

XI ACTAS

CONGRESO ESPAÑOL SOBRE TECNOLOGÍAS Y LÓGICA FUZZY

Organizan:



Universidad de León



European Society for Fuzzy
Logic and Technology

Edita:

**Comité Organizador del XI Congreso
Español de Tecnología y Lógica
Fuzzy**

**Presidente del Comité Organizador:
Adolfo Rodríguez de Soto**

Portada:

F.de Manuel

Imprime:

Secretariado de Publicaciones y Medios Audiovisuales. Universidad de León.

Depósito Legal

LE-1250-2002

ISBN: 84-7719-933-7



Sesión A1	17
Soft Computing e Internet (I)	
Soft Computing and Internet (I)	
Imprecisión y búsquedas en la web	
<i>Alejandro Sobrino Cerdeirña</i>	19
La lógica difusa en el proceso de recuperación de información	
<i>Fernando Berzal • María J. Martín-Bautista • María-Amparo Vila • Ignacio J. Blanco</i>	25
A spanish e-dictionary of synonyms as a fuzzy tool for information retrieval	
<i>Santiago Fernández Lanza • Jorge Graña Gil • Alejandro Sobrino Cerdeirña</i>	31
FISS: Aplicación de la relación borrosa de sinonimia y de ontologías borrosas a un metabuscador	
<i>Pablo J. Garcés • José A. Olivas • Francisco P. Romero</i>	39
 Sesión B1	45
Hardware Fuzzy	
Hardware Fuzzy	
Filtro difuso de mediana para detección de señales CDMA en entornos no gaussianos	
<i>Joan Bas • Ana Pérez Neira</i>	47
Controlador borroso hardware secuencial de propósito general	
<i>Gerardo Aranguren Aramendia • Eduardo M. González Izquierdo • Jonatan Alonso Ibáñez</i>	53
Microcontroller-based versus mixed-signal programmable chip fuzzy controller in a soft start of DC motor application	
<i>Rafael Navas-González • Fernando Vidal Verdú • Ángel Rodríguez Vázquez</i>	59
Aplicación de la lógica borrosa a los reguladores de carga en sistemas fotovoltaicos autónomos.	
<i>Joaquín Cañada Bago • Sebastián García Galán • Jorge Aguilera Tejero • Juan Ramón Velasco Pérez • Luis Magdalena Layos</i>	65
 Sesión C1	71
Aplicaciones a la Economía	
Economic applications	
Some results in application of fuzzy sets to stock price forecasting	
<i>Dusan Marcek</i>	73
Management of staff competencies through a hybrid fuzzy model of SOFM	
<i>Raquel Flórez López</i>	77
Predicción de información contable con un modelo híbrido. Comparación con técnicas de regresión clásicas	
<i>Antonio Arauzo Azofra • Juan Luis Castro Peña • Miguel Delgado Calvo-Flores • M^a Angustias Navarro Ruiz • José M^a de la Torre Martínez</i>	85
Un modelo de índices con betas difusas para la selección de carteras	
<i>A. Bilbao • M. Arenas • M. Jiménez • J. Antomil</i>	91

Sesión A2	97
Soft Computing e Internet (II)	
Soft Computing and Internet (II)	
 Una representación fuzzy para páginas web	
<i>Víctor Fresno Fernández • Ángela Ribeiro Seijas</i>	99
Utilización de la lógica borrosa para la mejora de la calidad de servicio de los agentes inteligentes en internet	
<i>Francisco Pascual Romero • José Ángel Olivas • Pablo Garcés Rubira</i>	105
Un método de análisis de experiencias de aprendizaje colaborativo en un entorno telemático usando lógica difusa	
<i>Miguel A. Redondo • Crescencio Bravo • Manuel Ortega</i>	111
Aprendizaje automático de consultas booleanas extendidas para sistemas de recuperación de información difusos mediante algoritmos SA-P	
<i>O. Cordon • E. Herrera-Viedma • M. Luque • F. Moya • C. Zarco</i>	117
 Sesión B2	123
Razonamiento temporal borroso	
Fuzzy temporal Reasoning	
 Modelado en el tiempo de sistemas dinámicos	
<i>Juan Moreno • Luis Jiménez • Luis Rodríguez • Xavier Aguado</i>	125
Evaluación de algoritmos de preproceso para redes de restricciones temporales borrosas disyuntivas	
<i>Alfonso Bosch • Manuel Torres • Roque Marín</i>	133
Un prototipo de sistema de gestión de información temporal borrosa	
<i>A. Bosch • C. Martínez • F. Guil • R. Marín</i>	141
FuzzyTime (Fuzzy Temporal Information Management Engine)	
<i>M. Campos • A. Cárceles • J. Palma • R. Marín</i>	143
 Sesión A3	149
Fundamentos teóricos (I)	
Theoretical foundations (I)	
 Binary kernel aggregation operators	
<i>E. Muel • J. Mordelová • A. Kolesárová</i>	151
Funciones de agregación y el principio de mínima desviación	
<i>J. Martín • G. Mayor • J. Suñer</i>	157
OWG operators that maintain reciprocity property in the aggregation of multiplicative preference relations.	
<i>F. Chiclana • F. Herrera • E. Herrera-Viedma • L. Martínez</i>	165
Síntesis y propiedades de operadores de agregación compensativos y compensatorios	
<i>Carlos Macua • Miren Portilla • Pedro Burillo</i>	171
Condición de modularidad para uninormas idempotentes	
<i>Daniel Ruiz • Joan Torrens</i>	177
What is the arithmetic mean of an infinite sequence?	
<i>L. González • E. Muel • R. Mesiar</i>	183

Sesión B3	189
Control Fuzzy	
Fuzzy Control	
Control fuzzy adaptativo en redes complejas	
<i>Pablo Carbonell</i>	191
Efectos de la actuación por PWM regla-a-regla en el control borroso de motores DC	
<i>Benito Artaloytia • Félix Monasterio-Huelin</i>	197
Observer based fuzzy control. Application to a turboprop	
<i>Elvia Palacios • André Titli</i>	203
Sistemas dinámicos borroso-aditivos como controladores iterativos de actuación regla a regla	
<i>Félix Monasterio-Huelin</i>	209
Control borroso en sistemas inteligentes de transporte	
<i>Ricardo García • Teresa de Pedro • J. Eugenio Naranjo • Jesús Reviejo • Carlos González</i>	215
 Sesión A4	221
Fundamentos teóricos (II)	
Theoretical foundations (II)	
Relaciones entre medidas de posibilidad y capacidades maxitivas	
<i>Enrique Miranda • Inés Couso • Pedro Gil</i>	223
Extracción de información relevante en contextos L-fuzzy	
<i>Ana Burusco • Ramón Fuentes González</i>	229
Pruebas probabilísticas y no probabilísticas para el análisis de la propiedad transitiva en la tarea de pares comparados	
<i>A. J. Herencia-Leva • M. T. Lamata • C. Pérez Meléndez</i>	235
Normalización de distribuciones posibilísticas mediante t-normas	
<i>J. Lawry • J. Recasens</i>	241
Probabilidad de sucesos difusos, cardinalidades escalares y t-normas	
<i>Jaume Casanovas • J. Torrens</i>	247
Factorizations of fuzzy preferences characterized through reciprocal order automorphisms	
<i>Bonifacio Llamazares Rodríguez</i>	253
 Sesión B4	261
Gestión del conocimiento	
Knowledge management	
QFD en el sector servicios: una aproximación desde la lógica borrosa	
<i>Angel M. Gento • M^a Dolores Miñambres • Alfonso Redondo • M^a Elena Pérez</i>	263
Sistema de información de gestión presupuestaria de la distribución basado en un algoritmo genético borroso	
<i>Enrique López-González • Cristina Mendaña Cuervo</i>	269
Construcción de un sistema experto borroso para la orientación profesional	
<i>M^a Belén Vaquerizo García • Cristina Mendaña Cuervo • Enrique López González</i>	275
Un enfoque semi-supervisado para el filtrado personalizado de información basado en red neuronal SOFTMAX	
<i>Rocío Alaiz-Rodríguez • Jesús Cid-Sueiro</i>	281
Desarrollo de un modelo integral de gestión del conocimiento desde un enfoque de procesos. Estudio de un caso	
<i>T. Peña Pérez • M. A. Manzanedo Campo • L. Sáiz Bárcena • A. Lara Palma</i>	289

Sesión A5	295
Fundamentos teóricos (III)	
Theoretical foundations (III)	
Operadores de implicación en una cadena finita	
<i>M. Mas • M. Monserrat • J. Torrens</i>	297
Parametric families of non-coherent fuzzy consequence operators	
<i>Jorge Elorza • Pedro Burillo</i>	303
Operador de implicación intervalo-valorado fuzzy. Una expresión y primeras propiedades	
<i>H. Bustince • E. Barrenechea • V. Mohedano</i>	309
A classification method based on indistinguishabilities	
<i>Luis Garmendia • Adela Salvador • Enric Trillas</i>	315
Técnicas de morfología matemática en el tratamiento de sistemas relacionales difusos	
<i>R. Fuentes-González • P. Burillo • Noé Frago</i>	321
Graduación de propiedades en relaciones borrosas	
<i>J. Jacas • J. Recasens</i>	327
 Sesión B5	 333
Software y bases de datos	
Software and databases	
FuzzyQueries 2+, una herramienta para la integración de consultas flexibles, cálculo de agregaciones y resúmenes y extracción de conocimiento	
<i>I. Blanco • D. Sánchez • J. M. Serrano • M. A. Vila • J. Galindo</i>	335
Análisis de correspondencias entre particiones mediante dependencias aproximadas y reglas de asociación	
<i>Daniel Sánchez • José María Serrano • M^a. Amparo Vila • Víctor Aranda • Julio Calero • Gabriel Delgado</i>	337
Pautas para la simbiosis: minería de datos y lógica borrosa	
<i>Ramiro Aguilar Quispe</i>	343
An open source portable software for fuzzy inference systems	
<i>B. Charnomordic • P.-Y. Glorennec • S. Guillaume</i>	349
El entorno Xfuzzy 3.0 de diseño de sistemas difusos.	
<i>F. J. Moreno Velo • I. Baturone • S. Sánchez-Solano • A. Barriga • R. Senhadji</i>	353
Algunos aspectos del modelo conceptual EER difuso: Aplicación al caso de una agencia inmobiliaria	
<i>Angélica Urrutia • José Galindo</i>	359
 Sesión A6	 365
Razonamiento aproximado	
Approximate Reasoning	
Relaciones de indistinguibilidad en el marco de la teoría de la evidencia	
<i>E. Hernández • J. Recasens</i>	367
Multi-adjoint abduction via neural nets	
<i>Jesús Medina • Enrique Mérida-Casermeiro • Manuel Ojeda-Aciego</i>	373
Contradicción entre dos conjuntos	
<i>Elena Castiñeira • Susana Cubillo • Sergio Bellido</i>	379
Non-contradiction and excluded-middle with antonyms	
<i>Sergio Guadarrama • Enric Trillas • E. Renedo</i>	385
Un esquema probabilístico para el tratamiento de sentencias cuantificadas sobre fórmulas	
<i>F. Díaz Hermida • A. Bugarín • P. Cariñera • S. Barro</i>	391
On first-order multi-adjoint logic programming	
<i>Jesús Medina Moreno • Manuel Ojeda Aciego</i>	396

