo haga con una intención bien distinta, y que dice más o menos así: "al que sólo tiene un martillo todo le parecen clavos". Debemos ser conscientes de que en muchos casos la LB puede no ser la mejor opción de diseño. Además, en la mayor parte de las aplicaciones complejas no resultará recomendable abordar una solución que se estructure en base a la utilización en exclusiva de la LB. El famoso helicóptero de Sugeno, cuyo diseño descansa, prácticamente en su totalidad, sobre la LB, posee un valor excepcional como demostrador de la flexibilidad y potencialidad de la LB. Desde un punto de vista práctico, sin embargo, los proyectos complejos necesitan combinar diversas aproximaciones de diseño, basadas en arquitecturas heterogéneas e híbridas.

La práctica totalidad de las herramientas *software* para el diseño de sistemas borrosos [11, 27] difieren en su interacción con el usuario -edición de reglas, posibilidades de análisis y depuración de la base de conocimiento, etc.- o en cuanto al sistema que ha de soportar la aplicación -admitiendo la generación de código fuente o de código ensamblador, por ejemplo- pero siguen básicamente el mismo modelo de representación del conocimiento y razonamiento de los primeros controladores borrosos. Se necesitan herramientas mucho más sofisticadas y potentes, que pongan énfasis en una mayor flexibilidad y expresividad en la representación del conocimiento borroso [28], en los mecanismos de razonamiento empleados -es ampliamente reconocida, por ejemplo, la excelente adecuación de la LB al razonamiento basado en casos [12, 31]- o en la integración con otras estrategias de diseño de sistemas (redes neuronales, algoritmos genéticos, etc.). Evidentemente el desarrollo de estas herramientas informáticas demanda aportaciones teóricas y metodológicas que les den soporte -las aplicaciones en campos ajenos a las ingenierías necesitan de mecanismos de expresión de "conocimiento macroscópico", utilizando la nomenclatura de Terano [29]-, pero curiosamente se está invirtiendo poco esfuerzo en ello, mientras que, por ejemplo, el diseño de *hardware* ad-hoc para la ejecución de sistemas borrosos está distrayendo numerosos esfuerzos humanos y recursos materiales, a pesar de que a día de hoy este hecho es difícilmente justificable desde el punto de vista de su rentabilidad final. Aunque la disponibilidad de dicho *hardware* puede eliminar los problemas derivados del peso de la ejecución de un sistema borroso en aplicaciones complejas que tengan fuertes exigencias en cuanto a la reducción del tiempo de respuesta, el enorme avance en las prestaciones del *hardware* de propósito más general (tal es el caso de los microcontroladores, ampliamente utilizados en las aplicaciones de control borroso), está permitiendo en la mayoría de los casos desestimar el tiempo de ejecución como un condicionante importante del proceso de

diseño e implementación de sistemas borrosos.

Finalmente, me gustaría apuntar el protagonismo que creo que ha de tener la LB en el modelado de mecanismos eficientes de síntesis del razonamiento común, algo crucial para el diseño de sistemas inteligentes, sobre todo si pensamos en aplicaciones enmarcadas en los dominios comentados en el apartado anterior. La LB resulta suficientemente formal y flexible a la vez, como para ser una piedra angular en el tratamiento del sentido común. Existen dos ejes principales en la conformación del "Sentido Común" (SC): el "Conocimiento Común" (CC) y el "Razonamiento Común" (RC). De este modo, la que podemos denominar como ecuación del sentido común, $SC=CC+RC$, toma por un lado la contribución del conocimiento de índole eminentemente práctica, utilizado por las personas en muchas de las situaciones reales y frecuentes con las que se enfrentan, y cuya consideración es principalmente un problema cuantitativo (enormes bases de conocimiento, dependientes, en todo caso, de las experiencias más comunes, de aspectos culturales, sociales o, incluso, de dogmas de fe). Por otra parte, recibe la aportación del razonamiento práctico que emplean las personas cuando se enfrentan con problemas de la vida real, y cuya consideración tiene una componente fundamentalmente cualitativa (soportada por múltiples habilidades, estrategias y criterios de razonamiento, combinando razonamiento lógico, comparación con patrones, reglas nemónicas, etc.). El razonamiento humano está plagado de aspectos propios de este razonamiento común, que no encajan, ni mucho menos, bajo un único modelo de razonamiento, lo que, sin embargo, no es asumido en la inmensa mayoría de los sistemas desarrollados. La LB puede resultar de gran ayuda en este sentido, dada su adecuación para tratar con la semántica propia de la representación, comparación, restricción, comprensión, extensión, generalización, o particularización de conceptos, tal como hacemos los seres humanos. En este sentido, la LB nos aporta ya un buen conjunto de herramientas conceptuales, metodológicas y de diseño para tratar con formas propias del razonamiento común: variable lingüística, cuantificación borrosa, *borrosificación* y *desborrosificación*, modificación de predicados, cualificación veritativa, principio de extensión, regla composicional de inferencia, razonamiento interpolativo, etc. Es el caso también del concepto de restricción generalizada, punto de partida en la teoría de la "granularización de información borrosa"; del mismo modo que existen múltiples tipos de restricciones (relacionadas con valores de posibilidad, de verdad, de probabilidad, etc. [37]), capaces de acomodarse a la representación de conceptos y a la pluralidad semántica propias del mundo real y del lenguaje natural, existen también mecanismos de transformación de dichas restricciones que pueden ser

considerados a modo de repertorio de procesos de razonamiento, y que conforman, tal como se ha dicho, una de las piezas fundamentales del sentido común.

5 ALGUNAS APLICACIONES PARA EL PRESENTE Y EL FUTURO

En general, creo que todavía no hemos asistido a la necesaria inmersión de la LB en la Inteligencia Artificial (IA). De momento la LB ha creado un nicho propio de desarrollo, sobre todo en lo que a sus aplicaciones se refiere, y éste ha sido simplemente anexionado a la IA, con lo que ésta ha llegado a tener presencia en ámbitos y aplicaciones donde hasta ahora no la tenía, al menos no de un modo destacado (hablamos de la electrónica de consumo, o como ya hemos comentado, del control de procesos). A ello ha contribuido, no obstante, el conjunto de metodologías y técnicas que se agrupan bajo el nombre de computación flexible (*soft-computing*) y no sólo la LB.

Casi a modo de enumeración y más en un intento de promover la reflexión que de apuntar ideas originales, pasaremos a comentar algunos dominios de aplicación en los que la lógica y la tecnología borrosas pueden tener un especial protagonismo en los próximos años. La elección de dichos dominios, entre muchos otros en los que a buen seguro se producirá una incidencia significativa de la LB, responde fundamentalmente al interés del autor. Es más, en algunos casos se corresponden con líneas propias de investigación en curso o en la "recámara".

Sistemas Médicos Inteligentes para el Hogar, o HIMS (de *Home Intelligent Medical Systems*, [4]). HIMS pone nombre a una predicción personal. Se trataría de una nueva gama de productos orientados a la asistencia médica personalizada y en el hogar, diseñados para asumir parcelas concretas del seguimiento médico de las personas. Lo mismo que hoy un sinnúmero de electrodomésticos son imprescindibles en la realización de múltiples tareas de cuidado del hogar, los HIMS lo serán en el cuidado de nuestra salud en el hogar. Actualmente ya existen algunos dispositivos médicos de uso particular, siendo quizá el más conocido el tensímetro. Sin embargo, su Coeficiente de Inteligencia en Máquinas (CIM) -utilizando la expresión introducida por el Prof. Zadeh [35]: "Machine Intelligence Quotient, o MIQ"- es prácticamente nulo. El valor de sus medidas es escasamente informativo para aquellas personas legas en los aspectos médicos relativos a la tensión arterial. Dicho valor, y por ende su CIM, aumentaría sensiblemente sólo con "trasladar" al sistema parte del conocimiento médico de valoración de la presión arterial que existe hoy día y que es compar-

tido por muchas personas relacionadas con el mundo de la medicina. Las razones que pueden darse para pensar que la LB pueda tener un papel importante en el desarrollo de los HIMSs, de concretarse éstos, son análogas a las que pueden darse para el marco más general de los sistemas médicos inteligentes, reforzadas por otras características más singulares, como la necesidad de que sean dispositivos de bajo coste de desarrollo, que no han de buscar la optimización del diagnóstico aunque han de ser muy cautos en sus recomendaciones, y cuya interacción con el usuario ha de tender al lenguaje natural. Además, serán sistemas básicamente autónomos, por lo que, aunque sea en una muy estrecha parcela de competencia, tendrán que llegar al nivel de eficacia y elocuencia del médico.

Domótica. Al igual que los HIMS en el dominio médico, muchos electrodomésticos e instrumentación propia del hogar alcanzarán niveles de competencia cada vez mayores -quién sabe, quizás podamos llegar a ese "sofisticado tostador" que pone Panigrahi [26] en boca de un consejero, científico de la computación para más señas, de un hipotético rey, y cuya sofisticación y, sobre todo, sus requerimientos en cuanto a *software* y *hardware*, le hicieron perder la cabeza, y no precisamente en sentido figurado-. Este objetivo hace algún tiempo que se persigue. No olvidemos que la idea que originó la propuesta del lenguaje Java fue la de permitir a los electrodomésticos el "dialogar" y ser programados en cuanto a sus funciones de un modo muy flexible, aunque ahora Java haya asumido un protagonismo muy superior fuera de sus objetivos originales. Sea sobre Java o no, casi con toda seguridad la LB seguirá siendo una pieza clave en el aumento progresivo de la inteligencia de estas máquinas.

Recuperación de información multimedia en Web. Cada vez sufrimos más la falta de flexibilidad e inteligencia de los buscadores de información en Web, a pesar de su innegable utilidad. En las búsquedas comunes solemos recibir poca información valiosa y enmarañada en una ingente propuesta de lugares de interés con una priorización inadecuada. Estamos lejos no ya de poder utilizar el lenguaje natural en la especificación de nuestras consultas sino de hacerlo mediante lenguajes artificiales que, aunque limitados, nos permitan a la vez flexibilidad y concreción suficientes como para describir lo que estamos buscando. Para ello se necesita manejar adecuadamente la imprecisión semántica y la dependencia contextual de muchos términos, la identificación de imágenes y sonidos con descripciones lingüísticas, etc. En definitiva, es necesario avanzar más en la comparación y computación con palabras y, de nuevo, la LB nos puede echar una mano en este sentido [20, 21].

Aprendizaje. Si la LB facilita "escribir soluciones", el

aprendizaje sobre un soporte basado en LB facilita el "leer soluciones". En ambos casos nos estamos acercando al experto en el dominio, al diseñador del sistema y al usuario del mismo. En los últimos años ha habido un importante avance en técnicas de aprendizaje subsimbólico (redes neuronales, algoritmos genéticos, aprendizaje por refuerzo, ...). Es innegable la utilidad de estos métodos en la resolución de múltiples problemas prácticos en los más variados dominios, pero el propio soporte subsimbólico en el que se proyecta lo aprendido pone dificultades a su interpretación, explicación y reutilización. Por otra parte, el mundo real, y así los "mundos" con los que se topan los procesos de aprendizaje, suelen presentar fronteras mal definidas en sus clases, no linealidad en su comportamiento, una gran complejidad tanto estructural como funcional, que demanda su simplificación para su posible manejo, etc. El aprendizaje, por tanto, debe desembocar en conocimiento capaz de "reproducir" estos aspectos. Las técnicas de computación flexible, y entre ellas la LB, son capaces de hacerlo, al menos parcialmente.

Paradigmas de representación del conocimiento. El campo de la IA ha dado lugar a múltiples paradigmas de representación del conocimiento humano, en un intento de abordar desde el dominio de la computación aquellos problemas y aplicaciones que demandan la representación y manipulación de conocimiento explícito. A pesar de que la LB puede aportar a todos ellos una perspectiva más flexible [31], hasta el momento sólo ha tenido una incidencia notable en la generalización de las reglas condicionales y la propagación de restricciones, incluidas algunas extensiones al razonamiento temporal [1, 9, 10].

Percepción sobre señales. Existen varios aspectos constitutivos a la abstracción sobre señales que se benefician especialmente de una aproximación basada en LB. Tal es el caso de la conversión numérico-simbólica de los datos, su valoración contexto-dependiente, la fusión sensorial o la descripción y detección de eventos complejos, como los perfiles temporales [14], que describen formas de interés en la evolución de las señales a lo largo del tiempo. La percepción sobre señales tiene una gran utilidad en numerosos dominios de aplicación, que a su vez experimentarán un progreso significativo en los próximos años, tal es el caso de la robótica o los sensores inteligentes [24].

Interacción inteligente. No diremos nada nuevo si resaltamos la importancia de la interacción entre personas y sistemas. A este nivel la LB aporta, sobre todo, expresividad para capturar información y el conocimiento del usuario, y para suministrarle la información resultante del procesamiento de la información de entrada según el conocimiento disponible por el sistema. En este sentido su utilidad resalta como elemento

de reducción de la carga cognitiva del usuario durante el proceso de interacción con el sistema. La posibilidad de disponer de una capacidad de diálogo próxima al lenguaje natural y su posible consecución con ayuda de la LB está quizás en la mente de todos, pero se ve como todavía lejana. Sin embargo, existen otros soportes de interacción que aún siendo mucho más simples, resultan muy potentes en cuanto a su legibilidad y carga semántica, a la vez que adecuados a ciertos dominios de aplicación. A modo de ejemplo podemos citar los "perfilogramas" empleados por Becker *et al.* [6], y que muestran la evolución de las variables que indican el estado hemodinámico de pacientes monitorizados en unidades hospitalarias.

6 CONCLUSIONES

Actualmente asistimos a una sobretecnología en el campo de la información y las comunicaciones, que afecta prácticamente a todos los dominios de aplicación. Así, la mejora de los sistemas va fundamentalmente de la mano de los avances en el *hardware*. Sin embargo, es poco probable que esta situación se mantenga indefinidamente, mientras que la introducción de más inteligencia, a través de las tecnologías del conocimiento, o "know-ware", irá tomando un protagonismo creciente como motor para el diseño de sistemas más y más complejos y con una mayor competencia en sus dominios de operación. En este marco de afianzamiento de las tecnologías del conocimiento, la LB tendrá, ya lo está teniendo, un papel destacado. De hecho, si definiésemos de un modo concreto cómo obtener el coeficiente de inteligencia de una máquina (CIM)⁵ y lo calculásemos para algunos ejemplos de máquinas bien conocidas y populares en la actualidad (cámaras de vídeo, lavadoras, sistemas de aire acondicionado, etc.), resultaría que muchas de aquellas que poseen un CIM mayor integran "inteligencia borrosa". Sin embargo, debemos tener muy presente que el significado del adjetivo inteligente, sobre todo cuando se aplica a una máquina, ha de ser dinámico. En un principio casi cualquier sistema basado en un microcontrolador se tildaba inmediatamente de inteligente. Hoy somos más exigentes y ni siquiera la lavadora que elige de un modo autónomo el programa de secado según el agua y el tipo y suciedad de la ropa nos parece ahora muy

⁵Estableciendo un paralelismo con el modo en que se mide el coeficiente de inteligencia humano, de forma relativa entre la edad intelectual y la cronológica en los jóvenes y en comparación con el resto de la población en los adultos, en las máquinas podríamos también aportar su CIM estableciendo sus aptitudes frente a una serie de pruebas, evidentemente orientadas a aquellas parcelas de comportamiento para las que se haya diseñado cada máquina concreta, aportando los resultados de un modo relativo a los obtenidos por otras máquinas orientadas al mismo ámbito de operación [5].

inteligente. Por lo tanto, no debemos esperar que las soluciones actuales en el ámbito del control borroso nos aporten un incremento ilimitado en la inteligencia de nuestras máquinas.

Aunque no puede considerarse a la LB como panacea de ningún dominio de aplicación, no cabe duda que resulta fundamental como herramienta teórica, metodológica y de diseño en aquellas aplicaciones en las que no se dispone de información o conocimiento preciso. Es más, aunque pudiésemos llegar a obtenerlo, debemos insistir en que la precisión va indisolublemente ligada a un incremento de coste. Como muy bien indica Zadeh [37], la LB representa su mejor papel cuando se puede tomar ventaja de la tolerancia a la imprecisión, la incertidumbre y la verdad parcial, logrando robustez, un bajo coste de la solución y una mejor adecuación a la realidad. Añadido a esto, la posibilidad de tratar muchos problemas partiendo de un cierto grado de mimetismo en cuanto al conocimiento y/o al modo de resolución de problemas de los humanos, confiere un importante valor añadido a la LB. En este sentido existe todavía una fuerte necesidad de aportaciones y herramientas teóricas y metodológicas que nos permitan la representación y manipulación del conocimiento mediante formas más flexibles y expresivas, lo que debe ir acompañado de una mayor heterogeneidad de perspectivas y planteamientos en el diseño de sistemas inteligentes. El diseño de un controlador puede enfocarse únicamente mediante la LB, pero muy difícilmente un sistema de supervisión de pacientes, la monitorización de una central nuclear o el control completo de un helicóptero.

Al igual que ocurre con las teorías de la física, que antes o después se muestran insuficientes, demasiado simplificadoras de la realidad, erróneas en ciertas suposiciones o, simplemente, son desplazadas por nuevas y mejores teorías, también puede ocurrir con las teorías matemáticas y las más propias del ámbito de la computación, con la salvedad de que el objeto de estudio y de investigación de éstas no sea el denominado "mundo real". ¿Qué persiste de tales teorías cuando esto sucede? En algunos casos sólo el recuerdo para la historia de la ciencia, en otros el reconocimiento de haber servido como puente entre lo todavía anterior a ellas y el presente. Muchas veces, sin embargo, el poso es más concreto, y de él forman parte los avances tecnológicos que han sido posibles a partir de dicha teoría, aún siendo ésta imperfecta, incompleta o simplificadora de la "realidad" que estudia. Es posible que la lógica borrosa acabe transformándose, refundándose, reconvirtiéndose o siendo absorbida por una nueva teoría, pero mientras tanto la tecnología borrosa está haciendo nuestra vida mejor, y para que siga siendo así, debemos tener presente que la LB no ha de cambiar nuestra forma de pensar, sino la de las

máquinas [2].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Xunta de Galicia y por la Comisión Interministerial para la Ciencia y la Tecnología (CICYT), a través de los proyectos de investigación XUGA20608B97 y TIC95-0604, respectivamente.

Al profesor Lotfi A. Zadeh, de la Universidad de California en Berkeley, quiero agradecerle la cálida acogida y su valiosa ayuda durante mi estancia en dicha universidad (a través de la financiación del Ministerio de Educación y Cultura), en donde maduraron parte de las ideas recogidas en este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer a A. Bugarín, P. Carriena, P. Félix y A. Sobrino sus oportunos comentarios al contenido del trabajo.

Referencias

- [1] S. Barro, R. Marín, J. Mira y A.R. Patón (1994). A model and a language for the fuzzy representation and handling of time. *Fuzzy Sets and Systems*, **61**, pp. 153-175.
- [2] S. Barro (1995). "La lógica borrosa no cambia nuestra forma de pensar, sino la de las máquinas". *El Correo Gallego*, Suplemento de Ciencia y Tecnología, 17 de diciembre de 1995.
- [3] S. Barro y A. Bugarín (1996). ¿Cuáles son las aplicaciones de la lógica borrosa?. *THEORIA*, **11**, 27, pp. 149-161.
- [4] S. Barro (1998a). A call for a stronger role for fuzzy logic in medicine. *Informe interno*. GSI-USC/1998-03.
- [5] S. Barro (1998b). "El coeficiente de inteligencia de las máquinas". *El Correo Gallego*, Suplemento de Ciencia y Tecnología. Pendiente de publicación.
- [6] K. Becker, B. Thull *et al.* (1997). Design and validation of an intelligent patient monitoring and alarm system based on a fuzzy logic process model. *Artificial Intelligence in Medicine*, **11**, pp. 33-53.
- [7] R. Bellman, R. Kalaba y L.A. Zadeh (1966). Abstraction and pattern classification. *J. Math. Anal. Appl.*, **13**, pp. 1-7.
- [8] J. Bezdek (1993). Fuzzy Models: What Are They, and Why?. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, **1**, 1, pp. 1-6.

- [9] M.A. Cárdenas, R. Marín, I. Navarrete (1998). Fuzzy Temporal Constraint Logic: A Valid Resolution Principle. *Fuzzy Sets and Systems*. Envia-do.
- [10] P. Cariñena, A. Bugarín, S. Fraga y S. Barro (1998). Enhanced fuzzy temporal rules and their projection onto fuzzy Petri nets. *International Journal on Intelligent Systems*. Número especial: "Fuzzy Petri Nets". James F. Peters (Ed.). En prensa.
- [11] S. Chiu (1995). Software tools for fuzzy control. En: *Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, J. Yen, R. Langari y L.A. Zadeh (Eds.). IEEE Press, Cap. 15, pp. 313-334.
- [12] D. Dubois y H. Prade (1997). The three semantics of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 90, pp. 141-150.
- [13] D. Dubois y R.R. Yager (1997). A Manifesto: Fuzzy Information Engineering. En: *Fuzzy Information Engineering. A Guided Tour of Applications*, D. Dubois, H. Prade y R.R. Yager (Eds.), pp. 1-8.
- [14] P. Félix, S. Fraga y S. Barro (1998). Trend detection based on a fuzzy temporal profile model. *EIS'98*, Tenerife, Spain, ICSC Academic Press, pp. 134-140.
- [15] S. Gallego-Díaz (1998). "Todo el mundo sabe qué es un elefante". *El País*, 30 de junio de 1998.
- [16] K. Hirota (1995). History of Industrial Applications of Fuzzy Logic in Japan. En: *Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, J. Yen, R. Langari y L.A. Zadeh (Eds.). IEEE Press, Cap. 2, pp. 43-54.
- [17] L.P. Holmblad y J.J. Østergaard (1997). The Progression of the First Fuzzy Logic Control Application. En: *Fuzzy Information Engineering. A Guided Tour of Applications*. D. Dubois, H. Prade y R.R. Yager (Eds.). John Wiley & Sons, Cap. 22, pp. 343-356.
- [18] J.J. Hopfield (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. of the National Academy of Sciences*, Vol. 79, pp. 2554-2558.
- [19] S. Isaka (1995). Fuzzy Logic Applications at OMRON Corporation. En: *Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, J. Yen, R. Langari y L.A. Zadeh (Eds.). IEEE Press, Cap. 3, pp. 55-67.
- [20] Y. Isomoto, K. Yoshine, N. Ishii y H. Nakatani (1997). Data Model and Fuzzy Information Retrieval for Scenic Image Database: Traditional Crisp Model to Fuzzy Model. En: *Fuzzy Information Engineering. A Guided Tour of Applications*. D. Dubois, H. Prade y R.R. Yager (Eds.). John Wiley & Sons, Cap. 18, pp. 283-289.
- [21] H.L. Larsen y R.R. Yager (1997). Query Fuzzification for Internet Information Retrieval. En: *Fuzzy Information Engineering. A Guided Tour of Applications*. D. Dubois, H. Prade y R.R. Yager (Eds.). John Wiley & Sons, Cap. 19, pp. 291-310.
- [22] E.H. Mamdani y S. Assilian (1975). An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller. *Int. J. Man-Machine Studies*, Vol. 7, pp. 1-13.
- [23] E.H. Mamdani (1994). Twenty years of Fuzzy Control: Experiences Gained and Lessons Learnt. En: *Fuzzy Logic Technology and Applications*, Robert J. Marks II (Ed.), IEEE Technical Activities Board, pp. 19-24.
- [24] G. Mauris, E. Benoit y L. Foulloy (1997). Fuzzy Sensors: An Overview. En: *Fuzzy Information Engineering. A Guided Tour of Applications*, D. Dubois, H. Prade y R.R. Yager (Eds.), pp. 13-30.
- [25] J.J. Østergaard (1977). Fuzzy Logic Control of a Heat Exchanger Process. En: *Fuzzy Automata and Decision Processes*, M.M. Gupta et al., (Eds.). North Holland.
- [26] S. Panigrahi (1998). Making a toaster fit for a king. *IEEE The Institute*, 22, 4, p. 12.
- [27] M. Schneider, A. Kandel, G. Langholz y G. Chew (1996). *Fuzzy Expert System Tools*. John Wiley & Sons.
- [28] S. Tano (1994). Fuzzy Expert System Shell -LIFE FEShell. En: *Applied Research in Fuzzy Technology*, A.L. Ralescu (Ed.), Kluwer Academic Publishers, Cap. 9, pp. 371-400.
- [29] T. Terano (1994). Future Vision of Fuzzy Engineering. En: *Applied Research in Fuzzy Technology*, A.L. Ralescu (Ed.), Kluwer Academic Publishers, Cap. 1, pp. 1-15.
- [30] C. von Altrock (1995). Fuzzy logic applications in Europe. En: *Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, J. Yen, R. Langari y L.A. Zadeh (Eds.). IEEE Press, Cap. 14, pp. 277-310.
- [31] R.R. Yager (1997). Fuzzy logics and artificial intelligence. *Fuzzy Sets and Systems*, 90, pp. 193-198.

- [32] L.A. Zadeh (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, pp. 338-353.
- [33] L.A. Zadeh (1969). Biological application of the theory of fuzzy sets and systems. En: *Proc. Int. Symp. Biocybernetics of the Central Nervous System*, Little, Brown & Co., Boston, pp. 199-212.
- [34] L.A. Zadeh (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions of Systems, Man, and Cybernetics*, **3**, pp. 28-44.
- [35] L.A. Zadeh (1994). Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing. *Communications of the ACM*, **37**, 3, pp. 77-84.
- [36] L.A. Zadeh (1996). Fuzzy Logic = Computing with Words. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, **4**, pp. 103-111.
- [37] L.A. Zadeh (1997). Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, **90**, pp. 111-127.
- [38] H.-J. Zimmermann (1995). En: *Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, J. Yen, R. Langari y L.A. Zadeh (Eds.). IEEE Press, pp. xiii.

LOS LIMITES DE LA LOGICA DIFUSA

J.L. Castro

Dept. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial.

Universidad de Granada. ETSI Informática.

18071 - Granada (España)

e-mail: castro@decsai.ugr.es

Resumen

En este trabajo se intenta dar respuesta (parcial) a la cuestión de qué cosas se pueden hacer y qué cosas no se pueden hacer mediante la lógica difusa, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Además, esto se hace para distintas posibles aplicaciones: a) como modelo de cálculo, b) como modelo de razonamiento y c) como herramienta para un ingeniero.

Palabras Clave: Lógica Difusa. Sistemas Basados en Reglas Difusas. .

1 LA LOGICA DIFUSA COMO MODELO DE CALCULO

En esta sección nos planteamos la utilidad de la lógica difusa como un modelo de cálculo. La mayoría de los sistemas basados en lógica difusa que la tecnología ha desarrollado son sistemas para calcular funciones en lugar de sistemas de razonamiento para derivar conclusiones a partir de unas premisas. De hecho, en casi todos los casos se le añade una difusificación a la inferencia difusa, y se consideran entradas numéricas mas que difusas o simbólicas, con lo que al final lo que se obtiene es que el sistema calcula una función, que puede tomar entradas y/o respuestas discretas o continuas.

Así, plantearse la utilidad de la lógica difusa como modelo de cálculo se traduce en ver cuales son las funciones que se pueden calcular mediante sistemas basados en lógica difusa, pero teniendo en cuenta que se pueden calcular tanto funciones de variable discreta (modelo clásico de cálculo), como funciones de variable continua. Comenzaremos el análisis a ese respecto con una reflexión sobre el número de las funciones que pueden ser aproximadas:

Proposición. Si nos restringimos a conjuntos difusos trapezoidales, y a sistemas basados en reglas con un número finito reglas, el conjunto de funciones que pueden ser calculadas mediante dichos sistemas basados en reglas difusas tiene cardinal $\aleph_1$.

Demostración. Para observar esto, basta darse cuenta de que fijado un conjunto de variables de entrada y las etiquetas de cada variable, el conjunto de funciones calculadas por sistemas basados en reglas difusas con esos componentes es un espacio vectorial de dimensión el producto del número de etiquetas de cada variable (ver [castro97]). Ello, unido a que cada número difuso trapezoidal viene determinado por 4 números reales nos conduce a la conclusión expresada en la proposición.

Teniendo en cuenta que el conjunto de las funciones reales de variable real, incluso restringido solo a funciones continuas, tiene cardinal $\aleph_2$, concluimos que será imposible calcular mediante tales sistemas cualquier función real de variable real, ni tan siquiera las continuas.

Lo que si podríamos esperar es que se puedan calcular funciones que aproximen a la función deseada tanto como se desee, de la misma forma que cualquier función continua sobre un compacto puede ser aproximada tanto como se desee mediante un polinomio. Esta propiedad es conocida como la propiedad de "Aproximación Universal":

Definición. Se dice que una familia de funciones valuadas en los números reales, y de variables reales verifica la propiedad de aproximación universal si: para cada función continua sobre un compacto y para cada $\epsilon > 0$, existe una función de dicha familia tal que la distancia entre ambas funciones es menor que ϵ uniformemente sobre todo el compacto.

El siguiente teorema ([1]) nos indica que los sistemas basados en reglas difusas verifican tal propiedad, y al menos desde un punto de vista teórico, nos permiten calcular una función tan proxima como deseemos a

cualquier función continua.

Teorema La familia de las funciones calculadas por un sistema basado en reglas difusas verifica la propiedad de aproximación universal.

Esta gran capacidad teórica como modelo de cómputo, aun siendo interesante, no es demasiado fuerte desde un punto de vista práctico. Por ejemplo, otras familias de funciones que verifican esta propiedad son: Los polinomios, las funciones lineales a trozos, los splines, las redes neuronales, etc... Como puede observarse, esta lista incluye tanto familias de funciones realmente operativas en la práctica, como familias inútiles para la mayoría de los casos, debido a que se necesitarían demasiado recursos (tiempo, espacio, dinero, ect...).

Por ello es conveniente seguir analizando la capacidad como modelo de computo de la lógica difusa, pero ahora desde un punto de vista práctico. Obviamente, el principal problema que tendría el uso práctico de estos sistemas basados en reglas difusas sería el excesivo número de reglas necesario para aproximar una función, y la posible dificultad computacional para encontrar esas reglas. Nos limitaremos a analizar el primer aspecto. Concretamente, expondremos una cota superior del error que se produciría al aproximar una función mediante un sistema basado en reglas difusas. Dicha cota vendrá en función del número de reglas, y por tanto, tendremos una cota superior para el número de reglas necesario para conseguir un error fijo ([3]).

Proposición. Sea $\mathcal{F}$ la familia de los sistemas basados en reglas difusas con solo una variable antecedente y con funciones de pertenencia triangulares. Para cada función continua f sobre un compacto K , exista una función F en $\mathcal{F}$ verificando:

a) Si $f \in C^2(K)$, entonces

$$\|f - F\|_{[a_i, a_{i+1}]} \leq \frac{\|f''\|_{[a_i, a_{i+1}]}}{4} (a_{i+1} - a_i)^2$$

$$\|f - F\| \leq \frac{\|f''\|}{4} h^2$$

siendo $h = \max_i a_i - a_{i-1}$ y a_i los puntos donde los triángulos alcanzan la mayor altura.

b) Si $f \in C^1(K)$, entonces

$$\|f - F\|_{[a_i, a_{i+1}]} \leq \frac{27\|f'\|_{[a_i, a_{i+1}]}}{2} (a_{i+1} - a_i)$$

$$\|f - F\| \leq \frac{27\|f'\|}{2} h$$

c) Si $f \in C^0(K)$, entonces

$$\|f - F\|_{[a_i, a_{i+1}]} \leq 54w_{[a_i, a_{i+1}]}(f, \frac{a_{i+1} - a_i}{4})$$

$$\|f - F\| \leq 54w_{U_v}(f, \frac{h}{4})$$

siendo $w_I(f, s) = \sup\{|f(x+\epsilon) - f(x)| : x, x+\epsilon \in I, \epsilon \leq s\}$.

Proposición. Sea $\mathcal{F}$ la familia de los sistemas basados en reglas difusas con dos variables antecedente y con funciones de pertenencia triangulares. Para cada función continua f sobre un compacto K , exista una función F en $\mathcal{F}$ verificando:

i) Fórmula de error local: Siendo $I = [a_i, a_{i+1}]$ y $J = [b_j, b_{j+1}]$,

$$\|f - F\|_{I \times J} \leq \beta_{I \times J} \max\{(a_{i+1} - a_i)^2, (b_{j+1} - b_j)^2\}$$

siendo

$$\beta_{I, J} = \max\{A, B\}$$

donde

$$A = \frac{\|D^2_w f\|_{I \times J}}{8}$$

y

$$B = \frac{1}{8} [\|D^2_v f\|_{I \times J} + \frac{\|D^2_w D^2_v f\|_{I \times J}}{8}] (\text{length}(I))^2$$

ii) Fórmula de error:

$$\|f - F\| \leq \beta \max\{h_x^2, h_y^2\}$$

siendo $h_x = \max_i a_i - a_{i-1}$, $h_y = \max_i b_j - b_{j-1}$
y $\beta = \max\{\frac{\|D^2_w f\|}{8}, \frac{1}{8} [\|D^2_v f\| + \frac{\|D^2_w D^2_v f\|}{8}] h_x^2\}$

Como puede observarse, estas fórmulas de error son idénticas a las fórmulas del error que se produce mediante la interpolación a trozos de Lagrange [5], de hecho se obtienen demostrando que este tipo de sistemas difusos incluyen ese tipo de interpolación. Además, se puede demostrar que si se utilizan funciones de pertenencia cúbicas, los sistemas basados en reglas difusas incluyen la interpolación mediante splines cúbicos.

Conclusión Desde un punto de vista teórico, los sistemas difusos sirven para aproximar tanto como se desee cualquier función continua sobre un compacto. Desde un punto de vista práctico, podemos asegurar que a la hora de aproximar funciones continuas, los sistemas difusos son al menos tan potentes como la interpolación clásica, pero con la ventaja añadida de que además permiten una "interpretación lingüística" de los cálculos que se realizan.

2 LA LOGICA DIFUSA COMO MECANISMO DE RAZONAMIENTO

En esta sección nos planteamos la utilidad de la lógica difusa como mecanismo de razonamiento. En primer

lugar observamos que incluye como caso particular a la lógica clásica y por tanto tiene al menos tanto poder como aquella.

Proposición. Dado un conjunto P de proposiciones de la lógica proposicional clásica, existe un conjunto de proposiciones difusas P' equivalentes, en el sentido de que todo lo que se pueda derivar de P con la inferencia de la lógica proposicional clásica se puede derivar de P' con la inferencia de la lógica difusa.

Demostración. Para obtener P' , basta cambiar cada aparición de cada proposición simple q en P por la proposición " q es cierto" siendo cierto el conjunto difuso sobre $[0,1]$ cuya función de pertenencia toma el valor 1 en uno y 0 en los restantes casos. Entonces, q será derivable mediante la lógica proposicional clásica a partir de P si y solo si " q es cierto" es derivable mediante la lógica difusa a partir de P' .

Cabría preguntarse si existe una proposición similar para el caso de la lógica del cálculo de predicados clásico. La respuesta es que sí:

Proposición. Dado un conjunto P de proposiciones de la lógica del cálculo de predicados clásico, existe un conjunto de proposiciones difusas P' equivalentes, en el sentido de que todo lo que se pueda derivar de P con la inferencia de la lógica proposicional clásica se puede derivar de P' con la inferencia de la lógica difusa.

Demostración. Para obtener P' , en primer lugar habría que asignar a cada cuantificador universal su correspondiente función de pertenencia obvia. Posteriormente habría que asignar a cada relación que aparezca la correspondiente función de pertenencia. Finalmente habría que proceder como en la demostración de la proposición anterior.

Una vez que hemos observado que la lógica difusa no es sino una extensión de la lógica clásica nos debemos plantear cuales son sus ventajas. Estas vienen definidas por dos propiedades importantes:

- a) la posibilidad de trabajar con proposiciones y terminos vagos, lo cual incluye la capacidad de representar de forma comprimida una gran cantidad de conocimiento, y
- b) la posibilidad de implementar un razonamiento aproximado mas que exacto.

La primera permite que se pueda usar como un modelo de representación del conocimiento muy general donde destacamos la capacidad de representar una gran cantidad de información de forma comprimida en pocas proposiciones, que es desde mi punto de vista una de las grandes virtudes de la lógica difusa. Por ejemplo, si consideramos una serie de reglas de la forma:

$$R_j: \text{If } v_1 \text{ is } A_1^j \text{ [and } v_2 \text{ is } A_2^j], \text{ then } y \text{ is } B^j,$$

esto nos describe de forma muy reducida (solo unas cuantas reglas) toda una relación $y = f(v_1, v_2)$, si bien sólo de forma aproximada, ordenando los valores que puede tomar y de acuerdo a una distribución de posibilidad. Además esto se hace de forma conservadora, permitiendo conjuntos muy grandes de valores posibles y dando posibilidades bastante altas (observar figura 2). Por otro lado, el modelo presenta pegadas desde el punto de vista de la aplicación: la inferencia es muy ineficiente fuera de los sistemas basados en reglas difusas, además la vaguedad aumenta con cada inferencia, lo que limita muchísimo la posibilidad de encadenar inferencias.

La segunda propiedad, la posibilidad de implementar un razonamiento aproximado mas que exacto, es sin duda uno de los grandes atractivos de la lógica difusa, pero desde un punto de vista práctico aun no se ha conseguido una buena aplicación debido a las pegadas reseadas anteriormente. No conozco ningún sistema experto que realmente utilice la lógica difusa como modelo de razonamiento e inferencia. Es en este punto donde el autor cree que esta el gran futuro de la lógica difusa y donde, paradójicamente, menos se ha avanzado.

3 LA LOGICA DIFUSA COMO HERRAMIENTA PARA LA INGENIERIA

En cuanto a su aplicación en el campo de la ingeniería, los comentarios pasan necesariamente por el compendio de los dos anteriores puntos de vista. Es una herramienta tan potente como la interpolación clásica pero que tiene una más que importante virtud: permite recoger, o al menos parcialmente simular, el conocimiento expresado lingüísticamente (de forma vaga) por el ser humano.

Esto la hace perfectamente apropiada para una gran cantidad de problemas, especialmente en aquellos casos donde los problemas no estan "matemáticamente" bien definidos y/o no se han encontrado soluciones matemáticas adecuadas. Incluso aunque no ocurra esto, puede ser una herramienta apropiada por la "facilidad de uso", el "bajo coste", y lo "aceptable" de los resultados en general. Desde mi punto de vista la razón de ello es la capacidad para comprimir información en pocas reglas con una eficacia demostrada en la práctica [4].

Dentro de sus limitaciones en este campo, tenemos el hecho de estar limitado (por cuestiones de eficiencia) a sistemas basados en reglas difusas y sin encadenamiento en cuanto a la inferencia, lo que limita en gran medida la capacidad de recoger la información lingüística. Además, esta la necesidad de "ajustar"

a posteriori las reglas, pues el hecho de comprimir la información obliga a un trabajo de ajuste al descomprimir.

4 CONCLUSION

En resumen, la lógica difusa es una herramienta potente para el cálculo de funciones (control, aproximación, etc...). De hecho es una extensión de la interpolación clásica. Además, cuenta con la facilidad de la "programación" de esos cálculos, al permitir recoger la información lingüística, sin necesidad de un gran conocimiento "matemático" de la función a calcular. Incluso, se puede emplear para casos donde tal función no esté "matemáticamente" bien definida. El principal límite en este campo estriba en que si la aproximación debe ser muy buena, el número de reglas necesarios tiende a hacerse muy grande y con ello, la herramienta pierde toda su utilidad.

Como modelo de razonamiento, la lógica difusa ha sido desde su nacimiento herramienta con mucho futuro, debido a la capacidad para modelar el conocimiento expresado lingüísticamente. Sin embargo, los problemas de eficiencia, y la imposibilidad de encadenar reglas, han hecho que hasta el momento, no se haya conseguido plasmar esas expectativas en nada concreto.

Como herramienta para la ingeniería, los dos párrafos anteriores creo que lo dicen todo.

Referencias

- [1] Castro, J.L., 1995. Fuzzy Logic Controllers are Universal Approximators, *IEEE Trans. on Syst, Man. and Cybern.* 25-4, pp. 629-635.
- [2] Castro, J.L., Castro, J.J., Zurita, J.M., 1997. The influence of Implication functions in Fuzzy Logic Controllers with Defuzzification First and Aggregation After, *Proceedings de IFSA97*.
- [3] Castro, J.L., 1997. How many rules are necessary to get a "good" fuzzy controller for a control problem?, *Proceedings de Fuzz-IEEE97*.
- [4] Hirota, K, 1993. *Industrial Applications of Fuzzy Technologies*, Springer Verlag.
- [5] Prenter, P.M., 1975. *Splines and Variational Methods*, John Wileys & Sons.

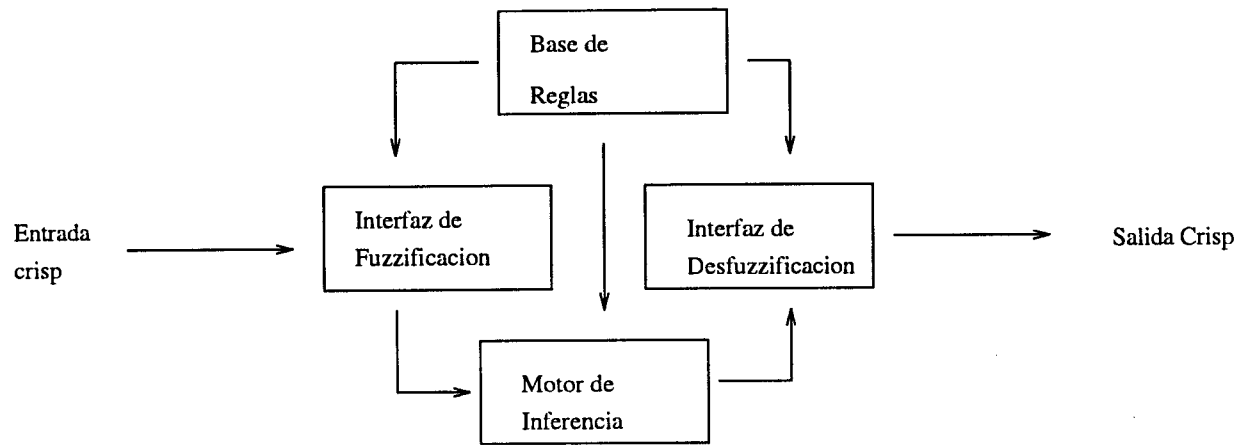
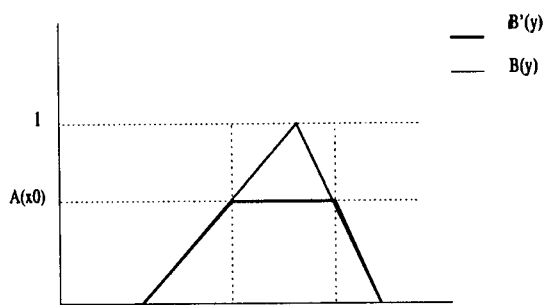
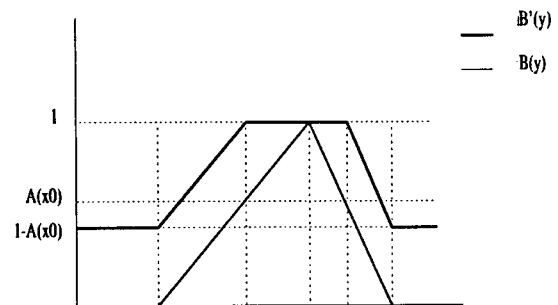


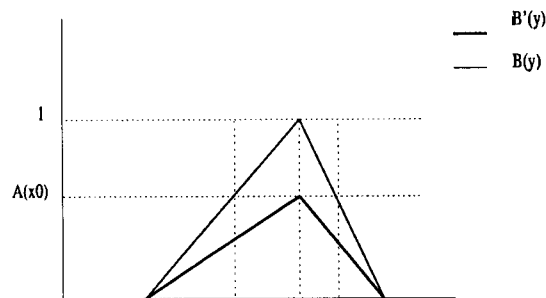
Figura 1: Esquema de un sistema basado en lógica difusa



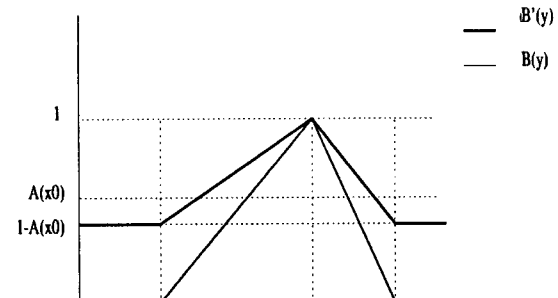
Mamdani Implication



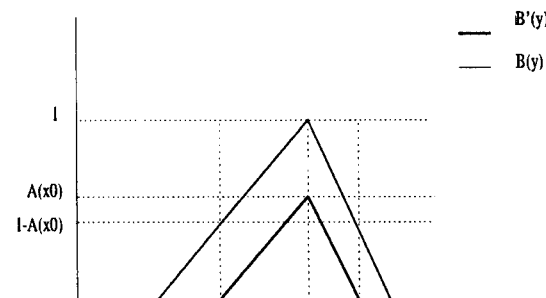
Lukasiewicz Implication



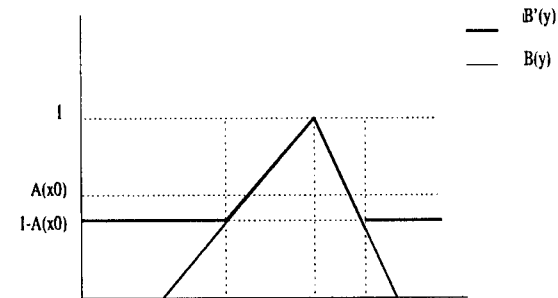
Product Implication



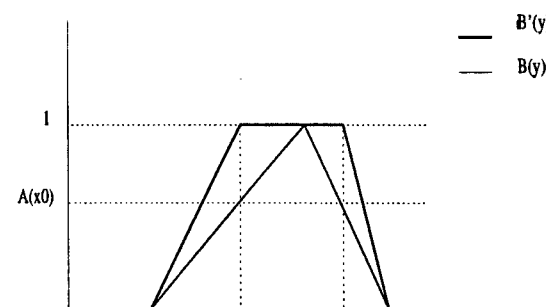
Reichenbach Implication



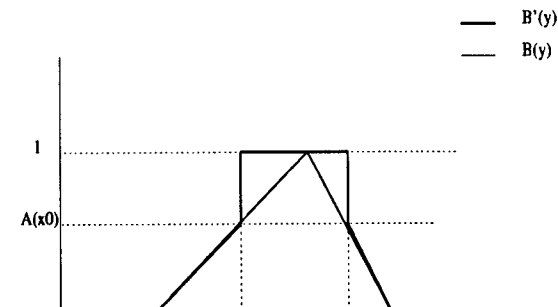
T-norma Lukasiewicz



Kleene Dienes Implication



Menger-Goguen Implication



Godel-Brouwer Implication

Figura 2: Inferencia difusa con distintas funciones de implicación

REFLEXIONES ACERCA DE UNA TEORÍA DE COMPUTACIÓN BORROSA

Claudio Moraga
Universidad de Dortmund.
Alemania
moraga@cs.uni-dortmund.de

Resumen

En la charla se abordarán tres temas íntimamente relacionados:

- * Computadores borrosos
- * Maquinas de Turing borrosas
- * ¿Hacia una Teoría de Computación Borrosa ?

En relación a Computadores borrosos se analizará primeramente la idea "ADT" (Abstract Data Type) y su "versión hardware". Es decir, se precisan variables, conjuntos de definición y operaciones (borrosas), independientemente de su realización. Seguidamente se discutirá el tema de realizaciones, considerando las alternativas digital, analógica e híbrida. En esta parte se hará relación a los Proyectos ORBE gestados en España. En la segunda parte se discutirán máquinas de Turing borrosas. Primeramente se discutirán alternativas de "borrosificación" de máquinas de Turing nítidas. Se comentará el modelo de E. Santos y las modificaciones introducidas particularmente por autores españoles. Seguidamente se introducirá una máquina de Turing borrosa "pero realizable", utilizando conjuntos L-borrosos, donde L es un retículo cadena finito. Se demostrará la equivalencia de máquinas de Turing L-borrosas y de máquinas de Turing nítidas. Finalmente se discutirá la pregunta de la equivalencia o no equivalencia de máquinas de Turing nítidas y borrosas (no discretas) abriéndose así la discusión sobre si acaso existe (o debe existir) una teoría (propia) de computabilidad borrosa.

VERDAD Y UTILIDAD EN LÓGICA FUZZY

Alejandro Sobrino

Area de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Santiago de Compostela
Campus Universitario, s.n. E-15706
lflgalex@usc.es

Resumen

En este trabajo se analizan algunas implicaciones de interpretar la noción de grado de verdad, propia de la lógica fuzzy, en términos de verdad (parcial) o en términos de utilidad, así como algunas consecuencias que ello tiene para su fundamentación y credibilidad.

Palabras clave: vaguedad, verdad, utilidad, lógica fuzzy.

1. INTRODUCCIÓN

De la lógica bivalente o clásica (LC) se dice que es la ciencia encargada de estudiar la propagación de la verdad en las inferencias correctas. La *verdad* es, por tanto, un ámbito fundamental de la LC.

A la lógica fuzzy (LF) se la conoce, entre otras cosas, por ser uno de los saberes encargados de estudiar el razonamiento aproximado y también por ser una teoría que ha encontrado su tecnología; esto es, por sus variadas y exitosas aplicaciones. Como ciencia que estudia el razonamiento aproximado, la LF ha proporcionado un cálculo para las consecuencias imprecisas, resultado de gestionar convenientemente la vaguedad de las premisas y, en ocasiones, la fuerza de la implicación. Tanto la vaguedad de las premisas como la credibilidad de la conclusión se representan frecuentemente en términos de *grados de verdad*. La noción de grado de verdad puede interpretarse en términos de verdad parcial o en términos de utilidad; esto es, de la creencia subjetiva que tiene un agente en la verdad de la proposición que profiere [2].

Como ciencia que transmite verdades objetivas en las inferencias, la LC se ha apoyado en un criterio ideal de verdad. Tarski proporcionó una definición ideal de verdad, una de cuyas partes fundamentales es la convención T. Esta convención se mostró irrealizable para el lenguaje natural o científico, ya que contiene una infinidad de oraciones semánticamente abiertas. Una alternativa a una definición ideal de verdad es una definición social de verdad. Según ella, no hay oraciones verdaderas, sino declamaciones de oraciones verdaderas, hechas por agentes determinados, en situaciones concretas. Las declamaciones de verdad son individuales

e intransferibles: no se dejan replicar ni examinar por otros.

La LF parece reclamar una concepción social de verdad, pero esta noción no constituye un criterio de verdad; más bien por su variedad y ocasionalidad apunta a que no hay tal criterio. Si bien el esquema T, aplicado a los lenguajes naturales, dice poco, su abandono es difícilmente justificable, sobre todo si una teoría aspira a una cierta objetividad.

Un examen de la convención T para un lenguaje que incluya predicados vagos muestra que, si se quiere mantener su validez, hay que introducir la vaguedad en la polivalencia. Esto aboca, caso de admitir predicados vagos en el lenguaje, a una decisión de índole lógica o lingüística. Si se quiere mantener el esquema T, o se cambia el lenguaje vago por otro regimentado, o se sustituye la lógica bivalente por una polivalente. Como es el criterio lógico el que nos interesa, la última opción es la que conduce a cuestiones más interesantes.

La LF demanda un concepto de verdad graduado y, aunque este se basa en una concepción social de la verdad, aspira en sus propuestas a una cierta objetividad. La objetivación pasaría porque, al menos para cada agente o instante, el valor de una proposición fuese único y distinto de otros. El Sorites indica que, si se juzga a la vaguedad con un criterio clásico de verdad, esas dos condiciones no se dan.

Para salvar la paradoja hay que interpretar los predicados vagos en términos de utilidad. Un ejemplo de R. Parikh muestra de modo ilustrativo como, en una situación de comunicación lingüística, el empleo de predicados vagos prototípicos, como es el caso de los predicados observacionales, conduce al éxito comunicativo; son útiles. A pesar de que tienen extensiones diferentes para cada persona, su uso favorece que la comunicación sea exitosa.

Pero ese mismo concepto de utilidad hace que una teoría, formal o no, de los predicados vagos, tenga una base móvil y casual. ¿Cómo conjugar entonces la verdad, que ofrece objetividad y la utilidad, que da protagonismo a la vaguedad en la comunicación? La contestación a esta pregunta constituirá la argumentación final de este trabajo.

El objetivo de este artículo es, pues, examinar algunos aspectos relacionados con las nociones de 'verdad' y

'utilidad' en la LF, sus límites e implicaciones. Para ello, se estructura de la siguiente forma: en el punto 2 se analiza el concepto de verdad en tres subapartados. En el punto 2.1, el criterio ideal de verdad. En el punto 2.2, el criterio social de verdad. En el 2.3 se discute acerca de la verdad y la polivalencia. En el apartado 3 se argumenta acerca de la verdad y la utilidad en un contexto fuzzy. El trabajo termina con unas reflexiones finales y una breve bibliografía.

2. LA NOCIÓN DE VERDAD

2.1 CRITERIO IDEAL DE VERDAD

La LC se ocupa de reconstruir formalmente las consecuencias precisas del lenguaje científico; de modo estándar, el lenguaje de la Física y la Matemática y, en estos ámbitos, es común decir que la investigación aspira a lograr verdades objetivas. Esta pretendida objetividad comporta una definición de verdad con al menos dos características:

- i) que sea aplicable con carácter general,
- ii) que goce de neutralidad respecto a posibles compromisos ontológicos y epistemológicos.

Tradicionalmente, se ha considerado que la teoría de verdad de A. Tarski [9] reúne estos dos requisitos.

Desarrollada por Tarski en 1936, su propuesta se resume en dos notas: a) presentar algunas condiciones de adecuación que debe satisfacer cualquier teoría de la verdad; b) proponer una definición de verdad para los lenguajes formalizados que satisfaga los criterios definidos.

Las condiciones que debe satisfacer cualquier teoría de la verdad son las de adecuación material y corrección formal. Según Tarski una teoría es materialmente adecuada cuando todas sus consecuencias son instancias del conocido esquema T.

(T) 'S' es verdadero syss p

siendo 'p' una oración arbitraria del lenguaje para el cual se da la definición de verdad y 'S' un nombre de 'p'. Una ejemplificación típica es: 'La nieve es blanca' es verdadero syss la nieve es blanca.

La corrección formal se refiere a los requisitos que se deben imponer al lenguaje al cual se quiere aplicar la noción de verdad y a las reglas formales que ha de satisfacer la misma definición. Referimos a [9] para más detalles.

De las notas que se le supone a una teoría de la verdad, esto es, generalidad y neutralidad, la teoría de Tarski satisface la segunda característica en cuanto que el esquema (T) propicia que el diagnóstico acerca de la verdad de 'S' lo sea con independencia del conocimiento o creencia del agente en ello. El requisito de generalidad es menos claro. Por una parte, no se define 'verdad' en general, sino 'verdad para S'. Además, no se define 'verdad' en cualquier lenguaje, sino 'verdad' en un lenguaje formal o en un lenguaje natural

convenientemente regimentado. Esta limitación es justamente la que deseamos enfatizar.

Comentemos la condición de adecuación material para los lenguajes naturales (incluidos los lenguajes empíricos). Recordamos que la convención (T) fija una condición necesaria, pero no suficiente, para que una definición de verdad sea considerada como materialmente adecuada. Por tanto, por sí sola no constituye una definición de verdad. Tarski hace la siguiente observación: si cualquier lenguaje natural (o científico) tuviese un número finito de oraciones, cada una de ellas semánticamente cerrada, se podría aspirar a tener un diccionario de las mismas. En ese caso, la construcción de una definición correcta de verdad no presentaría dificultades, ya que la teoría de la verdad correspondiente constaría de la conjunción de todas las instancias del esquema T para esa base de datos oracional. Pero el lenguaje natural tiene infinitas oraciones que no pueden ser resumidas en un metalenguaje o en cualquier otro lenguaje. Por tanto, la tarea es imposible. La solución de Tarski a este problema fue proporcionar una definición adecuada de verdad a través del concepto de 'satisfacción' y probar rigurosamente la condición de adecuación material.

Otro problema relativo al ámbito de los lenguajes naturales tiene que ver con la presencia de los predicados vagos. Planteado en términos del esquema T, el problema se concreta en que 'p' puede incluir palabras de significado vago. Si fuese así, surgen las siguientes cuestiones: ¿es la convención (T) formalmente compatible con la presencia de predicados vagos en el lenguaje?; ¿qué implicaciones se seguirían de ello para una noción de verdad? H. Putnam ha respondido a estas preguntas, pero debatiremos este tema en el apartado 2.3.

Aún posponiendo el análisis de la vaguedad a la luz del esquema T, se puede concluir que una definición ideal de verdad al estilo de Tarski no es adecuada para todo lenguaje; en particular, no lo es para el lenguaje natural, porque existe un número infinito de oraciones que son semánticamente abiertas. Una alternativa a una definición ideal de verdad es una definición social de verdad. En el siguiente apartado describiremos algunas notas de una caracterización social de la verdad.

2.2 CRITERIO SOCIAL DE VERDAD

Atendiendo a un criterio social, la pregunta acerca qué es la verdad como nombre o sustancia (la verdad), propia de un marco ideal, es sustituida por el uso o usos de la palabra 'verdadero' como calificativo del nombre del cual se predica (... es verdadero). Las aserciones acerca de la verdad se evalúan, según esta propuesta, en la interacción social, donde se actúa con el lenguaje, y no en el vacío comunicativo de una situación 'objetiva', 'ideal', construida así para algún propósito.

Con una definición social de verdad no se pretende que las oraciones verdaderas reflejen el mundo; por el

contrario, se entienden como un conjunto de palabras elegidas de modo convencional para describir situaciones para las que esa elección da como resultado un entendimiento entre hablantes y un éxito en la comunicación pretendida. Las proposiciones no tienen porqué reflejar la realidad, sino una comprensión subjetiva, pero útil, de la misma. En comentario de J. L. Austin [1], *"para ser verdadero, un enunciado no necesita reproducir la estructura de la realidad en mayor medida que una palabra necesita ser onomatopéyica o una escritura pictográfica"*. Una definición social de verdad atiende a un uso ordinario del lenguaje, donde son abundantes los predicados vagos.

En este contexto, una teoría de la verdad debe tener en cuenta que:

- la valoración de una proposición cambia con el tiempo,
- la valoración de una proposición no es independiente de un agente y de un escenario,
- las proposiciones deben tomarse tal y como se dan en el lenguaje; es decir, debe respetarse su léxico, como p. ej. la vaguedad de algunas palabras.

En el ámbito de la comunicación ordinaria no hay, pues, verdades independientes, descorporeizadas. Lo que oímos no son verdades sin más, sino preferencias de oraciones verdaderas, hechas por ciertos individuos, en situaciones particulares, a veces objetivas u objetivables, y a veces ni siquiera eso, como ocurre con aquellas en las que se verbalizan recuerdos, creencias, etc. En estos casos, las instancias no son replicables, ni se dejan examinar por otros o incluso por uno mismo en ocasiones diferentes. No hay forma de estar seguro que uno tiene la misma experiencia cuando se repite otra vez.

Pero incluso más, como indica Goguen [4], en un contexto social-profesional la atribución de verdad depende más de una comunidad lingüística que de sus miembros individuales, porque suele ser la comunidad la que juzga cuál es el uso correcto de un símbolo. Esto vale para comunidades de expertos, que tienen formas institucionalizadas de reconocer y juzgar niveles de competencia profesional; niveles que no son fijos, sino cambiantes.

En ausencia de réplica, sólo se puede decir que hay diversos grados y dimensiones de éxito al hacer enunciados: los enunciados se ajustan a los hechos más o menos laxamente, de diferentes formas en diferentes ocasiones, para diferentes intentos y propósitos. La valoración no puede reducirse a dos valores, 'verdadero' y 'falso'.

La LF parece reclamar una noción social de verdad. Preocupada por evaluar las argumentaciones del lenguaje ordinario tal como se dan, debe tener en cuenta al agente, tiempo, contexto y predicados vagos que contengan. Pero reconocer la naturaleza social de la verdad no proporciona un criterio de cómo usar la noción de verdad. Más bien,

por su variedad y ocasionalidad, indica que no hay criterio.

Si la aplicación de la convención (T) a un lenguaje natural o científico-empírico dice poco, su abandono resulta de justificación difícil. Cualquier ámbito científico busca objetividad, y esto vale también para las teorías, formales o no, de la vaguedad. Si al análisis del lenguaje natural, que incluye términos vagos, se le quiere dotar de objetividad, un chequeo a la luz de la convención (T) parece un recurso interesante. El apartado siguiente analiza esta cuestión y contesta los interrogantes que dejamos abiertos en el punto 2.1

2.3 VERDAD IDEAL Y POLIVALENCIA

¿Es compatible la convención (T) con la presencia de predicados vagos en el lenguaje? H. Putnam [8] respondió a esta cuestión de la siguiente forma: se puede construir de modo consistente un esquema T para lenguajes que contienen predicados vagos, pero el precio a pagar es introducir la vaguedad en el metalenguaje:

'S' es verdadera	syss	p.
V	V	V
F	V	F
I	V	I

Es decir, si se quiere preservar la equivalencia requerida por el esquema T, el predicado 'verdadero' tiene que ser tan vago como los predicados vagos presentes en el lenguaje objeto. Esto lo muestra la tercera línea de la tabla de verdad, donde la polivalencia se resume en el valor genérico I.

Aunque la confección de la tabla es elemental, las consecuencias que se siguen de ella son relevantes. A continuación, se señalan dos:

a) la lógica que se use en el metalenguaje está determinada por la lógica usada en el lenguaje. No se puede confinar la vaguedad en el lenguaje objeto e intentar controlarla en el metalenguaje si se quiere mantener la validez del esquema T.

b) la polivalencia no sólo debe estar presente en el metalenguaje, sino que afecta al mismo predicado 'verdad'.

El argumento de Putnam muestra que, si se toma en serio la polivalencia de la vaguedad, la verdad absoluta no puede servir de justificación a una lógica que trate predicados vagos si se quiere mantener la validez del esquema T. Moraleja: aceptar los predicados vagos conlleva tomar una decisión de índole lógica o de índole lingüística. Si se quiere mantener la LC para un lenguaje con predicados vagos, la elección ha de ser lingüística: ha de sustituirse el lenguaje vago por un lenguaje regimentado preciso; si se admiten los predicados vagos, la decisión es de carácter lógico: ha de reemplazarse la LC por una lógica polivalente.

La LF requiere entonces un concepto graduado de verdad. La graduación de la verdad recoge la granularidad del

significado vago, de ahí que tratar con verdades graduadas no repugne a los que consideran al lenguaje natural tal y como de inmediato se da. Pero desde un punto de vista lógico, sería raro que a una valoración, graduada o no, no se le requiriese que, para cada agente y situación o escenario, fuese única y distinguible de otras valoraciones. ¿Se dan esas condiciones de unicidad y distinguibilidad del grado de verdad? No, y la paradoja del Sorites apunta a que es imposible que se den estas dos notas. Recordemos una descripción informal de esta paradoja: supongamos que una persona con n pelos es calva. Por añadirle un pelo no deja de ser calva. La iteración de este proceso lleva a la conclusión de que ningún añadido de pelos, todo lo grande que pueda ser, hará que deje de ser calva.

Elegido un criterio racional de aplicación de la noción de verdad, sea el que fuere, seguramente sería indistinguible, en virtud de esa misma racionalidad, atribuir un grado, pongamos por caso 0.340, que un grado 0.341 como valor de verdad de una oración. Es decir, con una interpretación del grado de verdad como utilidad, para el éxito comunicativo seguramente serían intercambiables las dos valoraciones sin consecuencias indeseadas. Pero si la interpretación de grado es como verdad parcial, y ésta atiende a una definición de verdad que establezca algún correlato, si bien defectuoso, con lo real (quizás con un objeto vago), un valor 0.340 es diferente de una valoración 0.341. Es decir, desde un punto de vista lógico, 0.340 no es igual 0.341; el primero podría ser considerado la negación del segundo.

La paradoja del Sorites marca, a mi modo de ver, el punto clave para dilucidar aspectos que tienen que ver con la semántica adecuada de la noción de grado de verdad. Pero esto se discutirá en el último apartado.

3. VERDAD Y UTILIDAD EN LÓGICA FUZZY

La LF es una lógica de los predicados vagos. Un ejemplo habitual de predicado vago es, p. ej., alto. De este predicado es común decir que es observacional -para los neopositivistas, componentes inevitables de los enunciados básicos a partir de los cuales se construye la ciencia-. A pesar de tan elevada función, para el caso de los predicados vagos de naturaleza observacional deberíamos estar dispuestos a admitir instancias de los mismos que fuesen contradictorias (en el sentido de una contradicción clásica) o, al menos, diferentes. Si quisiéramos que tuviese una instanciación única, deberíamos expresar el mismo concepto pero con más precisión.

Una manera habitual de intentar precisar el significado de un predicado vago es acudir a los instrumentos que amplían o detallan la observación, permitiendo una visión más fina del mismo hecho. Pero los instrumentos tienen

sus límites. El teorema de Parikh [5] muestra que, para espacios α -conectados, los instrumentos de observación o de medida no pueden clarificar la extensión de un predicado vago; toda observación, cuan fina pueda ser, tiene su zona de penumbra.

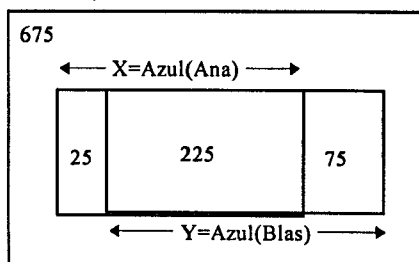
Otra manera de recabar la precisión de un predicado vago como 'alto' es considerarlo de una manera relacional; por ejemplo, comparando a un individuo con otro respecto a su altura. En este caso, la semántica del predicado vago no queda representada por un grado de verdad, sino por un conjunto ordenado - por un retículo, p. ej.-. Pero dado que el predicado, por ser vago, admite más de una instanciación, algunos ejemplares de predicados vagos con altura diferente serán indiscriminables o indistinguibles bajo el predicado 'alto'; es decir, no serán comparables entre sí.

Ante estas dificultades, podemos sentirnos tentados a preguntar: pero ¿cómo son de verdad los individuos altos? Sería de ayuda intentar responder a esta pregunta en términos de una medida precisa, cogiendo, p. ej., una regla y aplicándola al individuo correspondiente. Supongamos que el resultado es una medición de 184.0 cm. La respuesta podría ser (porque el individuo que estamos midiendo nos parece realmente alto): son personas que miden 184.0 cm. Pero contestando así no estaríamos respondiendo a la pregunta original; en todo caso, contestaríamos a la pregunta qué es medir 184.0 cm., que se diferencia perfectamente, al menos teóricamente, de la pregunta qué es medir 184.1 cm. Parece realmente difícil saber de un modo científico que es ser alto, por mas que socialmente todos sepamos emplear esta palabra.

Una definición científica de 'alto' no coincide con una definición social, y viceversa. Decir de alguien que es alto es una calificación cultural y aunque la ciencia es cultura, lo es de una forma limitada o peculiar. Es una cultura propia de un aprendizaje específico, que se hace en ámbitos académicos restringidos, en comunidades especiales. El lenguaje natural, en cambio, es fruto de la evolución y está incorporado a nuestro desarrollo orgánico y social. Cualquiera, por vivir en comunidad, aprende el significado de alto, que cada individuo interpreta en términos propios. La única manera de hacerse con el significado de los predicados observacionales es por ostensión, por lo que nadie puede estar seguro de que lo que significa una palabra para uno coincida exactamente con lo que significa para otro, aunque sí *grosso modo*; prueba de ello es que la comunicación no colapsa cada vez que los utilizamos.

Esta captura gruesa del significado nos hace ver que, aunque fuese perfectamente diferenciable 184.0 cm. de 184.1 cm. todos convendríamos en que si una persona con la primera medida fuese catalogada como 'alta', de medir 184.1 cm. no variaría esa calificación. Que un individuo sea 'alto' no representa, por así decirlo, un hecho, sino

una convención lingüística, que varía de una comunidad a otra. Una convención útil sin duda, que refiere al mundo, pero que no necesita ser la misma de una vez para siempre; podría cambiar si la audiencia se manifestase en otro sentido. No ocurre lo mismo con la formulación del Teorema de Pitágoras, al que se supone universal e intemporalmente verdadero, al menos en su marco teórico. En los predicados vagos, el consenso de la comunidad es extremadamente importante para atribuir significado. Necesitamos estar de acuerdo en que el 'rojo' es 'rojo' para detenernos en el semáforo, por más que si midiésemos la longitud de onda de los colores que emiten estos reguladores de tráfico habría variaciones y casi nunca serían estrictamente iguales. Como indica Parikh, [6] *"podemos tener una teoría no observacional de rojo sólo a costa de tener otra teoría separada de como usamos la palabra 'rojo'"* y esta tesis vale para cualquier predicado observacional. El uso de predicados observacionales en el lenguaje ordinario es tan abundante (y no obstante útil) y se sujeta tan poco a una definición, que es necesario, no sólo una teoría ideal del significado de 'rojo', que puede haberla, sino sobre todo una teoría pragmática del uso de la palabra 'rojo'. Aún admitiendo que exista una definición de 'rojo' precisa, no es la que se emplea de ordinario en la comunicación. Usando el lenguaje ordinario adaptamos el lenguaje a nuestras necesidades; el uso del lenguaje científico, en cambio, nos fuerza a someternos al sistema teórico en el que se define. Parikh muestra [7], con un ejemplo muy bonito, la utilidad de una teoría pragmática del uso de los términos observacionales. El ejemplo discurre así: Ana y Blas son dos profesores que enseñan en el mismo colegio y comparten piso. Un día Ana llama a Blas para decirle que se olvidó un libro de lógica en casa y que lo necesita para la hora siguiente. Le pide que lo localice y se lo lleve al colegio. Ana tiene muchos libros y desordenados, así que Blas le dice que le indique el color del libro solicitado. Ana le responde con un predicado observacional vago: 'azul'. El problema sigue así: su biblioteca tiene 1000 libros y se hipotetiza que, de ellos, Ana diría que son azules 250, mientras que para Blas serían azules 300. Coincidirían ambos en que son azules 225, pero para Ana serían 25 que no lo serían para Blas y para éste 75 que no lo serían para Ana. 675 libros no serían azules para ninguno de los dos. El siguiente cuadro resume esta situación.



Estarían, por tanto, en desacuerdo respecto a 100 libros. Se asume que ni Ana ni Blas son conscientes de esto.

Blas intenta buscar el libro que Ana le pide ayudándose de la descripción del color, ya que ningún otro dato le ayudaría a localizar de otra manera el libro. Utiliza, por tanto, su noción de 'azul'; es decir, explora el conjunto Y. Veamos el promedio de libros que debería consultar Blas en diferentes situaciones informativas:

a) *en ausencia de información alguna* acerca del libro pedido. Si tiene suerte el primer libro consultado será el pedido, sino lo será el último. Por tanto, 500.5 libros de promedio.

b) *si el concepto de 'azul' de Blas coincidiese con X*. 125.5 libros de promedio, por el mismo razonamiento que en el caso anterior, ya que restringiría la búsqueda a 250 libros.

c) *el concepto de 'azul' de Ana y Blas se solapan*. Ana tiene una creencia de que el libro está en X con probabilidad 0.9 y pensemos que esa misma probabilidad cabe atribuírsela a Y. Ya que Blas busca en Y y, si fuera necesario, en el complemento de Y, con probabilidad 0.9, sólo necesitará mirar en Y; es decir, en 300 libros, teniendo que consultar un promedio de 150.5. Con probabilidad 0.1 no lo encontrará en Y y, en ese caso, tendrá que consultar en Y y 350 libros más del complemento de Y. Es decir, mirará en $0.9(150) + 0.1(300+350) = 200$ libros de promedio.

Por tanto, Blas se ayuda considerablemente de la indicación de Ana por más que sus conceptos de 'azul' no coincidan plenamente. Es decir, el empleo del predicado vago 'azul' confiere más probabilidad de éxito al mensaje de Ana que si no se utilizase; el tiempo de búsqueda del libro decrece notablemente con la información proporcionada.

El ejemplo muestra que el éxito en la comunicación de Ana no depende de que tanto ella como Blas conozcan de modo preciso cómo usan la palabra azul, ni de que tal uso sea el mismo de una situación a otra. En tanto que comparten parte del significado referencial de 'azul', ello es suficiente para encontrar el libro solicitado.

El ejemplo muestra también que en el ámbito de los predicados vagos no puede separarse 'verdad' de 'asertabilidad'. La paradoja del Sorites es el mejor ejemplo de que no hay un criterio general de verdad que decida el uso de un término impreciso. Es inevitable que dos personas usen el mismo predicado vago de forma diferente y que incluso el mismo hablante use el mismo predicado de forma distinta en diferentes ocasiones. Como ya se indicó hay varias razones: una, porque predicados como 'rojo' o 'calvo' pueden ser aplicados a objetos que difieren entre sí en el color o en el número de pelos. Otra; las percepciones de ciertos predicados vagos, como los colores, dependen de ciertos procesos fisiológicos no repetibles. Si nos presentasen una gama de cartulinas de color 'blanco' seguramente algunos días catalogaríamos

como 'blancas' algunas cartulinas de las que otros días diríamos que no son (p. ej., después de vivir un tiempo en un paisaje esquimal).

A pesar de que los predicados vagos tienen valoraciones diferentes, su uso no conduce al desastre que prejuzgan las contradicciones clásicas. Su utilización masiva en el lenguaje responde a una conducta lingüística evolutiva y adaptativa, reforzada por los frutos que se obtienen del entendimiento entre personas en situaciones de cooperación lingüística. La cooperación implica consenso, pero el consenso impide dibujar una línea clara y de una vez para siempre de casos a los que aplicar o no aplicar correctamente el predicado vago.

No obstante la ciencia aspira a dar conocimientos objetivos, y una ciencia de la vaguedad, también. ¿Cómo se relacionan entonces la verdad, que ofrece objetividad, y la utilidad, que es lo que le da protagonismo a la vaguedad en la comunicación? Intentaremos responder a esta pregunta en un último apartado.

4. REFLEXIONES FINALES

Retomemos el Sorites: ¿qué justificaría que se le dé un grado de verdad y no otro, casi indistinguible del primero, a una oración? Como se ha indicado, podría ser lo siguiente: la elección del primer grado se ha mostrado útil para los propósitos requeridos, y la utilidad no se vería mermada cambiándolo por el segundo. Sin embargo, lógicamente hablando, por muy próximos que estén, si dos valores son distintos, uno es estrictamente diferente del otro. Difieren, por tanto, una acepción 'lógica', que aspira a la objetividad y una acepción 'utilitaria', que pretende éxito, de la noción de grado de verdad [3].

Una perspectiva de utilidad permite que se represente el valor de una oración de una forma múltiple, a conveniencia del interesado, sin que ello entrañe caer en una contradicción que aborte la comunicación, como ocurriría desde una perspectiva 'lógica'. Una interpretación de la semántica de la LF en términos de utilidad confiere al teórico, por tanto, una libertad a la hora de modelar los problemas, y esta adaptabilidad a contextos concretos es una de las claves que le ha dado mayores éxitos. Pero al mismo tiempo, puede ser una coartada para zafarse de posibles refutaciones. Dado que los asuntos se tratan en escenarios parciales y subjetivos, de muchas propuestas es difícil decir si constituyen la mejor solución o incluso una buena solución. En algunos casos, puede que la modelización del problema no sea la mejor; aunque será difícil, por la contextualización, demostrar lo contrario.

Esta laxitud y libertad teórica en la formalización y gestión de la vaguedad se puede notar en tres estadios:

a) en la elección de un valor, ya que diferentes agentes con las mismas creencias pueden asignar valores distintos a una aserción, lo que hace que la reducción del

significado de esa aserción a un valor de verdad (graduado o no) sea difícilmente objetivable;

b) en la elección de la lógica que combina y propaga valores, porque hay distintos sistemas de fórmulas que se escogen más por conveniencia matemática que por adecuación a un problema real;

c) en el resultado ofrecido, por la incertidumbre que a) y b) ocasionan en el agente racional ante elecciones alternativas.

Tanta flexibilidad no parece conveniente. Sería adecuado buscar una cierta objetividad en la indudable utilidad que ofrece una LF entendida como una lógica de las aserciones. Esta objetividad, usualmente, la proporciona el disponer de un criterio lógico.

Ya se ha comentado que si el usuario quisiera tener una base lógica para utilizar grados de verdad, estos deberían responder a valoraciones únicas con referentes únicos. En ese caso, habría que reclamar la validez del esquema T de Tarski para un lenguaje natural vago (dejando aparte la dificultad de disponer de un diccionario de oraciones). Pero si fuese así, la equivalencia entre metalenguaje y lenguaje objeto, que reclama la validez del esquema, sólo podría asegurarse clarificando el 'estado de cosas' al que refiere una oración que incluya predicados vagos; esto es, elucidando la noción de objeto vago. Si no se dispone de una ontología de objetos vagos, la paradoja del Sorites es inevitable y constituye un obstáculo infranqueable para una interpretación lógica, ya que abocaría a contradicciones no sólo parciales, sino absolutas.

A pesar de que la bibliografía en torno los objetos vagos está creciendo, no hay todavía una definición o un consenso sobre qué es tal noción. Mientras no se avance en este terreno, deberíamos disponer de una lógica de proposiciones que respete al lenguaje ordinario tal como se da en su inmediatez; al lenguaje vago. A la luz del esquema T, esto sólo ocurre si la polivalencia se instala en el mismo predicado 'verdad': es decir, si se dispone de una lógica polivalente. Esta, si no quiere colapsar, ha de basarse en un criterio de utilidad y, en consecuencia, tendrá una fundamentación lógica móvil y casual, atendiendo a que las aserciones significan de forma contextual. Pero como lenguaje formal, una lógica de la vaguedad es un lenguaje preciso. Para ella vale una definición ideal de verdad, que permite diseñar una metalógica precisa. La metalógica puede proporcionar un cierto rigor y objetividad a la multiplicidad que surge de una interpretación del grado de verdad en términos de utilidad. Debido a la impronta que L. A. Zadeh le dio a la LF como lógica computacional, no ha sido la metalógica el ámbito al que se ha dedicado mayores esfuerzos en la comunidad fuzzy. Pero el cambio de esta tendencia puede suponer beneficios para su mejor fundamentación.

AGRADECIMIENTOS

El autor está en deuda con el prof. S. Termini por sus inestimables sugerencias sobre el punto 2 de este trabajo y con Alberto Bugarín y Senén Barro por sus comentarios.

REFERENCIAS

- [1] AUSTIN, J. L., 'Verdad', en J.O. Urmson y G. J. Warnock, (comp.) (1961), *Philosophical Papers of J. L. Austin*, Oxford Univ. Press. Trad. cast. de A. García, *Ensayos Filosóficos*, Revista de Occidente, 1975, cap. 5, 119-132.
- [2] DUBOIS, D. & PRADE, H., 'The three semantics of fuzzy logic', *Fuzzy Sets and Systems*, 90, (1997), 141-150.
- [3] GILES, R., 'A Utility-Valued Logic for Decision Making', *International Journal of Approximate Reasoning*, 1988, 2, 113-141.
- [4] GOGUEN, J., 'Fuzzy Sets and the Social Nature of Truth', in M. M. Gupta eta al. (eds), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, North-Holland Pub. Co., 1979
- [5] PARIKH, R., 'The problem of vague predicates', R. S. Cohen & M. W. Wartofsky (eds.), *Language, Logic and Method*, Reidel. Dordrecht, 241-261.
- [6] PARIKH, R., 'Vagueness and utility: The semantics of common nouns', *Linguistic and Philosophy*, 17, 521-535, 1994.
- [7] PARIKH, R., 'Vague predicates and language games', *Theoria* (España), vol. 11, 1996, 27, 97-107.
- [8] PUTNAM, H., "Vagueness and alternative logics", *Erkenntnis*, 19, 1983, 297-314.
- [9] TARSKI, A. "The concept of truth in formalized languages", en *Logic, Semantics, Metamathematics*, 1936. Trans. by J. H. Woodger, Oxford Univ. Press, 152-278
- [10] TRILLAS, E. ; ALSINA, C. & TERRICABRAS, J. M., *Introducción a la lógica borrosa*. Ariel, Barcelona, 1995.

APUNTES PARA UN ENSAYO SOBRE QUÉ “OBJETOS” PUEDEN SER LOS CONJUNTOS BORROSOS

Enric Trillas

Departamento de Inteligencia Artificial
Universidad Politécnica de Madrid

INTRODUCCIÓN

Desde 1965 el concepto de subconjunto borroso se ha ido abriendo paso en el mundo de la ciencia y en el de la tecnología y, a lo largo de esos 33 años, se ha marcado una separación entre lo que puede llamarse “lógica borrosa teórica” y “aplicaciones de la lógica borrosa”. En la primera, básicamente se han estudiado modelos matemáticos con las funciones de $F(E) = [0, 1]^E$ que, conteniendo a los casos clásicos entendidos como estructuras en el conjunto $P(E)$ de las funciones de $\{0, 1\}^E$, pudieran servir para representar a los predicados que aparecen en las aplicaciones. Es decir, los modelos teóricos lo son “como” funciones $\mu : E \rightarrow [0, 1]$ que quepa usar para representar a las funciones de compatibilidad de los predicados en E ; sin embargo, y pese a que frecuentemente se identifique una función con un conjunto borroso, se ha venido aceptando que un conjunto borroso $\underline{P}$ (el de los x de E

que verifican P) tiene existencia por sí mismo aunque, en cada caso, sólo se conozca a través de la función de compatibilidad μ_P que se diseñe de acuerdo con el conocimiento disponible del uso de P en E , en cada problema concreto en consideración.

La existencia de muchas funciones $\mu \in F(E)$ autocontradictorias para cada complemento N fijado en $F(E)$, obliga a plantearse qué clase de objeto es un $\underline{P}$ tal que la μ_P aceptada sea autocontradictoria. Tales objetos existen en la práctica; es el caso en que trabajando con una variable lingüística X de término principal Q y antónimo $\text{ant } Q$, el punto fijo de la negación $n \in (0, 1)$ que se adopte (en general, una N tal que $\mu_{NoQ} \neq \mu_{\text{ant } Q}$) sea tal que el predicado “constantemente igual a r ”, con $r \leq n$, tenga sentido en el problema en estudio.

Por lo tanto, los dos problemas: 1) Si los elementos μ de $F(E)$ vistos como candidatos a representar predicados son, desde algún punto de vista lógico, adecuados, y 2) Si los subconjuntos borrosos $\underline{P}$ representados por ellos tienen alguna entidad teórica adicional a la de μ_P ,

parecen ser problemas que merecen ser estudiados. En el presente escrito se esbozan, de forma previa e incompleta, algunas líneas que tal vez podrían confluír para aclarar aquellos problemas.

1 LOS CONJUNTOS BORROSOS ABSTRACTOS SON “OBJETOS MATEMÁTICOS”

1.1 Es bien conocido que no existe una teoría de los conjuntos borrosos en un universo E , sino muchas teorías de los mismos. Entre ellas, las que pueden llamarse **teorías estándar** se obtienen al fijar una función de negación fuerte N (con un punto fijo $n \in (0, 1)$), una t -norma T y una t -conorma S , con las que se obtienen el complemento $\mu' = N \circ \mu$, la intersección $\mu_1 \cap \mu_2 = T \circ (\mu_1 \times \mu_2)$ y la unión $\mu_1 \cup \mu_2 = S \circ (\mu_1 \times \mu_2)$, de conjuntos borrosos μ_1, μ_2 , etc. **considerados** como elementos de $F(E) = [0, 1]^E$. Tales teorías, sin embargo, han presentado el inconveniente teórico de que, en ellas, no valen universalmente los principios de no-contradicción y del tercero-excluido, salvo en algunos casos particulares. Es decir, que al no ser $\mu \cap \mu' = \emptyset$ ni $\mu \cup \mu' = E$ el complemento no es, realmente, un **complemento**; lo que desde un punto de vista matemático, hace difícil otorgar a cada $\mu \in F(E)$ la consideración de un objeto nítido de la teoría $(F(E), N, T, S)$.

La cosa es algo peor, ya que en $P(E) = \{0, 1\}^E$ hay un único elemento que es autocontradictorio; la ecuación $A \subset A'$ sólo la verifica $A = \emptyset$, cuyo complemento es E . En cambio, en $F(E)$ es $\mu \leq \mu'$ si y sólo si $\mu(x) \leq n$ para todo $x \in E$, con lo cual los complementarios de tales μ autocontradictorios son los $\sigma \in E$ tales que $n \leq \sigma(x)$ para todo $x \in E$. ¿Hay algún punto de vista lógico desde el que formular en $F(E)$ los dos principios del tercero-excluido y no-contradicción?

Obsérvese que el segundo se enuncia en $P(E)$ como “ $A \cap A' = \emptyset$ o, equivalentemente, $A \cap A'$ siempre es autocontradictorio”. Es fácil probar que, en $F(E)$,

siempre es $\mu \cap \mu' = T \circ (\mu \times N \circ \mu)$ autocontradictorio; es decir, que para todo $x \in E$ se verifica $T(\mu(x), N(\mu(x))) \leq n$.

El primer principio se enuncia en $P(E)$ como " $A \cup A' = \emptyset$ " o, equivalentemente, $A \cup A'$ siempre es la negación de una autocontradicción". También es fácil ver que, en $F(E)$, es $n \leq S(\mu(x), N(\mu(x)))$, para todo $x \in E$; es decir, que $\mu \cup \mu'$ es siempre la negación de una autocontradicción.

Por lo tanto, desde ese punto de vista lógico, valen los dos principios referidos y, por tanto, nada se opone a considerar a los $\mu \in F(E) - \{\sigma \in F(E); \sigma \leq n\}$ como objetos matemáticos. Además, la aplicación $\pi : F(E) \rightarrow F(E)$ dada por

$$\pi(\mu) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \mu \text{ es autocontradictorio,} \\ E, & \text{si } \mu \text{ es el complemento} \\ & \text{de una autocontradicción,} \\ \mu, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

da el conjunto $\pi(F(E)) = F_\pi(E) = \{\emptyset, E\} \cup \{\mu \in F(E); \mu \text{ cruza el nivel } n\}$, en el que basta definir las operaciones $\neg\mu = \mu' = N \circ \mu$, $\mu \wedge \sigma = \pi(\mu \cap \sigma)$ y $\mu \vee \sigma = \pi(\mu \cup \sigma)$, para tener la estructura $(F(E), \neg, \wedge, \vee)$ que, heredando algunas de las propiedades de la $(F(E), N, T, S)$, verifica $\mu \wedge \neg\mu = \emptyset$ y $\mu \vee \neg\mu = E$. Así, basta fijar N para que, con π , se disponga del conjunto $F_\pi(E)$ en el cual hay una única autocontradicción y en el que N es realmente un complemento. Los objetos de $F_\pi(E)$, fijada N , son objetos matemáticos.

1.2 Los objetos de $F(E) - \{\mu \in F(E); \mu \leq n\}$, siendo objetos matemáticos, son ya "candidatos" para representar a los subconjuntos de E que son borrosos, análogamente a como las funciones de $\{0, 1\}^E$ lo son a representar subconjuntos clásicos de E : $\mu = \varphi_A$ ssi $A = \mu^{-1}(1)$. Sin embargo, como sea que los predicados vagos sólo pueden conocerse por medio de descripciones de su uso en E , las cosas son más complicadas cuando se trata de representar un predicado vago P por medio de una función de $F(E)$. Sabiendo que no hay grandes problemas con llamar objetos matemáticos a las funciones $F(E)$, o conjuntos borrosos abstractos, dado un predicado vago P , ¿qué clase de objeto es $\underline{P}$, descrito por una función μ_P de $F(E)$?

2 REGLAS Y OBJETOS

2.1 A lo largo del presente siglo se ha producido una evolución muy interesante, desde el punto de vista filosófico, de lo que se entiende por una regla y de lo que se entiende por un objeto.

En el caso de las reglas que se enuncian en la forma

lingüística "Si..., entonces...", no fue hasta que los éxitos de la Estadística impusieron el uso de las del tipo "Si es una mujer y tiene 40 años, entonces aún vivirá más de n años, con probabilidad p ", frente a las del tipo de la "Si es un triángulo rectángulo, entonces el cuadrado de su lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos", que se produjo una aceptación cultural, y no sin resistencias, de otras reglas que las de obligado-cumplimiento. Además de reglas ciertas como la segunda, se toleraron reglas inciertas como la primera no sólo en los campos estrictos del conocimiento matemático, económico y actuarial sino también en los de la biología y otras ciencias naturales. Con ello tales reglas inciertas penetraron en el ámbito más amplio del conocimiento ordinario.

A partir del final de los años sesenta se han venido considerando dignas de estudio, no sin serias disputas también, las reglas imprecisas; reglas que ya estaban, no obstante, en el lenguaje. Es el caso, por ejemplo, de "Si la comida ha sido buena y el servicio excelente, entonces la propina debe ser grande". Se trata de reglas en las que el problema para su aceptación ya no era la incerteza sino la imprecisión y en las que, en todo caso, la incerteza es función de la imprecisión que se manifiesta por la presencia en ellas de predicados vagos o graduados como son, en la anterior, **buena** aplicado a las comidas, **excelente** predicado de los servicios y **grande** de las propinas. Son reglas cuyo cumplimiento se supone en un cierto grado; un grado que no es necesariamente una probabilidad, al no poder estructurar siempre el conocimiento en la forma de álgebra de Boole, de retículo ortomodular o de retículo intuicionista y, muchas veces, ni siquiera de retículo por no disponer de información suficiente.

Muchos estudios y aplicaciones de las reglas imprecisas se han realizado, en los últimos treinta años, al representarlas por un nuevo tipo de objetos, los conjuntos borrosos, introducidos por Lotfi A. Zadeh en 1965. Con ellos, muchos tipos de reglas imprecisas se asimilan, paso a paso, a un conjunto borroso (una relación borrosa, de hecho), identificando cada predicado vago con un conjunto borroso del correspondiente universo del que se predica (el conjunto borroso de las comidas buenas, el de los servicios excelentes y el de las propinas grandes, en el ejemplo) y combinándolos de acuerdo con determinados cálculos para obtener un conjunto borroso de determinado espacio producto (comidas $\times$ servicios $\times$ propinas, adecuadamente cuantificados).

Para representar un predicado por un conjunto borroso, hay que partir de su uso al predicarlo de los elementos del universo del discurso; tal uso se explicita muchas veces por medio de reglas de las que, naturalmente, algunas son imprecisas. Por ejemplo, en una

escala reducida de 0 a 1, el predicado G =grande puede describirse por las siguientes reglas de uso del mismo con los valores x de esa escala:

- 1) Si $x = 0$, x no es grande
- 2) Si $x = 1$, x es grande
- 3) Si x es grande e $y > x$, y es grande
- 4) Si x es grande, existe un número de la forma 10^{-n} tal que $x - 10^{-n}$ es grande

Tales reglas llevan a un modelo matemático de la función μ_G de pertenencia de los x a los subconjuntos borrosos de los números grandes del intervalo unidad:

$$\mu_G(x) = f(x), \text{ para todo } x \text{ de } [0, 1],$$

donde

- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
- $f(0) = 0, f(1) = 1$, por 1 y 2
- f es creciente, por 3
- f es continua, por 3 y 4.

Es decir, aquellas reglas indican que μ_G es una función creciente, continua y que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Con eso no se individúa, naturalmente, una única función μ_G ; hacen falta más datos para concretarla, lo que no es de extrañar ya que, aun siendo la escala numérica la misma, el predicado G puede referirse a problemas muy distintos (a propinas, distancias astronómicas, altura de pigmeos, altura de batusis, etc.). La función f es un patrón para muchos casos particulares de uso del predicado G . Así, con la información adicional, y tal vez experimental, de que μ_G debe ser lineal, de $f(x) = ax + b$ (que es creciente y continua) se sigue inmediatamente que es $f(x) = x$ al imponerle el paso por $(0, 0)$ y por $(1, 1)$.

En todo uso de G se siguen las reglas 1 a 4 que describen su uso genérico en $[0, 1]$, pero en cada caso particular se usan algunas más. En concreto, $\mu_G(x) = x$ es la función de pertenencia de los x de $[0, 1]$, al subconjunto borroso **grande** cuando su nombre (el predicado G) se usa según las reglas 1, 2, 3, 4 y la regla:

- 5) Los grados con que se afirma " x es G " varían linealmente con x .

Aparece así un nuevo objeto, el "subconjunto borroso" E de nombre P , del que es un caso particular el anterior objeto matemático "subconjunto" de E , que tiene una única función de pertenencia, la función característica del mismo, ya que sus reglas de uso son precisas. Lo que no significa en ninguno de los casos que, para cada x de E , se pueda o sea fácil calcular $\mu_P(x)$, como ilustra el caso $E = \mathbb{R}$, P =trascendente, que sigue una única regla de uso, "Si x no es raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros, entonces " x

es P "", que pese a ser totalmente precisa es muy difícil de comprobar; de hecho, su comprobación para cada $x \in \mathbb{R}$ es un gran problema matemático que, en general, no es decidible.

A los conjuntos borrosos se puede llegar por un proceso creciente de objetivización, a través de las reglas de uso de sus nombres en aquellos razonamientos en los que aparecen, y que generalmente, vienen expresadas en un lenguaje que contiene al del dominio en cuestión. Conocer un predicado es conocer cómo usarlo en el lenguaje y, frecuentemente, su observación y alguna experimentación llevan a sus reglas de uso.

Mucho del conocimiento que poseemos puede expresarse por reglas; es conocimiento reglado. Por eso, finalmente, tales conjuntos borrosos se han llegado a ver como unos nuevos objetos en el mundo de la ciencia y de la técnica. Se ha llegado a una formalización inicial de algo que, no obstante, ya estaba en el lenguaje ordinario; al decir, por ejemplo, "los jóvenes de esta ciudad" no se quiere decir algo tan preciso como "el subconjunto de habitantes de esta ciudad cuya edad es inferior a 23 años". Hay que observar que la función $\mu_G(x) = f(x)$ describe el uso genérico de G en $[0, 1]$ y que sólo al llegar a concretarla a, p.ej., $\mu_G(x) = x$ se tiene la función de pertenencia a un conjunto borroso.

2.2 Análogamente, en la física el concepto de objeto ha tenido una evolución que se asemeja a la que va desde "subconjunto" a "subconjunto borroso". Del electrón como bolita girando alrededor del núcleo, en los primeros modelos del átomo, al electrón en los modelos cuánticos, se produce un salto conceptual notable. En los primeros modelos, el electrón era un objeto físico análogo a un planeta, pero muchísimo más pequeño; en los segundos, un tal objeto físico ha desaparecido, aunque de él queda el nombre. Un nombre del que sólo se reglamenta que cada región del orbital tiene una cierta probabilidad cuántica (que no booleana) de que sea indirectamente observado en ella por su efecto en otras partículas. Observación que, por su parte, está sometida a indeterminaciones relativas a la medición simultánea de las variables dinámicas del "electrón"; el actual objeto físico "electrón" es más un conjunto-borroso-de-situaciones-dinámicas no determinables simultáneamente con precisión, que no un objeto físico como Júpiter. Si es que el conocimiento de Júpiter pudiese ser tan preciso como el de los números pares.

El concepto de probabilidad se aplica a "sucesos" que no son, por su misma naturaleza, imprecisos sino inciertos. El resultado de lanzar un dado es, inciertamente, uno y solo uno de los precisos números 1 al 6. En la Mecánica Cuántica ha debido adaptarse la definición de probabilidad a un conjunto de sucesos

que no está estructurado en álgebra de Boole (como en el caso del dado) sino en un retículo ortomodular. En tales retículos ya no hay coincidencia entre incoherencia y contradicción; la propiedad aditiva de las probabilidades cuánticas no se define para sucesos incoherentes sino contradictorios, esto es, que uno implica al complemento del otro. Schrödinger, en una famosa carta a Einstein de 1950, afirmó: "Probability surely has as its substance a statement as to whether something is or is not the case—an uncertain statement, to be sure. . . A probabilistic assertion presupposes the full reality of its subject. . . But the quantum mechanics people sometimes act as if probabilistic statements were to be applied just to events whose reality is vague". La disputa de si, en la realidad física, hay "objetos" de naturaleza estadística ha estado lleno de controversias; sin embargo, en la misma carta Schrödinger afirma que "It is probably justified in requiring a transformation of the image of the real world as it has been constructed in the last 300 years".

2.3 Cuando el conocimiento puede reglamentarse deviene un conocimiento mejor, que ya no sólo consiste en un "concepto" sino en cómo se gestiona en un ámbito determinado a partir de un "patrón"; con ello, el concepto adquiere un dinamismo que permite perfeccionarlo e ir eliminando los subjetivismos, inevitables en una primera fase, hasta una objetivización que le confiere una o varias entidades. El conocimiento del concepto se transforma en el de algo más delimitado; el de un objeto.

Por ejemplo, los conjuntos borrosos permiten pasar de las afirmaciones " x es P ", con un predicado vago P , a las afirmaciones " x está en el conjunto borroso de nombre P ". De una afirmación "vocativa" se pasa a una "locativa"; un conjunto borroso no representa sino una manera de dar "extensión" matemática a P , en el correspondiente universo de discurso. Por eso, de " x es P y Q " se pasa a " x está en la intersección de los conjuntos borrosos de nombres P y Q ". Del concepto genérico del predicado vago "grande" en $[0, 1]$ dado por el patrón $\mu_G(x) = f(x)$, se pasa al objeto G =conjunto borroso de los números grandes de $[0, 1]$, con $\mu_G(x) = x$, y a decir, por ejemplo, $0.7 \in G$.

Tal vez, un concepto que no permite llegar a objetos en distintos ámbitos es poco fértil. Además, en general las regulaciones suelen llevar hasta modelos matemáticos que representan a los conceptos y que, más allá de sólo observarlos (lingüística o físicamente), permiten experimentarlos a través de los parámetros (generalmente numéricos) que en ellos aparecen.

Tal vez una gran parte de la ciencia conste de procesos que llevan, desde conceptos, a objetos conceptuales o

patrones lo mejor regulados posible. Tal vez, un objeto no es más que un concepto reglamentado y purificado a través de observación, experimentación y teorización.

3 OBJETIVIZAR COMO ASEMEJAR Y DISTINGUIR

3.1 Un calificativo que, frecuentemente, se aplica a la Ciencia es el de "objetiva". Con él se pretende desmarcarla de lo "subjetivo" en líneas de pensamiento que tienden a separar lo que son los objetos de atención de los sujetos que les ponen atención. Supuesto que la Ciencia fuese objetiva, entonces habría que admitir la existencia de procesos de objetivización; muchos conceptos científicos actuales pueden rastrearse desde antiguos conceptos que merecían el calificativo de subjetivos, al haber sido supuestos en base a consideraciones no experimentales o imposibles de experimentar con los instrumentos, técnicas o metodologías, disponibles en su momento.

Objetivizar un concepto significa encontrarle semejanzas con otros conceptos que se corresponden con objetos aceptados y, a la vez, delimitarlo de tal manera que puedan serle atribuídas diferencias que, con respecto a esos objetos similares, lo individúen por lo menos idealmente. En suma, significa aceptar que se puede hablar de él como un **objeto** de cierta clase. Según George Boole, si hay lógica es debido a la capacidad de las personas de ver clases y darles nombre; es decir, de conferir a las clases un estado objetivo, de nuevos objetos, que las distinga de los objetos que las permiten ver como clases. Si un proceso de objetivización termina, lo hace en un objeto.

En buena parte se sigue manteniendo una separación, a veces no declarada, entre objetos físicos y objetos de pensamiento, basada en que los primeros son, o pueden ser, **accesibles** a los sentidos humanos, en tanto que los otros no pueden serlo. Con ello se asigna a la razón un carácter no sensorial; se considera al cerebro humano subjetivamente, alejándolo de su carácter de sistema físico de razonamiento con características musculares (como músculo del razonamiento) y funcionamiento electroquímico, autorregulado en condiciones de normalidad.

Esa separación entre objetos físicos (dotados de algún concepto, generalmente no bien expresado, de extensión) y objetos de pensamiento (sin extensión alguna), lo es por criterios de distinción que, aún si lo fuesen, serían dudosos. Por una parte, para los matemáticos un conjunto tan complicado como es el de los números trascendentes es un objeto, por lo menos entre los subconjuntos de los números reales; y muchos objetos aceptados como tales por los físicos, son accesibles a los sentidos humanos únicamente a través del

pensamiento y por medio de representaciones teóricas, contrastadas con mediciones siempre inexactas de las variables que, en esas teorías, se aceptan como conceptualmente características.

De hecho, en el s.XX se ha llegado a la categoría de objeto físico desde conceptos que nadie ha visto, oído, tocado, olido ni gustado, y que nunca nadie podrá hacerlo directamente. A objetos que sólo pueden llegar al conocimiento humano por sombras, o trazas, obtenidas con métodos experimentales de extraordinaria finura en relación con los anteriormente usados. Parece como si el concepto de objeto se generase a partir de unas subjetividades comunes entre grupos de personas que, a partir de determinado momento, aceptan unos patrones conceptuales como objetos.

Es cierto, sin embargo, que las sombras son engañosas y que la imaginación las puede interpretar a su gusto; cualquiera puede proyectar su mano en la pared para que aparezca una cabeza de perro como sombra. Pero esa sombra que otra persona ve, no es sino una sombra de la mano; algo que puede revelarse sin más que prender la luz del techo. Precisamente, a conceptos de una teoría física que no sea contradictoria con lo que se conoce, se les puede dar el nombre de objetos si se les ha exigido una descripción por variables numéricas que, aunque sea por procedimientos experimentales muy sofisticados, pueden ser medidas con criterios adecuados de acotación de los errores que, necesariamente, deberán producirse en el acto de efectuar tales mediciones, y que, por lo menos idealmente, puedan ser repetidos por cualquier grupo de expertos que disponga de los útiles correspondientes. Las medidas de la sombra, teniendo en cuenta como se ha obtenido la misma, permiten conceptualizar, hasta cierto punto como una entidad extensa, aquello que arroja la sombra.

Se trata de algo substancialmente distinto de medir la altura de un determinado campanario por medio de la sombra que arroja, cuando el Sol está a una cierta altura sobre el horizonte. En aquellos casos no se conoce directamente el campanario y más bien se trataría, en un símil, de "conocida la altura del Sol y medidas las dimensiones de la sombra, así como descrita su forma, describir el patrón de un objeto desconocido que la pueda arrojar y, luego de perfilado, ver de hacerlo accesible a los sentidos por algún procedimiento aunque sea indirecto".

Cuando un tal "objeto", desconocido, ha podido ser descrito y hasta cierto punto conceptualizado habrá sido por cuanto, por lo menos, se han encontrado procedimientos para relacionarlo con otros objetos semejantes y se ha conseguido distinguirlo de ellos.

En general, la palabra "distinguir" refiere la existencia

de alguna distancia entre lo que se pretende distinguir; establecida una distancia que parezca razonablemente adecuada, los objetos similares serán tanto más distintos contra mayor sea la distancia entre ellos y en función, por otra parte, de la sensibilidad de la distancia en el ámbito considerado.

He aquí un ejemplo de Karl Menger que es sugerente. Una persona ciega que dispone de un lápiz afilado puede tocar con él un punto A de su piel, en alguna parte de su cuerpo, de tal manera que al mover ligeramente el lápiz a un nuevo punto B (muy próximo al A) no diferencie las dos sensaciones táctiles producidas. Empezando otra vez en B puede lograr otra posición C que no diferencie de B pero que, no obstante, diferencie claramente de A; entonces, para dicha persona es $a = b$, $b = c$ pero $a \neq c$, siendo a , b y c las sensaciones que percibe, respectivamente, de A, B y C. Con ello si, por ejemplo, el lápiz lo aplicase otra persona no ciega, la primera no conceptualizaría la existencia de los puntos A, B, C, ..., etc., como la segunda, sino una serie de pequeñas regiones que le devuelven una sensación única; sus elementos sensitivos mínimos, sus puntos, serían para el observador externo una especie de elipses irregulares de bordes imprecisos. Para una distancia conveniente entre los puntos no sería " $a = b$ si y sólo si $d(A, B) = 0$ ", sino " $a = b$ si y sólo si $d(A, B) < u$ ", siendo u un determinado umbral de distinción sensitiva propio de la zona pinchada y, tal vez, de la persona.