Sesión B6	403
Computación evolutiva	
Evolutionary computing	

Optimización genético-borrosa de parámetros en un sistema de bajo coste para la medición visual de cotas de vehículos

José Otero • Adolfo Otero • Luis Junco • Luciano Sánchez Ramos.....405

Utilización de algoritmos genéticos multiobjetivo para selección de características y diseño de la base de conocimiento de un sistema de clasificación basado en reglas difuso

O. Cerdón • F. Herrera • M. J. Del Jesús • L. Magdalena • A. M. Sánchez • P. Villar411

Influencia de la población inicial en un algoritmo genético de un sistema borroso-genético

J. A. Fernández Prieto • Juan R. Velasco Pérez.....417

Comparación de estrategias evolutivas para la adquisición de conocimiento en controladores lógico borrosos (FLCs) y controladores borrosos temporales difuminados (FTFLCs)

Manuel A. Gadeo Martos • Juan R. Velasco Pérez.....423

Estudio de los métodos de defuzzificación adaptativos evolutivos en sistemas basados en reglas difusas

O. Cerdón • F. Herrera • F. A. Márquez • A. Peregrín429

Sesión A7	437
Toma de decisiones	
Decision making	

Mayorías simples con etiquetas lingüísticas

José Luis García Lapresta.....439

El análisis modal de fallos y efectos (AMFE) como sistema borroso de ayuda a la decisión

Javier Puente • Alberto Gómez • Isabel Fernández • Nazario García • José Parreño445

Los derechos en un contexto difuso

Jorge Alcalde Unzu.....451

Un ejemplo de sistema de ayuda a la decisión basado en tecnología fuzzy

José M. Cadenas • David A. Pelta • José Luis Verdegay.....457

Concentración heurística aplicada al problema fuzzy de la p-mediana

M. José Canós • Carlos Ivorra • Vicente Liern.....463

Sesión B7	469
Aplicaciones (Robótica)	
Applications (Robotics)	

Segmentación difusa de los colores "perceptuales relevantes" de imágenes en color

Santiago Romani • Pilar Sobrevilla • Eduard Montseny471

The utilization of deformed fuzzy automata in the recognition of imperfect strings of fuzzy symbols

J. J. Astrain • J. R. González de Mendivil • J. R. Garitagoitia • J. Villadangos • F. Fariña.....477

Metodología borrosa para la gestión de colas en servicios de urgencia hospitalarios

Javier Puente • Paolo Priore • Raul Pino • David de la Fuente483

NeuroFuzzyMT: NeuroFuzzy Modelling Tool. Herramienta de modelado Neuroborroso.

Aplicaciones a Robótica

N. Pavón Pulido • O. Sánchez Pérez • A. Ollero Baturone489

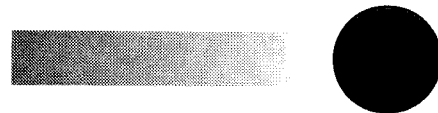
µRobot Diego

Andrés Vicente • Vidal Moreno • Belén Curto • Eduardo Espino • Ramiro Aguilar495

Implementación basada en lógica borrosa de jugadores para la RoboCup

José María Álvarez Rey • Vicente Matellán Olivera • José María Cañas Plaza.....501

Sesión A8	507
Enseñanza de la Lógica y las Tecnologías Fuzzy	
Teaching Fuzzy Logic and Technology	
 La enseñanza de sistemas difusos para control en Ingeniería Técnica Industrial	
<i>María José del Jesús</i>	509
MINERVA: Un sistema instructor difuso	
<i>Eduardo Guzmán • Antonio Guijosa • Eva Millán • José Luis Pérez de la Cruz</i>	515
La enseñanza de la lógica fuzzy en la sociedad de la información	
<i>Alejandro Sobrino</i>	521
Non-functional fuzzy connectives: the case of negations.	
<i>E. Trillas • A. Pradera</i>	527
Vagueness, computation and fuzzy logic: is it posible to formalize the lack of precision with fuzzy logic?	
<i>Carlos Ortiz de Landázuri</i>	533
 Sesión B8	539
Adquisición y representación del conocimiento	
Knowledge acquisition and representation	
 Mejoras a la metodología COR mediante el uso de reglas difusas ponderadas.	
<i>R. Alcalá • J. Casillas • O. Cordon • F. Herrera</i>	541
Información imperfecta en el modelo MFGN extendido	
<i>J. M. Cadenas • M. C. Garrido</i>	547
Using fuzzy sets based coherence measures to evaluate systems rules	
<i>J.L. Verdegay • Alejandro Sancho Royo</i>	553
Selección de reglas difusas desde una estructura de grid	
<i>R. Senhadji • I. Baturone • A. Barriga • S. Sánchez-Solano • F. J. Moreno-Velo</i>	559
Fusión de datos para inteligencia con lógica fuzzy	
<i>Ignacio García Juliá</i>	564
 Índice de autores	571



El volumen que tienes entre las manos, querido lector, recopila las comunicaciones presentadas al XI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF'2002) celebrado en la ciudad de León del 17 al 20 de Septiembre de 2002.

El congreso sigue en la serie a los diez ya realizados en diversas ciudades españolas, y que hasta 1999 se celebraron anualmente, siempre bajo el auspicio de la Sociedad Española de Lógica y Tecnologías Fuzzy. En el congreso del año 1999 desapareció la sociedad española dando lugar a la European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT) y acordándose que los congresos ESTYLF se celebrarían bianualmente dejando hueco para la celebración de un congreso europeo.

Al igual que las ediciones anteriores, ESTYLF'2002 tuvo como objetivo principal constituirse como un foro de discusión alrededor de la teoría y aplicaciones de las tecnologías fuzzy, promoviendo el estudio e investigación de esta área en España, y propiciando el encuentro entre los investigadores que están trabajando en este campo en nuestro país. Al Congreso asistieron también investigadores europeos puesto que el congreso se realiza bajo el paraguas de la sociedad europea EUSFLAT y los idiomas oficiales son el español y el inglés. Por este motivo aparecen artículos en los dos idiomas en estas actas. El nivel de participación fue bueno manteniéndose el nivel respecto al celebrado en Sevilla dos años antes.

Este año se propusieron sesiones especiales sobre Internet, Software, Gestión y Docencia en el ámbito de las tecnologías "fuzzy". El Comité Organizador, además de recoger las inquietudes surgidas de la comunidad de investigadores españoles en el campo "fuzzy", intentó propiciar una continuación del debate surgido en Sevilla sobre el futuro de estas tecnologías, abriendo discusiones sobre la enseñanza de estos conocimientos, o apoyando campos en los que, quizá, no es habitual encontrar líneas de investigación entre los participantes a nuestros congresos.

En el capítulo de agradecimientos, hay que destacar el apoyo financiero brindado por diversas organizaciones como el Ministerio de Ciencia y Tecnología a través de su programa de Acciones Especiales y la Junta de Castilla y León, así como la colaboración obtenida de la Diputación de León, Caja España, Proconsi, la Oficina LeónGaudí2002 e Hispana Electrónica.

Por último, agradecer la labor de edición de Fito, sin cuya ayuda estas actas no habrían alcanzado la calidad que creo tienen.

Adolfo Rodríguez de Soto
Presidente del Comité Organizador

**Comité Organizador****Presidente**

Adolfo R. de Soto

Miembros

Eva Cuervo Fernández

Conrado Andréu Capdevila

Raquel Flórez López

Enrique López González

Cristina Mendaña Cuervo

Ángel Alonso Álvarez

Comité Científico

Josep Aguilar	LAAS-CNRS	M ^a Ángeles Gil	UO	Cristina Mendaña	ULE
Claudi Alsina	UPC	Pedro Gil	UO	Eduard Montseny	UPC
Angel Barriga	IMSE-CSIC	Jaime Gil Aluja	UB	José Ángel Olivas	UCLM
Senen Barro	USC	Lluís Godo	IIIA-CSIC	Aníbal Ollero	USe
Alberto Bugarín	USC	Antonio González	UGr	M ^a José Pérez-Illzarbe	UPN
Pedro Burillo	UPNa	Julio Gutiérrez	UPM	Ana Pradera	UJC
Humberto Bustince	UPNa	Francisco Herrera	UGr	Adolfo R. de Soto	ULE
Elena Castiñeira	UPM	José L. Huertas	IMSE-CSIC	Ángel R.-Vázquez	IMSE-CSIC
Juan Luis Castro	UGr	Joan Jacas	UPC	Santiago Sánchez	IMSE-CSIC
Susana Cubillo	UPM	Enrique López	ULE	Luciano Sánchez	UO
M ^a Teresa de Pedro	CSIC	Ramón L. de Mántaras	IIIA-CSIC	Alejandro Sobrino	USC
Maria José del Jesús	UJA	Luis Magdalena	UPM	Vicenç Torra	CSIC
Miguel Delgado	UGr	Roque Marín	UM	Enric Trillas	UPM
Francesc Esteva	IIIA-CSIC	Luis Martínez	UJA	José Luis Verdegay	UGr
Pere García	IIIA-CSIC	Gaspar Mayor	UIB	Amparo Vila	UGr

Sesión A1

Soft Computing e Internet (I)

Soft Computing and Internet (I)

IMPRECISIÓN Y BÚSQUEDAS EN LA WEB

Alejandro Sobrino

Dpto. de Lógica y Filosofía Moral
Universidad de Santiago de Compostela
lflgalex@usc.es

Resumen

Este trabajo es un informe acerca del papel de la imprecisión en los buscadores, como es gestionada por los mismos, qué limitaciones tienen y algunas propuestas recientes útiles para su superación. El trabajo termina proponiendo algunos retos para el futuro.

Palabras clave: imprecisión, búsquedas en la Web.

1. INTRODUCCIÓN.

La recuperación de información (RI) es un área de creciente interés en nuestra sociedad, en la que cada vez hay más datos y menos conocimiento de que existen. En los últimos años, la Web ha incrementado exponencialmente la información disponible, estimándose que el volumen de datos de las páginas indexadas por los buscadores de Internet es de, más o menos, 4 Terabytes, correspondientes, aproximadamente, a un 30% de las 10⁹ páginas Web que se estima que hay. Se hace, por tanto, cada vez más necesario y útil disponer de instrumentos de búsqueda que ayuden a encontrar páginas relevantes en tan inmenso depósito.

A pesar de su protagonismo en Internet, la RI es un tema antiguo. Hasta la aparición de la Red, la información se almacenaba primordialmente en bibliotecas y hemerotecas, donde se clasificaban –y todavía se hacen los libros, revistas o documentos de acuerdo con algún sistema de indexación –índice de autores, de materias,...–.

Actualmente la mayor biblioteca digital existente es la Web. Se distingue de las bibliotecas clásicas en que es reticular y carece de estructuración y los documentos que almacena difieren de los libros en que:

- Son complejos; esto es, admiten muchos formatos y estructuras
- Están distribuidos; cuestión facilitada por el hipertexto
- Algunos son dinámicos, configurando parte de lo que se conoce como la Web oculta o invisible.

Estas peculiaridades hacen que su localización sea difícil y su rescate complejo.

La relevancia del documento recuperado casi siempre es una cuestión de grado, ya que muy pocas veces el usuario está en condiciones de saber exactamente lo que pregunta y de recibir de modo preciso lo que espera (en raras ocasiones se está en condiciones de presionar el botón *I'm lucky* de Google).

El objetivo de este trabajo es hacer una presentación de distintos modelos de búsqueda en la Web, poniendo especial atención en los recursos para tratar el tema de la

imprecisión. Se comienza exponiendo los rasgos fundamentales de los modelos de recuperación más populares, indicando algunos aspectos relativos a su evaluación. En el tercer apartado se exponen algunos recursos para incorporar la imprecisión en los modelos léxicos y se examinan algunas propuestas de mejora provenientes de la lógica fuzzy para los modelos léxico y lógico. El trabajo termina aludiendo a algunos retos que aguardan en el campo de la búsqueda en la Web.

2. MODELOS DE BÚSQUEDA EN LA WEB

Tres son modelos de recuperación de información más destacados en la Web:

- *El modelo cognitivo*, que se basa en el principio: 'recuperar es imitar', seguir la conducta de las personas que buscan información.
- *El modelo léxico gramatical*, que atiende al lema 'recuperar es igualar', emparejar los términos de la pregunta con los del índice del documento.
- *El modelo lógico*, que sigue la máxima 'recuperar es inferir'. Una pregunta plantea una necesidad de explicación, que se obtiene inquiriendo la información buscada a partir del contenido proposicional de la pregunta y del conocimiento –reglas–, extraído del texto de los documentos.

Estos modelos no son excluyentes: en el léxico hay funciones lógicas, como los operadores booleanos; y en lógico hay a su vez emparejamiento, que permite desencadenar las inferencias. Los modelos léxicos incorporan a su vez aspectos cognitivos, que han redundado en una mayor eficacia de búsqueda (p. ej., el PageRank de Google)

A continuación se examinan algunas características de los modelos léxico y lógico.

2.1. El modelo léxico-gramatical

En un modelo léxico, la recuperación automática de información en la Web se hace usando [1]:

- Los directorios, creados por humanos, especialistas en distintos temas, asalariados o voluntarios, que clasifican en una taxonomía, previamente diseñada, los contenidos de las páginas Web. Yahoo! es uno de los más conocidos e incluye 14 categorías principales.
- Los motores de búsqueda o buscadores, software especializado que navega por la Red indexando algunas de sus páginas y ofreciendo direcciones URL a las que acudir para hallar información relativa a las preguntas planteadas. El buscador más popular actualmente es Google.

En la recuperación automática de información, un buscador consume cuatro etapas:

- Pregunta
- Indexación
- Búsqueda
- Recuperación

1. *Introducción de la pregunta en la caja de búsqueda (searcher box)*. La mayoría de los buscadores de Internet ofrecen cajas de búsqueda que admiten por defecto palabras. Los que disponen de búsquedas avanzadas -hoy la mayoría- suelen permitir combinaciones de palabras usando operadores booleanos (*and*, *or*, *not*), operadores de proximidad (*near*, *adjacent*), ... Algunos buscadores - como AskJeeve/Pregunta-, permiten interrogar en lenguaje natural.

2. *Indexación*. Comprende dos fases:

2.1. *Activación del recopilador (gatherer)*. Software especializado (también denominado *robot*, *spider*,...) que localiza páginas Web y las 'baja' para ser indexadas. A menudo, el recopilador tiene una periodicidad razonable en los procesos de actualización de contenidos o acuden a un servidor intermediario -tipo Harvest- dedicado a acceder y bajar páginas actualizadas.

2.2 *Activación del indexador (indexer)*. Activación de aquellos programas que permiten registrar documentos Web; representarlos como conjuntos de palabras. Habitualmente se usa el *Uniform Resource Characteristic (URC)* para referirse a ese conjunto. Puede ser sencillo o complejo.

- El URC más sencillo comprende el título del documento y la localización URL. Se le denomina también índice primario.

- Una alternativa más compleja es el índice invertido o secundario. Proyecta títulos de documentos en registros de bases de datos.

- Cuando todos las palabras de un documento están indexadas, se dispone de un índice de texto completo. Es rápido y preciso, pero dado el volumen de la Web, es una alternativa utópica.

Tener un índice de calidad es importante, porque reduce el tiempo de búsqueda e incrementa su precisión.

3. *Búsqueda (search)*. Es un proceso que comprende dos secuencias:

-Traducción de la pregunta a un lenguaje de interrogación apropiado

-Función de emparejamiento entre la pregunta y el índice de aquellos documentos que son potenciales fuentes de información. Hay tres modelos principales [2]:

• *Modelos de emparejamiento preciso*. La recuperación se expresa en términos de la satisfacción de una fórmula lógica de primer orden. Es el modelo usado por la mayoría de los buscadores comerciales.

• *Modelos de espacios vectoriales*. Los documentos y las preguntas se representan como vectores en el espacio de todas las palabras posibles del índice. Los vectores de los documentos tienen pesos, obtenidos de las frecuencias de las palabras en la colección de documentos y los de las preguntas son vectores binarios sobre los términos. El igualamiento se hace con una medida de similaridad (a

menudo, el coseno del ángulo del vector pregunta y del vector documento).

• *Modelos probabilísticos*. Los documentos se representan como vectores binarios, generalmente sin ponderar y las preguntas son vectores de términos ponderados. La recuperación es un proceso estocástico basado en el teorema de Bayes: relaciona la probabilidad a posteriori de la relevancia con la probabilidad a priori y la verosimilitud de la relevancia después de observado el documento.

Estos modelos se complementan con:

• *Técnicas de procesamiento del lenguaje natural (PLN)*:

- Thesaurus. Con los *thesaurus on-line* se expanden las preguntas usando sinónimos de los términos empleados en ellas, lo que permite efectuar búsquedas más completas. Altavista posee esta utilidad.

- Indexador semántico. Se usa para estimar la estructura semántica latente subyacente a un documento correlacionando términos significativamente próximos. *Excite* usa un método estadístico, llamado *Intelligent Concept Extraction* para clasificar los resultados: permite agrupar las búsquedas en grupos.

En los buscadores comerciales predominan sobre todo los modelos de igualamiento preciso y aunque los otros modelos representan avances, no han sido implementados más que parcialmente. Esta timidez se debe fundamentalmente a que penalizan la latencia o velocidad de respuesta, factor crítico en la recuperación de información en los buscadores comerciales.

4. *Recuperación (Retrieval)*. Documento HTML que contiene hipertexto de enlace a otros documentos Web y un breve resumen de la página recuperada. La recuperación puede ser:

- Directa, si el documento original está almacenado en la base de datos.

- Servidor-cliente. Se recupera el documento conectando con el servidor Web a través de la URL correspondiente.

2.2. El modelo lógico

En el modelo lógico la operación fundamental de recuperación de información es la implicación lógica ($\rightarrow$). Sea s la descripción parcial de un documento -un conjunto de oraciones o un término de un índice- y q una pregunta. La cuestión es cómo evaluar $s \rightarrow q$. Decidir si un documento debe o no ser recuperado es evaluar si $s \rightarrow q$ es verdadero. Si s es verdadero para un documento, entonces $s \rightarrow q$ es verdadero probado que q es verdadero. Si s no es verdadero, Van Rijsbergen en [3] proceder de la siguiente forma: buscar el documento d' más cercano en el que s sea verdadero y comprobar si q es verdadero. Si q es verdadero en d' , entonces $s \rightarrow q$ es verdadero en d y debe ser recuperado; en otro caso, es falso y debe inhibirse su recuperación. Este proceso lo resume el test de Ramsey: para evaluar un condicional, hágase la mínima revisión de nuestro stock de creencias necesaria para asumir el antecedente. Acto seguido, evaluar la aceptabilidad del consecuente sobre la base del cuerpo de creencias revisadas. Como se puede comprobar, la semántica subyacente no es veritativo-funcional, sino intensional o de mundos posibles.

Veamos ahora la interpretación probabilística de este caso: para evaluar $P(s \rightarrow q)$, la probabilidad de que dado s se verifique q , hay que revisar la función de probabilidad de P a P' de la manera minimal posible como para que $P'(s) = 1$. Entonces $P(s \rightarrow q) = P'(q)$. Para efectuar la revisión se puede proceder haciendo $P(s \rightarrow q) = P(q|s)$. Si s se encuentra entre los documentos ya presentes, entonces $P(s \rightarrow q)$ se interpretará como la razón que hay entre la frecuencia de q y s y la frecuencia de s . Si s no se encuentra entre los presentes, entonces evaluar $s \rightarrow q$ requiere un cambio en la función de interpretación, haciéndola relativa a otro contexto o mundo, de tal forma que s y $s \rightarrow q$ sean verdaderas bajo esta nueva interpretación siempre que q sea verdadera.

En ese caso, la evaluación dependerá de una noción de cercanía o proximidad entre mundos o documentos. Para mantener el principio de solidez, se debe aspirar a que $s \rightarrow q$ tenga una probabilidad alta. Una forma de proceder, si ocurre que no es el caso que $s \rightarrow q$, es revisar o cambiar el mundo actual y comprobar $s \rightarrow q$ en el nuevo mundo. Pero hay otra manera que puede ser más apropiada en un contexto de recuperación de información: generalizar el Principio de Ramsey y definir un Principio de Incertidumbre Lógica, que diga: dados dos enunciados x e y , una medida de incertidumbre de $y \rightarrow x$, relativa a un conjunto de datos, queda determinada por la cantidad mínima de información que hay que añadir a ese conjunto para establecer su verdad. Pero hay que cuantificar que se entiende por 'cantidad mínima'. Esto se consigue proporcionando una medida de información.

Dados cualesquiera dos documentos d_1 y d_2 , se definen la medida de información condicional $I(d_1|d_2)$ como el programa más pequeño que se necesita para calcular d_1 a partir de un programa minimal para d_2 . Dado un documento d , encontrar el documento más próximo en el cual una oración es verdadera es equivalente a hallar un α para el cual $I(\alpha|d)$ es un mínimo, probada que la oración es verdadera en α . Expresado intuitivamente, se trata de requerir el programa más pequeño para calcular α .

2.3. Evaluación de un modelo de recuperación

Si se dispone de:

1. Un modo de representar las preguntas,
2. Un procedimiento de selección y representación de los documentos como conjuntos de palabras y de
3. Una función de igualamiento,

se tiene un modelo de recuperación de información.

Una vez propuesto un modelo de recuperación, debe someterse a evaluación. Las medidas más comunes para cuantificar la información recuperada en la Web deben tener en cuenta la dinamicidad de ésta, propiciada por los hiperenlaces [4]. Los buscadores comerciales, además, deben atender a la velocidad o latencia, tiempo que tarda un buscador en recuperar un documento.

La dinamicidad de la búsqueda queda recogida por dos medidas, llamadas innovación (*novelty*) y ruido (*noise*).