Como sea que toda distancia tiene la propiedad de la desigualdad triangular:

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C),$$

para cualesquiera A, B y C, la primera definición lleva a una relación que es transitiva (ya que sería $d(A, C) \leq 0 + 0 = 0$), en tanto que la segunda sólo lleva a $d(A, C) < 2u$. En el primer caso, de $a = b$ y de $b = c$ se seguiría necesariamente $a = c$, en tanto que en el segundo la transitividad no se sigue necesariamente para el observador externo.

Un tal ejemplo es típico de todas las situaciones que requieren un acceso a los sentidos o a cualquier sistema de detección; en todo caso, hay un umbral de detección por debajo del cual el detector nada detecta. Por lo tanto, los objetos nunca podrán ser total o nítidamente distinguidos de otros, ni a través de los sentidos ni a través de sensores artificiales, aunque naturalmente se tenderá a disponer de sensores con umbral u tan pequeño como sea posible; pero u nunca llegará a ser cero y, por consiguiente, la transitividad podrá quedar reducida al mundo interior pero no a su representación externa. Para pescar, si la malla de la red es muy fina se pescarán peces pequeños, pero si es grande sólo se pescarán aquellos peces que no pasen por ella; pode-

mos creer, con ello, que no hay más peces que los que se pescan.

Todo lo dicho abre la puerta a una ampliación del antiguo concepto de objeto físico y, de hecho, si las partículas subatómicas se consideran objetos físicos es por cuanto se ha ido ya más allá de esa puerta.

3.2 Pero no sólo las partículas de la Física, sino que también conceptos del lenguaje se consideran como objetos. Lo que aporta la lógica borrosa es, básicamente, poder considerar a un predicado P sobre un universo del discurso, como un nuevo objeto, el subconjunto borroso de nombre P , que le da extensión. Por eso en el lenguaje se habla de "los jóvenes de esta ciudad" como si se tratase del mismo tipo de concepto que "las manzanas de este cesto" por cuanto se considera que hay cierta semejanza entre ellos. Por eso, también, un conjunto borroso de nombre P sólo puede individuarse por una única función de pertenencia μ_P , a partir del universo de elementos sobre los que predicamos P , las reglas de uso genérico de P en tal universo y algunas condiciones o hipótesis adicionales.

La lógica borrosa autoriza, con limitaciones, a considerar las frases del lenguaje ordinario como objetos más parecidos a las elipses sensitivas de la piel que no a un cesto de manzanas, como se sigue de razonamientos como el siguiente.

Si P es un predicado sobre un universo de discurso E , la función $d_P : E \times E \rightarrow [0, 1]$, definida por $d_P(x, y) = 1 - \text{Min}(\mu_P(x), \mu_P(y))$, para cualesquiera x e y de E , verifica:

1) $d_P(x, y) = d_P(y, x)$, para cualesquiera x e y de E ;
2) $d_P(x, z) \leq d_P(x, y) + d_P(y, z)$, para cualesquiera x, y, z de E ;
3) $d_P(x, x) = 0$ si y sólo si $\mu_P(x) = 1$. Así, d_P verifica las leyes de simetría y de la desigualdad triangular, pero sólo verifica la propiedad $d_P(x, x) = 0$, para todo x , si x está en el conjunto $\{x \in E; \mu_P(x) = 1\}$. Por tanto:

- a) Si P es un predicado nítido, d_P "distingue" perfectamente a los elementos de la extensión $\underline{P}$ de los de $E - \underline{P}$. En tal caso, es $d_P(x, y) \in \{0, 1\}$ para todos los x, y de $\underline{P}$ y, en concreto:

$$\begin{aligned} d_P(x, y) &= 1 - \text{Min}(\mu_P(x), \mu_P(y)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{ssi } x \notin P \text{ ó } y \notin P \\ 0 & \text{ssi } x \in P \text{ y } y \in P \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Si P es un predicado vago, es $d_P(x, y) = 1 - \text{Min}(\mu_P(x), \mu_P(y)) \geq u$ ssi $\text{Min}(\mu_P(x), \mu_P(y)) \geq 1 - u$ ssi $1 - u \leq \mu_P(x) \leq \mu_P(y)$ ó $1 - u \leq \mu_P(y) \leq \mu_P(x)$.

Si $x, y \in \{x \in E; \mu_P(x) = 0\}$, entonces y sólo entonces $d_P(x, y) = 0$; y si $x, y \notin \{x \in E; \mu_P(x) = 0\}$ entonces y sólo entonces $d_P(x, y) = 1$. En general, dos elementos de E distan por encima de un determinado umbral u sólo si los grados de pertenencia de ambos al conjunto borroso $\underline{P}$ están

por encima del umbral complementario $1 - u$; naturalmente, si u es pequeño, entonces $1 - u$ será grande, y recíprocamente.

Por ejemplo, si $P = \text{Grande}$ y $\mu_P(x) = x$, $E = [0, 1]$, $u = 0.1$:

$$\begin{aligned} d_P(x, y) &= 1 - \text{Min}(x, y) > 0.1 \Leftrightarrow \\ &\text{Min}(x, y) < 0.9 \Leftrightarrow x \leq y < 0.9 \text{ ó } y \leq x < 0.9. \end{aligned}$$

Es decir, con el umbral $u = 0.1$, sólo pueden distinguirse como grandes bajo d_P los pares de números x, y que sean, ambos, menores que 0.9. Si los dos son mayores o uno menor y el otro mayor, no se distinguen.

Nótese que d_P actúa como instrumento de distinción.

3.3 Si el grado de distinguibilidad entre los elementos de E se modeliza a través de una distancia d , el grado de indistinguibilidad podrá modelizarse a través de una función $I_d(x, y) = 1 - d(x, y)$, que transforma $E \times E$ en $[0, 1]$. Tal función I_d verifica las propiedades:

- Reflexiva, ya que $I_d(x, x) = 1 - d(x, x) = 1$
- Simétrica, ya que $I_d(x, y) = 1 - d(x, y) = 1 - d(y, x) = I_d(y, x)$
- W-Transitiva, ya que $W(I_d(x, y), I_d(y, z)) = \text{Max}(0, I_d(x, y) + I_d(y, z) - 1) = \text{Max}(0, 1 - d(x, y) - d(y, z)) = 1 - \text{Min}(1, d(x, y) + d(y, z)) \leq 1 - d(x, z) = I_d(x, z)$,

cualquiera que sean x, y, z de E . Por tanto, I_d es una Equivalencia Generalizada o W-Indistinguibilidad; es un conjunto borroso de $E \times E$ y sus "clases de equivalencia" son los conjuntos borrosos de E dados por $\mu_{x_0}(y) = I_d(x_0, y) = 1 - d(x_0, y)$, para cada $x_0 \in E$ y todos los $y \in E$.

Todas las clases de equivalencia generalizada verifican:

$$\begin{aligned} W(\mu_{x_0}(y), I_d(y, z)) &= W(I_d(x_0, y), I_d(y, z)) \\ &\leq I_d(x_0, z) = \mu_{x_0}(z), \end{aligned}$$

con lo que resulta

$$\sup_{y \in E} W(\mu_{x_0}(y), I_d(y, z)) \leq \mu_{x_0}(z),$$

para todo z de E , y si ese supremo es positivo, todos los z están en algún grado en la clase de x_0 : todos los z tienen un grado positivo de indistinguibilidad con x_0

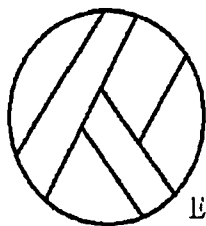
Por ejemplo, si $E = [0, 1]$ y $d(x, y) = |x - y|$, con $x_0 = 1$, es $W(1 - |1 - y|, 1 - |y - z|) = \text{Max}(0, \text{Min}(z, 2y - z))$, cuyo $\text{Sup}_{y \in [0, 1]}$ es z . Por tanto, $z = \mu_1(z)$: todos los $z \in [0, 1]$ están en la clase de indistinguibilidad de $x_0 = 1$ del que son indistinguibles con grado: $I_d(1, z) = 1 - |1 - z| = z$.

Con $x_0 = 0$, es $W(1 - |1 - y|, 1 - |y - z|) = \text{Max}(0, \text{Min}(1 + z - 2y, 1 - z))$, cuyo $\text{Sup}_{y \in [0, 1]}$ es $1 - z$.

Por tanto, $1 - z \leq \mu_0(z)$: todos los $z \in [0, 1]$ están en la clase de indistinguibilidad de $x_0 = 0$ con grado a lo menos $1 - z$, y son indistinguibles de 0 con grado $1 - z$, ya que $I_d(0, z) = 1 - |0 - z| = 1 - z$.

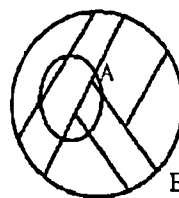
4 LO OBSERVABLE ENTRE LO SEMEJANTE

4.1 Con frecuencia, el proceso de distinguir entre semejantes significa que el universo del discurso E está provisto de una partición E/S dada por una relación S de equivalencia; tal partición es una "malla" superpuesta a E que hace indistinguibles a los elementos de cada nicho o gránulo de la misma, siendo distinguibles sólo los elementos que están en gránulos distintos. Con ello, de un subconjunto A de E sólo resultan distinguibles los elementos que están en gránulos distintos; sólo podrán "observarse" aquéllos que estén en gránulos distintos. El instrumento sólo ve los gránulos y no ve dentro de ellos.

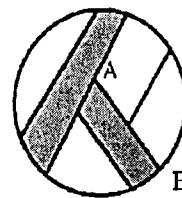


Un subconjunto $A \subset E$ se dirá S -observable, o bien observable por E/S , si para cada $x \in A$ y cada $y \in E$ tal que xSy , es $y \in A$. En otro caso, A no será totalmente observable por medio de la malla o partición. Está claro que:

- 1) A es S -observable $\Leftrightarrow \text{Min}(\varphi_A(x), \varphi_S(x, y)) \leq \varphi_A(y), \forall x, y \in E$
- 2) A es S -observable $\Leftrightarrow A$ es reunión de clases de equivalencia o gránulos.



A no es observable



A es observable

Sea $\mathcal{O}_S(E) = \{A \subset E; A \text{ es } S\text{-observable}\}$. Obviamente, $\emptyset, E \in \mathcal{O}_S(E)$, y es fácil probar el siguiente

Teorema. 1) Si $A, B \in \mathcal{O}_S(E)$, es $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{O}_S(E)$; 2) Si $A \in \mathcal{O}_S(E)$, es $A' \in \mathcal{O}_S(E)$.

Corolario. $\mathcal{O}_S(E)$ es el álgebra de Boole de partes de E generada por la partición E/S .

4.2 ¿Qué sucede cuando A es un subconjunto borroso $\underline{P}$ y $\underline{S}$ es una relación imprecisa de indistinguibilidad?

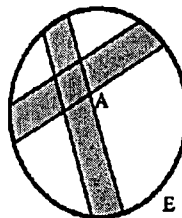
Es decir, ¿qué definición de observabilidad puede darse para $\underline{P}$ bajo $\underline{S}$? Cabe generalizar la desigualdad (1) con la definición

$$\underline{P} \in \mathcal{O}_{T,S}(E) \Leftrightarrow T(\mu_P(x), \mu_S(x, y)) \leq \mu_P(y), \forall x, y \in E,$$

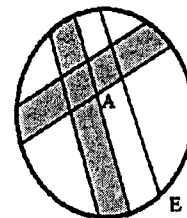
con T una t-norma continua. Obviamente, si $\underline{P} = A$, $\underline{S} = S$ y $T = \text{Min}$, aquella desigualdad resulta un caso particular.

Sin embargo, si se mantiene que la reunión y la intersección de observables es un observable, en general, la negación deja de ser observable. Ello, no obstante, es coherente con la idea de que la vaguedad de un predicado P está totalmente ligada a la de $\text{no } P$.

4.3 Obviamente, la observabilidad de un conjunto A de E depende de S .



A observable por E/S_1



A no observable por E/S_2

Lo mismo sucede con los subconjuntos borrosos. Así, si $G = \text{Grande}$ en $E = [0, 1]$, y:

a) $S_1(x, y) = 1 - |x - y|$ es una W -Indistinguibilidad. Con $\mu_P(x) = x$, es $W(x, 1 - |x - y|) = \text{Max}(0, x - |x - y|) \leq y$. $\underline{G}$ es un conjunto borroso $W - S_1$ -observable.

b) $S_2(x, y) = \text{Min}\left(\frac{1+x}{1+y}, \frac{1+y}{1+x}\right)$ es una Prod-Indistinguibilidad. De

$$x \cdot S_2(x, y) = x \cdot \text{Min}\left(\frac{1+x}{1+y}, \frac{1+y}{1+x}\right),$$

sigue:

$$1 \cdot S_2(1, y) = \text{Min}\left(\frac{2}{1+y}, \frac{1+y}{2}\right),$$

que, con $y = 0.5$, da $1 \cdot S_2(1, 0.5) = \text{Min}\left(\frac{2}{1.5}, \frac{1.5}{2}\right) = \text{Min}(1.33, 0.75) = 0.75 > 0.5$. Es decir, al no ser $\text{Prod}(1, S_2(1, 0.5)) \leq 0.5$, $\underline{G}$ no es $\text{Prod} - S_2$ -observable.

4.4 Una probabilidad p , definida en un álgebra de Boole $E = \{x, y, \dots\}$ verifica:

- Si $S_1(x, y) = p(y|x)$, $p(x) \cdot p(y|x) = p(x \cdot y) \leq p(y)$
- Si $S_2(x, y) = p(x' + y)$, $W(p(x), p(x' + y)) = p(x \cdot y) \leq p(y)$;

sin embargo, S_1 , que es reflexiva, no es simétrica ni Prod-transitiva, y S_2 , que es reflexiva y W -transitiva, no es simétrica. Por lo tanto, al no ser las S_i indistinguibles para las correspondientes t -normas, no cabe afirmar que una probabilidad p arbitraria sea, propiamente, un observable. ¿Existe una t -norma continua T y una indistinguibilidad S tales que $T(p(x), S(x, y)) \leq p(y)$; es decir, si p es $S - T$ -observable? Por ejemplo, con $T = \text{Prod}$ (basta tomar $S(x, y) = \text{Min}\left(\frac{p(x)}{p(y)}, \frac{p(y)}{p(x)}\right)$). El problema está en el significado de esta respuesta afirmativa: ¿Qué quiere decir, en el marco de la teoría de la probabilidad, "observar" el objeto p , una probabilidad?

Es sabido que R es una Prod-Indistinguibilidad en E si y sólo si existe una familia F de funciones $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+ - \{0\}$, tales que $R(x, y) = \inf_{f \in F} \text{Min}(f(x)/f(y), f(y)/f(x))$, para todo $(x, y) \in E \times E$. Los valores $f(x), f(y), \dots$, pueden interpretarse (para diversas $f \in F$) como mediciones diferentes de los elementos $x, y, \dots$ de E . Con este resultado, si E es un álgebra de Boole y p una probabilidad en ella, como $R(0, 1) = 0$, si $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ es una familia finita, resulta que de $0 = R(0, 1) = \text{Min}\left(\frac{f_1(0)}{f_1(1)}, \frac{f_1(1)}{f_1(0)}, \dots, \frac{f_n(0)}{f_n(1)}, \frac{f_n(1)}{f_n(0)}\right)$ sigue que, bien para alguna f_i es $f_i(0) = 0$, bien para alguna f_j es

$f_j(1) = 0$; lo que es absurdo. Por lo tanto, p no resulta Prod-Observable por medio de ninguna Prod-Indistinguibilidad generada por un número finito de funciones positivas: la probabilidad p no es observable por medio de ningún número finito de mediciones de los sucesos a los que se aplica.

Sin embargo, la función $d_p : E \times E \rightarrow [0, 1]$ definida por $d_p(x, y) = 1 - p(x \Delta y)$, es una distancia. Tal distancia tiene un papel relevante en la definición de p -medibilidad de los y de E , cuando p se establece inicialmente sólo para sucesos "elementales" y a través de la definición " y es p -medible si para cada $\varepsilon > 0$ existe un suceso elemental x tal que $d_p(y, x) \leq \varepsilon$ ". Es decir, los sucesos p -medibles son los que se aproximan con tanta precisión como se quiera por sucesos elementales. La función $I_p = 1 - d_p$ es una W -Indistinguibilidad, naturalmente ligada a p , y con ella es: $W(p(x), I_p(x, y)) = W(p(x), 1 - p(x \Delta y)) \leq W(p(x), p(x \rightarrow y)) \leq p(y)$. Es decir, p resulta ser un $W - I_p$ -Observable. Debe notarse que I_p no es la mayor W -Indistinguibilidad; ésta es $\text{Min}(1 - p(x) + p(y), 1 - p(y) + p(x)) = 1 - |p(x) - p(y)|$, respecto de la cual también es p observable, ligado esta vez a la distancia euclídea $|p(x) - p(y)|$.

4.5 En el caso, antes considerado, del conjunto borroso $\underline{G}$ de los "números grandes del intervalo unidad $[0, 1]$ ", ¿hay alguna T -Indistinguibilidad que lo haga observable de forma naturalmente ligada al uso de G en $[0, 1]$?

Si aceptamos que las reglas de uso de G (de la 1 a la 4) se verifican en un cierto grado, dado por alguna T -Indistinguibilidad básica J_f^T (era $\mu_G = f$), resulta $J_f^T(1, y) = f(y)$, es decir, que la función genérica f es la clase de indistinguibilidad del prototipo $x = 1$. Pero, ¿qué t -norma T hay que elegir? Ninguna de las reglas 1 a 3 da pista alguna para ello; sin embargo, con las reglas 4 y 5, el único caso en que el valor $J_{id}^T(x, x - 10^{-n})$ resulta independiente de x (para $T = \text{Min}, \text{Prod}$ y W) es con $T = W$, en que es $1 - 10^{-n}$ (en tanto que con $T = \text{Min}$ es $x - 10^{-n}$, y con $T = \text{Prod}$ es $1 - 1/x \cdot 10^{-n}$).

Por tanto, si G se usa en $[0, 1]$ según las reglas graduadas 1 a 5, si el grado de las reglas 1 a 4 está dado por una T -Indistinguibilidad J_{id}^T , y si la 4 vale con grado $1 - 10^{-n}$, entonces el subconjunto borroso $\underline{G}$ es $W - J_{id}^W$ -observable en una forma que cabe considerar naturalmente asociada al uso de G en $[0, 1]$.

REFERENCIAS

- (1) K. Menger, 1951, Probabilistic Theories of Relations, PROC.NAT.AC.SCI.USA., 37-3, pp. 178-180.

- (2) H. Reichenbach, 1951, *The Rise of Scientific Philosophy*, University of California Press (Berkeley).
- (3) E. Trillas, 1983, Sobre la "igualdad" de conjuntos borrosos, *REV. REAL ACAD. CIENCIAS*, LXXVI-4, pp. 895-899.
- (4) E. Trillas y L. Valverde, 1984, An Inquiry into Indistinguishability Operators, *ASPECTS OF VAGUENESS* (eds. H.J. Skala et altri, Reidel Pubs. (Dordrecht), 231-256.
- (5) J.M. Terricabras y E. Trillas, 1988, Some Remarks on Vague Predicates, *THEORIA*, 10, 1-12.
- (6) E. Trillas, 1993, Apunte sobre la indistinguibilidad, *THEORIA*, VIII, 19, pp. 23-49.
- (7) E. Trillas, 1994, On Membership and Fuzzy Logic States, *PROC. 2nd EUFIT*, Vol. 2, 796-801.
- (8) E. Trillas, C. Alsina y J.M. Terricabras, 1995, *Introducción a la lógica borrosa*, Ed. Ariel (Barcelona).
- (9) E. Trillas, Theories of Vagueness, aparecerá en el *HANDBOOK OF FUZZY COMPUTATION* (Eds. E. Ruspini et altri, Oxford University Press).
- (10) S.V. Ovchinnikov, 1984, Representations of Transitive Fuzzy Relations, *ASPECTS OF VAGUENESS* (Eds. H.J. Skala et altri, Reidel Pubs (Dordrecht), 105-118.
- (11) A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin, 1961, *MEASURE, LEBESGUE INTEGRALS AND HILBERT SPACE*, Academic Press (New York).
- (12) E. Trillas, C. Alsina y J. Jacas, 1998, Contradiction in Fuzzy Logic, aparecerá en *SOFT COMPUTING*.

EQUIVALENCIAS ENTRE PREORDENES Y OPERADORES DE CONSECUENCIAS DIFUSOS.

Jorge Elorza¹

Dep. de Matemática e Informática
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía s/n
31006 Pamplona. España
e-mail: elorza@si.upna.es
Tel: 948169556 Fax: 948169521

¹ Correspondencia de autores

Pedro Burillo

Dep. de Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía s/n
31006 Pamplona. España
e-mail: pburillo@si.upna.es
Tel: 948169252 Fax: 948169281

Resumen

Es conocido el hecho de que dado un preorden borroso definido en un universo X , el operador inducido por el mismo resulta un operador de consecuencias (FCO) sobre el mismo universo X . Por otro lado, es también conocido el hecho de que dado un FCO coherente sobre X , la relación inducida por dicho operador resulta un preorden. El propósito del presente artículo es analizar los recíprocos de los dos resultados anteriores, es decir, examinar si ambas condiciones suficientes son o no necesarias. Se muestra, en particular, una caracterización del concepto de preorden en términos del operador inducido por la relación y se proporcionan diversas caracterizaciones, según distintos contextos del hecho de que un operador induzca una relación de preorden sobre el mismo universo en el que está definido.

Palabras clave: Fuzzy consequence operator, coherent operator, closure operator, fuzzy preorder, fuzzy logic.

1 INTRODUCCION

El concepto de preorden borroso ha sido ampliamente tratado en la teoría de conjuntos difusos (Fuzzy Set Theory), introducida por L. Zadeh en 1.965 ([16]).

En el presente artículo, $*$ denotará una t-norma arbitraria.

Dado X un conjunto universal no vacío, un $*$ -preorden borroso sobre X será una relación R , definida en X , verificando :

(R1) $R(x, x) = 1 \forall x \in X$ (reflexiva)

(R2) $R(x, z) \geq R(x, y) * R(y, z) \forall x, y, z \in X$ ($*$ -transitiva)

En el ámbito de la lógica borrosa, resulta relevante el concepto de operador de consecuencias difuso (Fuzzy Consequence Operator), abreviadamente FCO.

Fijado un retículo completo L , que constituye el rango de las funciones características de los subconjuntos fuzzy de X , J. Pavelka introduce el concepto de FCO sobre X ([11]) como una aplicación $C : L^X \rightarrow L^X$, que verifica :

(C1) $\mu \subset C(\mu) \forall \mu \in L^X$ (inclusión)

(C2) Si $\mu_1 \subset \mu_2 \Rightarrow C(\mu_1) \subset C(\mu_2) \forall \mu_1, \mu_2 \in L^X$ (monotonía)

(C3) $C(C(\mu)) \subset C(\mu) \forall \mu \in L^X$ (idempotencia)

Obsérvese que, bajo el axioma de inclusión, la idempotencia puede escribirse, equivalentemente, en la forma :

$$C(C(\mu)) = C(\mu) \forall \mu \in L^X \quad (C3')$$

Tales operadores son también estudiados, en un contexto más general, con el nombre de operadores clausura ([15]), ([7]) y, en la última década, han sido tratados ([1]), ([2]), ([4]), ([8]), ([9]), ([10]), ([14]) dentro de la lógica borrosa, tomando como caso particular la cadena $L = [0, 1]$.

En 1.991, J.L. Castro y E. Trillas prueban el siguiente resultado :

Teorema.1.- ([2]) Si R es un $*$ -preorden borroso en X , entonces el operador de $[0,1]^X$ en $[0,1]^X$ definido mediante la composición de μ con R , es decir, $C_R^*(\mu) = \mu \circ R$, es un operador de consecuencias en X (inducido por R), donde

$$\mu \circ R(x) = \sup_{w \in X} \{ \mu(w) * R(w, x) \} \quad (1)$$

Además, J.L. Castro y E. Trillas, añaden el axioma de coherencia a la definición de operador de consecuencias. Así, un FCO es $*$ -coherente si

$$\mu(a) * C(\varphi_a)(x) \leq C(\mu)(x) \quad (2)$$

$$\forall \mu \in [0,1]^X \quad \forall (a, x) \in X \times X$$

donde $\varphi_a(t) = \varphi_{\{a\}}(t) = \begin{cases} 1 & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$ es la función característica ordinaria del singulete $\{a\}$.

El siguiente teorema, pone de manifiesto que los cuatro axiomas sobre un operador C (inclusión, monotonía, idempotencia y coherencia) constituyen una condición suficiente para que la relación inducida resulte un preorden.

Teorema.2.- ([2]) Si C es un FCO $*$ -coherente, entonces la relación definida por $R_C(x, y) = C(\varphi_x)(y)$ es un $*$ -preorden borroso (inducido por C).

J.L. Castro y E. Trillas ([2]) prueban asimismo que el operador C_R^* es coherente, cualquiera que sea el $*$ -preorden R .

Por otro lado, es claro que los operadores de consecuencias clásicos, introducidos por A. Tarski ([13]) en 1956, son coherentes, lo que proporciona la equivalencia entre dicho concepto y el de preorden clásico ([3]). Sin embargo, la condición de coherencia, en general, se pierde en el caso difuso. En ([5]), ([6]) pueden encontrarse ejemplos a este respecto.

En el presente artículo se trata de analizar los recíprocos de los teoremas 1 y 2 anteriores. En el párrafo 2, se prueba que el recíproco del teorema 1 es cierto y que por tanto se mantiene, en el caso difuso, la equivalencia

$$R \text{ } * \text{-preorden} \iff C_R^* \text{ FCO} \quad (3)$$

En el párrafo 3, se prueba que el recíproco del teorema 2 no es cierto puesto que, para un operador C , ni la coherencia, ni el hecho de constituir un FCO, son condiciones necesarias para que la relación inducida, R_C , resulte un preorden. Se muestran ejemplos que justifican este hecho y se presentan, además, diversas

caracterizaciones de este último hecho, según distintos contextos.

2 OPERADORES INDUCIDOS POR UNA RELACION

En el párrafo anterior se ha introducido el operador C_R^* , inducido por R , para el caso en el que R sea un $*$ -preorden y se ha puesto de manifiesto que, en tal caso, el operador C_R^* es un FCO y además $*$ -coherente.

Nada impide considerar la construcción formal del operador C_R^* , aún en el caso de que R no sea un $*$ -preorden, entendiendo que no necesariamente obtendremos un operador de consecuencias. De hecho, es conocida en la literatura ([12]), la construcción del modus ponens generalizado, a partir de distintos operadores implicación clásicos que, como relaciones en el conjunto universal que son, éstos no resultan siempre ser $*$ -preórdenes.

Así, dada una relación cualquiera en X , denotaremos por C_R^* el operador inducido por R , definido como en el teorema 1, por : $C_R^*(\mu) = \mu \circ R$. En otros términos, estamos ante la extensión de la aplicación que, a cada $*$ -preorden le asocia un operador de consecuencias, al conjunto de todas las relaciones difusas sobre X .

A continuación probamos un resultado auxiliar, válido para una relación borrosa sobre X cualquiera. En ([2]), puede encontrarse un resultado análogo para relaciones de preorden.

Lema.- Sea R una relación cualquiera en X , si μ es la función característica ordinaria de un singulete $\{x\}$ de X , entonces $C_R^*(\mu)(y) = R(x, y)$, para cualquier $y \in X$.

Demostración.- Pongamos $\mu = \varphi_x$, se tiene entonces :

$$C_R^*(\varphi_x)(y) = \sup_{w \in X} \{ \varphi_x(w) * R(w, y) \}$$

Si $w \neq x$, entonces $\varphi_x(w) = 0$ y por tanto este supremo se alcanza en $w = x$ y vale

$$\varphi_x(x) * R(x, y) = 1 * R(x, y) = R(x, y)$$

Es decir, $C_R^*(\varphi_x)(y) = R(x, y)$. $\square$

Observemos, ahora, que es posible afirmar algo más respecto del teorema 1 :

En su demostración, se observa que el axioma de inclusión del operador C_R^* es independiente de la $*$ -transitividad de la relación R y por tanto se tiene :

$$R \text{ es reflexiva} \implies C_R^* \text{ verifica la inclusión} \quad (4)$$

Se observa asimismo que el axioma de idempotencia de C_R^* se prueba independientemente de la reflexividad de la relación y, como consecuencia :

$$R \text{ es } *-transitiva \implies C_R^* \text{ es idempotente} \quad (5)$$

En el siguiente teorema, probaremos que los recíprocos de las afirmaciones (4) y (5) son ciertos y que, además, también son independientes entre sí.

Teorema.3.- Sea R una relación cualquiera en X ,

(a) Si C_R^* verifica el axioma de inclusión, entonces R es reflexiva.

(b) Si C_R^* verifica el contenido $C_R^*(C_R^*(\mu)) \subset C_R^*(\mu) \forall \mu \in [0, 1]^X$ (idempotencia), entonces R es $*$ -transitiva.

Demostración.- Para probar (a), sea $x \in X$ cualquiera, por verificar C_R^* el axioma de inclusión :

$$C_R^*(\mu)(x) \geq \mu(x) \quad \forall \mu \in [0, 1]^X$$

En particular para $\mu = \varphi_x$:

$$C_R^*(\varphi_x)(x) \geq \varphi_x(x) = 1$$

pero por el lema anterior

$$C_R^*(\varphi_x)(x) = R(x, x)$$

Así : $R(x, x) \geq 1$ y por tanto $R(x, x) = 1 \quad \forall x \in X$ y R es reflexiva.

Para probar (b), sean $x, z \in X$ cualesquiera, por hipótesis :

$$C_R^*(C_R^*(\mu))(z) \leq C_R^*(\mu)(z) \quad \forall \mu \in [0, 1]^X$$

En particular para $\mu = \varphi_x$:

$$C_R^*(C_R^*(\varphi_x))(z) \leq C_R^*(\varphi_x)(z)$$

y por el mismo lema

$$\begin{aligned} C_R^*(C_R^*(\varphi_x))(z) &= \\ &= \sup_{w \in X} \{ C_R^*(\varphi_x)(w) * R(w, z) \} = \\ &= \sup_{w \in X} \{ R(x, w) * R(w, z) \} \leq \\ &\leq R(x, z) = C_R(\varphi_x)(z) \end{aligned}$$

Por tanto R es $*$ -transitiva. $\square$

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado de caracterización :

Corolario.1.- (Caracterización de preórdenes) Sea R una relación borrosa cualquiera en X , entonces el operador C_R^* es un operador de consecuencias si y sólo si R es un $*$ -preorden.

En definitiva, hemos probado la equivalencia (3) y, además, las equivalencias parciales siguientes :

$$R \text{ reflexiva} \iff C_R^* \text{ verifica la inclusión (C1)}$$

$$R \text{ } *-transitiva \iff C_R^* \text{ idempotente (C3)}$$

Observemos, para acabar este párrafo, que el operador inducido por una relación cualquiera, C_R^* , definido como $\mu \circ R$, es siempre monótono por su propia construcción y, además, verifica el axioma de $*$ -coherencia puesto que dados $\mu \in [0, 1]^X$ y $a, x \in X$, tenemos :

$$\begin{aligned} \mu(a) * C_R(\varphi_a)(x) &= \mu(a) * R(a, x) \leq \\ &\leq \sup_{w \in X} \{ \mu(w) * R(w, x) \} = C_R^*(\mu)(x) \end{aligned}$$

3 RELACIONES INDUCIDAS POR UN OPERADOR

Será relevante, en lo que resta, la consideración de la familia de difusos siguiente :

$$\Phi_1 = \{ \varphi_x \mid x \in X \} \quad (6)$$

es decir, Φ_1 representará a la familia de todas las funciones características ordinarias de los singuletes del universo X .

Extendamos ahora la aplicación que, a cada operador de consecuencias $*$ -coherente le hace corresponder un $*$ -preorden, dada por el teorema 2, al conjunto de todos los operadores de consecuencias e incluso al conjunto de todos los operadores que actúan sobre $[0, 1]^X$, bien entendido que la relación inducida no necesariamente resultará un $*$ -preorden.

Así, dado $C : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ un operador cualquiera, llamaremos relación inducida por C , a la relación R_C , definida por $R_C(x, y) = C(\varphi_x)(y)$.

A partir de esta extensión, se tiene :

$$C \text{ verifica la inclusión} \implies R_C \text{ reflexiva} \quad (7)$$

y

$$C \text{ idempotente y } *-coherente \implies R_C \text{ } *-transitiva \quad (8)$$

En efecto, veamos que ambas afirmaciones son una independiente de la otra :

Si C verifica la inclusión, sea $x \in X$, resulta obvio que $R_C(x, x) = C(\varphi_x)(x) \geq \varphi_x(x) = 1$, luego R_C es reflexiva.

Supongamos que C es idempotente y $*$ -coherente, entonces, dados $x, y, z \in X : R_C(x, y) * R_C(y, z) = C(\varphi_x)(y) * C(\varphi_y)(z) \leq C(C(\varphi_x))(z) \leq C(\varphi_x)(z) = R_C(x, z)$ y R_C es $*$ -transitiva.

Sin embargo, a diferencia del caso anterior, en esta construcción, ninguno de los dos recíprocos de las afirmaciones (7) y (8) son ciertos.

El siguiente ejemplo sencillo, prueba que el primer recíproco no es cierto.

Ejemplo.1.- El operador C dado por $C(\mu) = \mu$ si $\mu \in \Phi_1$ y $C(\mu) = \emptyset$ si $\mu \notin \Phi_1$, no verifica la inclusión y sin embargo R_C es un $*$ -preorden para cualquier t-norma $*$ y, en particular, una relación reflexiva.

No obstante, la reflexividad de R_C puede ser caracterizada muy sencillamente. De hecho, se tiene que R_C es reflexiva si y sólo la restricción del operador C al conjunto Φ_1 verifica el axioma de inclusión. En efecto :

Si $C|_{\Phi_1}$ verifica la inclusión, se tiene, como en (7), que $R_C(x, x) = C(\varphi_x)(x) \geq \varphi_x(x) = 1$ y R_C es reflexiva.

Pero además, si R_C es reflexiva, $C(\varphi_x)(x) = 1$, como $\varphi_x(y) = 0$ siempre que $x \neq y$, $C|_{\Phi_1}$ verifica la inclusión.

Para probar que el segundo recíproco no es cierto, ni siquiera en el marco de los operadores de consecuencias, basta considerar la familia de operadores que se recoge en el siguiente ejemplo, cuyas propiedades son analizadas con detalle en ([5]).

Ejemplo.2.- Sea X un conjunto cualquiera con, al menos, dos elementos y distingamos dos distintos a, b y un difuso μ no normal ($\mu(x) < 1 \forall x \in X$) y tal que $\mu(b) < \mu(a)$. Entonces el operador C_μ , dado por

$$C_\mu(\rho) = \begin{cases} \mu & \rho \subset \mu \\ X & \text{otro caso} \end{cases}$$

es un FCO que no es $*$ -coherente y, sin embargo, su relación inducida, R_C , resulta ser un $*$ -preorden borroso, cualquiera que sea la t-norma $*$.

Hagamos notar que el operador C_μ , considerado en el ejemplo anterior es, en términos de M. Ward ([15]), el operador bivaluado asociado a μ .

En ([6]), pueden encontrarse familias paramétricas, de distinta naturaleza que la anterior y que sirven, asimismo, para justificar el incumplimiento del recíproco anterior en el caso $*$ = min.

Obsérvese que se ha puesto de manifiesto que, dado un operador C , ni la $*$ -coherencia, ni el hecho de ser FCO son condiciones necesarias para obtener el

cumplimiento de los axiomas de $*$ -preorden, por parte de la relación inducida, R_C .

Sin embargo, como se muestra a continuación, si un operador C induce un $*$ -preorden y verifica uno de los axiomas de FCO, es necesario que C sea $*$ -coherente sobre una determinada familia de difusos.

Veamos, previamente, una definición sobre la verificación parcial de la condición de coherencia de un operador y unas notaciones preliminares.

Dado un operador $C : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ y una subfamilia de difusos $G \subset [0, 1]^X$, como suele ser habitual, denotaremos por $C|_G$ la restricción del operador C a la familia G y denotaremos por $\Im m_C(G)$ la imagen de dicho operador restringido.

Definición.- Dado $C : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$, diremos que C es $*$ -coherente para $G \subset [0, 1]^X$ si C verifica

$$\mu(a) * C(\varphi_a)(x) \leq C(\mu)(x)$$

$$\forall \mu \in G \quad \forall (a, x) \in X \times X$$

es decir, si $C|_G$ es $*$ -coherente.

Estos conceptos, serán utilizados en lo que sigue, cuando G coincide con la familia Φ_1 .

Teorema.4.- Sea $C : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ un operador verificando la inclusión, entonces si R_C es un $*$ -preorden, C es $*$ -coherente para la familia $\Im m_C(\Phi_1)$.

Demostración.- Supongamos por reducción al absurdo que existe $\mu \in \Im m_C(\Phi_1)$ tal que C no es $*$ -coherente para μ y pongamos $\mu = C(\varphi_x)$, entonces existen $y, z \in X$ tales que

$$C(\varphi_x)(y) * C(\varphi_y)(z) > C(C(\varphi_x))(z)$$

Como C verifica el axioma de inclusión,

$$C(C(\varphi_x))(z) \geq C(\varphi_x)(z)$$

y se tiene que R_C no es $*$ -transitiva para la terna ordenada (x, y, z) , lo que contradice el hecho de que R_C es un $*$ -preorden. $\square$

Teorema.5.- Sea $C : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ un operador monótono, entonces si R_C es un $*$ -preorden, C es $*$ -coherente para la familia $\Im m_C(\Phi_1)$.

Demostración.- Supongamos, como en la demostración del teorema anterior, que C no es $*$ -coherente para $C(\varphi_x)$, entonces existen $y, z \in X$ verificando :

$$C(\varphi_x)(y) * C(\varphi_y)(z) > C(C(\varphi_x))(z)$$

Por ser R_C reflexiva, $C \mid \Phi_1$ verifica el axioma de inclusión y como, además, C es monótono, se tiene

$$C(C(\varphi_x))(z) \geq C(\varphi_x)(z)$$

Por tanto R_C no es $*$ -transitiva. $\square$

Teorema.6.- Sea $C : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ un operador idempotente (verificando $(C3')$), entonces si R_C es un $*$ -preorden, C es $*$ -coherente para la familia $\mathfrak{M}_C(\Phi_1)$.

Demostración.- Se prueba análogamente al caso de los teoremas anteriores, teniendo en cuenta que si C es idempotente, se tiene

$$C(C(\varphi_x))(z) = C(\varphi_x)(z) \quad \square$$

Obsérvese que si C es idempotente por verificación de $(C3)$, el resultado anterior no es cierto. Para ello, basta considerar el siguiente ejemplo :

Ejemplo.3.- El operador C dado por $C(\mu) = X$ si $\mu \in \Phi_1$ y $C(\mu) = \emptyset$ si $\mu \notin \Phi_1$, verifica $(C3)$ y, además, R_C es un $*$ -preorden y sin embargo no es $*$ -coherente para la familia $\mathfrak{M}_C(\Phi_1)$, cualquiera que sea la t-norma $*$.

Además, para operadores idempotentes por verificación de $(C3')$, tenemos la siguiente caracterización :

Teorema.7.- Sea $C : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ un operador idempotente (verificando $(C3')$), entonces R_C es un $*$ -preorden si y sólo si $C \mid \Phi_1$ verifica el axioma de inclusión y C es $*$ -coherente para la familia $\mathfrak{M}_C(\Phi_1)$.

Demostración.- Si R_C es reflexiva, ya hemos hecho notar que $C \mid \Phi_1$ verifica la inclusión y, como consecuencia del teorema anterior, si R_C es $*$ -transitiva, C debe ser $*$ -coherente para la familia $\mathfrak{M}_C(\Phi_1)$.

Recíprocamente, veamos que bajo la hipótesis de idempotencia estas dos condiciones son además suficientes :

Ya se ha observado que si $C \mid \Phi_1$ verifica el axioma de inclusión, entonces R_C es una relación reflexiva. Para la $*$ -transitividad, sean $x, y, z \in X$ distintos dos a dos, por $*$ -coherencia de C para el difuso $C(\varphi_x)$ respecto de los elementos y, z , se tiene :

$$C(\varphi_x)(y) * C(\varphi_y)(z) \leq C(C(\varphi_x))(z)$$

pero, por idempotencia de C sobre φ_x ,

$$C(C(\varphi_x))(z) = C(\varphi_x)(z)$$

luego

$$R_C(x, y) * R_C(y, z) \leq R_C(x, z)$$

y R_C es $*$ -transitiva. $\square$

Nótese que este último resultado es válido en un contexto más general, imponiendo solamente que C restringido a Φ_1 sea idempotente.

Finalmente, dentro del marco de los operadores de consecuencias, veamos una nueva caracterización :

Corolario.2.- (Caracterización del carácter de preorden para la relación inducida por un operador de consecuencias) Sea C un FCO, entonces R_C es un $*$ -preorden si y sólo si C es $*$ -coherente sobre $\mathfrak{M}_C(\Phi_1)$.

Demostración.- Hemos probado que si R_C es un $*$ -preorden, es necesario que C sea $*$ -coherente sobre $\mathfrak{M}_C(\Phi_1)$. Recíprocamente, si C es $*$ -coherente sobre $\mathfrak{M}_C(\Phi_1)$ y es un FCO, en particular $C \mid \Phi_1$ verifica el axioma de inclusión y por el teorema anterior se tiene que R_C es $*$ -preorden. $\square$

Observemos que, también en este último resultado, puede debilitarse el contexto para C , imponiendo que C sea un operador idempotente y verificando la inclusión, en lugar de que C sea un FCO, es decir, para obtener esta caracterización, puede prescindirse de la monotonía.

4 CONCLUSIONES

En el teorema 1 se nos ofrece un modo de generar operadores de consecuencias sobre un universo X , a partir de relaciones definidas en el mismo universo, garantizando este hecho si la relación de partida es un preorden. Pues bien, hemos concluido que esta es condición es además necesaria, es decir,

$$R \text{ } * \text{-preorden} \iff C_R \text{ operador de consecuencias}$$

cualquiera que sea la t-norma $*$.

Por tanto, la única forma de obtener operadores de consecuencias C_R^* mediante relaciones R , por $C_R^* = \mu \circ R$, al menos si no variamos esta construcción, es partir de la estructura de $*$ -preorden.

Además, se ha puesto de manifiesto que, de este modo, C_R^* es siempre monótono y $*$ -coherente, con independencia de que R sea o no $*$ -preorden.

El teorema 2 nos muestra la construcción inversa, es decir, la generación de $*$ -preórdenes en el universo X , a partir de operadores sobre el mismo, garantizándose este hecho en el caso de que el operador de partida sea un FCO $*$ -coherente.

No puede afirmarse, a diferencia con el caso anterior, que el recíproco sea cierto. De hecho, hemos presentado ejemplos de operadores de distintas naturalezas que inducen preorden y no son coherentes en unos casos y en otros, ni siquiera verifican los axiomas de FCO.

Sin embargo, la condición de coherencia de un operador no resulta superflua, puesto que hemos probado que, bajo uno de cualquiera de los tres axiomas de FCO, para obtener un *-preorden, es necesaria la *-coherencia del operador de partida sobre una determinada familia.

A este respecto, se han presentado caracterizaciones, según distintos contextos, del hecho de que un operador induzca un preorden.

En particular, para operadores de consecuencias, se tiene la equivalencia :

$$R_C \text{ *-preorden} \iff C \text{ *-coherente sobre } \Im m_C(\Phi_1)$$

Por último, nos parece interesante destacar que todas las caracterizaciones anteriores son independientes del carácter monótono de los operadores tratados. En el caso de la generación de operadores, por ser intrínseco a su construcción y por tanto inexcusable. En el caso inverso de generación de relaciones, por su irrelevancia en el hecho de inducir o no un preorden.

Así, puede afirmarse que tanto la generación de operadores de consecuencias a partir de preórdenes e inversamente, la generación de preórdenes a partir de operadores puede ser mantenida en un contexto más general que el de los FCO, a saber, el de los operadores que verifican el axioma de inclusión y el de idempotencia que llamaremos operadores de quasiconsecuencias, abreviadamente FQCO. El estudio de tales operadores, será objeto de futuros trabajos.

Agradecimientos

Agradecemos los comentarios y sugerencias aportados por el profesor Enric Trillas y por el referee anónimo.

Referencias

- [1] Castro, J.L. (1994) *Fuzzy logics as families of bivaluated logics*. Fuzzy sets and systems 64, pg. 321-332.
- [2] Castro, J.L. - Trillas, E. (1991) *Tarski's fuzzy consequences*, submit to IJAR (Proc. of the Internat. Fuzzy Engineering Symp'91. Vol.1, pg. 70-81.)
- [3] Castro, J.L. - Trillas, E. (1989) *Sobre preórdenes y operadores de consecuencias de Tarski*. Theoria, Segunda época, Curso 1.988-1.989, N.11, pg. 419-425.
- [4] Castro, J.L. - Trillas, E. - Cubillo, S. (1994) *On consequence in approximate reasoning*. Journal of Applied Non-Classical Logics. Volume 4 n.1/1.994, pg. 91-103.
- [5] Elorza, J. - Burillo, P. (1997) *Operadores de Consecuencias Borrosos, su coherencia y generación de relaciones*. Actas del congreso Estylf 97 sobre tecnologías y lógica fuzzy, pg. 275-280.
- [6] Elorza, J. - Burillo, P. (1997) *Parametric families of fuzzy consequence operators in fuzzy logic*, submit to IJAR (Published in Proc. of the VII-RPIC.)
- [7] Esteva, F. (1981) *On the form of negations in posets*. Published in Proc. of The Eleventh Internat. Symp. on Multiple-Valued Logic.
- [8] Esteva, F. - García, P. - Godo, L. - Rodríguez, R.O. (1996) *Fuzzy approximation relations, Modal structures and possibilistic logic*. Submit to Mathware & Soft Computing.
- [9] Gerla, G. (1994) *An Extension Principle for Fuzzy Logics*. Mathematical Logic Quartely, 40, pg. 357-380.
- [10] Gerla, G. (1994) *Comparing fuzzy and crisp deduction systems*. Fuzzy sets and systems 67, pg. 317-328.
- [11] Pavelka, J. (1979) *On Fuzzy Logic I*. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd.25, pg. 45-52.
- [12] Ruan, D. - Kerre, E.E. (1993) *Logic : Fuzzy implication operators and generalizaed fuzzy method of cases*. Fuzzy sets and systems 54, pg. 23-37.
- [13] Tarski, A. (1956) *Logic, semantics, metamathematics*. Clarendon Press, Oxford.
- [14] Trillas, E. - Alsina, C. - Terricabras, J.M. (1995) *Introducción a la lógica borrosa*. Ed.Ariel.
- [15] Ward, M. (1940) *The closure operators of a lattice*. Annals of Mathematics. Vol.43. N.2, pg. 191-196.
- [16] Zadeh, L.A. (1965) *Fuzzy set*. Information and control, 8, pg. 338-353.

CARACTERIZACIÓN DE LAS COLUMNAS DE UN OPERADOR DE T-INDISTINGUIBILIDAD*

D. Boixader
Sec. Matemàtiques i Inf.
E.T.S.A.V.
Pere Serra 1-15,
08190 Sant Cugat.
e-mail: boixader@ea.upc.es

J. Jacas
Sec. Matemàtiques i Inf..
E.T.S.A.B.
Avda. Diagonal 649,
08028 Barcelona.
e-mail: jacas@ea.upc.es

J. Recasens
Sec. Matemàtiques i Inf.
E.T.S.A.V.
Pere Serra 1-15,
08190 Sant Cugat.
e-mail: recasens@ea.upc.es

Resumen

Se proponen dos maneras esencialmente distintas de caracterizar las columnas de un operador de T-indistinguibilidad. La primera a través de condiciones explícitas que debe satisfacer un conjunto difuso, y la segunda introduciendo un nuevo operador Λ_E que tiene a las columnas como puntos fijos. También se repasan algunas propiedades de dos operadores conocidos (ϕ_E y ψ_E) relacionados con Λ_E .

Palabras clave: indistinguibilidad, generador, operador clausura, operador interior.

1 INTRODUCCIÓN

Los operadores de T-indistinguibilidad son relaciones difusas que extienden el concepto de relación de equivalencia a contexto difuso, y que aparecen en la literatura bajo distintos nombres como relaciones de equivalencia difusas, igualdades difusas, similitudes, semejanzas, relaciones probabilísticas... dependiendo de los autores y de la t-norma T utilizada.

Desde un punto de vista estructural, resulta especialmente interesante el estudio del conjunto $H_E \subseteq [0, 1]^X$ de los generadores de la T-indistinguibilidad E definida sobre un conjunto X .

Los generadores son los únicos subconjuntos difusos compatibles con E , y desempeñan respecto a E el mismo papel que los subconjuntos reunión de clases respecto a una relación de equivalencia clásica. Las columnas de E constituyen un tipo muy especial de generadores, pues son las clases de equivalencia difusas asociadas a la T-indistinguibilidad E . [Dubois&Prade 94] [Zadeh 71]

Financiado parcialmente por los proyectos DGICYT PB94-1208 y CICYT TIC96-1393-C06-05

El artículo está estructurado como sigue. Después de una sección preliminar, se pasa a revisar (sección 3) algunos resultados sobre los operadores ϕ_E , ψ_E , que constituyen una herramienta clave en el estudio de la estructura de los generadores, pues permiten caracterizar a H_E como conjunto de puntos fijos de ambos. De un modo similar, en la sección 4 se van a caracterizar a las columnas de E de dos maneras distintas. Primero, a través de condiciones explícitas que un generador debe satisfacer para que sea una columna, y en segundo lugar, introduciendo un nuevo operador $\Lambda_E : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ que tiene por puntos fijos precisamente a las columnas de E .

2 PRELIMINARES

En esta sección se introducen algunos conceptos básicos sobre operadores de T-indistinguibilidad y algunos lemas que se necesitarán posteriormente.

Dada una t-norma T continua, $\hat{T}$ denotará su cuasi-inversa, definida por

$$\hat{T}(x|y) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid T(x, \alpha) \leq y\}$$

para todos $x, y \in [0, 1]$.

Nota. En contexto lógico, T extiende al intervalo unidad la conjunción $\wedge$, mientras que $\hat{T}$ juega el papel de implicación $\overrightarrow{T}$ por residuación respecto a T .

Lema 2.1. Si T es una t-norma continua, entonces:

2.1.1. $\hat{T}(x|y)$ es continua por la izquierda y monótona decreciente respecto a la variable x .

2.1.2. $\hat{T}(x|y)$ es continua por la derecha y monótona creciente respecto a la variable y .

Demostración: Trivial. □

Lema 2.2. Si T es una t-norma continua, entonces para $x, y, z \in [0, 1]$ cualesquiera se satisface:

$$2.2.1. \hat{T}(1|x) = x.$$

$$2.2.2. x \leq y \Rightarrow \hat{T}(x|y) = 1.$$

$$2.2.3. \min\{\hat{T}(x|y), \hat{T}(y|x)\} = \hat{T}(\max\{x, y\} | \min\{x, y\}).$$

$$2.2.4. \hat{T}(\hat{T}(x|y) | \hat{T}(x|z)) \geq \hat{T}(y|z).$$

Demostración: [Boixader et al. 97], [Valverde, 85].
2.2.4 $\hat{T}(x, y) \leq z$ si, y sólo si, $x \leq \hat{T}(y|z)$. $\square$

Definición 2.3. Dada una t-norma T , un operador de T -indistinguibilidad E en un conjunto X es una relación difusa en X satisfaciendo:

- (1) $E(x, x) = 1, \forall x \in X$ (*Reflexiva*),
- (2) $E(x, y) = E(y, x), \forall x, y \in X$ (*Simétrica*),
- (3) $T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z) \forall x, y, z \in X$ (*T-transitiva*).

En [Valverde, 85], se demuestra que todo operador de T -indistinguibilidad se puede construir a partir de una familia de conjuntos difusos.

Lema 2.4. Dado un subconjunto difuso h de X , la relación difusa E_h definida mediante

$$E_h(x, y) = \hat{T}(\max(h(x), h(y)) | \min(h(x), h(y)))$$

es una T -indistinguibilidad en X .

Teorema 2.5. (de Representación). Una relación difusa E en el conjunto X es una T -indistinguibilidad si, y sólo si, existe una familia de subconjuntos difusos $\{h_i\}_{i \in I}$ de X tal que

$$E = \inf_{i \in I} E_{h_i}.$$

Demostración: [Valverde, 85] $\square$

El Teorema 2.5 permite introducir la siguiente definición.

Definición 2.6. Dado un operador de T -indistinguibilidad E en X , un generador de E es un subconjunto difuso de X que pertenece a alguna familia generadora de E , en el sentido del Teorema de Representación.

Notación. $H_E = \{h \in [0, 1]^X / h \text{ es generador de } E\}$.

Se desprende, de forma inmediata, el siguiente lema

Lema 2.7. $h \in H_E$ si, y sólo si, $E_h \geq E$.

El conjunto H_E ha sido extensamente estudiado [Boixader, et. al., 97], [Jacas & Recasens, 94], [Jacas & Recasens, 95], [Klawonn & Castro, 95] y sus elementos han sido caracterizados como vectores propios [Jacas & Recasens, 95], generadores de E [Jacas & Recasens, 94], puntos fijos de ϕ_E y ψ_E , estados lógicos asociados a E [Trillas & Alsina, 92] y conjunto extensionales respecto a E .

Lema 2.8. Dado un operador de T -indistinguibilidad E en X , y un elemento $x \in X$, el subconjunto difuso $h_x \in [0, 1]^X$ definido por $h_x(y) = E(x, y) \forall y \in X$ es un generador de E .

Demostración: [Valverde, 85] $\square$

Nos referiremos a los difusos $h_x, x \in X$, como las columnas de E .

Definición 2.8. Dados dos operadores de T -indistinguibilidad (X, E) y $(\bar{X}, \bar{E})$, diremos que $(\bar{X}, \bar{E})$ es una extensión de (X, E) si, y sólo si,

- (1) $X \subseteq \bar{X}$
- (2) $\bar{E}(u, v) = E(u, v) \forall u, v \in X$.

Como es habitual, $\leq$ denotará el orden puntual entre difusos ($h \leq h'$ si, y sólo si, $h(x) \leq h'(x) \forall x \in X$). Resulta conocido que $([0, 1]^X, \leq)$ es un retículo completo, con ínfimo ($\wedge$) y supremo ($\vee$) definidos de forma natural mediante $(h \vee h')(x) = \sup\{h(x), h'(x)\}$, y $(h \wedge h')(x) = \inf\{h(x), h'(x)\}$ para todo $x \in X$.

3 LOS GENERADORES COMO PUNTOS FIJOS

En esta sección vamos a introducir dos operadores $(\phi_E, \psi_E : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X)$ que son básicos para el estudio de la estructura de H_E [Boixader, 97], [Boixader, Jacas, Recasens, 97], [Jacas & Recasens, 94], [Jacas & Recasens, 95].

El hecho fundamental que relaciona estos operadores con los generadores es que ambos tienen a H_E como

conjunto de puntos fijos.

Definición 3.1. Dada una T-indistinguibilidad E en X , el operador $\phi_E : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ viene definido por

$$\phi_E(h)(x) = \sup_{u \in X} T(E(x, u), h(u)), \quad \forall x \in X.$$

Proposición 3.2. Para todos $h, h' \in [0, 1]^X$, se tiene:

- (a) $h \leq h' \Rightarrow \phi_E(h) \leq \phi_E(h')$.
- (b) $h \leq \phi_E(h)$.
- (c) $\phi_E(h \vee h') = \phi_E(h) \vee \phi_E(h')$.

Demostración: [Jacas & Recasens, 94], [Jacas & Recasens, 95]. $\square$

Nota. De hecho, ϕ_E es un operador de clausura difuso.

Proposición 3.3. $\text{Im } \phi_E = H_E$.

Demostración: [Jacas & Recasens, 94], [Jacas & Recasens, 95]. $\square$

Teorema 3.4. $h \in H_E$ si, y sólo si, $\phi_E(h) = h$.

Demostración: [Jacas & Recasens, 94], [Jacas & Recasens, 95]. $\square$

Proposición 3.5. Para todo $h \in [0, 1]^X$, $\phi_E(h) = \bigwedge_{h' \in H_E} \{h \leq h'\}$.

Demostración: [Jacas & Recasens, 94], [Jacas & Recasens, 95]. $\square$

De los enunciados precedentes, se desprende que, $\phi_E(h)$ es el generador más específico que contiene a h (i.e. $h \leq \phi_E(h)$), y es por tanto la cota superior óptima de h en H_E .

A continuación, vamos a estudiar el operador ψ_E que asocia a cada difuso h el mayor generador $\psi_E(h)$ contenido en h (i.e. $\psi_E(h) \leq h$).

Definición 3.6. Dada una T-indistinguibilidad E en X , el operador $\psi_E : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ viene definido por

$$\psi_E(h)(x) = \inf_{u \in X} \hat{T}(E(x, u) | h(u)), \quad \forall x \in X.$$

Proposition 3.7. Para todo $h, h' \in [0, 1]^X$, se tiene:

- (a) $h \leq h' \Rightarrow \psi_E(h) \leq \psi_E(h')$.
- (b) $\psi_E(h) \leq h$.
- (c) $\psi_E(h \wedge h') = \psi_E(h) \wedge \psi_E(h')$.

Demostración: [Boixader, et al. 97]. $\square$

Nota. De hecho, ψ_E es un operador interior difuso.

Proposition 3.8. $\text{Im } \psi_E = H_E$.

Demostración: [Boixader, et al. 97]. $\square$

Teorema 3.9. $h \in H_E$ si, y sólo si, $\psi_E(h) = h$.

Demostración: [Boixader, et al. 97]. $\square$

Proposición 3.10. Para todo $h \in [0, 1]^X$, $\psi_E(h) = \bigvee_{h' \in H_E} \{h' \leq h\}$.

Demostración: [Boixader, et al. 97]. $\square$

4 LAS COLUMNAS COMO PUNTOS FIJOS

En la sección anterior, los generadores han sido caracterizados como puntos fijos de dos operadores adecuados (ϕ_E y ψ_E).

En la presente sección, vamos a introducir un nuevo operador (Λ_E) relacionado con E , cuya propiedad fundamental es que tiene a las columnas de E como el conjunto de los puntos fijos.

Para empezar, necesitamos de un criterio que permita decidir, dado un generador, si se trata o no de una columna.

Teorema 4.1. Sea (X, E) una T-indistinguibilidad. Dado $h \in H_E$, son equivalentes:

- (a) $T(h(x_1), h(x_2)) \leq E(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X$.
- (b) Existe una extensión $(\bar{X}, \bar{E})$ de (X, E) y un elemento $y \in \bar{X}$ tal que $h = h_{y|X}$, (i.e. $h(x) = \bar{E}(y, x) \forall x \in X$).

Nota. 1) Este teorema caracteriza tanto a las columnas de E como a las de sus extensiones. En adelante notaremos $C_E = \{h \in H_E / \exists (\bar{X}, \bar{E}) \text{ extensión de } (X, E), \text{ y } y \in \bar{X} \text{ t.q. } h(x) = \bar{E}(y, x), \forall x \in X\}$.

2) Si h es normal, entonces $(\bar{X}, \bar{E}) = (X, E)$, y $h = h_x$, $x \in X$ [Klawonn & Kruse, 95].

Demostración:

$b \Rightarrow a$) $T(h(x_1), h(x_2)) = T(\bar{E}(y, x_1), \bar{E}(y, x_2)) \leq \bar{E}(x_1, x_2) = E(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$.

$a \Rightarrow b$) Se define una T-indistinguibilidad $\bar{E}$ en $\bar{X} = X \cup \{h\}$ como sigue:

$$\bar{E}(x_1, x_2) = E(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X.$$

$$\bar{E}(x, h) = \bar{E}(h, x) = h(x), \forall x \in X.$$

$$\bar{E}(h, h) = 1.$$

$\bar{E}$ es reflexiva y simétrica, y es una extensión de E .

Queda aun por demostrar la T-transitividad de $\bar{E}$, i.e. $T(\bar{E}(u, v), \bar{E}(v, w)) \leq \bar{E}(u, w)$, para todo $u, v \in \bar{X}$.

Tan solo cuatro situaciones son posibles (no exclusivas):

- $u = v, v = w$ o $u = w$ (trivial)
- $u, v, w \in X$ (trivial)
- $v = h$ y $u, w \in X$. En este caso, $T(\bar{E}(u, h), \bar{E}(h, w)) = T(h(u), h(w)) \leq E(u, w)$ según (a).
- $u = h$ and $v, w \in X$. En este caso, $T(\bar{E}(h, v), \bar{E}(v, w)) = T(h(v), E(v, w)) \leq h(w) = \bar{E}(h, w)$, debido a que $\hat{T}(h(v)|h(w)) \geq E(v, w)$ si $h \in H_E$ (Lema 2.2).

□

Definición

4.2.

Dada una T-indistinguibilidad E en X , el operador $\Lambda_E : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ es definido por

$$\Lambda_E(h)(x) = \inf_{u \in X} \hat{T}(h(u)|E(u, x)), \quad \forall x \in X.$$

Proposición 4.3. Para todo $h, h' \in [0, 1]^X$, se tiene:

- (a) $h \leq h' \Rightarrow \Lambda_E(h) \geq \Lambda_E(h')$.
- (b) $\Lambda_E(h_1 \vee h_2) = \Lambda_E(h_1) \wedge \Lambda_E(h_2)$
- (c) $\Lambda_E(h_1 \wedge h_2) \geq \Lambda_E(h_1) \vee \Lambda_E(h_2)$.

Demostración: Trivial. □

Proposición 4.4. $\text{Im } \Lambda_E \subset H_E$.

Demostración: Para todo $h \in [0, 1]^X$, se debe probar que $\Lambda_E(h) \in H_E$.

$$\begin{aligned} \hat{T}(\Lambda_E(h)(x_1) | \Lambda_E(h)(x_2)) &= \\ &= \hat{T}\left(\inf_{v \in X} \hat{T}(h(v)|E(x_1, v)) \mid \inf_{u \in X} \hat{T}(h(u)|E(x_2, u))\right) = \\ &= \inf_{u \in X} \hat{T}\left(\inf_{v \in X} \hat{T}(h(v)|E(x_1, v)) \mid \hat{T}(h(u)|E(x_2, u))\right) \geq \\ &\geq \inf_{u \in X} \hat{T}(\hat{T}(h(u)|E(x_1, u)) | \hat{T}(h(u)|E(x_2, u))) \\ &\geq \inf_{u \in X} \hat{T}(E(x_1, u) | E(x_2, u)) = \\ &= E(x_1, x_2) \end{aligned}$$

(*) Lema 2.1

(**) Lema 2.2

(***) Según el Lema 2.2, puesto que E es transitiva se tiene que $\hat{T}(E(u, x) | E(u, y)) \geq E(x, y) \forall u \in X$, y el mínimo se asume para $u = y$.

De manera similar, se obtiene que $\hat{T}(\Lambda_E(h)(x_2) | \Lambda_E(h)(x_1)) \geq E(x_1, x_2)$, de donde,

$$\begin{aligned} E_T\left(\bigwedge_E(h)(x_1), \bigwedge_E(h)(x_2)\right) &= \\ &= \text{MIN} \left\{ \hat{T}\left(\bigwedge_E(h)(x_1) \mid \bigwedge_E(h)(x_2)\right), \right. \\ &\quad \left. \hat{T}\left(\bigwedge_E(h)(x_2) \mid \bigwedge_E(h)(x_1)\right) \right\} \geq \\ &\geq E(x_1, x_2), \text{ y así } \bigwedge_E(h) \in H_E. \end{aligned}$$

□

Nota. En general, $\text{Im } \Lambda_E \neq H_E$. Tómese, por ejemplo, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E(x_i, x_j) = 0$ si $i \neq j$, y $h \in H_E$ definido por $h(x_1) = 0.5$, $h(x_2) = h(x_3) = 0$.

Proposición 4.5. Dados E una T-indistinguibilidad en X y $h \in [0, 1]^X$ si $\Lambda_E(h) = h$, entonces $h \in C_E$.

Demostración. Se tiene que $h = \Lambda_E(h) \in H_E$ (Proposición 4.4)

Además, si $\Lambda_E(h)(x) = \inf_{u \in X} \hat{T}(h(u)|E(x, u)) = h(x) \forall x \in X$, entonces $\hat{T}(h(u)|E(x, u)) \geq h(x)$, $\forall u, x \in X$, y $T(h(x), h(u)) \leq E(x, u) \forall u, x \in X$.

Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.1 y concluir que $h \in C_E$.

El próximo teorema caracteriza las columnas de E como funtos fijos de Λ_E .

Teorema 4.6. Dados E una T-indistinguibilidad en X , y $h \in [0, 1]^X$ un difuso normal (i.e. $\exists x_0 \in X$ t. q. $h(x_0) = 1$), se tiene:

$$\Lambda_E(h) = h \quad \text{si, y sólo si, } h = h_x \text{ para algún } x \in X.$$

Demostración: Si $\Lambda_E(h) = h$, entonces $h \in C_E$ (Proposition 4.4), y siendo h normal, obtenemos $h = h_x, x \in X$.

Recíprocamente, si $h = h_x$,

$$\begin{aligned} \bigwedge_E(h_x)(y) &= \inf_{u \in X} \hat{T}(h_x(u)|E(u, y)) = \\ &= \inf_{u \in X} \hat{T}(E(u, x)|E(u, y)) = \\ &= E(x, y) = h_x(y). \end{aligned}$$

□

El teorema 4.6 caracteriza sólo a las columnas de E , y no se extiende a todo el conjunto C_E , como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo. $X = \{x_1, x_2\}$, $E(x_1, x_2) = 0$, T una t-norma cualquiera. Se define una extensión de (X, E) : $\bar{X} = X \cup \{y\}$, $\bar{E}(x_1, y) = \bar{E}(x_2, y) = 0$.

La columna h_y es, restringida a X , el difuso constante $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Así pues, $\bigwedge_E(h)(x_1) = \bigwedge_E(h)(x_2) = 1$ y $\bigwedge_E(h) \neq h$.

5 CONCLUSIONES

Se ha introducido un nuevo operador $\Lambda_E : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ entre difusos que caracteriza a las columnas de E por el hecho de ser sus puntos fijos. Además, se han repasado algunas propiedades conocidas de los operadores ϕ_E y ψ_E .

Los trabajos futuros se centrarán en el estudio de Λ_E , que se inicia con esta comunicación y en los que la caracterización de $\text{Im}(\Lambda_E)$ y el estudio de Λ_E^2 aparecen como primeros objetivos.

REFERENCIAS

1. C. Alsina, J.L. Castro, E. Trillas. "On the characterization of S and R Implications". *Proc. IFSA '95*. Sao Paulo, 317-319, (1995).
2. D. Boixader, J. Jacas, J. Recasens. "Upper and lower approximation of fuzzy sets", *Proc. IFSA 97*. Praga 111-116, (1997).
3. D. Dubois, H. Prade. "Similarity-Based Approximate Reasoning", in: *Computational Intelligence Imitating Life*. Zurada, J.M., Marles, R.J., Robinson, C.J. eds. IEEE Press, New York, 69-80, 1994.
4. F. Esteve, P. García, L. Godo. "Relating and Extending Semantical approach to Possibilistic Reasoning". *Int. Journal of Approximate Reasoning* 10, 311-344, (1994).
5. J. Jacas, J. Recasens. "Fixed points and generators of fuzzy relations". *J. Math. Anal. Appl.* 186 21-29, (1994).
6. J. Jacas, J. Recasens. "Fuzzy T-transitive relations: eigenvectors and generators". *Fuzzy Sets & Systems* 72 147-154, (1995).
7. F. Klawonn, J.L. Castro. "Similarity in Fuzzy Reasoning", *Mathware & Soft Computing* 2, 197-228, (1995).
8. R. Kruse, J. Gebhart, F. Klawonn. "Foundations of Fuzzy Systems", New York, John Wiley & Sons (1994).
9. E. Trillas, C. Alsina. "Some remarks on approximate entailment", *Int. Jour. Approximate Reasoning* 6, 526-533, (1992).
10. L. Valverde. "On the structure of F-indistinguishability operators". *Fuzzy Sets & Systems* 17, 313-328, (1985).
11. L.A. Zadeh. "Similarity Relations and Fuzzy Orderings". *Information Sciences* 3, 177-200, (1971).

MENGER AND OVCHINNIKOV ON INDISTINGUISHABILITIES, REVISITED*

Enric Trillas

Dept. of Artificial Intelligence
Technical University of Madrid
28660 Boadilla del Monte
etrillas@fi.upm.es

Susana Cubillo

Dept. of Applied Mathematics
Technical University of Madrid
28660 Boadilla del Monte
scubillo@fi.upm.es

Elena Castiñeira

Dept. of Applied Mathematics
Technical University of Madrid
28660 Boadilla del Monte
ecastineira@fi.upm.es

Abstract

In his paper "Probabilistic Theories of Relations", Menger showed that, in some cases, Prod-Indistinguishabilities are the same as the antilogarithms of distances; later, Ovchinnikov obtained a characterization for Prod-Indistinguishabilities.

In this note, Menger's result is included in a larger frame to obtain more Prod-Indistinguishabilities from distances, and Ovchinnikov's characterization is translated to distances in order to reach a larger class of them.

Key Words: Prod-Indistinguishability, distance.

1. Given a set U , a Prod-Indistinguishability and a distance are functions $E : U \times U \rightarrow [0, 1]$ and $D : U \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \cup \{\infty\}$) that verify, respectively:

- 1) $E(a, a) = 1$
- 2) $E(a, b) = E(b, a)$
- 3) $E(a, b) \cdot E(b, c) \leq E(a, c)$,
- 1') $D(a, a) = 0$
- 2') $D(a, b) = D(b, a)$
- 3') $D(a, c) \leq D(a, b) + D(b, c)$,

for any a, b and c in U . In 1951, Menger showed that Prod-Indistinguishabilities are the same as the antilogarithms of distances (1) when the values are, respectively, in $\mathbb{R}^+ - \{+\infty\}$ and in $(0, 1]$. Later on 1984 Ovchinnikov proved that E is a Prod-Indistinguishability on U if and only if there is a family F of functions $f : U \rightarrow (0, +\infty)$ such that $E(a, b) = \inf_{f \in F} \min \left(\frac{f(a)}{f(b)}, \frac{f(b)}{f(a)} \right)$, for any a, b in U (2).

*This paper is supported by CICYT (Spain) under Project TIC 96-1393-C06.

In this note, Menger's result is included in a more general frame to obtain more Prod-Indistinguishabilities from distances, and it is shown that Menger's Characterization is, in this frame, the only possible. Ovchinnikov's Characterization is translated to distances to reach more distances than $-\log(E(a, b))$, a distance that, nevertheless, allows to reach a characterization of distances in the way of the 1984 Ovchinnikov's theorem for Prod-Indistinguishabilities.

It should be pointed out that in 1987 and by means of the concept of Metric Transform introduced by Schweizer and Sklar (4), Jacas studied (5) how to obtain T_2 -Indistinguishabilities from a T_1 -Indistinguishability (T_1 and T_2 continuous t-norms). When $T_1 = \text{Prod}$ and also $T_2 = \text{Prod}$, and by using what follows, more distances can be again obtained from a given Prod-Indistinguishability.

2. Let it be M_1 the set of all functions $t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ that are strictly non-increasing, continuous and verify $t(1) = 0$ and $t(x \cdot y) \leq t(x) + t(y)$, for any x, y in $[0, 1]$. Let be M_2 the set of all functions $s : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ that are strictly non-increasing, continuous and verify $s(0) = 1$ and $s(x) \cdot s(y) \leq s(x + y)$, for any x, y in $\mathbb{R}^+$. Let it be S_0 the set of all functions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ that are non-decreasing, continuous, subadditive, that is $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ for any x, y in $\mathbb{R}^+$, and verify $f(0) = 0$.

Theorem 2.1. $t \in M_1$ if and only if $t \circ \exp_n \in S_0$, being $\exp_n(x) = e^{-x}$ defined on $\mathbb{R}^+$.

Proof. If $t \in M_1$ the function $t \circ \exp_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ is non-decreasing, continuous, verifies $t \circ \exp_n(0) = t(1) = 0$, and also $t \circ \exp_n(x) + t \circ \exp_n(y) = t(e^{-x}) + t(e^{-y}) \geq t(e^{-x} \cdot e^{-y}) = t \circ \exp_n(x + y)$, for any x, y in $\mathbb{R}^+$.

If $f = t \circ \exp_n \in S_0$, then $t = f \circ \log^n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ (being $\log^n(x) = -\log x$) is obviously a strictly non-increasing, continuous function, that also verifies

$f \circ \log^n(1) = f(0) = 0$ and $f \circ \log^n(x) + f \circ \log^n(y) = f(-\log x) + f(-\log y) \geq f(-\log x - \log y) = f \circ \log^n(xy)$, for any x, y in $[0, 1]$. Then $t = f \circ \log^n \in M_1$. $\square$

Theorem 2.2. $s \in M_2$ if and only if $\log^n \circ s \in S_0$.

Proof. If $s \in M_2$ the function $\log^n \circ s : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ is non-decreasing, continuous and verifies: $\log^n \circ s(0) = \log^n(1) = 0$ and $\log^n \circ s(x + y) = -\log(s(x + y)) \leq -\log(s(x) \cdot s(y)) \leq \log^n \circ s(x) + \log^n \circ s(y)$.

If $f = \log^n \circ s \in S_0$, $s = \exp_n \circ f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ is obviously a strictly non-increasing, continuous function, that also verifies $\exp_n \circ f(0) = \exp_n(0) = 1$ and $\exp_n \circ f(x) \cdot \exp_n \circ f(y) = e^{-f(x)} \cdot e^{-f(y)} = \exp_n(f(x) + f(y)) \leq \exp_n(f(x + y)) = \exp_n \circ f(x + y)$, for any x, y in $\mathbb{R}^+$. Then $s = \exp_n \circ f \in M_2$. $\square$

Theorem 2.3. If E is a Prod-Indistinguishability, $D = t \circ E$ is a distance for any t in M_1 .

Proof. 1) $D(a, a) = t(1) = 0$. 2) Obviously, $D(a, b) = D(b, a)$. 3) $D(a, b) + D(b, c) = t(E(a, b)) + t(E(b, c)) \geq t(E(a, b) \cdot E(b, c)) \geq t(E(a, c)) = D(a, c)$. $\square$

For example, as function $t(x) = -\log x$ belongs to M_1 , it is $D(a, b) = -\log(E(a, b))$ a distance on U for any Prod-Indistinguishability E also on U . Function $t(x) = 1 - x$ is also in M_1 , and consequently $D(a, b) = 1 - E(a, b)$ is a distance on U . Moreover, as functions $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \frac{x}{x+1}$ are in S_0 , functions $t_1(x) = \sqrt{-\log x}$ and $t_2(x) = \frac{\log x}{\log x - 1}$ are in M_1 , by theorem 2.1, so

$$D_1(a, b) = \sqrt{-\log(E(a, b))}$$

and

$$D_2(a, b) = \frac{\log(E(a, b))}{\log(E(a, b)) - 1}$$

are distances on U , for any Prod-Indistinguishability E on U .

Theorem 2.4. If D is a distance, the function $s \circ D = E$ is a Prod-Indistinguishability for any s in M_2 .

Proof. 1) $E(a, a) = s(0) = 1$. 2) Obviously, $E(a, b) = E(b, a)$. 3) $E(a, b) \cdot E(b, c) = s(D(a, b)) \cdot s(D(b, c)) \leq s(D(a, b) + D(b, c)) \leq s(D(a, c)) = E(a, c)$. $\square$

For example, as function $s(x) = e^{-x}$ belongs to M_2 , $E(a, b) = \exp(-D(a, b))$ is a Prod-Indistinguishability for any distance D on U . Function $s(x) = \frac{1}{1+x}$ is also in M_2 , and consequently $E(a, b) = \frac{1}{1+D(a, b)}$ is a Prod-Indistinguishability on U . Moreover, by theorem 2.2, as functions $s_1(x) = e^{-\sqrt{x}}$ and $s_2(x) = e^{-\frac{x}{x+1}}$ are in M_2 ,

$$E_1(a, b) = \exp(-\sqrt{D(a, b)})$$

and

$$E_2(a, b) = \exp\left(-\frac{D(a, b)}{D(a, b) + 1}\right)$$

are Prod-Indistinguishabilities for any distance D on U .

Theorem 2.5. For any t in M_1 and any s in M_2 , if D is a distance on U it is also $t \circ s \circ D$, and if E is a Prod-Indistinguishability it is also $s \circ t \circ E$.

Proof. Functions $t \circ s : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ transform distances in distances and functions $s \circ t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ transform Prod-Indistinguishabilities in Prod-Indistinguishabilities. $\square$

3. The only functions $t \in M_1$ for which $t(x \cdot y) = t(x) + t(y)$ are, as it is well known (3), those $t(x) = -p \log x$, with $p \in (0, +\infty)$, and the only $s \in M_2$ for which $s(x) \cdot s(y) = s(x + y)$ are those $s(x) = \exp(-qx)$, with $q \in (0, +\infty)$. It is also known that the quasi-inverse of a function t is defined (4) by

$$t^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \geq t(0), \\ t^{-1}(x), & \text{if } x < t(0). \end{cases}$$

As $t(0) = -p \log 0 = \infty$, it is $t^{(-1)}(x) = t^{-1}(x) = \exp\left(-\frac{1}{p}x\right)$, and these functions verify $t^{-1}(x) \cdot t^{-1}(y) = t^{-1}(x + y)$. They are in M_2 .

Functions s in M_2 have inverse s^{-1} defined in $[0, 1]$. In the case on which $s(x) = \exp(-qx)$, its inverse is $s^{-1}(x) = -\frac{1}{q} \cdot \log x$ that verifies $s^{-1}(x \cdot y) = s^{-1}(x) + s^{-1}(y)$.

If $t \circ E$ is a distance for some $t \in M_1$, as $t^{(-1)} \circ t = \text{Id}_{[0, 1]}$, the only thing needed to assure that $E = t^{(-1)} \circ t \circ E$ is a Prod-Indistinguishability is to know that theorem 2.4 is applicable; that $t^{(-1)}$ is in M_2 .

Theorem 3.1. If $t \in M_1$, $t^{(-1)} \in M_2$ if and only if $t(x) = -p \log x$, for any $p \in (0, +\infty)$.

Proof. It is obvious that $t^{(-1)} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ is strictly non-increasing, continuous and verifies $t^{(-1)}(0) = 1$. If x, y are in $\mathbb{R}^+$, $t^{(-1)}(x) = x_1$ and $t^{(-1)}(y) = y_1$ are in $[0, 1]$; then $t(x_1 \cdot y_1) \leq t(x_1) + t(y_1)$, as $t \in M_1$. Consequently, $x_1 \cdot y_1 \geq t^{(-1)}(t(x_1) + t(y_1))$, or $t^{(-1)}(x + y) \leq t^{(-1)}(x) \cdot t^{(-1)}(y)$, for any x, y in $\mathbb{R}^+$. Then $t^{(-1)} \in M_2$ implies $t^{(-1)}(x + y) = t^{(-1)}(x) \cdot t^{(-1)}(y)$, and $t^{(-1)}(x) = \exp(-qx)$ or $t(x) = -\frac{1}{q} \log x$. The reciprocal was shown before. $\square$

Theorem 3.2. Provided that $t(x) = -p \log x$, E is a Prod-Indistinguishability on U if and only if $t \circ E$ is a distance on U .

Proof. That $t \circ E$ is a distance was shown in theorem 2.3. If given E , it is $D(a, b) = -p \log(E(a, b))$ a distance, then $E(a, b) = \exp\left(-\frac{1}{p} D(a, b)\right)$ is a Prod-Indistinguishability by theorem 2.4. $\square$ By consequence, $E(a, b) = 0$ if and only if $D(a, b) = \infty$.

If $s \circ D$ is a Prod-Indistinguishability for some $s \in M_2$, as $s^{-1} \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^+}$, the only thing needed to assure that $D = s^{-1} \circ s \circ D$ is a distance is to know that theorem 2.3 is applicable. That is, that s^{-1} is in M_1 .

Theorems 3.1 and 3.2 show that Menger's Characterization of Prod-Indistinguishabilities is the only possible when dealing with functions $t \in M_1$.

Theorem 3.3. If $s \in M_2$, $s^{-1} \in M_1$ if and only if $s(x) = \exp(-qx)$, for any $q \in (0, +\infty)$.

Proof. It is obvious that $s^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ is strictly non-increasing, continuous and verifies $s^{-1}(1) = 0$. If x, y are in $[0, 1]$, $s^{-1}(x) = x_1$ and $s^{-1}(y) = y_1$ are in $\mathbb{R}^+$, and then $s(x_1 + y_1) \geq s(x_1) \cdot s(y_1)$ as $s \in M_2$. Consequently, $x_1 + y_1 \leq s^{-1}(s(x_1) \cdot s(y_1))$, or $s^{-1}(x \cdot y) \geq s^{-1}(x) + s^{-1}(y)$, for any x, y in $[0, 1]$. Then, $s^{-1} \in M_1$ implies $s^{-1}(x \cdot y) = s^{-1}(x) + s^{-1}(y)$, and $s^{-1}(x) = -p \log x$ or $s(x) = \exp\left(-\frac{1}{p} x\right)$. The reciprocal was shown before. $\square$

Theorem 3.4. Provided that $s(x) = \exp(-qx)$, D is a distance on U if and only if $s \circ D$ is a Prod-Indistinguishability.

Proof. That $s \circ D$ is a Prod-Indistinguishability was shown in theorem 2.4. That $D = s^{-1} \circ s \circ D$ is a distance follows from theorem 2.3, as $s^{-1} \in M_1$. $\square$

4. After Ovchinnikov's Characterization, to any function $f : U \rightarrow (0, +\infty)$ it is associated the Prod-Indistinguishability $E(a, b) = \text{Min}\left(\frac{f(a)}{f(b)}, \frac{f(b)}{f(a)}\right)$. Then, for any $t \in M_1$, it is $D(a, b) = t(E(a, b)) = \text{Max}\left(t\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right), t\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)\right)$ a distance. In particular, with $t(x) = -\log x$, this distance is

$$D(a, b) = |\log(f(a)) - \log(f(b))|,$$

with $t(x) = 1 - x$ it is

$$D(a, b) = 1 - \text{Min}\left(\frac{f(a)}{f(b)}, \frac{f(b)}{f(a)}\right),$$

and with $t(x) = \frac{\log x}{\log x - 1}$ it is

$$D(a, b) = \text{Max}\left(\frac{\log\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)}{\log\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right) - 1}, \frac{\log\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}{\log\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) - 1}\right).$$

Theorem 4.1. Let it be F a family of functions $f : U \rightarrow (0, +\infty)$. For any $t \in M_1$ function $D(a, b) = \text{Sup}_{f \in F} \text{Max}\left(t\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right), t\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)\right)$ is a distance on U .

Proof. Since $E(a, b) = \text{Inf}_{f \in F} \text{Min}\left(\frac{f(a)}{f(b)}, \frac{f(b)}{f(a)}\right)$ is a Prod-Indistinguishability, by theorem 2.3, function $D(a, b) = t(E(a, b)) = \text{Sup}_{f \in F} \text{Max}\left(t\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right), t\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)\right)$ is a distance. $\square$

Theorem 4.2. $D : U \times U \rightarrow [0, 1]$ is a distance if and only if there is a family F of functions $f : U \rightarrow (0, +\infty)$ such that $D(a, b) = \text{Sup}_{f \in F} |\log(f(a)) - \log(f(b))|$, for all $(a, b) \in U \times U$.

Proof. After the characterization of E by F , and theorem 3.2, D is a distance if and only if

$$D(a, b) = -\log(E(a, b)) =$$

$$\text{Sup}_{f \in F} \text{Max}(-\log f(a) + \log f(b), -\log f(b) + \log f(a)) =$$

$$\text{Sup}_{f \in F} |\log(f(a)) - \log(f(b))|. \quad \square$$

Last theorem shows that when dealing with $t \in M_1$ the only possible distances characterization is with $t(x) = -\log x$.

Acknowledgement Authors wish to thank Prof. Claudi Alsina (Barcelona) for his many valuable comments during the preparation of this both short and multiple-authored paper.

REFERENCES

- (1) K. Menger, 1951, Probabilistic Theories of Relations, **Proc. Nat. Acad. Sciences USA**, 37, pp. 178-180.
- (2) S. V. Ovchinnikov, 1984, Representations of Transitive Fuzzy Relations, **Aspects of Vagueness** (eds. H. J. Skala, et altri), Reidel Pubs., pp. 105-118.
- (3) J. Aczél, 1966, **Lectures on Functional Equations and Their Applications**, Academic Press.
- (4) B. Schweizer and A. Sklar, 1983, **Probabilistic Metric Spaces**, North-Holland.

- (5) J. Jacas, 1987, **Contribució a l'estudi de relacions d'indistingibilitat i a les seves aplicacions als processos de classificació**, Ph. D. Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (in Catalan).

SOBRE "MEDIR" LA CONDICIONALIDAD.

Luis Garmendia
Dep. Estadística y Econometría
Univ. Carlos III de Madrid
E-mail:
luisgarm@est-ecom.uc3m.es

Enric Trillas
Dep. Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Univ. Politécnica de Madrid
E-mail: etrillas@fi.upm.es

Adela Salvador
Dep. Matemática Aplicada
E.T.S.I. Caminos
Univ. Politécnica de Madrid
E-mail:
ma08@dumbo.caminos.upm.es

Resumen

El objetivo de este artículo es proponer una vía que unifique dos métodos distintos de "medir" la condicionalidad de relaciones borrosas.

Palabras Clave: Condicionalidad de relaciones borrosas, μ -T-condicionalidad de relaciones borrosas, relación μ -T-condicionalizada, región de μ -T-incondicionalidad de relaciones borrosas, medidas de μ -T-incondicionalidad de relaciones borrosas.

1 INTRODUCCIÓN

Sea E el conjunto $E_1 \cup E_2$. Dados un conjunto borroso $\mu: E \rightarrow [0, 1]$ y una t -norma continua T , una relación $R: E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$ es μ -T-condicional si $T(\mu(a), R(a, b)) \leq \mu(b)$ para todo (a, b) perteneciente a $E_1 \times E_2$.

En [1] se proponen dos formas de medir la μ -T-condicionalidad de las relaciones borrosas; una consiste en medir la diferencia entre la relación R y la relación

μ -T-condicionalizada $R_C^{\mu-T}$, definida como la mayor relación μ -T-condicional contenida en R , y la otra consiste en medir la diferencia entre $T(\mu(a), R(a, b))$ y $\mu(b)$ cuando $T(\mu(a), R(a, b)) \geq \mu(b)$. En lo que sigue, designaremos por T_R^μ a la relación borrosa definida por $T_R^\mu(a, b) = T(\mu(a), R(a, b))$.

El objetivo de este artículo es proponer una vía que unifique ambos criterios.

2 PRELIMINARES

Con la bien conocida operación en $[0, 1]$, $J^T(x, y) = \sup \{z / T(x, z) \leq y\}$, sea J_μ^T la relación borrosa definida por $J_\mu^T(a, b) = J^T(\mu(a), \mu(b))$. Se define la relación borrosa μ -T-condicionalizada de R como:

$$R_C^{\mu-T}(a, b) = \min(R(a, b), J_\mu^T(a, b))$$

$$= \begin{cases} R(a, b) & \text{si } T_R^\mu(a, b) \leq \mu(b) \\ J_\mu^T(a, b) & \text{si } T_R^\mu(a, b) > \mu(b) \end{cases}$$

Un espacio métrico generalizado es una terna $(E, \wp, m)$ donde E es un conjunto, $\wp = (A, S, \leq, e)$ un semigrupo conmutativo y ordenado con elemento neutro e , y m es una **S-distancia**, es decir, una aplicación $m: E \times E \rightarrow A$ no necesariamente conmutativa, tal que:

- 1) $m(a, a) = e$, para todo $a \in E$
- 2) $m(a, c) \leq S(m(a, b), m(b, c))$,
para todo $a, b, c \in E$ (S-desigualdad triangular)

Sea T^* la t -conorma dual de T definida por $T^*(x, y) = 1 - T(1-x, 1-y)$.

Dada una estructura relacional (E, J) donde J es un T -preorden borroso, la función $d(a, b) = 1 - J^T(a, b)$ es una T^* -distancia en el espacio métrico generalizado $([0, 1], ([0, 1], T^*, \leq, 0), d)$.

En efecto, como J^T es un T -preorden, se deduce que:

- 1) $d(x, x) = 1 - J^T(x, x) = 0$ para todo x
- 2) $T^*(d(x, y), d(y, z)) = T^*(1 - J^T(x, y), 1 - J^T(y, z)) \geq 1 - J^T(x, z) = d(x, z)$ para todo x, y, z

Sea Ω el conjunto de relaciones borrosas $R: E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$.

Proposición 1.

La función $d_T: \Omega \times \Omega \rightarrow [0,1]$ definida como $d_T(R, R')$
 $= \sup_{(a,b) \in E_1 \times E_2} \{1 - J^T(R(a, b), R'(a, b))\}$ es, para toda t-
norma T , una T^* -distancia.

Demostración

Como $([0,1], T^*, \leq, 0)$ es un semigrupo conmutativo
ordenado y con elemento neutro cero, basta demostrar
que d_T es una T^* -distancia:

$$1) d_T(R, R) = \sup_{(a,b) \in E_1 \times E_2} \{1 - J^T(R(a, b), R(a, b))\}$$

$$= \sup_{(a,b) \in E_1 \times E_2} \{1 - 1, \dots, 1 - 1\} = 0$$

$$\begin{aligned} 2) T^*(d_T(R_1, R_2), d_T(R_2, R_3)) \\ = T^*(\sup_{(a,b) \in E_1 \times E_2} \{1 - J^T(R_1(a, b), R_2(a, b))\}, \\ \sup_{(a,b) \in E_1 \times E_2} \{1 - J^T(R_2(a, b), R_3(a, b))\}) \\ \geq \sup_{(a,b) \in E_1 \times E_2} \{T^*(1 - J^T(R_1(a, b), R_2(a, b)), \\ 1 - J^T(R_2(a, b), R_3(a, b)))\} \\ \geq \sup_{(a,b) \in E_1 \times E_2} \{1 - J^T(R_1(a, b), R_3(a, b))\} \\ = d_T(R_1, R_3). \blacksquare \end{aligned}$$

3 REGIÓN DE μ -T- INCONDICIONALIDAD DE UNA RELACIÓN BORROSA

Definición 1.

Se llama región de μ -T-incondicionalidad de una
relación borrosa $R: E_1 \times E_2 \rightarrow [0,1]$, y se denota $INCT^\mu(R)$,
al subconjunto de $E_1 \times E_2$ en el que R no es
 μ -T-condicional. Es decir,

$$INCT^\mu(R)$$

$$= \{(a, b) \in E_1 \times E_2 \text{ tal que } T(\mu(a), R(a, b)) > \mu(b)\}$$

$$= \{(a, b) \in E_1 \times E_2 \text{ tal que } TR^\mu(a, b) > \mu(b)\}$$

$$= \{(a, b) \in E_1 \times E_2 \text{ tal que } R(a, b) > J_\mu^T(a, b)\}$$

La región de μ -T-condicionalidad de la relación borrosa
 R es el subconjunto de $E_1 \times E_2$ complementario de la
región de μ -T-incondicionalidad de R .

Es claro que $\mu: E \rightarrow [0,1]$ es un T -estado lógico [2] de

$R: E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$ si y sólo si la región de μ -T-
incondicionalidad de R es el conjunto vacío, o bien, si y
sólo si la región de μ -T-condicionalidad de R es $E_1 \times E_2$.

La familia de t-normas asociada a una norma triangular
 T , denotada $\mathfrak{T}(T)$, es el conjunto de t-normas:

$$T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))), \text{ donde}$$

$\varphi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función estrictamente
creciente, continua, y tal que $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$.

Sea $\varphi\mu: E \rightarrow [0, 1]$ el conjunto borroso definido por $\varphi\mu$
 $(a) = \varphi(\mu(a))$, y $\varphi R: E_1 \times E_2 \rightarrow [0,1]$ la relación borrosa
definida por $\varphi R(a, b) = \varphi(R(a, b))$.

Teorema 1.

Dados una relación borrosa R , un conjunto borroso μ ,
una función φ y una t-norma T , se verifica que: $(a, b) \in$
 $INCT_\varphi^\mu(R)$ si y sólo si $(a, b) \in INCT^{\varphi\mu}(\varphi R)$

Demostración

$$(a,b) \in INCT_\varphi^\mu(R) \text{ si y sólo si } T_\varphi(\mu(a), R(a, b)) > \mu(b)$$

$$\text{si y sólo si } \varphi^{-1}(T(\varphi(\mu(a)), \varphi(R(a, b)))) > \mu(b)$$

$$\text{si y sólo si } T(\varphi(\mu(a)), \varphi(R(a, b))) > \varphi(\mu(b))$$

$$\text{si y sólo si } T(\varphi\mu(a), \varphi R(a, b)) > \varphi\mu(b)$$

$$\text{si y sólo si } (a, b) \in INCT^{\varphi\mu}(\varphi R). \blacksquare$$

Observación.

Condiciones necesarias para que (a, b) pertenezca a la
región $INCT^\mu(R)$ son:

$$R(a, b) > R_C^{\mu-T}(a, b) = J_\mu^T(a, b). \quad (1)$$

$$TR^\mu(a, b) = T(\mu(a), R(a, b)) > \mu(b). \quad (2)$$

$$\mu(a) > \mu(b). \quad (3)$$

Las condiciones (1) y (2) son necesarias y suficientes.

Dado un conjunto borroso $\mu: E \rightarrow [0, 1]$, sea su
proyección $\mu_2: E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$ definida por:
 $\mu_2(a, b) = \mu(b)$.

Teorema 2.

Dado $(a, b) \in E_1 \times E_2$, la distancia $d=1-J^T$ entre una
relación R en (a, b) y su relación
 μ -T-condicionalizada en (a, b) es igual a la distancia

$d=1-J^T$ entre $T_R^\mu(a, b)$ y $\mu_2(a, b)$, para el mínimo y toda t-norma arquimediana T.

Demostración

Mediante los lemas 1, 2, 3 y el teorema 3 se va a demostrar, paso a paso, que:

$J^T(R(a, b), R_c^{\mu-T}(a, b))$ es igual a:

$J^T((T)_R^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$ para las t-normas mínimo, producto, Lukasiewicz, y de la familia del producto o Lukasiewicz.

Lema 1.

Dados una relación borrosa R y un conjunto borroso μ se verifica que

$$J^{\text{Min}}(R(a, b), J_\mu^{\text{Min}}(a, b)) = J^{\text{Min}}((\text{Min})_R^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$$

Demostración

$$\begin{aligned} J^{\text{Min}}(R(a, b), J_\mu^{\text{Min}}(a, b)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } R(a, b) \leq J_\mu^{\text{Min}}(a, b) \\ J_\mu^{\text{Min}}(a, b) & \text{si } R(a, b) > J_\mu^{\text{Min}}(a, b) \end{cases} \\ J^{\text{Min}}((\text{Min})_R^\mu(a, b), \mu_2(a, b)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Min}_R^\mu(a, b) \leq \mu(b) \\ \mu(b) & \text{si } \text{Min}_R^\mu(a, b) > \mu(b) \end{cases} \end{aligned}$$

Si (a, b) no pertenece a la región $\text{INCMin}^\mu(R)$, por las condiciones (1) y (2) ambas expresiones valen 1.

Si (a, b) pertenece a la región $\text{INCMin}^\mu(R)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} J^{\text{Min}}(R(a, b), J_\mu^{\text{Min}}(a, b)) &= J_\mu^{\text{Min}}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(a) \leq \mu(b) \\ \mu(b) & \text{si } \mu(a) > \mu(b) \end{cases} \\ &\quad \text{por (1), (3)} \\ &= \mu(b) = J^{\text{Min}}((\text{Min})_R^\mu(a, b), \mu(b)) \quad \text{por (2)} \end{aligned}$$

Lema 2.

Dados una relación borrosa R y un conjunto borroso μ se verifica que

$$\begin{aligned} J^{\text{Prod}}(R(a, b), J_\mu^{\text{Prod}}(a, b)) &= \\ J^{\text{Prod}}((\text{Prod})_R^\mu(a, b), \mu_2(a, b)) & \end{aligned}$$

Demostración

$$\begin{aligned} J^{\text{Prod}}(R(a, b), J_\mu^{\text{Prod}}(a, b)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } R(a, b) \leq J_\mu^{\text{Prod}}(a, b) \\ \frac{J_\mu^{\text{Prod}}(a, b)}{R(a, b)} & \text{si } R(a, b) > J_\mu^{\text{Prod}}(a, b) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^{\text{Prod}}((\text{Prod})_R^\mu(a, b), \mu_2(a, b)) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Prod}_R^\mu(a, b) \leq \mu(b) \\ \frac{\mu(b)}{\text{Prod}_R^\mu(a, b)} & \text{si } \text{Prod}_R^\mu(a, b) > \mu(b) \end{cases} \end{aligned}$$

Si (a, b) no pertenece a la región $\text{INCProd}^\mu(R)$, por no verificar las condiciones (1) y (2), ambas expresiones valen 1.

Si (a, b) pertenece a la región $\text{INCProd}^\mu(R)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} J^{\text{Prod}}(R(a, b), J_\mu^{\text{Prod}}(a, b)) &= \frac{J_\mu^{\text{Prod}}(a, b)}{R(a, b)} \\ &\quad \text{por (1) y (3)} \\ &= \frac{\mu(b)}{\mu(a)R(a, b)} = \frac{\mu(b)}{(\text{Prod})_R^\mu(a, b)} \quad \text{por (2)} \\ &= J^{\text{Prod}}((\text{Prod})_R^\mu(a, b), \mu(b)) \\ &= J^{\text{Prod}}((\text{Prod})_R^\mu(a, b), \mu_2(a, b)) \end{aligned}$$

Lema 3.

Sea W la t-norma de Lukasiewicz. Dados una relación borrosa R y un conjunto borroso μ se verifica que

$$J^W(R(a, b), J_\mu^W(a, b)) = J^W((W)_R^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$$

Demostración

Si (a, b) no pertenece a la región $\text{INCW}^\mu(R)$, por no verificar las condiciones (1) y (2), ambas expresiones valen 1.

$$\begin{aligned} \text{Si } (a, b) \text{ pertenece a la región } \text{INCW}^\mu(R), \text{ se tiene que:} \\ J^W(R(a, b), J_\mu^W(a, b)) &= \text{Mín}(1, 1 - R(a, b) + J_\mu^W(a, b)) \quad \text{por (1)} \\ &= 1 - R(a, b) + \text{Mín}(1, 1 - \mu(a) + \mu(b)) \quad \text{por (3)} \\ &= 1 - R(a, b) + 1 - \mu(a) + \mu(b) \\ &= 1 - (\mu(a) + R(a, b) - 1) + \mu(b) \\ &\quad \text{(por (4), } \mu(a) + R(a, b) - 1 > \mu(b) \geq 0) \\ &= 1 - \text{Máx}(0, \mu(a) + R(a, b) - 1) + \mu(b) \\ &= 1 - W(\mu(a), R(a, b)) + \mu(b) \\ &\quad \text{por (2)} \\ &= \text{Mín}(1, 1 - (W)_R^\mu(a, b) + \mu(b)) \end{aligned}$$

$$= J^W_{((W)R)} \mu(a, b), \mu(b)) \\ = J^W_{((W)R)} \mu(a, b), \mu_2(a, b))$$

Teorema 3.

Dados una relación borrosa R, un conjunto borroso μ y una t-norma T_ϕ de la familia del producto, o de la t-norma de Lukasiewicz, entonces

$$J^{T_\phi}_{(R(a, b), J_\mu^{T_\phi}(a, b))} = J^{T_\phi}_{((T_\phi)R^\mu(a, b), \mu_2(a, b))}$$

Demostración

Aplicando los lemas 2 y 3 con el conjunto borroso $\phi\mu$ y la relación borrosa ϕR , se tiene que

$$J^T_{(\phi R(a, b), J_{\phi\mu}^T(a, b))} = J^T_{((T)\phi R^\mu(a, b), \phi\mu_2(a, b))}$$

$$J^T_{(\phi R(a, b), J_{\phi\mu}^T(a, b))} = J^T_{((T)\phi R^\mu(a, b), \phi\mu_2(a, b))}$$

$$\text{si y sólo si } J^T_{(\phi R(a, b), J^T_{(\phi\mu(a), \phi\mu(b))})}$$

$$= J^T_{((T)\phi R^\mu(a, b), \phi\mu_2(a, b))}$$

$$\text{si y sólo si } J^T_{(\phi R(a, b), J^T_{(\phi\mu(a), \phi\mu(b))})}$$

$$= J^T_{(T(\phi\mu(a), \phi R(a, b)), \phi\mu_2(a, b))}$$

$$\text{si y sólo si } J^T_{(\phi R(a, b), \phi\phi^{-1}J^T_{(\phi\mu(a), \phi\mu(b))})}$$

$$= J^T_{(\phi\phi^{-1}T(\phi\mu(a), \phi R(a, b)), \phi\mu_2(a, b))}$$

$$\text{si y sólo si } J^T_{(\phi R(a, b), \phi J_\phi^T(\mu(a), \mu(b)))}$$

$$= J^T_{(\phi T_\phi(\mu(a), R(a, b)), \phi\mu_2(a, b))}$$

$$\text{si y sólo si } J^T_{(\phi R(a, b), \phi J_\phi^T(\mu(a), \mu(b)))}$$

$$= J^T_{(\phi(T_\phi)R^\mu(a, b), \phi\mu_2(a, b))}$$

$$\text{si y sólo si } \phi^{-1}J^T_{(\phi R(a, b), \phi J_\phi^T(\mu(a), \mu(b)))}$$

$$= \phi^{-1}J^T_{(\phi(T_\phi)R^\mu(a, b), \phi\mu_2(a, b))}$$

$$\text{si y sólo si } J_\phi^T(R(a, b), J_\phi^T(\mu(a), \mu(b)))$$

$$= J_\phi^T((T_\phi)R^\mu(a, b), \mu_2(a, b))$$

por (*)

$$\text{si y sólo si } J^{T_\phi}_{(R(a, b), J^{T_\phi}_{(\mu(a), \mu(b))})}$$

$$= J^{T_\phi}_{((T_\phi)R^\mu(a, b), \mu_2(a, b))}$$

$$\text{si y sólo si } J^{T_\phi}_{(R(a, b), J_\mu^{T_\phi}(a, b))}$$

$$= J^{T_\phi}_{((T_\phi)R^\mu(a, b), \mu_2(a, b))} \quad \text{c.q.d.}$$

Para ver el paso (*) se demuestra que $J^{T_\phi}_{\phi} = J^{T_\phi}$

$$J_\phi^T(x, y) = \phi^{-1}J^T(\phi(x), \phi(y)) = \phi^{-1}\text{Sup}\{z/ T(\phi(x), z) \leq \phi(y)\} = \phi^{-1}\text{Sup}\{\phi(z)/ T(\phi(x), \phi(z)) \leq \phi(y)\} \\ = \text{Sup}\{z/ T(\phi(x), \phi(z)) \leq \phi(y)\} = \\ = \text{Sup}\{z/ \phi^{-1}T(\phi(x), \phi(z)) \leq y\} = \text{Sup}\{z/ T_\phi(x, z) \leq y\} = J^{T_\phi}(x, y). \blacksquare$$

4 MEDIDAS DE μ -T - INCONDICIONALIDAD DE RELACIONES BORROSAS: MOMENTOS DE INCONDICIONALIDAD DE ORDEN K.

Definición 2.

Se definen los Momentos de μ -T-condicionalidad de orden k de una relación R como:

$$MI_{\mu, T}^{(k)}(R) \\ = \iint_{(a, b) \in E_1 \times E_2} (1 - J^T(R(a, b), R_C^{\mu-T}(a, b)))^k da db$$

Se definen los Momentos normalizados de μ -T-condicionalidad de orden k de una relación R como:

$$MNI_{\mu, T}^{(k)}(R) = \frac{MI_{\mu, T}^{(k)}(R)}{MI_{\mu, T}^{(k)}(1)}$$

Corolario 1.