- La innovación es la proporción de páginas relevantes recuperadas al ejecutar un hiperenlace que habían sido ignoradas en pasos anteriores.
- El ruido es la proporción de páginas no relevantes recuperadas al hacer efectivo un hiperenlace y que no se mostraban en hiperenlaces anteriores.

Precisión y recubrimiento son criterios de medida estándar en el ámbito de la recuperación de información que tienen que ser acomodados también al caso de la Web. Así, p. ej., el problema del recubrimiento en la Red se asocia a la efectividad de los agentes de búsqueda. La relevancia de la páginas recuperadas dependerá de las páginas localizadas. Por tanto, la evaluación del recubrimiento que facilita un motor de búsquedas no puede hacerse independientemente de la efectividad de su *gatherer*.

3. IMPRECISION EN LAS BÚSQUEDAS WEB.

Como se ha dicho, el modelo de recuperación por excelencia es el modelo léxico con función de emparejamiento exacta. La exigencia de una coincidencia precisa entre pregunta e índice hace presuponer que tanto lo que se desconoce como aquello buscado es expresable de manera precisa. Sin embargo, en las preguntas, en la representación de los posibles documentos a los que aluden y en el igualamiento requerido, hay factores de imprecisión:

- En las preguntas, la imprecisión se asocia a:

- la generalidad o inespecificidad con la que la mayoría de las veces son planteadas, por no tener una idea clara de lo que se quiere buscar
- al hecho de tener que acomodarse a los formatos preestablecidos que imponen las herramientas de búsqueda.

- En la representación de los documentos, la imprecisión se suele asociar a la acción de los humanos, que a veces no estamos seguros de si una palabra ilustra o no y con qué relevancia al documento en cuestión. El uso de técnicas automáticas para generar descripciones hereda esta duda e introduce a menudo una incertidumbre adicional, que proviene de la generalidad de los algoritmos empleados.

- En la función de emparejamiento, exigir un igualamiento preciso es una condición sumamente restrictiva para recuperar documentos relevantes. Hay un amplio consenso en que la relevancia es una cuestión de grado.

Los modelos de emparejamiento preciso excluyen la incertidumbre, pero la permiten. Al tratarla como algo ajeno al modelo, se obliga al usuario a gestionarla como parte del proceso de formulación de las preguntas, aunque de una manera muy restrictiva. Así, la mayoría de los buscadores comerciales proporcionan operadores de proximidad (*near* (para rescatar páginas en las que los términos propuestos se hallen más o menos cerca)) y técnicas para combinar formas de palabras relacionadas por su raíz (*stemming*) usando *wildcards* (comodines, expresiones regulares).

Pero la imprecisión lingüística no se agota en esas opciones para hacer preguntas más laxas. Como se ha

visto, también puede haber imprecisión en el emparejamiento de preguntas e índices. Se han usado modelos vectoriales o probabilísticos en esta tarea, aunque con resultados limitados. El modelo probabilístico, p. ej., tiene que usar índices ponderados basándose en pequeñas muestras o a veces en muestras inexistentes. Se han sugerido técnicas para agrupar términos de frecuencia baja, pero es difícil para palabras muy específicas. Por otra parte, el modelo booleano no supone ningún compromiso con la exactitud; es su semántica la que obliga. Eligiendo otra interpretación de las conectivas (AND, OR o NOT) usadas en las preguntas, se puede obtener un modelo booleano extendido que trate la imprecisión. En esta tarea, el modelo fuzzy ha tenido cierto eco.

Los modelos basados en lógica fuzzy se han empleado en recuperación de información desde la década de los 90. Proponen una función de pertenencia generalizada $F(d_k, t_j)$ para el conjunto de documentos descritos por un índice. Dada una pregunta con i términos, se ordenan los documentos con respecto a esa pregunta combinando los valores de pertenencia para los términos individuales. En la combinación se usó la modalidad de lógica fuzzy más popular; la max-min:

$$\begin{aligned} F(d_k, t_1 \text{ y } t_2) &= \min(F(d_k, t_1), F(d_k, t_2)) \\ F(d_k, t_1 \text{ o } t_2) &= \max(F(d_k, t_1), F(d_k, t_2)) \\ F(d_k, \text{no } t_1) &= 1 - F(d_k, t_1) \end{aligned}$$

Si el valor de la función de pertenencia se restringe a $\{0, 1\}$, el modelo fuzzy equivale a uno booleano. A este paradigma fuzzy se le han presentado objeciones:

- Trata adecuadamente las combinaciones de términos, pero no hace propuesta alguna de cómo se atribuyen pesos a cada uno de ellos.
- Los documentos pueden ordenarse atendiendo sólo al valor de uno de los términos. P. ej., dada una pregunta con los términos $t_1, t_2, \dots, t_n$, un documento que contenga uno de ellos con $F(d_k, t_i) = 0.8$ y todos los demás con $F(d_k, t_j) = 0, i \neq j$, tendrá un número de orden tan alto como un documento en el cual todos los términos tengan a 0.8 como el máximo valor.
- Los modelos basados en lógica fuzzy no han sido implementados y evaluados usando colecciones realistas de documentos.

El papel de la lógica fuzzy en la RAI ha de ser actualizado:

A. En un modelo léxico:

- Las preguntas pueden ser ponderadas dando un criterio para medir la confianza de los términos en ella empleados.

Para Trillas et al. [5] medir la importancia que tiene un término para expresar una idea o concepto es evaluar en qué proporción los elementos designados por ese término exhiben la propiedad que los caracteriza. Sea X un conjunto de objetos que comparten una característica común C nombrada por un término T . Para cualesquiera dos objetos x, y de X , se dirá que se conoce el significado de T cuando se es capaz de decir si x muestra la característica C en mayor o menor grado de lo que lo hace y . Esto se puede simbolizar como $x \leq y$ y se comprueba

que la relación $\leq$ es reflexiva y transitiva; es decir, que es un preorden. Un conjunto preordenado permite definir distintas modalidades de medidas y caracterizar de forma precisa la antigua propuesta de Black de los perfiles de consistencia.

Sea $(\Omega, \leq)$ un conjunto preordenado. Una medida- $\leq$ sobre Ω es cualquier función $m: \Omega \rightarrow [0, 1]$ que satisface:

1. Si α es minimal en $(\Omega, \leq)$, $m(\alpha) = 0$
2. Si ω es maximal en $(\Omega, \leq)$, $m(\omega) = 1$
3. $\forall \alpha, \beta$ si $\alpha \leq \beta$, $m(\alpha) \leq m(\beta)$

Sea X un conjunto no vacío y sea $\Omega = |P(X)|$ y $\leq = \subset$ (inclusión de conjuntos). Sea una función $m': |P(X)| \rightarrow [0, 1]$ que verifica:

- $m(\emptyset) = 0$
- $m(X) = 1$
- Si $A \subset B$, $m(A) \leq m(B)$

Entonces se dice que m' es una medida fuzzy.

Lo característico de una medida fuzzy, respecto a una medida- $\leq$, es que se reemplaza la propiedad de aditividad por una más débil: la monotonicidad con respecto al conjunto inclusión. Las medidas de probabilidad, las medidas de necesidad y posibilidad de Dubois y Prade, las medidas de fuzziness de De Luca y Termini y las medidas- λ de Sugeno son casos especiales de medidas fuzzy y permiten representar la vaguedad de los términos y palabras de forma adecuada a su semántica.

- Los operadores booleanos pueden ser extendidos usando t-normas y t-conormas.

Dados dos predicados P y Q -vagos o clásicos- en un universo U , se pueden conjuntar P y Q o disyuntar P o Q . Conocidos μ_P y μ_Q , la cuestión es cómo obtener $\mu_{P \wedge Q}$ y $\mu_{P \vee Q}$ en función de μ_P y μ_Q . Se prueba que, en condiciones generales,

$$\mu_{P \wedge Q} \leq \min \{\mu_P(x), \mu_Q(x)\} \leq \max \{\mu_P(x), \mu_Q(x)\} \leq \mu_{P \vee Q}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mu_{P \wedge Q}(x) &= T(\mu_P(x), \mu_Q(x)) \\ \mu_{P \vee Q}(x) &= S(\mu_P(x), \mu_Q(x)) \end{aligned}$$

$$T: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad S: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad y \forall y, z \in [0, 1], \\ T(y, z) \leq \min(y, z) \leq \max(y, z) \leq S(y, z).$$

Así como el álgebra de los conjuntos clásicos es el álgebra de Boole, el álgebra de los subconjuntos borrosos dependerá de las propiedades que se le exijan a las funciones $T \leq \min$ y $S \geq \max$

Obsérvese que los subconjuntos clásicos $\emptyset$ y U verifican, para cualquier P ,

$$\begin{aligned} \mu_{P \wedge \emptyset}(x) &\leq \min \{\mu_P(x), \mu_{\emptyset}(x)\} = \min \{\mu_P(x), 0\} = 0 \\ \mu_{P \wedge U}(x) &\leq \max \{\mu_P(x), \mu_U(x)\} = \max \{\mu_P(x), 1\} = 1, \\ \forall x \in U; \end{aligned}$$

por tanto, se cumple: $P \wedge \emptyset = \emptyset$, $P \vee U = U$

Esto obliga, si no se quiere perder el caso clásico, a que las funciones T y S satisfagan las propiedades denotadas entre corchetes, correlato de las propiedades clásicas marcadas entre paréntesis.

$$(1) P \wedge \emptyset = \emptyset, P \vee U = U$$

$$[1] T(y, 0) = 0 \text{ y } S(y, 1) = 1, \forall y \in [0, 1]$$

$$(2) P \wedge U = P, P \vee \emptyset = P$$

$$[2] T(y, 1) = y, S(y, 0) = y, \forall y \in [0, 1]$$

$$(3) P \wedge Q = Q \wedge P, P \vee Q = Q \vee P$$

$$[3] T(y, z) = T(z, y); S(y, z) = S(z, y)$$

Si se requieren las leyes asociativas

$$(4) P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$$

se deberá exigir [4]: la asociatividad de T y S

Trillas et al. han mostrado en [5] que el álgebra de subconjuntos borrosos que verifique las leyes (1), (2), (3), y (4) exige las funciones [1], [2], [3] y [4]. De entre tales funciones, las t-normas y las t-conormas son bien conocidas matemáticamente. De las primeras, las más usadas en subconjuntos borrosos son $T = W, \pi$ y Min

$$W(x, y) = \text{Max}(0, x+y-1)$$

$$\pi(x, y) = x \cdot y$$

$$\text{Min}(x, y) = x \wedge y$$

y verifican $W(x, y) \leq \pi(x, y) \leq \text{Min}(x, y)$.

De las segundas, las más usadas son $S = W^*, \pi^*$ y Max

$$W^*(x, y) = \text{Min}(1, x+y)$$

$$\pi^*(x, y) = x+y-x \cdot y$$

$$\text{Max}(x, y) = x \vee y$$

y verifican $\text{Max} \leq \pi^* \leq W^*$.

Se sigue entonces que Min es la mayor T-norma y que Max es la menor de las T-conormas.

Obsérvese como la multiplicidad de operadores proporciona hasta 9 alternativas para agregar información; flexibilidad adecuada para tratar el carácter no uniforme de la semántica de los predicados vagos.

- Las preguntas pueden expandirse usando un diccionario electrónico de sinónimos que ofrezca no sólo términos sinónimos a los de las preguntas, sino una medida del grado de sinonimia.

Fernández Lanza en [7] ha automatizado el diccionario de sinónimos y antónimos de la lengua española de Blecua (VOX). Para calcular el grado de sinonimia usa medidas de similaridad entre cada una de las entradas del diccionario y las series de términos sinónimos que el *thesaurus* establece. Sea p una palabra con a_i posibles acepciones, $1 \leq i \leq A$ y otra palabra p' con a_j posibles acepciones $1 \leq j \leq A'$. Denote $\text{sin}(p, a_i)$ al conjunto de sinónimos proporcionados por el diccionario para la entrada p en la acepción a_i . El grado de sinonimia gs de p y p' en la acepción a_i es:

$$gs(p, a_i, p') = \max\{i \leq \min(M) \mid \text{sim}[\text{sin}(p, a_i), \text{sin}(p', a_j)]\}, \text{ donde } \text{sim} \text{ es una medida de similaridad (coeficiente Jaccard,...)}$$

El principal problema al usar sinónimos es que se incrementa el recubrimiento y se pierde precisión. En esta propuesta, ese problema queda subsanado al proporcionar información sobre los grados de sinonimia, ya que esto permite usar umbrales y controlar la posible dispersión.

B. En un modelo lógico:

Las preguntas pueden ser consideradas conjeturas y una respuesta todo lo que puede ser deducido de las preguntas de forma no autocontradictoria. En este caso, la extensión de los *thesauri* a diccionarios de antónimos se muestra útil para detectar incompatibilidades de significado.

Dados dos fuzzy sets A y B , donde B representa algún contenido informativo complementario del que nombra A , se dice que A y B pueden ser incompatibles de tres formas diferentes:

- por vacuidad, si $A \cap B = \emptyset$. En un sistema de razonamiento, hay premisas A y $\neg A$.

- por contradictoriedad, si $A \leq B'$. En un sistema de razonamiento, el sistema de premisas incluye A y es posible deducir $\neg A$

- por autocontradicción, si $A \wedge B \leq \neg(A \wedge B)$. En un sistema de razonamiento, hay las premisas A, B y se deduce que no es cierta su conjunción; esto es, que $(A \wedge B)$ son incompatibles. Esta es la menos restrictiva de todas.

En este contexto, Trillas et al. proponen en [5] que, dadas n piezas de información $f_1, \dots, f_n$ sobre $[0, 1]^X$, se dice que son conjuntamente consistentes siempre que $f_1, \dots, f_n$ no sean autocontradictorias; esto es, si $f_1, \dots, f_n \leq (f_1, \dots, f_n)'$. Sea $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ un cuerpo de información conjuntamente consistente. Sea $\gamma \in [0, 1]^X, \gamma \neq f_0, \gamma$ es una conjetura que se puede hacer a partir de F si $f_1, \dots, f_n \leq \gamma$. Es decir, γ es una conjetura sobre F si $f_1, \dots, f_n \in [0, 1]^X$ no es contradictorio con γ ; esto es, $f_1, \dots, f_n \neq \emptyset$ y $f_1, \dots, f_n \wedge \gamma \neq \emptyset$.

Las conjeturas son las preguntas que se pueden hacer sobre los resultados posibles; esto es, el concepto de conjetura posible se corresponde con el de consecuencia maximal. Dado un cuerpo de información $F = \{f_1, \dots, f_n\}$, un elemento $\gamma \in [0, 1]^X$ es una consecuencia maximal de F siempre que $f_1, \dots, f_n \leq \gamma$. El operador ϕ que asigna a cada cuerpo de información todas sus consecuencias maximales es un operador de consecuencias en el sentido de Tarski. $f \leq g$ se lee como f es menos conjeturable que g .

La autocontradictoriedad permite hacer conjeturas a las que se puede dar respuesta. Pero no siempre aparece en el formato $p \wedge q \leq \neg(p \wedge q)$, donde $\neg$ está por la partícula 'no'. El siguiente ejemplo, adaptado de Nute [8], vincula la autocontradictoriedad con el razonamiento no monótono, relevante en aquellos procesos de búsqueda que no se agotan en un paso, sino en varios que pueden reconducir la búsqueda de un documento.

Supongamos que alguien quiere información acerca de la condición religiosa del Sr. Li. Supongamos que el Sr. Li puede pertenecer a una organización atea y a otra creyente, pero no puede ser ateo y creyente al mismo tiempo. El Sr. Li nació en China, país oficialmente ateo, pero emigró a los Estados Unidos y trabaja de predicador en un canal de televisión. Con las siguientes reglas, donde $\rightarrow$ está por una implicación precisa y $\Rightarrow$ por una implicación defectiva o posibilista, se formaliza este estado de hechos:

1. $\text{creyente}(X) \Leftarrow \text{predicador}(X, \text{televisión})$.
2. $\neg \text{creyente}(X) \Leftarrow \text{ateo}(X)$.
3. $\text{ateo}(X) \Leftarrow \text{nace}(X, \text{china})$.
4. $\neg \text{ateo} \Leftarrow \text{creyente}(X)$.
5. $\text{predicador}(\text{li}, \text{televisión})$.
6. $\text{nace}(\text{li}, \text{china})$.

Las reglas clásicas 2 y 4 muestran la incompatibilidad de ser ateo y creyente: una representa la contraposición del condicional de la otra. Si Li fuese ateo no sería creyente y viceversa. Pero una ojeada al sistema de reglas y premisas invita a poder decir algo: por ser actualmente predicador, parece que Li podría ser creyente con alguna

plausibilidad. Si nos preguntásemos entonces por una conclusión plausible, no necesaria, habría que mirar hacia las reglas defectivas (1, 3). Con los hechos 5 y 6, el razonamiento para perseguir algún tipo de conclusión podría ser así: Li predica en una televisión, así que hay evidencia de que puede ser creyente. Pero la regla que usamos para derivar esta conclusión es defectiva, así que hay que estar seguro de que no sea rebatida por otra regla. Encontramos una regla competidora que dice que no es creyente si es ateo. Esto no afectaría la regla anterior salvo en el caso de que se pudiese mostrar que Li es ateo; pero, en efecto, Li nació en China, así que también existe cierta probabilidad de que sea ateo. Esta regla es también defectiva, y tiene una regla competidora que dice que no es ateo si es creyente. Por tanto, para demostrar que es creyente hay que probar que es creyente, cayendo en un razonamiento circular.

Para salir de ese bucle habría que proceder en dos pasos. Primero, definir cierto orden de prioridad en las reglas defectivas: a la hora de diagnosticar la creencia religiosa del Sr. Li parece más relevante dónde trabaja que donde nació: la regla 1 sería más relevante que la 3. Segundo, evitar el bucle suavizando la negación que representan las cláusulas 2 y 4, en las que se vincula con sendas reglas el carácter de ser creyente a la negación de ser ateo y viceversa. Al declarar que 'ateo' y 'creyente' son incompatibles, no contradictorios, se quiere expresar que una persona puede evolucionar a lo largo de su vida de un estado de creencia a otro, si bien sería absolutamente imposible tener las dos creencias al mismo tiempo. En ese caso, se concluiría que Li es posiblemente, dada la predominancia de la regla 1, creyente.

Un diccionario electrónico de antónimos podría efectuar la labor de localizar conclusiones incompatibles (ateo/creyente), donde uno de los términos no tiene el formato 'no T'. Otros test derivados del tratamiento del lenguaje natural con gramáticas de Chomsky, permitirían detectar pares de palabras autocontradictorias localizando prefijos como in- (formal/in-formal; satisfecho/in-satisfecho), de- (formado/deformado), -des (motivado/desmotivado) etc. que indicasen algún sentido de negación.

4. PERSPECTIVAS DE FUTURO.

Según Tim Barners-Lee, el futuro pasa por la Web semántica: se trata de dotar a la Red de lógica y ontologías para que, usando reglas de inferencia y categorización de conceptos, sea capaz de modelar elecciones racionales, a fin de responder de manera adecuada a las preguntas.

En esta tarea deberán cooperar varias lógicas; entre las que citamos: a) la lógica fuzzy para tratar, de modo avanzado, la gradualidad de la relevancia; b) la lógica no monótona, para expresar la revisión de objetivos en el proceso de búsqueda, c) la lógica erotética, para modelar una cierta capacidad de diálogo y d) la lógica abductiva, para que la recuperación se siga del análisis de los objetivos del usuario, abducidos de la secuencia de sus preguntas.

Mientras llega la Web semántica, pueden producirse mejoras en los buscadores actuales usando técnicas de procesamiento del lenguaje natural:

- *Identificación de frases.* Las frases posibilitan indexaciones más precisas que la que se hacen con términos; pero sólo recientemente se han empezado a desarrollar técnicas que permiten implementarlas para mejorar la eficiencia.

- *Desambiguación de sentidos.* Útil para reducir la incertidumbre asociada en el igualamiento de preguntas e índices y, por tanto, en recuperación inútil o redundante de información.

- *Diccionarios conceptuales.* Archivos que definen formalmente la relación entre los términos de una página. Ayudan a jerarquizar conceptos y a establecer relaciones entre ellos.

Si bien es plausible pensar que un modelo avanzado de recuperación mejorará la precisión y el recubrimiento, ha de ser sometido a un test real y a la prueba de la latencia, al menos si se pretende su implementación en un buscador comercial. En ese caso, se deberá cuidar que las nuevas funciones mejoren la cantidad y calidad de las páginas recuperadas sin perjudicar el tiempo de búsqueda. Dado que todo aquello que penalice más de 1 segundo una búsqueda se considera en la frontera de lo admisible, se comprenderá la dificultad de esta tarea.

La Red es un sistema retiforme y descentralizado en el que es muy difícil proponer soluciones válidas por mucho tiempo. Crece a un ritmo vertiginoso con una libertad extraordinaria. La mejora de los modelos de recuperación es un reto difícil, pero apasionante.

REFERENCIAS

- [1] Yao, A. & Abrams, M., 'Searching for Documents on the Web', en Abrams, A., (ed.), *World Wide Web. Beyond the Basics*. Prentice-Hall, 1998.
- [2] Lucas, W., 'Search Engines, Relevancy, and the World Wide Web', in Goyal Chin, A. (ed.), *Text Database & Document Management: Theory and Practice*. Idea Group Pub., 2001.
- [3] Van Rijsbergen, C. J., 'A non-classical logic for information retrieval', in Spark-Jones, K. & Willett, P. (eds.), *Readings in Information Retrieval*. Morgan Kaufman, 1997.
- [4] Agosti, M. & Melucci, M., 'Information Retrieval on the Web', ESSIR 2000, LNCS, 1980, pp. 242-285. Springer-verlag, 2000.
- [5] Trillas, E. & Pradera, A. 'A reflection on rationality, guessing and measuring', unpublished, to be presented at the *IPMU Conference 2002*.
- [6] Trillas, E. - Alsina, C y Terricabras, J. M., *Introducción a la lógica borrosa*. Ariel, 1995.
- [7] Fernández Lanza, S. *Una contribución al procesamiento automático de la sinonimia utilizando Prolog*. Universidad de Santiago de Compostela, 2001. (Tesis Doctoral en CD-Rom)
- [8] Nute, D. 'Defeasible Prolog', in Nute, D. & Covington, M. & Vellino, A., *Prolog Programming in Depth*. Addison Wesley, 1997.