Si T es el mínimo o una t-norma arquimediana, entonces

$$MI_{\mu, T}^{(k)}(R) \\ = \iint_{(a, b) \in INC_T^\mu(R)} (1 - J^T(R(a, b), R_C^{\mu-T}(a, b)))^k da db \\ = \iint_{(a, b) \in INC_T^\mu(R)} (1 - J^T(R(a, b), J_\mu^T(a, b)))^k da db \\ = \iint_{(a, b) \in INC_T^\mu(R)} (1 - J^T((T)R^\mu(a, b), \mu_2(a, b)))^k da db$$

Demostración

Inmediata por teorema 2.

Proposición 2.

Los momentos normalizados de orden k son medidas aditivas.

Demostración

Son medidas borrosas, pues $MNI_{\mu, T}^{(k)}(\emptyset) = 0$, $MNI_{\mu, T}^{(k)}(1) = 1$. Son medidas aditivas, pues si R_1 y R_2 son relaciones borrosas disjuntas, se tiene que:

$$MNI_{\mu, T}^{(k)}(R_1 \cup R_2) = MNI_{\mu, T}^{(k)}(R_1) + MNI_{\mu, T}^{(k)}(R_2)$$

Definición 3.

Se define la distancia de μ -T-incondicionalidad de una relación R como la distancia d_T entre la relación y su relación μ -T-condicionalizada

$$DI_{\mu}^T(R) = d_T(R(a, b), R_C^{\mu-T}(a, b))$$

Se define la distancia normalizada de μ -T-condicionalidad de una relación R como

$$DNI_{\mu}^T(R) = \frac{DI_{\mu}^T(R)}{DI_{\mu}^T(1)}$$

Corolario 2.

Si T es el mínimo o una t-norma arquimediana, entonces

$$DI_{\mu}^T(R) = d_T(R(a, b), R_C^{\mu-T}(a, b))$$

$$= d_T((T)R^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b))$$

Demostración

Es inmediato por el teorema 2 que

$$DI_{\mu}^T(R) = d_T(R(a, b), R_C^{\mu-T}(a, b))$$

$$= \sup_{(a,b) \in INC_T^{\mu}(R)} \{1 - J^T(R(a, b), R_C^{\mu-T}(a, b))\}$$

$$= \sup_{(a,b) \in INC_T^{\mu}(R)} \{1 - J^T(R(a, b), J_{\mu}^T(a, b))\}$$

$$= \sup_{(a,b) \in INC_T^{\mu}(R)} \{1 - J^T((T)R^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b))\}$$

$$= d_T((T)R^{\mu}(a, b), \mu_2(a, b))$$

Proposición 3.

Si T es el mínimo o una t-norma arquimediana y $R_1 \cup R_2 = \text{Max}(R_1, R_2)$, entonces la distancia normalizada de μ -T-condicionalidad de una relación R es una medida de posibilidad.

Demostración.

Es una medida borrosa pues $DNI_{\mu}^T(\emptyset) = 0$, $DNI_{\mu, T}^{(k)}(1) = 1$.

Por ser $R_1 \cup R_2 = \text{Max}(R_1, R_2)$, es una medida de posibilidad, pues se tiene que

$$DNI_{\mu}^T(R_1 \cup R_2) = \text{Max}(DNI_{\mu}^T(R_1), DNI_{\mu}^T(R_2)).$$

Ejemplo 1.

Sea $E_1 \times E_2 = [0, 1]^2$ y sea μ el conjunto borroso identidad, entonces la región de μ -T-incondicionalidad de la relación constante 1 es

$$INC_T^{\mu}(1) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tal que } T(\mu(x), R(x, y)) > \mu(y)\}$$

$$= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tal que } T(\mu(x), 1) > \mu(y)\}$$

$$= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tal que } \mu(x) > \mu(y)\}$$

$$= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tal que } x > y\}.$$

Integrando en la región de μ -T-incondicionalidad se obtiene:

$$MI_{Id, Min}^{(1)}(1) = \int_0^1 \int_0^x (1 - J^{Min}(1, y)) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (1 - y) dy dx = \frac{1}{3}.$$

$$MI_{Id, Prod}^{(1)}(1) = \int_0^1 \int_0^x (1 - J^{Prod}(1, \frac{y}{x})) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (1 - \frac{y}{x}) dy dx = \frac{1}{4}.$$

$$MI_{Id, W}^{(1)}(1) = \int_0^1 \int_0^x (1 - J^W(1, \text{Min}(1, 1 - x + y))) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (x - y) dy dx = \frac{1}{6}.$$

Por ser la relación constante 1 la mayor posible, sus momentos de μ -T-incondicionalidad son cotas superiores para los de cualquier otra relación borrosa.

$$\begin{aligned} DI_{Id}^{Min}(1) &= \sup_{(x,y) \in INC_{Id}^{Min}(1)} \{1 - J^{Min}(1, J^{Min}(x, y))\} \\ &= \sup_{x > y} (1 - y) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DI_{Id}^{Prod}(1) &= \sup_{(x,y) \in INC_{Id}^{Prod}(1)} \{1 - J^{Prod}(1, J^{Prod}(x, y))\} \\ &= \sup_{x > y} (1 - \frac{y}{x}) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DI_{Id}^W(1) &= \sup_{(x,y) \in INC_{Id}^W(1)} \{1 - J^W(1, J^W(x, y))\} \\ &= \sup_{x > y} (x - y) = 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

Sea $E_1 \times E_2 = [0, 1]^2$ y sea μ el conjunto borroso identidad. Se estudia la incondicionalidad del operador de Kleene Dienes, definido por $KD(x, y) = \text{Max}(1 - x, y)$. Las gráficas siguientes representan este operador y sus regiones de Id-Min-incondicionalidad e Id-Prod-incondicionalidad en que se integra para calcular los momentos.

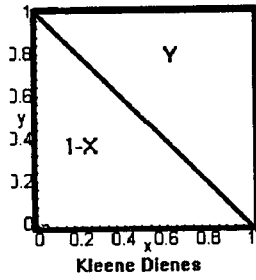


Figura 1: Operador de Kleene Dienes

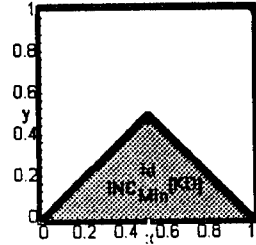


Figura 2: Región de Id-Min-incondicionalidad

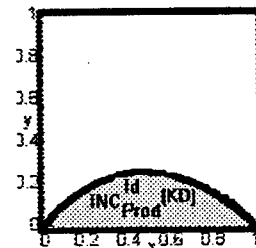


Figura 3: Región de Id-Prod-incondicionalidad

$INC_{Id,Min}^{(1)}(KD)$

$= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tal que } \min(x, KD(x, y)) > y\}$

$= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tal que } x > y \text{ y } 1-x > y\}$.

$$MI_{Id,Min}^{(1)}(KD) = \int_0^1 \int_y^{1-y} (1 - J^{\min}(1-x, y)) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_y^{1-y} (1-y) dx dy = \frac{5}{24}, \text{ luego } MNI_{Id,Min}^{(1)}(KD) = \frac{5}{8}.$$

$INC_{Id,Prod}^{(1)}(KD)$

$= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tal que } x \cdot KD(x, y) > y\}$

$= \{(x, y) \in [0, 1]^2 \text{ tal que } x \cdot x^2 > y\}$.

$$MI_{Id,Prod}^{(1)}(KD) = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - J^{\text{Prod}}(1-x, \frac{y}{x})) dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - \frac{y}{x(1-x)}) dy dx = \frac{1}{12}, \text{ luego}$$

$$MNI_{Id,Prod}^{(1)}(KD) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Por ser el operador de Kleenes Dienes W-condicional, se tiene que $INC_W^{Id}(KD) = \emptyset$, luego

$MI_{Id,W}^{(k)}(KD) = 0$ para todo número natural k .

5 CONCLUSIÓN:

En [1] se proponen dos formas distintas de medir la condicionalidad de relaciones borrosas, a través de la distancia entre la relación y su relación μ -T-condicionalizada, o bien mediante la distancia entre TR^μ y la relación μ_2 .

Los espacios métricos generalizados y su relación con los preórdenes resultan útiles para unificar ambas medidas. Dados una relación borrosa R , un conjunto borroso μ y una t-norma T , arquimediana o el mínimo, se ha demostrado que $J^T(R(a, b), J_{\mu}^T(a, b))$ es igual a $J^T((T)R$

$\mu(a, b), \mu_2(a, b))$ en cualquier punto

$(a, b) \in E_1 \times E_2$, por lo que las dos formas de medir la incondicionalidad resultan iguales en cada punto si se utiliza la distancia $d=1-J^T$, por tanto, también coinciden las dos formas de calcular la distancia y momentos de incondicionalidad.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. Garmendia. μ -T-Condionalización de una relación difusa. Medida de μ -T-Condionalidad. Actas Estylf 97, pp. 281-286. 1997.
- [2] E. Trillas. On Logic and Fuzzy Logic. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 1-2, pp. 107-137. 1993.
- [3] E. Trillas. Apunte sobre la indistinguibilidad. Theoria. Segunda Época, Vol VIII, Num. 19, pp. 23-49, 1993.
- [4] E. Trillas, L. Valverde. An Inquiry into Indistinguishability Operators. Aspects of Vagueness. Editores H.J. Skala y otros. Reidel Pubs (Dordrech), pp. 231-256. 1984.
- [5] G. J. Klir, T. A. Folger. Fuzzy sets, uncertainty and information. Prentice Hall. 1988.
- [6] S. Weber. Conditional measures and their applications to fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 42, pp. 73-85. 1991.

REPRESENTACIÓN LINGÜÍSTICA DE PERFILES TEMPORALES BORROSOS

P. Félix¹, S. Fraga¹, R. Marín² and S. Barro¹.

¹Departamento de Electrónica e Computación
Facultade de Física. Universidade de Santiago de Compostela
e-mail: paulo@dec.usc.es

² Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Murcia

Resumen

Tomamos como punto de partida el modelo de Perfiles Temporales Borrosos (PTB) [6], mediante el que describimos la evolución temporal de un parámetro físico determinado. Siguiendo este modelo, que define la aproximación a una curva evolución por medio de un conjunto de tramos lineales entre una serie de puntos significativos ($X_0, X_1, \dots, X_n$), y en el que cada tramo se define mediante una restricción imprecisa sobre la duración, el incremento de valor y la pendiente entre los puntos conectados por el tramo, presentamos un lenguaje de representación de perfiles temporales borrosos, cuya semántica se proyecta en una definición borrosa de cada una de las restricciones de un perfil de interés.

Palabras clave: modelización de la incertidumbre, reconocimiento de tendencias.

1 INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas con los que se enfrentan los desarrolladores de sistemas basados en conocimiento, es el de facilitar al experto el que pueda expresar toda la riqueza de matices de su conocimiento con vistas a su implementación computacional. Éste es el objetivo que perseguimos en este trabajo, con la búsqueda de un lenguaje, próximo al natural, que permita describir al experto la evolución temporal de un parámetro físico.

El modelo de PTB se basa en el uso del formalismo de las redes de restricciones, que permite una inmediata proyección de la descripción lingüística de un perfil de interés, además de constituir un soporte adecuado para el análisis de la consistencia de la información. Por otra parte, modelamos la flexibilidad necesaria en

las restricciones de un perfil mediante la teoría de conjuntos borrosos [4], de manera que, en último término, la semántica correspondiente a la descripción del perfil viene dada por la asignación de un conjunto borroso para cada una de las restricciones que lo constituyen. Así, el modelo nos proporciona un modo de analizar el problema de la representación de tendencias en términos imprecisos, más próximos a los que forman parte de los criterios de los expertos humanos.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

La pretensión de partida es representar un perfil de evolución relativo a una variable física $v(t)$, que toma valores reales en el tiempo. Desarrollamos un modelo, al que denominamos **Perfil Temporal Borroso** (PTB) [6], que opera a través de una descripción lineal borrosa de la evolución de la citada variable. Un PTB es una red de restricciones borrosas entre puntos significativos, que juegan el papel de nodos de la red.

Cada punto significativo $X_i = \langle V_i, T_i \rangle$ está definido como un par de variables: V_i representa un valor desconocido del parámetro físico, y T_i representa un instante de tiempo desconocido. En ausencia de cualquier restricción, las variables V_i y T_i pueden tomar cualquier valor preciso v_i y t_i , respectivamente.

Una restricción borrosa $R_{ij} = \langle D_{ij}, L_{ij}, M_{ij} \rangle$ sobre dos puntos significativos X_i y X_j es una terna formada por un incremento borroso D_{ij} , una duración borrosa L_{ij} y una pendiente borrosa M_{ij} .

La restricción D_{ij} restringe conjuntamente los dominios de valores posibles de las variables V_i y V_j , mediante una distribución de posibilidad π_{ij}^D , normalizada y unimodal -por simplicidad trapezoidal-, cuyo universo de discurso es $\mathbb{R}$. $\forall \delta = (v_j - v_i) \in \mathbb{R}$: $\pi_{ij}^D(\delta) \in [0, 1]$. En ausencia de otras restricciones, las asignaciones $V_i = v_i$ y $V_j = v_j$ son posibles si se satisface $\pi_{ij}^D(\delta = (v_j - v_i)) > 0$. Podemos interpretar una restricción binaria D_{ij} como la asignación de un **incremento borroso**, a la distancia entre las variables

V_i y V_j .

Una restricción binaria L_{ij} sobre dos variables del dominio T_i y T_j se define, de modo similar a la restricción D_{ij} , mediante una distribución de posibilidad π_{ij}^L , normalizada y unimodal, cuyo universo de discurso es $\mathbb{Z}$, siendo el universo de discurso del tiempo una representación discretizada del mismo a la que denominamos τ . $\forall \sigma = (t_j - t_i) \in \mathbb{Z} : \pi_{ij}^L(\sigma) \in [0, 1]$. Podemos interpretar una restricción binaria L_{ij} como la asignación de una **duración borrosa** a la distancia entre T_i y T_j .

Una restricción cuaternaria M_{ij} sobre dos puntos significativos X_i y X_j , se define mediante una distribución de posibilidad π_{ij}^M normalizada y unimodal, cuyo universo de discurso es $\mathbb{R}$. $\forall p = ((v_j - v_i)/(t_j - t_i)) \in \mathbb{R} : \pi_{ij}^M(p) \in [0, 1]$. Dado un valor preciso p_{ij} , $\pi_{ij}^M(p_{ij})$ representa la posibilidad de que la pendiente de la recta que une X_i y X_j sea precisamente p_{ij} . La restricción M_{ij} restringe conjuntamente los dominios de V_i , V_j , T_i y T_j . En ausencia de otras restricciones, las asignaciones $V_i = v_i$, $V_j = v_j$, $T_i = t_i$ y $T_j = t_j$ son posibles si se satisface $\pi_{ij}^M((v_j - v_i)/(t_j - t_i)) > 0$. Podemos interpretar una restricción M_{ij} como la asignación de un valor borroso, al que denominaremos **pendiente borrosa**, a la recta que une X_i y X_j .

Una representación borrosa de las restricciones permite acomodarse a la necesidad de disponer de perfiles de evolución flexibles, además de expresar de un modo directo y sencillo conceptos como el de *prioridad* entre las restricciones [3], de modo que aquellas restricciones relevantes primen sobre las que son consideradas de poca importancia. Sin embargo, y por motivos de espacio, no vamos a incluir la discusión correspondiente a la introducción de la prioridad en el lenguaje.

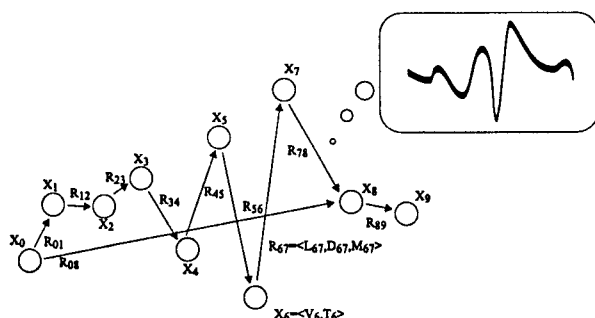


Figura 1: Ejemplo de Perfil Temporal Borroso.

Debido al carácter lingüístico de la adquisición del perfil, es previsible que su descripción contenga información redundante o inconsistente. Por ello hemos desarrollado una serie de herramientas formales para el análisis de la consistencia de la información de la red que define el PTB, eliminando la información redundante y detectando la existencia de inconsistencias[6].

3 ADQUISICIÓN LINGÜÍSTICA DE PERFILES

Para representar de una manera computable el conjunto de sentencias bien construidas del lenguaje, utilizamos el metalenguaje BNF (Backus-Naur form). Consiste en un conjunto de definiciones o reglas de reescritura donde un símbolo no terminal del lenguaje (representado entre los corchetes '<>') se define en función de una secuencia de símbolos terminales y/o no terminales.

El lenguaje que hemos desarrollado se integra en la estructura fundamental del preestándar europeo TSMI-CEN/TC251, para la representación de problemas temporales en entornos médicos informatizados [2]. Además, se ofrece como continuación del lenguaje ya desarrollado por Barro *et al.* [1], con el objetivo de integrar la representación de perfiles temporales borrosos en un modelo global de representación de hechos temporales mediante redes de restricciones temporales borrosas.

3.1 LENGUAJE PARA LA EXPRESIÓN DE ENTIDADES BORROSAS DE LOS DIFERENTES DOMINIOS

Presentaremos el conjunto de reglas de reescritura que nos permitirán la expresión de la evolución de una variable en el tiempo, así como su proyección sobre las diferentes entidades que constituyen un PTB. Esta proyección se logra mediante la obtención de las restricciones asociadas a los arcos entre los nodos involucrados en cada expresión. Así, en el caso de manipular referencias temporales (por ejemplo, '*mucho después*') calcularemos las distribuciones de posibilidad asociadas a las extensiones temporales L_{ij} ; en el caso de referirnos al dominio correspondiente al parámetro físico (por ejemplo, '*un poco mayor*') calcularemos las distribuciones de posibilidad asociadas a los incrementos D_{ij} ; finalmente, en el caso de referirnos al ritmo de variación de dicha variable (por ejemplo, '*crece despacio*') calcularemos M_{ij} . La propagación de restricciones resolverá las referencias implícitas en el lenguaje.

La introducción de puntos significativos se realiza mediante el conjunto de predicados indicado en la *tabla I*, y que contempla dos tipos básicos de aserciones:

- de *asignación*, en las que se definen directamente los puntos significativos mediante la expresión del valor de la variable y su ocurrencia temporal, ya sea un instante o un intervalo. Así, podemos construir descripciones del tipo de: '*la temperatura es un poco mayor aproximadamente diez minutos después*' [5].
- de *acción*, en las que se matiza más el tipo de transición que tiene lugar entre dos puntos sig-

Tabla I: Reglas de reescritura correspondientes a la estructura básica de predicados

(R1)	<predicado> ::= { (<proposición>) (<proposición> <referencia temporal>) }
(R2)	<proposición> ::= (<etiqueta cláusula> { (<aserción>) <predicado> })
(R3)	<aserción> ::= { <asignación> <acción> }
(R4)	<asignación> ::= ([<sujeito>] <verbo asignación> <valor>)
(R5)	<sujeito> ::= { <nombre variable> NULL ... }
(R6)	<nombre variable> ::= { TEMPERATURA PRESIÓN TENSIÓN ... }
(R7)	<verbo asignación> ::= { SER ESTAR ... }
(R8)	<acción> ::= ([<sujeito>] <evolución>)
(R9)	<evolución> ::= { (<transición> [<descriptor modo>], DESDE <valor> , HASTA <valor> <verbo asignación> [APROX CONSTANTE]) }
(R10)	<transición> ::= (<verbo acción> [<incremento>])
(R11)	<verbo acción> ::= { SUBIR BAJAR AUMENTAR ... }
(R12)	<descriptor modo> ::= { MODERADAMENTE BRUSCAMENTE ... }
(R13)	<etiqueta cláusula> ::= { EVENTO EPISODIO }
(R14)	<referencia temporal> ::= { <referencia temporal> <referencia temporal> (<enlace temporal> <expresión temporal>) }
(R15)	<enlace temporal> ::= { <enlace temporal basico> <enlace temporal complejo> }
(R16)	<enlace temporal basico> ::= { TIENE_DE_DURACIÓN OCURRE }
(R17)	<enlace temporal complejo> ::= (<etiqueta de etc> <etiqueta explícita>)
(R18)	<etiqueta de etc> ::= { TD O }
(R19)	<etiqueta explícita> ::= { <etiqueta de instante> <etiqueta de intervalo> }
(R20)	<comparador temporal> ::= { <relación instante-instante> <relación instante-intervalo> <relación intervalo-intervalo> }
(R21)	<expresión temporal> ::= { <expresión de instante> <expresión de intervalo> <expresión de duración> }
(R22)	<expresión de instante> ::= { <instante> <etiqueta de instante> <comparador temporal> <expresión temporal> }
(R23)	<expresión de intervalo> ::= (<intervalo> <etiqueta de intervalo> <comparador temporal> <expresión temporal>)
(R24)	<expresión de duración> ::= (<extensión temporal>)
(R25)	<etiqueta de instante> ::= { Cualquier_etiqueta_explicita_de_instante AQUÍ }
(R26)	<etiqueta de intervalo> ::= { Cualquier_etiqueta_explicita_de_intervalo }

nificativos. De esta manera, podemos describir tramos como: *'durante algunos minutos, la temperatura sube bruscamente hasta un valor mucho más alto'*. Hay que destacar el hecho de que mediante verbos de asignación se puede realizar una descripción de un tramo en términos de acción; es el caso del uso del verbo *'ser'* como sinónimo de *'permanecer'*, en ejemplos como *'la temperatura es aproximadamente constante durante las siguientes 3 horas'*.

En las *tablas II y III* se recoge el conjunto de reglas de reescritura correspondientes a la expresión de las relaciones temporales y de valor permitidas entre puntos significativos.

En la definición de las reglas hemos usado los siguientes metasímbolos: *'::='* es el metasímbolo de reescritura, *'[]'* indican la opcionalidad de su contenido, *'()''* son delimitadores, *'|'* separa las opciones mutuamente excluyentes delimitadas por *'{'*, y *'<>'* indican que su contenido no es un elemento terminal, y puede ser descompuesto en elementos más simples.

La opcionalidad en la especificación del sujeto se considera como una medida de sencillez en la descripción del perfil. El analizador entenderá que todas las sentencias sin presencia explícita de sujeto se referirán al último sujeto mencionado explícitamente con anterioridad, hasta que se especifique otro. Así, en la

sentencia *'la temperatura es, a las 10:00, de 10 grados, aunque poco después es mucho más alta'*, es obvio que se hace siempre alusión a la temperatura.

El objetivo del lenguaje introducido es mostrar la capacidad expresiva posible al describir un PTB. Por esta razón no hemos abundado en todas aquellas expresiones que usamos en lenguaje natural para describir la evolución de una variable, conformándonos con un conjunto reducido que creemos que satisface con creces la flexibilidad requerida.

3.2 UNA SEMÁNTICA ASOCIADA AL LENGUAJE

Además de estas reglas sintácticas o de reescritura, debemos definir las correspondientes reglas semánticas que asignen un significado a las entidades anteriormente definidas.

Las entidades expresadas por medio de este lenguaje deben proyectarse sobre un PTB. Por este motivo es necesario calcular cada una de las restricciones que corresponden a cada uno de los arcos del PTB. Dichos cálculos se realizarán por medio de aritmética borrosa [9], de tal manera que el símbolo $\oplus$ representa el operador de suma borrosa, y $\ominus$ representa el operador de resta borrosa.

A continuación se presentan: el significado de aque-

Tabla II: Reglas de reescritura correspondientes a referencias temporales

(R27)	$\langle \text{instante} \rangle ::= (\langle \text{instante directo} \rangle)$
(R28)	$\langle \text{instante directo} \rangle ::= \{ \langle \text{relación instante-instante} \rangle \langle \text{instante absoluto} \rangle \}$
(R29)	$\langle \text{instante absoluto} \rangle ::= \{ t (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{AHORA} \text{HOY} \dots \}$
(R30)	$\langle \text{relación instante-instante} \rangle ::= \{ \langle \text{distancia temporal} \rangle [\text{APROX.}] \text{IGUAL} \}$
(R31)	$\langle \text{distancia temporal} \rangle ::= \{ \{ \langle \text{extensión temporal} \rangle \text{INMEDIATAMENTE} \} \langle \text{dirección} \rangle \}$
(R32)	$\langle \text{extensión temporal} \rangle ::= \{ \text{ENTRE} \langle \text{extensión temporal} \rangle \text{Y} \langle \text{extensión temporal} \rangle \{ \{ \langle \text{extensión temporal} \rangle \} \langle \text{operador de expansión} \rangle \} \langle \text{extensión temporal absoluta} \rangle \}$
(R33)	$\langle \text{dirección} \rangle ::= \{ \text{ANTES} \text{DESPUÉS} \}$
(R34)	$\langle \text{extensión temporal absoluta} \rangle ::= \{ [\text{APROXIMADAMENTE}] \langle \text{cantidad} \rangle \langle \text{unidad temporal} \rangle \}$
(R35)	$\langle \text{operador de expansión} \rangle ::= \{ \text{MENOS.DE} \text{MAS.DE} \}$
(R36)	$\langle \text{cantidad temporal} \rangle ::= \{ m (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{POCO} \text{MUCHO} \text{ALGO} \dots \}$
(R37)	$\langle \text{unidad temporal} \rangle ::= \{ \dots \text{SEGUNDOS} \text{MINUTOS} \text{HORAS} \dots \}$
(R38)	$\langle \text{relación instante-intervalo} \rangle ::= \{ \{ \langle \text{extensión temporal} \rangle \} \{ \text{ANTES} \text{DESPUES} \} \{ \langle \text{relación instante-instante} \rangle \} \{ \text{COMIENZO} \text{FIN} \} \text{PERTENECE} \}$
(R39)	$\langle \text{intervalo} \rangle ::= (\langle \text{intervalo directo} \rangle)$
(R40)	$\langle \text{intervalo directo} \rangle ::= \{ \langle \text{instante} \rangle, \langle \text{instante} \rangle, [\text{DURANTE}] \langle \text{extensión temporal} \rangle \text{ENTRE} \langle \text{instante} \rangle \text{Y} \langle \text{instante} \rangle \{ \text{AYER} \text{HOY} \dots \} \}$
(R41)	$\langle \text{relación intervalo-instante} \rangle ::= \{ \{ \langle \text{distancia temporal} \rangle \} [\text{APROX}] \{ \text{DESDE} \text{EMPIEZA} \text{HASTA} \text{TERMINA} \} \text{INCLUYE} \langle \text{ext. temporal} \rangle \langle \text{selector relativo a instante} \rangle \}$
(R42)	$\langle \text{selector relativo a instante} \rangle ::= \{ \text{SIGUIENTES} \text{ANTERIORES} \}$
(R43)	$\langle \text{relación intervalo-intervalo} \rangle ::= \{ \langle \text{distancia temporal} \rangle [\text{APROX}] \{ \text{DA.COMIENZO.A} \text{EMPIEZA.CON} \text{FINALIZA} \text{TERMINA.CON} \text{CONTINUA.CON} \text{A.CONTINUACIÓN.DE} \} \text{TERMINA.EN} \text{EMPIEZA.EN} \text{CONTIENE} \text{EN} \text{A.LO.LARGO} \} \{ \langle \text{selector relativo a intervalo} \rangle \} \langle \text{extensión temporal} \rangle \text{DE} \}$
(R44)	$\langle \text{selector relativo a intervalo} \rangle ::= \{ \text{PRIMEROS} \text{ÚLTIMOS} \text{SIGUIENTES} \dots \}$

Tabla III: Reglas de reescritura correspondientes a referencias de valor.

(R45)	$\langle \text{entidad del dominio} \rangle ::= (\langle \text{valor} \rangle)$
(R46)	$\langle \text{valor} \rangle ::= \{ \{ \langle \text{valor directo} \rangle \langle \text{valor relativo a valor} \rangle \} \}$
(R47)	$\langle \text{valor directo} \rangle ::= \{ \{ \text{ENTRE} \langle \text{valor directo} \rangle \text{Y} \langle \text{valor directo} \rangle \{ \{ \langle \text{relación valor-valor} \rangle \} \langle \text{valor absoluto} \rangle \} \langle \text{unidades} \rangle \} \}$
(R48)	$\langle \text{valor absoluto} \rangle ::= \{ v (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{GRANDE} \text{NEGATIVO} \dots \}$
(R49)	$\langle \text{relación valor-valor} \rangle ::= \{ \langle \text{distancia} \rangle [\text{APROXIMADAMENTE}] \text{IGUAL} \}$
(R50)	$\langle \text{distancia} \rangle ::= \{ \{ \langle \text{incremento} \rangle \} \langle \text{dirección} \rangle \}$
(R51)	$\langle \text{incremento} \rangle ::= \{ \{ \text{ENTRE} \langle \text{incremento} \rangle \text{Y} \langle \text{incremento} \rangle \{ \{ \langle \text{incremento} \rangle \} \langle \text{operador de expansión} \rangle \} \langle \text{incremento absoluto} \rangle \} \}$
(R52)	$\langle \text{dirección} \rangle ::= \{ \text{MENOR} \text{MAYOR} \}$
(R53)	$\langle \text{incremento absoluto} \rangle ::= \{ [\text{APROXIMADAMENTE}] \langle \text{cantidad} \rangle \langle \text{unidades} \rangle \}$
(R54)	$\langle \text{operador de expansión} \rangle ::= \{ \text{MENOS.DE} \text{MAS.DE} \}$
(R55)	$\langle \text{cantidad} \rangle ::= \{ m (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{POCO} \text{MUCHO} \text{ALGO} \dots \}$
(R56)	$\langle \text{unidades} \rangle ::= \{ \dots \text{LATIDOS/SEG.} \text{GRADOS.CELSIUS} \dots \}$
(R57)	$\langle \text{valor relativo a valor} \rangle ::= \{ \langle \text{relación valor-valor} \rangle \langle \text{etiqueta de valor} \rangle \}$
(R58)	$\langle \text{etiqueta de valor} \rangle ::= \{ \text{Cualquier_etiqueta_explícita_de_valor} \text{PREVIO} \text{NULL} \}$

llas expresiones del lenguaje que comprenden operadores y/o distribuciones predefinidas, y la proyección de dichas expresiones en el PTB.

3.2.1 SIGNIFICADO DE EXPRESIONES CON OPERADORES Y DISTRIBUCIONES PREDEFINIDAS

Se muestra a continuación el significado de las expresiones con operadores y distribuciones predefinidas. $\triangle$ define una distribución de posibilidad, '[]' indican la opcionalidad de su contenido, cuando éste no se especifica se considera equivalente a una extensión nula, (0,0,0,0); $-(\pi)$ indica la distribución simétrica a π . Enmarcar una expresión mediante $\|U_{\text{unidad}}$, indica su

conversión en las unidades correspondientes. Introducimos ∞ ($-\infty$) como el identificador del valor más alto (más bajo) para la variable del dominio para la que se especifica; por ejemplo, en el dominio temporal $-\infty$ es el instante inicial t_0 . Cantidades como POCO, MUCHO, ..., o en general todos los descriptores de modo (BRUSCAMENTE, MODERADAMENTE) tienen un significado que puede ser sensible al contexto de la referencia especificada, ya sea temporal o de valor. Por esta razón, las definimos como distribuciones relativas que dependen de la unidad de trabajo y del tipo de magnitud. De un modo parecido, la extensión asociada a APROXIMADAMENTE debe depender de la distribución que modula.

Mostraremos, por razones de espacio, únicamente

Tabla IV: Significado predefinido de expresiones temporales.

(R29)	<instante absoluto> $\equiv \pi_{\text{instante absoluto}}$ t AHORA AYER	$(t, t, t, t)_\tau$ $\pi_{\text{AHORA}} \triangleq (t_{\text{actual}}, t_{\text{actual}}, t_{\text{actual}}, t_{\text{actual}})_\tau$ $\pi_{\text{AYER}} \triangleq (\alpha_{\text{ayer}}, \beta_{\text{ayer}}, \gamma_{\text{ayer}}, \delta_{\text{ayer}})_\tau$
(R30)	<relación instante-instante> $\equiv \pi_{\text{relación instante-instante}}$ [APROXIMADAMENTE]IGUAL	$[\pi_{\approx 0}] \triangleq [(-\alpha_{\text{APROX}}, -\beta_{\text{APROX}}, \beta_{\text{APROX}}, \alpha_{\text{APROX}})z]$
(R31)	<distancia temporal> $\equiv \pi_{\text{distancia temporal}}$ ANTES DESPUES (<extensión temporal>ANTES) (<extensión temporal>DESPUES) INMEDIATAMENTE ANTES INMEDIATAMENTE DESPUES	$\pi_{< 0} \triangleq (-\infty, -\infty, -1, -1)z$ $\pi_{> 0} \triangleq (1, 1, \infty, \infty)z$ $-(\pi_{\text{extension_temporal}}) \cap \pi_{< 0}$ $\pi_{\text{extension_temporal}} \cap \pi_{> 0}$ $\pi_{\approx 0} \cap \pi_{< 0}$ $\pi_{\approx 0} \cap \pi_{> 0}$
(R32)	<extensión temporal> $\equiv \pi_{\text{extension_temporal}}$ (MENOS DE<extensión temporal absoluta>) (MAS DE<extensión temporal absoluta>) (<extensión temporal>MENOS DE <extensión temporal absoluta>) (<extensión temporal>MAS DE <extensión temporal absoluta>) (ENTRE<ext. temporal1>Y<ext. temporal2>)	$(\pi_{\text{ext_temporal_absoluta}} \ominus (1, 1, \infty, \infty)z) \cap (0, 0, \infty, \infty)$ $(\pi_{\text{ext_temporal_absoluta}} \oplus (1, 1, \infty, \infty)z)$ $(\pi_{\text{ext_temporal_absoluta}} \ominus \pi_{\text{extension_temporal}}) \cap (0, 0, \infty, \infty)z$ $\pi_{\text{ext_temporal_absoluta}} \oplus \pi_{\text{extension_temporal}}$ $\max_{\sigma' \leq \sigma \leq \sigma''} \{ \pi_{\text{ext_temporal1}}(\sigma'), \pi_{\text{ext_temporal2}}(\sigma'') \}$
(R34)	<extensión temporal absoluta> $\equiv \pi_{\text{ext_temporal_absoluta}}$ ([APROX]<cantidad temporal>[<Unidad temporal>])	$[[\pi_{\approx 0}] \oplus \pi_{\text{Cantidad}} \text{Unidad}]$
(R36)	<Cantidad temporal> $\equiv \pi_{\text{Cantidad_temporal}}$ m POCO,...	$(m, m, m, m)z$ $(\alpha_{\text{poco}}, \beta_{\text{poco}}, \gamma_{\text{poco}}, \delta_{\text{poco}})z, \dots$
(R40)	<Intervalo directo> PELIGRO....	$((\text{comienzoPELIGRO}(\equiv c), c, c, c)_\tau, (\text{finalPELIGRO}(\equiv f), f, f, f)_\tau, (\text{duraciónPELIGRO}(\equiv d), d, d, d)z)$

aquellas expresiones que tienen un significado predefinido que atañe directamente a la relación temporal entre puntos significativos (tabla IV). Una versión completa del lenguaje, donde aparecen aquellas expresiones relativas a las relaciones de valor o los valores de cambio se puede encontrar en [7].

Tal y como está formulado nuestro modelo, el único intervalo que se contempla representar es el intervalo temporal, que se proyecta en un par de puntos significativos. Las expresiones del tipo de, 'un cuarto de hora después de la crisis la presión es de entre 70 y 90 mmHg.' (en general, 'ENTRE <ext. temporal/valor/incremento> Y <ext. temporal/valor/incremento>', incluida en las reglas (R32), (R47) y (R51)), serán tratadas como valores en lo que respecta a su proyección sobre las restricciones L_{ij} o D_{ij} correspondientes, puesto que en otro caso habría que reformular el modelo (introduciendo la representación de duraciones e incrementos mediante intervalos), lo que aumentaría la complejidad computacional a costa de un escaso beneficio en la expresividad [5].

3.2.2 PROYECCIÓN DE ENTIDADES SOBRE EL PTB

Mostramos a continuación la proyección del conjunto de entidades antes expuestas sobre un PTB. El significado de las distribuciones trapezoidales $\pi_{> 0}$, $\pi_{< 0}$ y $\pi_{\approx 0}$, y de '[]' es el expuesto en el apartado anterior. Se asume que aquellas distribuciones que no se explicitan, tanto para las restricciones D_{iu} como M_{iu} son distribuciones unidad, esto es, $\pi_{iu}^R = \pi_U$. En caso de que la restricción sobre la que no se aporta información explícita sea L_{iu} se asume por defecto que alude a un punto significativo X_u posterior al de referencia X_i , de modo que $\pi_{iu}^L = \pi_{> 0}$. Además, en el proceso de minimización se obtienen algunas restricciones inducidas a partir de otras que aquí se indican explícitamente, como es el caso de la proyección $(X_i, X_u, \pi_{iu}^L) ::= (\text{DESPUES } X_u)$, donde se induce la asignación $\pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{> 0}$, a partir de las asignaciones mostradas $\pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{> 0}$; $\pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{> 0}$; o el correspondiente a la proyección de $(X_i, X_u) ::= (\text{SUBIR, donde se induce la asignación } \pi_{iu}^M = \pi_{> 0} \text{ a partir de la asignación directa } \pi_{iu}^D = \pi_{> 0} \text{ y de la condición implícita de que } \pi_{iu}^L = \pi_{> 0}.$ Finalmente, so-

Tabla V: Proyección de significados sobre restricciones temporales.

(R28)	$X_i ::= ([\langle \text{rel. instante-instante} \rangle] \langle \text{inst. absoluto} \rangle)$	$\pi_{ai}^L \leftarrow [[\pi_{\text{rel. instante-instante}}] \oplus \pi_{\text{instante absoluto}}]_z$
(R22)	$X_i ::= (\langle \text{relación instante-instante} \rangle X_a)$	$\pi_{ai}^L \leftarrow \pi_{\text{relación instante-instante}}$
(R22)	$X_i ::= (\langle \text{rel. instante-intervalo} \rangle (X_a, X_e)) \equiv$ $(\langle \text{ext. temporal} \rangle \text{DESPUÉS}(X_a, X_e))$ $(\text{DESPUÉS}(X_a, X_e))$ $(\langle \text{ext. temporal} \rangle \text{ANTES}(X_a, X_e))$ $(\text{ANTES}(X_a, X_e))$ $(\text{INMEDIATAMENTE ANTES}(X_a, X_e))$ $(\text{INMEDIATAMENTE DESPUÉS}(X_a, X_e))$ $([\langle \text{rel. instante-instante} \rangle] \text{COMIENZO}(X_a, X_e))$ $([\langle \text{rel. instante-instante} \rangle] \text{FIN}(X_a, X_e))$ $(\text{PERTENECE}(X_a, X_e))$	$\pi_{ai}^L \leftarrow \pi_{\text{ext. temporal}} \cap \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \neg(\pi_{\text{ext. temporal}}) \cap \pi < 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi < 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow (\pi \approx 0 \cap \pi < 0)$ $\pi_{ai}^L \leftarrow (\pi \approx 0 \cap \pi < 0)$ $\pi_{ai}^L \leftarrow [\pi_{\text{rel. instante-instante}}]$ $\pi_{ai}^L \leftarrow [\pi_{\text{rel. instante-instante}}]$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{ei}^L \leftarrow \pi < 0$
(R23)	$(X_i, X_u, \pi_{iu}^L) ::= (\langle \text{rel. intervalo-instante} \rangle X_a) \equiv$ $(\langle \text{ext. temporal} \rangle \text{DESPUÉS } X_a)$ $(\text{DESPUÉS } X_a)$ $(\langle \text{ext. temporal} \rangle \text{ANTES } X_a)$ $(\text{ANTES } X_a)$ $(\text{INMEDIATAMENTE ANTES } X_a)$ $(\text{INMEDIATAMENTE DESPUÉS } X_a)$ $([\text{APROX}]\{\text{DESDE} \text{EMPIEZA}\} X_a)$ $([\text{APROX}]\{\text{HASTA} \text{TERMINA}\} X_a)$ $(\text{INCLUYE } X_a)$ $(\langle \text{ext. temporal} \rangle \text{SIGUIENTES } X_a)$ $(\langle \text{ext. temporal} \rangle \text{ANTERIORES } X_a)$	$\pi_{ai}^L \leftarrow \pi_{\text{ext. temporal}} \cap \pi > 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{au}^L \leftarrow \neg(\pi_{\text{ext. temporal}}) \cap \pi < 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{au}^L \leftarrow (\pi \approx 0 \cap \pi < 0); \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow (\pi \approx 0 \cap \pi < 0); \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow [\pi \approx 0]; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{au}^L \leftarrow [\pi \approx 0]; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{au}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi \approx 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{\text{ext. temporal}}$ $\pi_{au}^L \leftarrow \pi \approx 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{\text{ext. temporal}}$
(R23)	$(X_i, X_u, \pi_{iu}^L) ::= (\langle \text{rel. intervalo-intervalo} \rangle (X_a, X_e)) \equiv$ $(\langle \text{ext. temporal} \rangle \text{DESPUÉS } (X_a, X_e))$ $(\text{DESPUÉS } (X_a, X_e))$ $(\langle \text{ext. temporal} \rangle \text{ANTES } (X_a, X_e))$ $(\text{ANTES } (X_a, X_e))$ $(\text{INMEDIATAMENTE ANTES } (X_a, X_e))$ $(\text{INMEDIATAMENTE DESPUÉS } (X_a, X_e))$ $([\text{APROX}]\text{DA.COMIENZO.A } (X_a, X_e))$ $([\text{APROX}]\text{EMPIEZA.CON } (X_a, X_e))$ $([\text{APROX}]\text{FINALIZA } (X_a, X_e))$ $([\text{APROX}]\text{TERMINADO.CON } (X_a, X_e))$ $([\text{APROX}]\text{CONTINUA.CON } (X_a, X_e))$ $([\text{APROX}]\text{A.CONTINUACIÓN.DE } (X_a, X_e))$ $(\text{TERMINA.EN } (X_a, X_e))$ $(\text{EMPIEZA.EN } (X_a, X_e))$ $(\text{CONTIENE } (X_a, X_e))$ $(\text{EN } (X_a, X_e))$ $(\text{A.LO.LARGO } (X_a, X_e))$ $(\text{LA ULTIMA } \langle \text{ext temporal} \rangle \text{ DE } (X_a, X_e))$ $(\text{LOS PRIMEROS } \langle \text{ext temporal} \rangle \text{ DE } (X_a, X_e))$	$\pi_{ai}^L \leftarrow \pi_{\text{ext. temporal}} \cap \pi > 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{au}^L \leftarrow \neg(\pi_{\text{ext. temporal}}) \cap \pi < 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{au}^L \leftarrow (\pi \approx 0 \cap \pi < 0); \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow (\pi \approx 0 \cap \pi < 0); \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow [\pi \approx 0]; \pi_{eu}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow [\pi \approx 0]; \pi_{eu}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{eu}^L \leftarrow [\pi \approx 0]; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{eu}^L \leftarrow [\pi \approx 0]; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow [\pi \approx 0]; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow [\pi \approx 0]; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{ei}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{eu}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{ei}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{eu}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{eu}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{eu}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi \approx 0; \pi_{ei}^L \leftarrow \pi \approx 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi > 0; \pi_{eu}^L \leftarrow \pi \approx 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{\text{ext temporal}}$ $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi \approx 0; \pi_{eu}^L \leftarrow \pi < 0; \pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{\text{ext temporal}}$

bre la red de restricciones correspondiente al PTB, 'Cualquier_etiqueta_explicita_de_tiempo/valor' identifica a un punto significativo X_a , mientras que 'Cualquier_etiqueta_explicita_de_intervalo' identifica un par de puntos significativos X_a y X_e .

La estructura de referencias temporales mostrada en las reglas (R21), (R22) y (R23) es claramente recursiva, lo que permite una gran flexibilidad, en tanto que se pueden modelar sentencias como 'aprox. termina poco después del comienzo del episodio de isquemia', del tipo de $\langle \text{relación intervalo-instante} \rangle \langle \text{relación instante-intervalo} \rangle (X_a, X_e)$, y cuya proyección sobre la red viene dada por la agregación de distribuciones $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi \approx 0 \oplus (\pi_{\text{POCO}} \cup \pi > 0); \pi_{iu}^L \leftarrow \pi > 0$. Por razones de espacio sólo hemos incluido en la tabla anterior la proyección correspondiente a un solo nivel de recursi-

vidad en las expresiones temporales.

La referencia temporal 'ENTRE<instante> Y<instante>' es semánticamente equivalente a la relación entre intervalos dada por '(EN $(X_a, X_e))$ ', diferenciándose únicamente en la descripción del intervalo temporal de referencia.

Tal y como hicimos antes, hemos omitido la proyección de las referencias de valor y de su cambio sobre los elementos de la red, recogidos en su totalidad en [7].

Una vez establecida la forma en que se proyectan en una red de restricciones las expresiones correspondientes a las entidades, tanto de valor como de tiempo y pendiente, las sentencias correspondientes a las reglas (R1)-(R13) integran dicha información en la creación de puntos significativos del perfil (tabla VI).

Tabla VI: Proyección sobre el perfil de las principales sentencias del lenguaje.

(R4)-(R13)	$X_i ::= \text{EVENTO}([<\text{sujeto}>] <\text{verbo asignación}> <\text{valor}> (\text{OCURRE}<\text{instante}>))$ $\pi_{ai}^D \leftarrow \pi_{<\text{valor}>}, \pi_{ci}^L \leftarrow \pi_{<\text{instante}>}$
(R4)-(R13)	$(X_i, X_u) ::= \text{EPISODIO}([<\text{sujeto}>] <\text{verbo asignación}> <\text{valor}> (\text{OCURRE}<\text{intervalo}>))$ $\pi_{ai}^D \leftarrow \pi_{<\text{valor}>}, \pi_{iu}^D = 0, \pi_{ci}^L \leftarrow \pi_{<\text{instante}>}, \pi_{ou}^L \leftarrow \pi_{<\text{instante}>}, \pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{\text{ext.temporal}}$
(R9)	$(X_i, X_u) ::= \text{EPISODIO}([<\text{sujeto}>] <\text{transición}> \text{DESDE}<\text{valor}> \text{HASTA}<\text{valor}> (\text{OCURRE}<\text{intervalo}>))$ $\pi_{iu}^D \leftarrow \pi_{\text{transición}}, \pi_{ai}^D \leftarrow \pi_{<\text{valor}>}, \pi_{vi}^L \leftarrow \pi_{<\text{valor}>},$ $\pi_{ci}^L \leftarrow \pi_{<\text{instante}>}, \pi_{ou}^L \leftarrow \pi_{<\text{instante}>}, \pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{\text{ext.temporal}}$
(R9)	$(X_i, X_u) ::= \text{EPISODIO}([<\text{sujeto}>] <\text{verbo asignación}> [\text{APROX}] \text{CONSTANTE}(\text{OCURRE}<\text{intervalo}>))$ $\pi_{iu}^M = \pi_{[\text{APROX}] \text{constante}}, \pi_{ci}^L \leftarrow \pi_{<\text{instante}>}, \pi_{ou}^L \leftarrow \pi_{<\text{instante}>}, \pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{\text{ext.temporal}}$
(R16)	$(X_i, X_u) ::= \text{EPISODIO}(<\text{aserción}> (\text{TIENE_DE_DURACIÓN}<\text{extensión temporal}>))$ $\pi_{iu}^L \leftarrow \pi_{\text{ext.temporal}}$

En la descripción realizada en la tabla VI hemos optado por la siguiente simplificación: resumimos la proyección de un instante de cualquier tipo en la creación de un punto significativo X_i , tal que $\pi_{ai}^L \leftarrow \pi_{<\text{instante}>}$, dependiendo el punto X_a del tipo de instante mencionado. La misma simplificación es aplicable a las referencias generales de valor, de modo que $\pi_{ai}^D \leftarrow \pi_{<\text{valor}>}$.

Entendemos por 'etiqueta_explicita_de_valor/instante/intervalo' cualquier etiqueta lingüística con que se haya renombrado cualquier hecho que tiene lugar en un instante o intervalo y que tiene asociado un valor o intervalo de valores (según el dominio al que nos referimos), por ejemplo, 'poco después de la crisis' (donde con 'crisis' nos referimos a un intervalo temporal en que se identifica un determinado perfil). Un valor de NULL o AQUÍ, asignado a las etiquetas de valor e instante, supone una referencia a la entidad correspondiente al último punto significativo especificado. Por ejemplo, 'la temperatura sube hasta aproximadamente 10 grados, quince minutos después', significa que el nuevo punto significativo expresado está a quince minutos del anterior, y su valor es de unos 10 grados.

Con posterioridad a la etapa de definición se construye un perfil, enlazando aquellos tramos que, refiriéndose al mismo parámetro físico, comparten alguno de sus puntos significativos extremos, con objeto de obtener una secuencia ordenada de puntos significativos unidos por tramos. Inmediatamente, se realiza la etapa del análisis de la consistencia de la red obtenida.

4 EJEMPLO

Analizaremos un ejemplo de descripción de perfiles mediante el lenguaje presentado, mostrando su proyección final en las correspondientes restricciones de la red (tabla VII):

'La temperatura sube bruscamente, hasta los 40 grados, desde las 20:00, y durante aproximadamente 30 minutos; desciende aproximadamente 2 grados a lo largo de los siguientes 15 minutos'.

En la figura 2 mostramos las operaciones borrosas realizadas para calcular la distribución de posibilidad asociada a una de las restricciones del perfil.

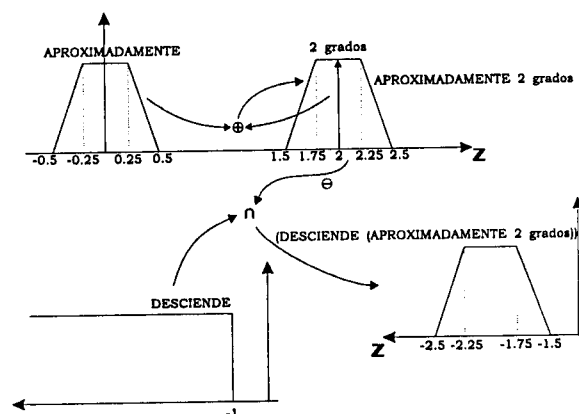


Figura 2: Representación gráfica de la obtención de la distribución de posibilidad correspondiente al significado de la expresión: 'desciende aproximadamente 2 grados'.

5 DISCUSIÓN Y TRABAJO FUTURO

La introducción de instrumentación en multitud de dominios de aplicación ha dado lugar a una creciente identificación de situaciones de interés con la presencia de ciertos perfiles de evolución en las variables adquiridas, manipuladas, almacenadas y presentadas a los usuarios de dicha instrumentación. Los PTB [6], pretenden ser un modelo adecuado para manejar estos perfiles evolutivos, dado que recogen la imprecisión que ineludiblemente va ligada a su definición y uso. En otras publicaciones hemos recogido aspectos propios de la manipulación de PTB, para su minimización, análisis de consistencia y equiparación con los datos obtenidos de una variable a analizar. Aquí hemos querido

Tabla VII: Proyección de las sentencias del ejemplo sobre las restricciones de un PTB.

$(X_1, X_2) ::= \text{EPISODIO}(\langle \text{transición} \rangle \text{DESDE} \langle \text{valor} \rangle \text{HASTA} \langle \text{valor} \rangle \text{OCURRE}(\langle \text{intervalo temporal} \rangle)) \equiv$ $\equiv (\text{SUBE BRUSCAMENTE})(\text{HASTA } 40)(\text{DESDE } 20:00 \text{ DURANTE APROX } 30 \text{ MIN}) \triangleq$
$(X_1, X_2) ::= \langle \text{verbo acción} \rangle \equiv (\text{SUBE}) \triangleq \pi_{12}^D = \pi_{>0}.$ $(X_1, X_2) ::= \langle \text{descriptor modo} \rangle \equiv (\text{BRUSCAMENTE}) \triangleq \pi_{12}^M = \pi_{BRUSCAMENTE}$ $X_2 ::= \langle \text{valor} \rangle \equiv (40) \triangleq \pi_{02}^D = \pi_{40} = (40, 40, 40, 40).$ $(X_1, X_2) ::= \langle \text{intervalo temporal} \rangle \equiv (\text{DESDE } 20:00, \text{ DURANTE APROX } 30 \text{ MIN}) \triangleq$ $\pi_{01}^L = \pi_{20:00} = (20:00, 20:00, 20:00, 20:00), \pi_{02}^L = \pi_U,$ $\pi_{12} = \pi_{APROX \ 30 \ MIN} = ((-4, -3, 3, 4) \oplus (30, 30, 30, 30))_Z = (26, 27, 33, 34).$
$(X_2, X_3) ::= \text{EPISODIO}(\langle \text{transición} \rangle \text{OCURRE}(\langle \text{intervalo temporal} \rangle)) \equiv$ $\equiv (\text{DESCIENDE (APROX } 2))(\text{A LO LARGO LOS SIGUIENTES } 15 \text{ MIN}) \triangleq$
$(X_2, X_3) ::= \langle \text{transición} \rangle \equiv (\text{DESCIENDE (APROX } 2)) \triangleq$ $\triangleq \pi_{23}^D = \pi_{DESCIENDE \ APROX \ 2} = (\text{DESCIENDE } ((-0.5, -0.25, 0.25, 0.5) \oplus (2, 2, 2, 2)) =$ $= (\text{DESCIENDE } (1.5, 1.75, 2.25, 2.5)) = (-1.5, 1.75, 2.25, 2.5) \cap (-\infty, -\infty, -1, -1) =$ $= (-2.5, -2.25, -1.75, -1.5).$ $(X_2, X_3) ::= \langle \text{intervalo temporal} \rangle \equiv (\text{A LO LARGO LOS SIGUIENTES } 15 \text{ MIN}) \triangleq$ $\triangleq \pi_{23}^L = \pi_{15 \ MIN} = (15, 15, 15, 15)_Z$

introducir un lenguaje de especificación de PTB que se aproxime al modo de descripción humano de perfiles de evolución, pero que mantenga perfectamente acotada su complejidad y elimine la ambigüedad.

El paso siguiente que acometeremos será el de la integración del modelo completo (descripción lingüística de perfiles, análisis de consistencia, minimización y, finalmente, equiparación en tiempo real con evoluciones reales) en un sistema especialista en percepción sobre señal, que constituye uno de los agentes de un sistema de seguimiento de pacientes en UCIC, que estamos actualmente desarrollando [8]. Esta aplicación práctica del modelo será una fuente valiosa de realimentación sobre las posibilidades y carencias del mismo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Xunta de Galicia y por la Comisión Interministerial para la Ciencia y la Tecnología (CICYT), a través de los proyectos de investigación XUGA20608B97 y TIC95-0604, respectivamente.

Referencias

- [1] S. Barro, R. Marín, J. Mira, and A. Patón. A model and a language for the fuzzy representation and handling of time. *Fuzzy Sets and Systems*, 61:153–175, 1994.
- [2] W. Ceusters, F. Buekens, G. de Moor, J. Bernauer, L. De Keyser, and G. Surján. Tsmi: a cen/tc251 standard for time specific problems in healthcare informatics and telematics. *International Journal of Medical Informatics*, 46:87–101, 1997.
- [3] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Possibility theory in constraint satisfaction problems: handling priority, preference and uncertainty. *Applied Intelligence*, 6:287–309, 1996.
- [4] H. Fargier. *Problemes de satisfaction de contraintes flexibles, application a l'ordonnancement de production*. PhD thesis, Université P. Sabatier, Toulouse, France, 1994.
- [5] P. Félix, S. Barro, and R. Marín. Un lenguaje para la expresión de patrones temporales borrosos. In *Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial, CAEPIA'95*, pages 353–366, 1995.
- [6] P. Félix, S. Barro, R. Marín, M. J. Taboada, and A. Engel. Patrones temporales borrosos en la supervisión de pacientes. In *Congreso Español de Tecnologías y Lógica Fuzzy, ESTYLF'95*, 1995.
- [7] P. Félix, S. Fraga, R. Marín, and S. Barro. Un lenguaje para la representación de tendencias. Informe Interno GSI-98-02, Universidade de Santiago de Compostela. Departamento de Electrónica e Computación, 1998.
- [8] S. Fraga, P. Félix, M. Lama, E. Sánchez, and S. Barro. A proposal for a real time signal perception specialist. In *International ICSC Symposium on Engineering of Intelligent Systems, EIS'98*, pages 261–267, 1998.
- [9] A. Kaufmann and M. M. Gupta. *Introduction to fuzzy arithmetic*. Van Nostrand Reinhold, 1985.

VIABILIDAD DE PROBLEMAS LINEALES INFECTIBLES MEDIANTE TÉCNICAS FUZZY

Teresa León Mendoza

Dep. Estadística i Investigació Operativa.
Universitat de València
Teresa.Leon@uv.es

Vicente Liern Carrión

Dep. Economía Financera i Matemàtica.
Universitat de València
Vicente.Liern@uv.es

Resumen

En nuestro trabajo tratamos el problema de la infactibilidad en Programación Lineal. En problemas reales no es extraño que aparezcan instancias no factibles, sobre todo cuando se están considerando estrategias o políticas nuevas.

Resumiremos las técnicas más habituales que se utilizan en programas con restricciones lineales para abordar este problema y proporcionamos un método fuzzy para conseguir la viabilidad de problemas infactibles que nos ha dado buenos resultados en un caso real.

Palabras Clave: Programación Lineal, Infactibilidad, Optimización Fuzzy.

No hace demasiado tiempo, los paquetes informáticos no proporcionaban información adicional al usuario acerca del problema que estaba resolviendo. Fue a finales de los 70 cuando empezaron a desarrollarse algoritmos que ayudan a diagnosticar las razones por las que ciertas instancias son infactibles¹. Su objetivo es aislar las porciones del programa que contienen una causa de infactibilidad e intentar explicarla. En la Sección 3 resumimos brevemente algunos métodos que están basados en la solución óptima del problema de la Fase I del método simplex.

Otro enfoque para evitar la infactibilidad en programas lineales hace uso del reajuste de los términos independientes de las restricciones para llegar a problemas factibles. Por ejemplo, T. Gal [3] y G. M. Roodman [11] utilizan este método. Aunque en [3] y [11] no se advierte, este método requiere conocer si el problema de la Fase I (PFI) es degenerado o no, puesto que las cotas de variación de los términos independientes se obtienen a partir de una solución óptima del dual de PFI. Si es degenerado el precio dual para cada restricción no es único (véase [8]) y por tanto estas cotas requerirán una interpretación previa.

En principio, parecería adecuado considerar ambos enfoques para tratar la infactibilidad de un problema. Sin embargo, la modificación de los términos independientes de las restricciones no siempre tiene sentido, como ocurre con el problema que describimos en la Sección 3. En este caso, no nos quedan demasiados recursos dentro de la **lógica booleana**.

Una aproximación **fuzzy** a este tema proporciona un punto de vista mucho más flexible de la situación. Por un lado, la modelización puede hacerse considerando números o relaciones fuzzy para las restricciones que provocan la infactibilidad, siempre que esto tenga sentido, y por otro lado un problema crisp puede hacerse factible haciendo uso de técnicas fuzzy.

1 INTRODUCCIÓN

Para muchos usuarios de la Programación Lineal, la construcción del modelo lineal que finalmente se ha de resolver es un proceso iterativo en el que se pretende que el problema vaya reflejando, de una forma cada vez más precisa, la realidad que se desea modelizar. Sólo cuando esto se consiga se habrá logrado una herramienta útil para tomar decisiones.

Es bastante habitual que, sobre todo en las primeras instancias que se plantean, no haya soluciones posibles. Esta infactibilidad se puede deber a errores cometidos en algún paso del proceso de modelización, pero ocurre a menudo que el modelo contiene todo lo que el modelizador intenta reflejar. Así, por ejemplo pueden aparecer restricciones que individualmente son razonables pero que globalmente son inconsistentes. Sin duda, cuando un programa lineal no tiene soluciones factibles debe buscarse la razón de esta infactibilidad.

¹Para un estudio muy interesante y reciente acerca de la factibilidad y viabilidad crisp puede consultarse la referencia [1].

2 INFACIBILIDAD Y VIABILIDAD DE PROGRAMAS CRISP

2.1 Detección de la infactibilidad

En esta sección resumimos las aproximaciones más usuales para tratar la infactibilidad de programas crisp con restricciones lineales. Básicamente seguiremos un trabajo de H. Greenberg (ver [5]) donde se presentan tres métodos para aislar la parte del problema que causa la infactibilidad. Estos métodos² son:

(i) Subsistemas irreducibles infactibles

Un subsistema irreducible infactible (SII) es un conjunto de restricciones sin solución de modo que cualquier subconjunto propio es factible.

Aunque existen algoritmos capaces de aislar subsistemas irreducibles en problemas de programación matemática en general ([1]), al ser nuestro objetivo la viabilidad de los problemas sujetos a restricciones lineales, nos restringiremos a métodos específicos para este caso.

Una clase de estos algoritmos se basa en dos teoremas de K. G. Murty (véase [10]) que hacen uso de los precios duales de la Fase I y que podemos resumir de la forma siguiente:

Si una restricción (o cota de columna) tiene precio sombra (o coste reducido) no nulo, debe formar parte de algún subsistema irreducible infactible. Las restricciones o cotas que tienen precios sombra o costes reducidos nulos deben ser descartados, y las restantes restricciones deben contener al menos un subsistema irreducible infactible.

La obtención de SII en la práctica dependerá de la aplicación informática utilizada. Por ejemplo, LINDO aplica un "filtro de supresión", CPLEX permite elegir entre dos métodos que difieren en su velocidad computacional, etc.

(ii) "Agregación" de los precios duales

El método se basa en el siguiente resultado (véase [5]) de George Dantzing (1963):

Teorema: *Todo programa lineal infactible, tiene asociado otro PL infactible con una única restricción construida sumando las filas del problema inicial ponderadas por los precios duales de la Fase I.*

La información que es potencialmente útil para detectar las causas de infactibilidad no proviene del valor numérico de los precios duales, sino de qué variables forman parte de la uno-restricción o "restricción agregada".

Con una ligera modificación este resultado es aplicable a cualquier problema con restricciones lineales.

²Estos tres métodos pueden ayudar a determinar las causas de infactibilidad de una instancia en particular, pero en general no nos proporcionan la información suficiente para poder establecer un diagnóstico.

Sin embargo, cuando la solución óptima del problema de la Fase I es degenerada puede que el "problema de filas ponderadas" no se encuentre sin un análisis adicional (ver [8]). Por ejemplo, si consideramos

$$\begin{aligned} \text{Max } & f(x_1, x_2, x_3) \\ \text{s.a. } & x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_3 \leq 1.5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

LINDO advierte de la infactibilidad y proporciona como precios duales de la Fase I $w^* = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1)$. Es fácil comprobar que éstos no aportan ninguna información, mientras que si hubiésemos encontrado los precios duales (también válidos) $w^* = (0, 1, 1, -1)$ hubiésemos obtenido la restricción agregada

$$x_1 \leq -2.5 \quad (2)$$

que sí puede resultar útil.

(iii) Acotación sucesiva

Este método ha sido ampliamente aplicado en el preproceso de programas lineales. Como se verá más adelante consiste en usar diferentes tests simples para intentar reducir las cotas.

2.2 Viabilidad mediante ajuste de términos independientes

G. M. Roodman en [11] aborda el problema de la Post-infactibilidad desde el análisis de los términos independientes. Es un enfoque que trata de determinar la cantidad exacta en que una restricción particular debe ser relajada para alcanzar la factibilidad del problema. Dado un PL $\text{Min } \{cx \mid Ax = b, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m\}$ infactible, a partir del óptimo de la Fase I, $z^*(b_i)$, obtiene la mínima cota de variación de b_i como

$$m_i = \left| \frac{z^*(b_i)}{w_i^*} \right|, \quad (3)$$

cuando w_i^* , el precio dual asociado a la restricción i -ésima del problema de la Fase I, es no nulo.

Claramente la no unicidad de precios sombra jugará un papel decisivo en la determinación de estas cotas como se puede comprobar con el problema (1).

3 VIABILIDAD DE PROGRAMAS Y TÉCNICAS FUZZY

Los métodos anteriores son útiles pero pueden resultar insuficientes: los de la Sección 2.1 localizan la infactibilidad, pero no proponen cómo resolverla y el de la Sección 2.2 es demasiado parcial, porque sólo contempla la posibilidad de variaciones en los términos independientes, posiblemente porque el análisis de sensibilidad de los coeficientes de la matriz tecnológica no es tan sencillo. Replantear el problema infactible crisp

haciendo uso de la lógica fuzzy proporciona un marco de trabajo mucho más general. De hecho, aplicar los enfoques que proporcionan las metodologías basadas en los conjuntos fuzzy permiten resolver modelos convencionales de difícil solución.

Si bien es la situación real modelizada quien marca las componentes del programa (coeficientes, restricciones, etc.) que son fuzzy de forma natural, lo cierto es que sería una pérdida de información no aprovechar la capacidad de la mayoría de los programas comerciales para aislar SII.

Nuestra propuesta es la siguiente:

- 1) Dado un Subsistema Irreducible Infactible analizamos qué coeficientes son de naturaleza fuzzy.
- 2) Asignamos rangos de variación para estos coeficientes.
- 3) Determinamos funciones de pertenencia adecuadas.
- 4) La solución fuzzy se obtendrá mediante problemas auxiliares crisp.

3.1 Un problema real

En Shapiro [12] aparece un problema real que nos permite aplicar nuestra propuesta para obtener la viabilidad de ciertos problemas infactibles. Se trata de una empresa telefónica (Wentworth Pacific Telephone Company) cuyos empleados se distribuyen en tres categorías: Operadores, Supervisores y Managers. Tras una revisión fiscal se exige a la empresa que en el plazo de 5 años debe cumplir lo establecido en la Ley de Igualdad de Empleo. El problema consiste en obtener la política de contratación óptima que tenga en cuenta varios grupos de restricciones:

- i) Una política de ascensos tradicional.
- ii) Una nueva política de ascensos creada para lograr los objetivos de la ley.
- iii) Cumplir las exigencias de la Ley de Igualdad de Empleo, L.I.E.
- iv) Que el número de empleados dentro de cada categoría no sea inferior al actual.
- v) Que el número de hombres contratados como operadores no sea superior a 500.

El problema lineal queda de la forma siguiente:

$$(P) \text{ MIN } 1 \text{ HOf} + 1.5 \text{ HOm} + 2 \text{ HSf} + 2 \text{ HSm} + 7 \text{ HMf} + 3 \text{ HMm} + 3 \text{ TSf} + 3 \text{ TSm} + 7.5 \text{ TMf} + 7.5 \text{ TMm}$$

sujeto a

a) Transiciones dentro de la empresa

- 1) $0.8265 \text{ HOm} - \text{Tsm} - \text{OMm} = -95.16$
- 2) $0.8265 \text{ HOf} - \text{TSf} - \text{OMf} = -1800$
- 3) $0.0035 \text{ HOm} + 0.905 \text{ HSm} + \text{TSm} - \text{TMm} - \text{Sm} = -15.41$
- 4) $0.0035 \text{ HOf} + 0.905 \text{ HSf} + \text{TSf} - \text{TMf} - \text{Sf} = -126$
- 5) $0.97 \text{ HMm} + \text{TMm} - \text{Mm} = -25.53$
- 6) $0.97 \text{ HMf} + \text{TMf} - \text{Mf} = -3.024$

b) Requerimientos de personal

$$7) \text{ Om} + \text{Of} \geq 3030$$

$$8) \text{ Sm} + \text{Sf} \geq 151$$

$$9) \text{ Mm} + \text{Mf} \geq 30$$

c) Exigencia de la L.I.E.

$$10) -0.8 \text{ Om} + 0.2 \text{ Of} \leq 0$$

$$11) -0.8 \text{ Sm} + 0.2 \text{ Sf} \leq 0$$

$$12) 0.25 \text{ Mm} - 0.75 \text{ Mf} \leq 0$$

$$13) -0.25 \text{ HMm} - 0.25 \text{ HMf} + \text{TMm} + \text{TMf} \geq -1.418$$

d) Condición sobre operadores

$$14) \text{ HOm} \leq 500$$

En las variables hemos denotado O, S y M los operadores, supervisores y managers, H y T contratados y en preparación, y por m y f hombres y mujeres.

Se trata de un programa lineal infactible al que aplicaremos nuestro método.

Con LINDO obtenemos el siguiente subsistema irreducible infactible de (P):

$$1) 0.8265 \text{ HOm} - \text{Tsm} - \text{Om} = -95.16$$

$$7) \text{ Om} + \text{Of} \geq 3030$$

$$10) -0.8 \text{ Om} + 0.2 \text{ Of} \leq 0$$

$$14) \text{ HOm} \leq 500$$

Éstas deberían ser las filas que hiciésemos fuzzy para reparar la infactibilidad de (P). Sin embargo, como 7) y 10) son consecuencia de las exigencias de la Ley de Igualdad de Empleo, no pueden ser modificadas. Por tanto, sólo reescribiremos 1) y 14) con números inciertos. Así pues,

i) Reemplazamos 14) por $\text{Om} \geq [500, 550]$

ii) Para reformular 1) hacemos fuzzy una columna de la matriz de Markov que se utiliza para la nueva política de promociones dentro de la empresa.

A partir de ahora usaremos la notación empleada por Carlsson y Korhonen (véase [7]) para abordar los problemas lineales en los que todos los coeficientes son imprecisos. Resolveremos el problema haciendo uso de las funciones de pertenencia siguientes:

a) Lineal para los a_{ij} , es decir

$$\mu_a(a_{ij}) = \begin{cases} 0 & a_{ij} < a_{ij}^0 \\ \frac{a_{ij} - a_{ij}^0}{a_{ij}^1 - a_{ij}^0} & a_{ij}^0 \leq a_{ij} \leq a_{ij}^1 \\ 1 & a_{ij} > a_{ij}^1 \end{cases} \quad (4)$$

b) Exponencial para los b_i , es decir

$$\mu_b(b_i) = \begin{cases} 0 & b_i < b_i^0 \\ \frac{1 - \exp\left(\frac{2(b_i - b_i^0)}{b_i^1 - b_i^0}\right)}{1 - \exp(2)} & b_i^0 \leq b_i \leq b_i^1 \\ 1 & b_i > b_i^1 \end{cases} \quad (5)$$

Podríamos haber considerado funciones de pertenencia lineales para b_i como se ha hecho para a_{ij} . Sin embargo, una función de pertenencia exponencial, como se propone en [7], supone un crecimiento más lento o

más rápido de b_i con respecto al crecimiento lineal. De hecho, si suponemos una función de pertenencia como en (5) que además dependa de un parámetro k ,

$$\mu(b_i, k) = \frac{1 - \exp\left(\frac{k(b_i - b_i^0)}{b_i^1 - b_i^0}\right)}{1 - \exp(k)}, \quad (6)$$

al hacer tender k a cero se tiene la función lineal, i.e.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mu(b_i, k) = \frac{b_i - b_i^0}{b_i^1 - b_i^0}. \quad (7)$$

Con las funciones (4), (5) y bajo la hipótesis de que hay una relación absoluta entre los números fuzzy a_{ij} y b_i podemos resolver el problema mediante el programa lineal auxiliar crisp siguiente:

$$(P_\beta) \text{ MIN } 1 \text{ HOI} + 1.5 \text{ HOm} + 2 \text{ HSf} + 2 \text{ HSm} + \\ 7 \text{ HMf} + 3 \text{ HMm} + 3 \text{ TSf} + 3 \text{ TSm} + \\ 7.5 \text{ TMf} + 7.5 \text{ TMm}$$

sujeto a

b) Requerimientos de personal

$$1) (0.2015 \beta + 0.625) \text{ HOm} + (0.2015 \beta + 0.625) \text{ HOI} \\ + (0.073 \beta + 0.007) \text{ HSm} + (0.073 \beta + 0.007) \text{ HSf} \\ - \text{TSm} - \text{TSf} \geq 1134.84$$

$$2) 0.0035 \text{ HOm} + 0.0035 \text{ HOI} + 0.905 \text{ HSm} \\ + 0.905 \text{ HSf} + \text{TSm} + \text{TSf} - \text{TMm} - \text{TMf} \geq 9.59$$

$$3) 0.97 \text{ HMm} + 0.97 \text{ HMf} + \text{TMm} + \text{TMf} \geq 1.446$$

c) Exigencia de la L.I.E.

$$4) - (0.806 \beta + 2.5) \text{ HOm} - (0.292 \beta + 0.028) \text{ HSm} \\ + (0.2015 \beta + 0.625) \text{ HOI} + (0.073 \beta + 0.007) \text{ HSf} \\ + 4 \text{ TSm} - \text{TSf} \leq -1419.36$$

$$5) - 0.014 \text{ HOm} - 3.62 \text{ HSm} - 0.0035 \text{ HOI} + 0.095 \text{ HSf} \\ - 4 \text{ TSm} + 4 \text{ TMm} + \text{TSf} - \text{TMf} \leq -64.36$$

$$6) - 0.97 \text{ HMm} - 2.91 \text{ HMf} + \text{TMm} - 3 \text{ TMf} \\ + \text{TMm} - 3 \text{ TMf} \leq -16.4580$$

c) Política de transiciones

$$7) -0.25 \text{ HMm} - 0.25 \text{ HMf} + \text{TMm} + \text{TMf} \geq -1.418$$

d) Condición sobre operadores

$$8) \text{ HOm} \leq 25 \ln[1 - \beta(1 - e^2)] + 500$$

e) 9) $0 \leq \beta \leq 1$

Usando un paquete de programación no lineal como GINO para resolver P_β se obtiene la solución óptima para un valor del parámetro β . Sin embargo muchos autores (ver [4], [6]) piensan que es preferible una descripción más completa de la decisión fuzzy en lugar de la decisión donde se alcanza el óptimo del programa crisp.

Independientemente del valor de $\beta \in [0, 1]$ hay variables que toman los siguientes valores fijos:

$$\begin{aligned} \text{Om} &= 606 & \text{Of} &= 2424 & \text{Mm} &= 25.5 & \text{Mf} &= 8.5 \\ \text{HMf} &= 5.6 & \text{HMm} &= 0 & \text{HSf} &= 0 & \text{TSf} &= 0 \\ \text{TSm} &= 0 & \text{TMf} &= 0 & \text{TMm} &= 0 \end{aligned}$$

El resto de variables dependen del parámetro. Para algunos valores de β se tienen las siguientes soluciones:

Tabla 1: Decisión óptima

β	z^*	HOI	HOm	HSm	Sm	Sf
0.0	58456.9	998.4	500	28334.3	25259.7	129.5
0.1	26991.7	967.2	512.4	12608.2	11427.6	129.4
0.2	16989.7	937.9	520.6	7615.6	6909.4	129.3
0.3	12104.8	910.3	526.8	5182.4	4707.3	129.2
0.4	9216.7	884.4	531.7	3447.6	3408.8	129.1
0.5	7310.1	859.8	535.8	2803.5	2554.4	129.0
0.6	5957.3	836.6	539.4	2136.1	1950.4	128.9
0.7	4947.2	814.6	542.5	1639.7	1501.2	128.8
0.8	4163.7	793.7	545.3	1256.3	1154.3	128.8
0.9	3537.9	773.8	547.7	951.4	878.4	128.7
1.0	3026.2	754.9	550.0	703.3	653.8	128.6

Si consideramos por ejemplo $\beta = 1$ la política de promociones óptima y la deseada por la compañía sólo presentan ligeras diferencias.

Otro enfoque

Una aproximación diferente consiste en analizar qué coeficientes del problema inicial pueden hacerse fuzzy. Sin duda, este enfoque supone a priori un mayor alejamiento de la lógica booleana.

En el problema (P) podemos hacer fuzzy toda la matriz de Markov que representa la nueva política de promociones, de forma que quede contemplada la tradicional y la que la empresa consideraba útil para emplear en el futuro.

Hemos resuelto el problema con funciones de pertenencia similares a (4) y (5) y aunque hemos obtenido soluciones con mejor valor de la función objetivo, hay que valorar que ha sido a costa de alejarse de la política de transiciones pactada por la empresa.

4 CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Cuando aplicamos técnicas de Programación Lineal a un problema real y en éste se obtiene una instancia infactible, podemos considerar que nuestro modelo matemático pertenece a alguna de las dos clases siguientes:

- Instancias que por alguna razón presentan errores en la formulación final del problema.
- Problemas en los que se refleja exactamente lo que el modelizador ha querido plasmar pero esto es incompatible con la realidad.

Será en esta segunda clase donde la formulación fuzzy sea especialmente provechosa.

Nosotros hemos resuelto un problema usando números fuzzy, pero somos conscientes de que la Programación Lineal Fuzzy permite considerar muchas modificaciones dependiendo de las hipótesis o de las características del problema a modelizar. No hemos considerado, por ejemplo, restricciones fuzzy o coeficientes

de la función objetivo fuzzy porque nuestra intención era solamente hacer viable el problema obteniendo una solución aceptable. Además, es muy importante que el trabajo previo de modelización (en ocasiones muy costoso) pueda ser usado.

Resulta evidente que la lógica fuzzy es más recomendable en algunas situaciones. Prever políticas futuras de forma demasiado rígida puede no tener sentido y quizá nos lleve a ignorar soluciones del problema que resultarían provechosas.

References

- [1] Chinnek, J. W. (1997). Feasibility and Viability (en [3]).
- [2] Delgado, M., Kacprzyk, J., Verdegay, J. L. y Vila, M. A. (1994). Fuzzy Optimization. *Physica-Verlag*.
- [3] Gal, T. , Greenberg, H. J. (1997). Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming. *Kluwer Academic Publishers*.
- [4] Gil Aluja, J. (1997). Invertir en la incertidumbre. *Editorial Pirámide*.
- [5] Greenberg, H. J. (1993). How to Analyze the results of Linear Programs - Part 3: Infeasibility Diagnosis. *Interfaces*, 23. Pág. 120-139.
- [6] Kaufmann, A., Gil Aluja, J. (1987). Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre. *Editorial Hispano Europea, S. A.*.
- [7] Lai, Y-J., Hwang, C. L. (1992). Fuzzy Mathematical Programming. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* (394). Springer-Verlag.
- [8] León, T., Liern, V. (1996). Interpretación de los precios sombra en presencia de degeneración. *Qüestió*. 20. Pág. 223-238.
- [9] León, T., Liern, V. (1996). Utilización de las variables duales en situaciones patológicas en Programación Lineal. *Actas del XXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*.
- [10] Murty, K. G. (1983). Linear Programming. *Wiley and sons*.
- [11] Roodman, G. M. (1980). Post-infeasibility analysis in linear programming. *Management Science*, 25, Pág. 916-922.
- [12] Shapiro, R. D. (1984). Optimization Models for Planning and Allocation: text and cases in Mathematical Programming. *Wiley and sons*.
- [13] Zimmermann, H. J. (1996). Fuzzy Sets Theory and its Applications. *Kluwer Academic Publishers*.
- [14] Zimmermann, H. J. (19976). Fuzzy Mathematical Programming (en [3]).

¿Cómo manejar un algoritmo difuso?

Juan Luis Castro, Miguel Delgado & Carlos Javier Mantas

Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.

Universidad de Granada

18071 Granada España

{castro,delgado,cmantas}@decsai.ugr.es

Resumen

En este artículo se presenta una nueva metodología para ejecutar y ajustar algoritmos difusos. Esta metodología consiste en transformar los pasos de un algoritmo difuso en reglas de producción de una gramática difusa y así, ejecutarlo usando la dinámica de esta gramática y ajustar su ejecución valiéndose de la capacidad de aprendizaje de los lenguajes formales difusos. Finalmente, esta metodología se usa para ejecutar y ajustar una máquina de Turing con estados difusos.

1 INTRODUCCIÓN

Un **algoritmo** es una secuencia ordenada de pasos, exentos de ambigüedad, tal que al llevarse a cabo con fidelidad, dará como resultado que se realice la tarea para la que se ha diseñado, (se obtenga la solución del problema planteado) en un tiempo finito; y una **algoritmo difuso** es según [7], "un conjunto ordenado de instrucciones difusas cuya ejecución produce una solución aproximada a un problema específico". Los dos conceptos anteriores nos ofrecen una solución a un problema planteado en un tiempo finito con la diferencia de que, con la definición crisp de algoritmo, sólo podemos obtener una única solución para cada entrada concreta, mientras que con un algoritmo difuso tenemos un rango de posibles soluciones para cada entrada específica. Normalmente, las personas trabajamos con algoritmos difusos y cada uno de nosotros obtiene, para una entrada del algoritmo, una solución concreta dentro del rango de soluciones que le ofrece el algoritmo difuso para esa entrada, en función de la interpretación que se haga de los términos difusos que aparecen en el algoritmo. Veamos el ejemplo de una receta de cocina con el fin de apreciar este hecho:

Algoritmo para cocer arroz para 1 persona: Coger un puñado de arroz, echar el doble de agua que de arroz en un cacharro, echar una pizca de sal en el agua, encender el fuego, esperar hasta que el agua rompa a hervir, echar el arroz en el agua, esperar aproximadamente 15 minutos desde que el agua rompa a hervir de nuevo, apagar el fuego. FIN. RESULTADO: arroz cocido.

Los pasos de la receta tienen cierta ambigüedad, por

ejemplo, con el paso de "coger un puñado de arroz" no sabemos si se refiere a "coger 90 grs de arroz" o a "coger 110 grs de arroz", según lo que entendamos (interpretación de un término difuso), saldrá un arroz cocido en mayor o menor cantidad. Lo mismo ocurre con el paso de "hervir aproximadamente 15 minutos" y que el arroz cocido salga más o menos blando. Sin embargo, las soluciones que podemos obtener (diferentes platos de arroz cocido) están dentro del rango de posibles soluciones que nos ofrece el algoritmo difuso.

Sin embargo, con la dinámica actual para ejecutar un algoritmo difuso, la solución obtenida sería un conjunto difuso definido sobre el conjunto universal compuesto por diferentes platos de arroz cocido para una persona que se diferencian en cantidad y en calidad; y esta solución es difícil de usar en la práctica, una persona no se puede comer todo un conjunto difuso de platos de arroz cocido. En este trabajo entenderemos que la ejecución de un algoritmo difuso producirá una solución crisp.

¿Cómo consigue un cocinero interpretar correctamente los términos difusos de una receta?, nosotros pensamos que lo logra por medio de la experiencia, esto es, un cocinero después de haber usado varias veces la receta y de haber evaluado los platos obtenidos, habrá conseguido ajustar la interpretación de los términos difusos de la receta. Esta idea está de acuerdo con las palabras de Zadeh ([6]): "la clave para el acierto de un algoritmo difuso es la retroalimentación difusa; este es un mecanismo para (a) observar -no necesariamente de manera precisa- el resultado de la ejecución de una instrucción difusa; y (b) ejecutar una nueva instrucción basada en el resultado o resultados de instrucciones precedentes".

En este trabajo ajustaremos la ejecución de un algoritmo difuso utilizando el nuevo concepto de lenguaje formal difuso presentado en [2,3,4,5]. La ejecución de un algoritmo difuso consistirá en la activación de varias reglas de producción de una gramática difusa, donde esta activación dependerá de la cantidad de símbolos disponibles y activos que intervienen en una regla y de la similaridad entre estos símbolos. Así, una ejecución de un algoritmo difuso dará lugar a varios caminos de reglas de producción, cuyo número dependerá del número de símbolos activos al comienzo de la ejecución. El resultado obtenido por cada uno de estos

camino puede ser evaluado y, con esta información, se puede ajustar el número de símbolos y la similaridad entre estos para conseguir que la ejecución de algoritmo difuso active el camino de reglas de producción que nos proporcione el resultado más satisfactorio.

En la siguiente sección, se presenta el nuevo concepto de lenguaje formal difuso. En la sección 3, una Máquina de Turing con estados difusos es tomada como ejemplo de algoritmo difuso con el fin de mostrar las ideas de ejecución, como gramática difusa, de un algoritmo difuso y el ajuste del mismo para conseguir los mejores resultados de su ejecución.

2 NUEVO CONCEPTO DE LENGUAJE FORMAL DIFUSO

2.1 LENGUAJES FORMALES DIFUSOS

Una Gramática formal G se define como:

$$G = \{V_s, V_n, V_t, P, \eta\}$$

donde V_s es el conjunto de símbolos iniciales, V_n es el conjunto de símbolos no terminales, V_t es el conjunto de símbolos terminales, η es el símbolo vacío y P es un conjunto de reglas de reescritura de la forma: $\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$, donde S_j es una cadena de símbolos de $V_s \cup V_n \cup V_t \cup \eta$, S_k es una cadena de símbolos de $V_s \cup V_n$ y, α y β denotan cadenas contextuales de símbolos de $V_s \cup V_n \cup V_t \cup \eta$. Notaremos $V_s \cup V_n \cup V_t$ como V^* y $S_m \in V^*$ indicará un símbolo o una cadena de símbolos pertenecientes a V^* .

Una cadena de derivación $d(S_0, S_m)$ de G es un conjunto ordenado de producciones para transformar S_0 en S_m . El procesamiento de cualquier cadena de derivación $d(S_0, S_m)$ es un conjunto secuencialmente ordenado de operaciones de reescritura, cada una implicando los siguientes pasos:

- 1) **Emparejamiento:** la parte izquierda de una producción se empareja con los símbolos de la cadena S_i que está siendo procesada. El grado de similaridad (emparejamiento) de dos cadenas S_i, S_k será ofrecido por la función μ . Si este emparejamiento tiene éxito ($\mu(S_i, S_k) > 0,0$), entonces:
- 2) **Reescritura:** la subcadena emparejada de S_i es sustituida por la parte derecha de la regla de producción aceptada. Finalmente:
- 3) **Aceptación:** la pertenencia de la cadena final S_j , producida por la cadena de derivación $d(S_0, S_j)$, al conjunto de símbolos terminales V_t se evalúa en el intervalo cerrado $[0,1]$. El grado de aceptación de S_j como una cadena de $L(G)$, denotado por $\beta(S_j, V_t)$, se calcula como el grado máximo de similaridad de S_j a las cadenas S_i pertenecientes a V_t , o sea,

$$\beta(S_j, V_t) = \bigvee_{S_i \in V_t} \mu(S_j, S_i).$$

El lenguaje generado por una gramática G , que usa el anterior procesamiento para sus cadenas de derivación, es lo que en [3,4] se denomina como lenguaje formal difuso generado por la gramática G .

2.2 AMBIGÜEDAD DE LOS LENGUAJES FORMALES DIFUSOS

Los lenguajes formales difusos exhiben propiedades distintivas respecto a los lenguajes crisp ya que, para cualquier S_i perteneciente a V^* , muchos S_k pertenecientes a V^* pueden existir para los cuales $\mu(S_i, S_k) > 0$. Esto quiere decir que muchas reglas de producción $\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$ se pueden permitir para reescribir S_i en diferentes S_j pertenecientes a V^* . Supuesto que la ambigüedad de una sentencia S_0 de $L(G)$ depende de cuantas cadenas de derivación $d(S_0, S_i)$ existen proporcionando diferentes S_i pertenecientes a V_t , entonces los lenguajes difusos son ambiguos.

La ambigüedad de un lenguaje formal difuso se puede mantener dentro de rangos aceptables por medio de restricciones sobre ([3,4]):

- 1) el número total $A(S_k)$ de copias disponibles de S_k perteneciente a V^* : al menos una copia de una cadena $\alpha S_k \beta$ debe de estar disponible para permitir que la regla $\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$ sea usada, supuesto que $\mu(S_i, S_k) > 0$.
- 2) el número total $A(S_j)$ de copias disponibles de S_j perteneciente a V^* : al menos una copia de una cadena S_j perteneciente a V^* debe de estar disponible para permitir que $\alpha S_i \beta$ sea reescrita en $\alpha S_j \beta$ usando la regla $\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$, supuesto que $\mu(S_i, S_k) > 0$.
- 3) el número actual $A(\alpha S_i \beta)$ de copias activadas de la sentencia $\alpha S_i \beta$ para ser procesadas: al menos una copia de la cadena $\alpha S_i \beta$ debe de ser seleccionada (activada) para ser reescrita.
- 4) **Prioridad de emparejamiento:** siempre que no haya suficiente número $A(\alpha S_i \beta)$ para disparar todas las posibles reglas de derivación $\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$ con $\mu(S_i, S_k) > 0$, entonces se debe dar prioridad a aquellas reglas $\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$ que exhiben los valores más grandes de $\mu(S_i, S_k)$, de $A(S_k)$ y/o de $A(S_j)$.

De este modo,

- (a) la posibilidad $\rho(d(S_i, S_j))$ de usar la cadena de derivación $d(S_i, S_j)$, soportada por $(\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$ con $\mu(S_i, S_k) > 0$ y $k=1, \dots, n$), para reescribir S_i , ha de ser función de $A(S_j)$, $A(S_k)$ y de $\mu(S_i, S_k)$, esto es,

$$\rho(d(S_i, S_j)) = \bigoplus_{k=1}^n (\Gamma(A(S_j), A(S_k), \mu(S_i, S_k))).$$

donde Γ nos mide la posibilidad de activación de la regla de producción $\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$ con $\mu(S_i, S_k) > 0$, y $\bigoplus$ nos da la posibilidad de usar la cadena de derivación $d(S_i, S_j)$ a partir de la posibilidad de activación de varias reglas de producción que dan lugar a esta cadena de derivación; y,

- (b) el número $A(\alpha S_j \beta)$ de copias de la cadena $\alpha S_j \beta$ producidas (activadas) por $\alpha S_i \beta$ se asume que es dependiente de $A(\alpha S_i \beta)$ y de $\rho(d(S_i, S_j))$. Su valor nos lo da la función ∂ :
- $$A(\alpha S_j \beta) = \partial(A(\alpha S_i \beta), \rho(d(S_i, S_j))).$$

2.3 CAPACIDAD DE APRENDIZAJE DE LOS LENGUAJES FORMALES DIFUSOS

Los lenguajes formales difusos pueden exhibir capacidades de aprendizaje ya que, tanto las cantidades disponibles $A(S_j)$ y $A(S_k)$ como la estructura de S_i y de S_k , se pueden modificar en función del acierto de la regla $\alpha S_k \beta \rightarrow \alpha S_j \beta$, que reescribe S_i en S_j en $d(S_0, \dots, S_i, S_j, \dots, S_n)$ cuando $\mu(S_i, S_k) > 0$, a la hora de contribuir al procesamiento de una cadena de $L(G)$. Se pueden proponer los siguientes métodos de aprendizaje [3,4,5]:

- Recompensa:** Incrementar $A(S_j)$, $A(S_k)$ siempre que $d(S_0, \dots, S_i, S_j, \dots, S_n)$ acierta en activar S_i para el cual $\beta(S_i, V_i) \rightarrow 1$.
- Castigo:** Decrementar $A(S_j)$, $A(S_k)$ siempre que $d(S_0, \dots, S_i, S_j, \dots, S_n)$ activa S_i para el cual $\beta(S_i, V_i) \rightarrow 0$.
- Reconsideración:** Decrementar $\mu(S_i, S_k)$ siempre que $d(S_0, \dots, S_i, S_j, \dots, S_n)$ activa S_i para el cual $\beta(S_i, V_i) \rightarrow 0.5$ con $\beta(S_i, V_i) < 0.5$.
- Reforzamiento:** Incrementar $\mu(S_i, S_k)$ siempre que $d(S_0, \dots, S_i, S_j, \dots, S_n)$ activa S_i para el cual $\beta(S_i, V_i) \rightarrow 0.5$ con $\beta(S_i, V_i) > 0.5$.

3 USANDO UNA GRAMÁTICA DIFUSA PARA EJECUTAR Y AJUSTAR UN ALGORITMO DIFUSO

Nosotros proponemos transformar los pasos de un algoritmo difuso a reglas de producción difusas según la filosofía de

[3,4], para poder ejecutar el algoritmo usando la dinámica de una gramática difusa y poder ajustar así su ejecución siguiendo la filosofía de aprendizaje de los lenguajes formales difusos.

La ejecución de un algoritmo difuso, siguiendo esta filosofía, produciría la ejecución paralela de varios caminos posibles de activación de reglas de producción, que finalizarían en la activación de símbolos terminales de la gramática. Al final se elegiría uno de estos símbolos terminales como conclusión del algoritmo y, a continuación, se ajustarían los parámetros de los caminos seguidos para llegar a este símbolo terminal, en función de la información acerca de la bondad de la solución asociada con este símbolo. Otra opción podría consistir en examinar todos los símbolos terminales obtenidos para evaluar la bondad de sus soluciones asociadas y así, poder ajustar los parámetros o, simplemente, tener información para futuras ejecuciones del algoritmo, de los caminos seguidos para llegar a estos símbolos terminales.

Veamos a continuación todas estas ideas aplicadas a un algoritmo difuso particular: una Máquina de Turing con estados difusos.

3.1 EJECUCIÓN DE UNA MÁQUINA DE TURING CON ESTADOS DIFUSOS

3.1.1 NOTACIÓN PRELIMINAR

Una máquina de Turing [1] está constituida por un conjunto finito de estados ($Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$), un estado inicial (q_1), un alfabeto $C = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ y un conjunto de cuadruplas. Una **cuadrupla** es un conjunto ordenado de cuatro símbolos en la que el primer símbolo representa un estado interno, el segundo un símbolo leído en la cinta, el tercero una acción (L , R ó s_k , o sea, moverse a la izquierda, a la derecha o imprimir el símbolo S_k) y el cuarto, el estado al que se evoluciona. Notemos la diferencia entre el símbolo S_k y la acción s_k que consiste en imprimir el símbolo S_k en la cinta.

En este trabajo, se entenderá por **Máquina de Turing con estados difusos** a una máquina de Turing compuesta por:

- un conjunto finito de estados difusos definidos sobre Q : $Q' = \{q_i : Q \rightarrow [0, 1] / i = 1, \dots, m\}$,
- un estado inicial difuso $q_i \in Q'$,
- un alfabeto $C = \{S_1, \dots, S_n\}$ y,
- un conjunto de cuadruplas, donde los estados internos pertenecen a Q' .

En el resto del trabajo, al estado interno difuso q_i , definido con la función de pertenencia singleton ($q_i(q_i) = 1.0$ y $q_i(q_j) = 0.0$, si $i \neq j$), lo notaremos con q_i .

La gramática formal que se comporta de la misma forma que una máquina de Turing con estados difusos es la cuadrupla (V_s, V_n, V_t, P) , donde

- $V_s = \{q_1\}$,
- $V_{parada} = \{q_i S_j \text{ tales que no pueden activar ninguna regla de producción de la gramática}\}$,
- $V_n = \{q_i S_j, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\} - V_{parada}$,
- $V_t = q_i S_j \in V_{parada}$ tal que la máquina de Turing cumple cierta condición,
- $P = q_i S_j \rightarrow q_l (s_k | L | R)$ tal que la cuadrupla $q_i S_j (s_k | L | R) q_l$ está en la máquina de Turing.

A los elementos del conjunto $\{q_i, q_l \in Q\}$ los denominaremos **símbolos estado**.

Siguiendo la filosofía de lenguajes formales difusos de [3,4], definimos las siguientes funciones:

- $A : \{\text{Símbolos}\} \rightarrow \{1, \dots, NMAX\}$, $A(x) = N^\circ$ de símbolos 'x' disponibles, y se extiende a cadenas de símbolos mediante la fórmula $A(xy) = \min \{A(x), A(y)\}$, donde NMAX es una constante igual al número máximo de copias disponibles de un símbolo;
- $T : \{\text{Símbolos}\} \rightarrow N$, $T(x) = N^\circ$ de símbolos 'x' activos y se extiende a cadenas con la fórmula $T(xy) = \min \{T(x), T(y)\}$.

La definición de estas funciones (A y T) implica una pequeña modificación de la filosofía de [3,4] en el sentido de distinguir entre cantidad de copias disponibles y cantidad de copias activas de un símbolo.

Los siguientes valores para estas funciones son fijados:

- $A(s_i) = T(s_i) = A(L) = T(L) = A(R) = T(R) = \infty$, o sea, el número de símbolos disponibles y activos correspondientes a realizar una acción en la máquina de Turing es ilimitado. Esto es lógico si se supone que la máquina de Turing siempre está preparada para realizar una acción.
- $T(S_i) = A(S_i) = \infty$ si la cinta está leyendo el símbolo S_i , o sea, el número de símbolos S_i disponibles y activos es ilimitado cuando la cinta está examinando el símbolo S_i en la cinta.

Definamos dos funciones más que usaremos en esta sección:

- $\mu : \{\text{Símbolos}\} \times \{\text{Símbolos}\} \rightarrow [0,1]$, $\mu(x,y) =$ Grado de similitud entre 'x' e 'y', y se extiende a cadenas con la fórmula $\mu(xy,uv) = \min \{\mu(x,u), \mu(y,v)\}$,
- $f : \{1, \dots, NMAX\} \rightarrow [0,1]$, $f(x) = (x/NMAX)$, esta función f se usará para normalizar el número de copias disponibles de cada símbolo.

3.1.2 EJECUCIÓN Y AJUSTE

Los pasos a seguir, para ejecutar y ajustar una máquina de Turing con estados difusos que opera como una gramática formal difusa, serán:

- a) ejecutar esta gramática con la filosofía de activación de reglas de producción comentada anteriormente,
- b) evaluar los símbolos activados resultantes y,
- c) ajustar los parámetros de las cadenas de derivación usadas para producir estos símbolos resultantes, usando la capacidad de aprendizaje de los lenguajes formales difusos, o sea, ajustar el número de copias disponibles de símbolos estado y la similitud entre ellos para conseguir como salida los símbolos que se deseen.

Veamos cada paso con más detenimiento:

Paso a)

El sistema se inicializa con $(NMAX/2)$ copias disponibles de cada símbolo estado de la máquina de Turing. La gramática comienza a funcionar cuando se activan símbolos correspondientes al estado inicial de la máquina de Turing.

Supongamos que tenemos símbolos activos correspondientes al estado q_i y que la cinta está leyendo el símbolo S_j . Con esto, tenemos un número de copias activas de la cadena $q_i S_j$ igual a la cantidad de símbolos activos de q_i ya que, $T(q_i S_j) = \min \{T(q_i), T(S_j)\} = \min \{T(q_i), \infty\} = T(q_i)$.

¿Cuántos símbolos estado activos producen las copias activas de la cadena $q_i S_j$ al disparar diferentes reglas de producción? Vamos a responder a esta pregunta en diferentes etapas, 1) vamos a ver como calcular la posibilidad de que una copia activa de la cadena $q_i S_j$ use una cadena de derivación soportada por una o varias reglas de producción. A partir de estas posibilidades, 2) vamos a ver como calcular el número de cadenas $q_i S_j$ activadas por derivaciones que pueden utilizar las copias activas de la cadena $q_i S_j$. Finalmente, a partir del número de copias activas de cadenas $q_i S_j$ generadas por las cadenas activas $q_i S_j$, 3) vamos a ver como calcular el número de símbolos estado activos que producen las copias activas de $q_i S_j$ al disparar diferentes reglas de producción.

1) La posibilidad $(\rho(d(q_i S_i, q_j S_j)))$ de usar la cadena de derivación $d(q_i S_i, q_j S_j)$ soportada por $(q_k S_k \rightarrow q_l S_l \text{ con } \mu(q_i S_i, q_k S_k) > 0 \text{ } k=1, \dots, n)$ para reescribir $q_i S_i$, debe ser una función dependiente del número de copias disponibles de $q_k S_k$ ($A(q_k S_k)$), del número de copias disponibles de $q_i S_j$ ($A(q_i S_j)$) y de la similitud entre $q_i S_i$ y $q_k S_k$ ($\mu(q_i S_i, q_k S_k)$):

$$\rho(d(q_i S_i, q_j S_j)) = \prod_{k=1}^n (\Gamma(A(q_j S_j), A(q_k S_k), \mu(q_i S_i, q_k S_k))).$$

Supongamos $k=1$ para ver el significado de Γ . Esta función nos debe indicar la posibilidad de activar la regla de producción $q_i S_i \rightarrow q_j S_j$. Se sabe que para que se active deben de cumplirse tres condiciones: existencia de copias disponibles de $q_i S_i$, existencia de copias disponibles de $q_j S_j$ y similitud mayor que cero entre $q_i S_i$ y $q_j S_j$. Parece razonable suponer que la posibilidad de activar esta regla será igual al menor grado de cumplimiento de las tres condiciones anteriores, por lo tanto, Γ será implementada con una t-norma, así:

$$t\text{-norma}(f(A(q_i S_i)), f(A(q_j S_j)), \mu(q_i S_i, q_j S_j)).$$

En el ejemplo de este trabajo se usará la t-norma mínimo.

Veamos ahora el significado de Φ . Esta función nos da la posibilidad de usar la derivación $d(q_i S_i, q_j S_j)$ a partir de las posibilidades de varios caminos alternativos (distintas reglas de producción) para realizar esta derivación, parece razonable que la posibilidad de $d(q_i S_i, q_j S_j)$ sea igual a la mayor posibilidad de los caminos, por lo tanto, Φ será implementado con una t-conorma, así:

$$\rho(d(q_i S_i, q_j S_j)) = t\text{-conorma}_{k=1}^n (t\text{-norma}(f(A(q_i S_i)), f(A(q_k S_k)), \mu(q_i S_i, q_k S_k))).$$

En el ejemplo de este trabajo se usará la t-conorma máximo.

2) El número $T(q_i S_i)$ de copias activadas de la cadena $q_i S_i$ por la cadena $q_j S_j$ es, de acuerdo a [3,4], una función dependiente del número de copias activadas de la cadena $q_i S_i$ ($T(q_i S_i)$) y, de la posibilidad de usar la cadena de derivación $d(q_i S_i, q_j S_j)$ ($\rho(d(q_i S_i, q_j S_j))$):

$$T(q_j S_j) = \partial(T(q_i S_i), \rho(d(q_i S_i, q_j S_j))).$$

En este punto, presentamos otra modificación a la dinámica presentada en [3,4]. Nosotros pensamos que el número $T(q_i S_i)$ de copias activadas de la cadena $q_i S_i$ también depende, de manera negativa, de la posibilidad de que se usen copias activadas de $q_i S_i$ para activar otras derivaciones distintas de $d(q_i S_i, q_j S_j)$. Por lo tanto:

$$T(q_j S_j) = \partial(T(q_i S_i), \rho(d(q_i S_i, q_j S_j)), \rho(d(q_i S_i, q_m S_m)))$$

$$m = 1, \dots, \text{constant} \quad y \quad m \neq j.$$

La función ∂ nos dará una estimación del número de copias activadas de la cadena $q_j S_j$ usando una cadena de derivación concreta:

$$\partial : \mathbb{N} \times [0,1] \times \dots \times [0,1] \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x, y_1, \dots, y_{\text{constant}} \rightarrow \left\lfloor x \frac{y_1}{\sum_{i=1}^{\text{constant}} y_i} \right\rfloor$$

donde $[*]$ denota la función parte entera.

Si, al repartir las copias activadas de la cadena $q_i S_i$ entre las derivaciones que pueden ser activadas usando la anterior función ∂ , sobran copias activadas de $q_i S_i$, éstas se repartirán una a una dando prioridad a las derivaciones con mayor posibilidad de activación.

3) Normalmente, las copias activadas producidas por la activación de una regla de producción tienen la estructura o formato $q_i \text{'Símbolo_acción'}$. Esto implica que podemos calcular el número de símbolos estado activados por esta regla de producción de la siguiente manera:

$$T(q_j \text{'símbolo_accin'}) = \text{mínimo}\{T(q_j), T(\text{'símbolo_accin'})\} = \text{mínimo}\{T(q_j), \infty\} = T(q_j).$$

Una vez que conocemos el número de símbolos estado activos que producen los símbolos activos de q_i , podemos repetir el proceso anterior para calcular los símbolos que se activan con estos nuevos símbolos estado activos.

Paso b)

Usando la dinámica definida en el anterior paso, se irán activando sucesivamente diferentes reglas de producción hasta llegar a una situación en la que ningún símbolo activo pueda disparar otra regla de producción. En este momento, se cuenta el número de símbolos estado activos de cada tipo y se evalúa su bondad como salida de la máquina de Turing. Esta información será utilizada en el siguiente paso para beneficiar o perjudicar a las cadenas de derivación utilizadas para activar estos símbolos estado.