LA LÓGICA DIFUSA EN EL PROCESO DE RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN

Fernando Berzal, María J. Martín-Bautista*, María-Amparo Vila

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

C/Periodista Daniel Saucedo s/n 18071

Universidad de Granada

{fberzal, mbautis, vila@decsai.ugr.es}

Ignacio J. Blanco

Dpto. Lenguajes y Computación

Ctra. Sacramento s/n 04020

La Cañada de San Urbano

Universidad de Almería

iblanco@ual.es

Resumen

En este trabajo, se presenta un breve estudio sobre el papel de la lógica difusa en el proceso de recuperación de información, especialmente en la retroalimentación. La retroalimentación se puede dar de forma explícita o implícita dependiendo del tipo de comunicación existente entre el usuario y el sistema. El resultado de la iteración de este proceso da lugar a la caracterización de usuario cuya representación física es el perfil de usuario, en el que la lógica difusa juega un papel muy importante.

Palabras Clave: Retroalimentación, Internet, Lógica difusa, Perfil de usuario.

1 INTRODUCCIÓN

La interacción del usuario con Sistemas de Recuperación de Información (SRIs) tales como Internet ponen de manifiesto la necesidad del conocimiento de las necesidades del usuario. La recuperación de información es un concepto muy amplio que implica diferentes procesos y elementos de información. En la literatura, ha sido definida como:

"El proceso que trata la representación, almacenamiento, organización y acceso de elementos de información", [10].

Esta definición, aunque completa, no incluye de manera explícita uno de los elementos que más han adquirido protagonismo con la llegada de las nuevas tecnologías e Internet: el usuario. Karen Spark Jones, define explícitamente la interacción del usuario con el sistema en [11] donde afirma:

"La recuperación trata con dos elementos 'innecesarios', la necesidad de información que el usuario tiene y el contenido de la información que el sistema le proporciona, y la relación entre ambas, reflejada en el grado en el que un documento es relevante al usuario".

Este grado de relevancia está íntimamente relacionado con la subjetividad del usuario, ya que SRI debe proporcionar, de algún modo, la adecuación de su respuesta a las preferencias del mismo. El usuario puede no estar satisfecho con la respuesta del sistema y puede manifestarlo explícita o implícitamente, por ejemplo evaluando un documento como no interesante o simplemente no accediendo a él, respectivamente. Este proceso se denomina *retroalimentación de relevancia*. Cuando este proceso tiene lugar, el conocimiento del usuario aumenta y es necesario almacenar dicha información para mejorar la respuesta del sistema en futuros accesos del usuario. Dicha caracterización del usuario se almacena en el denominado *perfil de usuario*.

La lógica difusa puede utilizarse como herramienta para mejorar los procesos de recuperación de información. Mediante pesos con representación difusa asociados a los términos (palabras) que forman documentos y consultas de usuarios que pueden significar tanto presencia del término en el documento como importancia del término en la consulta [2]. Sin embargo, no se ha profundizado tanto en el uso de la lógica difusa en los procesos que están más cercanos al usuario: la retroalimentación de relevancia y la construcción de perfiles de usuario. En este trabajo, daremos una visión general del uso de la lógica difusa en la recuperación de información, y aportaremos nuevas ideas sobre su incorporación a los procesos de retroalimentación de relevancia y construcción de perfiles de usuario.

* Autor para correspondencia

2 EL PROCESO DE RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN

Aunque tradicionalmente se pudiera pensar que en SRI consiste sólo en una formulación de la necesidad de información del usuario y la búsqueda de documentos relacionadas con la misma, hay que tener en cuenta estos nuevos elementos para obtener un SRI eficiente. Podemos distinguir, por lo tanto, cinco procesos diferentes en la recuperación de información:

- El proceso de *indexación*, donde se genera la representación de los documentos
- El proceso de *consulta*, donde el usuario expresa sus preferencias en lenguaje natural o mediante términos, que pueden estar conectados mediante operadores lógicos.
- El proceso de *evaluación*, donde se realiza una comparación de la representación de los documentos con la consulta del usuario para determinar la relevancia de los mismos.
- El proceso de *retroalimentación* de relevancia, donde el usuario, de forma implícita o explícita expresa su satisfacción respecto al conjunto de documentos recuperado.
- El proceso de construcción y actualización del *perfil de usuario*, donde los términos que representan las preferencias del usuario se almacenan con la finalidad de mejorar el comportamiento del SRI en futuros accesos del usuario al sistema.

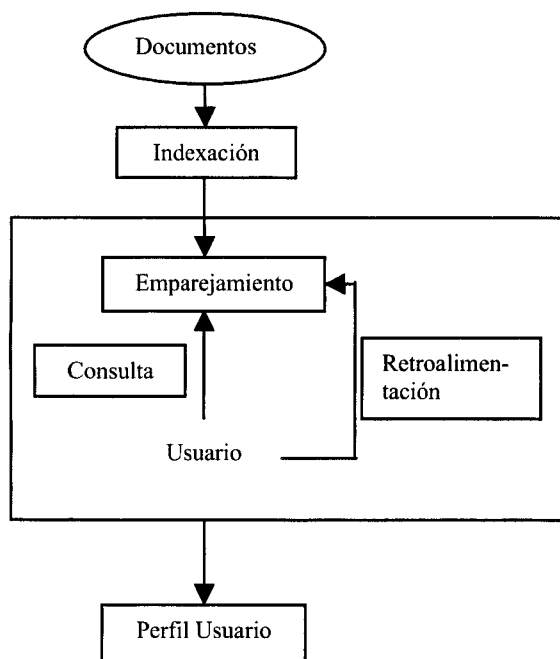


Figura 1: Procesos de Recuperación de Información.

3 LA LÓGICA DIFUSA EN LOS SRIs

Los SRIs se apoyan básicamente en alguno de los siguientes modelos: el modelo de espacio vectorial, el modelo probabilístico y el modelo booleano. Inicialmente, en todos estos modelos los términos de indexación de los documentos y los términos de las consultas se representaban y evaluaban de forma booleana mediante valores de presencia/ausencia.

La extensión de estos sistemas viene dada por la asociación de valores o pesos numéricos a estos términos. Sin embargo, la falta de flexibilidad para las operaciones que manejan estos pesos en los modelos tradicionales, y la posibilidad de utilizar etiquetas lingüísticas para la interacción del SRI con el usuario son las principales razones para el uso de la lógica difusa en la recuperación de información.

Sea $D = \{d_1, \dots, d_m\}$ un conjunto de documentos y $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ un conjunto de términos, un IRS difuso se define mediante una función F como se expresa a continuación:

$$F : D \times T \rightarrow [0,1] \\ \forall d \in D, t \in T \quad F(d, t) = \mu_d(t) \quad (1)$$

En los SRIs tradicionales, las medidas para calcular la efectividad de los sistemas están basadas en comparaciones sobre los documentos recuperados y los documentos relevantes. La extensión de estas medidas en el modelo difuso considera no solo la propiedad de relevancia de los documentos en sí, sino también la comparación entre el sistema y el usuario de la evaluación de los documentos. Es en este punto cuando aparece el concepto de ordenación de los documentos por su relevancia y, de forma adicional, aparecen también medidas basadas en la ordenación que tanto el sistema como el usuario hacen de un conjunto de documentos. Esto añade flexibilidad al análisis del comportamiento del sistema, en términos de bondad de clasificación de los documentos en relevantes y no relevantes ya que, además de poder devolver una lista de documentos ordenados con distintos grados de relevancia, se puede comparar la ordenación del sistema con la del usuario también de forma flexible.

La computación lingüística también se ha utilizado para el manejo de imprecisión en los SRIs difusos. En [3] se presenta una extensión del modelo booleano mediante etiquetas lingüísticas para determinar la relevancia de los documentos. En [2], se propone la posibilidad de que el usuario asigne grados de importancia mediante términos lingüísticos a los términos de la consulta. Un estudio posterior se puede encontrar en [4], donde un enfoque lingüístico ordinal difuso permite al sistema controlar el

nivel de granularidad de la incertidumbre en el proceso de emparejamiento.

Estos enfoques anteriores están todos dedicados a procesos de indexación, consulta y emparejamiento, donde, excepto en el caso de los grados de importancia asignados a la consulta, el resto de valores difusos se obtienen automáticamente y no hay interacción con el usuario. Queda por determinar el uso de la lógica difusa en los procesos de retroalimentación de relevancia y perfiles de usuario, donde la interacción con el usuario y su caracterización. Algunas ideas generales sobre dicho uso se presenta en las siguientes secciones.

4 LA LÓGICA DIFUSA EN EL PROCESO DE RETROALIMENTACIÓN DE USUARIO

La retroalimentación de usuario, según hemos explicado en la primera sección, es el proceso mediante el cual el usuario expresa su opinión sobre la respuesta que el sistema ha dado a una determinada consulta. Sin embargo, aunque se entiende que esta opinión sobre el usuario debe ser explícita, es decir, evaluar alguno de los documentos que el sistema ha recuperado como respuesta a la consulta, no tiene por qué ser necesariamente así. Hay muchos otros parámetros que nos dan información sobre las preferencias del usuario sobre una lista de documentos, especialmente en Internet, donde se puede analizar el comportamiento de un determinado navegante en la/s página/s de respuesta a una consulta.

Desde este punto de vista, podemos clasificar la retroalimentación de usuario en *explícita* e *implícita* del siguiente modo:

4.1. RETROALIMENTACIÓN EXPLÍCITA

Este tipo de retroalimentación se basa en la evaluación u opinión del usuario sobre la respuesta que recibe del sistema ante una determinada consulta.

Esta evaluación del usuario se puede utilizar para que el sistema mejore la clasificación de los documentos y para construir y mantener el perfil del usuario con las necesidades informativas del usuario. A continuación se recogen las dos formas de realizar este tipo de retroalimentación:

4.1.1. Selección de términos para modificar la consulta

Esta forma de retroalimentación se da en los procesos de expansión de consultas, donde los términos para añadir a una consulta que no ha sido inicialmente satisfactoria y que se quiere mejorar, se extraen de los documentos considerados más relevantes del conjunto inicial de

documentos recuperados. La adición de términos a la consulta se puede hacer de forma automática o semi-automática, dependiendo si el usuario interviene en el proceso o no. Si los términos se añaden sin preguntar al usuario, la expansión será automática. En cambio, si los términos candidatos a añadir a la consulta son mostrados al usuario, estamos ante un método semi-automatizado de expansión de consultas donde el usuario puede elegir qué términos añadir a la consulta.

Los pesos de los términos que se añaden pueden ser calculados automáticamente (varios posibles esquemas se pueden encontrar en [9]) y pueden ser difusos si se ha considerado el esquema difuso de representación de los términos en los documentos, ya que el peso con el que se añaden los términos en la consulta están basados en dicho esquema.