Paso c)

Si una cadena de derivación provoca la activación de un símbolo estado deseado, se aumentarán el número de copias disponibles de los símbolos utilizados en esta cadena de derivación (**recompensa**) y los grados de similitud usados para activarla (**reforzamiento**). Por el contrario, si una cadena de derivación provoca la activación de un símbolo estado no deseado, se decrementarán el número de copias disponibles (**castigo**) y los grados de similitud (**reconsideración**). Este procesamiento será descrito con más detenimiento en la siguiente sección.

3.1.3 EJEMPLO

Supongamos la siguiente máquina de Turing con estados difusos:

- Estado inicial = $q_1 \in Q'$
- Universo de discurso sobre el que se definen los elementos de Q , $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$
- Conjunto de estados difusos, $Q' = \{q'_1 = \{q_1/1.0\}, q'_2 = \{q_2/1.0\}, q'_3 = \{q_3/1.0\}, q'_4 = \{q_4/1.0\}, q'_5 = \{q_5/1.0\},$

$$q'_6 = \{q_6/1.0\}, q'_7 = \{q_7/1.0\}, q' = \{q_2/0.5, q_3/0.4, q_4/0.3\}$$

- Conjunto de símbolos, $C = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$
- Conjunto de cuádruplas =
 $q_1 S_0 S_1 q'_1, \quad q_2 S_1 L q_5, \quad q_3 S_1 R q_6,$
 $q_4 S_1 L q_7, \quad q_5 S_3 L q_8, \quad q_6 S_2 R q_9,$
 $q_7 S_3 S_3 q_{10}.$

Supongamos una cinta que está examinando la máquina de Turing cuya configuración inicial es:

$$\dots\dots S_4 S_3 S_0 S_2 S_5 \dots\dots$$

Deseamos que la máquina de Turing pare cuando se encuentre examinando el símbolo S_5 en la cinta.

Esta máquina de Turing, con estas condiciones, define un algoritmo difuso que al ejecutarse da como resultado un conjunto difuso definido sobre los símbolos de la cinta, el cual nos aporta información acerca de los posibles símbolos que puede estar examinando la máquina de Turing cuando para. Este conjunto difuso es: $S_3/0.3 + S_4/0.5 + S_5/0.4$.

A continuación, transformaremos la máquina de Turing con estados difusos en una gramática difusa que nos devuelva como respuesta un símbolo crisp en vez de un conjunto difuso, pudiendo ajustar su dinámica para que nos devuelva la salida deseada.

La gramática difusa extraída a partir de la anterior máquina de Turing con estados difusos será:

$$\begin{aligned} V_s &= \{q_1\} \\ V_n &= \{q_1 S_0, q_2 S_1, q_3 S_1, q_4 S_1, q_5 S_3, q_6 S_2, q_7 S_3, q' S_1\} \\ V_t &= \{q_i S_j / i=1, \dots, 7\} \\ P &= \begin{aligned} &q_1 S_0 \longrightarrow q' S_1, & q_2 S_1 \longrightarrow q_5 L, \\ &q_3 S_1 \longrightarrow q_6 R, & q_4 S_1 \longrightarrow q_7 L, \\ &q_5 S_3 \longrightarrow q_8 L, & q_6 S_2 \longrightarrow q_9 R, \\ &q_7 S_3 \longrightarrow q_{10} S_3. \end{aligned} \end{aligned}$$

Donde las condiciones para su ejecución serán:

- Número máximo de copias disponibles de un símbolo estado = $NMAX = 10$.
- Número mínimo de copias disponibles de un símbolo estado = $NMIN = 1$.
- Cota mínima de similaridad entre símbolos estado durante el entrenamiento = $SMIN = 0.1$.
- Variación en el número de copias disponibles de un símbolo = $\Delta N = 1$.
- Variación en la similaridad entre símbolos = $\Delta \mu = 0.1$.
- Inicialmente $A(q_i) = NMAX/2 = 5$, para $i=1, \dots, 7$.

Veamos como operaría y cual sería la salida de la gramática difusa al activarse 10 símbolos de q_1 , o sea, $T(q_1) = 10$. Al comienzo el único símbolo S_i con alguna copia activa es S_0 ya que la máquina de turing, inicialmente, está leyendo este

símbolo en la cinta y, por lo tanto, $T(S_0) = \infty$.

Veamos la posibilidad de que se active cualquier regla de producción distinta de $q_1 S_0 \longrightarrow q' S_1$. Tomemos, por ejemplo, la regla de producción $q_2 S_1 \longrightarrow q_5 L$:

$$\begin{aligned} \rho(d(q_1 S_0, q_5 L)) &= \max\{\min\{f(A(q_5 L)), f(A(q_2 S_1)), \mu(q_1 S_0, q_5 L)\}\} = \\ &= \max\{\min\{0.5, 0.5, 0\}\} = 0.0, \text{ ya que } f(A(q_5 L)) = \\ f(5) &= 5/10 = 0.5, f(A(q_2 S_1)) = f(5) = 5/10 = 0.5 \text{ y} \\ \mu(q_1 S_0, q_2 S_1) &= \min\{\mu(q_1, q_2), \mu(S_0, S_1)\} = \min\{0.0, 0.0\} \\ &= 0.0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la posibilidad de que se active una regla de producción distinta de $q_1 S_0 \longrightarrow q' S_1$ es nula. Veamos la posibilidad de que se active esta regla:

$$\begin{aligned} \rho(d(q_1 S_0, q' S_1)) &= \max\{\min\{f(A(q' S_1)), f(A(q_1 S_0)), \mu(q_1 S_0, q' S_1)\}\} = \\ &= \max\{\min\{0.5, 0.5, 1\}\} = 0.5. \end{aligned}$$

Veamos la cantidad de copias activadas de la cadena $q' S_1$ por medio de esta regla de producción:

$$\begin{aligned} T(q' S_1) &= \partial(T(q_1 S_0), \rho(d(q_1 S_0, q' S_1)), \text{posibilidad de otras} \\ \text{reglas de producción}) &= \partial(10, 0.5, 0.0, \dots, 0.0) = [10 (0.5 / \\ (0.5 + 0.0 + \dots + 0.0))] &= 10. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(q' S_1) = 10 = \min\{T(q'), T(S_1)\} = \min\{T(q'), \infty\} = T(q')$, o sea, el número actual de copias activas del símbolo q' es igual a diez.

Veamos la posibilidad de que un símbolo q' active la regla de producción $q_2 S_1 \longrightarrow q_5 L$:

$$\begin{aligned} \rho(d(q' S_1, q_5 L)) &= \max\{\min\{f(A(q_5 L)), f(A(q_2 S_1)), \mu(q' S_1, q_5 L)\}\} = \\ &= \max\{\min\{0.5, 0.5, 0\}\} = 0.5, \text{ ya que } \mu(q' S_1, \\ q_2 S_1) &= \min\{\mu(q', q_2), \mu(S_1, S_1)\} = \min\{0.5, 1.0\} = 0.5. \end{aligned}$$

La posibilidad de que un símbolo q' active la regla de producción $q_3 S_1 \longrightarrow q_6 R$ es igual a:

$$\begin{aligned} \rho(d(q' S_1, q_6 R)) &= \max\{\min\{f(A(q_6 R)), f(A(q_3 S_1)), \mu(q' S_1, q_6 R)\}\} = \\ &= \max\{\min\{0.5, 0.5, 0\}\} = 0.4. \end{aligned}$$

Y, finalmente, la posibilidad de que un símbolo q' active la regla de producción $q_4 S_1 \longrightarrow q_7 L$ es igual a:

$$\begin{aligned} \rho(d(q' S_1, q_7 L)) &= \max\{\min\{f(A(q_7 L)), f(A(q_4 S_1)), \mu(q' S_1, q_7 L)\}\} = \\ &= \max\{\min\{0.5, 0.5, 0\}\} = 0.3. \end{aligned}$$

El resto de las reglas tienen una posibilidad nula de activarse.

Veamos que reglas escogen las 10 copias activas de la cadena $q' S_1$, entre las tres reglas de producción con posibilidad de activarse, para crear copias activas de los símbolos q_5 , q_6 y q_7 :

$$T(q_5, L) = \partial(T(q' S_1), \rho(d(q' S_1, q_5 L)), \rho(d(q' S_1, q_6 R)), \rho(d(q' S_1, q_7 L))) =$$

$$= \left[10 \frac{0.5}{0.5 + 0.4 + 0.3} \right] = 4;$$

$$T(q_6, R) = \partial(T(q' S_1), \rho(d(q' S_1, q_6 R)), \rho(d(q' S_1, q_5 L)), \rho(d(q' S_1, q_7 L))) =$$

$$= \left[10 \frac{0.4}{0.5 + 0.4 + 0.3} \right] = 3;$$

$$T(q_7, L) = \partial(T(q' S_1), \rho(d(q' S_1, q_7 L)), \rho(d(q' S_1, q_6 R)), \rho(d(q' S_1, q_5 L))) =$$

$$= \left[10 \frac{0.3}{0.5 + 0.4 + 0.3} \right] = 2.$$

Con esto hemos repartido 9 de las 10 copias activas de la cadena $q' S_1$, la copia que queda escogería la regla de producción con mayor posibilidad de activarse, en este caso la regla $q_5 S_1 \rightarrow q_5 L$. Por lo tanto, obtenemos $T(q_5 L) = 5$, $T(q_6 R) = 3$, $T(q_7 L) = 2$; o sea, obtenemos $T(q_5) = 5$, $T(q_6) = 3$, $T(q_7) = 2$.

Las 5 copias activas del símbolo q_5 activarían la regla de producción $q_5 S_3 \rightarrow q_5 L$, obteniendo cinco copias activas del símbolo estado q_8 , que es un estado de parada de la máquina de Turing en el que se está examinando del símbolo S_4 .

Las 3 copias activas del símbolo q_6 activarían la regla de producción $q_6 S_2 \rightarrow q_6 R$, obteniendo tres copias activas del símbolo estado q_9 , que es un estado de parada de la máquina de Turing en el que se está examinando del símbolo S_5 .

Las 2 copias activas del símbolo q_7 activarían la regla de producción $q_7 S_3 \rightarrow q_{10} S_3$, obteniendo dos copias activas del símbolo estado q_{10} , que es un estado de parada de la máquina de Turing en el que se está examinando del símbolo S_3 .

Con todo esto hemos conseguido la siguiente información como solución:

- Cinco símbolos activos nos indican que es S_4 el símbolo que está examinando la máquina de Turing cuando para.
- Tres símbolos activos nos indican que es S_5 .
- Dos símbolos activos nos indican que es S_3 .

Supongamos que elegimos como solución crisp a la solución del camino por el que han circulado más símbolos activos, por lo tanto, la solución ofrecida en el ejemplo sería la que tiene a q_8 como estado de parada y a S_4 como símbolo examinado en la cinta cuando la máquina de Turing para. Al no ser esta la solución deseada, el siguiente paso consistiría en ajustar los parámetros de actuación de la gramática difusa usando la información aportada por los símbolos activos al recorrer cadenas de derivación de la gramática.

Las copias de símbolos activos han recorrido tres cadenas de derivación de la gramática. Estas cadenas, junto a la bondad de su solución final, se presentan a continuación:

- 1) 5 cadenas activas $q_1 S_0 \rightarrow 5$ cadenas activas $q' S_1 \rightarrow 5$ cadenas activas $q_5 L \rightarrow 5$ cadenas activas $q_8 L \rightarrow$

estado final = q_8 , símbolo examinado = $S_4 \Rightarrow$
Solución incorrecta.

- 2) 3 cadenas activas $q_1 S_0 \rightarrow 3$ cadenas activas $q' S_1 \rightarrow 3$ cadenas activas $q_6 R \rightarrow 3$ cadenas activas $q_9 R \rightarrow$
estado final = q_9 , símbolo examinado = $S_5 \Rightarrow$
Solución correcta.

- 3) 2 cadenas activas $q_1 S_0 \rightarrow 2$ cadenas activas $q' S_1 \rightarrow 2$ cadenas activas $q_7 L \rightarrow 2$ cadenas activas $q_{10} S_3 \rightarrow$
estado final = q_{10} , símbolo examinado = $S_3 \Rightarrow$
Solución incorrecta.

A continuación, los parámetros de la gramática son ajustados para perjudicar a las cadenas de derivación que dieron lugar a soluciones incorrectas y, para beneficiar a las cadenas de derivación que dieron lugar a soluciones correctas.

Al perjudicar a la cadena de derivación 1 son actualizados los valores de $A(q_8)$, $A(q_5)$, $A(q_2)$, $\mu(q', q_2)$, $A(q')$ y de $A(q_1)$ a los siguientes valores:

$$A(q_8) = A^{\text{viejo}}(q_8) - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

$$A(q_5) = A^{\text{viejo}}(q_5) - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

$$A(q_2) = A^{\text{viejo}}(q_2) - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

$$\mu(q', q_2) = \mu^{\text{viejo}}(q', q_2) - \Delta \mu = 0.5 - 0.1 = 0.4;$$

$$A(q') = A^{\text{viejo}}(q') - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

$$A(q_1) = A^{\text{viejo}}(q_1) - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

Al beneficiar a la cadena de derivación 2 son actualizados los valores de $A(q_9)$, $A(q_6)$, $A(q_3)$, $\mu(q', q_3)$, $A(q')$ y de $A(q_1)$ a los siguientes valores:

$$A(q_9) = A^{\text{viejo}}(q_9) + \Delta N = 5 + 1 = 6;$$

$$A(q_6) = A^{\text{viejo}}(q_6) + \Delta N = 5 + 1 = 6;$$

$$A(q_3) = A^{\text{viejo}}(q_3) + \Delta N = 5 + 1 = 6;$$

$$\mu(q', q_3) = \mu^{\text{viejo}}(q', q_3) + \Delta \mu = 0.4 + 0.1 = 0.5;$$

$$A(q') = A^{\text{viejo}}(q') + \Delta N = 4 + 1 = 5;$$

$$A(q_1) = A^{\text{viejo}}(q_1) + \Delta N = 4 + 1 = 5;$$

Al perjudicar a la cadena de derivación 3 son actualizados los valores de $A(q_{10})$, $A(q_7)$, $A(q_4)$, $\mu(q', q_4)$, $A(q')$ y de $A(q_1)$ a los siguientes valores:

$$A(q_{10}) = A^{\text{viejo}}(q_{10}) - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

$$A(q_7) = A^{\text{viejo}}(q_7) - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

$$A(q_4) = A^{\text{viejo}}(q_4) - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

$$\mu(q', q_4) = \mu^{\text{viejo}}(q', q_4) - \Delta \mu = 0.3 - 0.1 = 0.2;$$

$$A(q') = A^{\text{viejo}}(q') - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

$$A(q_1) = A^{\text{viejo}}(q_1) - \Delta N = 5 - 1 = 4;$$

Veamos cual sería ahora la salida ofrecida por la gramática difusa, con estas nuevas condiciones, cuando recibe 10 copias activas del símbolo q_1 .

La posibilidad de que se active la regla de producción $q_1 S_0 \rightarrow$

—> $q's_1$ es igual a:

$$\rho(d(q_1S_0, q's_1)) = \max\{\min\{f(A(q's_1)), f(A(q_1S_0)), \mu(q_1S_0, q_1S_0)\}\} = \\ = \max\{\min\{0.4, 0.4, 1\}\} = 0.4.$$

La cantidad de copias activadas de la cadena $q's_1$ por esta regla de producción es igual a:

$$T(q's_1) = \partial(T(q_1S_0), \rho(d(q_1S_0, q's_1)), \text{posibilidad de otras reglas de producción}) = \partial(10, 0.4, 0.0, \dots, 0.0) = [10(0.4/0.4)] = 10. \text{ Por lo tanto, } T(q') = 10.$$

La posibilidad de que un símbolo q' use la regla de producción $q_2S_1 \rightarrow q_5L$ es igual a:

$$\rho(d(q'S_1, q_5L)) = \max\{\min\{f(A(q_5L)), f(A(q_2S_1)), \mu(q'S_1, q_2S_1)\}\} = \\ = \max\{\min\{0.4, 0.4, 0.4\}\} = 0.4.$$

La posibilidad de que un símbolo q' use la regla de producción $q_3S_1 \rightarrow q_6R$ es igual a:

$$\rho(d(q'S_1, q_6R)) = \max\{\min\{f(A(q_6R)), f(A(q_3S_1)), \mu(q'S_1, q_3S_1)\}\} = \\ = \max\{\min\{0.6, 0.6, 0.5\}\} = 0.5.$$

Y, finalmente, la posibilidad de que un símbolo q' use la regla de producción $q_4S_1 \rightarrow q_7L$ es igual a:

$$\rho(d(q'S_1, q_7L)) = \max\{\min\{f(A(q_7L)), f(A(q_4S_1)), \mu(q'S_1, q_4S_1)\}\} = \\ = \max\{\min\{0.4, 0.4, 0.2\}\} = 0.2.$$

Las reglas de producción, escogidas por las 10 copias activas del símbolo q' para crear copias activas de los símbolos q_5 , q_6 y q_7 , son:

$$T(q_5, L) = \partial(T(q'S_1), \rho(d(q'S_1, q_5L)), \rho(d(q'S_1, q_6R)), \rho(d(q'S_1, q_7L))) = \\ = \left[10 \frac{0.4}{0.4 + 0.5 + 0.2} \right] = 3; \\ T(q_6, R) = \left[10 \frac{0.5}{0.5 + 0.4 + 0.2} \right] = 4; \\ T(q_7, L) = \left[10 \frac{0.2}{0.2 + 0.5 + 0.4} \right] = 1.$$

Con esto hemos repartido 8 de las 10 copias activas del símbolo q' , las dos copias restantes se usan para activar las dos reglas de producción con mayor posibilidad de activación, éstas son: $q_3S_1 \rightarrow q_6R$ y $q_2S_1 \rightarrow q_5L$. Por lo tanto, obtenemos $T(q_5) = 4$, $T(q_6) = 5$ y $T(q_7) = 1$.

Los cuatro símbolos activos de q_5 usan la regla de producción $q_5S_3 \rightarrow q_8L$, obteniendo cuatro símbolos activos del símbolo estado q_8 . Lo mismo ocurre con los cinco símbolos activos de q_6 para producir cinco símbolos activos de q_9 y con el símbolo activo de q_7 para producir un símbolo activo de q_{10} . Con esto obtenemos:

- Cuatro símbolos activos que nos indican que es S_4 el símbolo que está examinando la máquina de Turing cuando para.
- Cinco símbolos activos que nos indican que es S_5 .
- Un símbolo activo que nos indica que es S_3 .

La solución proporcionada por esta ejecución indicaría que la máquina de Turing, cuando para, está examinando el símbolo S_5 y que está en el estado interno q_9 . Ésta es una solución correcta. Las siguientes ejecuciones de la máquina de Turing con estados difusos pueden elegir la cadena de derivación que produce esta solución como su ejecución crisp. Por lo tanto, hemos conseguido ajustar la ejecución de un algoritmo difuso (máquina de Turing con estados difusos), usando una gramática difusa, para conseguir la interpretación crisp del algoritmo difuso que más nos conviene.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo, se ha presentado una nueva metodología para ejecutar algoritmos difusos. Esta metodología proporciona:

- una manera de ajustar la ejecución de un algoritmo difuso para conseguir una solución correcta,
- una forma de adaptar el algoritmo difuso ante un entorno cambiante y,
- la capacidad de personalizar el algoritmo.

En particular, esta metodología se ha aplicado a una máquina de Turing con estados difusos. Una extensión de este trabajo consistiría en aplicar esta metodología a otros modelos de algoritmos difusos.

Referencias

- [1] M.D. Davis & E.J. Weyuker, *Computability, Complexity and Languages*, Academic Press, INC, 1983.
- [2] A.F. Rocha, *Neural Nets: A theory for brains and machine*, in: *Lecture notes in Artificial Intelligence*, Springer Verlag, 632, 1992.
- [3] A.F. Rocha & W. Pedrycz, *Neural Systems: Concepts and trends*, to appear in *Handbook of Fuzzy Systems*, 1998.
- [4] A.F. Rocha, M.P. Rebello & K. Miura, *Toward a theory of molecular computing*, to appear in *Information Sciences*, 1998.
- [5] A.B.S. Serapiao, A.F. Rocha, M.P. Rebello & W. Pedrycz, *Toward a Theory of Genetic Systems*, in: F. Herrera & J.L. Verdegay (Eds), *Genetic Algorithms and Soft Computing*, Physica Verlag, Heidelberg, 1996, pp.68-94.
- [6] L.A. Zadeh, *Fuzzy algorithms*, Inf. Control. 12 (1968) 94-102.
- [7] L.A. Zadeh, *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes*, IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics 3 (1973) 28-44.

MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS APLICADO AL GMP CON CONJUNTOS INTERVALO-VALORADOS FUZZY

E. Agustench

Dpt. Automática y computación
Universidad Pública de Navarra
Campus Arrosadía s/n
31006 Pamplona. España
e-mail : ea10135@zurron.upna.es

H. Bustince

Dpt. Automática y computación
Universidad Pública de Navarra
Campus Arrosadía s/n
31006 Pamplona. España
e-mail : bustince@si.upna.es

V. Mohedano

Dpt. Automática y computación
Universidad Pública de Navarra
Campus Arrosadía s/n
31006 Pamplona. España
e-mail : vmohedano@si.upna.es

Resumen

En primer lugar presentamos una interpretación geométrica de los conjuntos intervalo-valorados fuzzy. Seguidamente aplicamos el método de los mínimos cuadrados a las reglas de inferencia fuzzy cuando trabajamos con estos conjuntos. Empezamos aproximando los extremos inferiores y superiores de los intervalos de pertenencia a funciones del tipo ax^b por medio del método de los mínimos cuadrados. Posteriormente, analizamos una técnica para evaluar la conclusión del modus ponens generalizado y comprobamos el cumplimiento de los axiomas de Fukami y alumnos [9].

Palabras Clave : Razonamiento aproximado, Reglas de inferencia fuzzy, Modus ponens generalizado, Conjunto intervalo-valorado fuzzy, Método de los mínimos cuadrados.

1 INTRODUCCIÓN

Razonamiento aproximado es, informalmente hablando, como I.B. Turksen dice en [21], el proceso ó procesos por los cuales es posible deducir una conclusión imprecisa de una colección de premisas imprecisas.

El modus ponens clásico viene expresado por :

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

esto significa que si,

A implica B y A es verdad, entonces
B también es verdad.

Este esquema de razonamiento fue extendido al razonamiento fuzzy por L.A. Zadeh [26,27] como sigue :

(A) La implicación $A \rightarrow B$ es reemplazada por la regla de inferencia fuzzy :

Si x es A entonces y es B

donde A y B son conjuntos fuzzy. A sobre un universo de discurso X y B sobre un universo de discurso Y ; x es una variable que toma valores en X , e y es una variable que toma valores en Y . La regla fuzzy representa la relación existente entre las variables x e y .

(B) De igual forma, la premisa A es reemplazada por la premisa fuzzy : x es A' , donde A' es un conjunto fuzzy sobre un universo de discurso X , expresando el conocimiento que tenemos sobre el valor de x .

Combinando la regla y la premisa, es posible deducir nueva información, escribiendo : y es B' , donde B' es un conjunto fuzzy sobre el universo de discurso Y .

A partir del modus ponens y utilizando la teoría de conjuntos fuzzy podemos realizar representaciones de las imprecisiones inherentes al lenguaje humano. De este modo, el modus ponens generalizado (GMP) fue introducido para obtener una conclusión cuando partimos de premisas fuzzy. Estas reglas pueden ser expresadas como sigue :

Si x es A Entonces y es B
 x es A'

y es B' (GMP)

La principal ventaja de esta extensión al razonamiento fuzzy es que podemos deducir nueva información, aún cuando la pertenencia no sea exactamente idéntica a la condición de la regla ó cuando la información que consideramos no sea exacta. Es conocido que en el (GMP) cuando $A' = A$, entonces el modus ponens generalizado se reduce al caso del modus ponens clásico.

Diferentes métodos han sido sugeridos por autores como Zadeh [26,27], Fukami [9], Mizumoto y Zimmermann

Este trabajo ha sido subvencionado por el Gobierno Foral de Navarra.

Proyecto : Construcción de un sistema experto para la medición del grado de elaboración del arroz.

[12,13], Ezawa y Kandel [8], para el estudio de las reglas de inferencia fuzzy.

En 1980 Fukami y alumnos [9,7] sugirieron el siguiente conjunto de axiomas para el modus ponens generalizado :

(F1) Si $A'=A$, entonces $B'=B$ (coincide con el modus ponens clásico).

(F2) $\begin{cases} (i) \text{ Si } A' = A^2, \text{ entonces } B' = B \\ \text{ó} \\ (ii) \text{ Si } A' = A^2, \text{ entonces } B' = B^2 \end{cases}$

(F3) Si $A' = A^{1/2}$, entonces $B' = B^{1/2}$

(F4) $\begin{cases} (i) \text{ Si } A' = A_c, \text{ entonces } B' = Y \\ \text{ó} \\ (ii) \text{ Si } A' = A_c, \text{ entonces } B' = B_c \end{cases}$

donde A_c es el complementario de A .

Casi simultaneamente, Baldwin and Pilsworth [2] establecieron otro conjunto de seis axiomas para el GMP, alguno de ellos en completa contradicción con los exigidos por Fukami y alumnos por ejemplo, Baldwin y Pilsworth exigen que $B' \geq B$, hecho imposible si se exige a la vez (F2)(ii). Estas contradicciones surgen porque Baldwin y Pilsworth hacen sus estudios guiados por la lógica clásica, mientras que Fukami y al. centran sus estudios en la consevación de las etiquetas lingüísticas.

En este trabajo nosotros vamos a estudiar el modus ponens generalizado utilizando conjuntos intervalo-valorados fuzzy y siguiendo un razonamiento diferente al utilizado por los autores anteriormente mencionados [8,9,12,13].

Nuestro método se basa en las ideas establecidas por J.F. Baldwin [1,2], A. Nafarie [14], M.B. Gorzalczany [10], etc., las cuales se pueden resumir en los dos pasos siguientes :

- 1) Primero relacionar A con A'
- 2) Construir la consecuencia B' usando el resultado de la comparación anterior y B .

2 CONJUNTOS INTERVALO-VALORADOS FUZZY

En este apartado vamos a recordar la noción de conjunto intervalo-valorado fuzzy ó conjunto Φ -fuzzy introducido por L.A. Zadeh [26,27] y R. Sambuc [19]. Empezamos presentando la notación que vamos a utilizar.

Denotaremos con $D[0,1]$ el conjunto de todos los subintervalos cerrados del intervalo $[0,1]$; A los elementos de este conjunto los representaremos con letras

mayúsculas $M, N, \dots$. Es sabido que $M = [M_L, M_U]$ donde M_L y M_U son el extremo inferior y superior respectivamente. Llamaremos $W_M = M_U - M_L$ a la amplitud del intervalo M .

Diremos que $M \leq N$ si $M_L \leq N_L$ y $M_U \leq N_U$, esta relación es transitiva, reflexiva y antisimétrica y expresa que M está contenido en N , es decir, para cada punto $x \in M$ existe un punto $y \in N$ tal que $y \geq x$. Es necesario hacer notar que en la literatura de conjuntos intervalo-valorados fuzzy se han dado también otros ordenes [4,11,16,19], sin embargo la relación que presentamos aquí es la más usual y es la que utilizaremos en todo el trabajo.

Sabemos que $[4] M=N$ si y sólo si $M_L = N_L$ y $M_U = N_U$. Denotaremos con $c(M) = M_c$ al complementario de M , es decir $c(M) = [c(M_U), c(M_L)]$, siendo c cualquier complementación fuzzy.

Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto dado. [3,4,16,19,20,22] Un conjunto intervalo-valorado fuzzy en X es una expresión A dada por :

$$A = \{ \langle x, M_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

donde la función

$$M_A : X \longrightarrow D[0,1]$$

$$x \longrightarrow M_A(x) = [M_{AL}(x), M_{AU}(x)]$$

define el grado de pertenencia de un elemento x al conjunto A .

Designaremos con $IVFSs(X)$ al conjunto de todos los conjuntos intervalo-valorados fuzzy sobre X . Es conveniente insistir en el hecho de que nosotros siempre tomaremos X finitito y no vacío, de forma que $Cardinal(X) = n$.

Diremos que un conjunto intervalo-valorado fuzzy A es normal si hay por lo menos un $x \in X$ tal que $M_A(x) = [1,1]$.

Las siguientes expresiones son definidas en [3,4,17,18,20] para todo $A, B \in IVFSs$

$$1. A \leq B \text{ si y sólo si } M_{AL}(x) \leq M_{BL}(x)$$

$$\text{y } M_{AU}(x) \leq M_{BU}(x) \quad \forall x \in X$$

$$2. B \leq A \text{ si y sólo si } M_{AL}(x) \leq M_{BL}(x)$$

$$\text{y } M_{AU}(x) \geq M_{BU}(x) \quad \forall x \in X$$

$$3. A[B \text{ si y sólo si } M_{AU}(x) \leq M_{BL}(x)$$

$$\forall x \in X$$

$$4. A = B \text{ si y sólo si } M_{AL}(x) = M_{BL}$$

$$\text{y } M_{AU}(x) = M_{BU}(x) \quad \forall x \in X$$

$$5. A_c = \{ \langle x, c(M_A(x)) \rangle \mid x \in X \} = \\ = \{ \langle x, [c(M_{AU}(x)), c(M_{AL}(x))] \rangle \mid x \in X \}$$

además, en [4] está demostrado el siguiente teorema.

Teorema 1. [4] Sean β y α t -norma y t -conorma respectivamente, definimos

$$\beta(A, B) \equiv \{ \langle x, [\beta(M_{AL}(x), M_{BL}(x)), \\ \beta(M_{AU}(x), M_{BU}(x))] \rangle \mid x \in X \}$$

$$\alpha(A, B) \equiv \{ \langle x, [\alpha(M_{AL}(x), M_{BL}(x)), \\ \alpha(M_{AU}(x), M_{BU}(x))] \rangle \mid x \in X \}$$

para todo $A, B \in IVFSs$. Entonces se verifica que :

- Si $\beta = \wedge$ y $\alpha = \vee$ entonces $\{IVFS(X), \wedge, \vee\}$ es un retículo distributivo, acotado, no complementado que satisface las leyes de Morgan.
- Para cualquier β y α (α dual de β), se satisfacen las propiedades conmutativa, asociativa y $\beta(A_c, B_c) = (\alpha(A, B))_c$, $\alpha(A_c, B_c) = (\beta(A, B))_c$

3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

En la figura 1 presentamos una interpretación geométrica de la noción de conjuntos intervalo-valorados fuzzy. Básicamente significa lo siguiente. Como el extremo inferior, el superior y la amplitud de todos los intervalos son números de $[0,1]$, podemos imaginar un cubo unidad con tres ejes dados por estos parámetros.

Como $M_L(x) \leq M_U(x)$ y $W(x) = M_U(x) - M_L(x)$ para todo $x \in X$, los valores de los parámetros caracterizan un conjunto intervalo-valorado fuzzy de forma que los valores que toman las funciones de pertenencia son puntos del triángulo ACB. Así un conjunto intervalo-valorado fuzzy se puede interpretar como una aplicación que va de X al triángulo ACB de forma que a cada elemento de X le corresponde un elemento del triángulo ACB. Por ejemplo, a un $x \in X$ le corresponde un punto $x' \in ACB$ caracterizado por los tres valores $(M_L(x), M_U(x), W(x))$.

Cuando $W(x) = 0$ entonces $M_L(x) = M_U(x)$, en la figura 1 esta condición está representada en el segmento CA. Por consiguiente, el segmento CA puede considerarse como la representación de los conjuntos fuzzy.

La proyección ortogonal del triángulo ACB nos da la representación de un conjunto intervalo-valorado fuzzy en un plano, de forma que en este plano el interior del triángulo ACB es el área donde $W > 0$.

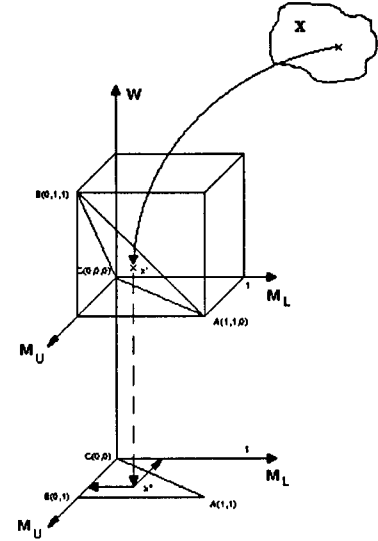


Figura 1

4 MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS APLICADO A INTERVALO-VALORADOS FUZZY

En esta sección presentamos un método para la obtención de la conclusión del GMP cuando trabajamos con conjuntos intervalo-valorados fuzzy y aplicamos el método de los mínimos cuadrados para aproximar por una parte, los extremos inferiores de las funciones de pertenencia a funciones del tipo $a_i x^{b_i}$ y por otra, los extremos superiores a funciones del mismo tipo.

Como T.C. Chang, K. Hasegawa y C.W. Ibbs [6], por conveniencia, tomamos los universos de discurso como sigue :

- $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$
- $x_i, y_j \in (0,1]$ para todo $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, m$
- $x_i < x_{i+1}$, $y_j < y_{j+1}$ para todo i, j

L.A. Zadeh [24] presentó los operadores *muy*, *mayor*, *menor*, *más*, *menos*, *etc...* expresados en términos de las funciones de pertenencia, y de esta forma les asoció a

ellos valores numéricos, lo cual le permitió trabajar de forma más sencilla.

A partir de estas consideraciones presentamos el siguiente método para obtener la conclusión del GMP cuando trabajamos con conjuntos intervalo-valorados fuzzy.

(i) Aproximar, mediante el método de los mínimos cuadrados, los extremos inferiores de los intervalos de pertenencia al conjunto A a funciones del tipo $a_1 x^{b_1}$,

de forma que podamos escribir: $M_{\tilde{A}L}(x) = a_1 x^{b_1}$.

(ii) Hacer lo mismo que en el ítem anterior con los extremos inferiores de los intervalos de pertenencia al conjunto A' , es decir, $M_{\tilde{A}'L}(x) = a'_1 x^{b'_1}$.

(iii) Despejar x de $M_{\tilde{A}L}(x) = a_1 x^{b_1}$ y sustituir en

$$M_{\tilde{A}'L}(x) = a'_1 x^{b'_1}, \text{ es decir, } M_{\tilde{A}'L}(x) = c_1 M_{\tilde{A}L}^{c_2},$$

$$\text{donde } c_1 = \frac{a'_1}{a_1^{b_1}} \text{ y } c_2 = \frac{b'_1}{b_1}.$$

(iv) Construir el conjunto fuzzy

$$\Lambda_1 = \left\{ \langle y, M_{\Lambda_1}(y) = \min(1, c_1 M_{\tilde{A}L}^{c_2}(y)) \rangle \mid y \in Y \right\}$$

(v) Repetir los cuatro pasos anteriores para los extremos superiores, de forma que:

$$\Lambda_2 = \left\{ \langle y, M_{\Lambda_2}(y) = \min(1, c'_1 M_{\tilde{A}'L}^{c'_2}(y)) \rangle \mid y \in Y \right\}$$

(vi) Construir la conclusión B' como sigue:

$$B' = \left\{ \langle y, M_{B'}(y) = \left[\min(M_{\Lambda_1}(y), M_{\Lambda_2}(y)), \max(M_{\Lambda_1}(y), M_{\Lambda_2}(y)) \right] \rangle \mid y \in Y \right\}$$

La aproximación indicada en el ítem (i) la realizamos resolviendo las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$(I) \begin{cases} n \sum_{i=1}^n \ln x_i a_1 + \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) b_1 = \sum_{i=1}^n \ln x_i M_{\tilde{A}L}(x_i) \\ \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) L_n a_1 + \left(\sum_{i=1}^n \ln^2 x_i \right) b_1 = \sum_{i=1}^n \ln x_i L_n M_{\tilde{A}L}(x_i) \end{cases}$$

obtenidas de tomar logaritmos en la expresión $M_{\tilde{A}L}(x_i) = a_1 x_i^{b_1}$ y aplicar el método de los mínimos cuadrados. En la construcción de las ecuaciones (1) no se

tienen en cuenta los elementos tales que $M_{\tilde{A}L}(x_i) = 0$, es decir, estos elementos son ignorados para obtener el sistema de ecuaciones lineales algebraicas (1).

Teorema 1. Sea $p \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y sea $A \in IVFSs(X)$. En las condiciones del algoritmo anterior,

$$\text{si } A' = A^p, \text{ entonces } B' = B^p$$

se cumple.

Demostración.

Sea $M_{\tilde{A}L}(x) = a_1 x^{b_1}$ y $M_{\tilde{A}'L}(x) = a'_1 x^{b'_1}$. De (1) deducimos que:

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^n \ln x_i a'_1 + \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) b'_1 &= \sum_{i=1}^n \ln x_i M_{\tilde{A}'L}(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \ln x_i M_{\tilde{A}L}^p(x_i) = p \sum_{i=1}^n \ln x_i M_{\tilde{A}L}(x_i) = \\ &= p \left(n \sum_{i=1}^n \ln x_i a_1 + \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) b_1 \right) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) L_n a'_1 + \left(\sum_{i=1}^n \ln^2 x_i \right) b'_1 &= \sum_{i=1}^n \ln x_i L_n M_{\tilde{A}'L}(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \ln x_i L_n M_{\tilde{A}L}^p(x_i) = p \sum_{i=1}^n \ln x_i L_n M_{\tilde{A}L}(x_i) = \\ &= p \left(\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) L_n a_1 + \left(\sum_{i=1}^n \ln^2 x_i \right) b_1 \right) \quad (3) \end{aligned}$$

resolviendo en (2) tenemos

$$L_n \frac{a'_1}{a_1^p} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) (p \cdot b_1 - b'_1)}{n}$$

de (3) tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right) L_n \frac{a'_1}{a_1^p} = \left(\sum_{i=1}^n \ln^2 x_i \right) (p \cdot b_1 - b'_1)$$

sustituyendo $L_n \frac{a'_1}{a_1^p}$ en esta expresión y teniendo en

cuenta que $\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^2 - n \left(\sum_{i=1}^n \ln^2 x_i \right) \neq 0$ tenemos que

$$b'_1 = p \cdot b_1 \text{ y } a'_1 = a_1^p$$

De forma similar se demuestra para los extremos superiores. $\square$

La importancia de este teorema se pone de manifiesto en los siguientes casos particulares :

- (a) Si $A'=A$, entonces $B'=B$
- (b) Si $A'=A^2$, entonces $B'=B^2$
- (c) Si $A'=A^{1/2}$, entonces $B'=B^{1/2}$
- (d) Si $A'=A^4$, entonces $B'=B^4$

donde

$$A^2 = \{ \langle x, M_{A^2}(x) = [M_{AL}^2(x), M_{AU}^2(x)] \rangle \mid x \in X \}$$

$$A^{1/2} = \{ \langle x, M_{A^{1/2}}(x) = [M_{AL}^{1/2}(x), M_{AU}^{1/2}(x)] \rangle \mid x \in X \}$$

$$A^4 = \{ \langle x, M_{A^4}(x) = [M_{AL}^4(x), M_{AU}^4(x)] \rangle \mid x \in X \}$$

El mecanismo de inferencia que presentamos en los 6 ítems anteriores tiene las dos ventajas siguientes :

- 1) Puede ser aplicado cuando las funciones de pertenencia en las premisas están caracterizadas por los intervalos cuyos extremos representan los operadores lingüísticos fuzzy tal como fueron definidos por L.A. Zadeh.
- 2) Las operaciones matemáticas para el GMP son simples y apropiadas para la implementación.

5 CONCLUSIONES

Además de la interpretación geométrica de los conjuntos intervalo-valorados fuzzy, en este trabajo queda claro que el método que desarrollamos para la obtención de la conclusión del GMP cuando utilizamos conjuntos intervalo-valorados fuzzy da buenos resultados cuando se aplica a las etiquetas lingüísticas tal como las introdujo L.A. Zadeh en [24].

Además, con este método se cumplen los axiomas (F1), (F2) y (F3) de Fukami y alumnos, no cumpliéndose el axioma (F4).

El no cumplimiento de (F4) se debe a que con IVFSs el desconocimiento total se obtiene cuando los intervalos de pertenencia de cada elemento al conjunto son siempre [0,1], y evidentemente, estos intervalos no siempre coinciden con el complementario tal como lo hemos definido en la sección 2.

Es necesario hacer notar que el método que presentamos para la obtención de la conclusión del GMP no siempre es aconsejable utilizarlo, ya que las funciones $a_1 x_i^{b_1}$ son monótonas y puede ocurrir que los extremos inferiores $M_L(x)$ ó los extremos superiores $M_U(x)$ sean no monótonas. Por ejemplo, $M_L(x)$ puede ser del tipo "mediano" y

entonces la aproximación de $M_L(x)$ a funciones del tipo $a_1 x_i^{b_1}$ no es aconsejable.

Concluimos diciendo que el hecho de trabajar con conjuntos intervalo-valorados fuzzy y no trabajar con conjuntos fuzzy, no resta generalidad a los desarrollos realizados en este trabajo sino todo lo contrario, ya que todo lo expuesto es válido para conjuntos fuzzy sin más que tomar intervalos de amplitud cero.

REFERENCIAS

- [1] Baldwin, N.C.F. Guild, Feasible algorithms for approximate reasoning using fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* 3 (1980), 225-251.
- [2] Baldwin, B.W. Pilsworth, Axiomatic approach to implication for approximate reasoning with fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* 3 (1980), 193-219.
- [3] P. Burillo and H. Bustince. Entropy on Intuitionistic Fuzzy Sets and on interval-valued Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems* 78 (1996), 305-316.
- [4] H. Bustince. Conjuntos Intuicionistas e intervalo valorados Difusos : Propiedades y Construcción. Relaciones Intuicionistas Fuzzy. Thesis, Universidad Pública de Navarra (1994).
- [5] Bustince, M. Calderón and V. Mohedano, About a least squares model for fuzzy rules of inference (I), SC '96 International Workshop on Soft Computing, Kazan, Russia (1996), 59-65.
- [6] T.C. Chang, K. Hasegawa y C.W. Ibb. The effects of membership function on fuzzy reasoning, *Fuzzy Sets and Systems* 44 (1991), 169-186.
- [7] D. Dubois y H. Prade, Fuzzy sets in approximate reasoning, Part I: Inference with possibility distributions, *Fuzzy Sets and Systems* 40 (1991), 143-202.
- [8] Ezawa and A. Kandel, Robust fuzzy inference, *Int. J. Intelligent Systems* 6 (1991), 185-197.
- [9] Fukami, M. Mizumoto and K. Tanaka, Some considerations on fuzzy conditional inference, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980), 243-273.
- [10] M.B. Gorzalczany. A method of Inference in Approximate Reasoning Based on Interval-valued Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems* 21 (1987), 1-17.
- [11] S. Jenei. A more efficient method for defining fuzzy connectives. *Fuzzy Sets and Systems* 90 (1997), 25-35.
- [12] Mizumoto. Extended fuzzy reasoning in : Gupta, Kandel, Blander and Kiszka, Ed. *Reasoning in*

- Expert Systems* (North-Holland, Amsterdam, 1985), 71-85.
- [13] Mizumoto and H.-J. Zimmermann. Comparison of fuzzy reasoning methods, *Fuzzy Sets and Systems* **8** (1991), 253-283.
 - [14] A. Nafarieh, A new approach to inference in approximate reasoning and its applications to computer vision, Ph.D. Dissertation, University of Missouri, Columbia (1988).
 - [15] D. Park, Z. Cao y A. Kandel, Investigations on the applicability of fuzzy inference, *Fuzzy Sets and Systems* **49** (1992), 151-169.
 - [16] C. Ponsard. Hirarchie des Places Centrales et Graphes Φ -Flous. *Environment and Planning A*, Vol 9, (1997), 1233-1252.
 - [17] Qiang Zuo, I.B. Turksen, Hung T. Nguyen, et al. In expert systems, even if we fix AND/OR operations, a natural answer to a composite query is the interval of possible degrees of belief. *Reliable Computing* 1995. Supplement (Extended Abstracts of APIC'95 : International Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, Febr. 23-25, 1995), 236-240.
 - [18] M.K. Roy and R. Biswas. Interval-valued Fuzzy Relations and Sanchez's Approach for Medical Diagnosis. *Fuzzy Sets and Systems* **47** (1992), 35-38.
 - [19] R. Sambuc. Functions Φ -Flous. Applications à l'aide au Diagnostic en Pathologie Thyroïdienne. Thèse de Doctorat en Médecine, Marseille, 1975.
 - [20] I.B. Turksen. Interval-valued Fuzzy Sets Based on Normal Forms. *Fuzzy Sets and Systems* **20** (1986), 191-210.
 - [21] I.B. Turksen and Z. Zhong. An Approximate Analogical Reasoning Schema Based on Similarity Measures and Interval-valued Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems* **34** (1990), 323-346.
 - [22] Wen-June Wang. New similarity on fuzzy sets and on elements, *Fuzzy Sets and Systems* **85** (1997), 305-309.
 - [23] L. A. Zadeh. Theory of approximate reasoning, in : J.E. Hayes, D. Michie and L.I. Mikulich Eds. *Machine intelligence* (Ellis Horwood Ltd. Chichester, U.K. 1970), 149-194.
 - [24] L. A. Zadeh, A fuzzy-sets theoretic interpretation of linguistic hedges, *J. Cybernetics* **2** (1972), 4-34.
 - [25] L.A. Zadeh. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, Interval-valued Fuzzy Sets. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet* **3** (1973), 28-44.
 - [26] L.A. Zadeh, The concept of a linguistic variable, and its application to the approximate reasoning. Part II, *Inform. Sci.* **8** (1975), 301-357.
 - [27] L.A. Zadeh, The concept of a linguistic variable, and its application to the approximate reasoning. Part III, *Inform. Sci.* **8** (1975), 43-80.

INFERENCIA DE GRAMÁTICAS REGULARES DIFUSAS A PARTIR DE EJEMPLOS

I. Fortes Ruiz, R. Morales Bueno, J.L. Pérez de la Cruz, F. Triguero, M.A. Comino

Dept. Lenguajes y Ciencias de la Computación. E.T.S.I. Informática.

Universidad de Málaga. Campus Teatinos 29071. Málaga. España.

e-mail: morales@lcc.uma.es

RESUMEN

Consideremos la siguiente situación: Un oráculo proporciona una colección finita de ejemplos y nunca más está disponible, y pretendemos descubrir un dispositivo generador de esos ejemplos. En el caso en que esos ejemplos sean cadenas de un lenguaje, nos situamos en el ámbito de la inferencia de gramáticas. En este artículo estudiamos un nuevo método de inferencia de una gramática regular difusa a partir de un conjunto de palabras pertenecientes a un lenguaje. Este método surge de una adaptación de un método de descubrimiento de modelos de procesos software. Los aspectos fundamentales de la adaptación han sido: desarrollar la versión difusa del algoritmo original, incluir grados de pertenencia asociados a las reglas de la gramática, y considerar repeticiones consecutivas de símbolos. Por último, realizamos una aplicación práctica: obtención de una gramática regular difusa que genere cuadros del estilo "abstracto" de Piet Mondrian (1872-1944). Para ello hemos diseñado: codificaciones que transforman cuadros en cadenas; codificaciones que transforman cadenas en cuadros; y hemos implementado el proceso completo. Esto es, dados 19 cuadros de Mondrian los hemos convertido a cadenas, las cuales consideradas como ejemplos para el algoritmo de inferencia nos han generado una gramática regular difusa, la cual ha producido una serie de cuadros del estilo del autor. Se incluyen comentarios sobre los cuadros de un experto en arte.

Palabras clave: Fuzzy regular grammars, Process discovery, Fuzzy Relations, Computational Learning.

1. INTRODUCCIÓN

El aprendizaje computacional intenta reproducir el aprendizaje humano. En este sentido el ser humano tiene la capacidad de aprender conceptos de una forma natural. Además es capaz de adaptar su aprendizaje a las condiciones en las que se realice, pues puede ser que tenga a su alcance toda la información necesaria o no, consiguiendo así un aprendizaje exacto o en su defecto aproximado. Otro aspecto a tener en cuenta tanto en el aprendizaje humano como en el computacional es si se produce en un contexto abierto con alguna clase de cooperación (existencia de un tutor al que se le hacen preguntas), o si se hace de forma independiente y sin ayuda externa (en un contexto cerrado). Vemos pues que el aprendizaje se puede entender de diferentes

formas. Uno de los primeros modelos de aprendizaje computacional fue el modelo PAC (Probably Approximately Correct) introducido por Valiant [24] con sólo preguntas de pertenencia. Posteriormente Angluin demostró que se podía aprender la clase de los autómatas finitos deterministas (AFD) [2], e introdujo el modelo de aprendizaje exacto (modelo donde se hacen preguntas de pertenencia y de equivalencia) [3]. Más tarde Kearns y Vazirani [17] refinaron el algoritmo de aprendizaje para los AFD mediante árboles discriminantes que posteriormente fue generalizado por Balcázar et al. [6].

Todos estos modelos se pueden considerar en un contexto abierto pues el oráculo al que se le hacen las preguntas de pertenencia y equivalencia está disponible durante todo el proceso de aprendizaje. Nosotros nos centraremos en el caso del aprendizaje de una forma aproximada difusa y en un contexto cerrado, esto es, el aprendizaje para nosotros significa inferir un concepto, a partir de un conjunto de ejemplos. Más concretamente: Un oráculo nos comunica un conjunto finito de ejemplos. Esta muestra es la única información que se nos facilita, pues el oráculo no vuelve a estar disponible nunca más ni durante el proceso de inferencia, ni puede responder preguntas sobre el método de obtener nuevos ejemplos. Nuestro objetivo es inferir un modelo que se adapte suficientemente bien a los datos.

Desarrollaremos el caso en el que los ejemplos se pueden considerar palabras pertenecientes a un lenguaje regular. Nuestro objetivo entonces será inferir una gramática difusa a partir de estos ejemplos para poder verificarlos (comprobación) y también para poder generar nuevos elementos del lenguaje (predicción).

En la literatura, y considerando la equivalencia entre gramáticas regulares y autómatas finitos, distintas aproximaciones a este problema ven el autómata como un árbol que evoluciona desde el estado inicial a través de los mismos estados mientras todos los ejemplos tengan el mismo prefijo y se produce la bifurcación cuando desaparece la coincidencia [1, 8, 9]. En particular Biermann y Feldman [7] tratan de inferir una gramática estudiando el comportamiento de la cola de longitud k del presente estado.

Presentamos aquí un modelo que se basará en el comportamiento "pasado y futuro" para definir un estado, donde jugarán un papel muy importante los grados de pertenencia que hemos introducido en el modelo. Partimos de un método de descubrimiento de modelos de procesos software debido a Cook y Wolf [10] que sólo considera las subcadenas de una longitud dada presentes en las cadenas de la muestra. Nuestra aportación ha sido desarrollar una versión difusa del algoritmo, introducir grados de pertenencia en las reglas de la gramática y mejorar el algoritmo al

considerar las posibles repeticiones consecutivas de símbolos en las palabras del lenguaje. Así capturamos de una forma más precisa los patrones de conducta de la gramática. El modelo difuso que presentamos, también lo hemos aplicado a un caso práctico. Hemos desarrollado el algoritmo completo para el caso difuso y hemos hecho una implementación del algoritmo en un caso práctico que está disponible en Internet [ver en 26]. El caso práctico escogido para aplicar el algoritmo ha sido un conjunto de pinturas pertenecientes a Piet Mondrian (1872-1944). Con ellas y el algoritmo hemos inferido una gramática difusa para generar pinturas del estilo del pintor.

En la siguiente sección introducimos los conceptos previos y notación que hemos utilizado. En la sección 3 presentamos el algoritmo de inferencia. En la sección 4 vemos las pinturas de Mondrian utilizadas y explicamos cómo el algoritmo realiza la conversión de los cuadros a cadenas de caracteres y viceversa. Además presentamos los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de inferencia a las pinturas de Mondrian, y cómo estas reglas obtenidas se usan para generar y verificar pinturas. Por último, establecemos las conclusiones y proponemos el trabajo futuro.

2. NOTACIÓN Y CONCEPTOS PREVIOS

Asumimos que el lector está familiarizado con las nociones básicas sobre lenguajes formales y gramáticas regulares, en el caso nítido y difuso [15, 16, 23].

2.1 INFERENCIA DE GRAMÁTICAS

El problema de la inferencia de una gramática informalmente se describe así: dada una muestra de palabras de un lenguaje y quizás algunas palabras que no pertenecen al lenguaje, inferir una buena gramática que represente el lenguaje deseado.

La definición formal del problema se establece en estos términos:

Sea Σ el alfabeto y Σ^* el conjunto de todas las posibles palabras sobre Σ .

Sea $L \subset \Sigma^*$ el lenguaje. Sea G la gramática que describe y genera L .

Se define S_L como el conjunto infinito de pares $(s, l) \in \Sigma^* \times \{0, 1\}$ donde $l=1$ si $s \in L$ y $l=0$ en caso contrario. S_L^+ es el conjunto de palabras que pertenecen a L y S_L^- es el conjunto de palabras que no pertenecen a L . Por tanto $S_L = S_L^+ \cup S_L^-$.

Entonces, dada alguna representación de todo o parte de S_L , ¿se puede inferir una buena gramática G que describa a L ?

En el caso que nosotros estudiamos tenemos un subconjunto finito S de S_L^+ , $S = \{(s_k, 1) \in \Sigma^* \times \{1\}; 1 \leq k \leq m\}$ donde sus elementos pueden ser considerados palabras pertenecientes a un lenguaje regular.

2.2. DESCUBRIMIENTO DE MODELOS DE PROCESOS

El descubrimiento de modelos de procesos es esencialmente el análisis de los datos recopilados de un proceso, para producir automáticamente un modelo formal que lo describa. Todos los esfuerzos se concentran en los aspectos del comportamiento del proceso.

En el marco de los procesos un *suceso elemental* es usado para caracterizar el comportamiento dinámico de un proceso en términos de una acción instantánea identificable. La sucesión de actividades de un proceso está representada por una secuencia de sucesos elementales a la que se denomina *cadena de sucesos*. Llevando estos términos al marco de la inferencia de gramáticas los sucesos elementales $e_i \in s_k$, $i=1, \dots, n$ son interpretados como terminales y las cadenas de sucesos $s_k \in S$ como cadenas en el lenguaje. Nótese que cada e_i puede pertenecer a más de un s_k .

Lo importante es que el método produzca un modelo que refleje la estructura inherente de la muestra. A menudo la muestra no refleja todos los posibles sucesos elementales que pueden ser generados, debido a que recoger los datos de la muestra puede resultar difícil y costoso, además de que los datos con los que se cuente sean limitados, (como son en nuestro caso, las pinturas de Mondrian).

3. EL ALGORITMO DE INFERENCIA

La versión original del algoritmo que desarrollamos se debe a Cook y Wolf [10]. Este algoritmo se fija, como característica principal, en que la conexión relativa a dos subcadenas de longitud 2, sólo sea válida con relación a los ejemplos suministrados; esto es, si en los ejemplos aparece la subcadena xy y la yz , entonces el grafo inicial permitirá, en principio, la existencia de la subcadena de longitud 3, xyz . Si esta subcadena no aparece en los ejemplos, hay que eliminar esa sobreconectividad. Nosotros hemos adaptado el algoritmo convenientemente para asignar grados de pertenencia a las subcadenas.

Además se ha mejorado el algoritmo teniendo en cuenta las posibles repeticiones consecutivas de símbolos. El algoritmo que nosotros presentamos aquí genera una gramática regular difusa (previa transformación de un autómata finito), pues hemos asignado grados de pertenencia a las reglas de la gramática. De esta manera capturamos de una forma más precisa los patrones de conducta de la gramática. El desarrollo completo del algoritmo se ha implementado en un caso práctico y está disponible en Internet [26].

El algoritmo se ejecuta en 6 pasos descritos a continuación. Pedimos paciencia al lector por lo arduo que puede resultar un algoritmo sin ilustrarlo con un ejemplo. Para suavizar esta dificultad explicamos con detalle cada paso. Los resultados de su aplicación en el caso práctico (generación automática de pinturas dentro del estilo de Mondrian), se encuentran en la sección siguiente.

1. Definición de dos relaciones binarias difusas

- A. Sea E el conjunto de todos los sucesos elementales e_i que aparecen en $S \subset S_L^+$. Se define la relación binaria difusa $R(E, E)$ como “_cercano a_” y con función de pertenencia $\mu_R(e_i, e_j)$. Esta función nos indica el grado de creencia que tenemos de que el suceso elemental e_i venga seguido en la cadena del suceso elemental e_j , $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, n$.
- B. Sea D el conjunto de todas las cadenas de sucesos de longitud dos que tienen asociado grado distinto de cero en R . Se define la relación difusa $T(D, E)$ como “_cercano a_” con función de pertenencia μ_T que indicará el grado de creencia de que esas cadenas de sucesos de longitud 2 vengan seguidas del suceso

elemental e_i , $i=1,\dots,n$. Para calcular el grado de cada cadena de longitud tres se usa una t-norma y para reflejar el número de existencias de esa cadena se utiliza la co-norma correspondiente para acumular los grados.

2. Construcción del grafo de sucesos G

Fijado el nivel de confianza, se construye el grafo dirigido G a partir de la matriz asociada a R y los arcos se etiquetan con los números naturales. En esta construcción, los circuitos que aparecen en las cadenas de la muestra deben mantenerse, permaneciendo los arcos de transición relativos a ese circuito en la misma cara del grafo.

3. Destruir la sobreconectividad

El paso anterior puede dar lugar a vértices en el grafo G sobreconectados produciendo así secuencias ilegales (camino $e_i e_j e_p$ en G con grado igual a cero en la matriz asociada a T). Entonces destruimos la sobreconectividad como sigue:

El vértice e_j es duplicado en dos vértices, uno de ellos teniendo el arco desde él a un vértice del extremo de la secuencia ilegal y el otro e_j con el arco desde el otro vértice del extremo a él. Para cada vértice duplicado e_j se consideran de nuevo los mismos arcos que existían con el resto de los vértices, excepto con los dos vértices e_i y e_p . Todos los arcos son etiquetados con el mismo número que tenían. Se repite este proceso hasta obtener en G todas las secuencias legales y ninguna secuencia ilegal.

4. Construcción del dual G'

Cada arco en G es un vértice en G' que está etiquetado con la etiqueta del arco de G . Para cada par de arcos de entrada b y de salida f de un vértice e_j en G son creados en G' dos vértices etiquetados con los números de los arcos de entrada y salida de G (b y f) y un arco e_j que va de b a f .

Si un vértice e_i en G sólo tiene arcos de salida b , entonces se crea un arco en G' que va desde un vértice etiquetado con A (estado inicial) al vértice b de G' . El arco en G' se etiqueta con e_i . Si un vértice e_p en G sólo tiene arcos de entrada f se crea en G' un vértice f y un arco que va desde f hasta un vértice etiquetado con F (estado final). El arco en G' se etiqueta con e_p .

5. Transformación del autómata G' en la gramática regular

Transformamos el autómata G' en una gramática regular de la forma usual [16]. Los no terminales de la gramática los representaremos con la letra A y subíndice el número del vértice en G' . Por ejemplo A_b o A_f . Además tendremos en cuenta las siguientes consideraciones. El estado inicial A podrá tener más transiciones que partan desde él como consecuencia de los estados (que no sean estados sin retorno) con arco de entrada u , por donde hay que comenzar en G para tener la consistencia con todos los comienzos de las cadenas de sucesos de S . En este caso añadiremos las reglas $A \rightarrow e A_u$. Si todos coinciden con los estados sin retorno, desde A sólo tendremos las reglas $A \rightarrow e_i A_b$ que obteníamos por la propia construcción de G' .

Todos aquellos estados en G' que tengan un arco de entrada etiquetado con un suceso elemental que sea consistente con los finales de las cadenas de S , serán estados finales para ese arco. El vértice F de G' también será estado final. Al pasar a la gramática, para los estados f en G' con transiciones a F mediante e_p , consideraremos sólo las reglas de la forma $A_f \rightarrow e_p$.

6. Gramática regular difusa: asignación de grados a las reglas

A cada regla de la gramática regular obtenida le asignamos un grado de la siguiente forma:

A cada regla de la forma $A_b \rightarrow e_j A_f$ que correspondía en G con el camino de e_i a e_j mediante el arco b y de e_j a e_p mediante el arco f , le asignamos el grado asociado a la cadena $e_i e_j e_p$ mediante T .

A las reglas $A_f \rightarrow e_p$ donde f son los estados que en G' tienen transiciones a F y además f era el arco en G que iba desde e_j a e_p , le asignamos como grado el que R le asignaba a la cadena $e_j e_p$.

Si f es un estado en G' consistente con todos los finales de las cadenas de sucesos de S , en la gramática regular existen las reglas $A_b \rightarrow e_j A_f$ y $A_b \rightarrow e_j$. A la regla $A_b \rightarrow e_j$ se le asigna como grado el que asigne la relación T a la cadena $e_i e_j e_p$.

A las reglas de la forma $A \rightarrow e_i A_b$, donde A_b era un arco en G que iba desde e_i a otro suceso elemental e_j y además era el único arco con esa propiedad, le asignaremos como grado el que tenga asociado la cadena $e_i e_j$ mediante R . A las reglas de la forma $A \rightarrow e A_u$ le asignamos grado uno. En el caso particular en el que A sólo tenga un arco de salida le asignaremos grado uno a esa regla.

Por lo tanto, al final obtenemos una gramática regular donde cada regla tiene asociado un grado. Veamos ahora, de manera informal, que este algoritmo tiene complejidad polinómica. Sea $|\Sigma|=k$ el número de símbolos del alfabeto. Sea $|S|=n$ el número de ejemplos en la muestra y sea $t+1$ la longitud del ejemplo más largo en la muestra. En estas condiciones sobre el total de ejemplos hay $t \times n$ subcadenas de longitud 2 y $(t-1) \times n$ subcadenas de longitud 3 (distintas o no). La primera tabla correspondiente a la relación difusa R tiene k^2 elementos cuyo cálculo supone $t \times n$ cómputos (si aparece la subcadena $e_i e_j$ entonces calculamos el grado del elemento (i,j)). La segunda tabla correspondiente a la relación difusa T tiene k^3 elementos cuyo cálculo requiere $(t-1) \times n$ cómputos (de manera análoga al caso anterior). Considerando el proceso en forma directa: Para la construcción del grafo G , la primera tabla de cada caso se convierte en una matriz M que representa al grafo G con k nodos. Para destruir la sobreconectividad, pasamos a lo sumo a $3k^3$ nodos, lo que supone a lo sumo $9k^6$ arcos (y una nueva matriz M'). La construcción del dual es un proceso cuadrático en el número de nodos de G .

Por último la transformación en una gramática y la asignación de grados, son ambos procesos de orden k^6 . En resumen, el algoritmo es polinómico de grado 6 en el número de símbolos del alfabeto. Como dijimos, el algoritmo controla la sobreconectividad de longitud 3. Este proceso se podría continuar para longitudes 4, 5, etc, con un incremento multiplicativo en el tiempo consumido, en un factor igual al tamaño del alfabeto.

El nivel de robustez del modelo que se infiere se podría controlar mediante un α -corte en el lenguaje difuso obtenido. Ese parámetro α se podría usar también para controlar la complejidad en el modelo que se infiere a partir de grandes muestras de datos (podando adecuadamente al ejecutar el algoritmo). Si conocemos que los datos son correctos, es decir no contienen ruido, no debería ignorarse ninguna cadena de sucesos con grado distinto de cero.

4. APLICACIÓN PRÁCTICA DEL ALGORITMO

4.1 FORMAS Y TRANSFORMACIÓN EN MONDRIAN

En Holanda alrededor de 1917 surgió un grupo de artistas abstractos. En la revista *De Stijl* (El estilo) expresaron sus ideas y crearon un nuevo arte "el neoplasticismo". El más importante de sus miembros fue Piet Mondrian (1872-1944). Él concibió su arte como un instrumento para contribuir a la búsqueda del verdadero conocimiento y la felicidad en el mundo [9]. Desarrolló sus pinturas desde el cubismo. Desde el comienzo su tema central fueron los árboles. Alrededor de 1912 fue abstrayendo este tema y todos los demás hasta conseguir una versión geométrica, apareciendo en las pinturas solamente rectángulos entre líneas negras. Las pinturas de esta etapa (1921-1944) son las que nosotros hemos estudiado [4, 5, 11, 12, 13, 14, 19, 20, 21, 22, 25]. (Se pueden consultar también en la Web [26]).

Los colores son siempre planos y se localizan en los rectángulos. Mondrian pensó que debía utilizar sólo los colores primarios (rojo, azul y amarillo). De esta forma quería lograr pinturas que no fueran subjetivas ni sentimentales. Así serían independientes de cualquier suceso histórico, cultural o geográfico. Podemos decir que Mondrian fue el artista más radical que aspiró a realizar un arte de validez universal.

El algoritmo que hemos creado para transformar las pinturas de Mondrian en cadenas unidimensionales y al revés se describe brevemente a continuación. Hemos considerado un sistema de referencia basado en los puntos cardinales. Los puntos cardinales que usamos fueron estos: N, NE, NW, N $\wedge$ NE, N $\wedge$ NW, S, SE, SW, S $\wedge$ SE, S $\wedge$ SW, E, E $\wedge$ NE, E $\wedge$ SE, W, W $\wedge$ NW, W $\wedge$ SW. El alfabeto terminal tiene 39 símbolos

Para transformar las cadenas en cuadros, comenzamos con un rectángulo blanco donde están disponibles todos los puntos cardinales, al recorrer la cadena vamos insertando los rectángulos en el punto cardinal que indica la cadena con sus respectivos colores. Al insertar estos rectángulos vamos teniendo disponibles menos puntos cardinales que no podremos volver a utilizar hasta que se produzca otro rectángulo blanco dentro del cuadro que vamos creando. En ese momento trasladamos el sistema de referencia a ese rectángulo blanco y volvemos a tener disponibles todos los puntos cardinales. Queda fuera de esta transformación el ajuste de las medidas definitivas de los cuadros. Nótese que existen varias cadenas que representan la misma pintura.

Para transformar los cuadros a cadenas se considera en cada rectángulo del cuadro su esquina superior izquierda para fijar su orientación y a cada rectángulo le corresponde una estructura de la forma (coordenada x, coordenada y, anchura, altura, color). Una vez el cuadro en dicho formato, procedemos a pasar a cadenas. Para ello, consideramos un vector de la lista de coordenadas y vemos si se cumplen los requisitos para que ese punto cardinal se le asocie al rectángulo que estamos considerando en ese momento en el cuadro. Si se da la correspondencia, lo asociamos, y se pasa al siguiente rectángulo en el cuadro, que se escogerá dependiendo de la coordenada que se haya fijado. Si no se da la correspondencia entre el rectángulo considerado y la coordenada

en curso, tendremos que hacer la comparación con otra coordenada de la lista de vectores que tenemos, hasta que obtengamos la correspondencia. Este proceso se repite hasta que utilicemos todos los vectores que teníamos del cuadro consiguiendo así una lista ordenada de las coordenadas que es la cadena que representa al cuadro. Este cuadro se puede obtener de nuevo utilizando la transformación explicada antes.

Se explica ahora la asignación de las medidas exteriores del cuadro y la posición de líneas horizontales y verticales dentro de él.

Veamos primero cómo asignar estas medidas a las pinturas generadas. Las pinturas de Mondrian que se han estudiado se pueden dividir en dos etapas, en la 1ª, las pinturas tienen pocos rectángulos mientras que en la 2ª etapa tienen un número mayor de rectángulos. Por lo tanto se ha hecho una clasificación en el estudio dependiendo del número de rectángulos de la pintura generada. Clasificada ya la pintura generada en función del número de sus rectángulos, se escogen sus medidas exteriores de una tabla de probabilidades que representan la frecuencia con que el pintor usó esas dimensiones.

Teniendo las medidas exteriores, se estudia la posición de las líneas horizontales y verticales de la pintura. Si la pintura generada tiene menos de 10 rectángulos se descompensan las proporciones en la misma medida que lo estén las de la pintura original que le corresponda. Esta correspondencia se hace buscando la diferencia mínima (entre rectángulos y orientación de los rectángulos) de las pinturas originales y la generada. Si la pintura generada tiene 10 o más de 10 rectángulos, se trazan las líneas horizontales y verticales de forma similar a la pintura original que le corresponda. Esta correspondencia está basada en el criterio descrito previamente.

Asignar las medidas exteriores y el trazado de líneas horizontales y verticales a las pinturas originales es fácil, pues están todas almacenadas en los vectores de los que se ha hablado antes, (coordenada x, coordenada y, anchura, altura, color), y sólo hay que reproducir las medidas.

4.2. RESULTADOS OBTENIDOS

Definición de las relaciones binarias difusas

Consideramos el conjunto E como el de todos los terminales existentes en las cadenas de sucesos de S. Más concretamente los elementos de E serán los puntos cardinales con sus respectivos colores asociados que aparecen en S.

La función de pertenencia μ_R se ha definido como sigue: a las cadenas de longitud dos que no aparecen en ninguna cadena de sucesos de S se le asocia grado cero; a las cadenas de sucesos de longitud dos que sí aparecen se le asocia un grado de creencia teniendo en cuenta la distancia en grados que separa un punto cardinal del otro. En todos los casos que se han estudiado los ángulos se reducen al primer cuadrante. A estos ángulos se les halla el seno y mediante un proceso de interpolación y de redondeo tomamos los valores: 1, 0.97, 0.95, 0.92, 0.70. Estos son los grados que asigna μ_R .

Definimos la función de pertenencia μ_T teniendo en cuenta la existencia de las cadenas de longitud tres en S. Si no existen el

grado es cero y si existen se le asocia como grado la intersección de los grados mediante la medida de la intersección de Dombi [18] considerando así una composición de una relación binaria en sí misma. El número de existencias en la cadena de longitud tres se tiene en cuenta haciendo una acumulación de grados mediante la unión difusa de Dombi.

$$\frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^{-\lambda} \right]^{-\frac{1}{\lambda}}} \quad \lambda \in (0, \infty)$$

Unión difusa de Dombi (1982) (1)

$$\frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{a} - 1 \right)^{\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^{\lambda} \right]^{\frac{1}{\lambda}}} \quad \lambda \in (0, \infty)$$

Intersección difusa de Dombi (1982) (2)

Operaciones en la gramática regular difusa

Partiendo de la muestra de todas las cadenas que generan los 19 cuadros de Mondrian que teníamos, hemos obtenido mediante la aplicación de nuestro algoritmo de inferencia una gramática regular que consta de 159 reglas y 93 no terminales. (Ver en [26]). Si queremos generar un nuevo cuadro aplicaríamos consecutivamente las reglas y obtendríamos una cadena con su respectivo grado que se calcula de la forma usual en una gramática regular difusa, donde nosotros usamos la t-norma de Dombi nuevamente. Esta cadena se transforma en el cuadro mediante el algoritmo de conversión.

El grado α , asociado a cada cuadro es el nivel de credibilidad de que la pintura generada por la gramática se pueda considerar dentro del estilo de Mondrian. Cuatro nuevos cuadros generados se pueden ver al final del artículo.

Desde un punto de vista artístico, la Dra. D^a Rosario Camacho, Catedrática de Historia del Arte de la Universidad de Málaga y experta en la materia, considera que los cuadros obtenidos pueden incluirse dentro del estilo del pintor. Reflejan los distintos estilos que Mondrian expuso en sus obras en esa etapa. En la mayoría de ellos, el aspecto vertical predomina frente al horizontal, recordando así la evolución a la que llegó en el tema del árbol. El segundo cuadro generado posee un equilibrio entre las líneas horizontales y verticales que también se presenta en algunos de los cuadros de Mondrian. Como en las obras del pintor, los colores se sitúan próximos a los extremos del cuadro obteniendo además variedad en los colores que existen en ellos.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Hemos presentado un algoritmo de inferencia que partiendo de un conjunto de palabras pertenecientes a un lenguaje, es capaz de obtener una gramática que genera esas palabras. Además asigna a cada regla un grado que nos mide la confianza que

tenemos en esa regla. Debido al carácter generador de la gramática, inferimos un lenguaje difuso.

En el caso práctico al que se ha aplicado, mostramos cuatro nuevos cuadros con sus grados asociados, y un experto en arte los considera dentro del estilo del pintor. Por lo tanto, el algoritmo es capaz de dar resultados coherentes y consistentes. El hecho de considerar gramáticas difusas es interesante porque nos permite ver qué patrones de conducta son más habituales.

Se han generado todas las posibles cadenas que representan a cada uno de los cuadros de Mondrian considerados y se ha elegido una cadena para cada cuadro en la inferencia de la gramática. En un trabajo posterior se considerarán todas las representaciones y se estudiará cuál es la incidencia en los grados asociados a las reglas de la gramática de las cadenas elegidas como cadenas de entrada en el algoritmo.

Estamos desarrollando una variante del modelo basado en árboles discriminantes de Kearns y Vazirani [17]. Esta variante la compararemos teóricamente con el modelo presentado en este artículo y la aplicaremos también al caso práctico de las pinturas de Mondrian, para comparar de esta forma los dos algoritmos.

Agradecimientos

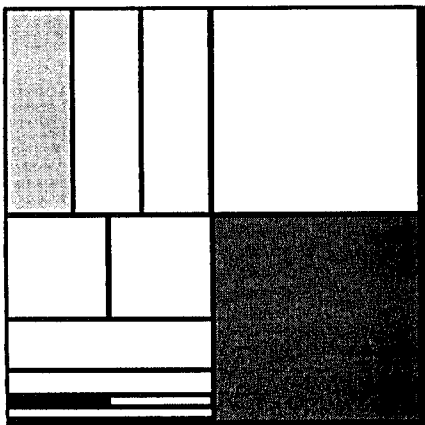
Agradecemos a la Dra. D^a Rosario Camacho Martínez, el tiempo que ha dedicado a evaluar los cuadros, así como la información que nos ha facilitado sobre el pintor.

Referencias

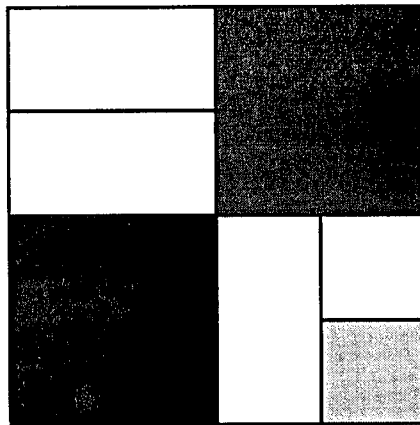
- [1] ANGLUIN D. Inference of reversible languages. *Journal of the ACM*, 29(3) : 741-765, 1982.
- [2] ANGLUIN D. Learning regular sets from queries and counterexamples. *Information and Computation*, 75 :87-106, 1987.
- [3] ANGLUIN D. Queries and concept learning. *Machine Learning*, 2: 319-342, 1988.
- [4] ARGAN G.C.: *El arte moderno 1770-1970. Tomo II*. Domènech. Burjasot-Valencia. pp 492-497. 1977.
- [5] ARNALDO J.: *Historia del Arte : Las vanguardias históricas (I)*. Vol. 45. Historia 16. pp 112-118, 157-159. 1991.
- [6] BALCÁZAR J.L., DÍAZ J., GAVALDÀ R., WATANABE O.: Algorithms for Learning Finite Automata from Queries : A Unified View, in *Advances in Algorithms, Languages and Complexity*. D. -Z. Du and K. -I. Ko (Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1997, pp.73-91.
- [7] BIERMANN A.W., FELDMAN J.A.: "On the synthesis of finite state machines from samples of their behaviour". *IEEE Transactions on Computers*, 21 :592-597, June 1972.
- [8] CARRASCO R.C., ONCINA J. *Grammatical Inference and Applications*, vol 862 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence (subseries of LNCS)*, pp 139-152. Springer-Verlag, New York . 1994.
- [9] CASTELLANOS A. , GALIANO I., VIDAL E. *Grammatical Inference and Applications*, vol. 862 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence (subseries of LNCS)*, pp 93-105. Springer-Verlag, New York . 1994.
- [10] COOK J.E., WOLF A.L: Discovering models of Software Processes from Event-Based Data. Technical Report CU-CS-

820-96, Department of Computer Science, University of Colorado, Boulder, CO 803009 USA. 1996.

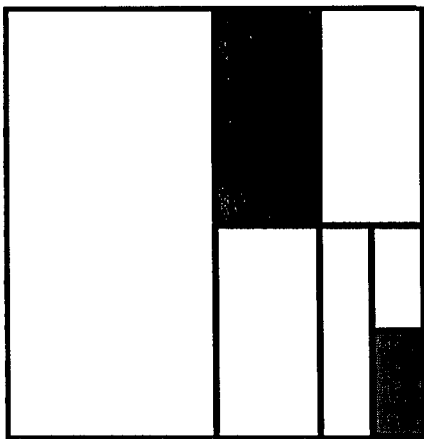
- [11] DEE REYNOLDS *Symbolist aesthetics and early abstract art. Sites of imaginary space.* Cambridge University Press. 1995.
- [12] DEICHER S.: *Piet Mondrian 1872-1944. Composición sobre el vacío.* Benedikt Taschen. 1995.
- [13] ELGAR F. MULLER J-É. : *La peinture moderne.* Fernand Hazan éditeur. Pinturas 173-176. 1979.
- [14] HEARD HAMILTON G.: *Pintura y escultura en Europa 1880-1940.* Manuales arte cátedra. pp 332-345. 1980.
- [15] HONDA N. et all .: "F-Recognition of Fuzzy Languages" en GUPTA M.M. SARIDIS G. GAINES B.R (eds): *Fuzzy Automata and Decision Process, Cap. 9.* North-Holland, 1977.
- [16] HOPCROFT J.E., ULLMAN J.D.: *Introduction to Automata Theory Languages and Computation..* Addison Wesley 1993.
- [17] KEARNS M.J., VAZIRANI U.V.: *An Introduction to Computational Learning Theory.* MIT Press. 1994.
- [18] KLIR G.J. FOLGER. T.A.: *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information.* Prentice Hall. 1988.
- [19] LAMBERT J-C.: *Historia general de la pintura: Pintura abstracta. Vol. 23.* Aguilar. pp 11-17.1969.
- [20] MAILLARD Robert: *Dictionnaire Universel de la Peinture. Vol. 5.* S.N.L.- Dictionnaires Robert.1975.
- [21] MARCHAN FIZ S.: *Las vanguardias históricas y sus sombras 1917-1930 en Enciclopedia Summa Artis. Vol. 39.* Espasa-Calpe. p 227.1995.
- [22] RAMIREZ J.A.: *Biblioteca básica de arte: El arte de las vanguardias.* Anaya. pp 48-55.1991.
- [23] SANTOS E.S.: "Regular Fuzzy Expression" en GUPTA M.M. SARIDIS G. GAINES B.R (eds): *Fuzzy Automata and Decision Process, Cap. 10.* pp. 169-175. North-Holland, 1977.
- [24] VALIANT L.G: A Theory of the Learnable. *Communications of the ACM. 27(11) :1134-1142.* 1984.
- [25] <http://www.cogapp.demon.co.uk/piran/mondrian/resources.html>
- [26] <http://www.lcc.uma.es/personal/morales/mondrian.html>



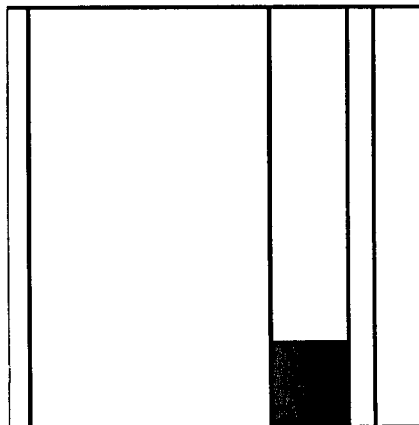
Cuadro 1 (grado= 0.3090)



Cuadro 2 (grado= 0.4535)



Cuadro 3 (grado= 0.3265)



Cuadro 4 (grado= 0.9417)

Métodos de construcción de modelos guiados por el error.

M. Delgado
Dep. C.C.I.A.
U. Granada

A.F. Gómez Skarmeta
Dep Aut. y Sist. Informáticos
U. Murcia

L. J. Linares *
Dep. Informática
U. Castilla La Mancha

1 Introducción.

La construcción de un modelo que refleje el comportamiento de un sistema real siempre lleva aparejado las siguientes etapas [8] [7]:

1. Determinar la estructura del modelo.
2. Ajustar los parámetros que lo definen.

Consideremos que el sistema real es gobernado por una *relación* Ξ , en el sentido más amplio de relación, entre un conjunto de variables de entrada $X_1 \times \dots \times X_n$ y una variable de salida Y . En términos muy generales podremos representar el comportamiento desconocido del sistema como:

$$\Xi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y \quad (1)$$

En estos mismo términos el modelo que refleje la interacción entre las variables de salida y la de entrada vendrá definido como:

$$\Psi : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y \quad (2)$$

Una forma de generalizar el comportamiento del modelo Ψ es dotarlo de un conjunto de parámetros $p_1, \dots, p_r$ que permitan adaptarlo a distintos sistemas que queramos modelar. Esto proporciona un esquema general para el modelo Ψ como la función paramétrica siguiente:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_r) = y \quad (3)$$

En este marco la primera etapa para la identificación de Ψ , determinar la estructura del modelo, vendría precedida por siguientes los procesos:

- (a) Determinar el conjunto variables del modelo.
 - i. ¿ Que variables intervienen en el sistema ?

*Email:ljimenes@inf-cr.uclm.es

- ii. ¿ Que variables de entrada actúan sobre una salida ?
- (b) Determinar que tipo de relación existe entre las variables de entrada y salida.

El punto (a) suele solucionarse considerando que el conjunto de variables de entrada del sistema Ξ ya han sido fijadas con anterioridad o en su defecto se restringe a un conjunto finito de posibles variables.

Las relaciones existentes entre las variables de entrada con las de salida pueden ser plasmadas de muy diversas formas. Una primera clasificación de la formulación de esta relación podría considerarse en base a la unicidad de esta relación. Esto es, si la relación se formula de forma única sobre todo el espacio de definición de la entrada, o mediante la interacción de un conjunto de relaciones, definidas sobre subconjuntos del espacio de entrada.

La parametrización de los modelos dependerá del tipo de formulación elegida. Un posible modelo con una única relación extendida por todo el dominio de las variables de entrada, podría representarse mediante una ecuación matemática. Por ejemplo un modelo para un sistema con un comportamiento lineal sería:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i * x_i \quad (4)$$

Los modelos formados por la interacción de una serie de subrelaciones entre subconjuntos del dominio de las variables de entrada, necesitan, en términos muy generales, unos formalismo para determinar el subconjunto de entrada donde actúa una determinada subrelación, así como el mecanismo de interrelación entre las distintas subrelaciones. Ejemplos de este tipo de modelos son: los modelos basados en reglas, árboles de identificación y regresión, así como los de clustering o agrupamiento.

En este último tipo de modelos los parámetros que definen la estructura de los mismo son muy diversos, entre ellos podemos destacar el número de subrelaciones a considerar, el conjunto de parámetros necesarios para definir las regiones donde actúan las subrelaciones, los parámetros de la propia subrelación entre el subconjunto de valores de entrada y las de salida, etc.

Una vez fijado el tipo de modelo que hemos de utilizar el objetivo se centra en determinar los valores del conjunto de parámetros que reducen al mínimo el error cometido por el modelo frente al sistema real.

Sea $\Psi(X, P)$ nuestro modelo, el error cometido por él podremos expresarlo en función del sistema $\Xi(X)$ como la diferencia entre ambos en cada punto de definición:

$$\text{Error}_{\Psi}(X, P) = \Xi(X) - \Psi(X, P) \quad (5)$$

Reducir este error a lo largo de todo el dominio de definición X es equivalente por ejemplo a minimizar la media de los errores cometidos al cuadrado.

$$\text{Error}_{\Psi}^2(P) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \text{Error}_{\Psi}(x, P)^2 \quad (6)$$

Fijado el objetivo mediante la ecuación (6) las dos etapas necesarias para la construcción de un modelo: definir la estructura y el ajuste de sus parámetros,

no quedan nítidamente separadas; más bien, se entremezclan para eliminar el error del modelo.

2 Métodos de construcción de modelos.

Para la definición de la estructura de un modelo existen dos métodos a seguir: deductivo e inductivo. El método deductivo básicamente consiste en establecer la estructura del modelo mediante el conocimiento de un experto y un posterior ajuste del mismo mediante un proceso de regresión.

El método inductivo parte de una colección $L = \{(x_i, \Xi(x_i))\} \quad i = 1, \dots, m$ de datos conocidos sobre el comportamiento del sistema Ξ a modelar, mediante los cuales se define tanto la estructura del modelo como su ajuste. Una gran parte de estos métodos inductivos [5] [6] [4] [1] [3] [2] se basan en considerar la relación existente entre las variables de entrada y de salida como una combinación de subrelaciones. En términos muy generales estos modelos pueden formularse en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \Psi(X) &= U(\Psi_1(X), \dots, \Psi_n(X)) \\ \{A_i \subset X, \Psi_i(x) \quad x \in A_i\} \quad i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\Psi_i(x)$ representa una subrelación dentro del conjunto de valores de entrada A_i y U un mecanismo de agregación de todas las subrelaciones. Un ejemplo de estos modelos son los basados en un conjunto de reglas, donde cada regla define una subrelación entre las variables de entrada y la de salida. En este tipo de modelos las relaciones que se formulan son de causa-efecto. Una regla con la forma *Si consecuente entonces antecedente* refleja el efecto ocasionado sobre la variable de salida (consecuente) por medio de una causa (antecedente).

Estos métodos inductivos de construcción de modelos basados en conjuntos de reglas, van generando reglas guiados por el conjunto de datos conocidos adecuando sus antecedentes y consecuentes hasta lograr que el error cometido por el modelo sea *acceptable*. Generalmente la estructura del modelo se define consiguiendo establecer un número de reglas y una forma para los antecedentes y consecuentes de las mismas. Posteriormente el ajuste del sistema mediante otro tipo de técnicas modifica la forma de los antecedentes y consecuentes de las reglas para lograr el mínimo error posible.

Como vemos el *error* del modelo Ψ no aporta información relevante del mismo, más bien es un elemento a eliminar de cualquier forma aunque esto nos cause distorsiones importantes en el propio modelo.

Este uso del error nos lleva hacia buenos modelos, en el sentido de cajas negras, donde la relación existente entre las entradas y salidas queda totalmente oculta por el propio modelo. Esto es adecuado en las ocasiones que precisamos exclusivamente la relación funcional entre las entradas y salidas; pero no es válido cuando lo que queremos es descubrir o plasmar la *semántica* de estas relaciones, queremos *comprender* la naturaleza de esta relación.

Un paso en este sentido son los modelos de razonamiento aproximado donde las relaciones se expresan por medio de reglas donde las variables son lingüísticas [9] [10] [11]. La inducción de este tipo de modelos nos proporciona conjuntos

de reglas donde el ajuste de los parámetros final no es posible si no queremos desvirtuar la semántica (conjunto difuso) asociado a cada etiqueta que define tanto los antecedentes como los consecuentes.

3 Modelizando el error.

Como hemos visto en las secciones anteriores, el uso del error con el único propósito de su eliminación puede conllevar los siguientes problemas:

1. La utilización de distintos métodos para la definición de la estructura del modelo y posterior ajuste de sus parámetros.
2. El ocultamiento o eliminación de la semántica que aporta un modelo tras su ajuste.
3. Forzar un único modelo para el global de los datos conocidos.
4. Restringirnos a una formulación concreta que permita posteriormente un fácil ajuste.

Frente a estos problemas y como mecanismo de solución, nosotros proponemos utilizar el conocimiento del error no sólo para eliminarlo, sino para completar nuestros modelos inducidos, así como para el análisis y mejora de los mismos.

Nuestro punto de partida es considerar un método inductivo de construcción de modelos e inducir un modelo Ψ a partir de los datos conocidos L del sistema Ξ . El error que introduce el uso del modelo Ψ es observado dentro del conjunto de datos L .

$$\text{Error}_{\Psi}(x_i) = \Xi(x_i) - \Psi(x_i) \quad (8)$$

para todo $(x_i, \Xi(x_i)) \in L$. El sistema Ξ queda perfectamente establecido conocido el error Error_{Ψ} como:

$$\Xi(x) = \Psi(x) + \text{Error}_{\Psi}(x) \quad (9)$$

En la ecuación (9) mediante el método inductivo y L obtenemos Ψ y con la ecuación (8) podemos construir un nuevo conjunto de datos conocidos L_{Error} del error cometido al utilizar el modelo Ψ . Esto nos pone de nuevo en el punto de partida: un conjunto de datos conocidos y un mecanismo de inducción de un modelo del error Ψ_{Error} . El modelo del sistema Ξ será:

$$\Psi'(x) = \Psi(x) + \Psi_{\text{Error}}(x) \quad (10)$$

y el sistema queda definido como:

$$\Xi(x) = \Psi'(x) + \text{Error}_{\Psi'}(x) \quad (11)$$

Si denotamos $|\text{Error}_{\Psi}|$ un valor único como por ejemplo la ecuación (6), tras obtener los modelos Ψ y Ψ' se verifica que:

$$|\text{Error}_{\Psi}| > |\text{Error}_{\Psi'}| \quad (12)$$

El método origina una secuencia de modelos Ψ^j con las siguientes características:

1. $|\text{Error}_{\Psi^{j-1}}| > |\text{Error}_{\Psi^j}|$
2. El modelo se forma con un modelo inicial Ψ^1 y sucesión de modelos del error.
3. Tanto el modelo inicial como los modelos de los errores son obtenidos con un mismo método inductivo.
4. El conjunto de modelos pueden estar limitados, tanto en el número de reglas como en el número de variables que intervienen en los modelos.

4 Conclusiones.

En este trabajo hemos propuesto un enfoque distinto al tratamiento del error al que habitualmente se utiliza en la identificación de modelos. Nosotros tomamos el error como un nuevo sistema susceptible de ser modelado. Esto nos permite obtener métodos uniformes de inducción de modelos, en el sentido de la utilización de una única técnica tanto para la definición de la estructura como el ajuste del modelo.

Con este enfoque la mejora de un modelo, no interfiere en la semántica del mismo (no se modifica el modelo inicial); por contra modelizando el error nos permite un estudio de este modelo del error que nos permita detectar los lugares donde el modelo no funciona adecuadamente. Una vez detectados esos lugares podremos rehacer el modelo centrándonos en ellos o en el peor de los casos obtener buenos resultados mediante la corrección local del error.

La construcción uniforme de los modelos nos permite identificar cada uno de ellos con un bloque funcional y su mejora, modelos con menor error, simplemente con la incorporación de un nuevo bloque. Esto nos permite la utilización de implementaciones hardware de modelos con el nivel de error deseado. Un ejemplo de esta solución es la utilización de chips que encapsulan un conjunto finito de reglas difusas con un mecanismo de inferencia.

Referencias

- [1] James C. Bezdeck. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press, New York, 1981.
- [2] D. Dimitrescu. Hierarchical pattern classification. *Fuzzy and Systems*, 28:145-162, 1988.
- [3] Jerome H. Friedman Leo Breiam and Charles J. Stone. *Classification and Regression Trees*. Wadsworth & Brooks, 1984.

- [4] L. J. Linares. *Modelización difusa de sistemas mediante técnicas inductivas*. PhD thesis, Escuel Técnica Superior de Ingeniería Informática. Universidad de Granada., Julio 1997.
- [5] A. F. Gómez Skarmeta M. Delgado and L. J. Linares. Regression by fuzzy knowledge bases. In *EUFIT'96*, pages 1170–1176, 1996.
- [6] A. F. Gómez Skarmeta nd L. J. Linares M. Delgado. Arboles difusos de regresión y clasificación. In *VI Congreso Español Sobre Tecnología Y Lógica Fuzzy*, pages 101–106, 1996.
- [7] M. Sugeno and T. Yasukawa. A fuzzy-logic-based approach to qualitative modelling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(1):7–31, 1993.
- [8] T. Tkagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of system and its applications to modeling and control. *IEEE Transaction on system, Man and Cibernetics*, smc-15:116–132, January 1985.
- [9] L. A. Zadeh. The concept of linguistic variable and its applications to aproximate reasoning. part i. *Information Sciences*, 8:199–249, 1975.
- [10] L. A. Zadeh. The concept of linguistic variable and its applications to aproximate reasoning. part ii. *Information Sciences*, 8:301–357, 1975.
- [11] L. A. Zadeh. The concept of linguistic variable and its applications to anroximate reasoning. part iii. *Information Sciences*. 9:43–80. 1975.

Un modelo lingüístico para la descripción de conceptos

Enric Hernández

Secció de Matemàtiques i Informàtica
ETSAB. Avda. Diagonal 649, 08028 Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya
enriche@lsi.upc.es

Jordi Recasens

Secció de Matemàtiques i Informàtica
ETSAV. Pere Serra 1-15, 08190 Sant Cugat
Universitat Politècnica de Catalunya
recasens@ea.upc.es

Resumen

Cada vez es más patente la necesidad de desarrollar métodos y técnicas capaces de extraer conocimiento útil de grandes bases de datos. En este trabajo presentamos un algoritmo capaz de obtener descripciones lingüísticas de conceptos definidos contra una base de información. Para reducir el elevado coste computacional que implica conjeturar descripciones mediante el uso de una búsqueda exhaustiva, se ha desarrollado una técnica basada en proyecciones, que otorga simplicidad y eficiencia al método presentado.

Palabras Clave: Concept learning, linguistic summaries, inductive fuzzy learning, rules acquisition, Data Mining, Fuzzy Logic.

1 Introducción

En los últimos tiempos los avances tecnológicos unidos a su mayor disponibilidad e implantación en nuestra sociedad, han provocado la transición de un modelo de sociedad a otro bien distinto. En palabras de Pe-drycz [5]:

"Vivimos en una sociedad rica en información pero pobre en conocimiento".

Efectivamente, la gran capacidad de "recolectar" información ha originado la aparición de ingentes bancos de datos sobre los temas más diversos. Pero de poco sirve toda esta información si no va acompañada de métodos eficaces para "navegar" a través de ella. Esta consideración implica la distinción entre información y conocimiento: por este último entenderemos una estructuración de la información que nos permita una

comprensión de ésta, así como un manejo eficiente relativo al problema que queremos resolver.

Para abordar este objetivo, últimamente hemos sido testigos de la unificación de muy diversos métodos y áreas de conocimiento (estadística, aprendizaje artificial, bases de datos,..) bajo la etiqueta de "Data Mining", destinados a generar estructuras de conocimiento a partir de los datos.

En muchas ocasiones, los datos de los que se dispone son imprecisos (bien sea por limitaciones tecnológicas en los aparatos de medida, bien sea por su inherente origen cualitativo). Además, también nos puede convenir introducir imprecisión en dominios precisos, con el propósito de aumentar la capacidad de abstracción y generalización sobre esos dominios, así como simplificar notablemente las descripciones del conocimiento obtenido. Por todo lo dicho, parece lógico exigir un tratamiento adecuado de la imprecisión por parte de los métodos disponibles.

El método que presentamos se enmarca dentro de esta tradición, es decir, persigue la extracción de descripciones cualitativas de conceptos definidos sobre un conjunto de instancias, explotando la capacidad de abstracción que proporcionan las descripciones basadas en etiquetas lingüísticas.

2 Formulación del problema

El objetivo del método presentado es, como ya se ha dicho, obtener descripciones lingüísticas de conceptos pertenecientes al dominio considerado. Para ello, supondremos que la información se nos presenta como un conjunto de instancias descritas mediante pares $\langle \text{atributo-valor} \rangle$.

Sea $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ el conjunto de todos los atributos. Consideraremos dos subconjuntos de A : $D \subseteq A$ será el conjunto de atributos explicativos, o lo que es lo mismo, el conjunto de atributos que utilizaremos para obtener las descripciones de los conceptos; y $C \subseteq A$

el conjunto de atributos a explicar, o el conjunto de atributos a partir del cuál generaremos los conceptos que queremos describir. Exigiremos que $D \cap C = \emptyset$, ya que si no, la descripción óptima del concepto a explicar sería él mismo (por ej: si queremos explicar el concepto "Temperatura:Alta" a partir de los atributos Temperatura, Presión y Volumen, queremos evitar la descripción tautológica "Temperatura:Alta si Temperatura:Alta"). $D \cup C$ no tiene que ser A, con lo que se permite ignorar ciertos atributos en el proceso de generación de descripciones.

Para cada $A_i \in A$ consideraremos definida una variable lingüística V_i . Zadeh [8] propone la definición de una variable lingüística como una quintupla: $(V_i, T(V_i), U_i, G_i, M_i)$ donde:

- V_i = nombre de la variable,
- $T(V_i)$ = conjunto de términos atómicos de la variable (valores lingüísticos),
- U_i = universo de discurso,
- G_i = reglas sintácticas de construcción de términos válidos,
- M_i = reglas semánticas para asociar cada término válido con su "significado" (conjuntos difusos definidos sobre U_i).

Así, por ejemplo, si tenemos el atributo "Años" definido en $[0,100]$, podemos asociarle la variable lingüística "Edad" definida por:

- V_i = Edad,
- $T(V_i) = \{\text{Muy joven, Joven, Maduro, Viejo}\}$,
- $U_i = [0,100]$,
- $G_i = \text{Muyjoven} \mid \text{Joven} \mid \text{Maduro} \mid \text{Viejo}$,
- M_i = definiciones de "Muy joven", "Joven", "Maduro" y "Viejo".

Las variables lingüísticas asociadas a los atributos nos servirán para generar los conceptos y las descripciones de éstos. Consideraremos descripciones válidas de conceptos a los elementos del Algebra de Boole generada por los términos de $\bigcup_{A_i \in C} T(V_i)$.

Las descripciones generadas para esos conceptos serán cadenas producidas por la misma gramática, con la diferencia de que $A_i \in D$. Es decir, los conceptos y las descripciones serán conjunciones, disyunciones o negaciones de términos válidos de las variables lingüísticas asociadas a los conjuntos de atributos C y D respectivamente.

3 Algoritmo

Observando las definiciones previas, el problema se reformula de la siguiente forma: dadas dos definiciones de conceptos C^+ y C^- , hallar la descripción lingüística que mejor explique C^+ y que a la vez excluya C^- (C^- debe ser entendido como un conjunto de restricciones negativas impuestas sobre la descripción a generar; es decir, la representación intensional de los contraejemplos). No se exige que C^- sea el complementario de C^+ .

En esta sección presentaremos un algoritmo destinado a resolver esta tarea. Dicho algoritmo puede dividirse en las siguientes fases:

3.1 "Fuzzificación":

La primera fase consistirá en "fuzzificar" las instancias pertenecientes a nuestra base de información. Nos interesará calcular el grado en que las instancias cumplen la definición de C^+ (el cuál nos dará un grado de "adecuación" de la instancia a la definición del concepto), así como el grado de pertenencia de la instancia a nuestro dominio de explicación (el dominio formado por el producto de los valores lingüísticos correspondientes a las variables asociadas a los atributos explicativos). El grado final asociado a cada instancia será la conjunción de ambos, ya que si, por ejemplo, la instancia es compatible con la definición del concepto, pero dadas las variables lingüísticas de las que partimos no es "expresable" en nuestro dominio, queremos que el grado resultante para esa variable sea bajo.

Una instancia se puede considerar como un elemento $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ del producto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ de los universos de discurso de los atributos. Sea I el conjunto de instancias. Para simplificar la notación, supondremos que los atributos explicativos son $A_{k+1}, \dots, A_{k+l}$, que el número de valores lingüísticos es $n_{k+1}, \dots, n_{k+l}$ respectivamente y que $\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in_i}$ son los conjuntos difusos correspondientes a la variable lingüística definida en $A_i, i = k+1, \dots, k+l$.

Dada una instancia $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, calculamos:

$$R(w) = \bigwedge_{i=k+1}^{k+l} \max_{j=1 \dots n_i} \mu_{ij}(w_i) \\ \wedge \bigwedge_{j=1}^k \mu_j(w_j)$$

,donde el primer término se corresponde con el grado de expresabilidad de la instancia en nuestro dominio de explicación, es decir, para cada índice i correspondiente a un atributo explicativo calculamos el grado de pertenencia de w_i a la variable lingüística asociada

al atributo de índice i . Ese grado será el mayor grado de pertenencia de w_i a los conjuntos difusos asociados a los términos válidos ($T(V_i)$) de esa variable. El segundo término nos da el grado de cumplimiento, por parte de la instancia, de la descripción de C^+ (recordemos que μ_j son los conjuntos difusos correspondientes a los valores lingüísticos utilizados en la definición del concepto a explicar).

3.2 Proyección:

El siguiente paso consistirá en proyectar los valores obtenidos anteriormente (fase de "fuzzificación") sobre cada uno de los atributos explicativos. El objetivo perseguido no es otro que reducir el coste computacional del problema. Una primera aproximación para hallar las descripciones de los conceptos podría ser, tal como sugiere Yager [7], conjeturar como descripciones posibles el resultado del producto de todos los valores de las variables explicativas, y posteriormente evaluar la "bondad" de cada una de esas descripciones viendo como se distribuyen las instancias "fuzzificadas" en cada una de las descripciones producto. Este método exhaustivo es razonable para dominios de dimensionalidad baja, pero deviene intratable para dimensionalidades altas.

Una forma de solucionar este problema consiste, como ya se ha dicho, en proyectar los valores obtenidos en la fase (3.1) sobre cada uno de los atributos explicativos (más concretamente sobre los conjuntos difusos correspondientes a los valores lingüísticos de las variables explicativas). De esta forma, para cada var. explicativa i , la proyección ρ_i la definiremos como un conjunto difuso sobre el dominio de discurso de esa variable.

Dado el valor u del dominio U_i del atributo A_i , sea A_u el conjunto de instancias que toman este valor u en U_i ($A_u = \{w \in I | w_i = u\}$).

ρ_i :

$U_i \rightarrow [0, 1]$

$$u \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \max_{w \in A_u} R(w), & \text{si } A_u \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } A_u = \emptyset \end{array} \right\}$$

3.3 Elección de "candidatos":

Gráficamente, ρ_i es un conjunto de puntos distribuidos sobre el dominio de discurso de la variable i . Nuestro objetivo ahora será examinar esta distribución con el objeto de seleccionar el o los valores lingüísticos que

mejor "explican" esta distribución.

Para ello definiremos una medida de "bondad" de un valor lingüístico determinado para explicar la distribución de puntos comprendida en su soporte. De entre el conjunto de medidas existentes, nosotros hemos experimentado con dos.

Fijado un atributo explicativo A_i , sea μ_{ij} el conjunto difuso que representa un valor lingüístico de la variable lingüística definida en A_i ,

1. Medida "aditiva":

$$S_1(i, j) = \sum_{u \in \text{soporte } \mu_{ij}} \rho_i(u) \quad (1)$$

2. Valor medio:

$$S_2(i, j) = \frac{\sum_{u \in \text{soporte } \mu_{ij}} \rho_i(u)}{\text{cardinal de } \mu_{ij}} \quad (2)$$

donde cardinal de μ_{ij}
es $\text{card}\{u \in \text{soporte}(\mu_{ij}) | \rho_i(u) \neq 0\}$.

La primera consiste en sumar los valores proyectados para las instancias cuya componente i -ésima (valor w_i del par $\prec a_i, w_i \succ$) pertenezca al soporte del conjunto difuso μ_{ij} . La segunda es simplemente la media.

Calcularemos esta medida para todos los valores lingüísticos de la variable. Posteriormente estas sumas se normalizan dividiéndolas por la mayor. Estas medidas nos servirán para seleccionar las etiquetas candidatas para esa variable. Para ello tenemos varias opciones:

1. Seleccionar como candidatos las etiquetas (valores lingüísticos) cuya medida supere un umbral (α -corte).
2. Seleccionar las n etiquetas de mayor medida asociada (de esta forma controlamos el número de candidatas por variable).
3. Aplicar algún criterio estadístico (por ej: elegir como candidatas aquellas cuya medida sea significativamente mayor, bajo criterios de significancia estadística).

3.4 Verificación:

Una vez obtenidas las etiquetas candidatas para cada una de las variables explicativas, pasamos a la fase de conjeturar posibles descripciones a partir del producto de estas etiquetas. Efectuar el producto de candidatas

y no el producto exhaustivo reduce, como se indicó anteriormente, el coste computacional.

Es necesaria la verificación de la "bondad" de la descripción debido a que no todas las descripciones del espacio producto serán "buenas" descripciones. Para calcular esta "bondad" usaremos las mismas medidas que utilizamos para calcular las etiquetas candidatas, con la diferencia de que ahora no se aplican sobre los valores proyectados, sino sobre todo el conjunto de instancias "fuzzificadas".

Si $\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \dots, \mu_{k+l}$ son etiquetas candidatas correspondientes a los atributos explicativos $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+l}$ respectivamente, se calcula su grado de bondad como:

$$S_1 = \sum_{w=(w_1, \dots, w_n) | w_i \in \text{soporte } \mu_i, i=k+1, \dots, k+l} R(w) \quad (3)$$

o bien

$$S_2 = \frac{S_1}{\text{cardinal}(\mu_{k+1} \times \dots \times \mu_{k+l})} \quad (4)$$

donde $\text{cardinal}(\mu_{k+1} \times \dots \times \mu_{k+l})$ es $\text{card}\{w | (u_{k+1}, \dots, u_{k+l}) \in \text{soporte}(\mu_{k+1} \times \dots \times \mu_{k+l}) \text{ and } R(w) \neq 0\}$

De lo que se trata es de estudiar cómo se distribuyen los valores hallados en la fase de "fuzzificación" en cada una de las descripciones del espacio producto de candidatas.

Además de calcular el grado de adecuación de I al concepto objetivo (C^+), calcularemos el grado de adecuación de I a la representación intensional de los contraejemplos (C^-).

Finalmente, el grado de bondad resultante será combinación de dos factores:

1. Grado de bondad para C^+ .
2. Grado de bondad para C^- .

Para el estudio de ambas distribuciones sobre una descripción conjeturada, utilizamos las medidas S_1 y S_2 comentadas anteriormente.

Si recordamos que las descripciones resultantes se expresan en forma de reglas (si $\langle \text{antecedente} \rangle \rightarrow \text{concepto}$), tenemos que el primer factor nos da el grado

de la condición suficiente (si $\dots \rightarrow \text{concepto}$), mientras que el segundo nos da el grado de la condición necesaria (si $\dots \leftarrow \text{concepto}$).

4 Conclusiones y trabajo futuro

A modo de conclusión vamos a referir las principales aportaciones, y las posibles extensiones que pueden llevarse a cabo sobre el algoritmo presentado. Como principales características tenemos:

- Simplicidad: el método se basa en operaciones de fácil comprensión como la proyección, así como en el uso de medidas de gran simplicidad (aditivas, medias), lo que otorga una gran simplicidad global.
- Reducción del coste computacional mediante la selección de "candidatas" para cada atributo, y evaluación de las descripciones del espacio producto de "candidatas", en lugar del espacio producto total.
- El algoritmo permite tanto la utilización de atributos continuos como discretos.

En cuanto a las posibles extensiones pueden citarse principalmente dos:

- Una vez obtenidas las descripciones de los conceptos, pueden aplicarse técnicas para simplificar estas descripciones: desde técnicas puramente sintácticas hasta técnicas basadas en la exclusión de ciertos atributos basándose en el estudio de su relevancia. El resultado esperado es la obtención de descripciones lo más comprensibles, simples y concisas que sea posible.
- Dotar al sistema de la capacidad de "adaptar" las particiones difusas asociadas a los atributos, de forma que éstas se "acomoden" mejor a los datos y mejoren las descripciones obtenidas.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por el proyecto número PB94-1208 de la DGICYT.

Referencias

- [1] Slavka Bodjanova. Approximation of fuzzy concepts in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, (85):23-29, 1997.
- [2] Kaoru Hirota and Witold Pedrycz. Linguistic data mining and fuzzy modelling. *IEEE*, pages 1488-1492, 1996.

- [3] Warren Liao and Zhiming Zhang. A review of similarity measures for fuzzy systems. *IEEE*, pages 930–935, 1996.
- [4] Nikhil C. Pal and James C. Bezdek. Measuring fuzzy uncertainty. *IEEE*, pages 107–118, 1994.
- [5] Witold Pedrycz. Data mining and knowledge discovery: a fuzzy set perspective. *Tatra Mountains Math. Publ*, (13):195–218, 1997.
- [6] Li-Xin Wang and Jerry M. Mendel. Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE transactions on systems, man and cybernetics*, 22(6):1414–1427, 1992.
- [7] Ronald R. Yager. Fuzzy summaries in database mining. *IEEE*, pages 265–269, 1995.
- [8] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, i,ii and iii. *Fuzzy Sets and Applications: Selected papers by L.A. Zadeh*, pages 219–366, 1976.

UN MODELO PARA LA CUANTIFICACIÓN DE LA PERSISTENCIA EN PROPOSICIONES TEMPORALES BORROSAS

P. Cariñena, A. Bugarín y S. Barro

Grupo de Sistemas Intelixentes.

Departamento de Electrónica e Computación.

Universidade de Santiago de Compostela.

{puri, alberto, senen}@dec.usc.es

Resumen

En sistemas borrosos aplicados a entornos dinámicos suele ser necesaria la representación y manipulación explícita del tiempo. Ello supone generalmente manejar intervalos temporales borrosos, a lo largo de los cuales se debe evaluar una determinada condición sobre una variable o conjunto de variables. Surge así el concepto de persistencia en un intervalo: el valor o condición sobre la(s) variable(s) ha de verificarse, al menos en cierto grado, para todos los instantes puntuales dentro del intervalo, o simplemente al menos en alguno de los puntos del mismo. El modelo que proponemos para un operador que cuantifique la persistencia temporal en un intervalo se basa en realizar una interpolación entre los casos extremos (cuantificación existencial y universal), en función de la proximidad del operador a alguno de ellos, caracterizada como un parámetro numérico. Este parámetro se utiliza para la construcción de un operador compensatorio interpolado lineal o exponencialmente entre una t-norma (operador adecuado para modelar la cuantificación universal) y una t-conorma (que modela la cuantificación existencial) cualesquiera.

Palabras Clave: Regla Temporal Borrosa, Cuantificador Lingüístico, Operador Compensatorio, Agregación.

1 INTRODUCCIÓN

En gran parte de las aplicaciones de Control Borroso, el conocimiento se modela mediante reglas borrosas del tipo *si-entonces*, que expresan relaciones de entrada-salida entre las distintas variables lingüísticas descritas

en las partes antecedente y consecuente de las reglas. Tenemos así que las Bases de Conocimiento Borrosas (BCB) se reducen habitualmente a un conjunto de reglas estructuralmente homogéneas, donde no se suele tener en cuenta la dinámica temporal de los procesos (no se considera borrosidad temporal, ni la posible existencia de relaciones temporales entre las distintas variables), salvo a través de variables diferencia (*“incremento de presión”*) y/o suma (*“error acumulado”*).

En muchas aplicaciones en tiempo real, evaluar exclusivamente información como la que recogen estas proposiciones supone una fuerte restricción en las posibilidades de razonamiento sobre la dinámica del sistema. Con el objetivo de incrementar la capacidad expresiva de las reglas en una BCB sobre un sistema dinámico, se han propuesto modelos [2, 3, 7, 10] que incluyen de forma más o menos explícita el tiempo como variable.

En este trabajo consideraremos el modelo propuesto en [2] y [3], abordando la parte de la ejecución de Reglas Temporales Borrosas (RTB) correspondiente al cálculo del Grado de Verificación (GDV) de las proposiciones que forman su parte antecedente, proponiendo un modelo de proposición temporal borrosa más amplio y genérico.

1.1 MODELO DE REPRESENTACIÓN DE REGLAS TEMPORALES BORROSAS (RTB)

En el modelo de Base de Conocimiento Temporal Borroso (BCTB) propuesto en [2] y [3], se consideran dos estructuras básicas de proposiciones dentro de las RTB: TIPO 1, que involucran una variable no temporal (espacial) y otra temporal (*“Presión es alta en la última hora”*, *“Temperatura es baja a lo largo de la última hora”*) y TIPO 2, que comparan valores espaciales pasados o actuales de dos variables (*“Presión en tanque 1 en la última hora es similar a presión en tanque 2 ahora”*, *“Temperatura en tanque 1 ahora es mucho mayor que temperatura en tanque 2 en los últimos minutos”*) y cuya formulación genérica es la siguiente:

Proposiciones de TIPO 1:

$X \text{ es } A < \text{en} |a_{lo.largo.de}| > T$

Proposiciones de TIPO 2:

$X < \text{en} |a_{lo.largo.de}| > T \text{ es}$

$RB \ Y < \text{en} |a_{lo.largo.de}| > T'$

(1)

donde X, Y son variables lingüísticas espaciales, A es un valor espacial descrito por una distribución de posibilidad, y T, T' son entidades temporales descritas mediante distribuciones de posibilidad. RB es una relación espacial borrosa ("mucho mayor que", "similar", ...) entre X e Y , descrita mediante una distribución de posibilidad bidimensional. La Figura 1 muestra gráficamente la distribución de posibilidad asociada a la relación borrosa "mucho mayor que".

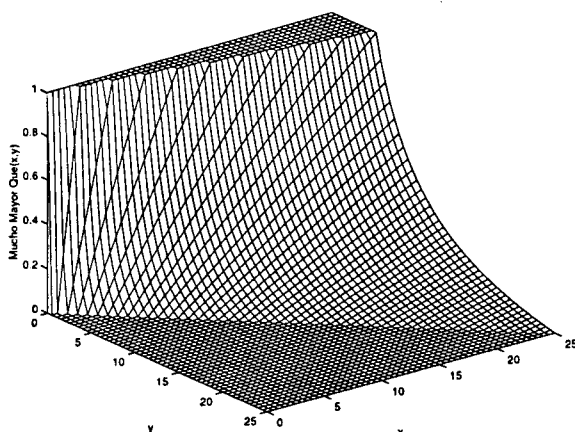


Figura 1: Definición de la distribución de posibilidad asociada a la relación espacial borrosa "mucho mayor que".

Las entidades temporales T descritas en las proposiciones de la BCTB pueden representar tanto instantes como intervalos temporales borrosos ([1, 6]). En un **instante temporal borroso** T la distribución de posibilidad $T(\tau_k)$, $\tau_k \in \tau$, representa la posibilidad de que cada instante puntual τ_k sea el valor preciso de T . Un **intervalo temporal borroso** T es un período de tiempo definido por sus límites o extremos, I (instante borroso inicial) y F (instante borroso final), y su **intervalo de posibilidad** asociado se define como el conjunto borroso conjuntivo de todos los puntos temporales que están posiblemente comprendidos entre I y F . En ambos casos, las distribuciones de posibilidad son normalizadas y unimodales sobre el eje de tiempos τ , que se asume que es un conjunto discreto y totalmente ordenado: $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots\}$, donde cada τ_k representa un instante preciso de tiempo, y τ_0 el

origen. Se asume también que los puntos temporales están equiespaciados, siendo $\Delta = \tau_j - \tau_{j-1}$ la unidad de tiempo, cuyo tamaño se seleccionará dependiendo del contexto, aunque en todo caso permitiendo que toda la base de conocimiento pueda ser ejecutada en una unidad de tiempo.

Consideramos que todas las distribuciones de posibilidad temporales $T(\tau_k)$ se definen en relación al instante puntual de ejecución de la regla, τ_{ahora} (instante actual, ya que asumimos ejecución en tiempo real). Asimismo, las proposiciones no pueden hacer referencia a instantes puntuales situados después del momento de ejecución de la regla τ_{ahora} , que es además la referencia temporal de todas las proposiciones en la parte consecuente de las reglas. Estas restricciones no suponen serias limitaciones en la expresividad para muchas de las aplicaciones prácticas y, sin embargo, simplifican sustancialmente el tratamiento de las RTB.

Cuando una entidad temporal borrosa $T(\tau_k)$ representa un intervalo, se permiten dos construcciones sintácticas básicas: "en T " y "a lo largo de T ". La primera expresión se utiliza con un significado existencial de "en algún punto de" la referencia temporal: cuando basta con que se cumpla la parte espacial " $X \text{ es } A$ " en algún punto temporal de T para que sea cierta la proposición completa. La segunda representa un significado universal de "para todos los puntos de" la referencia temporal: se exige el cumplimiento de la parte espacial durante todo el intervalo.

1.2 EJECUCIÓN DE RTBs

El proceso de ejecución de una RTB sigue los pasos habituales en la ejecución de BCB convencionales: cálculo de un Grado de Verificación (GDV) para cada una de las proposiciones de la parte antecedente de la regla, agregación de los mismos en un GDV global para toda la parte antecedente, y modulación con éste para obtener una distribución de posibilidad asociada a cada una de las variables de la parte consecuente.

Los GDV dependen del instante en que son calculados: deben recalcularse a medida que el instante actual, τ_{ahora} , progresa; por ello, los denotamos por $GDV(\tau_{ahora})$. Teniendo en cuenta que las proposiciones de TIPO 2 (expresión (1)) se pueden descomponer en dos proposiciones de TIPO 1 que se comparan, nos centraremos en este trabajo en estas últimas proposiciones. En cualquier caso, los resultados correspondientes a las proposiciones de TIPO 2 se obtendrían de manera análoga.

Así, en el cálculo del GDV para una proposición de TIPO 1 " $X \text{ es } A \text{ en } T$ " o " $X \text{ es } A \text{ a lo largo de } T$ " intervienen tanto la distribución de posibilidad A como la correspondiente distribución "observada" para la va-

riable X , que denotamos por $\tilde{A}$, junto con la distribución que define la referencia temporal T . Utilizando la definición de [12], el modelo descrito en [2] puede modificarse, planteándolo de una manera más ventajosa desde el punto de vista computacional, y manteniendo a su vez idénticas propiedades cualitativas: en primer lugar, se calcula el grado de compatibilidad espacial (ce) entre A y $\tilde{A}$, el cual cuantifica en qué medida se cumple la parte espacial de la proposición para cada punto temporal τ_k :

$$ce(\tau_k) = \bigoplus_{x \in U} \tilde{A}(\tau_k, x) \odot A(x) \quad (2)$$

donde U es el universo de discurso para la variable X y los operadores $\odot$ y $\oplus$ son, respectivamente, operadores t-norma y t-conorma cualesquiera.

Seguidamente, se tiene en cuenta la persistencia asociada a la proposición, de modo que los valores de la compatibilidad espacial sean modulados de acuerdo con la pertenencia de los respectivos puntos temporales a la referencia temporal T . Esta modulación se realiza de modo diferente según exista persistencia o no en T , tal y como describimos a continuación. Así, teniendo en cuenta los operadores de agregación definidos en [12], puede describirse el cálculo del GDV de la siguiente manera:

- Proposición “ X es A en T ”

$$GDV(\tau_{ahora}) = \bigoplus_{\tau_k \in SUP(T)} ce(\tau_k) \odot T(\tau_k) \quad (3)$$

- Proposición “ X es A a lo largo de T ”

$$GDV(\tau_{ahora}) = \bigodot_{\tau_k \in SUP(T)} ce(\tau_k) \oplus (1 - T(\tau_k)) \quad (4)$$

En estas expresiones, cada valor de compatibilidad espacial es modulado con un valor temporal, que se corresponde con $T(\tau_k)$ para el caso existencial y con $1 - T(\tau_k)$ en el caso universal. Con ello se logra que los valores espaciales correspondientes a instantes puntuales τ_k situados fuera del núcleo de T (valor menor que 1 de la distribución de posibilidad temporal) tengan en cada caso un peso menor, considerando el operador de agregación, que aquellos situados en el núcleo, para los cuales el valor $T(\tau_k)$ será siempre 1. Posteriormente, se realiza un proceso de agregación de estas compatibilidades espaciales ponderadas, sobre todo el soporte ($SUP(T)$) de la distribución temporal, mediante una t-norma si la expresión temporal tiene significado universal a lo largo del intervalo (4), o una t-conorma si el significado de la expresión temporal es existencial (3). Adicionalmente, frente a la propuesta de [2, 3] se

logra una ventaja de índole computacional, por cuanto las operaciones involucradas son menos costosas desde dicho punto de vista.

En la Figura 2 se ilustra el proceso de cálculo del GDV para la proposición “La presión es alta a lo largo de los últimos minutos”. Se muestran las distribuciones de posibilidad observadas para cada punto temporal dentro del soporte. Cada una de ellas presenta un grado de compatibilidad espacial con la distribución correspondiente a “alta”, que es modulado con el valor $(1 - T(\tau_k))$. El proceso de agregación sobre todo el soporte de T se realiza de acuerdo con la expresión (4). En este ejemplo se ha tomado $\oplus$ =máximo y $\odot$ =mínimo.

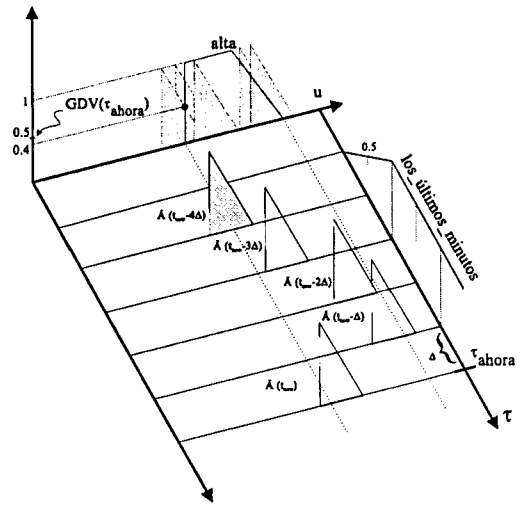


Figura 2: Cálculo del GDV para la proposición “La presión es alta a lo largo de los últimos minutos”.

Cabe destacar la existencia de una cierta flexibilidad en los operadores t-norma y t-conorma, $\odot$ y $\oplus$, que intervienen en las expresiones introducidas, que permite la selección del operador más adecuado en cada caso para el cálculo del GDV y las operaciones de agregación. La elección del operador será un parámetro de diseño, condicionado únicamente por las necesidades específicas del dominio de aplicación.

Este tratamiento de la persistencia temporal en intervalos es, como se deduce de lo expuesto, completamente rígido (“en” - “a lo largo de”), por lo que resulta conveniente dotar al modelo de alguna flexibilidad en este punto, de modo que puedan utilizarse expresiones graduales (“en parte de”, por ejemplo). Dedicaremos las siguientes secciones a presentar el modelo de persistencia continua en intervalos temporales.

2 CUANTIFICACIÓN DE LA PERSISTENCIA TEMPORAL

Con objeto de incrementar la capacidad expresiva de las proposiciones en RTB, consideraremos ahora situaciones intermedias de persistencia de un valor espacial durante un intervalo temporal, de la forma "*X es A en gran parte de T*" (por ejemplo: "*Presión es alta en gran parte de la última hora*"), "*X es A en parte de T*", o con cualquier otro cuantificador relativo de la persistencia, intermedio entre los extremos "*en*" y "*a lo largo de*".

Un modelo de proposición temporal borrosa más general es el siguiente:

$$X \text{ es } A \text{ en } Q \text{ (de) } T \quad (5)$$

siendo Q un cuantificador relativo (en el sentido de [5, 12, 14]), que se define mediante una distribución de posibilidad $Q(p)$, definida sobre el universo de discurso $[0, 1]$, y que describe de forma borrosa el porcentaje (tanto por uno) de puntos dentro del soporte temporal $SUP(T)$ para el que se ha de verificar la condición espacial. Así, en la Figura 3 se muestra de forma cualitativa la definición del cuantificador relativo de persistencia $Q(p)$ para distintos cuantificadores, donde, por ejemplo, al cuantificador "*en gran parte de*" le corresponde una persistencia del valor espacial en torno al 70 por ciento de los puntos del intervalo. Hemos asumido en este caso que la distribución de posibilidad $Q(p)$ viene dada por una función S de Zadeh [13]:

$$Q(p) = S_{Zadeh}(p; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq \alpha \\ 2 \left(\frac{p-\alpha}{\gamma-\alpha} \right)^2 & \text{si } \alpha < p \leq \beta \\ 1 - 2 \left(\frac{p-\gamma}{\gamma-\alpha} \right)^2 & \text{si } \beta < p \leq \gamma \\ 1 & \text{si } p > \gamma \end{cases}$$

aun cuando la definición de $Q(p)$ puede hacerse igualmente mediante una descripción lineal, o con cualquier otra función que se adecúe a las características del dominio concreto. La elección de una u otra función no afectará significativamente al resultado cuantitativo, una vez evaluada la proposición temporal.

La elección de los parámetros concretos α y γ ($\beta = (\alpha + \gamma)/2$) que definen la curva, dentro de este modelo, para cada cuantificador Q dependerá del significado concreto en cada contexto o dominio de aplicación, de modo que se recojan en cada caso matices diferenciados que puede tener la expresión de persistencia.

Una vez caracterizado el tipo de cuantificador continuo de la persistencia en intervalos temporales, el paso

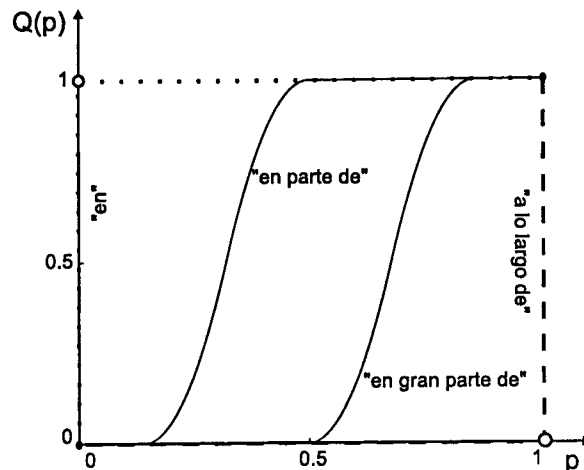


Figura 3: Definición de las distribuciones de posibilidad asociadas a los cuantificadores de la persistencia temporal. La distribución $Q(p) = S_{Zadeh}(p; 0, 0, 0)$ corresponde a la situación de NO persistencia, mientras que $Q(p) = S_{Zadeh}(p; 1, 1, 1)$ describe una situación de persistencia completa en el intervalo temporal que corresponda.

siguiente es aplicar esta definición al proceso de cálculo del GDV de proposiciones temporales borrosas de la forma (5).

Entre los dos casos descritos por las expresiones (3) y (4), tenemos ahora un conjunto de expresiones temporales en las que el significado de persistencia deberá ir pasando de existencial a universal, según el valor de $Q(p)$ que se utilice. Parece pues adecuado implementar esta graduación en la persistencia mediante un nuevo operador de agregación $\mathcal{A}$, de forma que pase de t-conorma (no persistencia, $Q(p) = S_{Zadeh}(p; 0, 0, 0)$) a t-norma (persistencia total, $Q(p) = S_{Zadeh}(p; 1, 1, 1)$). Para ello utilizamos como operador $\mathcal{A}$ un operador compensatorio [9, 15], dependiente de un parámetro $\lambda \in [0, 1]$, que indica el grado de interpolación entre t-norma y t-conorma en cada caso.

Las dos definiciones usuales de operadores compensatorios son [15]:

i) Combinación lineal:

$$\mathcal{A}(a, b) = (1 - \lambda)(a \odot b) + \lambda(a \oplus b) \quad a, b \in [0, 1] \quad (6)$$

ii) Combinación exponencial:

$$\mathcal{A}(a, b) = (a \odot b)^{1-\lambda} \cdot (a \oplus b)^\lambda \quad a, b \in [0, 1] \quad (7)$$

De esta forma se verifica, en cualquiera de los dos casos, que:

- $\lambda = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = \odot$ (cuantificador universal)
- $\lambda = 1 \Rightarrow \mathcal{A} = \oplus$ (cuantificador existencial)

donde $\odot$ y $\oplus$ son, respectivamente, operadores t-norma y t-conorma.

Existen otras propuestas en el ámbito de proposiciones cuantificadas atemporales, cuya posible traslación a RTBs presenta, bien desventajas de tipo computacional (como en [5]), o bien un comportamiento no monótono (como los operadores OWA descritos en [11], al no ser independientes en este caso los criterios que se agregan).

El valor de λ está directamente relacionado con el grado de persistencia que se describe en la proposición y, por tanto, con la distribución de posibilidad $Q(p)$ que lo representa. Así, cuanto mayor sea el grado de persistencia temporal en la proposición, mayor deberá ser el peso de la t-norma en el operador global, y cuanto menor sea, mayor deberá ser el predominio de la t-conorma. Esta relación deberá ser consecuente con las situaciones extremas ($\lambda = 0 \Leftrightarrow Q(p) = S_{Zadeh}(p; 1, 1, 1)$ y $\lambda = 1 \Leftrightarrow Q(p) = S_{Zadeh}(p; 0, 0, 0)$) y realizar una transición gradual entre ellas. Reflejamos esta situación definiendo λ como el área bajo la curva $Q(p)$, que para las funciones S_{Zadeh} resulta ser: $\lambda = \text{area_bajo_}Q(p) = 1 - \beta = 1 - \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Así, tenemos que para el cuantificador existencial (ver Figura 3), el área bajo $Q(p)$ es 1, y para el universal es 0, lo que proporciona los valores extremos de λ deseados. Si, por ejemplo, asumimos que el cuantificador “en gran parte de” viene definido por la distribución de posibilidad $Q(p) = S(p; 0.5, 0.65, 0.8)$, obtenemos $\lambda = 0.35$, es decir, en $\mathcal{A}$ predomina la t-norma sobre la t-conorma a la hora de agregar sobre todos los puntos del soporte, como es de esperar en una situación de persistencia como la de este ejemplo, donde se exige la verificación de la parte espacial sobre un elevado número de puntos en el intervalo (en torno al 70%). Cualquier otro cuantificador de la forma: “en determinada parte de T ”, con “determinada” = “alguna”, “gran”, ..., queda pues modelado a través de la distribución de posibilidad $Q(p)$ (que dependerá del contexto o dominio de aplicación en que se utilice) y el parámetro λ . De forma cualitativa, esta definición coincide con la planteada en [12] para el caso de cuantificación relativa en proposiciones atemporales, donde se define una agregación mediante un operador tipo OWA para el que se evalúa su grado de *orness*.

Otra familia de cuantificadores, que denotaremos por Q' , pueden ser descritos, cualitativamente hablando, como los *contrarios* o *negados* de los anteriores (por ejemplo: “en ningún momento de”, “en menos de la mitad de”, ...). La representación de estos cuantifi-

cadores se realiza igualmente mediante distribuciones de posibilidad $Q'(p)$, donde p representa el porcentaje de puntos dentro del soporte temporal para el que se debe verificar la condición espacial. Sin embargo, su modelización requiere algunas consideraciones adicionales. Así, dependiendo del operador de negación elegido para definir el “contrario”, tendremos dos posibles definiciones para $Q'(p)$ a partir del correspondiente $Q(p)$. La utilización del operador de negación que se describe habitualmente en la bibliografía ([4]) conduciría a definir $Q'(x) = 1 - Q(x)$ lo cual difiere con el propuesto, por ejemplo, en [12]: $Q'(x) = Q(1 - x)$. En la Figura 4 se muestra la definición de algunos de estos operadores.

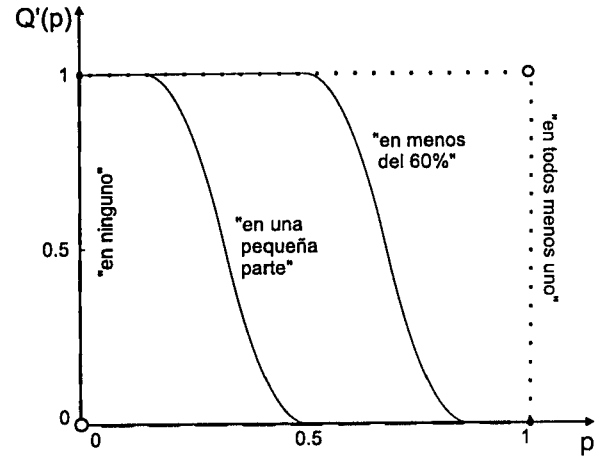


Figura 4: Definición de las distribuciones de posibilidad asociadas a algunos cuantificadores Q' .

Estos cuantificadores pueden conferir cierta ambigüedad semántica a las proposiciones en las que se utilicen, sujeta a diferentes interpretaciones. Por ejemplo, la proposición “La temperatura fue alta en una pequeña parte de los últimos minutos” (ver la correspondiente distribución $Q'(p)$ en la Figura 4), puede interpretarse como “La temperatura fue NO ALTA en una GRAN PARTE de los últimos minutos”, o “La temperatura fue NO ALTA en PARTE de los últimos minutos”. La ambigüedad reside, en este caso, en la definición de la nueva referencia temporal, negada de la inicial, y que proviene del operador de negación que se utilice. Así, para el caso en que $Q'(x) = 1 - Q(x)$, se obtiene que el negado de “en una pequeña parte” es “en parte” ($Q'(p) = 1 - Q(p) = 1 - S_{Zadeh}(p; 0.5, 0.65, 0.8)$), con $\lambda' = \beta = 0.65$, mientras que para $Q'(x) = Q(1 - x)$, el cuantificador negado pasa a ser “en gran parte” ($Q'(p) = Q(1 - p) = S(1 - p; 0.5, 0.65, 0.8)$), y $\lambda' = 1 - \beta = 0.35$.

Ambas interpretaciones se resuelven, en todo caso, considerando el correspondiente cuantificador Q con la nueva parte espacial de la proposición negada (“no

alta”), de manera idéntica a la que se ha planteado en este apartado.

Otro tipo de proposiciones con cuantificación relativa, éstas no modeladas en el presente trabajo, son las que fijan como referencia temporal un intervalo relativo al instante actual pero proyectado desde el pasado (como, por ejemplo, en la proposición “La temperatura fue alta mayoritariamente ANTES de los últimos minutos”). En este caso, la distribución temporal presenta un soporte creciente con el tiempo (ver figura 5), cuya modelización no está recogida en [2, 3], por lo que se sale del ámbito del presente trabajo.

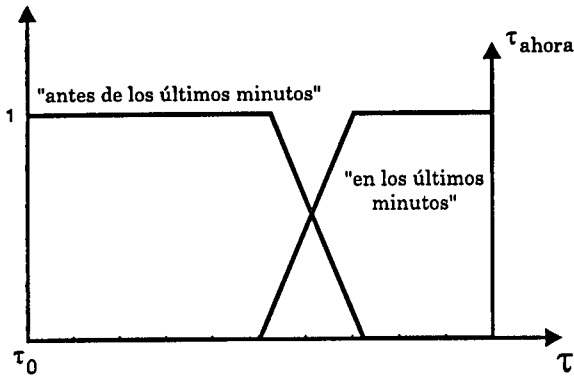


Figura 5: Distribución de posibilidad temporal asociada al intervalo “antes de los últimos minutos”.

A continuación, trataremos el proceso de cálculo del GDV para proposiciones con valores de Q , o de Q' bajo las dos anteriores interpretaciones (basadas en la definición de los “negados”).

3 CÁLCULO DEL GDV MEDIANTE OPERADORES DE AGREGACIÓN COMPENSATORIOS

Presentamos a continuación la expresión final de cálculo del GDV de una proposición que incluya un cuantificador continuo de la persistencia. Esta expresión permite realizar una interpolación entre los casos extremos de persistencia (existencial, descrito en la expresión (3) y universal, descrito en (4)), en función del parámetro λ asociado al cuantificador correspondiente.

Realizando la interpolación mediante un operador compensatorio $\mathcal{A}$ lineal (6), obtenemos que:

$$GDV(\tau_{ahora}) = (1 - \lambda) \left[\bigodot_{\tau_k \in SUP(T)} ce(\tau_k) \oplus (1 - T(\tau_k)) \right] +$$

$$+ \lambda \left[\bigoplus_{\tau_k \in SUP(T)} ce(\tau_k) \odot T(\tau_k) \right] \quad (8)$$

y con un operador compensatorio $\mathcal{A}$ exponencial (7):

$$GDV(\tau_{ahora}) = \left[\bigodot_{\tau_k \in SUP(T)} ce(\tau_k) \oplus (1 - T(\tau_k)) \right]^{(1-\lambda)} \cdot \left[\bigoplus_{\tau_k \in SUP(T)} ce(\tau_k) \odot T(\tau_k) \right]^\lambda \quad (9)$$

En ambos casos, obtenemos una graduación progresiva entre los valores obtenidos para una situación sin persistencia, y una con persistencia a lo largo de todo el intervalo. Ello es debido a que el operador compensatorio $\mathcal{A}$ (lineal o exponencial) tiene un comportamiento estrictamente monótono entre la t-norma $\odot$ y la t-conorma $\oplus$.

Sin embargo, se observan diferencias cuantitativas en los resultados obtenidos en el caso lineal y en el exponencial. El modelo exponencial resulta ser más “pesimista”, en el sentido de que, para una misma entrada (valores espaciales observados a lo largo del intervalo), el GDV obtenido es menor o igual que si se emplea el modelo compensatorio lineal, más “optimista” por tanto.

Asimismo, dentro de uno de los dos tipos de operadores compensatorios (lineal o exponencial), la utilización de las distintas t-normas y t-conormas da lugar a resultados cuantitativamente diferentes, relacionados con el orden de éstas [8]. Así, para una t-norma fija, el mayor resultado se da para la t-conorma “suma drástica” (mayor de las t-conormas), y el menor para la t-conorma “máximo”, siendo el resto de valores decrecientes según el orden decreciente de las t-conormas. Se produce un resultado análogo cuando se fija la t-conorma: el valor más optimista se produce para la t-norma “mínimo”, y el más pesimista, para la t-norma “producto drástico”, siguiendo el orden decreciente de las t-normas. De esta forma, el resultado más optimista globalmente se obtiene con el par de operadores “mínimo-suma drástica” (mayor t-norma, mayor t-conorma), y el más pesimista, con “producto drástico-máximo” (menor t-norma, menor t-conorma). La Figura 6 presenta una representación gráfica de estas situaciones. Aparte de estas consideraciones, no es posible generalizar un criterio de ordenación para todas las combinaciones de operadores, puesto que los resultados numéricos dependen del valor del parámetro λ en cada caso [9].

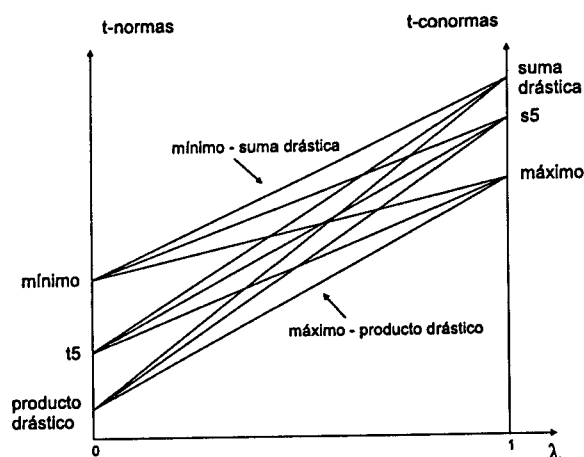


Figura 6: Representación cualitativa del orden de operadores compensatorios lineales para diferentes combinaciones de operadores (entre ellos, los dos casos extremos) y para un ejemplo concreto de proposición temporal. Para interpolación exponencial los resultados son similares, pero siempre con valores menores (o iguales, en los extremos) que en el correspondiente caso lineal. En la figura, $t_5(a, b) = ab/(a + b - ab)$ y $s_5(a, b) = (a + b - 2ab)/(1 - ab)$.

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha descrito un modelo para el cálculo del grado de verificación (GDV) de proposiciones que involucran intervalos temporales borrosos. En éstas debe valorarse el cumplimiento de una condición o expresión espacial dentro del intervalo, tanto en un sentido existencial como universal, pasando por cualquier otro valor intermedio. Los posibles significados de este cumplimiento -que denominamos persistencia sobre el intervalo- se expresan mediante términos como “en, a lo largo de, en gran parte de,...”, que representan, respectivamente, situaciones de no persistencia, persistencia total y persistencia gradual.

En primer lugar, el modelo propuesto describe los cuantificadores de persistencia mediante distribuciones de posibilidad que indican de forma borrosa la cantidad porcentual de puntos temporales para los que se exige el cumplimiento de la proposición espacial. Para la evaluación del GDV de una proposición temporal se utilizan operadores compensatorios [15], en los cuales un parámetro numérico permite modificar el comportamiento del operador entre una t-norma y una t-conorma. Dicho parámetro se relaciona de forma directa y simple con la distribución que describe la expresión de persistencia, de modo que, una vez conocida ésta, es posible obtener el correspondiente operador compensatorio. La elección de los operadores t-norma y t-conorma concretos que lo implementen condiciona

el carácter más o menos “optimista” del proceso de cálculo y permanece como criterio de diseño, debiendo escogerse en función de una mejor adaptación al sistema que se pretende modelar. En este sentido se describe una cierta ordenación parcial de los distintos operadores en cuanto al carácter de los mismos, que está relacionada con el propio orden de las t-normas y t-conormas.

El modelo que hemos presentado se propone para el cálculo del GDV de proposiciones que forman Reglas Temporales Borrosas, aunque en la actualidad nos planteamos continuar con su aplicación, ya iniciada, al ámbito de la cuantificación en reglas no temporales, puesto que presenta ventajas de índole computacional frente a otras propuestas en ese mismo ámbito (por ejemplo, [5]). En el ámbito del razonamiento temporal, nos planteamos afrontar la descripción de proposiciones donde las referencias temporales sean relativas al pasado (“antes de los últimos minutos, ...”). En una siguiente etapa se planteará la formalización completa del proceso y su implementación.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Xunta de Galicia a través de los proyectos de investigación XUGA-20603A95, XUGA20608B97 y por la CICyT a través del proyecto TIC95-0604.

Referencias

- [1] S. Barro, R. Marín, J. Mira y A.R. Patón (1994). A model and a language for the fuzzy representation and handling of time. *Fuzzy Sets and Systems* 61, pp. 153-175
- [2] A. Bugarín, P. Cariñena, P. Félix y S. Barro (1998). Reasoning with Fuzzy Temporal Rules on Petri Nets. En J. Cardoso y H. Scarpelli (Eds.) *Fuzziness in Petri Nets*. Physica-Verlag. (En prensa)
- [3] P. Cariñena, A. Bugarín, S. Fraga y S. Barro (1998). Enhanced Fuzzy Temporal Rules and their Projection onto Fuzzy Petri Nets. *Int. Journal of Intelligent Systems*. (Aceptado y pendiente de publicación)
- [4] A.R. de Soto, E. Trillas y M.J. Herrero (1997). Antónimos y modificadores lingüísticos. *Actas VII Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF'97)*, pp. 7-13
- [5] M. Delgado, D. Sánchez y M.A. Vila (1997). Un enfoque lógico para calcular el grado de cumplimiento de sentencias con cuantificadores lingüísticos. *Actas VII Congreso Español Sobre*

- [6] D. Dubois y H. Prade (1989). Processing fuzzy temporal knowledge. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* **19**, 4, pp. 729-744
- [7] O. Màs, P. Palà y J.M. Miró (1996). Razonamiento aproximado en presencia de conceptos temporales difusos. *Actas VI Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF'96)*, pp. 185-196
- [8] M. Mizumoto (1989). Pictorial Representations of Fuzzy Connectives, Part I: Cases of t-norms, t-conorms and Averaging Operators. *Fuzzy Sets and Systems* **31**, pp. 217-242
- [9] M. Mizumoto (1989). Pictorial Representations of Fuzzy Connectives, Part II: Cases of Compensatory Operators and Self-Dual Operators. *Fuzzy Sets and Systems* **32**, pp. 45-79
- [10] D.Q. Qian (1992). Representation and use of imprecise temporal knowledge in dynamic systems. *Fuzzy Sets and Systems* **50**, pp. 59-77
- [11] R.R. Yager (1988). On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-criteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **18**, pp. 183-190
- [12] R.R. Yager (1992). A General Approach to Rule Aggregation in Fuzzy Logic Control. *Journal of Applied Intelligence* **2**, pp. 333-351
- [13] L.A. Zadeh (1979). A Theory of Approximate Reasoning. En J.E. Hayes, D. Michie y L.I. Mikulich (Eds.) *Machine Intelligence*, Vol. 9. Elsevier, pp. 149-194
- [14] L.A. Zadeh (1983). A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages. *Comp. and Machs. with Appls.* **9**, 1, pp. 149-184
- [15] H.-J. Zimmermann y P. Zysno (1980). Latent Connectives in Human Decision Making. *Fuzzy Sets and Systems* **4**, pp. 37-51

ANÁLISIS DEL GRADO DE SINONIMIA EN UN DICCIONARIO DE SINÓNIMOS

Santiago Fernández Lanza
Área de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Campus Sur s/n
15706-Santiago de Compostela
e-mail: sflanza@usc.es

Alejandro Sobrino Cerdeiriña
Área de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Campus Sur s/n
15706-Santiago de Compostela
e-mail: lfigalex@usc.es

Resumen

En este trabajo se propone un programa Prolog que analiza el grado de sinonimia que poseen dos palabras en un diccionario de sinónimos y su comportamiento cuando son sustituidas en una oración.

Palabras Clave: Sinonimia, diccionario de sinónimos, procesamiento del lenguaje natural, Prolog.

1 INTRODUCCIÓN

Si pretendemos caracterizar la sinonimia tal y como la concibe un humano, inevitablemente deberemos reparar en aspectos como la contextualidad, la subjetividad, la ambigüedad, la imprecisión o el carácter gradual presente en la misma. Ante tal variedad y complejidad de aspectos involucrados, este trabajo pretende hacer, en vez de un análisis teórico de la sinonimia, un estudio empírico. Dicho estudio se basará en el análisis de un diccionario de sinónimos. Se utilizará el *Diccionario de sinónimos y antónimos de la lengua española* de Samuel Gili Gaya [4]. En el cual, la información relativa a la sinonimia, se estructura de la siguiente forma: palabra, lista de palabras sinónimas, acepción. Por ejemplo, la palabra "concesión" posee la lista de sinónimos {"permiso", "licencia", "gracia", "privilegio"} en la primera acepción y {"epítrope"} en la segunda.

El objetivo usual del manejo de un diccionario de este tipo es buscar los sinónimos de una palabra para sustituirla por otra en una oración. Ahora bien, si concebimos la sinonimia como una cuestión de grado, la sustitución conlleva el riesgo de que la nueva palabra no signifique exactamente lo mismo, y esto puede afectar al contenido informativo de la oración completa.

Una característica importante de los diccionarios de sinónimos es que para definir un término se utiliza una simple lista de palabras. Por tanto, para ver si dos términos están relacionados, se comparan dos listas de palabras. Si la sinonimia es una cuestión de grado y se representa como una lista el conjunto de sinónimos de una palabra, la cuestión que se plantea a continuación es cómo medir el grado de sinonimia entre dos palabras. En [5] se establece un coeficiente que se interpreta como la asociación entre dos listas de sinónimos. Utilizaremos

este coeficiente para medir el grado de sinonimia $GRS(a, b)$ entre dos palabras a y b :

$$GRS(a, b) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

donde A y B son, respectivamente, las listas de sinónimos de a y b . El tratamiento en Prolog del lenguaje natural por medio de listas, permitirá hallar mecánicamente este grado.

En el contexto de un diccionario de sinónimos caben plantearse distintos aspectos relacionados con el tema que nos ocupa y que serán tenidos en cuenta en la elaboración del trabajo:

1.- El problema de la polisemia. Las palabras pueden poseer varios significados o acepciones según el contexto de uso. Esto hace que podamos comparar cada palabra teniendo en cuenta el conjunto genérico de sus sinónimos o bien solamente acepciones concretas, adecuadas a un uso determinado. Esta propuesta parece más oportuna, ya que evita la interferencia de otras acepciones en la decisión de la sinonimia de dos palabras cuando se utilicen en un contexto concreto.

2.- La reflexividad de la sinonimia. Los diccionarios de sinónimos no incluyen, evidentemente, el caso trivial de que, fijada una acepción, una palabra sea sinónima de sí misma. Sin embargo, este hecho puede llevar a situaciones como ésta: en [4] figura solamente la palabra "pernil" como único sinónimo de "pernera" y la palabra "pernera" como único sinónimo de "pernil" en la segunda acepción. Si comparamos ambas palabras según esas acepciones, la intersección de ambos conjuntos de sinónimos es vacía, con lo que el grado de sinonimia medido con la fórmula expresada anteriormente sería 0, resultado contraintuitivo. Una forma de evitar esto es incluir el caso trivial de la palabra idéntica en el conjunto de sinónimos de una palabra. En nuestro ejemplo, el conjunto de sinónimos de "pernera" sería {"pernera", "pernil"} y el de la segunda acepción de "pernil" {"pernil", "pernera"}; de esta forma el resultado sería, como cabría esperar, que son sinónimas en grado 1.

3.- La simetría de la sinonimia. Es usual atribuir la propiedad simétrica a la sinonimia, pero si observamos un diccionario de sinónimos, en muchos casos dicha propiedad no se da; es decir, a veces una palabra A tiene a otra B en la lista de sus sinónimos, pero no a la inversa.

2 SINONIMIA ENTRE PALABRAS

A continuación presentaremos un programa Prolog que calcula el grado de sinonimia entre las palabras de un diccionario de sinónimos. Los ejemplos pertenecen a [4]. La medida se realiza acepción por acepción, de tal forma que dadas dos palabras A y B, el compilador fijará la primera acepción de A y comprobará que B pertenece a la lista de sinónimos de A en esa acepción, calculará el grado de sinonimia que posee A en esa acepción con todas las acepciones de B y seleccionará la acepción de B cuyo grado de sinonimia sea mayor. Después repetirá el mismo proceso con las demás acepciones de A hasta agotarlas.

Se puede ver un diccionario de sinónimos como una base de datos de palabras (entradas) y listas de palabras (sinónimos) agrupadas por acepciones. Utilizaremos el siguiente predicado:

`sin_dic(Palabra, Lista_sinónimos, Acepción)` para representar la información del diccionario. El primer argumento del predicado `sin_dic` es la entrada del diccionario, el segundo la lista de sus sinónimos y el tercero la acepción que corresponde al grupo de sinónimos. Veamos un ejemplo, que recoge varias entradas de [4]:

`%SINÓNIMOS DEL DICCIONARIO`

```
sin_dic(concesion, [concesion, permiso, licencia, gracia, privilegio], 1).
sin_dic(concesion, [concesion, epitrope], 2).
```

```
sin_dic(permiso, [permiso, autorizacion, consentimiento, licencia, venia, beneplacito, aquiescencia], 1).
```

```
sin_dic(licencia, [licencia, permiso, autorizacion, consentimiento, venia, concesion], 1).
sin_dic(licencia, [licencia, abuso, osadia, atrevimiento, desenfreno, libertinaje], 2).
```

```
sin_dic(gracia, [gracia, beneficio, favor, merced, don, regalo], 1).
sin_dic(gracia, [gracia, perdon, indulto], 2).
sin_dic(gracia, [gracia, benevolencia, amistad, afabilidad, agrado], 3).
sin_dic(gracia, [gracia, garbo, donaire, sal, salero, angel, atractivo, encanto], 4).
sin_dic(gracia, [gracia, chiste, agudeza, ocurrencia], 5).
```

```
sin_dic(privilegio, [privilegio, prerrogativa, concesion], 1).
```

```
sin_dic(epitrope, [epitrope, permission], 1).
sin_dic(epitrope, [epitrope, concesion], 2).
```

El procedimiento general para calcular el grado de sinonimia entre dos palabras consiste en los siguientes pasos. Dadas dos palabras A y B:

- 1.- Tómesese la lista de sinónimos de A en la primera acepción, a lo que llamaremos ListaA.
- 2.- Compruébese que B pertenece a ListaA.

2.1.- Si no pertenece a ListaA, realizar el paso 1 con la siguiente acepción de A. Si ya se comprobaron todas las acepciones de A y la negativa persiste, entonces A y B no son sinónimas.

2.2.- Si pertenece a ListaA, pasar a 3.

3.- Tómesese la lista de sinónimos de B en la primera acepción ListaB y calcúlese el grado mediante la fórmula:

$$\text{GradoAcep1} = \frac{|ListaA \cap ListaB|}{|ListaA \cup ListaB|}$$

4.- Repítase el paso 3 con todas las acepciones de B.

5.- Calcúlese el máximo de los grados obtenidos en 4 y su correspondiente acepción. Este grado máximo es el grado de sinonimia entre A y B.

El predicado `sinónimo` calcula el grado de sinonimia entre dos palabras:

`sinónimo(A, AcepA, B, AcepB, GRS)`

este predicado se puede leer como, la palabra A en la acepción AcepA es sinónima de la palabra B en la acepción AcepB con grado GRS.

El predicado se define de la siguiente forma:

- 1.- Cualquier palabra es sinónima de sí misma en grado 1 si pertenece al diccionario y su acepción no varía.
- 2.- Dos palabras distintas son sinónimas en un grado GRS si

- fijada una acepción de la primera, la segunda pertenece al listado de sinónimos de aquella, y
- Lista1 es la lista de todos los grados que se pueden obtener variando todas las acepciones de la segunda palabra, y
- Lista2 es la lista de todas las acepciones que corresponden respectivamente a los grados calculados en el punto anterior, y
- GRS_MAX es el máximo de los grados de Lista1 y AcepB es la acepción correspondiente a ese grado.

El código es el siguiente:

`%SINONIMIA ENTRE PALABRAS`

```
sinonimo(A, X, A, Y, 1.0) :-
```

```
    sin_dic(A, Z, X),
    X=Y.
```

```
sinonimo(A, AcepA, B, AcepB, GRS_MAX) :-
```

```
    comparable(A, B, AcepA),
    findall(GRS, sin_acep(A, AcepA, B, Acep, GRS), Lista1),
    findall(Acep, sin_acep(A, AcepA, B, Acep, GRS), Lista2),
    max(Lista2, AcepB, Lista1, GRS_MAX).
```

El predicado `comparable` nos permite comprobar que una palabra está en la lista de sinónimos de otra, una vez fijada determinada acepción de esta última. Así

`comparable(A, B, AcepA)`

se lee: la palabra A es comparable con otra B en determinada acepción AcepA de A.

El predicado determina que dos palabras son comparables, fijada una de las acepciones de la primera, si

- X es la lista de sinónimos de la primera para la acepción AcepA, y
- la segunda es uno de los elementos de X.

```
%COMPARABILIDAD ENTRE PALABRAS
comparable(A,B,AcepA):-
    sin_dic(A,X,AcepA),
    miembro(B,X).
```

El predicado `miembro` es usual en el tratamiento de listas en Prolog, e indica si determinado elemento pertenece o es miembro de una lista:

```
miembro(Elemento, Lista)
```

Un elemento pertenece o es miembro de una lista, si

- 1.- es su cabeza, o
- 2.- es miembro de la cola.

En Prolog esto puede expresarse así:

```
%PERTENENCIA A UNA LISTA
miembro(A,[A|_]).
miembro(A,[_|C]):-
    miembro(A,C).
```

El máximo de los grados con la correspondiente acepción se calcula mediante el predicado

```
max(Lista_Acepciones, AcepB, Lista_Grados, GRS_MAX)
```

cuyo primer argumento es una lista de acepciones, el segundo la acepción correspondiente al mayor grado, el tercero es una lista de grados y el cuarto el mayor de los grados. El predicado opera de la siguiente manera:

- 1.- El máximo de una lista con un solo elemento es ese elemento tanto para las acepciones como para los grados.
- 2.- Si las listas tienen más de un elemento, compruébese si el primer elemento de la lista de los grados es mayor o igual al segundo. En caso afirmativo elimínese el segundo de ellos en ambas listas.
- 3.- Si el primero no es mayor o igual al segundo, elimínese el primero.
- 4.- Repítase este proceso hasta que sólo quede un elemento en ambas listas.

```
%MÁXIMO DE LOS GRADOS DE UNA LISTA Y ACEPCIÓN
CORRESPONDIENTE A ESE GRADO MÁXIMO
max([B],B,[A],A).
max([D,E|F],Y,[A,B|C],X):-
    A >= B,
    max([D|F],Y,[A|C],X),
    !.
max([D,E|F],Y,[A,B|C],X):-
    max([E|F],Y,[B|C],X).
```

El predicado `sin_acep` hace el cálculo para dos acepciones concretas de dos palabras

```
sin_acep(A, AcepA, B, AcepB, GRS)
```

Una palabra A en la acepción AcepA es sinónima de una B en la acepción AcepB en un grado GRS si

- no es el caso que A coincida con B (esto evita que el compilador haga el cálculo del grado de sinonimia de dos palabras iguales dentro de una misma acepción, puesto que el resultado será trivialmente 1)
- X es la lista de los sinónimos de A para la acepción AcepA
- Y es la lista de los sinónimos de B para la acepción AcepB
- U es la unión de X e Y

- I la intersección de X e Y
- NU la cardinalidad de la unión U
- NI la cardinalidad de la intersección I
- el grado de sinonimia GRS es NI/NU, y
- GRS es distinto de 0 (esto evitará que el compilador, dada una palabra, dé como resultado palabras que no son sinónimas de ella, es decir, palabras cuyo grado de sinonimia con la primera sea 0).

```
%SINONIMIA ENTRE ACEPCIONES
sin_acep(A,AcepA,B,AcepB,GRS):-
    not(A=B),
    sin_dic(A,X,AcepA),
    sin_dic(B,Y,AcepB),
    union(X,Y,U),
    inter(X,Y,I),
    card(U,NU),
    card(I,NI),
    GRS is (NI/NU),
    GRS \== 0.
```

Si en lugar de `GRS \== 0` se pone `GRS >= N` (se lee GRS mayor o igual a N), donde N es un número real entre 0 y 1, estaremos fijando un umbral por debajo del cual el compilador no admitirá a las palabras como sinónimas.

El predicado `unión` establece el resultado de la unión de dos listas y posee tres listas como argumentos:

```
unión(Lista1, Lista2, ListaResultado)
```

El predicado se define de la siguiente manera:

- 1.- La unión de la lista vacía con cualquier lista es la misma lista.
- 2.- Si la primera lista no es vacía, compruébese que la cabeza no pertenece a la segunda, en caso de ser así, el resultado será la segunda lista con ese elemento añadido.
- 3.- Si la cabeza de la primera lista pertenece a la segunda lista no se añada dicho elemento.
- 4.- Repítase el proceso con los demás elementos hasta agotar la primera lista.

El código es el siguiente:

```
%UNIÓN DE LISTAS
union([],X,X).
union([A|B],Y,[A|Z]):-
    not(miembro(A,Y)),
    union(B,Y,Z),
    !.
union([A|B],Y,Z):-
    union(B,Y,Z).
```

El predicado `inter` establece el resultado de la intersección de dos listas y posee igualmente tres listas como argumentos:

```
inter(Lista1, Lista2, ListaResultado)
```

El predicado se define de la siguiente manera:

- 1.- La intersección de la lista vacía con cualquier lista, resulta ser la lista vacía.
- 2.- Si la primera lista no es vacía compruébese que la cabeza pertenece a la segunda, en caso de ser así, añádase la cabeza a la lista del resultado.
- 3.- Si la cabeza de la primera lista no pertenece a la segunda lista no se añada dicho elemento.

4.- Repítase el proceso con los demás elementos hasta agotar la primera lista.

El código es el siguiente:

```
%INTERSECCIÓN DE LISTAS
inter([],X, []).
inter([A|B],Y,[A|Z]):-
    miembro(A,Y),
    inter(B,Y,Z),
    !.
inter([A|B],Y,Z):-
    inter(B,Y,Z).
```

El predicado `card` indica el número de elementos de una lista. Su primer argumento es una lista y el segundo un número natural que corresponde a la cardinalidad de la lista:

```
card(Lista, Cardinalidad)
```

El predicado se define de la siguiente manera:

- 1.- El número de elementos de la lista vacía es 0.
- 2.- El número de elementos de una lista no vacía se obtiene sumándole 1 al número de elementos de esa lista, pero sin su cabeza.

El código es el siguiente:

```
%NÚMERO DE ELEMENTOS DE UNA LISTA
card([],0).
card([A|B],C):-
    card(B,E),
    C is E + 1.0.
```

2.1 VERBALIZACIÓN DEL GRADO DE SINONIMIA ENTRE PALABRAS

Como se ha visto, el grado de sinonimia se expresa con un número real entre 0 y 1. Pero a un usuario le puede resultar más transparente una verbalización lingüística que un grado. Una manera inmediata y sencilla de hacer esto es utilizando un predicado análogo al anteriormente explicitado, pero que en lugar de proporcionar un grado de sinonimia proporcione una verbalización:

```
sino_verb(A, AcepA, B, AcepB, Verbalización)
```

donde A y B son palabras, AcepA y AcepB son sus respectivas acepciones y Verb es la etiqueta lingüística que corresponde al grado de sinonimia. La estructura del predicado es la siguiente:

- 1.- La verbalización del grado de sinonimia es "palabras idénticas" si tanto las palabras como las acepciones coinciden y pertenecen al diccionario.

- 2.- Dadas dos acepciones concretas de dos palabras, Verb es la verbalización de su grado de sinonimia si:

- GRS es el grado de sinonimia entre ambas palabras para dichas acepciones,
- las palabras no son iguales, y
- ese grado GRS se verbaliza como Verb.

```
%VERBALIZACIÓN DEL GRADO DE SINONIMIA ENTRE PALABRAS
sino_verb(A,AcepA,A,AcepA,palabras_identicas):-
    sin_dic(A,X,AcepA).
sino_verb(A,AcepA,B,AcepB,Verb):-
    sinonimo(A,AcepA,B,AcepB,GRS),
    not(A=B),
```

```
verbaliz(GRS,Verb).
```

El predicado `verbaliz` asocia una verbalización a determinado grado de sinonimia,

```
verbaliz(Grado_de_sinonimia, Verbalización)
```

Su primer argumento es un grado (número real entre 0 y 1) y el segundo la palabra que verbaliza dicho grado. El criterio para la distribución de los intervalos de cada verbalización es arbitrario; lo único que se persigue con esto es establecer un procedimiento razonable para que la respuesta del compilador sea más atractiva. Con tal objetivo se propone la siguiente distribución de los intervalos:

- 1.- Todo grado mayor que 0 y menor o igual a 0.25 se verbaliza con la etiqueta "muy poco sinónimos",
- 2.- Todo grado mayor que 0.25 y menor o igual a 0.5 con "poco sinónimos",
- 3.- Todo grado mayor que 0.5 y menor o igual a 0.75 con "bastante sinónimos", y
- 4.- Todo grado mayor que 0.75 y menor o igual a 1 con "muy sinónimos".

El siguiente código permite hacer esto:

```
%VERBALIZACIÓN DE LOS GRADOS
verbaliz(Grado,muy_poco_sinonimos):-
    Grado > 0,
    Grado <= 0.25.
verbaliz(Grado,poco_sinonimos):-
    Grado > 0.25,
    Grado <= 0.5.
verbaliz(Grado,bastante_sinonimos):-
    Grado > 0.5,
    Grado <= 0.75.
verbaliz(Grado,muy_sinonimos):-
    Grado > 0.75,
    Grado <= 1.0.
```

2.2 EJEMPLOS DE SINONIMIA ENTRE PALABRAS

Podemos ahora preguntar cuál es el grado de sinonimia entre dos palabras pertenecientes al diccionario, como "licencia" y "concesión". Una consulta de ese tipo se formula de la siguiente manera:

```
sinonimo(concesion,Acep_concesion,licencia,Acep_licencia,Grado).
```

Como es usual en Prolog, las palabras en mayúsculas se toman como variables que el programa debe instanciar al responder. El compilador respondería:

```
Acep_concesion = 1
Acep_licencia = 1
Grado = 0.375
```

Asimismo, podremos preguntar qué palabras son sinónimas de "concesión", indicando las acepciones de ambas palabras y el grado de sinonimia entre ellas. Esta consulta se formula así:

```
sinonimo(concesion,Acep_concesion,Y,Acep_Y,Grado).
```

y el compilador daría la siguiente respuesta:

```
Acep_concesion = 1      Acep_concesion = 1
Y = Concesion          Y = gracia
Acep_Y = 1             Acep_Y = 2
Grado = 1.0            Grado = 0.142857
```

```

Acep_concesion = 2      Acep_concesion = 1
Y = concesion           Y = privilegio
Acep_Y = 2              Acep_Y = 1
Grado = 1.0             Grado = 0.333333

Acep_concesion = 1      Acep_concesion = 2
Y = permiso             Y = epitrope
Acep_Y = 1              Acep_Y = 2
Grado = 0.2             Grado = 1

Acep_concesion = 1
Y = licencia
Acep_Y = 1
Grado = 0.375

```

Con el predicado `sino_verb` podemos hacer la primera de las consultas anteriores:

```
sino_verb(concesion,Acep_concesion,licencia,Acep_licencia,Verb).
obteniendo la verbalización del grado de sinonimia de
ambas palabras:
```

```

Acep_concesion = 1
Acep_licencia = 1
Verb = poco_sinonimos

```

3 SINONIMIA ENTRE ORACIONES

Si concebimos la sinonimia como una cuestión de grado, ¿cómo afecta al grado de sinonimia de dos oraciones la sustitución de una palabra por su sinónima?. En lo sucesivo intentaremos establecer una serie de propuestas que den cuenta de esta cuestión.

Dos oraciones son sinónimas con un grado de sinonimia GRS si sus palabras coinciden o son sinónimas en ese grado respectivamente. Cuando dos oraciones difieren en dos o más palabras y estas son sinónimas, para calcular el grado de sinonimia de ambas oraciones utilizaremos el producto de los grados de sinonimia de esas palabras respectivamente.

Considerando a una oración como una lista, tal y como es usual en el tratamiento del lenguaje natural mediante Prolog, el predicado `orac_sin` expresa la sinonimia entre oraciones:

```
orac_sin(Oración1, Oración2, Grado_de_sinonimia, Acep1, Acep2)
```

Los dos primeros argumentos son listas donde se incluirán oraciones del lenguaje natural, el tercero es el grado de sinonimia entre ambas oraciones, el cuarto es una lista cuyos elementos serán las palabras sustituidas en la primera oración seguidas de la acepción correspondiente y el quinto lo mismo que el cuarto pero para la segunda oración. El predicado tiene la siguiente estructura:

- 1.- La lista vacía es sinónima de la lista vacía en grado 1.
- 2.- Si las cabezas son iguales respectivamente en las listas que representan la primera y segunda oración, entonces el grado de sinonimia no variará.
- 3.- Si las cabezas no son iguales, entonces:
 - si son sinónimas, en la penúltima lista se incluirá la cabeza de la primera oración seguida de la acepción que la hace sinónima de la cabeza de la segunda; en la última lista se incluirá la cabeza de la segunda oración

seguida de la acepción que la hace sinónima de la primera.

- multiplíquese el grado de sinonimia que la oración tenga en ese momento por el grado de sinonimia de las cabezas.

4.- Repítase el procedimiento anterior con todas las palabras de las oraciones.

```

% SINONIMIA ENTRE ORACIONES
orac_sin([],[],1.0,[],[]).
orac_sin([A|B],[A|D],X,Y,Z):-
    orac_sin(B,D,X,Y,Z).
orac_sin([A|B],[C|D],Y,[A,Acep_A|W],[C,Acep_C|Q]):-
    sinonimo(A,Acep_A,C,Acep_C,Z),
    orac_sin(B,D,X,W,Q),
    Y is X*Z.

```

3.1 SINONIMIA ENTRE ORACIONES FIJANDO LAS ACEPCIONES

Cuando empleamos palabras en una oración usualmente lo hacemos con una acepción concreta (salvo que estemos haciendo un uso del lenguaje distinto del común, por ejemplo un uso literario). Aunque no siempre es el caso, la oración suele darnos pistas sobre cuál de las acepciones de determinada palabra se está empleando en ella. Otras veces tendremos que recurrir a otro tipo de información extralingüística para dilucidar este problema.

Pueden proponerse algunos criterios para detectar cuál de las acepciones de una palabra es la empleada en una oración. Dichos criterios no deben ser demasiado estrictos porque no son aplicables a la totalidad de los casos. Algunos de ellos pueden ser los siguientes:

- 1.- Si en una misma oración aparecen dos palabras que son sinónimas respectivamente en determinadas acepciones, es muy probable que dichas acepciones sean las utilizadas en la oración.
- 2.- Muchas veces, determinadas palabras, que no tienen porque ser sinónimas de una dada, son indicio de que dicha palabra se está empleando en determinada acepción. Por ejemplo, la palabra "banco" tiene en castellano varias acepciones, como "entidad financiera", "asiento para varias personas" o "grupo extenso de peces"; pero si en determinada oración aparece junto a palabras como "dinero", "cheque", "crédito", "préstamo", etc. será un buen indicio de que "banco" se está empleando en la primera de las acepciones.

3.1.1 Primer criterio para fijar las acepciones

Para dar cuenta del primero de los criterios utilizaremos el siguiente predicado:

```
orac_sinonima(Oración1,Oración2,Grado_de_sinonimia,Acep1,Acep2)
```

Este predicado está formado por los mismos argumentos que `orac_sin`, pero tiene en cuenta que la existencia de determinadas palabras en la oración pueden fijar las acepciones de otras. Su estructura es la siguiente:

- 1.- Una oración A es sinónima de otra B (fijando las acepciones) si:
 - Z es la lista de acepciones de palabras fijadas en A,
 - A es sinónima de B, y

- ni Z ni la lista de acepciones de B son vacías (esto evita que el programa proporcione como respuesta el caso trivial de que dos oraciones idénticas son sinónimas en grado 1 con las listas de acepciones de A y B vacías).

2.- Cuando en la oración no hay ninguna palabra que fije las acepciones de ninguna otra, entonces la lista de acepciones de A es vacía; en este caso la respuesta del sistema debe combinar todas las acepciones de las palabras sin fijar ninguna.

El código es el siguiente:

```
% SINONIMIA ENTRE ORACIONES FIJANDO LAS
ACEPCIONES
orac_sinonima(A,B,GR,Z,Y):-
    acep_orac_orac(A,A,Z),
    orac_sin(A,B,GR,Z,Y),
    not(Z = []),
    not(Y = []).
orac_sinonima(A,B,GR,W,Y):-
    acep_orac_orac(A,A,Z),
    Z = [],
    orac_sin(A,B,GR,W,Y),
    not(W = []),
    not(Y = []).
```

El predicado `acep_orac_orac` es el que nos permite comprobar si se pueden asociar todas las palabras de una oración con todas las palabras de otra. Eventualmente, en nuestro caso, esta segunda oración será la misma que la primera, aunque pudiera no ser así si lo que queremos es fijar las acepciones de las palabras de una oración con respecto a otras oraciones distintas a la dada. El predicado posee tres listas como argumentos:

`acep_orac_orac(Oración, Oración, Lista_de_acepciones)`

En las dos primeras listas se incluirán oraciones (eventualmente la misma) y en la tercera palabras seguidas de las acepciones fijadas.

1.- Si la primera lista es vacía, la lista de acepciones también lo es.

2.- Si la primera lista no es vacía,

- fíjense las acepciones de la cabeza de la primera lista con las palabras de la segunda,
- verifíquese que el resultado del punto anterior no sea la lista vacía (es decir, que ninguna de las palabras de la segunda lista se puedan asociar con la cabeza de la primera); y
- elimínense las acepciones que se repiten,
- inclúyase en la lista de acepciones la cabeza de la primera lista seguida de la acepción fijada.

3.- En caso de no cumplirse 2, si la primera lista no es vacía,

- fíjense las acepciones de la cabeza de la primera lista con las palabras de la segunda,
- verifíquese que el resultado del punto anterior no sea la lista vacía (es decir, que ninguna de las palabras de la segunda lista se puedan asociar con la cabeza de la primera); y
- elimínense las acepciones que se repiten,

- si el resultado asocia varias acepciones, inclúyase en la lista de acepciones la cabeza de la primera lista seguida de una variable (con lo cual el programa proporcionará todas las combinaciones de acepciones, ya que no hay forma de decidir cual de las acepciones asociadas es la empleada en la oración),

4.- Repítase el proceso con las demás palabras hasta agotar la primera lista.

El código es el siguiente:

```
% FIJANDO LAS ACEPCIONES DE UNA LISTA CON OTRA
acep_orac_orac([],X,[]).
acep_orac_orac([A|B],X,[R,S|Y]):-
    acep_pal_orac(A,X,Z),
    not(Z = []),
    quitar_rep(Z,[R,S]),
    acep_orac_orac(B,X,Y),
    !.
acep_orac_orac([A|B],X,[A,K|Y]):-
    acep_pal_orac(A,X,Z),
    not(Z = []),
    quitar_rep(Z,W),
    not(num(W,2)),
    acep_orac_orac(B,X,Y),
    !.
acep_orac_orac([A|B],X,Y):-
    acep_orac_orac(B,X,Y).
```

El predicado `acep_pal_orac` es el que, dada una palabra y una oración, proporciona una lista de las acepciones de la palabra que resultan de asociarla con las palabras de la oración. En el resultado aparece la palabra inicial seguida de la acepción empleada en la asociación, repitiéndose esto tantas veces como asociaciones se hayan realizado. Sus argumentos son una palabra, una lista donde incluiremos una oración y una lista donde se incluirá la palabra con las acepciones que resultan de las asociaciones realizadas.

`acep_pal_orac(Palabra, Oración, Lista_de_acepciones)`

La estructura del predicado es la siguiente:

1.- Si tenemos una palabra y la lista vacía, la lista de las acepciones será la lista vacía.

2.- Si tenemos una palabra y una lista no vacía, añádase a la lista de acepciones la palabra A seguida de la acepción correspondiente `AcepA` si,

- A y la cabeza de la lista son distintas, y
- A y la cabeza de la lista son asociables para `AcepA`.

3.- Repítase el proceso hasta agotar la lista.

```
% FIJANDO LAS ACEPCIONES DE UNA PALABRA CON UNA
LISTA
acep_pal_orac(A,[],[]).
acep_pal_orac(A,[B|C],[A,AcepA|E]):-
    not(A=B),
    asocia(A,B,AcepA),
    acep_pal_orac(A,C,E),
    !.
acep_pal_orac(A,[B|C],D):-
    acep_pal_orac(A,C,D).
```

Cuando en la oración hay varias palabras asociables con la primera para la misma acepción, en la última lista aparecerá la acepción tantas veces como asociaciones se

hayan hecho. Para evitar la repetición de acepciones, utilizaremos el predicado `quitar_rep`, cuyos dos argumentos son listas:

`quitar_rep(Lista_con_repetición, Lista_sin_repetición)`

El primer argumento es la lista con acepciones repetidas y el segundo la lista sin repetición de acepciones. La estructura es la siguiente:

1.- La eliminación de las repeticiones en la lista vacía es la lista vacía.

2.- Si la lista no es vacía eliminense los dos primeros elementos si coinciden respectivamente con los dos siguientes.

3.- Repítase el proceso anterior chequeando los elementos de la primera lista dos a dos hasta agotarla.

`%ELIMINACIÓN DE ACEPCIONES REPETIDAS`

`quitar_rep([], []).`

`quitar_rep([A, AcepA, B, AcepB|C], [B, AcepB|D]) :-`

`[A, AcepA] = [B, AcepB],`

`quitar_rep([B, AcepB|C], [B, AcepB|D]),`

`!.`

`quitar_rep([A, AcepA|C], [A, AcepA|D]) :-`

`quitar_rep(C, D).`

El predicado `asocia` empleado en `acep_pal_orac` nos permite asociar palabras. Este predicado está formado por dos palabras y una acepción correspondiente a la primera palabra:

`asocia(A, B, Acep_A)`

Asociaremos dos palabras:

- cuando la primera en determinada acepción sea sinónima de la segunda en cualquier acepción en cierto grado, o
- la segunda en cualquier acepción sea sinónima de la primera en determinada acepción en cierto grado.

`%ASOCIACIÓN DE PALABRAS PARA EL PRIMER CRITERIO`

`asocia(A, B, AcepA) :-`

`sinonimo(A, AcepA, B, AcepB, GR);`

`sinonimo(B, AcepB, A, AcepA, GR).`

3.1.2 Segundo criterio para fijar las acepciones

Para dar cuenta del segundo de los criterios que fijan las acepciones en una oración, se necesita crear otra base de datos que sea capaz de asociar determinadas palabras con otras y fijar las acepciones de estas últimas. Una opción podría ser considerar que verbos como "tener" indican que se está utilizando la primera acepción de "concesión" y verbos como "emplear" indican que se usa la segunda. Luego podríamos crear una nueva base de datos donde apareciesen predicados como el siguiente:

`%ASOCIACIÓN DE PALABRAS PARA EL SEGUNDO CRITERIO`

`asocia(concesion, tengo, 1).`

`asocia(concesion, empleo, 2).`

`...`

Es evidente que sería válida toda conjugación del verbo "tener" y "emplear" en cualquier tiempo, modo, número y persona. Los predicados, `quitar_rep`, `acep_pal_orac`, `acep_orac_orac` y

`orac_sinónima` son análogos a los definidos para el criterio anterior. El predicado `asocia` definido allí debe ser sustituido por la base de datos de arriba.

3.2 VERBALIZACIÓN DEL GRADO DE SINONIMIA ENTRE ORACIONES

Tal y como se ha hecho para la sinonimia entre palabras podemos definir un predicado que en lugar de proporcionar el grado numérico de sinonimia, dé una verbalización del mismo. Es el siguiente:

`orac_sinónima_verb(Oración1, Oración2, Verbalización, Acep1, Acep2)`

Este predicado está formado por dos oraciones, la verbalización del grado de sinonimia entre ellas y dos listas que contienen las acepciones fijadas en la primera y segunda oración respectivamente. Opera de la siguiente manera:

Verb es la verbalización del grado de sinonimia de dos oraciones si:

- GRS es el grado de sinonimia entre ambas, y
- GRS se verbaliza como Verb.

El código es el siguiente:

`%VERBALIZACIÓN DEL GRADO DE SINONIMIA ENTRE ORACIONES`

`orac_sinónima_verb(A, B, Verb, W, Y) :-`

`orac_sinónima(A, B, GRS, W, Y),`

`verbaliz(GRS, Verb).`

3.3 EJEMPLOS DE SINONIMIA ENTRE ORACIONES

Podemos preguntar el grado de sinonimia de dos oraciones:

`orac_sinónima([el, chico, tiene, licencia], [el, chico, tiene, concesion], GR, Y, Z).`

a lo que el compilador contestará:

`GR = 0.375`

`Y = [licencia, 1]`

`Z = [concesion, 1]`

Si preguntamos ahora:

`orac_sinónima([el, que, tiene, licencia, tiene, concesion], [B, Grado, X, Y]).`

veremos que el sistema fija la acepción 1 de "licencia" y la acepción 1 de "concesión" debido a que ambas palabras aparecen en la oración y son asociables en esas acepciones:

`B = [el, que, tiene, licencia, tiene, concesion]`

`Grado = 1`

`X = [licencia, 1, concesion, 1]`

`Y = [licencia, 1, concesion, 1]`

`B = [el, que, tiene, licencia, tiene, permiso]`

`Grado = 0.2`

`X = [licencia, 1, concesion, 1]`

`Y = [licencia, 1, permiso, 1]`

`B = [el, que, tiene, licencia, tiene, licencia]`

`Grado = 0.375`

`X = [licencia, 1, concesion, 1]`

`Y = [licencia, 1, licencia, 1]`

`...`

```
B = [el, que, tiene, permiso, tiene, concesion]
Grado = 0.625
X = [licencia, 1, concesion, 1]
Y = [permiso, 1, concesion, 1]
```

...

Utilizando ahora el código definido para el segundo criterio podemos hacer la siguiente consulta:

```
orac_sinonima([yo, tengo, concesion], B, Grado, X, Y).
con lo que podemos observar como el sistema fija la
acepción 1 de "concesión":
```

```
B = [yo, tengo, concesion]   B = [yo, tengo, gracia]
Grado = 1                   Grado = 0.142857
X = [concesion, 1]           X = [concesion, 1]
Y = [concesion, 1]           Y = [gracia, 2]
```

```
B = [yo, tengo, permiso]     B = [yo, tengo, privilegio]
Grado = 0.2                   Grado = 0.333333
X = [concesion, 1]           X = [concesion, 1]
Y = [permiso, 1]             Y = [privilegio, 1]
```

```
B = [yo, tengo, licencia]
Grado = 0.375
X = [concesion, 1]
Y = [licencia, 1]
```

Si probamos lo mismo con la oración "empleo una concesión en el texto":

```
orac_sinonima([empleo, una, concesion, en, el, texto],
B, Grado, X, Y).
```

el compilador fijará la acepción 2 de "concesión":

```
B = [empleo, una, concesion, en, el, texto]
Grado = 1
X = [concesion, 2]
Y = [concesion, 2]
```

```
B = [empleo, una, epitrope, en, el, texto]
Grado = 1
X = [concesion, 2]
Y = [epitrope, 2]
```

Con el predicado `orac_sinonima_verb` podemos hacer la primera consulta:

```
orac_sinonima_verb([el, chico, tiene, licencia], [el,
chico, tiene, concesion], Verb, Y, Z).
```

obteniendo como respuesta:

```
Verb = poco_sinonimos
Y = [licencia, 1]
Z = [concesion, 1]
```

4 CONCLUSIONES

Se ha propuesto un programa Prolog que analiza el grado de sinonimia entre las palabras de un diccionario de sinónimos y como la sustitución de dos palabras sinónimas en una oración puede afectar al grado de sinonimia entre la oración original y aquella en la que se ha sustituido la palabra.

Como sucede frecuentemente cuando se trata con problemas relativos al lenguaje natural, las cuestiones tienen un dominio tan extenso que pueden provocar fluctuaciones respecto a los resultados ofrecidos aquí. Se

pueden usar otras funciones para medir el grado de sinonimia, fijar un umbral por debajo del cual no se discrimine o adoptar otros criterios de verbalización. En cualquier caso, la sinonimia es un tema que se ha estudiado relativamente poco y este trabajo ha pretendido elucidar sólo algunos aspectos relativos a su procesamiento computacional.

Referencias

- [1] CHIERCHIA, G.; McCONNELL-GINET (1990) *Meaning and Grammar. An Introduction to Semantics*, MIT Press.
- [2] COVINGTON, M. A. (1994) *Natural Language Processing for Prolog Programmers*, Prentice-Hall.
- [3] CRUSE, D. A. (1997) *Lexical Semantics*, Cambridge U. P.
- [4] GILI GAYA, S. (1997) *Diccionario Avanzado de Sinónimos y Antónimos de la Lengua Española*, VOX (reimpresión octubre 1997).
- [5] SPARCK JONES, K. (1986) *Synonymy and Semantic Classification*, Edinbúrg U. P.
- [6] TRILLAS, E. (1993) Apunte sobre la Indistinguibilidad; *Theoria*, Vol. VIII, Nº 19, pp. 23-49.
- [7] TRILLAS, E.; LÓPEZ DE MÁNTARAS, R. (1984) Towards a Measure of the Degree of Synonymy; SÁNCHEZ, E. (ed.) *Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis*, Pergamon Press.

APLICACIÓN DE LA LÓGICA BORROSA AL CÁLCULO DE DISTANCIAS ENTRE COMPONENTES REPRESENTATIVOS DE UN DOMINIO EN UN PROCESO GLOBAL DE ANÁLISIS DE DOMINIOS

Irene Díaz Rodríguez
Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid
sirene@inf.uc3m.es

Manuel Velasco de Diego
Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid
velasco@ia.uc3m.es

Jose Manuel Molina López
Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid
molina@ia.uc3m.es

Resumen

El objetivo de este trabajo es obtener información sobre la proximidad o lejanía de los términos (descriptores) que son representativos de un determinado dominio, para así poder deducir relaciones entre dichos descriptores. Para ello se define una distancia difusa que permite establecer relaciones conceptuales entre descriptores. Los descriptores son representados simbólicamente por vectores. Dado que la naturaleza de la relación entre los descriptores no es exacta, es necesario definir una distancia que recoja la información semántica de dicha relación. La distancia borrosa propuesta permite establecer el valor de la relación de forma conceptual, en función de valores numéricos relativos a los vectores. En la experimentación que se ha realizado, se han seleccionado un conjunto de 13 descriptores representativos de un dominio de inteligencia artificial. Los resultados reflejan que esta distancia borrosa obtiene valores más representativos para el problema tratado que los métodos tradicionales de cálculo de distancias, que no recogen, en ningún caso, toda la información de que disponemos.

Palabras Clave: Análisis de Dominios, Clasificación, Descriptor, Distancia, Inferencia Borrosa, Relación Borrosa

1 INTRODUCCIÓN

Las técnicas de clasificación de información utilizan habitualmente métodos en los que se deben medir distancias entre dos vectores que representan dicha información [5]. Estas distancias se utilizan básicamente para determinar hasta que punto se parece la información que estamos tratando. Si el problema tratado no es demasiado formal, debido fundamentalmente a que la naturaleza del problema no suele ser exacta, puede ocurrir que el uso de una distancia usual, por ejemplo, la distancia euclídea, no proporcione buenos resultados,

debido a que estas distancias no tienen en cuenta toda la información disponible. En estos casos resulta beneficioso utilizar un sistema basado en el conocimiento para construir una distancia que recoja toda la información disponible y que, por tanto, mejore los resultados obtenidos con las distancias tradicionales. Este tipo de distancias borrosas se han utilizado en campos como el procesado de imágenes estereoscópicas para calcular distancias entre puntos de diferentes imágenes [1].

El tema abordado en este trabajo es la construcción y validación de una metodología para hacer análisis de dominios [3]. El análisis de dominios fue introducido por Jim Neighbors [4] del siguiente modo: "*Actividad de identificar objetos y operaciones de una clase de sistemas similares en un dominio del problema específico*". El análisis de dominios contiene las claves para una práctica efectiva, formal y sistemática de la reutilización de software. Mediante el análisis de dominios, el conocimiento sobre el dominio se transforma en especificaciones, diseños y arquitecturas susceptibles de ser reutilizadas al desarrollar nuevas aplicaciones software dentro del dominio específico.

Para representar el dominio se realiza un proceso de construcción global que consta de las siguientes fases: Plan del proyecto y caracterización del dominio (se realiza una selección y descripción del dominio así como una identificación de datos relevantes del dominio en estudio, una creación de un inventario de datos y, finalmente un plan del proyecto), adquisición de componentes del dominio, análisis de datos (en esta fase se trata la información obtenida en la recogida de datos del dominio, los datos se verifican para asegurar la corrección, consistencia y completitud; los datos irrelevantes se descartan y los importantes se organizan. Esta es en realidad la primera fase del análisis de dominios), clasificación de componentes y evaluación del modelo del dominio [6].

La fase de clasificación intenta relacionar las descripciones que se consideran similares. Las características comunes más relevantes en cada grupo se vuelven a abstraer por medio de otras descripciones, esta

vez en el ámbito del grupo. Estas nuevas descripciones se vuelven a clasificar y generalizar. El resultado de estas abstracciones está organizado en jerarquías.

Para clasificar la información se utilizan métodos estadísticos, neuronales o bibliométricos que, aunque no fueron concebidos para ello, permiten obtener estas relaciones. En concreto, se dispone, al inicio del proceso [5], de un conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_m\}$ los cuales representan la información relativa a m descriptores. Cada componente x_{ij} de un vector x_i representa el número de apariciones del descriptor (término representativo del dominio) i en el documento j . Se desea obtener el conjunto de clases $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ en las que se pueden agrupar estos vectores. El problema es que a priori no sabemos como se distribuyen los vectores en clases ni tan siquiera cuantas clases habrá.

La mayoría de estos métodos utilizados se basan en la minimización de algún índice. Este proceso implica el uso de una distancia. En este trabajo se propone el uso de una distancia difusa [2], resultado de aplicar un sistema de reglas borroso que mejore los resultados obtenidos con una distancia usual. Esta mejora viene dada por el hecho de que la naturaleza de la propia información no es exacta y de que se aprovecha mejor toda la información de que disponemos.

2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

A continuación vamos a definir una distancia difusa que nos permita clasificar el conjunto de vectores $\{x_1, \dots, x_m\}$ en n clases α_i $i=1, \dots, n$. Cada vector que vamos a manejar representa las ocurrencias de un descriptor en cada uno de los documentos de que disponemos, es decir, tenemos vectores $x_i = \{x_{ij}\}_{j=1, \dots, m}$ donde x_{ij} representa el número de veces que aparece el descriptor i en el documento j .

Utilizando un sistema experto para construir la distancia difusa adecuada a nuestro problema, podemos utilizar información que se despreciaría si se utilizara una distancia usual, y que, sin embargo, es fundamental para una resolución satisfactoria del problema. De este modo, consideramos como variables de entrada al sistema borroso la pertenencia a un documento, la media y la varianza del valor absoluto de las diferencias de las componentes de dos vectores cualesquiera.

2.1 PERTENENCIA DE UN DESCRIPTOR A UN DOCUMENTO

Es interesante saber si dos descriptores están relacionados en algún sentido, es decir si dos descriptores son sinónimos, uno es genérico o específico de otro, o si están relacionados de algún otro modo, por ejemplo porque

traten del mismo tema. Por esta razón, una de las entradas a nuestro sistema borroso será las coincidencias de los ceros. Se supone que los descriptores que están en un mismo documento "tratan" del mismo tema, o al menos de temas parecidos. Por esta razón, es significativo que una componente de un vector sea 0, ya que esto indica si un descriptor está o no en un documento; definimos "coincidencia" como sigue:

Dados dos vectores x_i y x_j decimos que una de sus componente k cualquiera coincide sii

$$\begin{aligned} x_{ik} = x_{jk} &= 0 \\ \text{o} \\ x_{ik} \neq 0 \cap x_{jk} &\neq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

El número de estas coincidencias será una entrada a nuestro sistema, discriminando así descriptores que están en distintos documentos. A priori es razonable ya que dos términos que están en distintos documentos tienen menor probabilidad de estar relacionados en algún sentido. Merece la pena notar que lo importante no es que un término esté en muchos o pocos documentos, es decir que tenga muchas componentes iguales o distintas de cero, lo que realmente importa es que dos descriptores estén o no estén en el mismo documento y lo que se cuenta es en cuantos documentos están simultáneamente los dos descriptores considerados.

2.2 MEDIA Y VARIANZA DE LAS DISTANCIAS

Del mismo modo que la pertenencia o no de un descriptor a un documento resulta fundamental para poder decidir si dos términos son o no parecidos, también lo es la diferencia entre el número de ocurrencias de dos descriptores para cada documento, ya que si esta diferencia es muy grande los descriptores probablemente no estarán relacionados. Se representa, de forma matemática, esta diferencia por la norma $\|\cdot\|_{1, \mathcal{D}}$. Obviamente, esta norma crecerá según aumente el número de documentos. Por esta razón ponderamos esta cantidad con el número de documentos, así para cada par de vectores x_i, x_k calculamos:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_{ij} - x_{kj}| \quad (2)$$

Si μ es pequeña, significa que los vectores son próximos, ya que su diferencia en media lo es.

Consideramos además la varianza de estas diferencias porque permite afinar más el parecido entre dos descriptores. Si el valor de σ^2 es pequeño los vectores serán más afines porque sabremos que componente a componente los descriptores se parecen más, es decir sabremos si documento a documento el número de

ocurrencias de cada descriptor es parecido o no. Para cada par de vectores x_i, x_k calculamos :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (|x_{ij} - x_{kj}| - \mu)^2 \quad (3)$$

3 SISTEMA BORROSO

En esta sección vamos a definir el sistema borroso que utilizaremos para obtener la distancia, concretando las variables de entrada y salida, y las reglas [7].

3.1 VARIABLES LINGÜÍSTICAS DE ENTRADA

El número de coincidencias, m , debe estar entre 0 y n (número de documentos). Teniendo en cuenta que el número de documentos debe ser suficientemente grande, establecemos los siguientes conjuntos difusos:

- **Nada Coincidentes (NC):** Este conjunto recoge el caso en el que apenas haya coincidencias, siendo números próximos a 0. En este caso, los dos descriptors en estudio no están simultáneamente en casi ningún documento.
- **Coincidentes (Co):** Aproximadamente en la mitad de los documentos hay coincidencia de ceros, los descriptors van empezando a parecerse.
- **Muy Coincidentes (MC):** Este conjunto borroso recoge el caso de coincidencia total o casi total de los dos vectores, entendiéndose por coincidencia la definición de la ecuación (1).

La representación gráfica de los conjuntos anteriores se puede ver en la Figura 1.

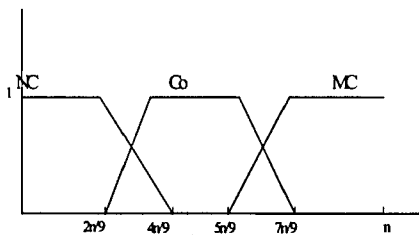


Figura 1. Etiquetas de la Variable Lingüística "Pertenencia a un documento"

Para poder construir los conjuntos difusos que definen la variable lingüística "media del valor absoluto de la diferencia de cada componente", debemos conocer el rango de valores que puede tomar dicha variable; teniendo en cuenta que $|x_{ik} - x_{jk}|$ es un número positivo $\forall i, j, k$, sabemos que el valor mínimo que puede tomar μ es 0, aunque este valor sólo se toma si todas las diferencias son

nulas, es decir si hay una coincidencia total, para cada documento, del número de apariciones de los dos descriptors que este considerando. Para encontrar una cota superior, se debe tener en cuenta de nuevo que estamos promediando números positivos, entonces tenemos

$$\sum_{j=1}^n |x_{ij} - x_{kj}| \leq n \cdot \max_{j=1, \dots, n} |x_{ij} - x_{kj}| \quad (4)$$

luego

$$\mu \leq \max_{i,k} \max_{j=1, \dots, n} |x_{ij} - x_{kj}| = p \quad \text{para } i, k = 1, \dots, m = \text{número de descriptors} \quad (5)$$

Consideramos entonces los siguientes conjuntos borrosos:

- **Pequeña (P):** Este conjunto recoge el caso en el que los descriptors son parecidos, ya que

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |x_{ij} - x_{kj}| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n |x_{ij} - x_{kj}| < \varepsilon n \Rightarrow |x_{ij} - x_{kj}| < \varepsilon n$$

$$\text{para } \varepsilon < 1 \quad (6)$$

En este caso, como vemos, las componentes de cada vector serían próximas, es decir, los términos que se están considerando aparecerían un número de veces parecido en los documentos.

- **Intermedia (Me):** Este conjunto borroso deberá recoger la situación en la que los descriptors tienen algún tipo de relación, aunque ésta sea vaga.
- **Alta (A):** Este conjunto recoge el caso en el que los vectores no se parecen prácticamente nada en cuanto al número de ocurrencias en cada documento, lo que induce a pensar que los descriptors no tienen ninguna relación o muy poca.

Su representación gráfica se muestra en la Figura 2.

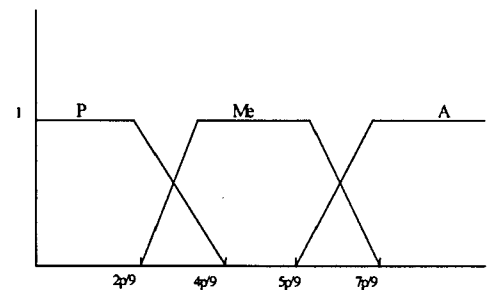


Figura 2. Etiquetas de la Variable Lingüística "Media"

Para la varianza asociada a la media anterior, como en el caso de ésta, debemos conocer el rango de valores que puede tomar la varianza. Al ser ésta siempre positiva,

sabemos que el valor mínimo que puede tomar es 0, aunque este valor sólo se podría tomar en el caso de que las diferencias entre las apariciones de los dos descriptores que se consideren fuera constante para todos los documentos. Para encontrar una cota superior utilizamos la siguiente regla:

$$(a - b)^2 \leq a^2 \text{ si } a > 0, b > 0 \quad (7)$$

Entonces tenemos:

$$\sum_{j=1, \dots, n} (|x_{ij} - x_{kj}|)^2 \leq \sum_{j=1, \dots, n} (|x_{ij} - x_{kj}|)^2 \leq n \cdot \max_{j=1, \dots, n} |x_{ij} - x_{kj}|^2 \quad (8)$$

Tomamos entonces como cota superior $q = \max_{i,k} \max_{j=1, \dots, n} |x_{ij} - x_{kj}|^2$ para cada par de términos (i,k) que considere.

Consideramos conjuntos borrosos análogos a los del caso anterior, cuya representación gráfica se puede ver en la Figura 3.

- **Pequeña (P):** Conjunto borroso que recoge el caso de descriptores muy uniformes, es decir, pares de descriptores en los que la diferencia entre sus componentes es casi igual para cada componente. Expresado matemáticamente:

$$\text{dist}(|x_{ij} - x_{kj}|, \mu) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \forall j = 1, \dots, p \quad (9)$$

- **Media (Me):** Conjunto borroso que recoge el caso en el que las diferencias varían de una componente a otra.
- **Alta (A):** Este conjunto recoge el caso de diferencias muy grandes entre la diferencia de ocurrencias de un documento a otro.

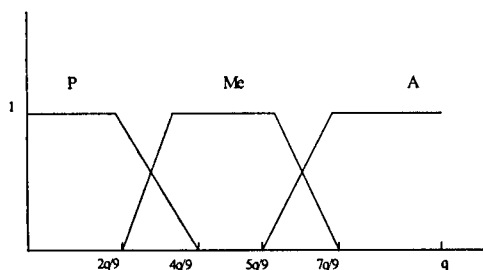


Figura 3. Etiquetas de la Variable Lingüística "Varianza"

3.2 VARIABLE LINGÜÍSTICA DE SALIDA

La salida es un valor que nos indica lo próximos que son entre sí dos vectores, cuanto mayor sea este número que obtengamos, menor será la relación existente entre los vectores de entrada y, por lo tanto, entre los descriptores

sobre los que estamos intentando inferir una posible relación.

Para calcular los conjuntos borrosos de salida debemos saber el rango dentro del que estará la distancia que queremos calcular. La distancia euclídea, que es con la que vamos a contrastar nuestra distancia se define como

$$d(x_i, x_k) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_{kj})^2} \quad (10)$$

para cada par de descriptores (i,k) que considere.

Esta distancia, utilizando

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \leq \sqrt{n} \cdot \max_k a_k \quad (11)$$

se puede acotar

$$d(x_i, x_k) \leq \sqrt{n} \cdot \max_{i,k} \max_j |x_{ij} - x_{kj}| = \alpha \quad (12)$$

Consideramos entonces los siguientes conjuntos borrosos para la variable lingüística de salida cuya representación gráfica se puede ver en la Figura 4.

- **Pequeña:** Si la variable de salida pertenece a este conjunto indicará que los vectores son muy próximos, y, por lo tanto, que están relacionados.
- **Media:** Si la variable de salida pertenece a este conjunto indicará que los vectores son relativamente próximos, habrá una relación débil.
- **Alta:** Si la variable de salida pertenece a este conjunto indicará que los vectores no son y, por tanto, no están relacionados.

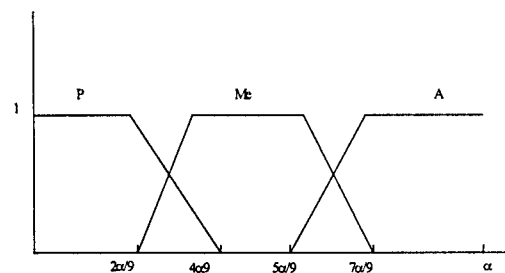


Figura 4. Etiquetas de la Variable Lingüística "Distancia"

3.3 OBTENCIÓN DE LAS REGLAS

A partir de las variables de entrada, que tendrán un cierto valor de pertenencia a cada conjunto borroso de entrada, buscaremos las mejores reglas que nos den para cada tupla los valores de pertenencia a cada conjunto borroso de salida. Como tenemos tres variables de entrada, cada una de ellas pertenece a tres conjuntos borrosos distintos en mayor o menor grado, obtendremos 3^3 situaciones distintas. Debemos determinar a qué conjunto borroso de salida pertenece cada una de estas situaciones. Como ejemplo proponemos a continuación dos reglas:

• SI M es A & V es A ENTONCES D es A:

Si la media y la varianza son altas, la distancia es alta independientemente del número de coincidencias que haya, ya que los descriptores que se están comparando no aparecen un número de veces similar, ni tienen una distribución más o menos uniforme en los documentos.

Matemáticamente:

$Si \mu \in A \Rightarrow \exists k = 1, \dots, n / |x_{ik} - x_{jk}| \in A$ lo que significa que al menos en un documento habrá muchos más descriptores de uno de los dos tipos i o j .

Del mismo modo

$Si \sigma^2 \in A \Rightarrow$ Los valores $|x_{ik} - x_{jk}|$ están lejos de μ , es decir, estas diferencias entre las apariciones del descriptor i y el j no son uniformes a lo largo de cada documento k , para cada $k=1, \dots, n$.

• SI M es A & C es PC ENTONCES D es A.

Si la media es alta y el número de coincidencias es pequeño, la distancia será alta independientemente de como sea la varianza, esto es debido a que si el número de coincidencias es pequeño, los descriptores en estudio no aparecerán simultáneamente en casi ningún documento, unido con el hecho de que cuando aparecen, el número de apariciones es muy dispar.

En la Figura 5 se muestra el conjunto de reglas.

Coincidencias PC				
Media	P	Me	Me	A
	Me	Me	A	A
	A	A	A	A
		P	Me	A
Varianza				

Coincidencias Co				
Media	P	P	Me	Me
	Me	Me	Me	A
	A	Me	A	A
		P	Me	A
Varianza				

Coincidencias MC				
Media	P	P	P	Me
	Me	P	Me	Me
	A	Me	Me	A
		P	Me	A
Varianza				

Figura 5. Reglas del Sistema Borroso

4 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En la experimentación que se ha realizado para contrastar el método tradicional de cálculo de distancias mediante la norma euclídea y el sistema borroso presentado en esta comunicación se ha tomado un conjunto de artículos, escritos en inglés, publicados en congresos y revistas internacionales por componentes del Grupo de Vida Artificial del Departamento de Informática de la Universidad Carlos III de Madrid. A partir de los descriptores filtrados en el subproceso de adquisición de componentes se ha seleccionado un conjunto de 13, entre los descriptores más representativos. Este conjunto está formado por los descriptores (algorithm, centroids, classifiers, color, experiment, fuzzy, images, learning, objects, robot, sensor, task, vision).

La tabla 1 presenta las distancias obtenidas para cada par de descriptores mediante los dos métodos. En la mitad inferior de la tabla se muestran las distancias euclídeas y en la mitad superior aparecen las distancias obtenidas mediante el sistema borroso. Los valores que aparecen en las distancias obtenidas con el sistema borroso representan si los términos son próximos entre sí o no. A partir de aquí se puede empezar a clasificar términos.

Entre las conclusiones obtenidas merecen destacarse las siguientes:

- Los resultados obtenidos concuerdan, esto es, si la distancia borrosa obtenida es "alta", en ningún caso la distancia euclídea es un valor pequeño próximo a cero. y recíprocamente. Esta concordancia es fundamental, ya que en otro caso, esta experimentación no tendría sentido.
- El sistema borroso mejora los resultados obtenidos en el cálculo de las distancias cuando la distancia euclídea sea elevada. Los resultados se amplifican, de tal forma que puede asegurarse que los dos descriptores no pertenecen al mismo grupo.
- Puede deducirse el mismo hecho en el caso de que la distancia euclídea tome valores bajos, ya que el sistema borroso consigue una compresión de los resultados, que en el caso de valores bajos se reducen al valor cero. Son estos casos los que pueden tomarse como representativos de descriptores próximos o similares en cuanto a significado, bien sea semántico o temático.

	algor	centr	class	colo	expe	fuzz	imag	learn	objec	robot	sens	task	visio
Algorithm		0	0	0	1750	5847	84	0	0	8000	8000	7352	0
Centroids	16.9		0	0	0	8000	0	1750	1750	8000	8000	8000	0
Classifiers	12.3	9.5		0	0	5696	0	0	0	8000	8000	8000	0
Color	17.2	15.1	13.9		0	4013	0	1750	0	8000	8000	8000	0
Experiment	20.2	14	13.3	18		8000	0	0	0	8000	8000	8000	0
Fuzzy	43.3	49.4	47.4	38.5	48.8		3319	4551	1305	8000	8000	8000	7635
Images	19.6	18.4	17.3	3.7	20.9	36.4		1750	0	8000	8000	8000	0
Learning	10	16	9	19.2	14	47.3	494		0	5781	5680	8000	1750
Objects	12.8	14.1	10.7	5.9	16	39.9	77	14.7		8000	8000	5945	0
Robot	74.2	87.4	82	87.5	81	86.6	88.8	73.1	83.2		8000	8000	8000
Sensor	88.6	88.7	88.2	89.4	88.6	84.4	90	88.2	88.8	118		0	8000
Task	88.1	87.2	87.2	87.8	87.8	83.4	88.3	87.9	87.5	121.3	6.8		8000
Vision	16.3	9.4	8.3	7.3	13.7	44	10.9	15.6	7.1	87.3	88.6	87.1	

Tabla 1 Distancias entre descriptores.

5 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Jiménez, F.J., Molina, J.M., Casar, J.R., "A Fuzzy Reasoning System for Binocular Scene Matching", *Proc. IEEE Workshop on NonLinear Signal/Image Processing*, pp 309-312. Greece, June 1995
- [2] Klir, Folger, "Fuzzy Sets, Uncertainty and Information", Prentice-Hall, 1992.
- [3] Lloréns, J., Velasco, M., Moreiro, J. A., Martínez, V. & Amescua, A.: "Automatic Domain Analysis using Thesaurus Structures". Aceptado para publicación (cód 97056) en el Journal of the American Society of Information Science, Marzo 1998.
- [4] Neighbors, J.: "Software Construction using Components". Ph. D. Thesis. Department of Information and Computer Science. University of California, Irvine. 1981.
- [5] Velasco, M., & Martínez Orga, V.: "Generación Automática de Representaciones de Dominios". II Jornadas en Ingeniería de Software. JIS97. San Sebastián. Spain. 1997.
- [6] Velasco, M., Martínez, V., Lloréns, J. & Amescua, A.: "Automatic Domain Analysis: Generation of Domain Representations". Aceptado en el congreso IT-KNOWS 98. Viena-Budapest Septiembre 1998.
- [7] Zimmermann, H. J., "Fuzzy Set Theory and its Applications", Kluwer Academic Publishers, 1990.

EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS EN IMÁGENES DIFUMINADAS MEDIANTE LÓGICA BORROSA

M.J. Martín
Dpto. Informática
Univ. Carlos III de Madrid
martin@163.117.136.62

J.M. Molina
Dpto. Informática
Univ. Carlos III de Madrid
molina@ia.uc3m.es

P. Isasi
Dpto. Informática
Univ. Carlos III de Madrid
isasi@ia.uc3m.es

A. Sanchis
Dpto. Informática
Univ. Carlos III de Madrid
masm@inf.uc3m.es

Resumen

En este trabajo se desarrolla un sistema borroso para la extracción de bordes en imágenes que contienen una alta variabilidad en la escala de grises. En este tipo de imágenes, las técnicas tradicionales deben ser ajustadas manualmente para obtener una imagen resultado lo más detallada posible. El ajuste manual de los parámetros de los algoritmos tradicionales se ha evitado mediante la definición de un sistema de reglas que contiene el conocimiento de un experto en tratamiento de imágenes. Este conocimiento sobre cómo definir un punto como borde a partir de los valores de sus vecinos más próximos lleva asociada una incertidumbre que se ha formalizado mediante técnicas borrosas.

Palabras Clave: Tratamiento de Imágenes, Detección de Bordes, Automatización de Procedimientos, Sistemas Borrosos.

1 INTRODUCCIÓN

El tratamiento de imágenes es un campo de trabajo donde los métodos de tratamiento dependen muy fuertemente del proceso de adquisición de la imagen. En muchos casos esta imagen tiene una calidad que dificulta este tratamiento. Esto es así sobre todo en las aplicaciones que desean detectar con mucha nitidez un borde en imágenes que se encuentran muy difuminadas. En estos casos el ojo humano es capaz de detectar el borde de la imagen porque conoce previamente el contorno y la forma de lo que busca dentro de la imagen. Este es el caso de las aplicaciones que deben trabajar en el campo de las imágenes radiológicas. Muchos problemas médicos

requieren del análisis de imágenes radiológicas a partir de las cuales obtener los síntomas para determinar la enfermedad [1]. En este tipo de problemas el experto debe analizar algunas características de la imagen, para extraer la información que le permita diagnosticar una enfermedad. El desarrollo de un sistema automático de evaluación de síntomas para la detección de enfermedades se apoya en cuatro subsistemas principales: adquisición, extracción de características, tratamiento de dichas características y análisis final.