Adicionalmente a los pesos asociados a los términos provenientes de la presencia de dichos términos en los documentos, el usuario puede asignar un grado de importancia tanto a los términos que aparecen originalmente en la consulta como los provenientes de la lista de candidatos de términos a añadir a la consulta. Dicho grado también es conveniente que se exprese lingüísticamente, ya que para el usuario es difícil establecer un grado numérico. Algunas ideas avanzadas sobre el tratamiento de este tipo de grados se encuentra en [2].

4.1.2. Evaluación de documentos del conjunto recuperado

El usuario puede expresar su opinión sobre los documentos que se han recuperado en respuesta a una primera consulta. De esta forma, el sistema puede buscar documentos similares a los evaluados como relevantes por el usuario. Una explicación más detallada del esta forma de retroalimentación se puede consultar en [6], donde el autor recomienda, además, que el proceso de retroalimentación de usuario no se debe de iterar más de 3 o 4 veces. La razón de esta limitación se debe completamente a la disposición del usuario que, no solamente se siente desbordado por la cantidad de documentos que el sistema le puede llegar a devolver (especialmente en Internet), y por la frustración cuando la respuesta no corresponde a sus necesidades de información, sino que la mayoría de las veces no está dispuesto a colaborar con el sistema para mejorar el conjunto de respuesta.

Para facilitar esta comunicación con el usuario, el uso de la lógica difusa y el uso de etiquetas juegan un papel importante. En el caso de las etiquetas en la retroalimentación de relevancia por evaluación de documentos, hay que tener en cuenta que la abstracción lingüística se realiza a nivel de documento y no a nivel de

término, como ocurre en el resto de los procesos. El sistema muestra al usuario una lista de documentos ordenados por grado de relevancia, y el usuario puede realizar su propia evaluación de los mismos documentos.

Sea $U = \{u_1, \dots, u_p\}$ la evaluación del usuario del conjunto de documentos recuperados $D' = \{d'_1, \dots, d'_p\}$. Y sea $S = \{s_1, \dots, s_p\}$ la evaluación que el sistema hace de estos mismos documentos. La primera interacción del usuario con el sistema se realiza cuando el sistema le muestra al usuario la lista ordenada de documentos D' junto con la evaluación S que el sistema le da a los mismos. Inicialmente, la evaluación s_i del documento d'_i es un valor numérico reflejando la relevancia del documento. Parece razonable utilizar etiquetas que enmascaren la naturaleza numérica de la evaluación para que la interfaz sea más amigable. Sin embargo, las etiquetas no son del todo útiles si no se acompaña de algún tipo de ordenación adicional, ya que los documentos devueltos en los diez primeros puestos de relevancia pertenecerán al mismo grupo, con etiqueta *excelente* o *acceptable*, en el caso de que el conjunto de etiquetas considerado sea (*pobre*, *acceptable*, *excelente*). Esto nos lleva, inicialmente, a mostrar la lista ordenada de los documentos recuperados junto con su valor de evaluación del sistema en forma numérica.

Una vez que el usuario ha recibido la lista de documentos recuperados, el proceso de retroalimentación comienza, y el usuario evalúa alguno o todos los documentos de la lista. La evaluación U del usuario se podría expresar con pesos numéricos difusos ó con términos lingüísticos. La interacción del usuario con el sistema podría llevarnos a pensar, en un primer momento, que las etiquetas facilitan siempre más la comunicación con el usuario que un valor numérico, sobre todo cuando tiene que ser determinado por el propio usuario. Sin embargo, ninguna de estas soluciones son satisfactorias para caracterizar el comportamiento del usuario en el proceso de retroalimentación.

Por un lado, los pesos numéricos difusos fuerzan al usuario a seleccionar un número entre 0 y 1 para expresar el grado exacto de satisfacción con un documento. Sin embargo, el usuario no es capaz de distinguir entre diez valores diferentes de relevancia. Si el usuario piensa que un documento es *acceptable*, debe dar un valor sobre 0.5, pero, ¿puede el usuario distinguir entre 0.5, 0.6 y 0.4? Si el usuario piensa en palabras para expresar su evaluación de los documentos, el sistema debería de ofrecerle esa posibilidad.

Por otro lado, supongamos que el sistema tiene la capacidad de facilitar la comunicación con el usuario mediante el uso de términos lingüísticos en el proceso de

retroalimentación por parte del usuario. El sistema podría ofrecer al usuario que escogiera una etiqueta para evaluar un documento entre el conjunto de etiquetas (*pobre*, *acceptable*, *excelente*).

Sin embargo, el uso de etiquetas puede presentar diferentes problemas para el usuario a la hora de evaluar documentos. Por ejemplo, supongamos que el sistema recupera tres documentos d'_1, d'_2, d'_3 . El usuario piensa que d'_1 es mejor que d'_2 , que a su vez es mejor que d'_3 . No obstante, el usuario considera los tres documentos de su interés, así que les asigna la misma etiqueta de *acceptable* a todos, y la información sobre las preferencias entre los mismos se pierde.

El usuario podría asignar un valor adicional para determinar qué documento es el mejor. Es más, la selección de documentos mediante una relación de preferencia sería más adecuado para tratar con esta información en lugar de una evaluación lingüística.

Preferencias

Supongamos que un usuario quiere clasificar dos documentos d'_1 y d'_2 con la misma etiqueta, pero el usuario prefiere d'_1 a d'_2 . El sistema debe facilitar al usuario con un mecanismo para establecer las preferencias entre los documentos.

Una relación de preferencia $\mathcal{R}^+ \subseteq D \times D$ se define como la preferencia de un documento d'_i sobre otro d'_j , $\forall d'_i, d'_j: (d'_i, d'_j) \in \mathcal{R}^+ \Leftrightarrow i < j$. Las características de una relación de este tipo, así como una función para medir la efectividad de la recuperación basada en las preferencias de documentos dada por el usuario se puede encontrar en [12]. En estos enfoques, la relación de preferencia entre los documentos recuperados implica la comparación de todos los documentos entre sí, es decir, p^2 comparaciones para un conjunto de p documentos recuperados.

Para evitar tantas comparaciones, podemos pensar en el orden de preferencia natural que tienen las etiquetas. Para un conjunto de etiquetas {*pobre*, *acceptable*, *excelente*} es obvio que los documentos etiquetados como *excelente* son preferidos por el usuario a documentos etiquetados como *acceptable*, y estos últimos preferidos sobre los documentos etiquetados como *pobre*. Por lo tanto, la especificación de las preferencias entre documentos con diferentes etiquetas no es necesaria, puesto que el orden de las etiquetas tiene ya de por sí un orden implícito.

Basándonos en este razonamiento, podemos establecer la relación de preferencia entre los documentos recuperados a dos niveles:

- Un primer nivel, en el que el usuario asigna una etiqueta de relevancia al documento
- Un segundo nivel, en el que el usuario especifica una relación de preferencia entre los documentos que se encuentran dentro de un grupo con la misma etiqueta.

El resultado de la evaluación de los documentos por el usuario será, por tanto, un conjunto de clases identificadas mediante etiquetas lingüísticas donde se define una función de preferencia que determina la relevancia del documento con respecto a los otros en la misma clase. De este modo, el número de comparaciones entre los documentos se reduce. Es más, el usuario no tiene que ordenar los documentos que se encuentran en los grupos de etiquetados con documentos pocos interesantes, por lo que el número de comparaciones pasa a estar en función del número de documentos que se encuentren en los grupos etiquetados como interesantes para el usuario, y que este decida evaluar.

En cuanto a las medidas de efectividad en este caso, la ordenación que el usuario da de los documentos se debe de comparar con la que el sistema da. Si consideramos Δ como la ordenación del conjunto de documentos D' recuperado por el sistema, se puede aplicar la siguiente expresión [1]:

$$R_{norm}(\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{S^+ - S^-}{S_{max}^+} \right) \quad (2)$$

donde S^+ y S^- representan el número de pares de documentos tales que (u_i, s_i) , $u_i \in U, s_i \in S, 1 \leq i \leq p$, para los cuales el sistema ha ordenado el documento en términos de relevancia por encima (o por debajo, respectivamente), que la ordenación dada por el usuario para ese mismo documento. S_{max}^+ representa el máximo valor posible de S^+ .

Por lo tanto, la efectividad del sistema no se basa tanto en el grado de relevancia asignado por el usuario o por el sistema al conjunto de documentos recuperados, sino en las coincidencias de los documentos para ocupar los mismos puestos en las ordenaciones de ambos. Medidas adicionales para calcular la similitud entre las ordenaciones se pueden encontrar en [5], [12]. Estas medidas para comparar ordenaciones directamente se pueden utilizar también para determinar la equivalencia en las ordenaciones de los documentos de las medidas clásicas de recuperación (exhaustividad y precisión). Un estudio más amplio de las medidas de recuperación desde el punto de vista de la ordenación de documentos se puede encontrar en [6].

4.2. RETROALIMENTACIÓN IMPLÍCITA

Este tipo de retroalimentación es especialmente fácil de obtener en Internet, donde el rastro del usuario a través de enlaces y botones pulsados se puede seguir con relativa facilidad. Desde el punto de vista de recuperación de información, hechos tales como que el usuario deje de pinchar en un enlace para visualizar un primer documento o imprima un determinado segundo documento da información al sistema sobre las preferencias del usuario sobre esos elementos, probablemente, poco interesante en el primer caso, y más interesante en el segundo. Sin embargo, el análisis de estos datos tanto para mejorar el sistema de recuperación como desde el punto de vista empresarial para saber cuáles son las preferencias de los consumidores, necesita de otra serie de herramientas además de la lógica difusa, tales como la minería de datos. Un modelo para la estructuración de la información obtenida mediante retroalimentación implícita y herramientas a utilizar para su explotación se pueden consultar en [8].

El uso de la lógica difusa en este tipo de retroalimentación es también importante, ya que sobre todo en el caso de las aplicaciones para explotación empresarial, uno de los principales parámetros para tener conocimiento sobre el usuario que está al otro lado es el tiempo que el mismo emplea navegando por una determinada página. Otras variables además del tiempo, susceptibles de ser modeladas mediante lógica difusa son las referentes a las características demográficas de los usuarios, tales como edad, peso, altura, etc., que pueden resultar muy interesantes para empresas que se dediquen, por ejemplo a productos dietéticos y necesiten conocer las características físicas de sus navegantes para considerar la posibilidad de introducir publicidad de determinados productos en las páginas más visitadas por un determinado usuario.

5 LA LÓGICA DIFUSA EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE PERFILES DE USUARIO

Los perfiles de usuario se pueden definir mediante una función difusa del mismo modo que la fase de recuperación, pero en lugar de establecer la función entre documentos y términos, se realiza entre perfiles y términos. De este modo, un perfil consiste en un conjunto de término y un peso asociado que indica el interés del usuario en los temas relacionados con ese término. Estos términos se pueden extraer a partir de consultas previas y de términos de indexación de los documentos relevantes para dichas consultas. Cuando estamos tratando con un SRI difuso, parece razonable que cada término del perfil lleve asociado un valor difuso para indicar el interés del usuario entorno a dicho término.