El resultado del segundo subsistema, la extracción de características, es una imagen simplificada que contiene únicamente los principales rasgos de la imagen que se necesitan para su posterior tratamiento [2]. Esta imagen simplificada es muy útil cuando se trata de encontrar relaciones entre las características o formas particulares (como círculos) ya que se ha desechado la mayor parte de la imagen y el tercer subsistema puede trabajar a un nivel de conceitualización superior.

Los métodos clásicos de extracción de características en procesamiento de imagen necesitan un ajuste previo. Este ajuste se debe a la necesidad de afinar un conjunto de parámetros que aparecen en el algoritmo de extracción para que la extracción obtenga unos resultados lo suficientemente buenos como para poder automatizar el tratamiento posterior [3]. Generalmente cuando se trata con imágenes radiológicas este problema es muy acusado ya que no sólo se trata de los colores difuminados de la imagen sino que además entra en consideración la forma en que ha sido tomada la imagen ya que el paciente difícilmente se encontrará exactamente siempre en la misma posición. En estos casos el experto trabaja con la herramienta y según se ha obtenido la imagen ajusta manualmente los parámetros para obtener un conjunto de características con las que el procesamiento posterior pueda trabajar. Por lo tanto para conseguir un sistema que sea automático totalmente se debe desarrollar una aplicación

que sea capaz de extraer las características de una imagen utilizando un procedimiento lógico que permita el ajuste de un conjunto de reglas que determinan el conocimiento del experto en ese tipo de imágenes y que no necesite de un reajuste cada vez que se utiliza la aplicación.

En este trabajo se presenta un sistema borroso [4] que permite extraer un conjunto de características de una imagen radiológicas. El sistema desarrollado ha sido aplicado sobre un problema real que se describe en la sección 2. En la sección 3 se describe el sistema desarrollado y en la sección 4 se muestran resultados con el sistema sobre diferentes imágenes. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La evaluación de imágenes radiológicas requiere de información subjetiva sobre los objetos que aparecen en ella, de manera que un experto puede observar sobre la imagen difuminada de tonos grises un conjunto de formas que determinan un determinado síntoma. Evidentemente el análisis de estas imágenes no busca una representación de objetos dentro de la imagen sino más bien una definición de contornos y posiciones relativas. En este trabajo se presenta un análisis sobre radiografías de perros de raza. En particular de la forma de los huesos que tienen estos perros, ya que mediante un estudio detallado de las formas de los huesos se puede determinar la pureza de la raza del animal y a partir de dicha pureza establecer la genealogía del animal. Los criadores de perros de raza necesitan un índice de pureza para establecer que animales pueden reproducirse y con qué pareja buscando la eliminación de impurezas en la raza.

En particular el sistema debe determinar si la forma de la cabeza del fémur sigue una línea curvilínea. Cuanto más perfecta es la similitud entre la cabeza del fémur y una circunferencia más pura es la raza del animal. El problema aquí es la determinación de "la cabeza del fémur", ya que dicha cabeza se encuentra en una radiografía, ver Figura 1, donde la "cabeza" se muestra con un borde muy difuminado. Actualmente este tipo de decisiones son tomadas por los veterinarios mediante el ajuste de la imagen radiológica que pueden observar en la radiografía y un conjunto de plantillas de curvas, tratando de ajustar el borde del hueso a una de las plantillas.

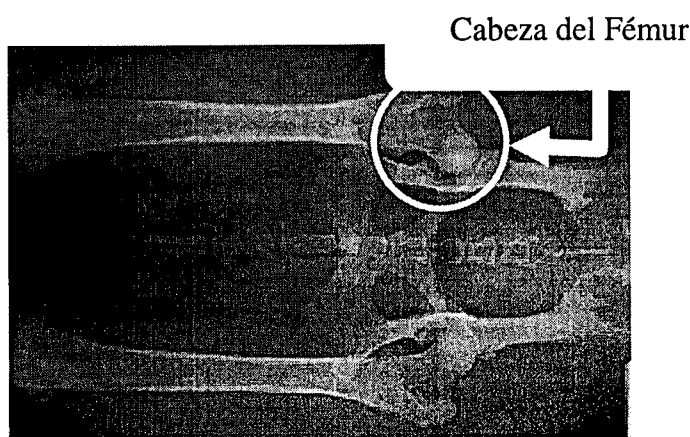


Figura 1. Imagen de un fémur.

El talón de Aquiles de un sistema que automáticamente reconozca si el animal es o no es de pura raza se encuentra precisamente en la precisión con que es capaz de determinar el borde de la cabeza del fémur. Este borde debe ser nítido y claro para que el algoritmo posterior de reconocimiento de formas determine si se ajusta o no a una circunferencia.

Los algoritmos clásicos de detección de bordes, como por ejemplo el de Sobel, cuando se aplican sobre una imagen tan difuminada generan una multitud de puntos pertenecientes al borde. Eso produce bordes anchos y que en algunas zonas donde el contorno se extiende por zonas de grises que cambian el tono de forma gradual producen una deformación del objeto a detectar. Evidentemente existe un filtro con un conjunto de parámetros que determina un borde de la imagen suficientemente bueno como para que pueda utilizarse un algoritmo de reconocimiento de formas posteriormente, pero el ajuste de esos parámetros debe hacerse de forma manual. Por ejemplo en el caso del filtro de Sobel se puede ajustar el umbral para obtener una imagen con los bordes perfectamente definidos, pero para cada imagen hay que ajustar ese umbral.

En este trabajo se pretende evitar la interacción del experto humano a la hora de determinar los parámetros del filtro para que el proceso de decisión final sea realmente automático. En este caso el sistema calculará un conjunto de distancia entre píxeles que se transformarán en variables lingüísticas [4] con un grado de pertenencia a cada etiqueta que se transformará, a través de un conjunto de reglas definidas por un experto y utilizando la implicación de Mamdani [5], en un grado de pertenencia a las etiquetas de la salida y resultando al final un valor numérico utilizando el tradicional procedimiento del Centroide [6].

3 SISTEMA BORROSO DESARROLLADO

En primer lugar se debe anular la manera en que el ser humano determina si un punto es un borde o no lo es, es decir como describir los valores de diferencia de intensidad entre puntos cercanos como si de una persona se tratara. Un pixel genérico puede caracterizarse por el conjunto de intensidades que rodean a dicho pixel, por ejemplo en la Figura 2 se puede observar un vecindario para una máscara de 9 píxeles.

P1	P2	P3
P4	P5	P6
P7	P8	P9

Figura 2. 3 x 3 Array centrado en P5.

Los valores de intensidad que rodean al pixel reflejan si hay una continuidad en el valor de la intensidad o un salto de intensidades. Cuando se produce un salto de intensidades ese punto se determina como borde. Ahora bien, ¿cómo determinar ese salto?. Básicamente el sistema deberá considerar diferencias entre puntos extremos. Es decir la diferencia entre las diagonales y entre la horizontal y la vertical, pero considerando siempre entre estas diferencias el punto central :

$$\text{Horizontal} = |P6 - P4| + |P5 - P4|$$

$$\text{Vertical} = |P8 - P2| + |P5 - P2|$$

$$\text{Diagonal Derecha-Izquierda} = |P3 - P7| + |P5 - P7|$$

$$\text{Diagonal Izquierda-Derecha} = |P1 - P9| + |P5 - P9|$$

$$\text{Centro} = P5$$

La Figura 3 muestra las funciones de pertenencia para estas entradas. El rango de valores va de 0 a 265, y sobre este rango se han definido cuatro etiquetas: Muy Pequeño, Pequeño, Grande y Muy Grande.

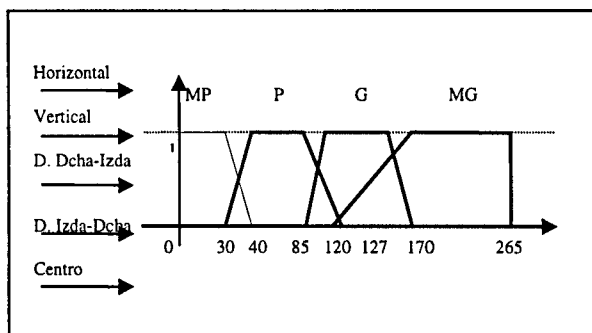


Figura 3. Funciones de pertenencia de las entradas

La salida del sistema es el tipo del pixel central de la máscara, es decir si es o no es "borde". De hecho como se puede observar en la Figura 4, sólo es necesaria una etiqueta para representar la salida. En función del nivel de activación se obtendrá un valor del centroide que representa cuánto de borde es el pixel central. Para conseguir una imagen en blanco y negro, valores 255 y 0, únicamente sobre este valor se tiene un umbral de decisión que determina a partir de qué valores se considera borde y a partir de cuáles no.

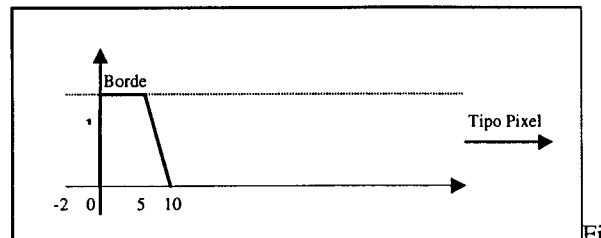


Figura 4. Funciones de pertenencia de las salidas

Las reglas usadas por el sistema se muestran en la Figura 5.

```

IF (Horizontal IS Very Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Vertical IS Very Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Horizontal IS Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Vertical IS Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Left-Right Diagonal IS Very Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Right-Left Diagonal IS Very Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Left-Right Diagonal IS Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Right-Left Diagonal IS Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Horizontal IS Very Large)
  AND (Centre IS Large)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Vertical IS Very Large)
  AND (Centre IS Large)
THEN (Output Pixel IS Edge)

```

```

IF (Horizontal IS Large)
  AND (Centre IS Large)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Vertical IS Large)
  AND (Centre IS Large)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Left-Right Diagonal IS Very
  Large) AND (Centre IS Large)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Right-Left Diagonal IS Very
  Large) AND (Centre IS Large)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Left-Right Diagonal IS Large)
  AND (Centre IS Large)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Right-Left Diagonal IS Large)
  AND (Centre IS Large)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Horizontal IS Very Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Vertical IS Very Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Horizontal IS Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Vertical IS Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Left-Right Diagonal IS Very
  Large) AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Right-Left Diagonal IS Very
  Large) AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Left-Right Diagonal IS Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Right-Left Diagonal IS Large)
  AND (Centre IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Horizontal IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Vertical IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Left-Right Diagonal IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)
IF (Right-Left Diagonal IS Small)
THEN (Output Pixel IS Edge)

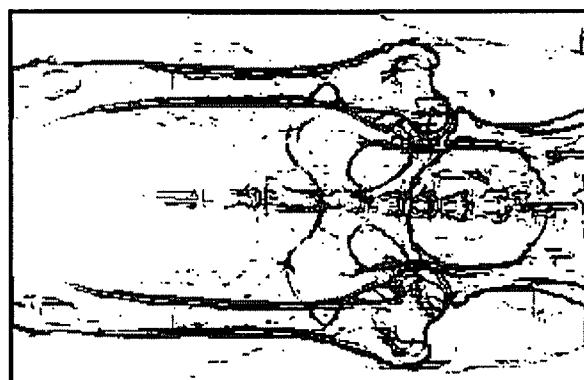
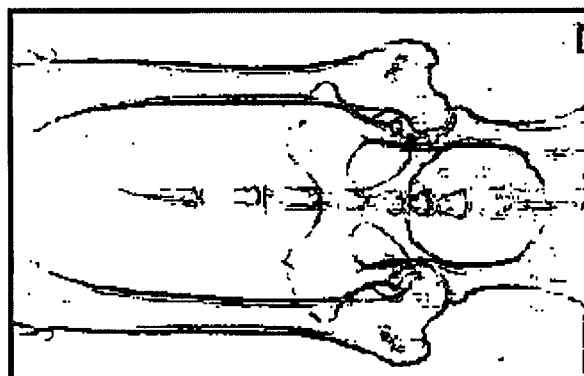
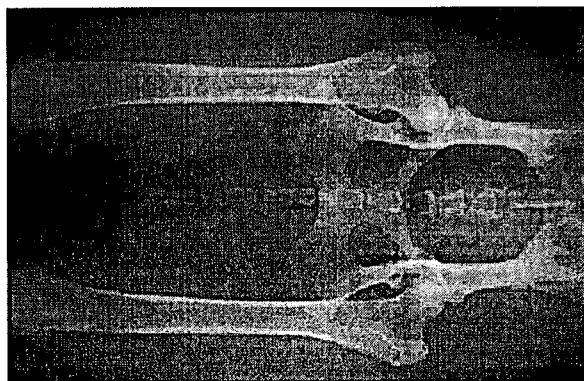
```

Figure 5. Reglas usadas

4 EXPERIMENTACIÓN

El sistema descrito se ha probado con imágenes de radiografías de perros, donde el procesado de la imagen es complicado debido a que en dichas

radiografías se pueden observar unos bordes muy poco definidos debido a la variación gradual del nivel de gris del fondo de la imagen. Los resultados comparan las salidas del filtro borroso y dos filtros de Sobel con distinto umbral, que define la sensibilidad del filtro para detectar más o menos píxeles como bordes. En las Figuras 6, 7 y 8 se muestran algunos resultados sobre distintos tipos de imagen. En las figuras se muestra la imagen original y el resultado de aplicar el filtro borroso, y los filtros de Sobel con umbrales 10 y 20 respectivamente. En la Figure 6, se muestra un ejemplo para el tipo de radiografía 1.



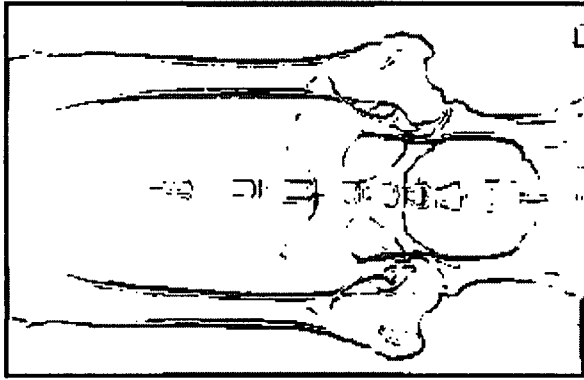


Figura 6. Imagen Radiológica tipo 1: (a) Imagen Original (b) Sistema Borroso (c)Sobel 10 (d)Sobel 20

Figura 6 (c) muestra unos bordes claramente definidos pero en la imagen aparecen muchos bordes que no son tales. Desafortunadamente cuanto mayor es el número de bordes espúreos mayor es la dificultad para encontrar las características de la imagen que son necesarias para decidir sobre la raza del animal. La Figura 6 (d) por el contrario muestra unos bordes muy poco definidos, por lo que resultaría ineficiente para su posterior procesamiento. La Figura 6 (b) muestra el resultado del sistema borroso donde se observa una apropiada ponderación entre la claridad del borde y el número de píxeles que lo componen. Resultados similares pueden observarse en las Figuras 7 y 8 con otros tipos de radiografías. Aunque los resultados no muestran unas diferencias muy significativas entre los métodos, es importante resaltar que el Filtro de Sobel requiere el ajuste del umbral mientras que el sistema borroso no.

5 CONCLUSIONES

En resumen, en este trabajo se propone una nueva técnica para el desarrollo de técnicas de procesamiento de imagen basadas en lógica borrosa. En particular se ha desarrollado y probado un filtro extractor de bordes que no requiere del ajuste de parámetros para cada tipo de imagen. Este sistema de extracción puede aplicarse a otros tipos de imágenes y ser la base de una aplicación jerárquica multinivel que puede desarrollarse mediante una arquitectura de pizarras [7].

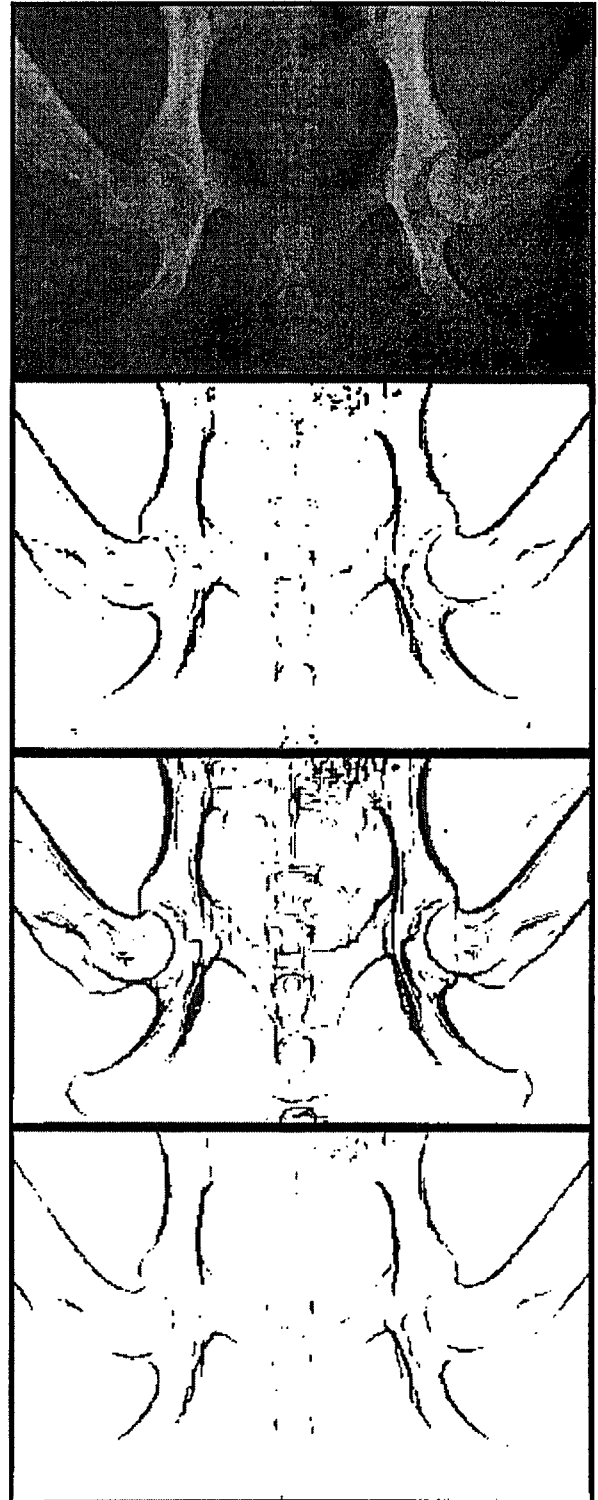


Figura 7. Imagen Radiológica tipo 2: (a) Imagen Original (b) Sistema Borroso (c) Sobel 10 (d) Sobel 20

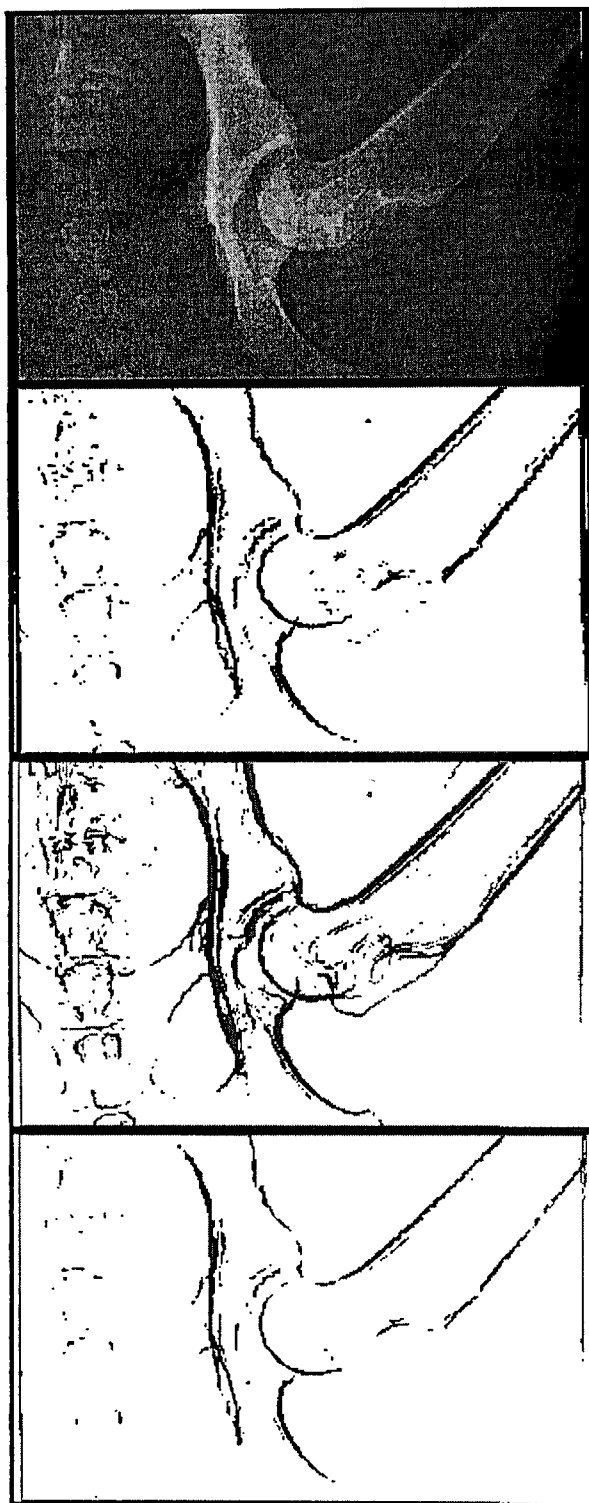


Figura 8. Imagen Radiológica tipo 3: (a) Imagen Original (b) Sistema Borroso (c) Sobel 10 (d) Sobel 20

6 REFERENCES

- [1] Ashkar, G.P. and Modestiono J.W., "The contour extraction problem with biomedical applications", CGIP 7, 1978, 331-335.
- [2] A. K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Ed. Prentice-Hall, 1989.
- [3] Ballard D.H. and Brown C.M., *Computer Vision*, Ed. Prentice-Hall, 1982.
- [4] L. A. Zadeh, "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes", Trans. on SMC, Jan. 1973.
- [5] Mamdani H., "Aplication of Fuzzy Logic to Aproximate Reasoning Using Linguistic Synthesis", IEEE Trans. on Computers, Nov/Dic. 1988.
- [6] Zimmermann H.J., *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, Kluwer 1985.
- [7] G. F. Luger, W. A. Stubblefield, *Artificial Intelligence. Structures and Strategies for Complex Problem Solving*, The Benjamin/Cummings Publ., 1993.

SOBRE FUNCIONES GENERADORAS DE MODUS PONENS*

Ana Pradera

Dpto. Ciencias de la Computación.
Universidad de Alcalá.
28871 Alcalá de Henares.
ccapg@cc.alcala.es

Enric Trillas

Dpto. Inteligencia Artificial.
Universidad Politécnica de Madrid.
28660 Boadilla del Monte.
etrillas@fi.upm.es

Susana Cubillo

Dpto. Matemática Aplicada.
Universidad Politécnica de Madrid.
28660 Boadilla del Monte.
scubillo@fi.upm.es

Resumen

El objeto de este trabajo es investigar la posibilidad de usar funciones que no sean t-normas para modelizar la regla del Modus Ponens en procesos de inferencia borrosos. Se propone para ello una generalización de los conceptos relacionados con el tema que permite estudiar cuándo y dónde - en qué subconjunto del universo de discurso - una función es capaz de generar la regla del Modus Ponens.

Palabras clave: Inferencia borrosa. Modus Ponens. Condicional borroso. T-normas. Funciones de Agregación. Funciones generadoras de Modus Ponens.

1 INTRODUCCIÓN

Aunque la conjunción lógica representa claramente una fusión de información, esta fusión puede ser de dos tipos distintos. Puede ser una *conjunción interna*, como en el caso “ a es P ” y “ b es Q ”, o una *conjunción externa*, como la que aparece en la meta-regla del Modus Ponens “ a es P ” y “Si a es P , entonces b es Q ”. Mientras que en el primer caso el conectivo “y” actúa sobre objetos de la misma clase, en el segundo lo hace sobre objetos distintos (una proposición y una relación condicional).

En Lógica Borrosa, y debido tanto a su comportamiento claramente conjuntivo como a las facilidades de cálculo que proporcionan estos operadores, ambos tipos de conjunciones se han representado tradicionalmente mediante normas triangulares. Existe sin embargo en la actualidad un catálogo mucho más amplio de operadores, pero su uso se ha estudiado fundamentalmente desde el punto de vista de las operaciones internas.

*Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la CICYT, proyecto TIC96-1393-C06

Retomando la idea apuntada en [4], el objetivo principal de este trabajo es analizar la posibilidad de usar estos operadores más generales para representar conjunciones externas, en particular en el contexto de los procesos de inferencia borrosos basados en la regla del Modus Ponens. Para ello, el segundo apartado se dedica a recordar los conceptos básicos relacionados con los procesos de inferencia borrosos. A continuación, y a la vista de que estos conceptos resultan estar particularmente orientados al uso de t-normas, se propone su generalización de modo que permitan analizar el uso de otro tipo de funciones. Por último, el apartado cuarto se centra en estudiar qué tiene que cumplir una función para ser generadora de Modus Ponens, esto es, cuándo puede ser utilizada para modelizar dicha regla de inferencia. Los resultados obtenidos se aplican a varios ejemplos.

A lo largo de todo este trabajo se designará por I al intervalo $[0, 1]$.

2 PRELIMINARES

En un proceso de inferencia borrosa intervienen dos elementos fundamentales ([4], [6]):

- un *condicional borroso*, esto es, una relación tal que, dados dos predicados borrosos “ a es P ” y “ b es Q ”, representa el valor del predicado condicional “Si a es P , entonces b es Q ”. Cuando los predicados vagos P y Q se representan mediante subconjuntos borrosos $\mu_P : E_1 \rightarrow I$ y $\mu_Q : E_2 \rightarrow I$, el predicado condicional se puede ver como una relación borrosa $R : E_1 \times E_2 \rightarrow I$, que, aunque obviamente no siempre será posible, se define muy habitualmente como $R(a, b) = J(\mu_P(a), \mu_Q(b))$ para todo (a, b) de $E_1 \times E_2$, siendo $J : I \times I \rightarrow I$ una función adecuada.
- por otro lado es necesario disponer de una *regla de inferencia*, esto es, un procedimiento que permita obtener “verdades” a partir de “verdades”. Las

reglas de inferencia más comúnmente utilizadas son las de Modus Ponens y Modus Tollens. Como se argumenta en [4], una regla de inferencia de este tipo se puede describir mediante una función $M : I \times I \rightarrow I$ que necesariamente debe cumplir los dos siguientes requerimientos básicos:

1. $M(x, x \rightarrow y) \leq y$ (Modus Ponens) o $M(N(y), x \rightarrow y) \leq N(x)$ (Modus Tollens) - siendo $\rightarrow$ un condicional y N una función de negación -. Estas desigualdades facilitan sendas cotas inferiores para los valores inferidos.
2. $M(1, 1) = 1$, condición que garantiza la conservación de las reglas clásicas.

Además de las propiedades anteriores, que son fundamentales para poder hablar de un mecanismo de inferencia, el trabajo antes citado sugiere otras posibles propiedades - como por ejemplo monotonía en la primera variable - y bautiza a este tipo de funciones con el nombre de *funciones generadoras de Modus Ponens*.

Los condicionales borrosos se representan por lo tanto como relaciones borrosas que verifican una determinada regla de inferencia. Su definición - tomando como regla el Modus Ponens - constituye además una generalización del condicional clásico, como se recuerda a continuación ([6]).

Definición 2.1 Dado un subconjunto V de un conjunto E , la relación $R \subseteq E \times E$ es un V -condicional (clásico) si para todo a, b de E se cumple:

$$\text{si } a \in V \text{ y } (a, b) \in R, \text{ entonces } b \in V$$

Haciendo uso de las correspondientes funciones características, la definición anterior es equivalente a "Si $\varphi_V(a) = 1$ y $\varphi_R(a, b) = 1$, entonces $\varphi_V(b) = 1$ ", o, lo que es lo mismo, $\min(\varphi_V(a), \varphi_R(a, b)) \leq \varphi_V(b)$.

Esta última desigualdad, junto con las consideraciones anteriores, es la que sugiere la definición de condicional borroso:

Definición 2.2 Sean $\mu_P : E_1 \rightarrow I$ y $\mu_Q : E_2 \rightarrow I$ dos subconjuntos borrosos y $M : I \times I \rightarrow I$ una función tal que $M(1, 1) = 1$. Si una relación borrosa $R : E_1 \times E_2 \rightarrow I$ cumple

$$M(\mu_P(a), R(a, b)) \leq \mu_Q(b) \text{ para todo } (a, b) \in E_1 \times E_2 \quad (1)$$

se dice que R es un (μ_P, μ_Q) - M -condicional para $E_1 \times E_2$, o alternativamente que (μ_P, μ_Q) es un M -estado-lógico para la estructura $(E_1 \times E_2, R)$ o que (μ_P, μ_Q) verifica el Modus Ponens respecto de M en $E_1 \times E_2$.

3 GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE CONDICIONAL BORROSO

Aunque la definición del apartado anterior no especifica la naturaleza de la función M , tanto en la teoría como en la práctica ésta se suele modelizar mediante alguna t-norma. Parece sin embargo interesante estudiar la posibilidad de representar dichos procesos por medio de otro tipo de funciones más generales. Al plantear esta posibilidad, dos observaciones surgen de forma inmediata:

- En primer lugar, se aprecia que la conmutatividad de la función M no parece un requisito imprescindible, y por lo tanto la definición anterior debería generalizarse sustituyendo la condición (1) por la alternativa

$$M(\mu_P(a), R(a, b)) \leq \mu_Q(b) \text{ o } M(R(a, b), \mu_P(a)) \leq \mu_Q(b),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\min(M(\mu_P(a), R(a, b)), M(R(a, b), \mu_P(a))) \leq \mu_Q(b).$$

De esta forma lo que se exige es que la "conjunción" de $\mu_P(a)$ y $R(a, b)$, en alguna de las dos formas posibles de realizarla, constituya una cota inferior para el valor inferido $\mu_Q(b)$.

- Por otro lado, se observa que dados dos subconjuntos borrosos $\mu_P : E_1 \rightarrow I$, $\mu_Q : E_2 \rightarrow I$ y una t-norma T , siempre es posible encontrar una relación borrosa $R : E_1 \times E_2 \rightarrow I$ tal que R sea un (μ_P, μ_Q) - T -condicional para $E_1 \times E_2$. En efecto, y debido a que las t-normas se mantienen siempre por debajo del mínimo, se tiene $T(\mu_P(a), \mu_Q(b)) \leq \min(\mu_P(a), \mu_Q(b)) \leq \mu_Q(b)$, con lo que bastaría tomar $R(a, b) = \mu_Q(b)$ para obtener un (μ_P, μ_Q) - T -condicional. Sin embargo, esto no siempre se cumple con otras funciones más generales. Un ejemplo sencillo viene dado por la media aritmética, $M(x, y) = \frac{x+y}{2}$, para la que es fácil comprobar que, para aquellos puntos $(a, b) \in E_1 \times E_2$ tales que $2\mu_Q(b) - \mu_P(a) < 0$, nunca podrá existir una función $R : E_1 \times E_2 \rightarrow I$ que verifique $M(\mu_P(a), R(a, b)) \leq \mu_Q(b)$, puesto que esto último equivaldría a $R(a, b) \leq 2\mu_Q(b) - \mu_P(a) < 0$. No obstante, la media aritmética, excluyendo estos puntos, sí podría ser usada para modelizar el Modus Ponens. Esta observación sugiere por lo tanto generalizar la definición de

condicional borroso de forma que el Modus Ponens no tenga necesariamente que cumplirse para todos los puntos del universo $E_1 \times E_2$, sino que lo pueda hacer parcialmente sobre un subconjunto de este último.

Las observaciones anteriores llevan a proponer la siguiente definición de condicional borroso:

Definición 3.1 Sean $\mu_P : E_1 \rightarrow I$ y $\mu_Q : E_2 \rightarrow I$ dos subconjuntos borrosos, $M : I \times I \rightarrow I$ una función tal que $M(1,1) = 1$ y D un subconjunto de $E_1 \times E_2$. Si una relación borrosa $R : D \rightarrow I$ cumple

$$\min(M(\mu_P(a), R(a,b)), M(R(a,b), \mu_Q(b))) \leq \mu_Q(b)$$

para todo $(a,b) \in D$, se dice que R es un (μ_P, μ_Q) - M -condicional para D , o alternatively que (μ_P, μ_Q) es un M -estado-lógico para la estructura (D, R) o que (μ_P, μ_Q) verifica el Modus Ponens respecto de M en D .

En el caso de que la función M sea conmutativa, la condición anterior es evidentemente equivalente a la original, $M(\mu_P(a), R(a,b)) \leq \mu_Q(b)$ para todo par (a,b) de D .

4 FUNCIONES GENERADORAS DE MODUS PONENS

Como ya se ha mencionado en el apartado 2, el trabajo [4] apunta la posibilidad de abordar el estudio de la inferencia borrosa partiendo de la búsqueda de funciones que sean capaces de describir una determinada regla de inferencia. Siguiendo este enfoque, el concepto de función generadora de Modus Ponens allí expuesto podría generalizarse de forma similar a la empleada en el apartado anterior, dando lugar a la siguiente definición, que permite estudiar en qué subconjunto del universo $E_1 \times E_2$ una función $M : I \times I \rightarrow I$ es capaz de describir la regla del Modus Ponens.

Definición 4.1 Sean $\mu_P : E_1 \rightarrow I$ y $\mu_Q : E_2 \rightarrow I$ dos subconjuntos borrosos y D un subconjunto del producto cartesiano $E_1 \times E_2$. Se dice que una función $M : I \times I \rightarrow I$ es una *función generadora de Modus Ponens* para (μ_P, μ_Q) en D si se cumple:

1. Para todo $(a,b) \in D$ existe $c \in I$ tal que

$$\min(M(\mu_P(a), c), M(c, \mu_Q(b))) \leq \mu_Q(b)$$

2. $M(1,1) = 1$

Nota 1 Obsérvese que toda función idempotente será generadora de Modus Ponens, por lo menos, en todos los puntos $(a,b) \in E_1 \times E_2$ tales que $\mu_P(a) \leq \mu_Q(b)$.

Resulta interesante destacar que, como se sugiere en [4], la definición anterior se ha establecido sin referencia alguna a relaciones condicionales, con lo que estas funciones generadoras de Modus Ponens tienen además la virtud de poder usarse para definir condicionales borrosos : en particular, cualquier función $R : D \rightarrow I$, construida asociando a cada par (a,b) de D un valor $c \in I$ que cumpla la condición 1 de la definición anterior, es evidentemente un (μ_P, μ_Q) - M -condicional para el subconjunto D .

Cuando se consideran funciones monótonas no decrecientes - propiedad muy habitual entre las funciones propuestas para la agregación de subconjuntos borrosos - se obtiene fácilmente la siguiente caracterización, que, de forma implícita, permite calcular el mayor subconjunto en el que una función de este tipo es capaz de generar la regla del Modus Ponens.

Proposición 4.1 Sean $\mu_P : E_1 \rightarrow I$ y $\mu_Q : E_2 \rightarrow I$ dos subconjuntos borrosos, $M : I \times I \rightarrow I$ una función monótona no decreciente tal que $M(1,1) = 1$ y D un subconjunto del producto cartesiano $E_1 \times E_2$. Entonces M es una función generadora de Modus Ponens para (μ_P, μ_Q) en D si y sólo si se cumple:

$$\min(M(\mu_P(a), 0), M(0, \mu_Q(b))) \leq \mu_Q(b)$$

para todo $(a,b) \in D$.

Si los subconjuntos borrosos - como de hecho suele ocurrir en las aplicaciones - son tales que μ_P es 1-normal y μ_Q es 0-normal, el siguiente corolario permite detectar de forma inmediata cuándo una función monótona no decreciente es generadora de Modus Ponens en todo el universo producto.

Corolario 4.2 Sean $\mu_P : E_1 \rightarrow I$ y $\mu_Q : E_2 \rightarrow I$ dos subconjuntos borrosos tales que existen $e_1 \in E_1$ y $e_2 \in E_2$ con $\mu_P(e_1) = 1$ y $\mu_Q(e_2) = 0$, y sea $M : I \times I \rightarrow I$ una función monótona no decreciente tal que $M(1,1) = 1$. Entonces M es una función generadora de Modus Ponens para (μ_P, μ_Q) en $E_1 \times E_2$ si y sólo si se cumple $\min(M(1,0), M(0,1)) = 0$.

La aplicación de las caracterizaciones anteriores a algunos de los operadores más comúnmente utilizados da lugar a los siguientes resultados:

- **T-normas.**

Cualquier t-norma T , al cumplir $T(x,0) = 0$ para todo $x \in I$, es una función generadora de Modus Ponens en $E_1 \times E_2$ para cualquier par de subconjuntos borrosos.

- **T-conormas.**

Cualquier t-conorma S verifica $S(x,0) = S(0,x) = x$ para todo $x \in I$, y por lo tanto será

generadora de Modus Ponens en $(a, b) \in E_1 \times E_2$ si y sólo si se cumple $\mu_P(a) \leq \mu_Q(b)$.

• **Combinaciones lineales y exponenciales de t-normas y t-conormas.**

En 1980, Zimmermann y Zysno ([9]) proponen la utilización de nuevos operadores que permitan plasmar la idea de compensación o promediación de valores. En concreto, construyen los siguientes operadores, obtenidos al combinar de forma lineal o exponencial una t-norma y una t-conorma: $L_\gamma(x, y) = (1 - \gamma)T(x, y) + \gamma S(x, y)$ y $\Gamma_\gamma(x, y) = T(x, y)^{1-\gamma} S(x, y)^\gamma$, siendo $\gamma \in I$ un parámetro de compensación, T una t-norma y S una t-conorma. En el primer caso, se obtiene que L_γ es generadora de Modus Ponens en $(a, b) \in E_1 \times E_2$ si y sólo si se cumple $\gamma\mu_P(a) \leq \mu_Q(b)$, por lo que la capacidad de generación de Modus Ponens de una función de este tipo viene dada por el parámetro γ : cuanto menor es este último, mayor es el subconjunto de $E_1 \times E_2$ en el que L_γ es capaz de generar el Modus Ponens. Además, el caso límite $\gamma = 0$, en el que el operador coincide con la t-norma T , es el único capaz de generar el Modus Ponens para cualquier par de puntos del universo. Por el contrario, cualquier combinación exponencial Γ_γ - salvo el caso $\gamma = 1$ en el que el operador es una t-conorma - es una función generadora de Modus Ponens en todo el universo para cualesquiera subconjuntos borrosos.

• **Medias cuasi-lineales.**

Una media cuasi-lineal ([1]) es una función $M : I \times I \rightarrow I$ definida, para todo $x, y \in I$, por $M(x, y) = f^{-1}(pf(x) + (1-p)f(y))$, siendo $f : I \rightarrow R$ una función continua y estrictamente monótona y p un peso perteneciente a I . Las medias así definidas son funciones monótonas no decrecientes e idempotentes, por lo que, de acuerdo con los resultados anteriores, el mayor subconjunto en el que son funciones generadoras de Modus Ponens es

$$\left\{ \begin{array}{l} (a, b) \in E_1 \times E_2 : \\ \frac{f(\mu_Q(b)) - f(0)}{f(\mu_P(a)) - f(0)} \geq \min(p, 1-p) \end{array} \right\}$$

Como corolario inmediato se tiene que una media cuasi-lineal es una función generadora de Modus Ponens en todo el universo $E_1 \times E_2$ si y sólo si se da uno de los tres casos siguientes:

- (a) f es creciente y tal que $f(0) = -\infty$
- (b) f es decreciente y tal que $f(0) = +\infty$
- (c) $\min(p, 1-p) = 0$

Algunos ejemplos típicos de medias cuasi-lineales son:

- la *media aritmética*, $M(x, y) = \frac{x+y}{2}$, que al estar generada por la función creciente $f(x) = x$ será generadora de Modus Ponens en $(a, b) \in E_1 \times E_2$ si y sólo si se verifica $\mu_Q(b) \geq \frac{1}{2}\mu_P(a)$.
- tanto la *media geométrica*, $M(x, y) = \sqrt{xy}$, como la *media armónica*, $M(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$, son funciones generadoras de Modus Ponens en todo el universo, puesto que se obtienen, respectivamente, a partir de la funciones $f(x) = -\ln(x)$ y $f(x) = 1/x$, ambas decrecientes y tales que $f(0) = +\infty$.
- las *medias ponderadas*, definidas por $M_P(x, y) = px + (1-p)y$, constituyen un caso especial de medias cuasi-lineales no conmutativas obtenidas a partir de la función $f(x) = x$. Son generadoras de Modus Ponens en $(a, b) \in E_1 \times E_2$ si y sólo si se verifica $\mu_Q(b) \geq \min(p, 1-p)\mu_P(a)$, por lo que lo serán en todo el universo únicamente en los casos degenerados obtenidos al tomar $p = 0$ y $p = 1$.

• **Medias ponderadas ordenadas.**

Las medias ponderadas ordenadas (OWAs), introducidas por Yager en 1988 ([8]), se definen, en el caso de dos variables, como funciones $M_p : I \times I \rightarrow I$ tales que $M_p(x, y) = p \max(x, y) + (1-p) \min(x, y)$ para todo $x, y \in I$, siendo p un peso cualquiera en I . Son un caso particular de combinación lineal convexa obtenido al tomar el mínimo como t-norma y el máximo como t-conorma, por lo que su capacidad para generar la regla de Modus Ponens ya ha sido comentada más arriba.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se propone un nuevo enfoque para la modelización de la inferencia borrosa que permite demostrar cómo, además de las t-normas, otras muchas funciones pueden ser utilizadas para representar la regla del Modus Ponens.

Se ha obtenido además una caracterización que permite calcular fácilmente el mayor subconjunto en el que una función monótona $M : I \times I \rightarrow I$ es capaz de generar la regla del Modus Ponens, y se ha aplicado este resultado a varios ejemplos.

Referencias

- [1] J. Aczél. "Lectures on Functional Equations and their Applications". *Academic Press. New York* (1966).
- [2] D. Dubois and H. Prade. "Fuzzy logic and the generalized modus ponens revisited". *Int. J. Cybernetics and Systems* 15, (1984) 293-331.
- [3] D. Dubois and H. Prade. "Fuzzy sets in approximate reasoning. Part1 : Inference with possibility distributions". *Fuzzy Sets and Systems* 40, (1991) 143-202.
- [4] E. Trillas and L. Valverde. "On mode and implication in Approximate Reasoning". En *M.M. Gupta et al. (eds). Approximate Reasoning in Expert Systems. North Holland, Amsterdam.*(1985) 157-166.
- [5] E. Trillas and L. Valverde. "On inference in Fuzzy Logic". *Proc. 2nd IFSA Congress.* (1987)
- [6] E. Trillas. "On a Mathematical Model for Indicative Conditionals". *Proc. Fuzzy IEEE. Barcelona. Vol. 1* (1997) 3-30.
- [7] L. Valverde and E. Trillas. "On Modus Ponens in Fuzzy Logic". *Proc. Int. Symp. on Multiple-Valued Logic. Kingston (Ontario).* (1985). 294-301.
- [8] R.R. Yager. "On Ordered Weighted Averaging Operators in Multicriteria Decisionmaking." *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 18, (1988) 183-190.
- [9] H.J. Zimmermann and P. Zysno. "Latent connectives in human decision-making". *Fuzzy Sets and Systems* 4, (1980) 37-51.

APPLICATIONS OF INTUITIONISTIC FUZZY SETS IN DECISION MAKING

Eulalia Szmidt and Janusz Kacprzyk

Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences

ul. Newelska 6, 01-447 Warsaw, Poland

e-mail: {szmidt, kacprzyk}@ibspan.waw.pl

Abstract

The determination of solutions in group decision making via intuitionistic fuzzy sets is considered. The point of departure is a collection of individual intuitionistic fuzzy preference relations. We assume a (traditional, non-intuitionistic) fuzzy majority equated with a fuzzy linguistic quantifier. A solution is derived either directly from the individual intuitionistic fuzzy preference relations or by constructing first a social intuitionistic fuzzy preference relation. Two solution concepts are proposed, the intuitionistic fuzzy core and the intuitionistic consensus winner. The main purpose of the paper is to briefly present how intuitionistic fuzzy sets can be used in a group decision making.

1 Introduction

Group decision making consists in deriving a solution (an option or a set of options) from the individual preferences over some set of options in question. The solution may be meant in various ways leading to various solution concepts. Basically, it contains options that "best" reflect what a majority of the involved individuals prefer. In the fuzzy context, the basic point of departure is a set of individual fuzzy preference relations. Then, a solution is derived either directly from the individual preference relations, without the derivation of a social fuzzy preference relation, or by constructing first a social fuzzy preference relation and then using it to find a solution (the so-called direct and indirect approach as defined by Kacprzyk [7]).

Such a straight fuzzification, just by employing fuzzy preference relations, gives rise to a multitude of solution concepts as proposed by Nurmi [11]. One can also fuzzify the very concept of majority, e.g., by employing fuzzy linguistic quantifiers exemplified by

most, almost all, etc. and obtain new solution concepts proposed by Kacprzyk [7].

In this paper we employ intuitionistic fuzzy preference relations proposed by Atanassov [1, 2] instead of (traditional) fuzzy preference relations, and a (traditional) fuzzy majority, to derive solution concepts which are extensions of those proposed by Kacprzyk [7].

Our notation related to Atanassov's [1,2] intuitionistic fuzzy sets is standard.

An intuitionistic fuzzy set A in X is given as $A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle / x \in X \}$; $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$, $\nu_A: X \rightarrow [0,1]$, $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$. The numbers $\mu_A(x)$ and $\nu_A(x)$ denote, respectively, the degree of membership and degree of nonmembership of element x in A . With an intuitionistic fuzzy set A we associate an intuitionistic index of element x in A , given as $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$. It is the degree of indeterminacy concerning the membership of x in A ; clearly, $0 \leq \pi_A(x) \leq 1$, for each $x \in X$.

2 Group decision making via individual fuzzy preference relations

Suppose we have a set of n options (alternatives) $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ and m individuals. Each individual k , $k=1, \dots, m$, provides his or her own preferences over S which are represented by individual fuzzy preference relations R_k such that: $\mu_{R_k}: S \times S \rightarrow [0,1]$ which may be conveniently represented by the matrix whose elements $0 \leq r_{ij}^k \leq 1$ are such that the higher the preference of individual k of s_i over s_j the higher r_{ij}^k : from $r_{ij}^k = 0$ indicating a definite

preference s_j over s_i , through $r_{ij}^k = 0.5$ indicating indifference between s_i and s_j , to $r_{ij}^k = 1$ for a definite preference of s_i over s_j .

Moreover, it is usually assumed that the matrix R_k is reciprocal

, i.e. $r_{ij}^k + r_{ji}^k = 1, \forall i, j = 1, \dots, n$, and $r_{ii}^k = 0, i \neq j, k = 1, \dots, m$, and, since r_{ii}^k (as well as the corresponding elements on the main diagonal in some other matrices to be discussed later) do not matter, we put "-" instead of "0".

Now we assume that all the individual fuzzy preferences relations, $R_1, \dots, R_m$, are given and the problem is to derive some solution, that is an option (or a set of options) which is "best" acceptable by the group.

Two main approaches are here possible (Kacprzyk [7]):

- a *direct approach* which may be represented by the scheme: $\{R_1, \dots, R_m\} \rightarrow \text{solution};$
- an *indirect approach* which may be represented by the scheme:
 $\{R_1, \dots, R_m\} \rightarrow R \rightarrow \text{solution};$

A solution concept with much intuitive appeal is here the (traditional) core defined as

$$C = \left\{ s_i \in S : \neg \exists s_j \in S \text{ such that } r_{ji}^k > 0.5 \text{ for at least } r \text{ individuals} \right\} \quad (1)$$

i.e. as a set of undominated options, not defeated by the required (crisp) majority $r \leq m$.

Now, if we just assume that the individual preferences are fuzzy, then the core may be extended (Nurmi [11]) to the fuzzy α -core defined as

$$C_\alpha = \left\{ s_i \in S : \neg \exists s_j \in S \text{ such that } r_{ji}^k \geq \alpha > 0.5 \text{ for at least } r \text{ individuals} \right\} \quad (2)$$

which is a set of options which are not sufficiently (at least to degree $1-\alpha$) defeated by the required majority $r \leq m$.

Next, assuming also a fuzzy majority given as a fuzzy linguistic quantifier, we can define other

solution concepts as, e.g.: the fuzzy Q -core and fuzzy α/Q -core (Kacprzyk [7]).

For instance, $Q = \text{"most"}$ may be given as (cf. Kacprzyk [7]):

$$\mu_{\text{"most"}} = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0.8 \\ 2x - 0.6 & \text{for } 0.3 < x < 0.8 \\ 0 & \text{for } x \leq 0.3 \end{cases}$$

and this form of "most" will be used throughout this paper.

Informally, the fuzzy Q -core is defined as a fuzzy set of options, such that Q individuals are not against them (not defeated by Q individuals) [7].

To derive a formal definition, let us first denote:

$$h_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{if } r_{ij}^k < 0.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

i.e. $h_{ij}^k = 1$ means that individual k prefers s_j over s_i . (If not otherwise specified, $i, j = 1, \dots, n$ and $k = 1, \dots, m$ throughout the paper). Then

$$h_j^k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n h_{ij}^k \quad (4)$$

is to what extent individual k is not against s_j : from 0 for certainly against, to 1 for certainly not against, through all intermediate values. Next

$$h_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m h_j^k \quad (5)$$

is to what extent all the individuals are not against s_j , and

$$v_Q^j = \mu_Q(h_j) \quad (6)$$

is to what extent Q individuals are not against s_j . Then, the fuzzy Q -core is defined as

$$C_Q = v_Q^1 / s_1 + \dots + v_Q^n / s_n \quad (7)$$

Example 1. Let us have four individuals, $k=1,2,3,4$, whose individual fuzzy preference relations are:

$$R_1 = \begin{bmatrix} - & 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.7 & - & 0.6 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & - & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 & - \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} - & 0.4 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & - & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 & - & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 & - \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} - & 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & - & 0.8 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & - & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 & 0.5 & - \end{bmatrix} \quad R_4 = \begin{bmatrix} - & 0.4 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & - & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & - & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 & - \end{bmatrix}$$

To determine C_{most} , we start with (3) and obtain:

$$\begin{bmatrix} h_{ij}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 0 & 1 & 0 & - \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h_{ij}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & 0 & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_{ij}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 0 & 1 & 0 & - \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h_{ij}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - & 1 \\ 1 & 1 & 0 & - \end{bmatrix}$$

From (4) and (5) we have: $[h_j] = [h_1, h_2, h_3, h_4] = [5/12, 10/12, 1/12, 4/12]$, thus, from (6) $[v_{\text{most}}^j] = [7/30, 1, 0, 1/15]$, and (7) gives:

$$C_{\text{most}} = (7/30) / s_1 + 1 / s_2 + (1/15) / s_4$$

which means that s_2 is certainly an element of the fuzzy "most"-core, while s_1 belongs to this core to the extent $7/30$, s_4 to the extent $1/15$, i.e. not too high; on the other hand s_3 is certainly not in this core. $\square$

The strength a defeat of some prespecified level may also be accounted for in the definition of a core. Namely, a fuzzy α/Q -core, $C_{\alpha/Q}$, has been defined by Kacprzyk [7] as a fuzzy set of options such that Q individuals are not sufficiently (at least to degree $1-\alpha$) against them.

One can also explicitly account for how strongly individual k prefers s_j over s_i , and use Kacprzyk's

[7] definition of a fuzzy s/Q -core, $C_{s/Q}$, which is a fuzzy set of options such that Q individuals are not strongly (to a specific degree from $[0,1]$) against them.

3 Group decision making under individual intuitionistic fuzzy preference relations

Each individual $k = 1, 2, 3, 4$ gives his or her own preferences not only as a preference matrix R_k but also as a matrix Π_k of intuitionistic indices (cf. Section 1). The intuitionistic indices, $0 \leq \pi_{ij}^k \leq 1$, are such that the higher π_{ij}^k the higher a hesitation margin of individual k as to the preference between s_i and s_j whose intensity is given by r_{ij}^k . The intuitionistic indices let us calculate the best final result (and the worst one) we can expect in a process leading to a final group decision. During that process an individual k can change his preferences in the following way. He can (maximally) increase his preference by adding the value of the intuitionistic index (i.e. $r_{ij}^{k(max)} = r_{ij}^k + \pi_{ij}^k$). So in fact his preference lies in the interval $[r_{ij}^k, r_{ij}^k + \pi_{ij}^k]$.

Example 2. Let the individual intuitionistic fuzzy preference relations are, respectively:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} - & 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.7 & - & 0.6 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & - & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.3 & - \end{bmatrix} \quad [R_2] = \begin{bmatrix} - & 0.4 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & - & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 & - & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 & - \end{bmatrix}$$

$$[\Pi_1] = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & - & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & - & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 & - \end{bmatrix} \quad [\Pi_2] = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & - & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & - & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & - \end{bmatrix}$$

$$[R_3] = \begin{bmatrix} - & 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & - & 0.8 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & - & 0.5 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & - \end{bmatrix} \quad [R_4] = \begin{bmatrix} - & 0.4 & 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & - & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & - & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & - \end{bmatrix}$$

$$[\Pi_3] = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & - & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & - & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & - \end{bmatrix} \quad [\Pi_4] = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & - & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & - & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & - \end{bmatrix}$$

Notice, that for the above R_k 's $r_{ij}^k + r_{ji}^k = 1$, which was fulfilled in Example 1, is not valid any more. Now, the following condition must be fulfilled

$$r_{ij}^k + r_{ji}^k + \pi_{ij}^k = 1 \text{ or } r_{ij}^k + r_{ji}^k + \pi_{ji}^k = 1 \quad (8)$$

because Π_k is symmetric. It is obvious that the hesitation margin on decision s_i over s_j is the same as on decision s_j over s_i .

The values $\pi_{ij}^k = 0$ mean that individual k is certain as to his or her preference of decision s_i over s_j (even when $r_{ij} = 0.5$, which means that there is no preference between s_i and s_j and, moreover, an individual will not change his or her opinion).

By performing the same steps as before, we obtain

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} h_{ij}^1 \\ h_{ij}^2 \\ h_{ij}^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & [1] \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ [1] & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h_{ij}^4 \\ h_{ij}^5 \\ h_{ij}^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & [1] \\ 1 & 1 & [1] & - \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} h_{ij}^7 \\ h_{ij}^8 \\ h_{ij}^9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & [1] \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ [1] & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h_{ij}^{10} \\ h_{ij}^{11} \\ h_{ij}^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - & [1] \\ 1 & 1 & [1] & - \end{bmatrix} \quad (9) \end{aligned}$$

It is easy to notice that in the above matrices not always $h_{ij}^k + h_{ji}^k = 1$ which is the effect of (8), and such cases are indicated in those matrices as [1].

For instance in example 2 shown above we have: $h_{14}^1 = h_{41}^1 = 1$, $h_{34}^2 = h_{43}^2 = 1$, $h_{14}^3 = h_{41}^3 = 1$, and $h_{34}^4 = h_{43}^4 = 1$. The case: $h_{ij}^k = h_{ji}^k = 1$ means that neither s_i nor s_j is preferred (the final result will be given by the value π_{ij}^k). In this case it is necessary to assume:

$$h_{ij}^k = h_{ji}^k = 0 \quad (10)$$

i.e. to assume that the available knowledge and the individual's opinion makes it only possible to say that no option is in fact preferred which is denoted by [0].

Finally, due to (10), we obtain the following h_{ij}^k 's due to (9):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} h_{ij}^1 \\ h_{ij}^2 \\ h_{ij}^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & [0] \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ [0] & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h_{ij}^4 \\ h_{ij}^5 \\ h_{ij}^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & [0] \\ 1 & 1 & [0] & - \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} h_{ij}^7 \\ h_{ij}^8 \\ h_{ij}^9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & [0] \\ 0 & - & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ [0] & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} h_{ij}^{10} \\ h_{ij}^{11} \\ h_{ij}^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & - & [0] \\ 1 & 1 & [0] & - \end{bmatrix} \end{aligned}$$

From (4) and (5) we have

$$[h_j] = [6/12, 10/12, 2/12, 0] \quad (11)$$

and (6) gives $[v_{most}^j] = [4/10, 1, 0, 0]$.

But now it is also necessary to take into account the hesitation margin of individual k , given by π_k . In the presented algorithm (3)-(7), only the formulas (4) and (5) will be applied now. So all calculations are performed on the values of the matrix Π_k , i.e. we obtain the aggregated values

$$\pi_j'^k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n \pi_{ij}^k \quad (12)$$

$$\pi_j' = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \pi_j'^k \quad (13)$$

and (12) and (13) yield

$$[\pi_j'] = [\pi_1', \pi_2', \pi_3', \pi_4'] = [1/12, 8/120, 13/120, 31/120] \quad (14)$$

So the hesitation margin $[\pi_j']$ defined by (14) must be taken into account in the values $[h_j]$ previously calculated by (11) (The value π_j' added to h_j gives the upper bound of the interval). In the discussed example (11) and (14), the values h_j can lay in the following ranges:

$$h_j = [(6/12, 7/12), (100/120, 108/120), (20/120, 33/120), (0, 31/120)]$$

Therefore, $v_{most}^j = [(4/10, 17/30), (1), (0), (0)]$ is obtained from (6), and (11) gives $C_{most} = (4/10, 17/30) / s_1 + 1 / s_2$ which means that s_2 (as before) is certainly an element of the intuitionistic fuzzy "most"-core, s_3 and s_4 - certainly are not, whereas s_1 belongs to this core to the extent given by a value from the interval $(4/10, 17/30)$. $\square$

Taking into account all the previous considerations on hesitation margin, we can employ a similar reasoning and apply them to the intuitionistic fuzzy α/Q -core, $C_{\alpha/Q}$ [13].

4 Group decision making via a social fuzzy preference relation

Now, in the derivation of a solution, we should follow the scheme: $\{R_1, \dots, R_m\} \rightarrow R \rightarrow \text{solution}$, where R is a social fuzzy preference relation. Therefore, first, an aggregation of the individual fuzzy preference relations into a social fuzzy preference relation should be performed. It is assumed that the social fuzzy preference relation $R = [r_{ij}]$ is determined as follows [7]:

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_{ij}^k & \text{for } i \neq j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

$i, j = 1, \dots, n$, where

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{if } r_{ij}^k > 0.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

$i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$. R need not to be reciprocal, though $r_{ij} \leq 1 - r_{ji}$.

Example 3. For the four individual intuitionistic fuzzy preference relations from Example 2, we have from (15) and (16)

$$R = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} - & 0 & 1 & 1/2 \\ 3/4 & - & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \quad (17)$$

$\square$

Now we will consider some counterparts of the two popular solutions concepts: the consensus winner (the similar procedure can be applied to α -consensus winner [11, 13]).

The consensus winner is defined as

$$s_i \in W \Leftrightarrow \forall s_j \neq s_i: r_{ij} > 0.5 \quad (18)$$

i.e. an option s_i belong to the set of consensus winners W if and only if there is no other option preferred over s_i (cf. Nurmi [11]).

By introducing a fuzzy majority given as a fuzzy linguistic quantifier Q , the concept of a fuzzy Q -consensus winner may be introduced that is defined as a fuzzy set of options that are preferred over Q other options (Kacprzyk [7]).

Formally, first we use

$$g_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{if } r_{ij}^k > 0.5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

and

$$g_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n g_{ij} \quad (20)$$

is the extent to which s_i is preferred. Then

$$z_Q^i = \mu_Q(g_i) \quad (21)$$

is the extent to which s_i is preferred over Q other options.

The fuzzy Q -consensus winner is then defined as

$$W_Q = z_Q^1 / s_1 + \dots + z_Q^n / s_n \quad (22)$$

Example 4. Let us determine W_{most} for the social fuzzy preference relation from Example 3. First, from (19), we have

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} - & 0 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{bmatrix} \quad (23)$$

and from (20), $[g_i] = [g_1, g_2, g_3, g_4] = [1/3, 1, 0, 0]$.

Next, from (21), $z_{most}^i = [1/15, 1, 0, 0]$ and finally (22) yields $w_{most} = (1/15)/s_1 + 1/s_2$. $\square$

5 Group decision making via a social intuitionistic fuzzy preference relation

Now we will extend the above concept of social fuzzy preference relations to the case of social intuitionistic fuzzy preference relations.

As we consider intuitionistic fuzzy sets, social intuitionistic fuzzy preference relations must take into account not only the formulas (15)-(16), but also the hesitation margin. As before, all calculations are performed on the values of the Π_k matrix, i.e.

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \pi_{ij}^k & \text{for } i \neq j, \\ 0 & \text{for } i = j \end{cases} \quad (24)$$

$i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$.

Example 5. For four individuals with the intuitionistic fuzzy preference relations from Example 2, we have from (16) and (15) the matrix R as in Example 3, and from (24) we have:

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} - & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & - & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & - & 13/40 \\ 1/4 & 1/5 & 13/40 & - \end{bmatrix}$$

$\square$

A similar procedure should be applied in case of the consensus winner and α -consensus winner. In addition to the formulas (19)-(22) for R , one should derive similar formulas for the hesitation margins. So, to (20) we should add

$$\pi_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n \pi_{ij} \quad (25)$$

which yields for the data from Example 2: $\Pi = [1/12, 1/15, 13/120, 31/120]$ what gives (as before,

the value π_i added to z_i gives the upper bound of the interval) for the data from Example 4:

$$W_{most} = (1/15, 3/20)/s_1 + 1/s_2 + (0, 13/120)/s_3 + (0, 31/120)/s_4$$

In an analogous way the procedure can be augmented in case of the α -consensus winner, and in case the s/Q -consensus winner [13].

6 Concluding remarks

In the paper we have proposed some solution concepts in group decision making under "intuitionistic fuzziness", i.e. with intuitionistic (individual and social) fuzzy preference relations. The proposed solution concepts seem to well reflect real perception and intuition as to how group decision are to be made, and the use of intuitionistic fuzzy sets seems to provide a tool for accomodating some more general concept aspect of fuzziness.

References

- [1] Atanassow K.T. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 20, 87-96.
- [2] Atanassov K.T. (1988). Review and new results on intuitionistic fuzzy sets. IM-MFAIS-1.
- [3] Fedrizzi, M., Kacprzyk, J. and Nurmi, H. (1993). Consensus degrees under fuzzy majorities and fuzzy preferences using OWA (ordered weighted average) operators, Control and Cybernetics, 22, 71--80.
- [4] Kacprzyk, J. (1984). Collective decision making with a fuzzy majority rule, Proc. WOGSC Congress, AFCET, Paris, pp. 153--159.
- [5] Kacprzyk, J. (1985a). Some 'commonsense' solution concepts in group decision making via fuzzy linguistic quantifiers. In J. Kacprzyk and R.R. Yager (Eds.): Management Decision Support Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Verlag TUV Rheinland, Cologne, pp. 125--135.
- [6] Kacprzyk, J. (1985b). Group decision-making with a fuzzy majority via linguistic quantifiers. Part I: A consensory-like pooling; Part II: A competitive-like pooling, Cybernetics and

- Systems: an Int. J., 16, 119--129 (Part I), 131--144 (Part II).
- [7] Kacprzyk, J. (1986). Group decision making with a fuzzy linguistic majority, *Fuzzy Sets and Systems*, 18, 105--118.
 - [8] Kacprzyk, J., Fedrizzi, M. and Nurmi, H. (1992). Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority, *Fuzzy Sets and Systems*, 49, 21--31.
 - [9] Kacprzyk, J., Nurmi, H. and Fedrizzi, M., Eds. (1996). *Consensus under Fuzziness*, Kluwer, Boston.
 - [10] Kacprzyk, J. and Roubens, M., Eds. (1988). *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*, Springer--Verlag, Heidelberg.
 - [11] Nurmi, H. (1981). Approaches to collective decision making with fuzzy preference relations, *Fuzzy Sets and Systems*, 6, 249--259.
 - [12] Nurmi, H. and Kacprzyk, J. (1991). On fuzzy tournaments and their solution concepts in group decision making, *Europ. J. of Operational Research*, 51, 223--232.
 - [13] Szmidt, E. and Kacprzyk, J. (1996). Intuitionistic Fuzzy Sets in Group decision making. *Notes on IFS*, 2, 15-32.
 - [14] Szmidt, E. and Kacprzyk, J. (1996). Group decision making via intuitionistic fuzzy sets. *Proceedings of FUBEST'96* (Sofia, Bulgaria), pp. 107-112.
 - [15] Szmidt, E. and Kacprzyk, J. (1997). Intuitionistic fuzzy sets for more realistic group decision making. *Proceedings of TRANSITIONS'97* (Warsaw, Poland), pp. 430-433.
 - [16] Tanino, T. (1984). Fuzzy preference orderings in group decision making, *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 117--131.
 - [17] Zadeh, L.A. (1983). A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computers and Maths with Appls*, 9, 149--184.

CLAUSURA TRANSITIVA Y RELACIONES DE "BETWEENNESS"*

D. Boixader

Sec. Matemàtiques i Inf.

E.T.S.A.V.

Pere Serra 1-15,

08190 Sant Cugat.

e-mail: boixader@ea.upc.es

J. Jacas

Sec. Matemàtiques i Inf..

E.T.S.A.B.

Avda. Diagonal 649,

08028 Barcelona.

e-mail: jacas@ea.upc.es

J. Recasens

Sec. Matemàtiques i Inf.

E.T.S.A.V.

Pere Serra 1-15,

08190 Sant Cugat.

e-mail: recasens@ea.upc.es

Resumen

Se define la longitud de un operador de indistinguibilidad y se usa para relacionar su generación a través del producto Max-T y del Teorema de Representación con T una t-norma arquimediana estricta. La relación se obtiene teniendo en cuenta que los operadores de indistinguibilidad generan relaciones de "betweenness". El estudio se extiende a operadores descomponibles.

Palabras clave: indistinguibilidad, dimensión, t-norma arquimediana, relación de "betweenness", clausura transitiva.

1 Introducción

El producto Max-T es una de las herramientas más comunes en lógica fuzzy [3,7]. Una de sus aplicaciones es la obtención de la clausura transitiva de una relación borrosa. Si esta relación es reflexiva y simétrica, entonces su clausura transitiva es un operador de indistinguibilidad [5]. Este es el método más usual de obtener estos operadores. Sin embargo, hay otros métodos para generarlos; por ejemplo, usando el Teorema de Representación 3.4 o construyendo operadores descomponibles a partir de un subconjunto borroso (Definición 3.10).

Este trabajo relaciona estos métodos de generación, cuando la t-norma utilizada sea arquimediana teniendo en cuenta que en este caso los operadores de indistinguibilidad generan relaciones de betweenness métricas en el sentido de Menger [8]. La estructura de estas relaciones depende de la longitud de operador (Definición 4.1) y de su dimensión (Definición 3.5).

Dado que la longitud y la dimensión de una T-indistinguibilidad están relacionadas con su generación

Financiado parcialmente por los proyectos DGICYT PB94-1208 y CICYT TIC96-1393-C06-05

vía Max-T y vía el Teorema de Representación 3.4 respectivamente, las relaciones de betweenness son una herramienta ideal para relacionarlas. Por ejemplo, en la sección 4 se usan para demostrar la equivalencia entre la unidimensionalidad y la maximalidad de la longitud. Este resultado se puede interpretar mediante la siguiente regla "fuzzy": "A una dimensión grande le corresponde una longitud pequeña, y viceversa".

En la sección 4, también se estudia la relación entre la dimensión y la longitud para operadores descomponibles.

2 Preliminares

Los resultados de esta sección son bien conocidos y se incluyen para fijar la notación.

Definición 2.1. Sea T una t-norma y R, S dos relaciones borrosas definidas en un conjunto X . El producto Max-T (o Sup-T) $R \circ S$ de R y S es la relación borrosa en X definida por

$$(R \circ S)(x, y) = \sup_{z \in X} T(R(x, z), S(z, y)) \quad \forall x, y \in X.$$

Debido a la asociatividad del producto Max-T, se puede definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, la potencia R^n de una relación borrosa R en X de forma recurrente:

$$\begin{aligned} R^1 &= R \\ R^{n+1} &= R \circ R^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definición 2.2. La T-clausura transitiva $\bar{R}$ de una relación borrosa R en un conjunto X se define como

$$\bar{R} = \sup_{n \in \mathbb{N}} R^n.$$

Proposición 2.3. Sea R una relación borrosa reflexiva y simétrica en un conjunto X finito de cardinal n . Entonces $\bar{R} = R^{n-1}$.

Proposición 2.4. Sea R una relación borrosa reflexiva y simétrica en un conjunto X . $R = \bar{R}$ si y sólo si, $\forall x, y, z \in X, T(R(x, y), R(y, z)) \leq R(x, z)$.

Una relación borrosa R reflexiva y simétrica en X que coincide con su T-clausura transitiva se llama operador de indistinguibilidad [5], equivalencia borrosa [3], igualdad borrosa [7] o similitud [15]. Se dice que separa puntos cuando $x \neq y \Rightarrow R(x, y) \neq 1$.

NOTA: A partir de este momento, si no se dice lo contrario, se supondrá que T es una t-norma arquimediana y E una T-indistinguibilidad que separa puntos en un conjunto X y tal que para todo $x, y \in X \Rightarrow E(x, y) \neq 0$.

3 Relaciones de betweenness

En esta sección se demostrará que toda T-indistinguibilidad E en X define una relación de betweenness métrica y se establecerá su relación con la dimensión de E y su descomponibilidad.

La noción de betweenness métrica aparece en [8]:

Definición 3.1. Una relación de betweenness métrica en un conjunto X es una relación ternaria B en X (i.e. $B \subset X \times X \times X$) tal que $\forall x, y, z, t \in X$

$$3.1.1. (x, y, z) \in B \Rightarrow x \neq y \neq z \neq x$$

$$3.1.2. (x, y, z) \in B \Rightarrow (z, y, x) \in B$$

$$3.1.3. (x, y, z) \in B \Rightarrow (y, z, x) \notin B, (z, x, y) \notin B$$

$$3.1.4. (x, y, z) \in B, (x, z, t) \in B \Rightarrow (x, y, t) \in B, (y, z, t) \in B.$$

Si $(x, y, z) \in B$, se dice que y está entre x e z .

Si dados tres elementos distintos de B cualesquiera, uno está entre los otros dos, se dice que la relación de betweenness es lineal o total.

Teorema 3.2. Sea E una T-indistinguibilidad en X . La relación ternaria B definida en X por $(x, y, z) \in B$ si, y sólo si, $T(E(x, y), E(y, z)) = E(x, z)$ y $x \neq y \neq z \neq x$ es una relación betweenness en X .

Demostración.

3.1.1. Trivial.

3.1.2. Se sigue de la conmutatividad de T y la simetría de E .

3.1.3. Demostraremos, por ejemplo, que si $(x, y, z) \in B$, entonces $(y, z, x) \notin B$:

Si $T(E(y, z), E(z, x)) = E(y, x)$, entonces

$$\begin{aligned} T(T(E(y, z), E(z, x)), E(y, z)) &= T(E(y, x), E(y, z)) \\ &= E(x, z) \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$T(T(E(y, z), E(y, z)), E(x, z)) = E(x, z).$$

Puesto que $E(x, z) \neq 0$, se sigue que $T(E(y, z), E(y, z)) = 1$ y por lo tanto, $E(y, z) = 1$ contradiciendo la separabilidad de E .

3.1.4. Demostraremos, por ejemplo, que si $(x, y, z) \in B$ y $(x, z, t) \in B$, entonces $(y, z, t) \in B$:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= T(E(x, z), E(z, t)) = \\ &= T(T(E(x, y), E(y, z)), E(z, t)) = \\ &= T(E(x, y), T(E(y, z), E(z, t))) \end{aligned}$$

y, como que $T(E(y, z), E(z, t)) \leq E(y, t)$, la monotonía de T asegura que $E(x, t) \geq T(E(x, y), E(y, t)) \geq T(E(x, y), T(E(y, z), E(z, t))) = E(x, t)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} T(E(x, y), E(y, t)) &= E(x, t) = \\ &= T(E(x, y), T(E(y, z), E(z, t))) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

y, puesto que $E(x, y) \neq 0$

$$E(y, t) = T(E(y, z), E(z, t)).$$

La estructura de la relación de betweenness generada por una T-indistinguibilidad refleja su complejidad combinatoria expresada por su dimensión, un concepto que surge de forma natural tras el próximo teorema.

Lema 3.3. Sea h un subconjunto borroso de X , T una t-norma continua y $\hat{T}$ su quasi-inversa o residuación. La relación borrosa E_h en X definida por

$$E_h(x, y) = \hat{T}(\text{Max}(h(x), h(y)) \mid \text{Min}(h(x), h(y)))$$

es una T-indistinguibilidad.

Usando este lema y el hecho de que el ínfimo de T-indistinguibilidades es también una T-indistinguibilidad, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.4. [12] Sea E una relación borrosa en un conjunto X y T una t -norma continua. E es una T -indistinguibilidad si y sólo si, existe una familia $\{h_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos borrosos de X tal que

$$E = \inf_{i \in I} E_{h_i}.$$

Definición 3.5. El ínfimo de los cardinales de los índices de las familias de generadores de una T -indistinguibilidad en el sentido del teorema anterior se llama la dimensión de E .

Teorema 3.6. [5] Sea E una T -indistinguibilidad. E es unidimensional si, y sólo si, la relación de betweenness B determinada por E en X es lineal.

Nota. En [1] se demuestra un teorema de caracterización de T -indistinguibilidades unidimensionales para t -normas continuas arbitrarias que generaliza este resultado.

Corolario 3.7. Sea E una T -indistinguibilidad en un conjunto finito X . E es unidimensional si, y sólo si, el cardinal de B es $2\binom{n}{3}$.

Demostración. Trivial. (El factor 2 es debido a 3.1.2.).

La relación entre la dimensión de una T -indistinguibilidad y la relación de betweenness que determina se muestra también en el siguiente resultado:

Teorema 3.8. [10]. Sea E una T -indistinguibilidad en un conjunto finito X de cardinal n . Si E es bidimensional, entonces el cardinal de B es mayor o igual que $2T(n, 5, 3)$. donde $T(n, 5, 3)$ es un número de Turán que se ha conjeturado que vale $2\binom{\frac{n}{3}}{3}$, si n es par y $\binom{\frac{n-1}{3}}{3} + \binom{\frac{n+1}{3}}{3}$, si n es impar [2].

Veamos la relación entre descomponibilidad y relación de betweenness.

Definición 3.9. Una relación de betweenness B en un conjunto X se llama radial si, y sólo si, existe un elemento a de X tal que a está entre cualesquiera otros dos elementos de X y éstas son las únicas ternas de B (i.e. $(x, y, z) \in B$ sii $y = a$). El elemento a se llama el centro de la relación de betweenness.

Definición 3.10. Sea E una T -indistinguibilidad en X . E es descomponible si, y sólo si, existe un subconjunto borroso h de X tal que

$$E(x, y) = \begin{cases} T(h(x), h(y)), & \text{si } x \neq y \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 3.11. Sea E una T -indistinguibilidad en X y B la relación de betweenness generada por E en X . E es descomponible si, y sólo si, B es radial o E se puede extender a una T -indistinguibilidad $\bar{E}$ en $\bar{X} = X \cup \{a\}$ con $a \notin X$ de tal modo que la relación de betweenness $\bar{B}$ generada por $\bar{E}$ en $\bar{X}$ es radial con centro a .

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $E(x, y) = T(h(x), h(y))$, si $x \neq y$. Si existe $x \in X$ tal que $h(x) = 1$, estamos en el primer caso. Si no, podemos definir el subconjunto borroso $\bar{h}$ de $\bar{X}$ mediante $\bar{h}(x) = h(x) \forall x \in X$ y $\bar{h}(a) = 1$ y considerar la relación $\bar{E}$ descomponible generada por $\bar{h}$.

$\Leftarrow$ Consideremos el subconjunto borroso h de X definido por $h(x) = E(x, c) \forall x \in X$ donde c es el centro de B , en el primer caso, o $h(x) = \bar{E}(x, a) \forall x \in X$ en el segundo. E está generada por h .

4 La longitud de una T -indistinguibilidad

En esta sección se introducirá la noción de longitud de una T -indistinguibilidad y se establecerá su relación con su dimensión y su posible descomponibilidad.

Definición 4.1. Dada una t -norma T y E una T -indistinguibilidad en un conjunto X , la longitud de E es el mayor $k \in \mathbb{N}$ (si existe) tal que podemos hallar una relación reflexiva y simétrica R en X con $R^{k-1} \neq R^k = E$. Si no existe tal k , la longitud de E es ∞ .

Nótese que longitud $E \geq 1$, puesto que $E^1 = E$, y si X es finito de cardinal n , la Proposición 2.4. nos asegura que longitud $E \leq n - 1$.

Para simplificar la notación y gracias a la asociatividad de las t -normas, podemos definir $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de forma inductiva: $T(a_1) = a_1$, $T(a_1, a_2, \dots, a_n) = T(T(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

Lema 4.2. Sea R una relación borrosa en un conjunto finito X , $a, b \in X$, T una t -norma continua y k un entero positivo

$$R^k(a, b) = \sup_{x_2, \dots, x_k \in X} T(R(a, x_2), R(x_2, x_3), \dots, R(x_k, b)).$$

Demostración. El lema es trivial para $k = 1, 2$. Supongamos cierto el resultado para $k = n$

$$\begin{aligned} R^{n+1}(a, b) &= (R^n \circ R)(a, b) = \\ &= \sup_{x_{n+1} \in X} T(R^n(a, x_{n+1}), R(x_{n+1}, b)) = \\ &= \sup_{x_{n+1} \in X} T\left(\sup_{x_2, \dots, x_n \in X} T(R(a, x_2), \dots, \right. \\ &= R(x_n, x_{n+1})), R(x_{n+1}, b)) = \\ &= \sup_{x_2, \dots, x_{n+1}} T(R(a, x_2), \dots, R(x_{n+1}, b)). \end{aligned}$$

El siguiente lema permitirá relacionar la longitud con la dimensión y la descomponibilidad.

Lema 4.3. Sea E una T-indistinguibilidad en un conjunto finito X y B la relación de betweenness definida por E en X . Si longitud $E = l$, entonces existen $x_1, x_2, \dots, x_{l+1} \in X$ tales que $(x_i, x_j, x_k) \in B$, si $1 \leq i < j < k \leq l+1$.

Demostración. Si longitud $E = l$, entonces existe una relación borrosa, reflexiva y simétrica R en X tal que $E = R^l > R^{l-1}$. Por tanto, existen $x_1, x_{l+1} \in X$ tal que $R^l(x_1, x_{l+1}) > R^{l-1}(x_1, x_{l+1})$. Por otro lado, por el Lema 4.2,

$$R^l(x_1, x_{l+1}) = T(R(x_1, x_2), R(x_2, x_3), \dots, R(x_l, x_{l+1})) \quad (1)$$

para ciertos $x_2, x_3, \dots, x_l \in X$.

Además,

$$R^{j-i}(x_i, x_j) = T(R(x_i, x_{i+1}), R(x_{i+1}, x_{i+2}), \dots, R(x_{j-1}, x_j)) \text{ para todo } j > i, \quad (2)$$

puesto que si

$$\begin{aligned} R^{j-i}(x_i, x_j) &= T(R(x_i, y_{i+1}), R(y_{i+1}, y_{i+2}), \dots, \\ &R(y_{j-1}, x_j)) > \\ &> T(R(x_i, x_{i+1}), R(x_{i+1}, x_{i+2}), \dots, \\ &R(x_{j-1}, x_j)) \end{aligned}$$

para ciertos $y_{i+1}, \dots, y_{j-1} \in X$ se contradiría (1).

De esto se sigue que

$$E(x_i, x_j) = R^{j-i}(x_i, x_j) \forall j > i. \quad (3)$$

puesto que si fuera falso, existiría $k > j - i$ tal que

$$E(x_i, x_j) = R^k(x_i, x_j) > R^{j-i}(x_i, x_j)$$

y de aquí,

$$\begin{aligned} R^k(x_i, x_j) &= T(R(x_i, y_2), R(y_2, y_3), \dots, R(y_k, x_j)) > \\ &> T(R(x_i, x_{i+1}), \dots, R(x_{j-1}, x_j)) \end{aligned}$$

para ciertos $y_2, y_3, \dots, y_k \in X$. Substituyendo $R(x_i, x_{i+1}), \dots, R(x_{j-1}, x_j)$ por $R(x_i, y_2), R(y_2, y_3), \dots, R(y_k, x_j)$ en (1) se tendría

$$R^m(x_1, x_{l+1}) > R^l(x_1, x_{l+1})$$

contradiendo la maximalidad de l .

Ahora, de (2) y (3) el resultado se deduce fácilmente:

Si $i < j < k$, entonces

$$\begin{aligned} T(E(x_i, x_j), E(x_j, x_k)) &= \\ &= T(R(x_i, x_{i+1}), R(x_{i+1}, x_j), R(x_j, x_{j+1}), \dots, \\ &R(x_{k-1}, x_k)) = \\ &= R^{k-i}(x_i, x_k) = E(x_i, x_k) \end{aligned}$$

y por tanto, $(x_i, x_j, x_k) \in B$.

Lema 4.4. Dada una t-norma T arquimediana de generador aditivo t [11], $m \in \mathbb{N}$ y $a \in]0, 1[$, existe $b \in]0, 1[$, tal que $T(a, b, \dots, b) \neq 0$.

Demostración. Dado $x \in]0, 1[$, $T(a, x, \dots, x) = t^{l-1}(t(a) + mt(x))$.

Si $mt(x) < 1 - t(a)$, entonces $T(a, x, \dots, x) \neq 0$. Basta tomar $b > t^{-1}\left(\frac{1-t(a)}{m}\right)$.

Como consecuencia de estos lemas, se pueden demostrar los siguientes resultados:

Teorema 4.5. Si E es una T-indistinguibilidad en un conjunto X de cardinal n entonces E es unidimensional si, y sólo si, longitud $E = n - 1$.

Demostración. $\Rightarrow$ Ordenemos los elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de X de tal modo que $(x_i, x_j, x_k) \in B$ si $i < j < k$ o $k < j < i$, donde B es la relación de betweenness total generada por E en X .

Sea $a = E(x_1, x_n)$. Por el lema 4.4, existe $b \in]0, 1[$ tal que $T(a, b, \dots, b) \neq 0$.

Consideremos la relación reflexiva y simétrica R en X definida por

$$R(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ E(x_i, x_j), & \text{si } |i - j| = 1 \\ T(E(x_i, x_j), b, \dots, b), & \text{si } |i - j| = k > 1. \end{cases}$$

R satisface $R^{n-2} \neq R^{n-1} = E$.

$\Leftarrow$ Se sigue del Lema 4.3.

Teorema 4.6. Sea E una T-indistinguibilidad en X y B la relación de betweenness generada por E en X , longitud $E = 1$ si, y sólo si, $B = \emptyset$.

Demostración. Lema 4.3.

Teorema 4.7. Si E es una T-indistinguibilidad descomponible en un conjunto finito X , entonces longitud $E \leq 2$.

Demostración. Por el Teorema 3.11, la relación de betweenness B generada por E en X es vacía o radial. En el primer caso, longitud $E = 1$ por el Teorema 4.6. En el segundo caso, por el Lema 4.3, longitud $E \leq 2$.

5 Conclusiones

En este trabajo se ha definido la longitud de una T-indistinguibilidad y se ha usado para relacionar distintos modos de generar estas relaciones cuando la t-norma es arquimediana, aprovechando que en este caso genera relaciones de betweenness. En particular, se ha demostrado que la maximalidad de la longitud es equivalente a la unidimensionalidad, y que la longitud de las T-indistinguibilidades descomponibles es a lo sumo 2.

Estos resultados no pueden generalizarse a t-normas no arquimedianas, porque en este caso no se definen relaciones de betweenness. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

son dos Min-indistinguibilidades de longitud 2 y la primera es unidimensional, mientras que la segunda tiene dimensión 2 [4].

Referencias

- [1] D. Boixader. *Contribució a l'estudi dels morfismes entre operadors d'indistingibilitat. Aplicació al raonament aproximat*. Ph. D. UPC, 1997.
- [2] P. Erdős. On the combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatoria* 1 25-42, 1981.
- [3] S. Gottwald, H. Bandemer. *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Methods*. Wiley & Sons, 1996.
- [4] J. Jacas. Similarity relations: the calculation of minimal generating families. *Fuzzy Sets and Systems*, 35, 151-162, 1990.
- [5] J. Jacas, J. Recasens. Fuzzy T-transitive relations: eigenvectors and generators. *Fuzzy Sets y Systems*, 72, 147-154, 1995.
- [6] J. Jacas, J. Recasens. Decomposable indistinguishability operators. *Proceedings 6th IFSA Congress*, Sao Paulo, 1995.
- [7] R. Kruse, J. Gebhard, F. Klawonn. *Foundations of Fuzzy Systems*. John Wiley & Sons, Stuttgart, 1994.
- [8] K. Menger. Untersuchungen über allgemeine Metrik. *Math Ann.* 100, 75-113, 1928.
- [9] S.V. Ovchinnikov. Representation of transitive fuzzy relations, in *Aspects of vagueness*, Reidel, 105-118, 1984.
- [10] J. Recasens. Sobre la representació i generació de relacions d'indistingibilitat. Ph. D. UPC, 1992.
- [11] J. Recasens. On a geometric combinatorial problem. *Discrete Mathematics*. 184 273-279, 1998.
- [12] B. Schweizer, A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [13] L. Valverde. On the Structure of F-indistinguishability operators. *Fuzzy Sets and Systems* 17 313-328, 1985.
- [14] L.A. Zadeh. Similarity relations y fuzzy orderings. *Inform. Sci.* 3 177-200, 1971.

Una caracterización de medidas de borrosidad

Pedro Miranda Menéndez
Departamento de Estadística, I.O. y D.M.
Calvo Sotelo s/n, 33007 Oviedo

Pedro Gil Alvarez
Departamento de Estadística, I.O. y D.M.
Universidad de Oviedo
Calvo Sotelo s/n, 33007 Oviedo

1 Resumen

En este trabajo se estudian las relaciones entre medidas de borrosidad [5] sobre un referencial finito y los operadores de agregación. Se consideran las dos interpretaciones más comunes del concepto "borrosidad" y se caracterizan todas las medidas de borrosidad según estas interpretaciones por medio de los operadores de agregación. Se estudian también varios ejemplos en los que dado un operador de agregación, se halla la medida de borrosidad asociada y viceversa.

2 Introducción

Los operadores de agregación son operaciones sobre los grados de pertenencia de varios conjuntos difusos cuyo resultado es a su vez un grado de pertenencia de un conjunto difuso. En particular las uniones y las intersecciones difusas son casos especiales de operadores de agregación, existiendo también operadores de agregación que no son ni unión ni intersección difusa llamados operadores promedio. Existen muchas variantes en la definición de operadores de agregación según los distintos autores y según el estudio que se esté realizando. Nosotros utilizaremos la definición dada por Klir & Folger en [3].

Definición 1 *Un operador de agregación es una función*

$$f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

que verifica

- $f(\vec{0}) = 0, f(\vec{1}) = 1$ (condiciones de frontera).

- Si $\vec{a} \leq \vec{b} \Rightarrow f(\vec{a}) \leq f(\vec{b})$ (monotonía).

Por otra parte tenemos las medidas de borrosidad, que aparecen en la década de los 70 como un intento de medir matemáticamente cuán borroso o difuso es un subconjunto difuso de un conjunto universal dado X . En lo que sigue consideraremos X un conjunto finito con n elementos $x_1, \dots, x_n$. En concreto una medida de borrosidad está definida sobre todos los subconjuntos difusos de X por:

Definición 2 *Una medida de borrosidad es una función*

$$f : \tilde{P}(X) \rightarrow R^+$$

que verifica

- $f(A) = 0$ si y sólo si A es un conjunto clásico.
- Si $A \prec B$ entonces $f(A) \leq f(B)$.
donde $A \prec B$ significa que A es menos difuso que B .
- $f(A)$ alcanza su máximo si y sólo si A es el subconjunto maximalmente difuso. (Denotaremos el conjunto maximalmente difuso por T .)

En esta definición aparece un problema: En la condición 2 aparece la expresión " A es más difuso que B ", concepto que es subjetivo. El mismo problema aparece en la condición 3 al hablar de " A maximalmente difuso". Es decir, no existe un criterio universal que nos permita decidir sin ningún lugar a dudas

si un subconjunto es más difuso que otro o qué subconjunto es el maximalmente difuso.

Las dos interpretaciones más comunes del término "difuso" o "borroso" son las siguientes:

1. Se dice que un subconjunto es tanto más difuso cuanto más se aleja de los subconjuntos clásicos en el sentido de una distancia. Con esta interpretación $A \prec B$ está dado por:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ si } \mu_B(x) \leq \frac{1}{2}$$

y

$$\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \text{ si } \mu_B(x) \geq \frac{1}{2}$$

para todo $x \in X$.

En consecuencia el subconjunto maximalmente difuso está dado por el subconjunto con grado de pertenencia $\frac{1}{2}$ para todos los elementos del conjunto universal.

2. Se dice que un subconjunto es tanto más difuso cuanto más se diferencia de su complementario, i.e. $A \prec B$ si

$$\sum_{i=1}^n |A(x_i) - A^c(x_i)| \geq \sum_{i=1}^n |B(x_i) - B^c(x_i)|$$

donde el complementario está dado por una complementación difusa. En este caso el subconjunto T vendrá dado por aquel que tiene grado de pertenencia e_c para todos los elementos, con e_c tal que $e_c = c(e_c)$ (caso de que e_c exista). Esta interpretación de "borrosidad" fue introducida por Yager en [6] y desarrollada después por Higashi y Klir en [1]. Es la más usada en la actualidad.

3 Caracterizaciones de medida de borrosidad

Vamos a ver distintas caracterizaciones de medidas de borrosidad a partir de los operadores de agregación. Consideraremos separadamente las dos interpretaciones del concepto "difuso".

3.1 Interpretación 1

Supongamos que la relación $\preceq$ está definida por:

$$A \preceq B \Leftrightarrow |\mu_A(x_i) - \frac{1}{2}| \geq |\mu_B(x_i) - \frac{1}{2}|, \forall i \in 1, \dots, n$$

aunque serviría cualquier otra definición de esta relación conforme a la primera interpretación.

Sea h un operador de agregación. Nuestro objetivo es construir una medida de borrosidad a partir de h . Claramente, esta medida alcanzará su máximo en M ; como h alcanza su máximo en $\bar{1}$ y su mínimo en $\bar{0}$ es lógico pensar en una aplicación que al ser aplicada al vector $\frac{\bar{1}}{2}$ pase a $\bar{1}$ o a $\bar{0}$ según h aparezca en la expresión con signo positivo o negativo. Además, por el tercer axioma de medida de borrosidad, tiene que verificarse que ningún otro vector tenga la misma imagen.

Por los mismas razones, para verificar el primer axioma, la imagen de un subconjunto clásico debe ser $\bar{0}$ o $\bar{1}$ y además estos subconjuntos deben ser los únicos que alcancen este valor.

Una de las posibles funciones que verifica lo anterior es

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (2|\frac{1}{2} - x_1|, \dots, 2|\frac{1}{2} - x_n|).$$

Para simplificar la notación denotaremos

$$h(A) = h(2|\frac{1}{2} - \mu_A(x_1)|, \dots, 2|\frac{1}{2} - \mu_A(x_n)|).$$

En estas condiciones se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1 Sea h un operador de agregación que verifica:

- $h(x_1, \dots, x_n) = 0$ si y sólo si $x_i = 0 \quad \forall i$.
- $h(x_1, \dots, x_n) = 1$ si y sólo si $x_i = 1 \quad \forall i$.

Entonces f es una medida de borrosidad si y sólo si puede escribirse como

$$f(A) = \frac{1 - h(A)}{h(A) + k}, k > 0.$$

Demostración.

En primer lugar vamos a probar que f es una medida de borrosidad:

- Sea A un subconjunto clásico. Por tanto, $\mu_A(x_i) = 0$ ó $\mu_A(x_i) = 1, \forall i$. Entonces

$$f(A) = \frac{1 - h\vec{1}}{h\vec{1} + k} = 0.$$

Además, por las condiciones sobre h (condición 1), se tiene $f(A) = 0$ si y sólo si A es un subconjunto clásico.

- Como $h(T) = 0$ se tiene que $f(T) = \frac{1}{k}$. Está claro que este es el máximo valor que puede alcanzar la función f definida de esta forma, y además por las condiciones sobre h (condición 2), este es el único subconjunto que alcanza este valor.

- Sea $A \preceq B$; entonces

$$|\mu_A(x_i) - \frac{1}{2}| \geq |\mu_B(x_i) - \frac{1}{2}|, \forall i \in 1, \dots, n.$$

Luego $h(A) \geq h(B)$ y así

$$f(A) = \frac{1 - h(A)}{h(A) + k} \leq \frac{1 - h(B)}{h(B) + k} = f(B).$$

Por tanto f es una medida de borrosidad.

Veamos ahora que cualquier medida de borrosidad puede ponerse de esta forma. Sea f una medida cualquiera. Queremos encontrar un operador de agregación h y $k > 0$, de manera que podamos expresar f según la expresión del enunciado del teorema. Si este h y k existen, tendremos

$$h(A) = \frac{1 - kf(A)}{1 + f(A)}.$$

En primer lugar vamos a determinar el valor de k . Sabemos que h debe tomar valores en $[0, 1]$. Por tanto el numerador debe ser positivo y así $k \leq \frac{1}{f(T)}$. Como además f es máximo en T elegiremos

$$k = \frac{1}{f(T)}.$$

Así h está bien definida pues f es no negativa y, por tanto, el denominador no se anula nunca. Además h tomará valores en $[0, 1]$ por el valor que hemos tomado para k .

Veamos finalmente que h verifica los axiomas:

$$h(\vec{0}) = \frac{1 - kf(M)}{1 + f(M)} = 0.$$

$$h(\vec{1}) = \frac{1 - kf(X)}{1 + f(X)} = 1.$$

- $\vec{a} \leq \vec{b}$. Definimos

$$A \equiv \left(\frac{1 - a_1}{2}, \dots, \frac{1 - a_n}{2} \right).$$

$$B \equiv \left(\frac{1 - b_1}{2}, \dots, \frac{1 - b_n}{2} \right).$$

Entonces, A, B son subconjuntos difusos de X y además $B \preceq A$, se tiene $f(A) \geq f(B)$ y así

$$h(\vec{a}) = \frac{1 - kf(A)}{1 + f(A)} \leq \frac{1 - kf(B)}{1 + f(B)} = h(\vec{b}),$$

lo que completa la demostración ■

Nota 1 Podríamos haber cambiado el valor absoluto por otras funciones como por ejemplo las dadas por $4(x_i - \frac{1}{2})^2, 8(x_i - \frac{1}{2})^3, \dots$ lo que proporciona un amplio abanico de posibilidades para caracterizar las medidas de borrosidad y permite utilizar en cada caso la función que mejor se ajuste a nuestro problema, o escoger la posibilidad que tenga buenas propiedades. Esto es debido a que estas funciones son utilizadas simplemente para conseguir relacionar los operadores de agregación y las medidas de borrosidad y la única propiedad que deben verificar es que sean decrecientes en $[0, \frac{1}{2}]$ y crecientes en $[\frac{1}{2}, 1]$ y aplicar a $\frac{\vec{1}}{2}$ el vector $\vec{0}$, y a $\vec{1}, \vec{0}$ el vector $\vec{1}$.

Nota 2 Sólo necesitamos $k > 0$ para que el denominador no se anule. Si admitimos que una medida de borrosidad puede tomar el valor ∞ entonces bastaría tomar $k \geq 0$.

Ejemplo 1 Vamos a hallar la medida de borrosidad asociada al operador de agregación

$$h(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

y supongamos $k = 1$. Entonces se tiene

$$f(A) = \frac{1 - 2(\mu(x_1) - \frac{1}{2})^2 - 2(\mu(x_2) - \frac{1}{2})^2}{1 + 2(\mu(x_1) - \frac{1}{2})^2 + 2(\mu(x_2) - \frac{1}{2})^2}$$

Ejemplo 2 Consideremos la medida de borrosidad definida por De Luca & Termini en [4]. Esta medida de borrosidad viene dada por

$$f(A) = - \sum_{i=1}^n [\mu_i \log \mu_i + (1 - \mu_i) \log (1 - \mu_i)]$$

Entonces puede comprobarse que $k = n$ y que el operador de agregación asociado es

$$h(\bar{x}) = \frac{1 + n \sum_{i=1}^n [(\frac{x_i}{2} + \frac{1}{2}) \log(\frac{x_i}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{x_i}{2}) \log(\frac{1}{2} - \frac{x_i}{2})]}{1 - n \sum_{i=1}^n [(\frac{x_i}{2} + \frac{1}{2}) \log(\frac{x_i}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{x_i}{2}) \log(\frac{1}{2} - \frac{x_i}{2})]}$$

Otra expresión más sencilla del teorema anterior es

Teorema 2 Sea h un operador de agregación que verifica:

- $h(x_1, \dots, x_n) = 0$ si y sólo si $x_i = 0 \quad \forall i$.
- $h(x_1, \dots, x_n) = 1$ si y sólo si $x_i = 1 \quad \forall i$.

Entonces $f: \tilde{P}(X) \rightarrow R^+$ es una medida de borrosidad si y sólo si puede escribirse como

$$f(A) = \frac{1 - h(A)}{k}, k > 0.$$

La demostración es análoga a la anterior.

Ejemplo 3 Consideremos la medida de borrosidad dada por

$$f(A) = \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_C(x_i)|^w \right)^{\frac{1}{w}}, \quad w > 0$$

donde C es el subconjunto clásico más próximo a A . Esta familia de medidas fue introducida por Kaufmann en [2]. En este caso

$$k = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^w \right)^{\frac{1}{w}}$$

y el operador de agregación viene dado por

$$h(x_1, \dots, x_n) = 1 - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{2} \right)^w \right)^{\frac{1}{w}} \left(\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i}{2} \right)^w \right)^{\frac{1}{w}}.$$

Nota 3 Todas las observaciones que siguen al teorema 1 son también válidas para el teorema 2.

3.2 Interpretación 2

Sea ahora c una complementación difusa y sea e_c su punto de equilibrio (si existe), esto es, un valor en $[0,1]$ tal que $c(e_c) = e_c$. En general, dada una complementación difusa no tenemos siempre un punto de equilibrio pero en caso de existir un punto de equilibrio, éste será único. Puede probarse que si la complementación difusa es continua entonces existe un punto de equilibrio. Como en la mayoría de las aplicaciones se consideran complementaciones continuas nosotros supondremos en adelante que c lo es. En este caso existe un único subconjunto maximalmente difuso que vendrá dado por el subconjunto con grado de pertenencia e_c para todos los elementos del conjunto universal.

Sea h un operador de agregación cualquiera. Nuestro objetivo es encontrar una expresión que relacione las medidas de borrosidad según esta interpretación con los operadores de agregación. Como en el caso anterior buscamos una operación para componerla con el operador de agregación.

Sea A un subconjunto clásico cualquiera. Entonces $\mu_A(x_i) = 0$ ó 1 y por tanto

$$|\mu_A(x_i) - \mu_{A^c}(x_i)| = 1, \quad \forall i$$

pues para toda complementación difusa tiene que verificarse $c(0) = 1, c(1) = 0$.

Sea ahora M el subconjunto de X maximalmente difuso. En este caso $\mu_M(x_i) = e_c$ y por tanto se tiene

$$|\mu_M(x_i) - \mu_{M^c}(x_i)| = 0, \quad \forall i.$$

Parece por tanto lógico considerar la aplicación dada por

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (|x_1 - c(x_1)|, \dots, |x_n - c(x_n)|).$$

Para simplificar la notación escribiremos

$$h(A) = h(|\mu_A(x_1) - \mu_{A^c}(x_1)|, \dots, |\mu_A(x_n) - \mu_{A^c}(x_n)|).$$

En estas condiciones se tiene:

Teorema 3 Sea h un operador de agregación que verifica:

- $h(x_1, \dots, x_n) = 0$ si y sólo si $x_i = 0 \quad \forall i$.
- $h(x_1, \dots, x_n) = 1$ si y sólo si $x_i = 1 \quad \forall i$.

Entonces $f : \tilde{\mathcal{P}}(X) \rightarrow R^+$ es una medida de borrosidad si y sólo si puede escribirse como

$$f(A) = \frac{1 - h(A)}{h(A) + k}, k > 0.$$

Demostración.

En primer lugar vamos a probar que f es una medida de borrosidad:

- Sea A un subconjunto clásico. Por tanto, $\mu_A(x_i) = 0$ ó $\mu_A(x_i) = 1, \forall i$. Entonces

$$f(A) = \frac{1 - h(A)}{h(A) + k} = 0.$$

Además por las condiciones sobre h (condición 1) se tiene $f(A) = 0$ si y sólo si A es un subconjunto clásico.

- Como $h(T) = 0$ se tiene que $f(T) = \frac{1}{k}$. Está claro que este es el máximo valor que puede alcanzar la función f definida de esta forma, y además, por las condiciones sobre h (condición 2), este es el único subconjunto que alcanza este valor.

- Sea $A \preceq B$; entonces

$$|\mu_A(x_i) - \mu_{A^c}(x_i)| \geq |\mu_B(x_i) - \mu_{B^c}(x_i)|, \forall i \in 1, \dots, n.$$

Luego $h(A) \geq h(B)$ y así

$$f(A) = \frac{1 - h(A)}{h(A) + k} \leq \frac{1 - h(B)}{h(B) + k} = f(B).$$

Por tanto f es una medida de borrosidad.

Veamos ahora que cualquier medida de borrosidad puede ponerse de esta forma. Sea f una medida cualquiera. Queremos encontrar un operador de agregación h y $k > 0$, de manera que podamos expresar f según la expresión del enunciado del teorema. Si este h y k existen, tendremos

$$h(A) = \frac{1 - kf(A)}{1 + f(A)}.$$

En primer lugar vamos a determinar el valor de k . Sabemos que h debe tomar valores en $[0, 1]$. Por tanto el numerador debe ser positivo y así $k \leq \frac{1}{f(T)}$. Como además f es máximo en T elegiremos

$$k = \frac{1}{f(T)}.$$

Así h está bien definida pues f es no negativa y, por tanto, el denominador no se anula nunca. Además h tomará valores en $[0, 1]$ por el valor que hemos tomado para k .

Veamos finalmente que h verifica los axiomas:

•

$$h(\vec{0}) = \frac{1 - kf(T)}{1 + f(T)} = 0.$$

$$h(\vec{1}) = \frac{1 - kf(X)}{1 + f(X)} = 1.$$

- $\vec{a} \leq \vec{b}$. Consideremos a_i . Como la complementación difusa que estamos considerando es continua en $[e_c, 1]$, al tomar $g(x) = |x - c(x)|, x \in [e_c, 1]$, g también será continua y tiene como valor mínimo 0 y como valor máximo 1; así siempre podemos encontrar un valor z_i tal que

$$z_i - c(z_i) = a_i$$

Esto es válido para todos los elementos de los vectores $\vec{a}, \vec{b}$. Sean $\vec{z}_a, \vec{z}_b$ los vectores obtenidos para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente. Definimos

$$A \equiv (\vec{z}_a^1, \dots, \vec{z}_a^n).$$

$$B \equiv (\vec{z}_b^1, \dots, \vec{z}_b^n).$$

Entonces, A, B son subconjuntos difusos de X y además $B \preceq A$, se tiene $f(A) \geq f(B)$ y así

$$h(\vec{a}) = \frac{1 - kf(A)}{1 + f(A)} \leq \frac{1 - kf(B)}{1 + f(B)} = h(\vec{b}),$$

lo que completa la demostración ■

Nota 4 Como en el caso anterior podríamos cambiar el valor absoluto por otras funciones como por ejemplo $(\mu_A(x_1) - \mu_{A^c}(x_1))^2, (\mu_A(x_1) - \mu_{A^c}(x_1))^4$, etc.

Análogamente, podríamos suprimir k de la expresión, si admitimos $f(M) = \infty$. En este caso la expresión del teorema quedaría de la forma

$$f(A) = \frac{1 - h(A)}{h(A)}.$$

Ejemplo 4 Sea h el operador de agregación definido por:

$$h(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

Si $k = 1$ y $c(x) = 1 - x$ entonces se obtiene la medida de borrosidad

$$f(A) = \frac{1 - 2(\mu(x_1) - \frac{1}{2})^2 - 2(\mu(x_2) - \frac{1}{2})^2}{1 + 2(\mu(x_1) - \frac{1}{2})^2 + 2(\mu(x_2) - \frac{1}{2})^2}.$$

Nótese que se obtiene el mismo resultado que en la interpretación 1, lo que es lógico pues estamos considerando la complementación difusa estandar.

Ejemplo 5 Sea la medida de borrosidad definida por

$$f(A) = n^{\frac{1}{w}} - \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_{A^c}(x_i)|^w \right)^{\frac{1}{w}}$$

donde w toma valores en el intervalo $[1, \infty]$.

En este caso es

$$k = n^{\frac{-1}{w}}$$

y el operador de agregación viene dado por:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1 - k(n^{\frac{1}{w}} - \sum_{i=1}^n |x_i - (1 - x_i)^2|^w)^{\frac{1}{w}}}{1 + k(n^{\frac{1}{w}} - \sum_{i=1}^n |x_i - (1 - x_i)^2|^w)^{\frac{1}{w}}}.$$

También podemos obtener una expresión simplificada del teorema anterior:

Teorema 4 Sea h un operador de agregación que verifica:

$$\bullet h(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ si y sólo si } x_i = 0 \quad \forall i.$$

$$\bullet h(x_1, \dots, x_n) = 1 \text{ si y sólo si } x_i = 1 \quad \forall i.$$

Entonces $f : \tilde{P}(X) \rightarrow R^+$ es una medida de borrosidad si y sólo si puede escribirse como

$$f(A) = \frac{1 - h(A)}{h(A) + k}, k > 0.$$

La demostración es análoga a la anterior.

4 Conclusiones

Hemos obtenido varias caracterizaciones de medida de borrosidad a partir de los operadores de agregación. Estos resultados pueden utilizarse para obtener distintas propiedades de las medidas de borrosidad así como obtener diversas familias de estos operadores.

Recíprocamente, también puede considerarse el caso contrario y realizar un estudio de los operadores de agregación a partir de las medidas de borrosidad.

References

- [1] Higashi, M. & Klir, G. On measures of fuzziness and fuzzy complements
Intern. J. of General Systems, 8, pp.169-180. 1982.
- [2] Kaufmann, A. Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets.
Academic Press, New York, 1975.
- [3] Klir, G. & Folger, T. it Fuzzy Sets, Uncertainty and Information.
Prentice Hall P T R, 1988.
- [4] De Luca, A. & Termini, S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory.
Informatin and Control, 20, pp. 301-312. 1972.
- [5] Trillas, E. & Riera, T. Entropies in finite fuzzy sets.
Inf. Sc., 15: 159-168.
- [6] Yager, R. R. On the measure of fuzziness and negation. Part 1: Membership in the unit interval.
Int. J. of General Systems, 5, pp. 221-229. 1979.

OPERADORES IDEMPOTENTES SOBRE UN CONJUNTO FINITO

M. Mas¹
Dpt. Matemàtiques
i Informàtica
Universitat de les
Illes Balears
07071-Palma
dmimmg0@ps.uib.es

J. Torrens²
Dpt. Matemàtiques
i Informàtica
Universitat de les
Illes Balears
07071-Palma
dmijts0@ps.uib.es

T. Calvo¹
Dpt. Matemàtiques
i Informàtica
Universitat de les
Illes Balears
07071-Palma
dmitcs0@ps.uib.es

M. Carbonell¹
Dpt. Matemàtiques
i Informàtica
Universitat de les
Illes Balears
07071-Palma
dmimch0@ps.uib.es

Resumen

En este trabajo realizamos un estudio exhaustivo sobre posibles operadores idempotentes sobre un conjunto finito y totalmente ordenado L . En particular caracterizamos todos los operadores idempotentes, asociativos, conmutativos y crecientes en cada variable que existen sobre L . Si añadimos la condición de 1-suavidad dichos operadores se reducen a combinaciones especiales de Mínimo y Máximo.

Palabras Clave. t -normas, t -conormas, etiquetas, operadores idempotentes, sistemas expertos, incertidumbre.

1 INTRODUCCIÓN

A lo largo de estos últimos años, muchos autores ([1], [2], [3], [4]) han estudiado operadores binarios definidos sobre un conjunto finito y totalmente ordenado L , cuyos elementos son interpretados habitualmente como términos lingüísticos o "etiquetas", para modelizar la propagación de la incertidumbre en sistemas expertos. Obviamente ésta no es la única forma de tratar el problema. Otra manera de abordarlo y que hasta ahora ha sido la más utilizada, es a través de conjuntos borrosos o "fuzzy sets". En este caso, las etiquetas son representadas por fuzzy sets y la propagación de la incertidumbre es tratada a través de t -normas, t -conormas y ternas de De Morgan.

¹Parcialmente financiado por la CICYT, proyecto TIC96-1393-C06-06.

²Parcialmente financiado por la CICYT, proyecto PB96-0191-C02-01.

La primera aproximación tiene como ventaja que el razonamiento de los expertos casi siempre es llevado a cabo directamente a través de dichos términos lingüísticos y así no es necesario realizar ninguna interpretación numérica de los mismos como en el caso de fuzzy sets. En este sentido, en [4], se introdujo la estructura llamada "álgebra filtrante" sobre un conjunto parcialmente ordenado L . La importancia de dicha estructura radica en que conserva la mayoría de propiedades de las ternas de De Morgan continuas en $[0, 1]$. De hecho, se establece en [4], que las únicas estructuras de álgebra filtrante sobre $[0, 1]$ con el orden usual son las ternas de De Morgan continuas.

Sin embargo, tanto en álgebras filtrantes como en ternas de De Morgan, la única posibilidad de tener operadores idempotentes está en utilizar los operadores Mínimo y Máximo. Por otra parte, es obvia la importancia de la propiedad idempotente en conectivos lógicos y de hecho, ha sido estudiada ya por diversos autores (ver [5], [6], [7]). En este trabajo, pretendemos estudiar ligeras modificaciones de la estructura de álgebra filtrante que permitan la posibilidad de trabajar con operadores idempotentes, especialmente en el caso en que L es un conjunto finito y totalmente ordenado. En particular, sobre un conjunto L de estas características, se establecen y estudian todos los posibles operadores idempotentes, asociativos, conmutativos y crecientes en cada variable.

2 PRELIMINARES

Empezamos con algunas definiciones y resultados básicos que iremos utilizando a lo largo del trabajo.

Definición 1 Una t -norma es una aplicación $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que 1 es una unidad.

Definición 2 Una t -conorma es una aplicación $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ asociativa, conmutativa, creciente en cada variable y tal que 0 es una unidad.

Definición 3 Una *negación fuerte* o simplemente una *negación* N es una aplicación de $[0, 1]$ en sí mismo decreciente e involutiva.

Definición 4 Una terna (T, S, N) se dice que es una *terna de De Morgan* si T es una t -norma, S una t -conorma y N una negación de forma que $S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$ para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$.

Definición 5 Sea $(L, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con mínimo 0 y máximo 1. Diremos que $(L, \leq, T, S, N)$ es una *álgebra filtrante* si verifica:

- a) T y S son operadores binarios sobre L , asociativos, conmutativos y tales que $T(1, 1) = 1$ y $S(0, 0) = 0$.
- b) $N : L \rightarrow L$ es una involución tal que $NT(x, y) = S(Nx, Ny)$.
- c.1) $x \leq y$ si y sólo si existe $z \in L$ tal que $x = T(y, z)$
- c.2) $x \leq y$ si y sólo si existe $w \in L$ tal que $y = S(x, w)$.

En tal caso diremos que T es un operador AND y que S es un operador OR del álgebra filtrante L . También diremos que N es una negación sobre L y que S y T son operadores N -duales.

En [4], se establecen todas las posibles estructuras de álgebra filtrante sobre un conjunto finito y totalmente ordenado L . Allí se demuestra que, una vez elegidos algunos elementos en L , existe una y sólo una estructura de álgebra filtrante sobre L de forma que el operador AND correspondiente tiene exactamente estos elementos como idempotentes. Consecuentemente, el único operador AND idempotente de álgebra filtrante sobre L es el Mínimo.

Definición 6 Dado un operador binario F sobre un conjunto totalmente ordenado $L = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1\}$, se dice que F verifica la propiedad de *1-suavidad* o que es *1-suave* cuando para cualesquiera $i, j \geq 1$, si $F(x_i, x_j) = x_k$ entonces

$$F(x_{i-1}, x_j) = x_i \quad \text{y} \quad F(x_i, x_{j-1}) = x_m$$

donde l, m verifican: $k - 1 \leq l, m \leq k$.

Nota 1 Notemos a partir de la definición que todo operador 1-suave es necesariamente creciente en cada variable.

3 DE LAS ÁLGBRAS FILTRANTES A LAS ÁLGBRAS IDEMPOTENTES.

Como ya hemos comentado, la definición de álgebra filtrante dada en [4] (ver definición 2.5) se caracteriza por el hecho de que las únicas estructuras de ese tipo sobre $[0, 1]$ con el orden usual son las ternas de De Morgan continuas. A pesar de ello, los propios autores sugieren que otras definiciones pueden ser consideradas reemplazando algunas de las propiedades requeridas para álgebras filtrantes. Ésta es precisamente la idea de este trabajo, estudiar definiciones alternativas que permitan la obtención de operadores idempotentes. Inicialmente trabajaremos en el caso general en que $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado con mínimo 0 y máximo 1 y cuando convenga nos restringiremos al caso que nos interesa especialmente en que $(L, \leq)$ es finito y totalmente ordenado.

Empecemos notando que la condición c.2) puede ser sustituida por la condición de que N sea decreciente obteniendo una definición equivalente. Efectivamente,

Proposición 1 $(L, \leq, T, S, N)$ es una álgebra filtrante sobre L si y sólo si verifica las condiciones a), b), c.1) y N decreciente.

Dem. A partir de la definición usual, si $x \leq y$ existirá $z \in L$ tal que $x = T(y, z)$ pero entonces $N(x) = N(T(y, z)) = S(N(y), N(z))$ y por la condición c.2) tenemos que $N(x) \geq N(y)$, es decir, N es efectivamente decreciente.

Recíprocamente, $x \leq y$ si y sólo si $N(x) \geq N(y)$ si y sólo si existe $z \in L$ con $N(y) = T(N(x), z)$ y esto sucede si y sólo si existe $N(z) \in L$ tal que $y = N(T(N(x), z)) = S(x, N(z))$ lo cual demuestra la condición c.2). ■

En adelante utilizaremos este hecho e iremos estudiando modificaciones en la definición inicial de álgebra filtrante en la que suponemos realizada la sustitución comentada. Es sabido que las condiciones asociativa e idempotente son raramente compatibles. Así, siempre con el ánimo de encontrar operadores idempotentes, nuestra primera modificación consiste en sustituir la propiedad asociativa de T y de S por la propiedad de que T sea distributiva respecto de S y entonces obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2 Si en la definición de álgebra filtrante sustituimos la propiedad asociativa de T y de S por la distributiva de T respecto de S obtenemos:

- i) S es distributiva respecto de T .
- ii) T y S son crecientes en cada variable.

- iii) T y S son idempotentes.

Dem. La primera parte se demuestra fácilmente por dualidad, ya que si $x, y, z \in L$, existen $a, b, c \in L$ tales que $x = N(a)$, $y = N(b)$, $z = N(c)$ y entonces:

$$\begin{aligned} S(x, T(y, z)) &= S(N(a), T(N(b), N(c))) = \\ &= N(T(a, S(b, c))) = N(S(T(a, b), T(a, c))) = \\ &= T(S(N(a), N(b)), S(N(a), N(c))) = \\ &= T(S(x, y), S(x, z)). \end{aligned}$$

Por lo que respecta a ii) probaremos sólo el crecimiento de T ya que para S el razonamiento es análogo. Sean $x, x' \in L$ tales que $x \leq x'$. Aplicando la condición c.2), existe $z \in L$ tal que $x' = S(x, z)$ y entonces:

$$T(x', y) = T(S(x, z), y) = S(T(x, y), T(z, y))$$

lo cual nos asegura que $T(x, y) \leq T(x', y)$ por la misma condición c.2).

La parte iii) la demostraremos de nuevo sólo para T ya que para S se deduce de forma similar. Dado un $x \in L$ cualquiera como $0 \leq x$ tenemos que existen $y, z \in L$ tales que

$$x = S(y, 0) \quad \text{y} \quad 0 = T(z, x)$$

así, por el crecimiento de T se tiene $T(0, 0) = 0$ y además:

$$x = S(y, T(0, 0)) = T(S(y, 0), S(y, 0)) = T(x, x).$$

Sin embargo, esta modificación no nos aporta nuevas posibilidades ya que si seguimos razonando obtenemos que, en el caso totalmente ordenado, T ha de ser el mínimo y S el máximo como se prueba en la siguiente:

Proposición 3 En las mismas condiciones de la proposición anterior se tiene:

$$x \leq y \iff T(x, y) = x \iff S(x, y) = y$$

Consecuentemente, si el orden es total T es el mínimo y S es el máximo.

Dem. Veamos primero que $T(x, 1) = x$ para cualquier $x \in L$. Efectivamente, la condición c.1) nos asegura $T(x, 1) \leq x$ mientras que por otra parte tenemos $T(x, 1) \geq T(x, x) = x$ de donde se deduce la igualdad. Ahora, si $x \leq y$ entonces

$$x = T(x, x) \leq T(x, y) \leq T(x, 1) = x$$

Como el recíproco es cierto de nuevo por la condición c.1) tenemos la equivalencia deseada. La equivalencia con S se deduce de forma análoga. ■

Nuestra siguiente modificación es introducir directamente la propiedad idempotente en lugar de la asociativa. Sin embargo, de ahora en adelante, limitaremos nuestro estudio al caso que nos interesa, es decir, el caso en que L es finito y totalmente ordenado. Concretamente, en lo que sigue, consideramos L dado por $L = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1\}$.

Proposición 4 Si en la definición de álgebra filtrante sustituimos la propiedad asociativa de T y de S por T y S idempotentes obtenemos:

- i) $T(x_i, 1) = x_i$ para todo $i = 0, \dots, n+1$.
- ii) T es el mínimo y S el máximo.

Dem. i) Consideremos la aplicación $T_1 : L \rightarrow L$ definida por $T_1(x_i) = T(1, x_i)$. Para cualquier $x_i \in L$, como $x_i \leq 1$ la condición c.1) nos asegura que x_i tiene antiimagen por T_1 . Es decir, T_1 es exhaustiva y por lo tanto biyectiva. Dado que además es creciente, ha de ser la identidad y por tanto, $T(x_i, 1) = x_i$ para todo $i = 0, \dots, n+1$.

Para demostrar ii) utilizaremos inducción sobre n . Si $n = 0$ entonces $L = \{0, 1\}$ y el único operador T sobre L es el mínimo y el único operador S es el máximo. Supongámoslo pues cierto hasta el valor $n-1$ y veamos el caso n , es decir cuando $L = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1\}$. Consideremos $\bar{L} = L - \{1\}$ y la aplicación $\bar{T} : \bar{L} \times \bar{L} \rightarrow \bar{L}$ dada por la restricción de T . Entonces resulta claro que $\bar{T}$ es un operador idempotente y conmutativo. Además, notemos que si $x_i < x_j$ existe $x_k \in L$ tal que $T(x_k, x_j) = x_i$ pero por la primera parte de la proposición tenemos $x_k \neq 1$ por lo que $x_k \in \bar{L}$ i $x_i = \bar{T}(x_k, x_j)$. De esta forma, resulta que $\bar{T}$ es un operador de álgebra filtrante (con la condición de asociatividad sustituida por la de idempotencia) sobre $\bar{L}$ y por hipótesis de inducción $\bar{T}$ es el mínimo. Por lo tanto, aplicando i), resulta que también T es el mínimo y por dualidad S es el máximo. ■

Por lo visto anteriormente, queda claro que la propiedad incompatible con la idempotencia, no es tanto la asociativa como la propiedad c.1), introducida inicialmente para captar "la idea de" continuidad. Sin embargo, ésta es la única propiedad que relaciona el orden con los operadores T, S y N y lo lógico es mantener alguna relación entre los operadores y el orden. De esta forma, una nueva modificación que esta vez sí da lugar a operadores idempotentes, viene dada por la siguiente definición.

Definición 7 Diremos que $(L, \leq, T, S, N)$ es una estructura de álgebra idempotente sobre L si

- T y S son asociativos, conmutativos, crecientes en cada variable e idempotentes.

- N es decreciente, involutiva y $S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$ para cualesquiera $x, y \in L$

Veremos en lo que sigue que existen muchas estructuras de álgebra idempotente sobre L y las estudiaremos y clasificaremos todas. Empecemos viendo algunas propiedades inmediatas. Por ejemplo, es inmediato comprobar (ver [1] o [4]) que existe una única negación $N : L \rightarrow L$ que viene dada por

$$N(x_i) = x_{n+1-i} \quad \text{para todo } i = 0, \dots, n+1.$$

Consecuentemente, una estructura (T, S, N) de álgebra idempotente sobre L viene determinada por el operador T ya que N es fija y S viene dado por dualidad, es decir, $S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$ para cualesquiera $x, y \in L$. De esta forma, para estudiar todas las posibles estructuras de álgebras idempotentes sobre L sólo necesitamos estudiar todos los posibles operadores T sobre L . Así pues, de ahora en adelante trabajaremos únicamente con dichos operadores T que llamaremos simplemente operadores de álgebras idempotentes.

Nota 2 Notemos que en el caso de álgebras idempotentes, contrariamente a lo que ocurre en álgebras filtrantes, los operadores T y S desempeñan un papel simétrico. En álgebras filtrantes, de la condición c) se deduce inmediatamente que

$$T(0, x) = 0, \quad T(1, x) = x \quad \text{y} \quad S(0, x) = x, \quad S(1, x) = 1$$

por lo que T es interpretado como un operador "AND" y S como un operador "OR", duales uno de otro. En álgebras idempotentes, tanto T como S verifican sencillamente

$$0 \leq T(0, x), S(0, x) \leq x \leq T(1, x), S(1, x) \leq 1$$

y las propiedades de T y S son exactamente las mismas.

Sea pues T (o S) un operador de álgebra idempotente. Notemos que T ha de estar siempre entre el mínimo y el máximo, ya que si x_i, x_j son elementos cualesquiera de L con $x_i \leq x_j$ entonces por la idempotencia y el crecimiento tenemos:

$$x_i = T(x_i, x_i) \leq T(x_i, x_j) \leq T(x_j, x_j) = x_j.$$

En lo que sigue, encadenamos una serie de definiciones y resultados técnicos que nos permitirán establecer después la clasificación de los operadores T de álgebras idempotentes.

Definición 8 Sea T un operador de álgebra idempotente sobre L . Diremos que un elemento $x_i \in L$ es fijo por 1 si $T(x_i, 1) = x_i$.

Notemos que si T es un operador de álgebra idempotente sobre L , entonces 1 siempre es fijo por 1, pero puede haber más elementos de L con esta propiedad.

Denotaremos por F el conjunto de elementos de L que quedan fijos por 1, es decir:

$$F = \{x_i \in L \mid T(x_i, 1) = x_i\}$$

y veremos que la estructura del operador T depende totalmente de cómo sea dicho conjunto F .

Lema 1 Si T es un operador de álgebra idempotente sobre L , se verifica:

1. Si $F = L$ entonces T es el mínimo.
2. Si existe un elemento $x_i \in L$ no fijo por 1 entonces, si $T(x_i, 1) = x_k$ con $k > i$ se verifica $x_k \in F$ y $T(x_r, x_s) = x_k$ siempre que $i \leq \min(r, s) \leq k \leq \max(r, s)$.

Dem. Supongamos todos los elementos de L fijos por 1. Entonces, siempre que $x_i \leq x_j$, se tiene

$$x_i = T(x_i, x_i) \leq T(x_i, x_j) \leq T(x_i, 1) = x_i$$

por lo que T es el mínimo.

En cuanto a la segunda parte, si $T(x_i, 1) = x_k$ con $k > i$ entonces

$$T(x_k, 1) = T(T(x_i, 1), 1) = T(x_i, 1) = x_k$$

y por tanto $x_k \in F$. Más aún,

$$\begin{aligned} T(x_i, x_k) &= T(x_i, T(x_i, 1)) = \\ &= T(T(x_i, x_i), 1) = T(x_i, 1) = x_k \end{aligned}$$

y por el crecimiento $T(x_s, x_k) = x_k$ para cualquier x_s con $x_i \leq x_s \leq 1$. Por otra parte, si x_r y x_s son tales que $i \leq r \leq k \leq s$

$$x_k = T(x_i, x_k) \leq T(x_r, x_s) \leq T(x_k, x_s) = x_k.$$

■

Definición 9 Sean T i T_0 operadores de álgebra idempotente sobre L i $L_0 = [x_1, 1]$ respectivamente. Diremos que T es una (Min, T_0) -suma si es de la forma:

$$T(x_i, x_j) = \begin{cases} T_0(x_i, x_j) & \text{si } i, j \geq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

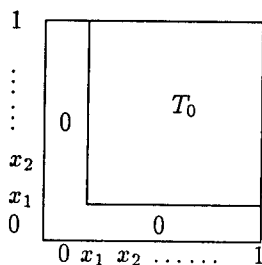
Definición 10 Sean T i T_0 operadores de álgebra idempotente sobre L i $L_0 = [0, x_n]$ respectivamente. Diremos que T es una (T_0, Max) -suma si es de la forma:

$$T(x_i, x_j) = \begin{cases} T_0(x_i, x_j) & \text{si } i, j \leq n \\ 1 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

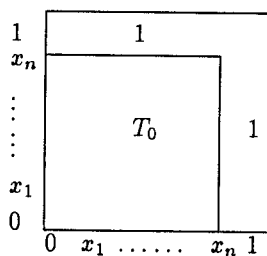
Definición 11 Sea T un operador de álgebra idempotente sobre L y consideremos $x_k \in L$. Sean T_0, T_1 operadores de álgebra idempotente sobre $L_0 = [0, x_{k-1}]$ y $L_1 = [x_{k+1}, 1]$ respectivamente. Diremos que T es una (T_0, T_1) -suma si es de la forma

$$T(x_i, x_j) = \begin{cases} T_0(x_i, x_j) & \text{si } x_i, x_j \in L_0 \\ T_1(x_i, x_j) & \text{si } x_i, x_j \in L_1 \\ x_k & \text{si } \min(i, j) \leq k \leq \max(i, j) \end{cases}$$

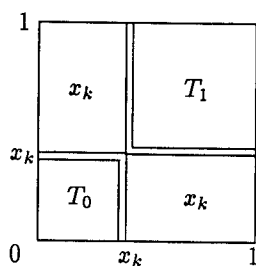
En las siguientes figuras podemos ver la estructura de estos tres tipos de operadores.



Operador $(\min, T_0)$ -suma



Operador $(T_0, \max)$ -suma



Operador (T_0, T_1) -suma

Lema 2 Sea T un operador de álgebra idempotente sobre L y sea x_k el primer elemento de L fijo por 1. Si $0 < x_k < 1$ entonces T es una (T_0, T_1) -suma.

Dem. Consideremos T_0, T_1 las restricciones de T a $L_0^2 = [0, x_{k-1}]^2$ y $L_1^2 = [x_{k+1}, 1]^2$ respectivamente. Es

obvio que tanto T_0 como T_1 son operadores de álgebra idempotente sobre L_0 y L_1 . Por otra parte, como x_k es el primer elemento de L fijo por 1 necesariamente ha de ser $T(0, 1) = x_k$ y aplicando el lema 3.7 obtenemos:

$$T(x_i, x_j) = x_k \quad \text{si } \min(i, j) \leq k \leq \max(i, j)$$

con lo que efectivamente T es una (T_0, T_1) -suma. ■

Proposición 5 Una aplicación $T : L \times L \rightarrow L$ es un operador de álgebra idempotente sobre $L = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1\}$, si y sólo si T es de una de las tres formas siguientes:

- $(\min, T_0)$ -suma
- $(T_0, \max)$ -suma
- (T_0, T_1) -suma.

Dem. Claramente, un operador de cualquiera de estas tres formas es conmutativo, creciente en cada variable e idempotente. La propiedad asociativa resulta fácil de comprobar distinguiendo varios casos. A modo de ejemplo incluimos uno de ellos. Sea T una (T_0, T_1) -suma y sean $x_i, x_j, x_s \in L$ tales que $s < k < i \leq j$, entonces

$$T(T(x_i, x_j), x_k) = T(T_1(x_i, x_j), x_k) = x_k$$

mientras que

$$T(x_i, T(x_j, x_k)) = T(x_i, x_k) = x_k.$$

Recíprocamente, si T es un operador de álgebra idempotente sobre L , consideremos F el conjunto de elementos de L que quedan fijos por 1 a través del operador T .

- Si $0 \in F$, entonces $T(0, x_i) = 0$ para todo $x_i \in L$. Si consideramos T_0 la restricción de T a L_0^2 donde $L_0 = [x_1, 1]$ resulta que T es una $(\min, T_0)$ -suma
- Si $F = \{1\}$, entonces $T(x_i, 1) = 1$ para todo $x_i \in L$. Si consideramos T_0 la restricción de T a L_0^2 donde $L_0 = [0, x_n]$ resulta que T es una $(T_0, \max)$ -suma.
- Si $0 \notin F$ y $x_k \neq 1$ es el primer elemento de L fijo por 1, si consideramos T_0 y T_1 las restricciones de T a $L_0^2 = [0, x_{k-1}]^2$ y $L_1^2 = [x_{k+1}, 1]^2$ respectivamente se deduce del lema anterior que T es una (T_0, T_1) -suma. ■

La proposición anterior pone de manifiesto que el número de operadores idempotentes sobre L es considerablemente elevado. Esto es debido principalmente a que, al eliminar la condición c) de álgebra filtrante, se pierde la idea de "continuidad". Sin embargo, hay autores (ver [1], [2]) que captan la idea de continuidad a través de la 1-suavidad (definición 2.6). Si añadimos esta condición a los operadores T y S en la definición de álgebra idempotente, el número de operadores se reduce drásticamente, pero en este caso obtenemos otros operadores idempotentes además del Mínimo y del Máximo.

Proposición 7 Sea T un operador de álgebra idempotente, 1-suave. Entonces:

- Si $T(1, 0) = 0$, T es el Mínimo.
- Si $T(1, 0) = 1$, T es el Máximo.
- Si $T(1, 0) = x_k$ con $0 \neq x_k \neq 1$, T viene dado por la expresión:

$$T(x_i, x_j) = \begin{cases} Max(x_i, x_j) & \text{si } x_i, x_j \leq x_k \\ Min(x_i, x_j) & \text{si } x_i, x_j \geq x_k \\ x_k & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Dem. Veamos los tres casos:

i) Si $T(1, 0) = 0$ entonces se verifica $F = L$. En efecto, supongamos que existe algún elemento en L no fijo por 1 y consideremos x_i el primero verificando dicha condición. Entonces:

$$T(x_i, 1) > x_i \text{ mientras que } T(x_{i-1}, 1) = x_{i-1}$$

contradiendo la 1-suavidad. De esta forma, aplicando el lema 3.7 obtenemos $T = Min$.

ii) Si $T(1, 0) = 1$ veamos que $T(0, x_i) = x_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n+1\}$. Supongamos por el contrario que existe un elemento de L que no verifica dicha propiedad y sea x_i el mayor tal que $T(0, x_i) < x_i$ entonces

$$T(0, x_i) < x_i \text{ mientras que } T(0, x_{i+1}) = x_{i+1}$$

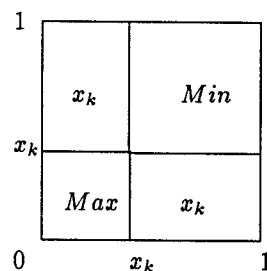
contradiendo de nuevo la 1-suavidad. De esta propiedad deducimos que si $i \leq j$ entonces

$$x_j = T(0, x_j) \leq T(x_i, x_j) \leq T(x_i, x_j) = x_j$$

por lo que $T = Max$.

iii) Si $T(1, 0) = x_k$ con $0 \neq x_k \neq 1$, entonces x_k es el primer elemento fijo por 1 y T es una (T_0, T_1) -suma con T_0 y T_1 1-suaves sobre $L_0 = [0, x_{k-1}]$ y $L_1 = [x_{k+1}, 1]$ respectivamente. Además, notemos que $T(0, x_k) = x_k$ y como $T(0, 0) = 0$ al ser T 1-suave necesariamente tenemos $T(0, x_i) = x_i$ para todo $i \in \{0, \dots, k\}$ por lo que T_0 está en realidad en el caso ii) y por tanto ha de ser el máximo. De la misma manera se ve que T_1 está en el caso i) y es por tanto, el mínimo. ■

Llamaremos operadores (Max, Min) a los operadores que aparecen en la proposición anterior. En la siguiente figura se puede observar su estructura:



Estos operadores son casos particulares de los llamados t -operadores sobre L que son estudiados en [3]. En dicha referencia se obtiene también el resultado anterior a través de la clasificación de los t -operadores.

Como corolario inmediato obtenemos el siguiente.

Corolario 1 Sobre L hay exactamente $n + 2$ operadores de álgebra idempotente que son 1-suaves.

Referencias

- [1] Godo, Ll. and Sierra, C.; "A new approach to connective generation in the framework of expert systems using fuzzy logic", *Proc. of XVIIIth IS-MVL*, Palma (1988) 157-162.
- [2] Lopez de Mántaras, R.; "Approximate Reasoning Models", Ellis Horwood Limited, New York (1990).
- [3] Mas, M., Mayor, G. and Torrens, J.; "t-operators and uninorms in a finite set", En preparación.
- [4] Mayor, G. and Torrens, J.; "On a class of operators for expert systems", *International Journal of Intelligent Systems* 8 (1993) 771 - 778.
- [5] Mayor, G. and Torrens, J.; "On some classes of idempotent operators", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* Vol. 5, No 4 (1997) 401 - 410.
- [6] Mayor, G.; "On a family of quasi arithmetic means", *Aequationes Mathematicae*, 48 (1994), 137-142.
- [7] Tsiporkova, E., Moser, B. and Klement, E. P.; "On a class of Idempotent Aggregation Operators". Preprint.

AGREGACIÓN MULTIDIMENSIONAL DE NÚMEROS BORROSOS¹

G. Mayor

Dept. Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
07071-Palma de Mallorca
dmigmf0@ps.uib.es

J. Suñer

Dept. Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
07071-Palma de Mallorca
dmijsl0@ps.uib.es

P. Canet

Dept. Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
07071-Palma de Mallorca
dmipce0@ps.uib.es

Resumen

En este trabajo se plantea el problema de obtener un procedimiento de agregación de números borrosos cuyo resultado sea también un número borroso. Para ello se utiliza el Principio de Extensión de Zadeh aplicado a funciones numéricas multidimensionales que satisfacen determinadas condiciones, obteniéndose así una función de agregación multidimensional sobre el retículo de los números borrosos. Particular atención nos merece el caso de números borrosos trapeczoidales.

Palabras clave. Agregación, Número borroso, Principio de Extensión, Función de agregación n-dimensional, Función de agregación multidimensional, Operadores OWA, Medias casi lineales.

1 INTRODUCCIÓN

Desde hace algún tiempo el problema de la agregación de conjuntos borrosos ha preocupado a buena cantidad de investigadores y ha dado lugar a numerosa literatura sobre el tema ([3], [4], [6]). La necesidad de sintetizar varios outputs borrosos en uno solo se presenta en múltiples situaciones, así por ejemplo en un sistema basado en reglas borrosas con un conjunto de n reglas R_i : SI x es A_i ENTONCES y es B_i , se disparan las reglas ante una entrada y cada regla produce una salida B'_i , la salida final única B se obtiene aplicando un operador de agregación a las sal-

idas $B'_1, \dots, B'_n$. Este operador o función de agregación de conjuntos borrosos puede obtenerse a partir de una función de agregación (idempotente y creciente) numérica $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ a través de $B(x) = f(B'_1(x), \dots, B'_n(x))$. En esta línea es usual considerar $f = \max$, y así se obtiene $B(x) = \max(B'_1(x), \dots, B'_n(x))$, pero este procedimiento tiene el serio inconveniente de proporcionar salidas B "distorsionadas" respecto de $B_1, \dots, B_n$ y también de $B'_1, \dots, B'_n$, lo que hace complicada la labor de lectura del resultado final del proceso.

Para obviar esta dificultad, en el ejemplo citado y en cualquier otra situación semejante, tratamos aquí el problema de analizar las ventajas que presenta utilizar, para el caso de números borrosos, el procedimiento de agregación derivado del Principio de Extensión ([7]). Al mismo tiempo introducimos carácter multidimensional a la agregación, y de este manera se obtiene (Proposición 10) un método que permite la agregación de cualquier cantidad de números borrosos en un número borroso, con una serie de propiedades que parecen dar valor al procedimiento.

2 PRELIMINARES

A continuación se presentan unos preliminares en donde aparecen las definiciones y resultados básicos que van a ser utilizados en este trabajo. Hay que reseñar que hemos adoptado una definición de número borroso bastante restrictiva si la comparamos por ejemplo con la que se da en [2] y [5], pero creemos que es suficiente para la mayoría de aplicaciones.

Definición 1 Una función $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ continua se llama un número borroso si existen a, b, c, d ; $-\infty \leq a < b \leq c < d \leq +\infty$, tales que:

- 1) $\mu(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, a] \cup [d, +\infty)$,
- 2) μ es estrictamente creciente en $[a, b]$ y estrictamente decreciente en $[c, d]$,

¹Este trabajo ha sido, en parte, financiado por la CICYT, proyecto: TIC96-1393-C06-06.

$$3) \mu(x) = 1 \quad \forall x \in [b, c].$$

Denotaremos por $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ al conjunto de los números borrosos sobre $\mathcal{R}$.

Nota 1 1) En la condición (1) de la definición, cuando $a = -\infty$ y/o $d = +\infty$, $\mu(a) = 0$ significa que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x) = 0$ y $\mu(d) = 0$ significa que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x) = 0$.

2) En la condición (2) de la definición, el caso $a = -\infty$ significa que μ es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, b]$ y, análogamente, el caso $d = +\infty$ significa que μ es estrictamente decreciente en el intervalo $[c, +\infty)$.

Proposición 1 Todo número borroso es convexo.

Demostración. Sea $\mu \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ con parámetros (a, b, c, d) . Hay que probar que $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}, \forall \lambda \in [0, 1]$,

$$\mu(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu(x_1), \mu(x_2)).$$

Sean entonces $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ y $\lambda \in [0, 1]$. Consideraremos varios casos:

- Si $x_1 \leq x_2 \leq c$, μ es creciente (no necesariamente estrictamente) en el intervalo de extremos x_1 y x_2 . Como $x_1 \leq \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq x_2$, la monotonía de μ prueba que $\mu(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \mu(x_1) = \min(\mu(x_1), \mu(x_2))$.
- Si $b \leq x_1 \leq x_2$, μ es decreciente (no necesariamente estrictamente) en el intervalo de extremos x_1 y x_2 . Como $x_1 \leq \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq x_2$, la monotonía de μ prueba que $\mu(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \mu(x_2) = \min(\mu(x_1), \mu(x_2))$.
- Finalmente, si $x_1 < b \leq c < x_2$, pueden pasar tres cosas:

i) Si $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < b$, entonces

$$\mu(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \mu(x_1) \geq \min(\mu(x_1), \mu(x_2)).$$

ii) Si $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 > c$, entonces

$$\mu(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \mu(x_2) \geq \min(\mu(x_1), \mu(x_2)).$$

iii) Si $b \leq \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq c$, entonces

$$\mu(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = 1 \geq \mu(x_1), \mu(x_2).$$

Ejemplo 1 Cuando la función de pertenencia μ es lineal en los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$, el número borroso se llama trapezoidal. En este caso, resulta

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c, \\ \frac{x-d}{c-d} & \text{si } c \leq x \leq d, \\ 0 & \text{si } x \geq d \end{cases}$$

Cuando $b = c$, obtenemos un número borroso triangular.

En estos casos, se puede identificar el número borroso μ con la cuaterna (a, b, c, d) , de manera que escribiremos $\mu = (a, b, c, d)$.

Denotaremos por $\mathcal{T}(\mathcal{R})$ al conjunto de todos los números borrosos trapezoidales sobre $\mathcal{R}$.

Definición 2 Dado un número borroso μ y $\alpha \in [0, 1]$, llamaremos α -corte de μ al conjunto

$$[\mu]_\alpha = \{x \in \mathcal{R} : \mu(x) \geq \alpha\}.$$

Ejemplo 2 En el caso de un número borroso trapezoidal $\mu = (a, b, c, d)$, es sencillo encontrar los α -cortes a partir de la expresión de μ . Concretamente, se obtiene

$$[\mu]_\alpha = [a + (b - a) \cdot \alpha, d - (d - c) \cdot \alpha] \quad \forall \alpha \in (0, 1],$$

$$[\mu]_0 = \mathcal{R}.$$

Definición 3 Sea $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$. Diremos que f es creciente cuando, si $x_i \leq x'_i \quad \forall i = 1, \dots, n$, entonces

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x'_1, \dots, x'_n).$$

Definición 4 Sea $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$. Diremos que f es estrictamente creciente cuando, si $x_i < x'_i \quad \forall i = 1, \dots, n$, entonces

$$f(x_1, \dots, x_n) < f(x'_1, \dots, x'_n).$$

Proposición 2 Sea $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ estrictamente creciente y continua. Entonces f es creciente.

Demostración. Veamos sólo el caso $n = 2$. Sean $x_1 \leq x'_1$ y $x_2 \leq x'_2$. Supongamos que $x_1 < x'_1$ y $x_2 = x'_2$.

Sea una sucesión $a_1 > a_2 > \dots \rightarrow x_2$. Entonces $f(x_1, a_k) \rightarrow f(x_1, x_2)$ y $f(x'_1, a_k) \rightarrow f(x'_1, x_2)$.

Por otra parte, $f(x_1, a_{k+1}) < f(x'_1, a_k) \quad \forall k \geq 1$, así que $f(x_1, x_2) \leq f(x'_1, x_2)$. ■

Ejemplo 3 Veamos a continuación un ejemplo de una función estrictamente creciente que no es creciente (según la proposición anterior, no puede ser continua). Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + \min(x, y) & \text{si } (x, y) \in (0, +\infty)^2, \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \\ \min(x, y) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observemos que f no es creciente ya que, por ejemplo, $f(0, 0) = 1 > f(0, 1) = 0$.

Para ver que f es estrictamente creciente, pongamos $A = (0, +\infty)^2$.

Si $(x, y), (x', y') \in A$ o $(x, y), (x', y') \notin A \cup \{(0, 0)\}$ o $(x, y) \notin A \cup \{(0, 0)\}$ y $(x', y') \in A$ con $x < x'$ y $y < y'$, entonces claramente $f(x, y) < f(x', y')$.

Finalmente, si $x < 0$ y $y < 0$, entonces $f(x, y) < 0 < 1 = f(0, 0)$ y si $x > 0$ y $y > 0$, entonces $f(x, y) > 1 = f(0, 0)$.

3 Funciones de Agregación n-dimensionales

En este apartado se presentan, para el caso n-dimensional, los resultados fundamentales (Prop. 3 y 4 debidos a V. Novák [5], y Prop. 7 debido a A. R. de Soto y E. Trillas) que nos van a permitir en el apartado siguiente abordar el caso multidimensional. Otra referencias para completar la lectura de esta sección pueden encontrarse en [1] y [4].

Definición 5 Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, el Principio de Extensión permite generar una nueva función $F : ([0, 1]^{\mathbb{R}})^n \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{R}}$ definida como sigue: $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$,

$$F(\mu_1, \dots, \mu_n)(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = y} \min(\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n))$$

y vale 0 si no existe $(x_1, \dots, x_n)$ tal que $f(x_1, \dots, x_n) = y$.

Ejemplo 4 En el caso que la función $f(x_1, \dots, x_n) = \min(x_1, \dots, x_n)$, se obtiene la función MIN definida sobre $([0, 1]^{\mathbb{R}})^n$ como sigue: $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$,

$$MIN(\mu_1, \dots, \mu_n)(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_n) : \min(x_1, \dots, x_n) = y} \min(\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n))$$

$\forall y \in \mathbb{R}$.

Análogamente, si $f(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n)$, se obtiene la función MAX definida sobre $([0, 1]^{\mathbb{R}})^n$ como sigue: $\forall \mu_1, \dots, \mu_n \in [0, 1]^{\mathbb{R}}$,

$$MAX(\mu_1, \dots, \mu_n)(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_n) : \max(x_1, \dots, x_n) = y} \min(\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n))$$

$\forall y \in \mathbb{R}$.

Proposición 3 Sean $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ números borrosos con parámetros respectivos $(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, (a_n, b_n, c_n, d_n)$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Entonces la función $F : ([0, 1]^{\mathbb{R}})^n \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{R}}$ inducida mediante el principio de extensión por f verifica que $F(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu$ es un número borroso y además:

- 1) $\mu(y) = 0 \quad \forall y \in (-\infty, f(a_1, \dots, a_n)] \cup [f(d_1, \dots, d_n), +\infty)$,
- 2) μ es estrictamente creciente en $[f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)]$ y estrictamente decreciente en $[f(c_1, \dots, c_n), f(d_1, \dots, d_n)]$,
- 3) $\mu(x) = 1 \quad \forall x \in [f(b_1, \dots, b_n), f(c_1, \dots, c_n)]$.

Proposición 4 Sean $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ números borrosos con parámetros respectivos $(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, (a_n, b_n, c_n, d_n)$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Entonces los α -cortes del número borroso $\mu = F(\mu_1, \dots, \mu_n)$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} [\mu]_\alpha &= f([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha) = \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y = f(x_1, \dots, x_n), \text{ donde } x_i \in [\mu_i]_\alpha, i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Definición 6 Se define en $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ el orden siguiente: Dados dos números borrosos $\mu, \eta \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$,

$$\mu \leq \eta \iff MIN(\mu, \eta) = \mu \iff MAX(\mu, \eta) = \eta$$

Proposición 5 Con este orden, $(\mathcal{F}(\mathcal{T}), \leq)$ es un retículo distributivo.

Proposición 6 Sean $\mu, \eta \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ dos números borrosos. Entonces $\mu \leq \eta$ si, y sólo si,

$$\sup[\mu]_\alpha \leq \sup[\eta]_\alpha \quad \text{y} \quad \inf[\mu]_\alpha \leq \inf[\eta]_\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Ejemplo 5 Sean $\mu_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ i $\mu_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ dos números borrosos trapezoidales. Supongamos que $\mu_1 \leq \mu_2$. Entonces

$$\sup[\mu_1]_\alpha \leq \sup[\mu_2]_\alpha \quad \text{y} \quad \inf[\mu_1]_\alpha \leq \inf[\mu_2]_\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, es decir,

$$\begin{aligned} \sup[a_1 + (b_1 - a_1) \cdot \alpha, d_1 - (d_1 - c_1) \cdot \alpha] &\leq \\ &\leq \sup[a_2 + (b_2 - a_2) \cdot \alpha, d_2 - (d_2 - c_2) \cdot \alpha] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \inf[a_1 + (b_1 - a_1) \cdot \alpha, d_1 - (d_1 - c_1) \cdot \alpha] &\leq \\ &\leq \inf[a_2 + (b_2 - a_2) \cdot \alpha, d_2 - (d_2 - c_2) \cdot \alpha] \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Dando valores a $\alpha = 0, 1$, se obtiene la relación

$$\mu_1 \leq \mu_2 \iff a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1 \leq c_2, d_1 \leq d_2$$

Definición 7 Dado un retículo $(L, \leq)$, una función $f : L^n \rightarrow L$ es una función de agregación (n -dimensional) si

- 1) f es idempotente: $f(\overbrace{a, \dots, a}^n) = a$ para todo a de L .
- 2) f es creciente respecto del orden producto de L^n :
Si $x_i \leq y_i \ \forall i = 1, \dots, n$ entonces $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$.

Proposición 7 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente creciente e idempotente. Entonces la función

$$F : (\mathcal{F}(\mathcal{R}))^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{R})$$

inducida por el principio de extensión por f es una función de agregación sobre $\mathcal{F}(\mathcal{R})$.

Nota 2 La función f del enunciado es, según la proposición 2, una función de agregación (sobre $\mathbb{R}$).

4 Funciones de Agregación multidimensionales

Este es el apartado central del trabajo ya que en él, y siempre a partir del Principio de Extensión, se presenta el resultado que asegura que mediante una función de agregación numérica puede obtenerse una función de agregación para números borrosos (con resultado un número borroso) que conserva en particular las propiedades de monotonía multidimensional que se le exigen a la función numérica de partida. Para más detalles sobre las definiciones, resultados y ejemplos de este apartado puede consultarse [4].

Definición 8 Dado un retículo $(L, \leq)$, denotaremos por E al conjunto $E = \bigcup_{n \geq 1} L^n$ de todas las listas ordenadas de elementos de L . Las relaciones $\leq_\alpha$ y

$\leq_\beta$ detalladas a continuación definen órdenes sobre el conjunto E .

Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ elementos de E :

1) $x \leq_\alpha$ y si, y sólo si,

$$\begin{aligned} x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n & \quad \text{si } n \leq m, \\ \sup(x_1, \dots, x_n) \leq \inf(y_{n+1}, \dots, y_m) & \quad \text{si } n < m, \end{aligned}$$

2) $x \leq_\beta$ y si, y sólo si,

$$\begin{aligned} x_1 \leq y_1, \dots, x_m \leq y_m & \quad \text{si } m \leq n, \\ \sup(x_{m+1}, \dots, x_n) \leq \inf(y_1, \dots, y_m) & \quad \text{si } m < n, \end{aligned}$$

Proposición 8 $(E, \leq_\alpha)$ y $(E, \leq_\beta)$ son retículos.

El siguiente resultado establece una caracterización a menudo útil de la monotonía respecto de los órdenes α y β .

Proposición 9 Sea $f : E \rightarrow L$ una aplicación creciente respecto del orden producto. Entonces se verifica:

a) f es creciente respecto de $\leq_\alpha$ si, y sólo si,

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_n, \sup(x_1, \dots, x_n))$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E$$

b) f es creciente respecto de $\leq_\beta$ si, y sólo si,

$$f(x_1, \dots, x_n, \inf(x_1, \dots, x_n)) \leq f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E$$

Definición 9 Sea $(L, \leq)$ un retículo. Una función $f : \bigcup_{n \geq 1} L^n \rightarrow L$ es una función de agregación extendida o multidimensional (FAE) si

- 1) $\forall n \geq 1$, f es idempotente y creciente respecto del orden producto
- 2) f es creciente respecto de los órdenes α y β .

Proposición 10 Sea $f : \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ creciente respecto de los órdenes α y β tal que, $\forall n \geq 1$, es continua, estrictamente creciente e idempotente. Entonces la función $F : \bigcup_{n \geq 1} (\mathcal{F}(\mathcal{R}))^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{R})$ inducida mediante el principio de extensión por f es una FAE.

Demostración. Por la proposición 7 sabemos que, para cada $n \geq 1$, F es idempotente y creciente. Para ver que es creciente respecto de los órdenes α y β , basta probar la condición equivalente:

$$\forall n \geq 1, \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathcal{F}(\mathcal{R}))^n,$$

$$F(\mu_1, \dots, \mu_n, \text{MIN}(\mu_1, \dots, \mu_n)) \leq F(\mu_1, \dots, \mu_n) \leq F(\mu_1, \dots, \mu_n, \text{MAX}(\mu_1, \dots, \mu_n))$$

Según la proposición 6, basta demostrar que

$$\begin{aligned} \sup[F(\mu_1, \dots, \mu_n, \text{MIN}(\mu_1, \dots, \mu_n))]_{\alpha} &\leq \sup[F(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\alpha} \leq \\ &\leq \sup[F(\mu_1, \dots, \mu_n, \text{MAX}(\mu_1, \dots, \mu_n))]_{\alpha} \end{aligned}$$

y lo mismo para el ínfimo.

Sea $y \in [F(\mu_1, \dots, \mu_n, \text{MIN}(\mu_1, \dots, \mu_n))]_{\alpha}$. Entonces

$$y = f(x_1, \dots, x_n, m),$$

donde

$$x_i \in [\mu_i]_{\alpha} \text{ y } m \in [\text{MIN}(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\alpha}$$

es decir,

$$m = \min(x'_1, \dots, x'_n) \text{ con } x'_i \in [\mu_i]_{\alpha}$$

Queremos ver que existe $y' \in [F(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\alpha}$ tal que $y \leq y'$.

Consideremos $x''_i = \max(x_i, x'_i) \in [\mu_i]_{\alpha}$. Entonces

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n, m) \leq_{\beta} (x''_1, \dots, x''_n) &\Rightarrow \\ \Rightarrow y = f(x_1, \dots, x_n, m) \leq y' = f(x''_1, \dots, x''_n) \end{aligned}$$

Sea ahora $y \in [F(\mu_1, \dots, \mu_n)]_{\alpha}$. Entonces $y = f(x_1, \dots, x_n)$, donde $x_i \in [\mu_i]_{\alpha}$. Si $M = \max(x_1, \dots, x_n)$, entonces $(x_1, \dots, x_n) \leq_{\alpha} (x_1, \dots, x_n, M)$ y, así, $y \leq y'$, donde $y' = f(x_1, \dots, x_n, M)$ pertenece a

$$[F(\mu_1, \dots, \mu_n, \text{MAX}(\mu_1, \dots, \mu_n))]_{\alpha}$$

La demostración para el ínfimo es completamente análoga. ■

Veamos ahora algunos ejemplos importantes de funciones $f : \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen las hipótesis de la proposición anterior.

Ejemplo 6 Consideremos un operador OWA multidimensional, es decir, una aplicación $f : \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $n \geq 1$, existe un vector n -dimensional de pesos, $W_n = (\omega_1^n, \dots, \omega_n^n) \in [0, 1]^n$, con $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ y tal que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i^n x_{[i]} \quad \forall n \geq 1$$

donde $x_{[i]} = \max_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \min(x_{j_1}, \dots, x_{j_i})$ es el i -ésimo mayor valor de la lista $x_1, \dots, x_n$.

Sabemos ([4]) que todo operador OWA multidimensional puede ser representado a través de un triángulo de pesos de forma que cada fila n de dicho triángulo está formada por el vector n -dimensional de pesos W_n correspondiente. Es decir, por

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & w_1^2 & w_2^2 \\ & w_1^3 & w_2^3 & w_3^3 \\ w_1^4 & w_2^4 & w_3^4 & w_4^4 \\ & \dots & & \end{array}$$

Por ejemplo, el operador Min viene dado por el triángulo de pesos $\bigwedge \omega_i^n$ tal que, para cada $n \geq 1$, $\omega_n^n = 1$, $\omega_i^n = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$. Así mismo, el operador Max viene dado por $\omega_1^n = 1$, $\omega_i^n = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$. También la media aritmética es un operador OWA, con pesos $\omega_i^n = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Estos tres operadores satisfacen trivialmente las hipótesis de la proposición anterior. Veamos qué otros operadores OWA las satisfacen.

Observemos que todo operador OWA f es una función idempotente, estrictamente creciente y continua. Entonces cumplirá las hipótesis de la proposición si, y sólo si, es una función creciente respecto de los órdenes α y β , es decir, si, y sólo si, el triángulo de pesos asociado es regular ([4]):

$$\sum_{i=1}^p \omega_i^{n+1} \leq \sum_{i=1}^p \omega_i^n \leq \sum_{i=1}^{p+1} \omega_i^{n+1}$$

para todo $n \geq 1$ y $p = 1, \dots, n$.

Ejemplo 7 Consideremos ahora una media casi lineal ponderada multidimensional, es decir, una función $f : \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^n \varphi(x_i) \right) \quad \forall n \geq 1$$

donde φ es una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente monótona y continua y $\bigwedge \omega_i^n$ es un triángulo de pesos.

Observemos que, si $\varphi = \text{Id}$ y $\omega_i^n = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n$, obtenemos nuevamente la media aritmética. Veamos qué otras medias satisfacen las hipótesis de la proposición.

Toda media f es idempotente, estrictamente creciente y continua. Entonces cumplirá las hipótesis de la proposición si, y sólo si, es una función creciente respecto de los órdenes α y β , es decir, si, y sólo si, el triángulo de pesos asociado es descendente ([4]):

$$\omega_i^n \geq \omega_i^{n+1} \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y } i = 1, \dots, n$$

Los ejemplos anteriores (con las restricciones impuestas a los triángulos de pesos) vienen a demostrar que las extensiones multidimensionales de los operadores tipo OWA y tipo Media son útiles para generar, via el Principio de Extensión, funciones de agregación multidimensionales para números borrosos.

5 Aplicación al caso de Números Borrosos Trapezoidales

Para el caso n-dimensional, nos planteamos aquí el problema de hallar funciones reales de n variables reales que induzcan, via el Principio de Extensión, funciones de agregación para números borrosos que conserven el carácter trapezoidal de los mismos. Más concretamente: ¿Qué funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, estrictamente crecientes e idempotentes verifican $F((\mathcal{T}(\mathcal{R}))^n) \subset \mathcal{T}(\mathcal{R})$? Es decir, ¿para qué funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, estrictamente crecientes e idempotentes, la función $F: (\mathcal{F}(\mathcal{R}))^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{R})$ inducida mediante el Principio de Extensión por f cumple que $F(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu \in \mathcal{T}(\mathcal{R})$ siendo $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathcal{T}(\mathcal{R})$?

Sean $\mu_i = (a_i, b_i, c_i, d_i) \in \mathcal{T}(\mathcal{R})$, $i = 1, \dots, n$. Sabemos que $\forall \alpha \in (0, 1]$, $[\mu_i]_\alpha = [a_i + (b_i - a_i) \cdot \alpha, d_i - (d_i - c_i) \cdot \alpha]$. Pongamos

$$r_i = a_i + (b_i - a_i) \cdot \alpha \text{ y } s_i = d_i - (d_i - c_i) \cdot \alpha$$

Observemos que un número borroso trapezoidal queda determinado por el hecho que los extremos de sus α -cortes varían linealmente con α . Entonces hay que analizar los α -cortes de $\mu = F(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Pero, según hemos visto,

$$[\mu]_\alpha = f([\mu_1]_\alpha, \dots, [\mu_n]_\alpha) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_i \in [\mu_i]_\alpha, i = 1, \dots, n\} =$$

$$= f([r_1, s_1] \times \dots \times [r_n, s_n])$$

Por ser f continua y creciente, resultará que

$$[\mu]_\alpha = [f(r_1, \dots, r_n), f(s_1, \dots, s_n)]$$

Caso 1. Supongamos ahora que f es una media ponderada n-dimensional con pesos $\omega_1, \dots, \omega_n$, es decir, que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(r_1, \dots, r_n) &= \sum_{i=1}^n \omega_i r_i = \sum_{i=1}^n \omega_i [(1 - \alpha)a_i + \alpha b_i] = \\ &= (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n \omega_i a_i + \alpha \sum_{i=1}^n \omega_i b_i = \\ &= (1 - \alpha)f(a_1, \dots, a_n) + \alpha f(b_1, \dots, b_n), \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} f(s_1, \dots, s_n) &= \\ &= (1 - \alpha)f(c_1, \dots, c_n) + \alpha f(d_1, \dots, d_n). \end{aligned}$$

De este modo, resulta

$$\begin{aligned} [\mu]_\alpha &= [(1 - \alpha)f(a_1, \dots, a_n) + \alpha f(b_1, \dots, b_n), \\ &\quad (1 - \alpha)f(d_1, \dots, d_n) + \alpha f(c_1, \dots, c_n)] = \\ &= [f(a_1, \dots, a_n) + \alpha(f(b_1, \dots, b_n) - f(a_1, \dots, a_n)), \\ &\quad f(d_1, \dots, d_n) + \alpha(f(c_1, \dots, c_n) - f(d_1, \dots, d_n))] \end{aligned}$$

Es decir, que μ es un número borroso trapezoidal.

Caso 2. Consideremos ahora un operador OWA n-dimensional f_ω con pesos $\omega_1, \dots, \omega_n$, es decir, que

$$f_\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_{[i]}$$

$$\text{donde } x_{[i]} = \max_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} \min(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_\omega(r_1, \dots, r_n) &= \sum_{i=1}^n \omega_i r_{[i]} \text{ y } f_\omega(s_1, \dots, s_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i s_{[i]}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $b_i - a_i = p$ y $d_i - c_i = q \forall i = 1, \dots, n$. Entonces

$$f_\omega(r_1, \dots, r_n) = f_\omega(a_1, \dots, a_n) + p \cdot \alpha$$

y

$$f_\omega(s_1, \dots, s_n) = f_\omega(d_1, \dots, d_n) - q \cdot \alpha,$$

de modo que

$$\begin{aligned} [\mu]_\alpha &= \\ &= [f_\omega(a_1, \dots, a_n) + p \cdot \alpha, f_\omega(d_1, \dots, d_n) - q \cdot \alpha] \end{aligned}$$

La linealidad respecto de α de los extremos del intervalo prueba que μ es un número borroso trapezoidal y, dando valores a $\alpha = 0, 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu &= (f_\omega(a_1, \dots, a_n), f_\omega(a_1, \dots, a_n) + p, \\ &\quad f_\omega(d_1, \dots, d_n) - q, f_\omega(d_1, \dots, d_n)) \end{aligned}$$

En general, como $r_i = a_i + (b_i - a_i) \cdot \alpha = (1 - \alpha)a_i + \alpha b_i$,

$$\begin{aligned} f_\omega(r_1, \dots, r_n) &= \sum_{i=1}^n \omega_i r_{[i]} = \sum_{i=1}^n \omega_i r_{k_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i [(1 - \alpha)a_{k_i} + \alpha b_{k_i}] = (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n \omega_i a_{k_i} + \\ &\alpha \sum_{i=1}^n \omega_i b_{k_i} = \\ &= (1 - \alpha) f_\omega^{\pi_1}(a_1, \dots, a_n) + \alpha f_\omega^{\pi_2}(b_1, \dots, b_n), \end{aligned}$$

donde π_1 y π_2 son dos permutaciones de $\{1, \dots, n\}$ (que dependen de α) convenientes y definimos el operador OWA f_ω^π como

$$f_\omega^\pi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_{[\pi(i)]}$$

Observemos que $f_\omega^\pi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \omega_{\pi^{-1}(i)} x_{[i]}$.

De este modo, resulta

$$[\mu]_\alpha = [(1 - \alpha) f_\omega^{\pi_1}(a_1, \dots, a_n) + \alpha f_\omega^{\pi_2}(b_1, \dots, b_n), \\ (1 - \alpha) f_\omega^{\sigma_1}(d_1, \dots, d_n) + \alpha f_\omega^{\sigma_2}(c_1, \dots, c_n)]$$

De todas formas, en general, μ no es un número borroso trapezoidal. En efecto, consideremos el caso $n = 2$. El operador OWA

$$f(x_1, x_2) = \omega_1 \cdot \max(x_1, x_2) + \omega_2 \cdot \min(x_1, x_2)$$

valdrá

$$f(r_1, r_2) = \begin{cases} \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 & \text{si } r_1 \geq r_2 \\ \omega_1 r_2 + \omega_2 r_1 & \text{si } r_1 \leq r_2 \end{cases}$$

Si $r_1 \geq r_2$,

$$\begin{aligned} f(r_1, r_2) &= \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 = \\ &= \omega_1((1 - \alpha)a_1 + \alpha b_1) + \omega_2((1 - \alpha)a_2 + \alpha b_2) = \\ &= [\omega_1 b_1 + \omega_2 b_2 - (\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2)]\alpha + \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2. \end{aligned}$$

Si $r_1 \leq r_2$,

$$\begin{aligned} f(r_1, r_2) &= \omega_1 r_2 + \omega_2 r_1 = \\ &= \omega_1((1 - \alpha)a_2 + \alpha b_2) + \omega_2((1 - \alpha)a_1 + \alpha b_1) = \\ &= [\omega_1 b_2 + \omega_2 b_1 - (\omega_1 a_2 + \omega_2 a_1)]\alpha + \omega_1 a_2 + \omega_2 a_1. \end{aligned}$$

Consideremos ahora dos números borrosos trapezoidales con los siguientes dos primeros parámetros:

$$a_1 = 0.2, b_1 = 0.8, a_2 = 0.4, b_2 = 0.6.$$

Elijamos el operador OWA con pesos $\omega_1 = 1/3$ y $\omega_2 = 2/3$. Entonces un sencillo cálculo da:

$$f(r_1, r_2) = \begin{cases} \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} & \text{si } r_1 \geq r_2 \\ \frac{2}{15}\alpha + \frac{4}{15} & \text{si } r_1 \leq r_2 \end{cases}$$

Claramente vemos que μ no es un número borroso trapezoidal, pues, en el intervalo de crecimiento estricto, μ no es un segmento de recta.

En general, sería un número borroso trapezoidal si, y sólo si, las pendientes de las dos rectas coinciden, es decir, si, y sólo si,

$$\omega_1 b_1 + \omega_2 b_2 - (\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2) = \omega_1 b_2 + \omega_2 b_1 - (\omega_1 a_2 + \omega_2 a_1).$$

Por ejemplo, la media aritmética ($\omega_1 = \omega_2 = 1/2$) de dos números borrosos trapezoidales sí da otro número borroso trapezoidal. Para ver si hay más operadores OWA 2-dimensionales que conserven los números borrosos trapezoidales, impongamos que las pendientes de las dos rectas coincidan:

$$\begin{aligned} \omega_1(b_1 - b_2 + a_2 - a_1) - \omega_2(b_1 - b_2 + a_2 - a_1) &= 0 \implies \\ \implies (\omega_1 - \omega_2)(b_1 - b_2 + a_2 - a_1) &= 0 \end{aligned}$$

Como debe pasar esto para todos a_1, a_2, b_1, b_2 , resultará que $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$, es decir, el operador OWA es la media aritmética.

Referencias

1. Klir, G.J.; Yuan, B. (1995) *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall, Inc., New York.
2. Lowen, R. (1996) *Fuzzy Set Theory*. Kluwer Academic Publishers.
3. Mayor, G.; Trillas, E. (1986) On the representation of some Aggregation Functions *Proceedings of the XVth IEEE-International Symposium on Multiple-Valued Logic*, 110-114.
4. Mayor, G.; Calvo, T. (1997) On extended Aggregation Functions *Proceedings of the IFSA Congress, 1997*, 1, 281-285.
5. Novák, V. (1989) *Fuzzy Sets and Their Applications*. Adam Hilger, Bristol.

6. Yager, R.R. (1988) On Ordered Weighted Averaging Operators in Multi-criteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18, 183-190.
7. Zadeh, L.A. (1973) The Concept of a linguistic variable and its Application to Approximate Reasoning I, II, III. Reprinted in Yager, R.R. et al. (1987) *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh*. John Wiley & Sons, Canada.

METODOS DE CONSTRUCCION DE FUNCIONES DE PERTENENCIA

A Sancho-Royo
Depto. de Matematicas
Escuela de Artes Aplicadas
18001 Granada
eaaogr@arrakis.es

J.L. Verdegay
Depto. de Ciencias de la Computacion e I.A.
Universidad de Granada
18071 Granada
verdegay@goliat.ugr.es

Resumen

Generalmente la relación entre una cierta característica, y su conjunto referencial no es problemática ya que suele ser una cuestión de medida directa. Pero en muchos casos hay que trabajar con propiedades cuya medida no es obvia, sino que es en sí objeto de estudio. En este trabajo se abordan los casos que emplean términos lingüísticos asociados a atributos que no pueden medirse directamente, para los que en general no puede asegurarse la existencia de una función de pertenencia, dando condiciones de existencia y métodos de construcción basados en la teoría de la medida psicológica.

Palabras Clave: Función de Pertenencia, Teoría de la Medida Psicológica.

1. Introducción

Dado un referencial X , un subconjunto difuso F de X se define por su función de pertenencia μ_F , $\mu_F: X \rightarrow [0,1]$. De hecho F puede identificarse con μ_F . Así por ejemplo, dado el conjunto $X = [0,100]$ de edades, el adjetivo joven puede tener varias representaciones e interpretaciones contexto-dependientes en términos de funciones de pertenencia. Las diferentes interpretaciones del concepto de función de pertenencia ha sido un asunto tratado por numerosos autores [14, 15, 10, 12], considerado en [13], y mas recientemente en [1] y [11]. Bajo el esquema dado en [13], y generalmente aceptado, quedan fuera de esas interpretaciones aquellos atributos cuya medida no es obvia sino que es en sí objeto de análisis, como por ejemplo "calidad", "eficacia", etc.

Aunque se entiende por estímulo cualquier agente o condición que a través de receptores puede influir sobre un sujeto, [2], nos referiremos aquí a aquellos estímulos que soporten la imputación de una cierta característica (que pueden evaluarse conforme a dicha característica). Por ejemplo el conjunto de estímulos puede ser un grupo de universidades y la característica a evaluar "calidad".

Como es evidente, esto último no permite, al menos de forma inmediata, el uso del modelo de Turksen para la construcción de funciones de pertenencia para esos términos lingüísticos asociados a atributos que no pueden medirse directamente. La teoría de la medida psicológica, sin embargo, ha desarrollado numerosos métodos en este campo (los métodos de escalamiento). En lo que sigue por tanto analizamos los casos en los que puede demostrarse que existe una función de pertenencia, y describimos los principales métodos de construcción de las mismas. Después, introducimos los métodos de escalamiento de la teoría de la medida psicológica, para fundamentar la construcción de funciones de pertenencia, para los casos en que se consideren términos lingüísticos asociados a atributos no medibles directamente. Por ultimo presentamos dichos métodos de construcción.

2. Interpretaciones de función de pertenencia

Identificando las funciones de pertenencia con los conjuntos difusos que definen, muchos autores coinciden en interpretarlas como representaciones de los significados de los términos de las variables lingüísticas, [15]. Aunque estos términos son clave en el lenguaje natural y en el razonamiento humano [13], no hay un acuerdo unánime en qué se entiende por representaciones de significado. En todo caso, las interpretaciones más conocidas son las que se dan en términos de verosimilitud, de intervalos estadísticos, de similitud, de teoría de la utilidad y de teoría de la medida [11]. En particular, en esa ultima interpretación, el grado de pertenencia se considera un fenómeno subjetivo, que puede medirse poniendo énfasis en los distintos tipos de escalas requeridos, y que obviamente están en relación con la naturaleza del conjunto referencial X . Así, un $\mu_F(x) = p$ se entiende como que cuando x se compara con otros elementos de X , x se encuentra en cierta escala de pertenencia a F , en el valor p .

En la mayoría de los métodos de construcción de funciones de pertenencia, la información se obtiene a partir de un conjunto de sujetos, teniendo un marcado

carácter cognitivo, por lo que como hemos dicho el uso de teorías y métodos del ámbito psicológico parece razonable y adecuado. El objetivo de la teoría de la medida psicológica es garantizar en qué situaciones podemos asignar cantidades a propiedades de los objetos de estudio, y cómo y cuándo las operaciones entre estas cantidades reflejan combinaciones de algún tipo entre los objetos. En relación con la anterior interpretación como medidas, son esenciales los siguientes resultados [6, 4] de representación, unicidad y significación, esto es:

1) Unicidad: Si una estructura relacional empírica satisface unos axiomas, puede darse un homomorfismo entre ésta y una cierta estructura relacional numérica.

2) Representación: si las asignaciones numéricas basadas en 1) admiten ciertas transformaciones básicas, entonces la clase de unicidad de las asignaciones numéricas determina la escala de la relación numérica; y

3) Significación: si la escala de las asignaciones numéricas determinadas en 2) admite sólo una cierta clase de transformaciones, entonces sólo una cierta clase de combinaciones de asignaciones numéricas son admisibles como transformaciones específicas que producen resultados significativos en el sentido de la teoría de la medida psicológica.

Por otro lado, una representación de un conjunto difuso, requiere la comprensión básica de las relaciones entre cinco símbolos distintos y relacionados: a) Un conjunto de elementos $\delta \in \Theta$, b) una variable lingüística V , un atributo de elementos $\delta \in \Theta$, c) un término lingüístico A de una variable lingüística, en un conjunto de términos lingüísticos, en un contexto, d) un intervalo de asignación numérica medible $X \subset [-\infty, \infty]$, el conjunto referencial para V , de Θ , y e) una asignación numérica subjetiva $\mu_A(\delta)$ que representa el grado con el que δ pertenece al conjunto de elementos identificados por el término lingüístico A . En este esquema, la estructura de pertenencia relacional empírica, la estructura relacional empírica, es $(\Theta, \geq_A)$, donde $\delta \geq_A \delta'$ si δ muestra el atributo A al menos tanto como δ' , y la estructura de pertenencia relacional numérica, la estructura relacional numérica, es $(\mu_A(\delta), \geq)$, con $\geq$ en su sentido clásico.

De las diferentes escalas construibles en la teoría de la medida psicológica, destacamos cuatro [4]: nominales, ordinales, de intervalos y de razón. En las primeras sólo se distinguen los objetos de estudio entre sí, y las transformaciones válidas son las biyecciones. En las segundas se ordenan los objetos con al menos un orden débil, y las transformaciones admisibles son las monótonas. En las terceras, las diferencias entre las medidas de los objetos han de ser comparables y verificar ciertos axiomas. En este caso, las transformaciones

admisibles son lineales con coeficiente positivo. En las últimas, los cocientes entre estas diferencias deben poder compararse, se exige aún más el cumplimiento de ciertos axiomas, y las transformaciones admisibles son homotecias de coeficiente positivo. De estos cuatro tipos de escalas destacan, por su aplicabilidad al contexto que nos interesa, las ordinales y las de intervalos. Así, cuando la situación considerada supone que las funciones de pertenencia se basan en escalas ordinales, podemos partir de los resultados de [10]. Para establecer una escala ordinal es necesario que la estructura de pertenencia relacional empírica $(\Theta, \geq_A)$ posea, al menos, un orden débil. Esto es, que $\forall \delta_i, \delta_j, \delta_k \in \Theta$, se verifique:

(1) Conexión débil: O bien $\delta_i \geq_A \delta_j$, o bien $\delta_j \geq_A \delta_i$

(2) Transitividad: Si $\delta_i \geq_A \delta_j$ y $\delta_j \geq_A \delta_k$, entonces $\delta_i \geq_A \delta_k$

Entonces se demuestra que si existe un orden débil en una estructura empírica, entonces existe una función de pertenencia $\mu_A \in [0, 1]$ sobre Θ de tal forma que

$$\forall \delta_i, \delta_j \in \Theta, \delta_i \geq_A \delta_j \Leftrightarrow \mu_A(\delta_i) \geq \mu_A(\delta_j)$$

y que además, si μ'_A es otra función de pertenencia para A sobre Θ , tiene la misma propiedad si y sólo si existe una función de transformación f , monótona en $[0, 1]$, tal que para todo $\delta \in \Theta$, $\mu'_A(\delta) = f[\mu_A(\delta)]$. Esto es, μ_A es una escala ordinal única salvo funciones de transformación f si y sólo si (1) y (2) se satisfacen.

Por otro lado si la situación que suponemos asume que las funciones de pertenencia están basadas en escalas de intervalos, sea $\Theta' = \Theta \times \Theta$, y notamos $\delta_i \delta_j$ al par (δ_i, δ_j) de Θ' . Una estructura empírica acotada $(\Theta, \geq_A)$ para la que los intervalos $\delta_i \delta_j$ en Θ' pueden ser débilmente ordenados por un orden $\geq'_A$, se conoce como una estructura de diferencias comparables, y se nota $(\Theta', \geq'_A)$. Entonces,

$$\delta_s \delta_t \approx'_A \delta_r \delta_p \Leftrightarrow \delta_s \delta_t \geq'_A \delta_r \delta_p \text{ y } \delta_r \delta_p \geq'_A \delta_s \delta_t$$

y

$$\delta_s \delta_t >_A \delta_r \delta_p \Leftrightarrow \delta_s \delta_t \geq'_A \delta_r \delta_p \text{ y no } \delta_s \delta_t \approx'_A \delta_r \delta_p$$

Una estructura de diferencias comparables [4] forma una estructura algebraica de diferencias, si se verifica:

(1) Orden débil:

Conexión débil: O bien $\delta_s \delta_t \geq'_A \delta_r \delta_p$ o bien $\delta_r \delta_p \geq'_A \delta_s \delta_t$

Transitividad: $\delta_s \delta_t \geq'_A \delta_r \delta_p$ y $\delta_r \delta_p \geq'_A \delta_q \delta_u \Rightarrow \delta_s \delta_t \geq'_A \delta_q \delta_u$

(2) Inversión de signo: $\delta_r \delta_s \geq'_A \delta_p \delta_q \Rightarrow \delta_q \delta_p \geq'_A \delta_s \delta_r$

(3) Monotonía débil: Si $\delta_r \delta_s \geq'_A \delta'_r \delta'_s$ y $\delta_s \delta_t \geq'_A \delta'_s \delta'_t$ entonces

$$\delta_r \delta_t \geq'_A \delta'_r \delta'_t$$

(4) Resolución: si $\delta_r \delta_s \geq'_A \delta_p \delta_q \geq'_A \delta_s \delta_s$ entonces existen $\delta_p', \delta_p'' \in \Theta$ tales que: $\delta_p' \delta_s \geq'_A \delta_p \delta_q \geq'_A \delta_s \delta_p''$

(5) Condición Arquimediana: Si $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots$ es una sucesión estándar estrictamente acotada, esto es: $\delta_{i+1}\delta_i \geq_A \delta_2\delta_1$ para cada δ_i, δ_{i+1} en la sucesión y no $\delta_2\delta_1 \approx'_A \delta_1\delta_1$, y existe $\delta_p', \delta_p'' \in \Theta$ tal que $\delta_p''\delta_p' >_A \delta_i\delta_1 >_A \delta_p'\delta_p''$ para todo δ_i en la sucesión, entonces dicha sucesión es finita.

Para un conjunto Θ , con un orden denso, si una estructura de pertenencia empírica $(\Theta, \geq_A)$ es de diferencias comparables y acotada, de forma que $(\Theta', \geq'_A)$ es una estructura algebraica de diferencias, existe entonces una función de pertenencia acotada de valores reales, $\mu_A \in [0, 1]$, sobre Θ , tal que $\forall \delta_i, \delta_j, \delta_k, \delta_l \in \Theta$,

$$\delta_j \geq_A \delta_i \Leftrightarrow \mu_A(\delta_j) \geq \mu_A(\delta_i)$$

y

$$\delta_j\delta_i \geq'_A \delta_l\delta_k \Leftrightarrow \mu_A(\delta_j) - \mu_A(\delta_i) \geq \mu_A(\delta_l) - \mu_A(\delta_k)$$

Por otro lado, μ_A es única salvo transformaciones lineales acotadas y positivas, esto es, si μ'_A tiene la misma propiedad que μ_A , existen dos constantes reales α, β , con $\alpha > 0$, tal que $\mu'_A(\delta) = \min\{1, \alpha \cdot \mu_A(\delta) + \beta\}$, $\forall \delta \in \Theta$, con lo que podemos decir que μ_A es una escala de intervalos.

Demostrada la existencia de esas funciones de pertenencia en este primer caso, recordemos que para su construcción efectiva existen diferentes métodos: valoración directa, votación, estimación de intervalos, valoración inversa, ejemplificación, comparación de pares, y los denominados neuro-fuzzy [11, 13].

3. Métodos de escalamiento.

Abordamos ahora como extraer, a partir de los métodos clásicos de escalamiento, funciones de pertenencia de características o atributos difusos de un conjunto de estímulos. Los métodos mas usuales de obtención de información para el escalamiento psicológico [3, 7], llamados también tareas, pueden clasificarse en:

3.1) Tareas de estímulo simple. Se le pide al sujeto una respuesta dicotómica en relación con un estímulo. Por ejemplo, el estímulo puede ser una universidad, y la pregunta que se le hace al sujeto: ¿Es esa una universidad de calidad?. Habrá dos posibles respuestas: Si/No. Nos encontramos aquí con la tarea que propone el método de votación comentado antes. El primer autor que lo uso en el ámbito de los conjuntos difusos [5], no menciono el uso de escalas, sin embargo, Turksen en [13] lo hace notar, aunque no incluye su uso para características que no se relacionan de modo natural con un continuo.

3.2) Tareas de elección de alternativas. Consisten en la elección de una respuesta entre un número pequeño de alternativas, por lo general, expresiones lingüísticas ordenadas en orden creciente, y en número impar [8, 7]. Con respecto al ejemplo anterior, la diferencia consiste en el número de alternativas de respuesta. Así, mostrado un

informe de la universidad, se le ofrecería al sujeto responder: ¿Cómo considera esa universidad?, admitiendo respuestas como: baja calidad, mucha calidad, etc.

3.3) Comparación de estímulos por pares. Suponiendo que se forman todos los pares posibles de entre un conjunto limitado de estímulos, se presentan éstos a los sujetos y se les demanda que señalen cuál tiene en mayor medida una cualidad. Es clara su aplicación al ejemplo de antes; se pediría al sujeto que eligiera entre cada par de universidades aquella que considerara de mas calidad.

3.4) Comparación de estímulos por grupos. Puede verse como una generalización del anterior. La tarea es elegir de entre un grupo de estímulos, aquel que mejor represente la característica a evaluar, lo que requiere que los estímulos se presenten en grupos equidistribuidos (cada estímulo debe aparecer en los grupos presentados el mismo número de veces)

3.5) Ordenación de estímulos por grupos. Consiste en ordenar grupos del conjunto de estímulos según la característica a evaluar. Una tarea de ordenación no es más que una tarea de comparación sucesiva. Se escoge el mejor, luego el mejor del resto, etc. Si el conjunto de estímulos fueran cinco universidades, ofreceríamos los posibles grupos de 3 estímulos y pediríamos que se ordenasen de mayor a menor según la "calidad". Esto se repite con cada uno de los distintos triples.

3.6) Ordenación del grupo total de estímulos. Es igual que antes, cuando el grupo de estímulos a ordenar es el conjunto completo. Así, ofreceríamos al sujeto las cinco universidades y le pediríamos que las ordenara según la "calidad", primero la de mayor calidad, etc.

Dado un conjunto finito de estímulos, cualquier método de escalamiento nos ofrece una escala E, que puede ser ordinal o de intervalos (aquí nos interesan las escalas de intervalo que son las que dan funciones de pertenencia únicas) de forma que E, en las escalas de intervalo, tiene un recorrido sobre un intervalo I, y asocia a cada estímulo un valor real sobre dicho intervalo. La escala E puede entenderse como la valoración (de un sujeto o conjunto de sujetos) de una cierta característica del estímulo. En las tareas de respuesta la característica imputable al estímulo no es explícita, pero la escala puede ser comprendida como la valoración del acuerdo del sujeto con el estímulo. Así el esquema formal para tareas de juicio y respuesta es el mismo. Por otro lado, un intervalo de medida por sí solo no garantiza la existencia de un conjunto difuso sobre él. En este sentido, como se ha dicho, en [12, 13] se fundamenta la construcción de las funciones de pertenencia de conjuntos difusos con base en la teoría de la medida psicológica, con lo que si puede establecerse una estructura empírica de pertenencia para el conjunto de estímulos, y a partir de ésta una de

diferencias comparables sobre el conjunto de pares de estímulos, la escala obtenida puede interpretarse como un difuso sobre X , sin más que transformar I en $[0,1]$.

Como ya sabemos, las transformaciones admisibles en escalas de intervalos son las lineales positivas, por lo tanto, si la escala es de intervalos y existe dicha estructura de pertenencia, la función de pertenencia asociada debe ser única, ya que hay una única transformación lineal positiva de $I = [m,M]$ a $[0,1]$. No ocurre así si la escala es ordinal, ya que cualquier transformación monótona de I en $[0,1]$ nos proporciona una función de pertenencia sobre el conjunto de estímulos. De aquí podemos deducir que en los métodos de escalamiento psicométricos que puedan producir funciones de pertenencia a través de escalas de intervalo, éstas son únicas simplemente añadiendo una transformación lineal positiva al intervalo de escala. De hecho, gran parte de los métodos de construcción de funciones de pertenencia descritos, son métodos clásicos de escalamiento (comparación de pares, estimación de intervalos,...). Pero, como se ha indicado [13], estos métodos suelen simplificarse a aquellos casos donde el conjunto referencial subyacente es continuo de modo natural. Para los otros casos, debemos de hacer uso de métodos de escalamiento psicológico.

Nos interesa ahora saber bajo qué condiciones es posible asociar a estos métodos un modelo de construcción de funciones de pertenencia. Según [9], para que esto pueda hacerse es necesaria la existencia de una estructura empírica a la que pueda asociarse, al menos una escala ordinal, única salvo transformaciones monótonas. Pero ello no es suficiente si queremos que la función de pertenencia obtenida mediante la tarea estudiada sea única. Así es necesario extender la estructura empírica al conjunto producto de estímulos (pares de estímulos) construyendo una estructura de diferencias comparables [4]. Entonces, esta estructura generará una escala de intervalos única salvo transformaciones lineales positivas, por lo que la escala obtenida en $[0,1]$, que es la función de pertenencia buscada, es única. En lo que sigue se muestra cómo para estos métodos de escalamiento clásicos pueden construirse las estructuras referidas.

4. Estructuras empíricas.

Las estructuras asociadas a las tareas de estímulo simple, se construyen respectivamente sobre las siguientes bases.

4.1) Tareas de estímulo simple. Sea $\Theta = \{x_1, \dots, x_m\}$ un conjunto finito de m estímulos. Sea A una propiedad susceptible de ser evaluada para estos estímulos. (por ejemplo "calidad"). Sea $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un conjunto de evaluadores. Se pide a cada evaluador que responda para cada x_j : ¿Es x_j A ("de calidad")?. Recordemos que todas

las construcciones siguientes son válidas para tareas de respuesta, sin más que convenir que el atributo evaluado es el "acuerdo" del sujeto al estímulo.

Sea l_{ij} ($i=1, \dots, n$, y $j=1, \dots, m$) la respuesta del evaluador i a la pregunta relativa al estímulo j , codificada con 1 la afirmativa y 0 la negativa. Definimos sobre Θ la relación: $x_s \geq_A x_r \Leftrightarrow \sum_{i=1..n} l_{is} \geq \sum_{i=1..n} l_{ir}$

Lema 4.1. $\geq_A$ es un orden débil sobre Θ .

De este Lema se deduce que $(\Theta, \geq_A)$ es una estructura empírica a la que puede asociarse, al menos una escala ordinal, única salvo transformaciones monótonas [9].

Extendemos ahora la estructura al conjunto producto. Como señalamos antes, el cumplimiento de la axiomática propia de la estructura extendida (estructura de diferencias comparables) se analiza a continuación:

Definición 4.1: Sea $\Theta' = \Theta \times \Theta$, notamos por $x_r x_s$ al par $(x_r, x_s) \in \Theta'$, y designamos $\geq'_A$ a la relación definida sobre Θ' , dada por: $x_r x_s \geq'_A x_p x_q \Leftrightarrow \sum_{i=1..n} (l_{is} - l_{ir}) \geq \sum_{i=1..n} (l_{iq} - l_{ip})$

Lema 4.2. La relación definida sobre Θ' , $\geq'_A$ verifica las siguientes propiedades:

- (i) Es un orden débil sobre Θ'
- (ii) Monotonía débil: $x_r x_s \geq'_A x_r x_t$ y $x_s x_t \geq'_A x_p x_t \Rightarrow x_r x_t \geq'_A x_p x_t$
- (iii) Vuelta de signo: $x_r x_s \geq'_A x_p x_q \Rightarrow x_q x_p \geq'_A x_s x_r$

Para poder asociar a una estructura de diferencias una escala de intervalos, son necesarias además de las tres condiciones demostradas antes, las dos siguientes [4]:

- (iv) Resolución: Si $x_r x_s \geq'_A x_p x_q \geq'_A x_s x_s$ entonces existen x_p y $x_p' \in \Theta$ tales que $x_p' x_s \geq'_A x_p x_q \geq'_A x_r x_p$
- (v) Condición arquimediana: Si $d_1, d_2, \dots, d_i \in \Theta$ es una sucesión estándar estrictamente acotada, entonces dicha sucesión es finita.

Puede demostrarse que ambas se verifican en el contexto que estamos considerando [11], y así podemos afirmar que $(\Theta', \geq'_A)$ es una estructura empírica a la que puede asociarse, al menos, una escala de intervalos μ_A , única salvo transformaciones lineales positivas [9].

4.2) Tareas de elección de alternativas. Sean ahora las alternativas de respuesta: $\{a_0, a_1, \dots, a_h\}$ (h , por lo general, no pasa de 7) [8, 7]. Se pide a cada evaluador que responda para cada x_j qué alternativa de respuesta considera que mejor representa a " x_j es A ". Sea l_{ij} la respuesta del evaluador i a la pregunta relativa al estímulo j , codificada 0 para $a_0, \dots, h$ para a_h . Con el mismo esquema que en el anterior apartado, concluimos que se puede construir una estructura empírica asociada al conjunto de estímulos tal que se obtenga una escala de

intervalos. Para ello definimos sobre Θ la relación dada por: $x_s \geq_A x_r \Leftrightarrow \sum_{i=1..n} l_{is} \geq \sum_{i=1..n} l_{ir}$. Se verifica entonces que $\geq_A$ es un orden débil sobre Θ , y por tanto que $(\Theta, \geq_A)$ es una estructura empírica. Ahora extendemos la estructura al conjunto producto.

Definición 4.2: Sea $\Theta' = \Theta \times \Theta$, notamos por x_r, x_s al par $(x_r, x_s) \in \Theta'$, y designamos $\geq'_A$ a la relación definida sobre Θ' , dada por: $x_r, x_s \geq'_A x_p, x_q \Leftrightarrow \sum_{i=1..n} (l_{is} - l_{ir}) \geq \sum_{i=1..n} (l_{iq} - l_{ip})$.

Entonces se puede demostrar [11] que la relación definida sobre Θ' , $\geq'_A$ verifica las propiedades de ser un orden débil sobre Θ' , de monotonia débil, de vuelta de signo, de resolución y la condición arquimediana. Por tanto, para esta segunda tarea de elección de alternativas, la estructura $(\Theta', \geq'_A)$ es una estructura empírica de diferencias comparables a la que puede asociarse, al menos una escala de intervalos μ_A .

4.3) Comparación de estímulos por pares y grupos. Sea $\Theta = \{x_1, \dots, x_m\}$ un conjunto finito de m estímulos, y A una propiedad evaluable para estos estímulos. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, t -uplas ($t \leq m$) de estímulos de Θ . Se pide al sujeto que elija el estímulo de cada t -upla que represente mejor la propiedad evaluada. Si $m > 2$ y $t \geq 2$, entonces para $t = 2$ tenemos la tarea designada antes como de comparación de estímulos por pares. En otro caso, $t > 2$, estamos en la tarea designada como comparación de estímulos por grupos. Para el caso $t=m$ (una sola t -upla) en realidad elegimos un sólo estímulo de Θ .

Sea $l_{ij}=1$ si el estímulo x_j es elegido en la t -upla σ_i y 0 en otro caso ($i=1, \dots, k$, y $j=1, \dots, m$). En este caso definimos sobre Θ la relación: $x_s \geq_A x_r \Leftrightarrow \sum_{i=1..n} l_{is} \geq \sum_{i=1..n} l_{ir}$, a partir de la cual se verifica el siguiente resultado

Lema 4.3: $\geq_A$ es un orden débil sobre Θ .

y podemos ampliar como antes $\geq_A$ al conjunto de pares Θ' sin ninguna dificultad, obteniendo de nuevo una estructura empírica de diferencias comparables a la que asociar una escala de intervalos.

4.4) Ordenación de estímulos por grupos o del conjunto completo de estímulos. Sea Θ un conjunto finito de m estímulos, y A una propiedad evaluable de ellos. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, t -uplas ($t \leq m$) de elementos de Θ . Se pide al sujeto que los ordene de mayor a menor grado, en relación con la propiedad evaluada o, con su aceptación o acuerdo. Podemos suponer $m > 2$ y $t \geq 2$, para $t = 2$ tenemos que una tarea de ordenación coincide con la de comparación, ya estudiada. En el caso $t=m$ (una sola t -upla) en realidad ordenamos todos los estímulos de Θ , lo que antes denominamos ordenación del grupo total de estímulos. En otro caso ($t < m$) estaríamos ordenando estímulos por grupos.

Sea entonces l_{ij} ($i=1, \dots, k$, y $j=1, \dots, m$) el orden que ocupa x_j en la t -upla σ_i , suponemos $l_{ij}=0$ si x_j no aparece en σ_i . De aquí que $l_{ij} \in \{0, \dots, t\}$. Definimos sobre Θ la relación: $x_s \geq_A x_r \Leftrightarrow \sum_{i=1..k} l_{is} \leq \sum_{i=1..k} l_{ir}$

Debemos observar que dado que la ordenación se hace de mayor a menor grado y la asignación numérica es contraria, los signos de orden están cambiados, pero parece más natural mantener la numeración creciente y el orden de los elementos de la t -upla decreciente aunque obligue a alterar los signos de orden. Así, como antes, se verifica que $\geq_A$ es un orden débil sobre Θ , que podemos extender fácilmente al espacio producto. Por tanto, como en los anteriores casos, obtenemos una estructura empírica a la que asociar una escala de intervalos.

Con esto hemos conseguido sentar las bases para la construcción de funciones de pertenencia del conjunto de estímulo significativas desde el punto de vista de la teoría de la medida psicológica, para las tareas que se han descrito. En la siguiente sección construiremos para cada una de estas tareas la función de pertenencia asociada.

5. Construcción de funciones de pertenencia

El nexo entre las estructuras anteriores y las funciones de pertenencia se establece en los siguientes resultados [9].

Teorema de representación. Sea $\Theta = \{x_1, \dots, x_m\}$ el conjunto finito que representa m estímulos tal que $(\Theta, \geq_A)$ es una estructura empírica de pertenencia, y tal que $(\Theta \times \Theta, \geq'_A)$ sea una estructura algebraica de diferencias, entonces existe una función real acotada $\mu_A: \Theta \rightarrow [0, 1]$ tal que: $x_s \geq_A x_r \Leftrightarrow \mu_A(x_s) \geq \mu_A(x_r)$, y

$$x_r, x_s \geq'_A x_p, x_q \Leftrightarrow \mu_A(x_s) - \mu_A(x_r) \geq \mu_A(x_q) - \mu_A(x_p)$$

Teorema de unicidad. Si μ'_A es otra función que satisface las dos condiciones anteriores, $\mu'_A(x_i) = c_1 \mu_A(x_i) + c_2$, siendo c_1 y c_2 números reales, $c_1 > 0$.

Como veremos las definiciones de la función de pertenencia para cada una de las tareas tratadas aquí cumplen esta condición. Se trata pues de construir en cada caso una función $\mu_A: \Theta \rightarrow [0, 1]$ tal que convierta la estructura empírica definida en una de pertenencia.

5.1) Tareas de estímulo simple. Sea $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un conjunto de evaluadores, y l_{ij} ($i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$) la respuesta de i a la pregunta relativa al estímulo j , codificada 1 la afirmativa y 0 la negativa. Definimos:

$$\mu_A(x_j) = (\sum_{i=1..n} l_{ij})/n$$

Obviamente, $\mu_A(x_j) \in [0, 1]$ para todo j . Veamos que con μ_A , $(\Theta, \geq_A)$ es una estructura empírica de pertenencia. Habíamos definido para esta tarea:

$$x_s \geq_A x_r \Leftrightarrow \sum_{i=1..n} l_{is} \leq \sum_{i=1..n} l_{ir}$$

que es equivalente a: $\mu_A(x_s) \geq \mu_A(x_r)$. Obsérvese que $\mu_A(x_j) = 0$ si y sólo si ningún evaluador responde afirmativamente a la pregunta simple, mientras que $\mu_A(x_j) = 1$ si y sólo si todos los evaluadores lo hacen.

De forma similar, definimos anteriormente:

$$x_r x_s \geq_A x_p x_q \Leftrightarrow \sum_{i=1..n} (l_{is} - l_{ir}) \geq \sum_{i=1..n} (l_{iq} - l_{ip})$$

que, obviamente es equivalente a:

$$\mu_A(x_s) - \mu_A(x_r) \geq \mu_A(x_q) - \mu_A(x_p)$$

A partir de esta definición es interesante notar que para esta tarea, la función de pertenencia obtenida es colectiva y no individual. Para conseguir con esta tarea una función de pertenencia relacionada con los juicios de un solo sujeto, será necesaria su repetición, evitando el recuerdo de la respuesta por parte del propio sujeto.

5.2) Tareas de elección de alternativas. Con la misma notación que en el apartado anterior, sean ahora las alternativas de respuesta: $\{a_0, a_1, \dots, a_h\}$, y l_{ij} la respuesta del evaluador i a la pregunta relativa al estímulo j (0 para la respuesta a_0 , 1 para $a_1, \dots, h$ para a_h). Definimos:

$$\mu_A(x_j) = (\sum_{i=1..n} l_{ij})/nh$$

Obviamente, $\mu_A(x_j) \in [0,1]$, $\forall j$. Obsérvese que $\mu_A(x_j) = 0$ si y sólo si todos los evaluadores responden con a_0 para el estímulo j , mientras que $\mu_A(x_j) = 1$ si y sólo si todos los evaluadores responden a_h para este estímulo.

La comprobación de buena definición y compatibilidad con la estructura de pertenencia y la estructura de diferencias comparables es similar a la del caso anterior.

5.3) Comparación de estímulos por pares y grupos. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, t -uplas ($t \leq m$) de estímulos de Θ . Sea $l_{ij} = 1$ si el estímulo x_j es elegido en la t -upla σ_i y 0 en otro caso ($i=1, \dots, k$, y $j=1, \dots, m$). Definimos:

$$\mu_A(x_j) = (\sum_{i=1..k} l_{ij})/k$$

Con esta definición, igual que en las anteriores tareas, puede comprobarse que μ_A es una función de pertenencia bien definida y compatible con las estructuras de pertenencia. En las dos tareas anteriores se obtenían funciones de pertenencia para los estímulos dado un grupo de evaluadores. Ahora obtenemos funciones de pertenencia para los estímulos para un solo evaluador. El papel (en el sumatorio) que hacían en las tareas anteriores los evaluadores lo hacen ahora las t -uplas. Por construcción se da que: $\mu_A(x_j) = 0$ si y sólo si en ningún grupo se elige al estímulo x_j , mientras que $\mu_A(x_j) = 1$ si y sólo si en todos los grupos se elige a dicho estímulo.

5.4) Ordenación de estímulos por grupos o del conjunto completo de estímulos. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, t -uplas ($t \leq m$) de estímulos de Θ . Se pide al evaluador que las

ordene de mayor a menor grado, en relación con la propiedad evaluada. Sea l_{ij} ($i=1, \dots, k$, $j=1, \dots, m$) el orden que ocupa x_j en σ_i . Suponemos $l_{ij} = 0$ si x_j no aparece en σ_i . Sea $\Gamma(x) = 1$, si $x \neq 0$, y 0 en otro caso. Definimos:

$$\mu_A(x_j) = [(\sum_{i=1..k} l_{ij}) / (\sum_{i=1..k} \Gamma(l_{ij})) - t] / (1-t)$$

$\mu_A(x_j)$ está bien definido, ya que, por construcción:

$$(\sum_{i=1..k} \Gamma(l_{ij})) \leq \sum_{i=1..k} l_{ij} \leq (\sum_{i=1..k} \Gamma(l_{ij}))t$$

luego $1 \leq \sum_{i=1..k} l_{ij} / \sum_{i=1..k} \Gamma(l_{ij}) \leq t$, y $\mu_A(x_j) \in [0,1]$.

La compatibilidad con las estructuras de pertenencia definidas puede demostrarse con facilidad [11].

Referencias

- [1] T. Bilgiç y B. Türksen (1996): Measurement of Membership Functions. <http://analogy.ie.utoronto.ca>
- [2] F. Dorsch (1985): Diccionario de Psicología. Herder.
- [3] P. Dunn-Rankin (1983): Scaling Methods. Lawrence Erlbaum Associates.
- [4] D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes y A. Tversky (1971): Foundations of Measurement (I). Acad. Press.
- [5] W. Labov (1973): The Boundaries of Words and their Meanings. En Bailey y Shuy, Eds.: New Ways of Anal. Variation in English. Georgetown Univ. Press.
- [6] R.D. Luce, R. Bush y E. Galanter (1963): Handbook of Mathematical Psychology (Vol. 1). John Wiley.
- [7] J.L. Melia (1990): Metodos de Escalamiento Unidimensional. Valencia.
- [8] G.A. Miller (1967): The Magical Number 7 Plus or Minus 2: Some Limits on our Capacity for Processing Information. The Psychology of Communication. Penguin Books Inc.
- [9] A. Norwich y B. Turksen (1982): The Fundamental Measurement of Fuzziness (y siguientes). 49-60, 61-67, 68-74. Fuzzy Sets and Poss. Theory, Pergamon Press
- [10] A. Norwich y B. Turksen (1984): A Model for the Measurement of Membership and the Consequences of its Empirical Implementations. Fuzzy Sets and Systems 12, 1-25.
- [11] A. Sancho (1998): Evaluaciones de Estimulos con Caracteristicas Difusas. Tesis Doctoral. Granada.
- [12] I. B. Turksen (1990): Conjoint Measurement of Membership Functions. Proc. of NAFIP'90, 326-329.
- [13] I. B. Türksen (1991): Measurement of Membership Functions and their Acquisition. Fuzzy Sets and Systems 40, 5-38.
- [14] L.A. Zadeh (1965): Fuzzy Sets. Information and Control 8, 338-353.
- [15] L.A. Zadeh (1975): The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. Inf. Sciences 8, 199-249; 301-357. 9, 43-80.

ON QUALITATIVE WEIGHTED MEANS

Lluís Godo

Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Campus UAB s/n,
08193 Bellaterra, Spain
godo@iia.csic.es

Vicenç Torra

Departament Enginyeria Informàtica (ETSE)
Universitat Rovira i Virgili
Carretera de Salou s/n,
43006 Tarragona, Spain
vtorra@etse.urv.es

Abstract

In many applications values to be aggregated are qualitative. In that case, if one wants to compute an average value in a pure qualitative setting, one is basically restricted to weighted versions of max-min combinations. In this paper we explore the feasibility of defining a qualitative counterpart of the weighted mean operator without having to necessarily use some kind of numerical interpretation of the values. We propose a method to average qualitative values belonging to an ordinal scale weighted with natural numbers based on the use of qualitative (finite) t-norms defined on the set of values.

Keywords: aggregation operators, qualitative aggregation, weighted mean, finite t-norms

1 INTRODUCTION

Aggregation operators have been traditionally defined in the numerical setting (notorious exceptions are [3, 7]). Most notorious numerical aggregation operations are those based on the *weighted mean* (WM) [1] and those based on the *ordered weighted average* (OWA) [10, 11]. However, in many applications, values to be aggregated are qualitative, or ordinal, rather than quantitative. In such a cases, the usual technique is to map the qualitative values and weights into a numerical scale, and then perform the aggregation of those numerical values, and optionally get back to a value in an ordinal scale, if needed.

If one wants to strictly remain in a pure qualitative setting, where the ordering of the values and weights is what only matters, then one is basically led to weighted

versions of max or min combinations (Sugeno integrals), provided that the domain of values U and the domain of weights W are commensurate scales. For instance, if we take $U = W$, the weighted-max and weighted-min of a set of values $\{x_1, \dots, x_n\}$ according to a set of weights $\{w_1, \dots, w_n\}$ are respectively defined as

$$\begin{aligned}x^+ &= \max(\min(x_1, w_1), \dots, \min(x_n, w_n)) \\x^- &= \min(\max(x_1, n(w_1)), \dots, \max(x_n, n(w_n)))\end{aligned}$$

where n is the order reversing involution in W and the normalisation condition $\max(w_1, \dots, w_n) = 1_W$ is assumed to hold. Then, it can be shown that the inequalities

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq x^- \leq x^+ \leq \max(x_1, \dots, x_n)$$

always hold. The above qualitative aggregations are usual in possibility and fuzzy sets theory. The expressions x^+ and x^- respectively correspond to the possibility and the necessity measures of a fuzzy event A over a (finite) domain $D = \{d_1, \dots, d_n\}$, with membership function $\mu_A: D \rightarrow [0, 1]$, given some possibility distribution $\pi: D \rightarrow [0, 1]$. Namely $\text{Pos}_\pi(A)$ and $\text{Nec}_\pi(A)$ are nothing but the weighted-max and weighted-min of the membership values $x_i = \mu_A(d_i)$ according to the weights $w_i = \pi(d_i)$, and the involution $n(w_i) = 1 - w_i$.

But even in a qualitative setting, very often a notion of average is also needed. In this paper we explore the possibility of defining a qualitative counterpart of the weighted mean operator without having to necessarily use some kind of numerical interpretation of the values. Actually, we revise and extend a previous report [6] of the authors. Namely, in [6] there are some claims (Theorem 3 and Corollary 1) that have turned out to be false. We try here to overcome those difficulties and propose alternative conditions to get proper qualitative weighted mean-like operators.

2 MOVING FROM A QUANTITATIVE TO A QUALITATIVE SETTING

In more details, our problem we want to deal with is the following: to average values from an ordinal and finite scale $(U, <)$, possibly weighted, with weights belonging to another scale $(W, <)$. So, we aim at defining, for each arity n , a qualitative weighted mean (QWM) operation $QWM^n: U^n \times W^n \rightarrow U$, accounting for a notion of average of n values $(u_1, \dots, u_n)$ respectively weighted with weights $(w_1, \dots, w_n)$, and yielding a new value of U between $\min(u_1, \dots, u_n)$ and $\max(u_1, \dots, u_n)$.

Before going further it is interesting to examine what is performed in the numerical setting. For real vectors $u = (u_1, \dots, u_n)$ and $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ of values and weights respectively, the well-known expression for the weighted mean is:

$$WM(\alpha, u) = \frac{\sum_{i=1, n} (\alpha_i \cdot u_i)}{\sum_{i=1, n} \alpha_i} \quad (1)$$

If we try to extend this operation to qualitative values and weights, immediately one recognises several problems to be faced with. First, the domain of values U and the domain of weights W may be different. Second, we need some kind of associativity in QWM, otherwise we would be led to have tabular operations for each arity n , and this would become unfeasible and unsuitable.

• As for the problem of having different domains involved, let us assume that the weights belong to a certain domain W , and the values to be aggregated belong to another domain U . In this case, the expression

$$\alpha_i \cdot u_i$$

can neither belong to U nor W . In fact, if we consider $W = \mathbb{N}$ and $U = [0, 1]$, it is clear that $5 \cdot 0.9 = 4.5$ neither belongs to $\mathbb{N}$ nor $[0, 1]$. Therefore, we could consider that the product operation takes value in another domain U^* , i.e.

$$\cdot : W \times U \rightarrow U^*.$$

In a similar way, domain problems appear in relation to the addition operators involved in the expression (1). In fact, the first point is that they correspond to two different operations. In the numerator they add values resulting from the operation " $\cdot$ ". Thus, the result is in a new domain, call it $2U^*$, that is, the addition is of the form $+: U^* \times U^* \rightarrow 2U^*$. Analogously, in the denominator, as the weights belong to W , the binary addition is of the form $+: W \times W \rightarrow 2W$.

• As for the associativity problem, an alternative way to define the numerical weighted mean is to use a binary and

associative operator $\odot$ that performs for each two pairs (weight, value) the following computation:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, u_1) \odot (\alpha_2, u_2) = \\ (\alpha_1 + \alpha_2, (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) / (\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned} \quad (2)$$

Since the operator $\odot$ is associative and commutative, we can write the $\odot$ -combination of two vectors $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ and $u = (u_1, \dots, u_n)$ in the following way:

$$\odot(\alpha, u) = (\alpha_1, u_1) \odot \dots \odot (\alpha_n, u_n) = \odot_{i=1, n} (\alpha_i, u_i)$$

Then it is easy to check that

$$\odot(\alpha, u) = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n, WM(\alpha, u)).$$

In principle, this formulation is very suitable in the sense that it allows to express the n -ary weighted mean in terms of $n-1$ iterations of the associative binary operator $\odot$. Thus, in principle, it would be possible to extend the weighted mean to the qualitative case by defining an associative $\odot$ for qualitative values. However, this involves some problems as well. Note that according to (2), we need in turn two binary operations to extend $\odot$ to the qualitative case:

- i) an addition $+_W$ of qualitative weights, standing for $\alpha_1 + \alpha_2$, and
- ii) a function $f((\alpha_1, \alpha_2), (u_1, u_2))$, standing for $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) / (\alpha_1 + \alpha_2)$.

But, in order to keep $\odot$ associative and commutative we would basically need the following conditions be satisfied:

1. $(W, +_W)$ be an abelian semigroup
2. $\min(u_1, u_2) \leq f((\alpha_1, \alpha_2), (u_1, u_2)) \leq \max(u_1, u_2)$ (aggregation)
3. $f((\alpha_1, \alpha_2), (u_1, u_2)) = f((\alpha_2, \alpha_1), (u_2, u_1))$ (commutativity of f)
4. $f((\alpha_1 +_W \alpha_2, \alpha_3), (f((\alpha_1, \alpha_2), (u_1, u_2)), u_3)) = f((\alpha_1, \alpha_2 +_W \alpha_3), (u_3, f((\alpha_2, \alpha_3), (u_2, u_3))))$ (associativity of $\odot$)

and optionally

5. $f((\alpha_1, \alpha_2), (u, u)) = u$ (unanimity of f)

It is not difficult, for a given set of weights W , to find operations $+_W$ fulfilling condition 1. However, it is not clear at all, at least so far, how feasible can be to obtain operations f fulfilling conditions 2, 3, 4 and 5, apart from the trivial ones, $\min$ and $\max$.

Summarising, due to the above described problems, it seems there is no easy and direct way to extend the numerical WM. Therefore, to follow our investigation we are led to solve one of these two problems. In the next section we propose a qualitative extension by tackling the domain problem. In particular, we shall make one working assumption. We will assume that the set of weights W is the set of natural numbers $\mathbb{N}$ with the

following straightforward underlying meaning: if we want to average the values u_1 and u_2 , weighted respectively by 2 and 3, this will mean that we have to average the multi-set of values $\{u_1, u_1, u_2, u_2, u_2\}$, that is, a weighted average of a set of values will be equivalent to a non-weighted average of a new set where each value is repeated as many times as its weight indicates.

3 A QUALITATIVE WEIGHTED MEAN

Due to the problems described above, the main feature of our approach consists of defining associative operations (tabular-like) to accumulate already weighted values not in U but in new domain U_W which integrates both the value and weight domains, $(U, <)$ and $(W, <)$ respectively. Namely we take $U_W = W \times (U - \{1\})$, where 1 denotes the top element of U , as the new domain where to define the operators needed for a qualitative weighted mean. However, as already mentioned, we shall restrict ourselves in this paper to deal with natural numbers as weights, i.e. in what follows we take $W = \mathbb{N}$, together with the usual addition (+) and subtraction (-) operations.

Before introducing a notion of average, what we obviously need is an operation in U accounting for the notion of accumulation, a counterpart of the addition. It is well known on fuzzy set theory that t-conorms are the binary operations which are closest to this type of operations, enjoying properties like commutativity and associativity, specially needed in the qualitative setting.

From now on $\oplus: U \times U \rightarrow U$ will denote a finite t-conorm on the scale $(U, <)$, that is, a non-decreasing commutative and associative operation fulfilling the usual boundary conditions: for all $u \in U$, $u \oplus 0 = u$ and $u \oplus 1 = 1$. Moreover, if we denote by n_U the order-reversing involution on U , one can define the t-norm $\otimes: U \times U \rightarrow U$ which is the dual operation of $\oplus$ with respect to n_U as:

$$u \otimes v = n_U(n_U(u) \oplus n_U(v)).$$

Once operations $\oplus$ and $\otimes$ are defined, we can proceed to embed the structure in U , i.e. $(U, <, \oplus, \otimes)$, into $U_{\mathbb{N}}$. First we define a transformation $T: U \rightarrow U_{\mathbb{N}}$ that maps values of U into values of $U_{\mathbb{N}}$ as follows:

$$T(u) = \begin{cases} (0, u), & \text{if } u < 1 \\ (1, 0), & \text{if } u = 1 \end{cases}$$

The ordering in U and in $\mathbb{N}$ induces the following lexicographic ordering in $U_{\mathbb{N}}$:

$$(n, u) \leq (m, v) \text{ if either } n < m \text{ or } (n = m \text{ and } u \leq v).$$

Next, we need to allow elements of U to be weighted by elements of W (natural numbers) by means of a product-like operation

$$\bullet: \mathbb{N} \times U_{\mathbb{N}} \rightarrow U_{\mathbb{N}},$$

and then, to sum up the results of the weighting operation, we also need an addition-like operation

$$\oplus: U_{\mathbb{N}} \times U_{\mathbb{N}} \rightarrow U_{\mathbb{N}},$$

"somehow" extending the $\oplus$ operation in U . We begin defining $\oplus$ and after we will define the product operation $\bullet$ by means of the addition operation $\oplus$ in the natural way.

Definition 1.

$$(n, x) \oplus (m, y) = \begin{cases} (n + m, x \oplus y), & \text{if } x \oplus y < 1 \\ (n + m + 1, x \otimes y), & \text{if } x \oplus y = 1 \end{cases}$$

In fact, this definition is borrowed from the theory of MV-algebras. In [2], for instance, they use it in the proof of completeness of the $[0, 1]$ -valued Lukasiewicz logic to extend a linearly ordered MV-algebra A (with strong disjunction $\oplus$ and strong conjunction $\otimes$) to an additive linearly ordered abelian group (with $\oplus$ as addition) G_A whose positive part is $\mathbb{N} \times A - \{1\}$.

3.1 LOOKING FOR ASSOCIATIVE OPERATIONS $\oplus$

It is easy to see that $\oplus$ is an associative operation whenever the t-conorm $\oplus$ is such that $x \oplus y \neq 1$ for all $x, y \neq 1$. Note that in that case, $(n, x) \oplus (m, y) = (n + m, x \oplus y)$ since $x \oplus y \neq 1$ for all $x, y \in U - \{1\}$ and, since both $+$ and $\oplus$ are commutative and associative, $\oplus$ is commutative and associative as well. A notorious example is $x \oplus y = \max(x, y)$, but unfortunately of no interest for accumulation. Table I shows a t-conorm on the (linguistic) scale $U = \{0 < 1/4 < 1/2 < 3/4 < 1\}$ fulfilling the above condition. Notice that these values only denote labels on an ordered scale, without taking into account their "numerical" content.

If $\oplus$ is such that $x \oplus y = 1$ for some $x, y < 1$, we can get into troubles if we use $\oplus$ to accumulate, since then a truncation takes place. Thus, the idea behind the above definition is that, if we want to accumulate without truncation, we have to take into account how much the truncation is when $x \oplus y = 1$. In the definition above, this amount is measured by the quantity $x \otimes y$. In the numerical setting of being $U = [0, 1]$, this is clear, for instance, for the Lukasiewicz t-conorm ($x \oplus y = \min(x + y, 1)$) and his dual t-norm ($x \otimes y = \max(x + y - 1, 0)$), since they verify the characteristic equation:

$$(x \otimes y) + (x \oplus y) = x + y, \quad (3)$$

where $+$ denotes usual addition of reals. This, together with the fact that $x \otimes y = 0$ whenever $x \oplus y = 1$, yields the corresponding extended operation $\oplus$ to be associative. Actually, in the real unit interval, (3) is a well-known functional equation solved by Frank in 1979 (see e.g. [9]). The solutions are given in the following theorem.

$\oplus$	0	1/4	1/2	3/4	1
0	0	1/4	1/2	3/4	1
1/4	1/4	1/2	3/4	3/4	1
1/2	1/2	3/4	3/4	3/4	1
3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	1
1	1	1	1	1	1

Table I. A t-conorm $\oplus$ that induces an associative operator $\oplus$.

Theorem 1 (Frank, [4]). The t-norms $\otimes$ on $[0, 1]$ (the t-conorms $\oplus$ are the dual of $\otimes$ w.r.t. the negation $n(x) = 1 - x$) which are solutions of (3) are either:

1. $x \otimes y = \min(x, y)$,
2. $x \otimes y = x \cdot y$,
3. $x \otimes y = \max(x + y - 1, 0)$,
4. $x \otimes y = T_s(x, y)$, for any $s \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, or
5. ordinal sums of previous t-norms

$$\text{where } T_s(x, y) = (\log s)^{-1} \left(\log \left(1 + \frac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s - 1} \right) \right).$$

Notice that T_s tends to the t-norms min, product and Lukasiewicz t-norms when the parameter s tends to 0, 1 and $+\infty$ respectively.

In the qualitative case, equation (3) is non sense unless we understand the addition $+$ as adding the natural numbers corresponding to the height (positions) of the elements inside $(U, <)$ with respect to the bottom element 0. In that case (3) should be read as

$$\text{height}(x \otimes y) + \text{height}(x \oplus y) = \text{height}(x) + \text{height}(y) \quad (4)$$

About this equation we have the following conjecture:

Conjecture: the extended operation $\oplus$ defined above is associative for any t-conorm $\oplus$ on U satisfying equation (4) together with its dual t-norm $\otimes$.

We have not been able so far to provide a full proof for it, but we checked in the computer that it holds for scales U of dimension ≤ 7 . Thus, at least for $\dim(U) \leq 7$, equation (4) is a sufficient condition to have an accumulation operation $\oplus$ associative. Table II shows a conorm

satisfying equation (4), different from max and Lukasiewicz and with truncation ($3/4 \oplus 3/4 = 1$).

$\oplus$	0	1/4	1/2	3/4	1
0	0	1/4	1/2	3/4	1
1/4	1/4	1/2	1/2	3/4	1
1/2	1/2	1/2	1/2	3/4	1
3/4	3/4	3/4	3/4	1	1
1	1	1	1	1	1

Table II. A t-conorm verifying (4).

A t-norm $\otimes$ on $(U, <)$ is called *smooth* [5, 8] if the following condition holds for all $x, y \in U$: $x < y$ iff there exists $z \in U$ such that $x = y \otimes z$. It is of worth noticing that in the numerical setting, when $U = [0, 1]$, smooth t-norms are exactly continuous t-norms and thus, in a qualitative setting, this notion can be viewed as a kind of continuity. For smooth t-norms there exists the following representation theorem.

Theorem 2. (Mayor and Torrens [8]). If $U = \{0 = x_0 < x_1 \dots < x_n < 1 = x_{n+1}\}$, the only smooth t-norms $\otimes$ on U are those which verify the following conditions:

- i) If x_i is $\otimes$ -idempotent ($x_i \otimes x_i = x_i$) then:
 - $x_k \otimes x_l = \min(x_k, x_l)$, if $x_k \leq x_i \leq x_l$,
- ii) If $x_i \leq x_j$ are consecutive $\otimes$ -idempotent elements then
 - $x_k \otimes x_l = x_i$, if $i + k \leq i + j$
 - $x_k \otimes x_l = x_{i+k-j}$, otherwise.

In other words, what this theorem says is that smooth t-norms basically correspond to ordinal sums of (finite) Lukasiewicz ($x_k \otimes x_l = x_{k+l-n-1}$, if $k+l > n+1$; $x_k \otimes x_l = 0$ otherwise) and min t-norms. Related to smooth t-norms, we have another conjecture which again has been checked in the computer for the case $\dim(U) \leq 7$.

Conjecture: All t-norms verifying equation (4) are smooth t-norms.

A previous version of this work [6] wrongly claims the converse of the conjecture: all smooth t-norms are solutions of (4). Table III shows a counterexample of that claim in the case $\dim(U) = 5$: the operation shown there is smooth but it does not satisfy (4).

A consequence of the above wrong claim was another wrong corollary in [6]: for any t-conorm $\oplus$ whose associated dual t-norm is smooth, the corresponding extended operation $\oplus$ defined above is associative. Table IV shows the only counterexample of this for $\dim(U) = 6$.

$\oplus$	0	1/4	1/2	3/4	1
0	0	0	0	0	0
1/4	0	0	0	1/4	1/4
1/2	0	0	1/4	1/2	1/2
3/4	0	1/4	1/2	3/4	3/4
1	0	1/4	1/2	3/4	1

Table III. A smooth t-norm not satisfying (4).

It is also worth noticing that actually the "wrong claim" is true for $\dim(U) \leq 5$ and that, for instance, for $\dim(U) = 7, 8, 9, 10$ and 12 , the number of counterexamples is respectively 3, 7, 15, 31 and 127, out of a total number of smooth t-norms of 32, 64, 128, 256 and 1024 respectively.

$\oplus$	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
0	0	0	0	0	0	0
1/5	0	0	0	1/5	1/5	1/5
2/5	0	0	1/5	2/5	2/5	2/5
3/5	0	1/5	2/5	3/5	3/5	3/5
4/5	0	1/5	2/5	3/5	3/5	4/5
1	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1

Table IV. An smooth t-norm generating a non-associative accumulation operation $\oplus$.

Although we do not have a complete characterisation of which t-norms generate associative accumulation operations, we have found different sufficient conditions for a smooth t-norm to generate an associative accumulation operation. Consider an smooth t-norm decomposed, according to Theorem 2, into an ordinal sum like the one depicted in Figure 1, where the little boxes T_i contain either Lukasiewicz or min t-norms. In this decomposition it is assumed that min-boxes are as big as possible, that is, for two consecutive boxes T_i and T_{i+1} if T_i is a min box, then T_{i+1} is a Lukasiewicz-box. In the following $|T_i|$ denotes the dimension of the box T_i .

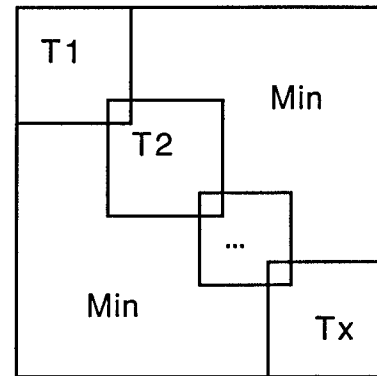


Figure 1.

Theorem 3. Besides min and Lukasiewicz t-norms, the following smooth t-norms generate associative $\oplus$:

1. $T1 = \text{Min}$
2. $T1 = \text{Lukasiewicz}$ and $Tx = \text{Lukasiewicz}$ when $|T1| \leq |Tx|$
3. $T1 = \text{Lukasiewicz}$ and $Tx = \text{Min}$ when $|T1| \leq 4$ and $|Tx| \geq |T1|$.

Moreover, it has been found that there exists t-norms that generate non associative $\oplus$, they are of the form:

- (i) $T1 = \text{Lukasiewicz}$ and $Tx = \text{Lukasiewicz}$ with $|T1| > |Tx|$
- (ii) $T1 = \text{Lukasiewicz}$ and $Tx = \text{Min}$ when $|T1| > 4$

However, not all t-norms of this form, generate non-associative. This is the case (ii) with $|Tx| = 2$. Up to now, we have not found other t-norms that generate non associative $\oplus$ other than the ones of the form above. This has been tested for all t-norms with cardinality less or equal than 9.

So, as a kind of summary of what we have got so far is several sufficient conditions for t-norms or t-conorms on a finite scale $(U, <)$ to generate associative accumulation operations in $U_{\mathbb{N}}$. Basically, we know we get them when we start out from a t-norm without 0 divisors ($x \otimes y \neq 0$ whenever $x \neq 0$ and $y \neq 0$) or from t-norms described in Theorem 3. However, as already commented, the first group is not interesting since they do not allow for a full accumulation. It remains as an open problem to fully characterise all t-norms for which the $\oplus$ operation is associative, in particular the non smooth t-norms.

3.2 WEIGHTING AND AVERAGING

Next step is to define the product-like operation $\bullet: \mathbb{N} \times U_{\mathbb{N}} \rightarrow U_{\mathbb{N}}$ between weights (natural numbers) and extended values of $U_{\mathbb{N}}$. As already mentioned at the end of the last section, the intended meaning of $\bullet$ is the iteration of the addition-like operation $\oplus$, assuming $\oplus$ associative.

Definition 3. For each $n, m \in \mathbb{N}$ and $x \in U - \{1\}$, we define:

$$n \bullet (m, x) = (m, x) \oplus \dots \oplus^n \oplus (m, x).$$

Notice that $(n_1 + n_2) \bullet (m, x) = n_1 \bullet (m, x) \oplus n_2 \bullet (m, x)$ and that $n \bullet [(m_1, x) \oplus (m_2, y)] = n \bullet (m_1, x) \oplus n \bullet (m_2, y)$.

To complete the modelling of the averaging of the values $(u_1, \dots, u_m)$ with weights $(n_1, \dots, n_m)$ we finally need a division-like operation $\oslash$ between the extended value resulting from the addition $[n_1 \bullet T(u_1)] \oplus \dots \oplus [n_m \bullet T(u_m)]$ and the sum of weights $n_1 + \dots + n_m$. This operation $\oslash: U_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \rightarrow U_{\mathbb{N}}$ must be a kind of reciprocal of $\bullet$.

Definition 4. For each $n, m \in \mathbb{N}$ and $x \in U - \{1\}$, we define $(n, x) \oslash m = ([n/m], y)$ being $[n/m] = \max\{p \in \mathbb{N} \mid p \cdot m \leq n\}$ (the integer division) and $y = \max\{z \in U - \{1\} \mid m \bullet (0, z) \leq (r, x)\}$, where $r = n - [n/m] \cdot m$.

Finally, since the aggregation should be in U , we use T^{-1} to compute the final result.

Definition 5. Given a t-norm $\otimes$ in a finite scale U inducing operations $(\oplus, \bullet, \oslash)$ as defined above, the **qualitative weighted mean** of a vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ of values of U with respect to a vector $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$ of weights of $\mathbb{N}$ is defined as:

$$QWM(\alpha, \mathbf{u}) = T^{-1}([(n_1 \bullet T(u_1)] \oplus \dots \oplus [n_m \bullet T(u_m)]) \oslash \sum_{i=1, m} n_i).$$

Note that this definition follows the intuitive idea presented at the end of Section 2, that is, the average of $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ according to $\alpha = (2, 3)$ is equivalent to the non weighted average of values $\mathbf{u} = (u_1, u_1, u_2, u_2, u_2)$ (with $\alpha = (1, \dots, 1)$) because in both cases we compute $T^{-1}((T(u_1) + T(u_1) + T(u_2) + T(u_2) + T(u_2)) \oslash 5)$.

Example. We take $U = \{0 < 1/4 < 1/2 < 3/4 < 1\}$ as domain of values and the t-norm and t-conorm operations of Table V. The problem is to aggregate the vector of values $\mathbf{u} = (3/4, 1/4, 1, 1/2)$, according to the following vector of weights $\alpha = (3, 1, 1, 2)$. Applying the above formula we get

$$3 \bullet (0, 3/4) \oplus (0, 1/4) \oplus (1, 0) \oplus 2 \bullet (0, 1/2) = (4, 3/4) \text{ and } (4, 3/4) \oslash 7 = (0, 1/2)$$

Thus, $QWM(\alpha, \mathbf{u}) = 1/2$ is the resulting computed average.

Usually, it is required that aggregation operators g satisfy *unanimity* (idempotency), this is, when all values to combine are the same, the result is also the same value: $g(x, \dots, x) = x$. The following lemma considers this property in the qualitative weighted mean.

$\otimes$	0	1/4	1/2	3/4	1
0	0	0	0	0	0
1/4	0	0	0	1/4	1/4
1/2	0	0	1/4	1/2	1/2
3/4	0	1/4	1/2	3/4	3/4
1	0	1/4	1/2	3/4	1

$\oplus$	0	1/4	1/2	3/4	1
0	0	1/4	1/2	3/4	1
1/4	1/4	1/4	1/2	3/4	1
1/2	1/2	1/2	3/4	1	1
3/4	3/4	3/4	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Table V. A t-norm $\otimes$ and its dual t-conorm

Theorem 4. The only smooth t-norms on a scale $U = \{0 = x_0 < x_1 \dots < x_n < 1 = x_{n+1}\}$ generating associative accumulation operations that verify $(n \bullet (0, x)) \oslash n = (0, x)$ for all $x \in U$ are those which are ordinal sums of Lukasiewicz and min, in such a way that if x_i is the minimal idempotent element of U different from 0, then all x_j , with $j \geq i$, are also idempotent.

Note that the t-norm defined in Table I induces a Qualitative Weighted Mean that does not satisfy unanimity. With $\alpha = (1, 1)$, $\mathbf{x} = (1/2, 1/2)$ and $\mathbf{y} = (1/3, 1/3)$ we have that $QWM(\alpha, \mathbf{x}) = QWM(\alpha, \mathbf{y}) = 1/3$. On the other hand, the qualitative weighted mean induced by the t-norm and the t-conorm of Table II verifies unanimity.

4 COMPARISON TO QUANTITATIVE WEIGHTED MEANS

We have introduced in the previous section the qualitative weighted mean in terms of three operations $(\oplus, \bullet, \oslash)$ based on a t-norm $\otimes$ and its dual t-conorm $\oplus$. One can simply observe that the same methodology could be applied if we start with a numerical domain of values. In this section we take the domain of values U as the real unit interval $[0, 1]$ and study which kinds of average function do we obtain.

Definition 6. Let $\otimes$ be a continuous t-norm in $U = [0, 1]$ and $\oplus$ its dual t-conorm with respect to the classical negation $n(x) = 1-x$, such that the corresponding $\oplus$ operation as in Definition 1 is associative. Then, the t-norm based weighted mean TWM: $\mathbb{N}^n \times [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ generated by $\otimes$ is the operation defined as:

$$\text{TWM}(\alpha, u) = T^{-1}[(\oplus_{i=1,n} \alpha_i \bullet T(u_i)) \oslash \sum_{i=1,n} \alpha_i]$$

where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ and $u = (u_1, \dots, u_n)$ are the vectors of weights and values, $T, \oplus, \bullet$ and $\oslash$ are defined as in the qualitative case except that we replace max by sup in the definition of $\oslash$, i.e. $(n, u) \oslash m = ([n/m], y)$, where $y = \sup\{x \in [0, 1] \mid m \bullet (0, x) \leq (n - ([n/m] \cdot m), u)\}$.

With this definition, we can consider a quantitative version of the results of the previous section.

Theorem 5. The following t-norms generate t-norm-based weighted means:

1. t-norms satisfying equation (3), that are described in Theorem 1.
2. t-norms isomorphic to the product.
3. t-norms that cannot be decomposed into ordinal sums of t-norms with the minimal one being a Lukasiewicz t-norm.

This theorem is based on the fact that if either equation (3) is satisfied or if $x \oplus y < 1$ or all $x, y \neq 1$ then $\oplus$ is associative. Lukasiewicz t-norm obviously induces the usual weighted mean. The t-norms which are isomorphic to the product induce well-known aggregation operators: the quasi-arithmetic weighted mean [1]. We give now a definition with the domains of the functions adapted to our case.

Definition 7. Given a continuous strictly monotonic function $\phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ and a weighting vector $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ with $\sum_{i=1,n} \beta_i = 1$, the *quasi-arithmetic mean* generated by ϕ is the function defined by $\phi^{-1}(\sum_{i=1,n} \beta_i \phi(u_i))$.

Theorem 7. The aggregation of $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n$ with a t-norm based weighted mean generated by a t-norm $\otimes$ isomorphic to the product, according to a weighting vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, corresponds to a quasi-arithmetic weighted mean.

Proof. If $\otimes$ is isomorphic to the product, then $\otimes$ can be expressed in terms of its additive generator ϕ (a continuous strictly monotonic function from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$ with $\phi(0) = 0$):

$$x \otimes y = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y))$$

Therefore, as $u_i < 1$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$ we have that $T(u_i) = (0, u_i)$, and thus

$$\alpha_i \bullet T(u_i) = (0, u_i) \oplus \dots \oplus \alpha_i \bullet (0, u_i) = (0, u_i \oplus \dots \oplus u_i) = (0, \phi^{-1}(\alpha_i \cdot \phi(u_i)))$$

If we put this expression in $(\oplus \alpha_i \bullet T(u_i))$ we have

$$\oplus_{i=1,n} \alpha_i \bullet T(u_i) = (0, \phi^{-1}(\sum_{i=1,n} \alpha_i \phi(u_i)))$$

Let us now consider the operator $\oslash$, note that the expression $(0, v) \oslash w$ is equivalent to $(0, \phi^{-1}(\phi(v) / w))$ since $(0, v) \oslash w = ([0/w], y) = (0, y)$, where $y = \sup\{x \mid w \bullet (0, x) \leq (0, v)\} = \sup\{x \mid (0, \phi^{-1}(w \cdot \phi(x))) \leq (0, v)\} = \phi^{-1}(\phi(v) / w)$. Thus $(\oplus_{i=1,n} \alpha_i \bullet T(u_i)) \oslash \sum_{i=1,n} \alpha_i = (0, \phi^{-1}(\sum_{i=1,n} \alpha_i \phi(u_i) / \sum_{i=1,n} \alpha_i))$, and therefore

$$\begin{aligned} \text{TWM}(\alpha, u) &= \\ &= T^{-1}[(\oplus_{i=1,n} \alpha_i \bullet T(u_i)) \oslash \sum_{i=1,n} \alpha_i] = \\ &= \phi^{-1}(\sum_{i=1,n} \alpha_i \phi(u_i) / \sum_{i=1,n} \alpha_i) = \\ &= \phi^{-1}(\sum_{i=1,n} \alpha_i \phi(u_i)) \end{aligned}$$

But, since ϕ is a continuous strictly monotonic function, this corresponds to the expression of the quasi arithmetic mean of u w.r.t. the weighting vector $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ where $\beta_i = \alpha_i / \sum_{i=1,n} \alpha_i$ is a weighting vector and ϕ is a continuous strictly monotonic function. ∇

In this theorem it is required that $u_i \neq 1$ because when this happens the final result is different to the one obtained with the weighted mean. Note that if $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ and $u_i \neq 1$ for all $i > 3$, then

$$(\oplus \alpha_i \bullet T(u_i)) = (3, \phi^{-1}(\sum_{i>3} \alpha_i \phi(u_i)))$$

Let $k = \phi^{-1}(\sum_{i>3} \alpha_i \phi(u_i))$. Then, it is clear that $(3, k) / n = 1$ as for $x < 1$ there is no $(0, x)$ such that $n \bullet (0, x) = (3, k)$. However $n \bullet (1, 0) > 1$. Thus the supremum of the set $\{x \mid x < 1\} = 1$ and this is the result of this operator in this case.

In relation to unanimity, it is clear, that when a t-norm based weighted mean coincides with a quasi arithmetic weighted mean it satisfies this property. However, not all the operators of this family satisfy this property. We give here a result similar to the lemma given above in the qualitative case.

Theorem 8. All t-norm based weighted mean generated by t-norms in 1 and 2 in theorem 5 satisfy unanimity. Moreover, TWM generated by t-norms $\otimes$ inducing an operator $\oplus$ such that $(0, x) \oplus (0, x) = (0, y)$ and $(0, y) \oplus (0, y) = (0, y)$ for $x \neq y$ do not satisfy unanimity.

Proof. In relation to the first assertion is enough to underline that $\oslash$ is defined in relation to the $\oplus$ and not to the usual addition on the real line. Thus, for example, in relation to $\otimes = \min$, we have that if $x < 1$

$$\begin{aligned} f(x, \dots, x) &= T^{-1}[(\oplus_i \alpha_i \bullet T(x)) \oslash \sum_i \alpha_i] = \\ &= T^{-1}[(0, x) \oslash \sum_i \alpha_i] \end{aligned}$$

Now, $(0, x) \oslash \sum \alpha_i = (0, x)$ because the only element y such that $(\sum_i \alpha_i) \bullet (0, y) = (0, x)$ is $y = x$. Note that $(\sum_i \alpha_i) \bullet (0, y) = y$ for all y .

In relation to the second assertion, if we consider again x and y , and we define $\alpha = (1, 1)$, $x = (x, x)$ and $y = (y, y)$ we have that the following holds: $TWM(\alpha, x) = TWM(\alpha, y) = y$. Thus unanimity is not satisfied. ∇

5 CONCLUSIONS

This paper is only an attempt to explore possibilities to define average-like operations in a qualitative setting, trying to avoid as much as possible an underlying numerical interpretation. Comparing to the already existing approach described in [3] and [7], the approach proposed in the paper somehow solves the problem with the possible non-associativity of the operation proposed there, and thus making the result of the average dependent on the ordering the values are aggregated. Although we have been concerned with weighted mean like operations, the extension to OWA like operations is easy and will be dealt in future works.

Acknowledgements The authors acknowledge partial support of the CYCIT project SMASH (TIC96-1138-C04-01/04). The authors are also indebted to Claudi Alsina and Adriana Zapico for helpful comments and suggestions.

References

- [1] Aczél J. (1984), On Weighted synthesis of judgements, *Aequationes Math.*, 27, 288-307.
- [2] Cignoli R., D'Ottaviano I., Mundici D. (1995), Algebras das logicas de Lukasiewicz, *Coleção Centro de Logica, Epistemologia e Historia da Ciencia*, Unicam (Brasil) Volumen 12 (1995).
- [3] Delgado M., Verdegay J. L., Vila M. A. (1993), On aggregation operations of Linguistic labels, *International Journal of Intelligent Systems*, 8, 351-370.
- [4] Frank M. J., (1979), On the simultaneous associativity of $F(x,y)$ and $x+y-F(x,y)$, *Aequationes Math.*, 19, 121-144.
- [5] Godo L., Sierra C. (1988), A new approach to connective generation in the framework of expert systems using fuzzy logic, *Proc. of the IEEE-ISMVL'88*, 157-162, Computer Society Press.
- [6] Godo L., Torra V. (1998) On aggregation in a Qualitative Setting. *Proc. of EFDAN'98* (R. Felix ed.), pp.
- [7] Herrera F., Herrera-Viedma E., Verdegay J. L. (1997), A rational consensus model in group decision making using linguistic assessments, *Fuzzy Sets and Systems* 88 31-49.
- [8] Mayor, G., Torrens, J., (1993), On a class of operators for expert systems, *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. 8, pp.771-778.
- [9] Schweizer, B., Sklar, A., (1983), "*Probability Metric Spaces*", North-Holland, Amsterdam.
- [10] Yager, R.R., On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Trans. on SMC*, 18 (1988) 183-190.
- [11] Yager, R.R., Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 59 (1993) 125-148.

UN MÉTODO PARA LA EVALUACIÓN DE SENTENCIAS CON CUANTIFICADORES LINGÜÍSTICOS.

Miguel Delgado
Depto. de Ciencias de la
Computación e I.A.
Universidad de Granada
e-mail: delgado@decsai.ugr.es

Daniel Sánchez
Depto. de Ciencias de la
Computación e I.A.
Universidad de Granada
e-mail: daniel@decsai.ugr.es

María Amparo Vila
Depto. de Ciencias de la
Computación e I.A.
Universidad de Granada
e-mail: vila@decsai.ugr.es

Resumen

La evaluación de sentencias con cuantificadores lingüísticos se utiliza en la resolución de diversos problemas. La mayoría de los métodos propuestos hasta la fecha se comportan de manera satisfactoria en la evaluación de sentencias de tipo I. Sin embargo para sentencias de tipo II los métodos propuestos incumplen algunas propiedades deseables. Nuestra propuesta se basa en el uso del teorema de representación de subconjuntos difusos para determinar el grado de cumplimiento de las sentencias cuantificadas. El método resultante posee buenas propiedades teóricas y además no es menos eficiente que los existentes.

1. Introducción

Las sentencias con cuantificadores se utilizan en diversos problemas tales como la realización de consultas flexibles a bases de datos. Dos tipos usuales de sentencias son las llamadas sentencias tipo I y sentencias tipo II. El esquema general de una sentencia del primer tipo es

Q de los X son A

donde X es un conjunto finito, Q es un cuantificador lingüístico y A es una propiedad difusa definida sobre los elementos del conjunto X . Asimismo el esquema para una sentencia de tipo II es

Q de los D son A

donde D es una propiedad difusa sobre X y el resto de elementos son los descritos para sentencias de tipo I. Ejemplos concretos de sentencias son

Tipo I : *La mayoría de los estudiantes son jóvenes*
Tipo II : *Todos los estudiantes eficientes son jóvenes*

En estos ejemplos el conjunto X es el conjunto de los estudiantes, D y A son dos conjuntos difusos que representan las propiedades "eficiente" y "jóven" respectivamente, y "la mayoría" y "todos" son dos cuantificadores.

Vamos a considerar dos tipos de cuantificadores, cuantificadores *absolutos* y cuantificadores *relativos*. Los primeros se definen como conjuntos difusos sobre el conjunto de enteros no negativos, y representan cantidades enteras difusas. Los segundos se definen como conjuntos difusos sobre el intervalo real $[0,1]$ y representan porcentajes difusos del total. Ejemplos de cuantificadores absolutos son "aproximadamente 3", "algo más de 4". Ejemplos de cuantificadores relativos son los dos utilizados anteriormente.

Las distintas combinaciones de tipo de sentencia y tipo de cuantificador pueden dar lugar a diferencias en la evaluación de las sentencias. Sin embargo es usual que se utilicen cuantificadores absolutos para la evaluación de sentencias de tipo I, y cuantificadores relativos para la evaluación de sentencias de tipo II, como proponen Liu y Kerre en [5] y [6]. El objetivo en cualquier caso es determinar un grado de creencia o cumplimiento de las sentencias.

Diferentes métodos han sido propuestos por varios autores para la evaluación de ambos tipos de sentencias. Métodos de evaluación de sentencias de tipo I se describen en [1], [2], [6], [9] y [11]. Nuestro interés en este trabajo se centra en las sentencias de tipo II. Métodos para la evaluación de dichas sentencias han sido propuestos en [2], [8] y [11]. Pretendemos aportar un nuevo método que presenta algunas ventajas con respecto a los precedentes.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En el segundo apartado se muestran algunos de los enfoques existentes para la evaluación de sentencias de tipo II. El tercer apartado sirve para detallar nuestra propuesta junto con algunos ejemplos. En el apartado cuatro se muestran

algunas propiedades del método. En el último apartado se muestran nuestras conclusiones.

2.- Algunos Métodos Existentes

2.1. Zadeh (1983)

Para la evaluación de sentencias de tipo II, Zadeh propone el siguiente método en [11]. El resultado de la evaluación de la sentencia será:

$$Q(\sum Count(A|D))$$

Utiliza la definición de cardinal relativo de un conjunto difuso con respecto a otro de la siguiente forma:

$$\sum Count(A|D) = \frac{\sum Count(D \cap A)}{\sum Count(D)}$$

donde

$$\sum Count(F) = \sum_{x \in X} \mu_F(x)$$

es el cardinal del conjunto difuso F según la definición de De Luca y Termini [3].

2.2. Yager (1991)

Yager propone el uso de operadores OWA donde los parámetros se calculan en función del cuantificador Q. En el caso de sentencias tipo II, dicho operador se aplicaría sobre el conjunto difuso $D \rightarrow A$, donde ' $\rightarrow$ ' es una función de implicación difusa.

Sea Q un cuantificador relativo no decreciente y tal que $Q(0)=0$ y $Q(1)=1$. Se definen los parámetros del operador OWA como:

$$w_i = Q(S_i) - Q(S_{i-1}) \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

donde n es el cardinal del soporte del difuso $D \rightarrow A$ y además

$$S_i = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^i e_j \quad y \quad d = \sum_{k=1}^n e_k$$

donde e_i es el i-ésimo menor grado de pertenencia al difuso D.

La evaluación de una sentencia cuantificada de tipo II será

$$\sum_{i=1}^n w_i b_i$$

donde b_i es el i-ésimo mayor grado de pertenencia de los elementos del conjunto difuso $D \rightarrow A$.

2.3. Vila et. al. (1996)

La principal ventaja de este método es su eficiencia y sencillez. Trabaja con cuantificadores relativos que verifican ciertas propiedades y a los que se conoce como conjunto coherente de cuantificadores (véase [8]). Una característica de estos cuantificadores es que se encuentran ordenados y tienen como ínfimo al cuantificador existencial y como supremo al cuantificador universal.

La evaluación utiliza el grado de "orness" (Yager, [9]) de un cuantificador, que mide la cercanía de dicho cuantificador al cuantificador existencial (orness=1). En definitiva el grado de cumplimiento de la sentencia vendrá dado por

$$o_Q \max_{x \in X} (D(x) \wedge A(x)) + (1 - o_Q) \min_{x \in X} (A(x) \vee (1 - D(x)))$$

2.4. Delgado, Sánchez y Vila (1997)

La evaluación de la sentencia en este método viene dada por

$$\bigoplus_{i=0, \dots, n} (E_i(A/D, Q) \otimes Q(i/n))$$

donde $\oplus$ es una t-conorma, $\otimes$ es una t-norma y $n = |X|$. Además, $E_i(A/D, Q)$ es el cardinal difuso del conjunto $f(A/D, Q)$, que se define como

$$\mu_{f(A/D, Q)}(x) = o_Q(D(x) \wedge A(x)) + (1 - o_Q)(D(x) \rightarrow A(x))$$

para todo $x \in X$.

3. Un Nuevo Método

El método que proponemos se basa en el cálculo de los posibles cardinales relativos de A con respecto a D a partir de los α -cortes significativos.

Definición 1. Sea F un conjunto difuso sobre X. Entonces se define el conjunto de α -cortes significativos de F como

$$M(F) = \left\{ \alpha \in (0,1) \mid \exists x \in X \text{ tal que } F(x) = \alpha \right\}$$

Definimos

$$M = M(D) \cup M(A \cap D)$$

Definición 2. Definimos el conjunto de posibles cardinales relativos de A con respecto a D como

$$CR = \left\{ \frac{|(A \cap D)_\alpha|}{|D_\alpha|} \mid \text{tal que } \alpha \in M \right\}$$

Definición 3. Definimos el conjunto difuso ES sobre el referencial CR, al que llamaremos "cardinal relativo difuso de A con respecto a D" como

$$\mu_{ES}(c) = \max \left\{ \alpha \in (0,1] \mid c = \frac{|(A \cap D)_\alpha|}{|D_\alpha|} \right\} \forall c \in CR$$

Este difuso representa para cada posible cardinal relativo c nuestro grado de creencia en que dicho c es el cardinal relativo de A con respecto a D.

3.1. Evaluación de sentencias tipo II con cuantificadores relativos

Sea D un conjunto difuso no vacío y normalizado sobre X. Proponemos evaluar el grado de cumplimiento de la sentencia "Q de los D son A" como

$$GS_Q(A/D) = \bigvee_{c \in CR} (\mu_{ES}(c) \wedge Q(c))$$

es decir, el grado de cohesión entre los difusos Q y ES.

En el caso de que D no esté normalizado, lo normalizaremos dividiendo los grados de pertenencia al difuso por el máximo grado de pertenencia, y aplicaremos este mismo factor sobre el difuso A∩D. Queda excluido el caso D=∅.

Ejemplo 1. Sea

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

y sean los siguientes conjuntos difusos sobre X

$$A = \{0.1/x_1, 0.2/x_2, 0.7/x_3, 0.9/x_4\}$$

$$D = \{0.3/x_1, 0.4/x_2, 0.8/x_3, 1/x_4\}$$

y supongamos el cuantificador Q="La mayoría", es decir, Q(x)=x.

El conjunto A∩D será

$$A \cap D = \{0.1/x_1, 0.2/x_2, 0.7/x_3, 0.9/x_4\}$$

y el conjunto M

$$M = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$

Además

$$CR = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, 1\}$$

y

$$ES = \{1/0, 0.8/(1/2), 0.4/(2/3), 0.2/(3/4), 0.9/1\}$$

Entonces el grado de cumplimiento de la sentencia es :

$$GS = \max \{ \min(1,0), \min(0.8,1/2), \min(0.4,2/3), \min(0.2,3/4), \min(0.9,1) \} = 0.9$$

Ejemplo 2. Sean los siguientes conjuntos difusos sobre X

$$A = \{0.1/x_1, 0.3/x_2, 0.7/x_3\}$$

$$D = \{0.3/x_1, 0.4/x_2, 0.8/x_3\}$$

y supongamos el cuantificador Q="La mayoría", es decir, Q(x)=x.

El conjunto A∩D será

$$A \cap D = \{0.1/x_1, 0.3/x_2, 0.7/x_3\}$$

Como D no está normalizado, lo normalizamos dividiendo por 0.8 los grados de pertenencia y aplicando ese mismo factor a A∩D, obteniéndose :

$$D' = \{0.375/x_1, 0.5/x_2, 1/x_3\}$$

$$(A \cap D)' = \{0.125/x_1, 0.375/x_2, 0.875/x_3\}$$

y el conjunto M

$$M = \{0.125, 0.375, 0.5, 0.875, 1\}$$

Además

$$CR = \{0, 1/2, 2/3, 1\}$$

y

$$ES = \{1/0, 0.5/(1/2), 0.375/(2/3), 0.875/1\}$$

Entonces el grado de cumplimiento de la sentencia es :

$$GS = \max \{ \min(1,0), \min(0.5,1/2), \min(0.375,2/3), \min(0.875,1) \} = 0.875$$

3.2. Evaluación de sentencias tipo II con cuantificadores absolutos

Como hemos indicado en la introducción, los cuantificadores absolutos no realizan afirmaciones sobre el cardinal relativo de un conjunto con respecto a otro, sino sobre el cardinal absoluto de un conjunto. En el caso de sentencias tipo II ese conjunto es A∩D. Si pretendemos utilizar cuantificadores absolutos en la evaluación de sentencias tipo II veremos que preguntarnos por "cuantos de los D son A" es lo mismo que preguntarnos por "cuantos de los A son D", y en definitiva lo que estamos buscando es "cuantos de los X son A∩D". Es decir, la evaluación de la sentencia "Q de los D son A" daría el mismo resultado que la evaluación de la sentencia "Q de los A son D", y el resultado sería el obtenido de la evaluación de la sentencia de tipo I "Q de los X son A∩D". Es por ello que no nos referiremos a evaluación de sentencias de tipo II con cuantificadores absolutos, por cuanto la evaluación de dichas sentencias se reduce a la evaluación de una sentencia de tipo I. Las sentencias de tipo I son un caso particular de sentencias tipo II en las cuales D=X. Por tanto, el método

que hemos definido puede concretarse para la evaluación de estas sentencias como veremos a continuación.

3.3. Evaluación de sentencias tipo I con cuantificadores relativos

Tal y como hemos comentado en el punto anterior se trata tan sólo de sustituir D por X en el método expuesto anteriormente. De esta forma tendremos que

$$M = M(A) \cup \{1\}$$

y

$$CR = \left\{ \frac{|A_\alpha|}{|X|} \mid \text{tal que } \alpha \in M \right\}$$

además

$$\mu_{ES}(c) = \max \left\{ \alpha \in (0,1] \mid c = \frac{|A_\alpha|}{|X|} \right\} \forall c \in CR$$

y finalmente

$$GS_Q(A) = \bigvee_{c \in CR} (\mu_{ES}(c) \wedge Q(c))$$

Ejemplo 3. Sean X, A y Q los del ejemplo 1. Entonces

$$M = \{0.1, 0.2, 0.7, 0.9, 1\}$$

y

$$CR = \{0, 1/4, 2/4, 3/4, 1\}$$

además

$$ES = \{1/0, 0.1/(1/4), 0.2/(2/4), 0.7/(3/4), 0.9/1\}$$

y finalmente

$$GS = \max \{ \min(1,0), \min(0.1,1/4), \min(0.2,2/4), \min(0.7,3/4), \min(0.9,1) \} = 0.9$$

3.4. Evaluación de sentencias tipo I con cuantificadores absolutos

En este caso el cuantificador está definido sobre los posibles cardinales del difuso A, de manera que cambian de nuevo algunos elementos de la definición. El conjunto M es el mismo, mientras que

$$CR = \left\{ A_\alpha \mid \text{tal que } \alpha \in M \right\}$$

es decir, un conjunto de posibles cardinales en lugar de un conjunto de posibles cardinales relativos, y

$$\mu_{ES}(c) = \max \left\{ \alpha \in (0,1] \mid c = A_\alpha \right\} \forall c \in CR$$

Podemos comprobar que en este caso ES es el cardinal difuso del conjunto A según la primera definición de

Zadeh [12]. En el caso de cuantificadores relativos, el conjunto ES es el "cardinal relativo difuso".

La evaluación de la sentencia sería finalmente

$$GS_Q(A) = \bigvee_{c \in CR} (\mu_{ES}(c) \wedge Q(c))$$

Como hemos puesto de manifiesto anteriormente, la evaluación de sentencias de tipo II con cuantificadores absolutos se reduce a la evaluación de sentencias de tipo I. En definitiva tendríamos que

$$M = M(A \cap D) \cup \{1\}$$

y

$$CR = \left\{ (A \cap D)_\alpha \mid \text{tal que } \alpha \in M \right\}$$

además

$$\mu_{ES}(c) = \max \left\{ \alpha \in (0,1] \mid c = (A \cap D)_\alpha \right\} \forall c \in CR$$

y por último

$$GS_Q(A / D) = \bigvee_{c \in CR} (\mu_{ES}(c) \wedge Q(c))$$

Ejemplo 4. Sean X, A y D los del ejemplo 1. Sea Q el cuantificador absoluto "aproximadamente 3" que podríamos definir como

$$Q = \{0.5/2, 1/3, 0.5/4\}$$

y supongamos que queremos evaluar "Q de los D son A". Lo que haremos será evaluar "Q de los X son A ∩ D" como ya hemos comentado. Por el ejemplo 1 tenemos que

$$A \cap D = \{0.1/x1, 0.2/x2, 0.7/x3, 0.9/x4\}$$

y por tanto en este caso

$$M = \{0.1, 0.2, 0.7, 0.9, 1\}$$

y

$$CR = \{1, 2, 3, 4\}$$

Mientras que el cardinal relativo será

$$ES = \{1/0, 0.9/1, 0.7/2, 0.2/3, 0.1/4\}$$

finalmente el grado de cumplimiento de la sentencia sería

$$GS = \max \{ \min(1,0), \min(0.9,0), \min(0.7,0.5), \min(0.2,1), \min(0.1,0.5) \} = 0.5$$

4. Propiedades

Propiedad 1. En el caso no difuso (es decir, A y D son conjuntos no difusos) la evaluación de las sentencias es correcta ya que se obtiene el resultado lógico esperable. En este caso tenemos para sentencias tipo II con cuantificadores relativos que

$$M = \{1\}$$

y

$$CR = \left\{ \frac{|A \cap D|}{|D|} \right\}$$

además

$$ES = \left\{ 1 / \left(\frac{|A \cap D|}{|D|} \right) \right\}$$

y por tanto

$$GS = Q\left(\frac{|A \cap D|}{|D|}\right)$$

Para sentencias tipo II con cuantificadores absolutos

$$GS = Q(|A \cap D|)$$

Para sentencias tipo I con cuantificadores relativos

$$GS = Q\left(\frac{|A|}{|X|}\right)$$

y para sentencias tipo I con cuantificadores absolutos

$$GS = Q(|A|)$$

Propiedad 2. Si $D \subseteq A$ entonces $GS = Q(1)$.

Demostración : como $D \subseteq A$ entonces $A \cap D = D$ y por tanto

$$M = M(D)$$

y $1 \in M$ porque D está normalizado. Por otro lado

$$CR = \{1\}$$

además

$$ES = \{1/1\}$$

y finalmente

$$GS = Q(1)$$

Esta propiedad es semánticamente muy intuitiva. Si $D \subseteq A$ entonces el porcentaje de los D que son A es 1, y por tanto al evaluar "Q de los D son A" el resultado de la evaluación debe ser Q(1).

Propiedad 3. Si $A \cap D = \emptyset$ entonces $GS = Q(0)$.

Demostración : si $A \cap D = \emptyset$ entonces

$$M = M(D)$$

y

$$CR = \{0\}$$

además

$$ES = \{1/0\}$$

y finalmente

$$GS = Q(0).$$

De nuevo esta propiedad es muy intuitiva. Es evidente que el porcentaje de los D que son A es 0, con lo cual el

grado de cumplimiento de la sentencia "Q de los D son A" deberá ser Q(0).

Un caso particular de esta propiedad es $A = \emptyset$.

Propiedad 4. No hay ninguna restricción sobre los cuantificadores. Es decir, no es necesario que los cuantificadores que utilicemos formen un conjunto coherente, ni se exige que sean no decrecientes ni que $Q(0)=0$ y $Q(1)=1$ como es el caso de otros métodos. Cualquier difuso sobre los enteros no negativos o sobre el intervalo real $[0,1]$ puede utilizarse como cuantificador.

Propiedad 5. Una formulación equivalente de la evaluación del método es

$$GS_Q(A/D) = \bigvee_{\alpha \in M} \left(\alpha \wedge Q\left(\frac{|(A \cap D)_\alpha|}{|D_\alpha|}\right) \right)$$

para sentencias tipo II con cuantificadores relativos. De la misma forma tenemos

$$GS_Q(A/D) = \bigvee_{\alpha \in M} \left(\alpha \wedge Q(|(A \cap D)_\alpha|) \right)$$

para sentencias tipo II con cuantificadores absolutos. A su vez

$$GS_Q(A) = \bigvee_{\alpha \in M} \left(\alpha \wedge Q\left(\frac{|A_\alpha|}{|X|}\right) \right)$$

para sentencias tipo I con cuantificadores relativos y

$$GS_Q(A) = \bigvee_{\alpha \in M} \left(\alpha \wedge Q(|A_\alpha|) \right)$$

para sentencias tipo I con cuantificadores absolutos.

Esta forma de evaluación totalmente equivalente a la primera que hemos ofrecido puede resultar más eficiente, ya que no es necesario calcular explícitamente los conjuntos CR y ES.

5. Conclusiones

En [8] se realiza una valoración de los tres primeros métodos indicados en el segundo apartado. El método de Zadeh es demasiado estricto en la evaluación de los cuantificadores existencial y universal, mientras que el de Yager no evalúa adecuadamente el cuantificador existencial en ciertos casos. Los otros dos métodos solventan estos problemas. Por otra parte, la propiedad 1 del nuevo método sólo la verifica en general el método de Zadeh.

El método propuesto es eficiente con la formulación de la propiedad 5 y verifica una serie de propiedades

semánticamente intuitivas. Por otra parte hemos propuesto una definición del cardinal relativo difuso de un conjunto respecto a otro como el conjunto difuso ES. En los ejemplos con los que hemos experimentado hemos apreciado que este método no es más estricto que los existentes, sino incluso menos estricto. Para los ejemplos 1 y 2 los resultados que ofrecen los métodos así como el nuevo método GS son los siguientes (se ha utilizado la implicación material y las t-normas y t-conormas usadas en los ejemplos de [2], y el orness de "la mayoría" es 1/2):

Ejemplo 1. Zadeh : 0.76
Yager : 0.684
Vila et. al. : 0.65
Delgado et. al. : 0.6
GS : 0.9

Ejemplo 2. Zadeh : 0.73
Yager : 0.64
Vila et. al. : 0.65
Delgado et. al. : 0.43
GS : 0.875

Referencias

- [1] Bosc P., Lietard L. On the Comparison of the Sugeno and the Choquet Fuzzy Integrals for the Evaluation of Quantified Statements. Proc. of EUFIT'95, Aachen, Alemania, (1995) pp. 709-716
- [2] Delgado M., Sánchez D., Vila M.A. Un Enfoque Lógico para Calcular el Grado de Cumplimiento de Sentencias con Cuantificadores Lingüísticos. Actas del Congreso Estyl'97, Tarragona, (1997) pp. 15-20
- [3] De Luca A., Termini S. A Definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. Inform. Control 20 (1972), pp. 301-312
- [4] Dubois D., Prade H. Fuzzy Cardinality and the Modeling of Imprecise Quantification. Fuzzy Sets and Systems 16, (1985) pp. 199-230
- [5] Liu Y., Kerre E. An Overview of Fuzzy Quantifiers. (I). Interpretations. Fuzzy Sets and Systems 95, (1998) pp. 1-21
- [6] Liu Y., Kerre E. An Overview of Fuzzy Quantifiers. (II). Reasoning and Applications. Fuzzy Sets and Systems 95, (1998) pp. 135-136
- [7] Ralescu D. Cardinality, Quantifiers, and the Aggregation of Fuzzy Criteria. Fuzzy Sets and Systems 69, (1995) pp. 355-365
- [8] Vila M.A., Cubero J.C., Medina J.M., Pons O. Using OWA Operator in Flexible Query Processing. En "The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory, Methodology and Applications". R.R. Yager y J. Kacprzyk, editores. (1997)
- [9] Yager R.R. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. 18, n.1 (1988), pp. 183-190
- [10] Yager R.R. Families of OWA Operators. Fuzzy Sets and Systems 59, (1993) pp. 125-148
- [11] Zadeh L.A. A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages. Computing and Mathematics with Applications Vol. 9, (1983) pp. 149-184
- [12] Zadeh L.A. A Theory of Approximate Reasoning. Machine Intelligence Vol 9, (1979) pp. 149-194

UNA PROPUESTA PARA MEJORAR LA PRECISIÓN DEL MODELADO LINGÜÍSTICO *

Oscar Córdón

Dpto. de Ciencias de la Computación e I.A.
E.T.S. de Ingeniería Informática
Universidad de Granada
18071 - Granada
e-mail: ocordon@robinson.ugr.es

Francisco Herrera

Dpto. de Ciencias de la Computación e I.A.
E.T.S. de Ingeniería Informática
Universidad de Granada
18071 - Granada
e-mail: herrera@robinson.ugr.es

Resumen

En la actualidad, el modelado lingüístico constituye una de las áreas de aplicación más importantes de la Lógica Difusa. Los Sistemas Basados en Reglas Difusas (SBRDs) descriptivos de tipo Mamdani, empleados para esta tarea, proporcionan una descripción del modelo en forma de reglas lingüísticas totalmente interpretable por el ser humano, característica deseable en algunos problemas. Desafortunadamente, interpretabilidad y precisión son generalmente requisitos contradictorios en el campo del modelado. Por esta razón, en muchas ocasiones el modelo lingüístico diseñado no presenta el rendimiento deseado y ha de ser desechado para ser sustituido por otros modelos con menor nivel de interpretabilidad (modelos difusos generados a partir de SBRDs de tipo TSK o aproximativos de tipo Mamdani, modelos neuronales, modelos de caja negra, etc.).

En este trabajo vamos a proponer una filosofía para diseñar modelos cualitativos con un alto grado de precisión y un buen nivel de interpretabilidad. Además, introduciremos un método automático de diseño de este tipo de modelos cualitativos basado en una modificación del algoritmo de Wang y Mendel (WM) y en un proceso genético de selección de reglas. Finalmente, estudiaremos su comportamiento en dos aplicaciones distintas y lo compararemos con otras técnicas de modelado lingüístico.

Palabras clave: Modelado Lingüístico, Sistemas Basados en Reglas Difusas descriptivos de tipo Mamdani, Algoritmos Genéticos.

Trabajo realizado en el proyecto CICYT TIC96-0778

1 INTRODUCCIÓN

Hoy en día, una de las áreas de aplicación más importantes de la *Teoría de Conjuntos Difusos* y de la *Lógica Difusa*, enunciadas por Zadeh en 1965 [11], la componen los SBRDs. Este tipo de sistemas constituyen una extensión de los Sistemas Basados en Reglas que hacen uso de la Lógica Clásica puesto que emplean reglas de tipo "SI-ENTONCES" en las que los antecedentes y consecuentes están compuestos por proposiciones difusas en lugar de proposiciones de la Lógica Clásica. Existen distintos sistemas de este tipo dependiendo de la naturaleza de las entradas y salidas que manejan, así como de la estructura de regla difusa con la que trabajan, pudiendo distinguirse entre SBRDs puros, descriptivos y aproximativos de tipo Mamdani, y de tipo TSK.

Una de las principales aplicaciones de los SBRDs es el *modelado de sistemas* [1, 8], que puede ser considerado en este campo como una aproximación para modelar un sistema haciendo uso de un lenguaje de descripción basado en Lógica Difusa con predicados difusos [9]. En este modelado suelen existir dos requisitos enfrentados, la precisión y el nivel de interpretabilidad del modelo obtenido.

Es posible distinguir dos tipos de modelado cuando se hace uso de los SBRDs: *modelado lingüístico o cualitativo* y *modelado difuso*, según el requerimiento prioritario sea la interpretabilidad o la precisión del modelo, respectivamente. El primero de ellos se realiza mediante los SBRDs descriptivos, los cuales emplean reglas difusas con variables lingüísticas que toman valores en un conjunto de términos con un significado real, de modo que el modelo cualitativo obtenido finalmente consiste en una serie de descripciones lingüísticas sobre el comportamiento del sistema que está siendo modelado [9]. El modelado difuso, en cambio, se lleva a cabo mediante los SBRDs aproximativos [1, 4], sistemas en los que las reglas difusas están compuestas por predicados difusos sin interpretación lingüística, es decir, las variables que componen las reglas no toman como valores una serie de términos lingüísticos con una semántica asociada en forma de conjunto difuso, sino directamente un conjunto difuso.

Uno de los problemas asociados al modelado lingüístico es su falta de precisión en algunos casos. Como ya indicaba Zadeh en su *principio de incompatibilidad* [12], cuando la complejidad de un problema aumenta, nuestra capacidad para describirlo en términos precisos disminuye. De este modo, aunque el uso de técnicas basadas en Lógica Difusa, concretamente de los SBRDs, permite afrontar el modelado de sistemas envueltos en una cierta imprecisión, obteniendo un modelo cualitativo claramente interpretable por el ser humano, muchas veces el rendimiento obtenido no es el deseado y preferimos perder en la claridad de descripción para ganar en el rendimiento global del modelo. La decisión entre cuán interpretable y cuán preciso debe ser el modelo a obtener suele depender de las necesidades que se tengan para el problema concreto y condicionará el tipo de SBRD escogido para obtenerlo.

En este trabajo, vamos a proponer una modificación en la estructura de los modelos cualitativos que permite mejorar su grado de precisión sin afectar en exceso a su nivel de interpretabilidad. Dicha modificación consistirá en el hecho de que cada combinación de antecedentes pueda tener asociado no sólo uno sino dos consecuentes. De este modo y sólo en aquellos casos en los que sea necesario para mejorar la precisión del modelo, una zona del hiperespacio de entrada estará cubierta por dos reglas lingüísticas distintas, la primera y la segunda en importancia. Naturalmente, el modelo hará uso de un proceso de inferencia capaz de trabajar adecuadamente con este tipo de Bases de Conocimiento (BCs).

Una vez presentada la filosofía de trabajo en la Sección 2, dedicaremos la Sección 3 a introducir un método automático de diseño de este tipo de modelos lingüísticos basado en una modificación del algoritmo de WM y en un proceso genético de selección de reglas. Posteriormente, en la Sección 4, estudiaremos el comportamiento de dicho método en dos aplicaciones distintas, el modelado de una función tridimensional y la valoración del arroz cocido, y lo compararemos con otras técnicas de modelado lingüístico. Finalizaremos el trabajo con la Sección 5, en la que recogeremos una serie de comentarios finales.

2 NUEVA ESTRUCTURA DE BASE DE CONOCIMIENTO DESCRIPTIVA

La estructura de BC habitualmente empleada en el campo del modelado cualitativo es la compuesta por una colección de reglas lingüísticas de tipo Mamdani de la forma:

R_i : SI x_1 es A_{i1} y ... y x_n es A_{in} ENTONCES y es B_i

donde $x_1, \dots, x_n$ e y son las variables lingüísticas de entrada y la de salida del proceso, respectivamente; y $A_{i1}, \dots, A_{in}$, B_i son etiquetas lingüísticas con una serie de conjuntos difusos asociados que determinan su semántica. Estos conjuntos difusos están definidos en

los universos de discurso $U_1, \dots, U_n, V$ y vienen caracterizados por sus funciones de pertenencia:

$$\mu_{A_{ij}}(\mu_{B_i}) : U_j(V) \rightarrow [0, 1], j = 1, \dots, n.$$

Como ya hemos comentado, esta estructura de BC presenta el inconveniente de su falta de precisión cuando se trabaja con sistemas que presentan un nivel de complejidad alto. Este hecho se debe a ciertos problemas relacionados con la estructura de regla difusa manejada y debidos a la rigidez de las variables lingüísticas [2]. Por esta razón, nos planteamos la obtención de una estructura de BC más flexible que permita mejorar la precisión del modelo sin perder en interpretabilidad.

En [7], los autores tratan de poner esta idea en práctica diseñando en primer lugar un modelo difuso basado en reglas de tipo TSK simplificadas y transformándolo posteriormente en un modelo cualitativo que presente el mismo rendimiento. Para ello, introducen una BC secundaria, además de la BC habitual, y presentan un Sistema de Inferencia capaz de obtener un resultado combinado de la actuación de ambas bases de reglas difusas. Lo que realmente hace el sistema es permitir que una combinación de antecedentes determinada tenga asociados dos consecuentes distintos, el primero y el segundo en importancia, con lo que se evitan algunos de los problemas derivados de la estructura de las reglas lingüísticas. Por un lado, se logra que el número de éstas no venga delimitado por las particiones difusas asociadas a las variables de entrada y, por otro, se evita la falta de flexibilidad derivada del uso de este tipo de particiones. El hecho de que el resultado de la inferencia sobre las dos reglas resultantes sea una interpolación de la salida individual de ambas permite obtener mayor precisión, sin perder la interpretabilidad del sistema.

Tomando esta idea como punto de partida, nosotros nos planteamos que una combinación concreta de antecedentes pueda tener asociados dos consecuentes pero solamente en aquellos casos en los que sea necesario y no en todos los posibles como en [7]. De este modo, se evita la existencia de una base de reglas principal y otra secundaria, y se reduce el número de reglas que componen la BC, lo que facilita la interpretabilidad del modelo. Además, no precisaremos de la existencia de un modelo difuso TSK previo y de un algoritmo específico de combinación de respuestas de reglas sino que trabajaremos con un motor de inferencia clásico que hará uso de un método de defuzzificación conocido en la literatura especializada: el *Centro de Gravedad ponderado por el grado de emparejamiento* [3].

En lo que respecta a los restantes parámetros de diseño del mecanismo de inferencia del SBRD, emplearemos la t-norma del Mínimo como operador de conjunción e implicación (aunque es posible emplear cualquier otro operador difuso en cualquiera de las dos tareas). De este modo, el mecanismo de inferencia diseñado procederá del siguiente modo ante una entrada $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$:

1. Para cada regla R_i , $i = 1, \dots, T$, de la BC:

- (a) Calcula el grado de emparejamiento, h_i , de la regla:

$$h_i = \text{Min}(\mu_{A_{i1}}(x_1), \dots, \mu_{A_{in}}(x_n))$$

- (b) Aplica la t-norma del Mínimo actuando como operador de implicación para obtener el conjunto difuso resultante del proceso de inferencia sobre la regla en cuestión, B'_i :

$$\mu_{B'_i}(y) = \text{Min}(h_i, \mu_{B_i}(y))$$

2. Obtiene el Centro de Gravedad de cada conjunto difuso individual B'_i :

$$y_i = \frac{\int_V y \cdot \mu_{B'_i}(y) \cdot dy}{\int_V \mu_{B'_i}(y) \cdot dy}$$

3. Calcula la salida final devuelta por el sistema, y_0 , agregando las acciones parciales obtenidas, mediante la media ponderada por el grado de emparejamiento:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^T h_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^T h_i}$$

En la Sección siguiente propondremos un proceso automático de generación de modelos lingüísticos con la estructura presentada.

3 UN PROCESO DE GENERACIÓN DE MODELOS LINGÜÍSTICOS MÁS PRECISOS

Este proceso está compuesto por dos métodos, que serán descritos a continuación:

1. Un *método generador de reglas lingüísticas* a partir de ejemplos basado en una modificación del algoritmo de WM [10]. Dicha modificación consiste en que el método generará las dos reglas de mayor importancia para cada combinación de antecedentes. Debe quedar claro que un hiperespacio de entrada tendrá asociado dos consecuentes (y por tanto, dos reglas lingüísticas) únicamente en el caso en que sea necesario.
2. Un *proceso genético de selección de reglas*, el cual se encarga de eliminar las reglas redundantes o innecesarias de la BC generada en la etapa anterior. Dicho proceso se implementa por medio de un Algoritmo Genético [5] con codificación binaria.

3.1 EL MÉTODO GENERADOR DE REGLAS LINGÜÍSTICAS

Nuestro método de generación de reglas se basa, al igual que el de WM, en la existencia de un conjunto de datos de entrada-salida que reflejen el comportamiento del sistema a modelar y de una definición previa de la

Base de Datos formada por las particiones difusas de los espacios de entrada y salida del sistema en cuestión. La generación de la Base de Reglas Lingüísticas (BRL) se efectúa mediante la aplicación de los tres pasos siguientes:

1. *Se genera un conjunto preliminar de reglas lingüísticas*: Este conjunto estará formado por la regla que mejor cubra a cada ejemplo contenido en el conjunto de datos de entrada-salida. La composición de estas reglas se obtiene tomando un ejemplo concreto, es decir, un vector de valores reales con dimensión $n + 1$ (n valores de entrada y uno de salida) y asignando a cada variable lingüística la etiqueta existente en el conjunto de términos de la misma que tenga asociado el conjunto difuso con el que la componente del vector tenga un mayor grado de pertenencia.
2. *Se asigna un grado de importancia a cada regla*: Sea la regla $R = \text{Si } x_1 \text{ es } A_1 \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } A_n \text{ entonces } Y \text{ es } B$ generada a partir del ejemplo $(x_1, \dots, x_n, y)$, el grado asociado a la misma se obtiene de la forma:

$$G(R) = \mu_{A_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \mu_{A_n}(x_n) \cdot \mu_B(y)$$

3. *Se construye la BRL final a partir de las reglas anteriores*: Es en este apartado en el que nuestro algoritmo se diferencia del de WM. Mientras que en dicho método se escogía para cada combinación de antecedentes, aquella regla con mayor grado de importancia, en nuestro caso permitiremos que las dos reglas más determinantes para una zona del espacio (en el caso en que existan) formen parte de la BRL. Naturalmente, una combinación de antecedentes puede no tener asociada ninguna regla (si no existían ejemplos en esa zona del hiperespacio de entrada) o sólo una (si todos esos ejemplos dieron lugar a que se generara la misma regla).

3.2 EL PROCESO GENÉTICO DE SELECCIÓN DE REGLAS

Como hemos visto en la Sección anterior, el modo de trabajo del proceso de generación provoca que las reglas se generen individualmente a partir de los ejemplos, es decir, sin tener en cuenta la cooperación existente entre ellas para proporcionar la salida final del modelo. Por esta razón, en la base de reglas generada pueden existir reglas redundantes o innecesarias que den lugar a que disminuya la precisión del modelo que haga uso de dicha BC. Para evitar este hecho y conseguir que se haga uso de más de una regla únicamente en aquellas zonas del espacio en las que sea realmente necesario, emplearemos el proceso genético de selección de reglas que se encargará de simplificar el conjunto de reglas inicial eliminando las reglas innecesarias y generando una BC con un buen nivel de cooperación.

Este proceso (propuesto en [6] y empleado en otros trabajos como [4]) se basa en un AG con codificación binaria, en el que la selección de los individuos se lleva a cabo haciendo uso del mecanismo de muestreo universal estocástico de Baker y el modelo elitista; y la generación de la nueva población se efectúa mediante los operadores clásicos de cruce multipunto en dos puntos y mutación aleatoria.

El esquema de codificación genera cromosomas de longitud fija. Si numeramos de 1 a m las reglas contenidas en el conjunto de reglas lingüísticas generado en la fase anterior, una cadena de m bits, $C = (c_1, \dots, c_m)$, representará un subconjunto de reglas candidatas a formar parte de la BC B^s obtenida finalmente como salida del proceso de tal modo que:

Si $c_i = 1$ entonces $R_i \in B^s$, en caso contrario $R_i \notin B^s$

El conocimiento disponible se incorpora a la población inicial mediante la inclusión de un cromosoma C_1 que codifica en su totalidad la BC obtenida en el proceso anterior. Los demás cromosomas de la población son generados aleatoriamente.

En lo que respecta a la función de adaptación, $E(\cdot)$, está basada en el error cuadrático medio cometido por un SBRD que emplee la BC codificada en el individuo al actuar sobre las entradas contenidas en el conjunto de entrenamiento. Esta medida de error viene representada por la siguiente expresión:

$$E(C_j) = \frac{1}{2 \cdot |E_p|} \sum_{e_i \in E_p} (ey^i - S(ex^i))^2$$

donde $S(ex^i)$ es la salida proporcionada por el modelo lingüístico que emplea la base codificada en C_j cuando recibe ex^i como entrada y ey^i es el valor ideal de salida almacenado en el conjunto de entrenamiento.

4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROCESO PROPUESTO

Con objeto de analizar el comportamiento del proceso presentado, hemos escogido dos aplicaciones distintas: el modelado de una función tridimensional y el problema real de la valoración de la calidad del arroz cocido, propuesto en [7]. En ambos casos, compararemos la precisión de los modelos cualitativos obtenidos con los generados a partir de otros dos métodos, el de WM ([10]) y el propuesto por Nozaki y otros en [7].

4.1 MODELADO DE UNA FUNCIÓN TRIDIMENSIONAL

La expresión de la función escogida se muestra a continuación junto con los universos de discurso considerados para las variables. Su representación gráfica se recoge en la Figura 1. Como puede observarse, es una función unimodal sencilla que presenta dos discontinuidades en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

$$F(x_1, x_2) = 10 \cdot \frac{x_1 - x_1 x_2}{x_1 - 2x_1 x_2 + x_2}, \\ x_1, x_2 \in [0, 1], F(x_1, x_2) \in [0, 10]$$

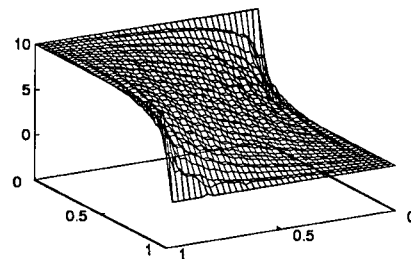


Figura 1: Representación gráfica de la función tridimensional escogida para ser modelada

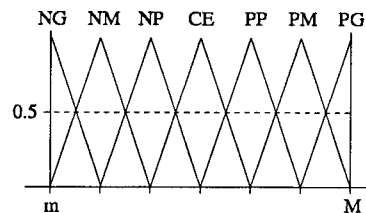


Figura 2: Partición difusa genérica

Para modelar esta función hemos generado experimentalmente un conjunto de entrenamiento formado por 674 datos uniformemente distribuidos en el espacio tridimensional de definición del problema (se han considerado 26 valores equidistantes para cada una de las dos variables de entrada). El conjunto de entrenamiento está formado por 674 valores, en lugar de por 676, debido a que la función no está definida en dos puntos del espacio. Por otro lado, hemos generado aleatoriamente otro conjunto de datos, cuyo tamaño es un porcentaje (un diez por ciento, es decir, 67 datos) del de entrenamiento, para emplearlo como conjunto de evaluación, con lo que se evita cualquier posible dependencia del proceso de aprendizaje con respecto al conjunto de entrenamiento.

Como ya hemos indicado, emplearemos tres métodos distintos para llevar a cabo el modelado difuso de esta superficie. Notaremos por D1 al modelo cualitativo obtenido a partir del método de WM, por D2 al generado a partir del método de Nozaki y por D3 al obtenido a partir de nuestro proceso.

La Base de Datos empleada en todos los casos hace uso de tres particiones difusas primarias compuestas por siete conjuntos difusos triangulares, como la mostrada en la Figura 2.

Finalmente, los parámetros considerados en el proceso genético de selección son: Número de generaciones: 500, Tamaño de la población: 61, Probabilidad de cruce: 0.6 y Probabilidad de mutación: 0.1 (por individuo).

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 1 en la que $\#R$ representa el número de reglas de la BC correspondiente y EC_{tra} y EC_{prue} el error cuadrático obtenido por el modelo cualitativo sobre los

Tabla 1: Resultados del modelado de la función F

Método	#R	EC_{tra}	EC_{prue}
D1	49	0.194386	0.044466
D2	98	0.175382	0.061249
D3 (gen.)	88	0.220062	0.146529
D3 (sel.)	55	0.019083	0.026261

Tabla 2: Tablas de decisión de los modelos cualitativos obtenidos para la función F mediante los procesos D1 (arriba) y D3 (abajo)

x_1	x_2						
	NG	NM	NP	CE	PP	PM	PG
NG	NG	NG	NG	NG	NG	NG	NG
NM	PG	CE	NP	NM	NM	NG	NG
NP	PG	PP	CE	NP	NM	NM	NG
CE	PG	PM	PP	CE	NP	NM	NG
PP	PG	PM	PM	PP	CE	NP	NG
PM	PG	PG	PM	PM	PP	CE	NG
PG	PG	PG	PG	PG	PG	PG	NG

x_1	x_2						
	NG	NM	NP	CE	PP	PM	PG
NG		NG	NG	NG	NG	NG	NG
NM	PG	CE	NP	NM	NP	NG	NG
NP	PG	PP	CE	NP	NP	NM	NG
CE	PG	PM	PP	CE	NP	NM	NG
PP	PG	PM	PP	PP	CE	NP	NG
PM	PG	PG	PM	PM	PP	CE	NG
PG	PG	PG	PG	PG	PG	PG	

conjuntos de entrenamiento y prueba, respectivamente. Como puede observarse, el método propuesto en este trabajo, D3, tiene asociadas dos filas: la primera para el resultado obtenido tras la etapa de generación y la segunda para el resultado final, una vez aplicado el método completo.

Analizando estos resultados, podemos observar el buen comportamiento que presenta nuestro proceso al generar el modelo más preciso en la aproximación de los conjuntos de entrenamiento y prueba. Solamente con la adición de ocho nuevas reglas (y la eliminación de dos) a la BC generada a partir del método de WM (D1) se consigue una precisión mucho mayor con una pérdida muy pequeña de interpretabilidad (como hemos comentado, únicamente ocho combinaciones de antecedentes tienen asociados dos consecuentes, tal y como puede verse en la Tabla 2). Por otro lado, nuestro modelo presenta un rendimiento mucho mayor que el de Nozaki (D2) con una complejidad mucho menor (55 reglas frente a 98).

4.2 VALORACIÓN DE LA CALIDAD DEL ARROZ COCIDO

La valoración subjetiva de la calidad de las comidas es un problema muy importante pero, a la vez, muy

difícil. En el caso de la valoración de la calidad del arroz cocido, se suele llevar a cabo mediante un tipo de valoración subjetiva denominado *prueba sensorial*. En esta prueba, un grupo de expertos, habitualmente formado por 24 personas, proceden a dar su evaluación en función de una serie de características asociadas a cada tipo de arroz. Dichas características son: *Sabor*, *Aspecto*, *Gusto*, *Grado de pegajosidad* y *Dureza* [7].

Debido a la gran cantidad de variables relevantes, el problema de la valoración de la calidad del arroz se hace muy complejo, lo que justifica la necesidad de afrontar un modelado que permita determinar la relación no lineal existente en el mismo. Además, el objetivo no es únicamente conseguir un modelo preciso, sino también que dicho modelo pueda aportar alguna información sobre el proceso de razonamiento que lleva a cabo el experto humano para evaluar un tipo de arroz de una forma concreta. Por todas estas razones, en esta sección nos planteamos la obtención de un modelo lingüístico que permita resolver el problema planteado.

Para ello, vamos a emplear el conjunto de datos presentado en [7]. Este conjunto está compuesto por 105 vectores de datos que recogen valoraciones subjetivas de las seis variables en cuestión (las cinco comentadas y la valoración global del tipo de arroz), efectuadas por expertos sobre otros tantos tipos de arroz cultivados en Japón (como por ejemplo el Sasanishiki, el Akita-Komachi, etc.). Las seis variables están normalizadas, por lo que toman valores en el intervalo real $[0, 1]$.

Con objeto de evitar cualquier tipo de sesgo en el aprendizaje, hemos obtenido aleatoriamente diez particiones distintas del conjunto comentado, compuestas por 75 datos en el conjunto de entrenamiento y 30 en el de prueba, para generar diez modelos cualitativos en cada experimento. Para resolver el problema, consideraremos los tres procesos de modelado lingüístico empleados en la aplicación anterior.

Siguiendo el modo de trabajo empleado en [7], hemos considerado las mismas particiones difusas para las seis variables manejadas. Dichas particiones se han obtenido mediante un proceso de normalización en el que se ha dividido sucesivamente el universo de discurso de cada variable en 2 y 3 partes iguales, y se ha asociado a cada una de ellas un conjunto difuso triangular.

Los resultados obtenidos en la experimentación realizada están recogidos en la Tabla 3, en la que N_{et} representa el número de etiquetas considerado en las particiones difusas de las seis variables. Los valores contenidos en las columnas EC_{entr} y EC_{prue} han sido calculados haciendo la media de los errores cuadráticos cometidos por los diez modelos generados en cada caso en la aproximación de los conjuntos de entrenamiento y prueba, respectivamente. La columna notada por $\#R$ contiene el número medio de reglas que componen las BCs de dichos modelos.

A la vista de estos resultados podemos destacar de nuevo el buen comportamiento que presenta nuestro

Tabla 3: Resultados obtenidos en la valoración de la calidad del arroz

N et.	D1			D2			D3		
	#R	EC _{entr}	EC _{prue}	#R	EC _{entr}	EC _{prue}	#R	EC _{entr}	EC _{prue}
2	15	0.01328	0.01311	64	0.00862	0.00985	5	0.00341	0.00398
3	23	0.00333	0.00375	364.8	0.00251	0.00322	12.2	0.00185	0.00290

Tabla 4: BC del mejor modelo cualitativo generado a partir de D3 empleando 2 etiquetas

	Sabor	Aspecto	Gusto	Pegajosidad	Dureza	Valoración
R ₁ :	Bueno	Bueno	Bueno	Pegajoso	Blando	Alta
R ₂ :	Bueno	Bueno	Bueno	Pegajoso	Duro	Alta
R ₃ :	Malo	Bueno	Bueno	No pegajoso	Blando	Alta
R ₄ :	Bueno	Malo	Malo	No pegajoso	Blando	Baja
R ₅ :	Malo	Malo	Malo	No pegajoso	Duro	Baja
R ₆ :	Malo	Bueno	Malo	No pegajoso	Blando	Baja

método. Los modelos lingüísticos generados a partir del mismo presentan el grado de precisión más alto sobre los dos conjuntos de datos (entrenamiento y prueba) en las dos experimentaciones realizadas (empleando 2 y 3 etiquetas). Además, dichos modelos son los más simples, es decir, los que menos reglas emplean en sus BCs, de todos los generados, lo que facilita su interpretabilidad.

Cabe destacar incluso que, a pesar de estar basado en la filosofía de doble generación de consecuentes propuesta en la Sección 2, nuestro proceso genera BCs con menos reglas que el de WM (D1) en esta aplicación. De hecho, ninguno de los 20 modelos generados presenta reglas con doble consecuente. Esto nos lleva a concluir que, en efecto, el proceso propuesto presenta la capacidad de discriminar las reglas innecesarias y que el modo de trabajo basado en generar un conjunto preliminar con un número alto de reglas y seleccionar el subconjunto que mejor nivel de cooperación presente permite obtener muy buenos resultados en el campo del modelado lingüístico.

En la Tabla 4 mostramos, a modo de ejemplo, la composición de la BC del modelo cualitativo con mejor nivel de generalización generado al trabajar con 2 etiquetas. Los valores concretos obtenidos por dicho modelo en ambas medidas son: $EC_{entr} = 0.00383$ y $EC_{prue} = 0.00285$.

5 COMENTARIOS FINALES

En este trabajo hemos propuesto una filosofía que permite diseñar modelos lingüísticos con un alto grado de precisión y un nivel de interpretabilidad bastante aceptable. Hemos introducido también un método automático de diseño de modelos de este tipo y hemos estudiado su comportamiento en dos aplicaciones distintas, comparándolo con otros procesos de modelado lingüístico. El proceso propuesto ha obtenido muy buenos resultados.

Referencias

- [1] A. Bardossy, L. Duckstein, Fuzzy Rule-Based Modeling With Application to Geophysical, Biological and Engineering Systems, CRC Press (1995).
- [2] A. Bastian, How to handle the flexibility of linguistic variables with applications, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2:4 (1994) 463-484.
- [3] O. Cordón, F. Herrera, A. Peregrín, Applicability of the fuzzy operators in the design of fuzzy logic controllers, Fuzzy Sets and Systems 86 (1997) 15-41.
- [4] O. Cordón, F. Herrera, A three-stage evolutionary process for learning descriptive and approximative fuzzy logic controller knowledge bases from examples, International Journal of Approximate Reasoning 17: 4 (1997) 369-407.
- [5] D.E. Goldberg, Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning, Addison-Wesley (1989).
- [6] F. Herrera, M. Lozano, J.L. Verdegay, A learning process for fuzzy control rules using genetic algorithms, Fuzzy Sets and Systems (1998, por aparecer).
- [7] K. Nozaki, H. Ishibuchi, H. Tanaka, A simple but powerful heuristic method for generating fuzzy rules from numerical data, Fuzzy Sets and Systems, 86 (1997) 251-270.
- [8] W. Pedrycz (Ed.), Fuzzy Modelling: Paradigms and Practice, Kluwer Academic Press (1996).
- [9] M. Sugeno, T. Yasukawa, A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1:1 (1993) 7-31.
- [10] L.X. Wang, J.M. Mendel, Generating fuzzy rules by learning from examples, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 22 (1992) 1414-1427.
- [11] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338-353.
- [12] L.A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 3:1 (1973) 28-44.

ARDIES: Ajuste de Reglas Difusas Basado en Enfriamiento Simulado

José M. Benítez
Depto. Ciencias de la
Computación e I.A.
E.T.S.I. Informática.
Universidad de Granada
J.M.Benitez@decsai.ugr.es

Juan L. Castro
Depto. Ciencias de la
Computación e I.A.
E.T.S.I. Informática.
Universidad de Granada
castro@decsai.ugr.es

Ignacio Requena
Depto. Ciencias de la
Computación e I.A.
E.T.S.I. Informática.
Universidad de Granada
requena@decsai.ugr.es

Resumen

Un aspecto importante en el diseño de sistemas basados en reglas difusas es obtener una base de reglas que proporcione un buen modelado del sistema. En muchos casos los métodos de extracción de reglas generan reglas cuya calidad de modelado no es suficientemente buena. O las reglas propuestas por un experto sobre el sistema no proporcionan suficiente calidad. Se impone entonces realizar un ajuste de las reglas. En este trabajo proponemos un procedimiento de ajuste que emplea como optimizador subyacente el conocido método del Enfriamiento Simulado. Además, comprobamos de forma empírica su efectividad sobre diversos problemas.

Palabras clave: Ajuste de reglas difusas, Enfriamiento Simulado

1 Introducción

Los Sistemas Basados en Reglas Difusas (SBRDs) han demostrado sus capacidades en el ámbito de la identificación de sistemas y del control [20, 21]. Se emplean como modelo para representar un sistema desconocido del que sólo se conoce un conjunto de ejemplos de su comportamiento.

Los componentes principales de un SBRD son cuatro: conversor de nítido a difuso, motor de inferencia, base de conocimiento y conversor de difuso a nítido. Para los dos interfaces de conversión y para el motor de inferencia, se pueden encontrar múltiples propuestas en la literatura y diversos estudios empíricos [7] y teóricos [5] sobre la efectividad de cada una de ellas. Sin embargo, la parte realmente determinante de un SBRD es la base de conocimiento. Centrados en el problema de su diseño, pueden encontrarse multitud de trabajos [13, 15, 18, 10, 6, 4].

Uno de los enfoques de diseño más habituales, consiste en partir de un conjunto de ejemplos del sistema

y construir las reglas a partir de ellos. A los métodos que siguen esta filosofía se los denomina métodos de extracción de reglas difusas. En muchos casos, los métodos generan reglas estableciendo las proposiciones que componen las reglas, lo que constituye una buena descripción del sistema. Sin embargo, la aproximación alcanzada puede no ser suficientemente satisfactoria y es preciso refinar la definición de las reglas.

Otra forma de obtener las reglas, es requerirle a un experto sobre el sistema que nos las proporcione. El conjunto así obtenido supone una descripción lingüística acertada del mismo, pero suele ser necesario mejorar el grado de aproximación logrado mediante un refinamiento de las etiquetas. Aparecen procesos que modifican la definición de los conjuntos difusos involucrados en las reglas, se conocen bajo la denominación de métodos de *ajuste de reglas difusas*.

El proceso de ajuste de reglas se puede plantear como un proceso de búsqueda. El espacio de búsqueda es el conjunto de posibles bases de reglas que concuerdan con la estructura de la base que se quiere ajustar y se precisa localizar una que mejore la aproximación alcanzada. Habitualmente, el criterio de selección es una medida de error sobre un conjunto de ejemplos del comportamiento del sistema que se desea minimizar. Por ello, el mecanismo subyacente a los métodos de ajuste de reglas difusas es un algoritmo de optimización.

Diversos métodos de optimización conocidos se han aplicado a la tarea de ajuste: gradiente descendente, redes neuronales, algoritmos genéticos, etc. [19, 9, 11, 22, 12]. En este trabajo proponemos un método de ajuste basado en el Enfriamiento Simulado¹.

El Enfriamiento Simulado (ES) [16, 1] es un método de optimización empleado con éxito en múltiples áreas científicas y técnicas. Se basa en una analogía existente entre el proceso físico de recocido de metales y los problemas de optimización combinatoria. Entre sus diversas propiedades se distinguen la generalidad, eficacia y el respaldo teórico de convergencia en proba-

¹En inglés, *Simulated Annealing*.

bilidad.

De forma abreviada, el funcionamiento del ES es el siguiente: se parte de una solución inicial, para la que se calcula el valor de la función objetivo. Se genera, mediante una perturbación aleatoria, una solución próxima, pero distinta de la anterior y se evalúa la función objetivo para esta nueva solución. Si el cambio en la función objetivo es favorable se acepta el cambio. En otro caso, se acepta el cambio con una determinada probabilidad cuya distribución depende de la variación en el valor de la función objetivo y de un parámetro de control llamado *temperatura*. Para cada valor de la temperatura, se proponen y evalúan una serie de cambios. En las etapas iniciales del algoritmo, el valor de la temperatura es alto para que se acepten muchos cambios (lo que equivale a permitir un espacio amplio de exploración). Conforme avanza el algoritmo, el valor de la temperatura se va reduciendo. El ES consiste en iterar este esquema hasta que se verifica algún criterio de parada (p.e. no se han aceptado cambios en las últimas n iteraciones).

2 Algoritmo de ajuste ARDIES

El objetivo de este trabajo es proponer un método de ajuste de reglas difusas, para lo que emplearemos como optimizador subyacente el Enfriamiento Simulado.

Nos limitaremos a considerar SBRDs de Mamdani [17]. Las reglas difusas que emplean estos sistemas adoptan la siguiente forma:

$$R_j: \text{SI } x_1^j \text{ ES } A_1^j \text{ Y } x_2^j \text{ ES } A_2^j \text{ Y } \dots \text{ Y } x_n^j \text{ ES } A_n^j, \\ \text{ENTONCES } y^j \text{ ES } B^j, \quad (1)$$

con $x_1^j, \dots, x_n^j \in \{x_1, \dots, x_n\}$ (entradas), $y^j \in \{y_1, \dots, y_m\}$ (salidas) y A_i^j, B^j conjuntos difusos sobre los respectivos dominios de las variables.

Por simplicidad y facilidad de tratamiento en los ordenadores digitales disponibles, nos limitaremos a considerar números difusos trapezoidales. Cada uno de estos números viene caracterizado por una cuádrupla (a, b, c, d) , donde $[a, d]$ y $[b, c]$ indican el soporte y la moda del conjunto, respectivamente.

Es importante destacar que nuestro interés se centra en *ajustar* reglas difusas. Las reglas resultantes del proceso no deben ser muy distintas de las de la base inicial, sólo lo suficiente para que proporcionen un modelado de calidad superior. Por esta razón, imprimimos un carácter *preferentemente local* al algoritmo de ajuste.

El nombre de ARDIES responde al acrónimo de Ajuste de Reglas Difusas mediante Enfriamiento Simulado y su estructura, en esencia se corresponde con la del ES, adaptando distintos componentes al problema particular que nos ocupa. Las componentes principales de un algoritmo basado en ES son:

- a) Espacio de estados y función objetivo.
- b) Operador de perturbación.
- c) Criterio de aceptación de cambios.
- d) Temperatura inicial.
- e) Esquema de enfriamiento.
- f) Longitud de la cadena de Markov.
- g) Criterio de parada.

Comentamos a continuación la forma que cada uno de ellos adopta en ARDIES.

2.1 Espacio de estados y función objetivo

Una vez fijada la base de reglas inicial, queda establecido tanto el número de reglas como la estructura de cada una. Los elementos variables son los conjuntos difusos involucrados en las proposiciones.

Cada regla difusa se puede representar como una n -upla de valores difusos trapezoidales, cuyo número de componentes es igual a la suma del número de entradas y del número de salidas de la regla. Análogamente, la base de reglas se puede representar como una gran n -upla, resultante de concatenar las n -uplas de las reglas. El espacio de estados queda establecido, pues, como el espacio al que pertenece la gran n -upla que representa a la base de reglas total.

Como función objetivo usaremos una medida del error cometido por un SBRD dotado de la base de reglas en estudio sobre un conjunto de datos. En el caso de problemas de aproximación, un buen candidato puede ser el error cuadrático medio, definido según:

$$E = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P d(o_p, y_p)^2 \quad (2)$$

con o_p la salida esperada ante el dato p -ésimo e y_p la salida calculada por el SBRD.

Para problemas de clasificación, se puede usar el porcentaje de ejemplos mal clasificados.

2.2 Operador de perturbación

La efectividad del ES requiere que las modificaciones realizadas sobre la solución actual sean pequeñas. El mecanismo de modificación planteado en nuestro caso será seleccionar una regla de la base y un conjunto difuso de entre las proposiciones de esta regla. A continuación se modifica la función de pertenencia de este conjunto. Como estamos considerando números difusos trapezoidales, la modificación implicará alterar los cuatro parámetros a partir de los que se define.

Cada parámetro del nuevo número se obtendrá mediante una distribución aleatoria sobre un intervalo centrado en el valor anterior. La amplitud de estos

intervalos viene definida por sendos porcentajes de la anchura del soporte: ι y τ . Así de (a, b, c, d) se obtendrá (a', b', c', d') según:

$$\begin{aligned} a' &= u_1 \sim U([a - \iota \cdot w, a + \iota \cdot w]) \\ b' &= u_2 \sim U([b - \tau \cdot w, b + \tau \cdot w]) \\ c' &= u_3 \sim U([c - \tau \cdot w, c + \tau \cdot w]) \\ d' &= u_4 \sim U([d - \iota \cdot w, d + \iota \cdot w]) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $w = d - a$, es la anchura del soporte, y u_1, u_2, u_3 y u_4 son variables aleatorias distribuidas uniformemente sobre los respectivos intervalos. De modo gráfico, se recoge en la Fig. 1. Como valores por defecto para los porcentajes hemos adoptado: $\tau = 0,05$ y $\iota = 0,025$.

Con objeto de favorecer la tendencia local, conforme avance el algoritmo reducimos la anchura de los intervalos en los que se eligen los nuevos valores. Así los valores de ι y τ decrecen en cada paso k , según una exponencial:

$$\tau_k = \tau_0 \cdot \exp\left(\frac{-k}{\mathcal{M}}\right). \quad (4)$$

donde $\mathcal{M}$ es el número máximo de cadenas de Markov.

2.3 Otras componentes de ARDIES

Las demás componentes del algoritmo tienen el mismo sentido que en el ES estándar. Guiados por favorecer la localidad y tras un conjunto de experimentos iniciales, hemos elegido como opciones por defecto las que se muestran en la Tabla 1.

- *Temperatura inicial* (T_0). Tiene un valor bastante pequeño en relación con los que se utilizan habitualmente, para evitar que el espacio de exploración sea demasiado amplio.
- *Método de enfriamiento*. Suficientemente rápido para evitar tiempos de convergencia demasiado lentos, pero no demasiado rápido para obtener buenos resultados. Un esquema de enfriamiento que no posee garantías teóricas de convergencia, pero funciona bastante bien en la práctica es el exponencial [1]:

$$T_k = T_0 \cdot \rho^k, \quad (5)$$

donde k es la iteración y $\rho \in (0,8, ||1,0)$.

- *Criterio de aceptación*. El de Hinton-Sejnowski [1] representa una opción intermedia entre exploración y explotación, es decir, proporciona un comportamiento intermedio entre una búsqueda sobre un espacio amplio o centrarse en las cercanías del punto en estudio. Esta decisión de nuevo revierte en acentuar el carácter local del método de ajuste, sin llegar a convertirlo en una búsqueda totalmente local.

- *Longitud de la cadena de Markov* ($\mathcal{L}$). Se mantiene proporcional al número de parámetros que se modifican. Cada componente del espacio de búsqueda es un número difuso trapezoidal, y cada uno de éstos se representa mediante 4 valores, por tanto, la longitud de la cadena de Markov debe ser 4 veces el número de conjuntos difusos incluidos en la base de reglas.
- *Criterio de parada*. Los criterios habituales se fijan en que no se pueda mejorar más la solución alcanzada y en limitar el costo computacional. Condiciones que se expresan requiriendo que transcurran un número de cadenas de Markov sin que se hayan aceptado cambios o estableciendo una cota para el número máximo de cadenas de Markov a iterar, $\mathcal{M}$.

Finalmente, el aspecto que adopta ARDIES es:

1. Iniciar $(B_0, T_0, \mathcal{L}_0)$.
 B_0 se obtiene aplicando la Metodología constructiva.
 $B \leftarrow B_0$.
 $\mathcal{L} \leftarrow 4 \cdot \text{núm.cj.}$
 $k \leftarrow 0$.
2. Repite hasta que se cumpla el *criterio de parada*
 - i. Repite para $i = 1$ hasta $\mathcal{L}$.
 - a) Elegir una regla r de forma aleatoria y uniforme:

$$r \sim U(\{1, \dots, |B_0|\})$$
 - b) Seleccionar un conjunto difuso de la regla:

$$e \sim U(\{1, \dots, n_r\})$$
 - c) Aplicar el operador de perturbación $\mathcal{P}$ al conjunto difuso e , generando e' :

$$e' \leftarrow \mathcal{P}(e)$$
 - d) Obtener la nueva base de reglas B' , a partir de una transformación $\mathcal{T}$ sobre la anterior B que cambia el conjunto difuso e por e' :

$$B' \leftarrow \mathcal{T}(B, e, e')$$
 - e) Generar un número s uniformemente distribuido en $[0, 1]$: $s \sim U([0, 1])$.
 - f) Si $s < p(E(B') - E(B), T)$ entonces
 $B \leftarrow B'$.
 - g) $k \leftarrow k + 1$.
 - ii. Calcular nuevo T .
3. La solución encontrada es B .

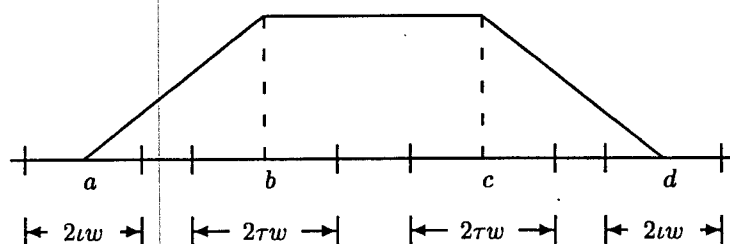


Figura 1: Operador de transformación de números trapezoidales

Tabla 1: Parámetros por defecto para ARDIES

Parámetro	Valor
Temperatura inicial	10^{-4}
Método de enfriamiento	exponencial con $\rho = 0,9$, ([1])
Criterio de aceptación	Hinton-Sejnowski ([2, 1])
Long. cad. de Markov	$\mathcal{L} = \text{núm.cj} \times 4$
Criterio de parada	4 cad. de Markov sin cambios aceptados
Núm. máx. cad. de Markov	$\mathcal{M} = 500$

3 Evaluación experimental

Con objeto de contrastar empíricamente la eficacia de ARDIES, hemos llevado a cabo diversos experimentos, que describimos en esta sección.

Se seleccionaron un conjunto de problemas típicos de clasificación sobre los que se aplicó un método de extracción de reglas. Posteriormente, se procedió al ajuste de las bases de reglas obtenidas para establecer el efecto de la mejora debida al ajuste.

El banco de pruebas lo constituyeron tres problemas de clasificación. Se trata de problemas ampliamente utilizados en los trabajos sobre el tema y cuyos conjuntos de datos se hayan disponibles en Internet². Los problemas seleccionados son:

- Clasificación de plantas de iris: iris.
- Clasificación de vinos: wine.
- Diagnóstico de diabetes: pima.

Como método de extracción de reglas se empleó la Metodología Constructiva [4, 3]. Se trata de un método que realiza una selección de características previa e identifica los grupos de datos más significativos mediante un proceso de agrupamiento difuso. Posteriormente aproxima cada grupo mediante una regla,

²El lugar de referencia por antonomasia es el depósito de datos y software de Aprendizaje Automático de la Universidad de California, en Irvine (UCI). Se pueden conseguir haciendo ftp anónimo a ics.uci.edu, en el directorio /pub/machine-learning-databases.

cuyos conjuntos difusos son construidos a partir de las proyecciones de los grupos sobre cada variable.

Para el desarrollo de los experimentos se observó la siguiente metodología: Los conjuntos de datos de cada problema se dividieron en dos partes: 2/3 para entrenamiento y 1/3 para prueba. La partición se hizo de forma aleatoria mediante selección aleatoria uniforme sobre el conjunto de datos.

Sobre cada problema se aplicó la Metodología Constructiva que generó la correspondiente base de reglas. A cada base de reglas se aplicó ARDIES. El ajuste se realizó 5 veces para cada base, empleando en cada ejecución una sucesión distinta e independiente de las usadas en las otras.

Los resultados medios de las 5 ejecuciones se resumen en la Tabla 2, donde se recogen los porcentajes de aciertos sobre los conjuntos de entrenamiento y prueba antes y después del ajuste. El significado de las columnas es: (N.R.) indica el número de reglas de la base, (%A_{Entr}) y (%A_{Prue}), son los porcentajes de aciertos sobre los conjuntos de entrenamiento y de prueba, respectivamente; y (ncm) es el número de cadenas de Markov requeridas antes de satisfacer el criterio de parada.

Finalmente, se decidió comprobar la eficacia del método sobre problemas de aproximación. Así, se consideró el modelado de la función $f(x) = x^2$ con $x \in [0, 1]$. Para ello, se generó un conjunto de 1000 datos muestreando de modo uniforme la función en el intervalo indicado. Posteriormente, se particionó este

Tabla 2: Resultados obtenidos con ARDIES

Problema	N.R.	Sin Ajuste		ncm	Con Ajuste	
		%A _{Entr}	%A _{Prue}		%A _{Entr}	%A _{Prue}
iris	3	96,6	96,0	256	100,0	96,60
wine	3	97,50	94,83	32	100,00	95,20
pima	3	70,89	71,48	250	78,20	76,40
	13	68,75	73,82	300	83,20	78,20

conjunto en dos partes: entrenamiento y prueba, según una variable aleatoria uniformemente distribuida.

Aplicando la Metodología Constructiva al problema se pueden obtener distintas bases de reglas, según el grado de precisión que se desee. En particular, se obtuvo una base de 3 reglas que arrojó un error cuadrático medio de 0,0711. Una vez aplicado el ajuste a esta base, se logró reducir el error hasta un 0,0116. El efecto del ajuste se puede observar comparando las gráficas de la Fig. 2.

4 Conclusiones

Hemos propuesto un método de ajuste de reglas difusas, denominado ARDIES, que emplea el Enfriamiento Simulado como método de optimización subyacente. A través del diseño y selección de sus componentes se ha insistido en dotarlo de un carácter preferentemente local.

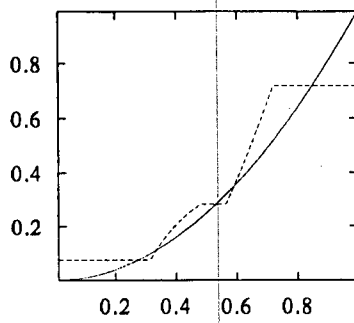
Debido a las propiedades de convergencia en probabilidad el Enfriamiento Simulado se esperaba un buen comportamiento del algoritmo. Con objeto de comprobar su eficacia en la práctica ha sido aplicado para el ajuste de bases de reglas que modelaban diversos sistemas clasificadores. Los resultados obtenidos son buenos y confirman la validez de este método para el ajuste de bases de reglas difusas.

Agradecimientos

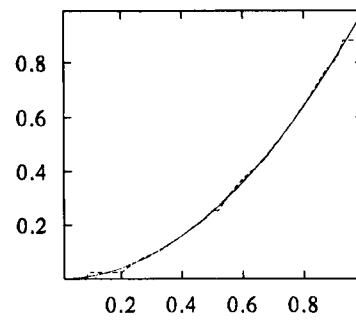
Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el proyecto TIC96-1393-C06-04.

Referencias

- [1] E. H. L. Aarts and J.H.M. Korst. *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*. Wiley & Sons, Chichester, 1990.
- [2] D.H. Ackley, G.E. Hinton, and T.J. Sejnowski. A learning algorithm for Boltzmann machines. *Cognitive Science*, 9:147–169, 1985.
- [3] José M. Benítez. *Extracción de Reglas Difusas con y de Redes Neuronales Artificiales*. PhD thesis, Depto. Ciencias de la Computación e I.A., 1998.
- [4] José Manuel Benítez, Armando Blanco, Miguel Delgado, and Ignacio Requena. Neural methods for obtaining fuzzy rules. *Mathware & Soft Computing*, 3:371–382, 1996.
- [5] J.L. Castro, J.J. Castro, and J.M. Zurita. The influence of implication functions in fuzzy logic controllers with defuzzification first and aggregation after. In *Proc. of the Seventh IFSA Congress*, volume III, pages 237–242, Prague, 1997.
- [6] Juan Luis Castro, José Jesús Castro-Sánchez, and José Manuel Zurita. Learning with fuzzy logic. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, volume II, pages 545–550, Granada, Spain, July 1996.
- [7] Oscar Cerdón, Francisco Herrera, and Antonio Peregrín. Applicability of the fuzzy operators in the design of fuzzy logic controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997.
- [8] *Proc. 1993 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, San Francisco, CA, USA, 1993.
- [9] Y.P. Glorennec. Adaptive fuzzy control. In *IFSA'91* [14], pages 33–36.
- [10] Antonio González, Raul Pérez, and José Luis Verdegay. Learning the structure of a fuzzy rule: a genetic approach. *Fuzzy System and Artificial Intelligence*, 3(1):57–70, 1994.
- [11] F. Guély and P. Siarry. Gradient descent method for optimizing various fuzzy rule bases. In *FUZZ-IEEE'93* [8], pages 1241–1246.
- [12] F. Herrera, M. Lozano, and J.L. Verdegay. Tuning fuzzy logic controllers by genetic algorithms. *Intern. J. Approximate Reasoning*, 11:1–17, 1995.
- [13] S. Horikawa, T. Furuhashi, S. Okuma, and Y. Uchikawa. A fuzzy controller using a neural network and its capability to learn expert's control rules. pages 103–106.
- [14] *Proc. 4th IFSA Congress*, Burssels, 1991.
- [15] Emdad Khan and Prahlad Venkatapuram. Neufuz: Neural network based fuzzy logic design algorithms. In *FUZZ-IEEE'93* [8], pages 647–654.



(a) Sin ajuste



(b) Con ajuste

Figura 2: Gráfico de la función $f_2(x) = x^2$ versus el modelo sin ajustar y tras el ajuste(3 reglas)

- [16] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt Jr., and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680, 1983.
- [17] E.H. Mamdani and S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *Intern. J. of Man-Machines Studies*, 1975.
- [18] Detlef Nauck and Rudolf Kruse. A fuzzy neural network learning fuzzy control rules and membership functions by fuzzy error backpropagation. In *Proc. IEEE International Conference on Neural Networks*, pages 1022–1027, San Francisco, CA, USA, 1993. IEEE.
- [19] H. Nomura, I. Hayashi, and N. Wakami. A self-tuning method of fuzzy control by descent method. In *IFSA'91* [14], pages 155–158.
- [20] Michio Sugeno and G.T. Kang. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 28:15–33, 1988.
- [21] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 15:116–132, 1985.
- [22] L. Zheng. A practical computer-aided tuning technique for fuzzy control. In *FUZZ-IEEE'93* [8], pages 702–707.