Dado un conjunto de perfiles de usuario, $Z = \{z_1, \dots, z_d\}$, siendo d el número de perfiles y $z_i = \{t'_{i1}, \dots, t'_{ia}\}$, $t'_{ij} \in T$, $1 \leq j \leq a$, siendo a el número de términos en el perfil, podemos definir una función:

$$G: Z \times T \rightarrow [0,1] \\ \forall z \in Z, t \in T \quad G(z, t) = \mu_z(t) \quad (3)$$

Los pesos difusos de los perfiles se consideran numéricos, puesto que en principio, únicamente el sistema va a tratar con ellos para mejorar futuras respuestas a consultas del usuario.

6 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo, se ha dado una visión general del uso de la lógica difusa en las diferentes fases de la recuperación de información, haciendo especial hincapié en dos fases: la retroalimentación de usuario y la construcción de perfiles de usuario, que adquieren especial importancia en sistemas de recuperación tales como Internet.

En el caso de la retroalimentación explícita en la evaluación de documentos, hemos propuesto un sistema de evaluación a dos niveles. Un primer nivel en el que se compara de la clase de relevancia dada por el usuario con la determinada por el sistema para un conjunto de documentos. Y un segundo nivel en el que la comparación se realiza dentro de cada clase para las clases relevantes, mediante el cálculo de similitud entre ordenaciones.

Una formalización de este esquema de retroalimentación y una comparación entre las diferentes medidas de similitud entre la ordenación del sistema y la del usuario son las dos principales líneas de investigación para el futuro.

Referencias

- [1] P. Bollman y V.V. Raghavan. On the Delusiveness of Adapting a Common Space for Modeling IR Objects: Are Queries Documents?. *Journal of the American Society for Information Science*, 44(10), Pág. 579-587, 1993.
- [2] G. Bordogna, P. Carrara and G. Pasi. Fuzzy Approaches to Extend Boolean Information Retrieval. En Bosc. P y Kacprzyk, J. *Fuzziness in Database Management Systems*, Germany: Physica-Verlag, Pág. 231-274, 1995.
- [3] G. Bordogna y G. Pasi. A Fuzzy Linguistic Approach Generalising Boolean Information Retrieval: A Model

and its Evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44(2), Pág. 70-82, 1993.

- [4] E. Herrera-Viedma. Modeling the retrieval process for an Information Retrieval System using an ordinal fuzzy linguistic approach. *Journal of the American Society for Information Science*, 52(6), Pág. 460-475, 1991.
- [5] H.P. Frei, y P. Schäuble. Determining the effectiveness of retrieval algorithms. *Information Processing and Management*, 27(273), Pág. 153-164, 1991.
- [6] R.R. Korfhage. *Information Storage and Retrieval*, Canada: Wiley & Sons, 1997.
- [7] R.M. Losee. When Information Retrieval Measures Agree About the Relative Quality of Document Rankings. *Journal of the American Society for Information Science*, 51(9), Pág. 834-840, 2000.
- [8] M.J. Martín-Bautista, D.H. Kraft, M.A. Vila, J. Chen, J. Cruz. User profiles and fuzzy logic for web retrieval issues. *Journal of Soft Computing* 2002. (aceptado)
- [9] G. Salton, C. Buckley. Term-weighting approaches in automatic text retrieval. *Information Processing and Management*, vol. 24, no. 5, pp. 513-523, 1988
- [10] G. Salton y M.J. McGill. *Introduction to Modern Information Retrieval*, New York: McGrawHill, 1983.
- [11] K.A. Spark Jones. Information Retrieval and Artificial Intelligence. *Artificial Intelligence*, 114, Pág. 257-281, 1999.
- [12] Y.Y. Yao. Measuring Retrieval Effectiveness Based on User Preference of Documents. *Journal of the American Society for Information Science*, 46(2), Pág. 133-145, 1995.

A SPANISH e-DICTIONARY OF SYNONYMS AS A FUZZY TOOL FOR INFORMATION RETRIEVAL

Santiago Fernández Lanza
Depto. de Lógica y Filosofía Moral
Univ. de Santiago de Compostela
Campus Sur s/n
15782 - Santiago de Compostela
Spain
sflanza@usc.es

Jorge Graña Gil
Depto. de Computación
Univ. de La Coruña
Campus de Elviña s/n
15071 - La Coruña
Spain
grana@udc.es

Alejandro Sobrino Cerdeiriña
Depto. de Lógica y Filosofía Moral
Univ. de Santiago de Compostela
Campus Sur s/n
15782 - Santiago de Compostela
Spain
lflgalex@usc.es

Abstract

We start by analyzing the role of imprecision in information retrieval in the Web, some theoretical contributions for managing this problem and its presence in search engines, with special emphasis on the use of thesaurus in order to increase the relevance of the documents retrieved. We then present a Spanish electronic dictionary of synonyms that compute degrees of synonymy, and an efficient implementation of it by using deterministic acyclic finite-state automata. We conclude by conjecturing that the use of this e-dictionary in a Spanish web searcher will increase precision and recall without diminishing latency.

Keywords: Dictionary of synonyms, finite-state automata, fuzzy information retrieval.

1 IMPRECISION AND INFORMATION RETRIEVAL ON THE WEB

Information retrieval is perhaps as old as the existence of libraries, institutions where information is stored to be consulted. In order to improve the efficiency of these consultations, librarians classify the information using some form of indexation system (alphabetical index of authors, subject index, etc.), which makes it quick and easy to access the documents.

At present, information retrieval is automatic and this is largely due to the success of computer technology. Computers have made digital libraries possible, where information is stored in electronic devices. In these new libraries, information is not always managed by the normative criteria of librarians. Perhaps the largest digital library that exists at the moment is the Web, which has an enormous amount of documents in

every possible style or format. The Dublin Core metadata suggest that every web page should define tags relative to its form and content, but this initiative has not met with universal success. Moreover, in the Web a lot of redundant (the number of repeated pages is estimated at 20% of the whole), false and out-of-date information is stored. Consequently, there are a lot of data, but finding useful and interesting information is quite a complicated task.

In order to help in this task, Web searchers appeared. They belong to two main different classes, *directories* or *search engines*, although today both of them provide mixed services. For example, YAHOO! offers the search engine of GOOGLE and GOOGLE provides access to the OPEN DIRECTORY PROJECT classification.

In the Web, the most commonly used search process is a lexical-grammatical one, based on the possible matching between the terms of a query and some word of the index in the database of the searcher, which is linked to a document. Moreover, there are other models: the logical one, for which retrieval is a synonym of infer; or the cognitive, in which retrieval is the simulation of the behaviour of a human agent searching for information. What follows refers only to lexical model.

There are three main ways of matching in the lexical paradigm: exact, vector space and probabilistic models. Exact matching is the most common and widely implemented in the Web searchers, because it is simple and offers reasonably good results. In exact matching a query is reduced to a set of terms, the document to a set of keywords from the index and the matching is the identity between a query term and an index term. But the relevance of a page rescued as the answer to a query is not always a matter of yes or no. If it were, it would give very poor results. In most cases, it is a question of degree, largely due to the uncertainty present in the query or in the document. In queries, not all the terms may have the same weight when it comes to expressing what we are searching for. In

the index, not all the words represent the document with equal strength. According to this, other kinds of matching functions have been proposed: the vector model and the probabilistic model are the best-known ones. They represent good theoretical improvements, but are criticized: estimations of probabilities about the order of documents in a way that will come close to user judgments about relevance are often based on the absence of any examples of relevant documents.

It should be noted that the exact matching model does not exclude the treatment of degrees of relevance, only its semantic limits to do so. An extended boolean model makes it possible to use it as an approximate concept, not an exact one. Of all the extensions of the boolean model, the fuzzy model has obtained some credit [6]. A fuzzy model uses a generalized membership function $F(d_k, t_j)$ representing the set of documents described by an index. Given a query with i terms, it is possible to order those documents with respect to the query by combining the membership values of the individual terms. The most popular modality of fuzzy logic that has been used is the max-min logic:

$$\begin{aligned} F(d_k, t_1 \wedge t_2) &= \min(F(d_k, t_1), F(d_k, t_2)) \\ F(d_k, t_1 \vee t_2) &= \max(F(d_k, t_1), F(d_k, t_2)) \\ F(d_k, \neg t_1) &= 1 - F(d_k, t_1) \end{aligned}$$

If the membership function is in $\{0, 1\}$, the fuzzy model is equivalent to a boolean model.

Some objections have been made to fuzzy models: they do not offer a criterion for assigning weights to the query terms, and it is possible to classify documents with the same ranking using either many or only a few query terms. Trillas' studies in [5] on:

- the formalization of *Black's consistence profiles* with fuzzy logic techniques, allowing us to approximately measure the role of each word in a query,
- and the study of *t-norm and t-conorm families* that allow us to aggregate terms of fuzzy meaning, whilst still respecting their semantics,

are solutions to these objections and contribute to improving the fuzzy model.

The evaluation of a retrieval system is based on three parameters:

- Precision: ratio of relevant documents in the set of retrieved documents.
- Recall: ratio of retrieved documents in the set of relevant documents.

- Latency: speed and scalability of retrieval.

The introduction of new kinds of matching modelling leads to an improvement in precision and recall ratios, but we must take care to test these models with realistic collections of documents and to ensure that latency does not decrease, at least if we want to implement it in a real searcher. These are the main problems of fuzzy models. Latency is a critical factor since everything that delays a search for more than one second must be rejected.

Even though real searchers are based on non-extended boolean matching models whose semantics do not admit imprecision, they use predefined resources that introduce certain fuzziness or generality in the queries. Thus, most of them include proximity operators, such as *near*, which retrieve pages in which the proposed terms occur more or less close together (about 10 or 20 words may appear between them). Another form of query expansion is *stemming* (searching for words from their prefix: **impli/implication, implicate, implicit, implicitly, implied**) using *wildcards* (character used for substitution of one or several letters: **impli***).

The *near* operator and *wildcards* increase recall but decrease precision. In order to increase recall and precision, thesaurus have been used in some lexical models:

- In order to increase recall: Some searchers (such as ALTAVISTA) expand the query by using a thesaurus, so asking about **domestic violence** is also asking about **home violence, domestic aggression**, etc. The effect of this is the loss of precision in the answer due to the increase in the number of retrieved pages, although some pages retrieved by the use of a synonym could be more relevant than other pages retrieved by the original term.
- In order to improve precision: Suppose that an excessively generic query has been made, thereby retrieving an excessive number of pages. These pages would have been retrieved by the matching of some words in the index. Applying a dictionary of synonyms, pages with similar meaning or subject could be grouped and consequently classified with the same order number. This method has been used by EXCITE.

Up till now the use of dictionaries of synonyms in information retrieval has been limited to its linguistic resources for associating similar meanings. This has provided an improvement in the search process, but it is possible to go one step further by measuring the

proximity of meaning between a term and its synonym through similarity measures. This will enable us to offer a calculation of the degree of synonymy between the entry and the synonyms in a dictionary of synonyms. We will now present an implementation of a Spanish dictionary of synonyms, which calculates the degree of synonymy between two words. We have carried out this implementation by using minimal acyclic finite-state automata. The use of this kind of automata turns the dictionary of synonyms into a quick and efficient tool. It is plausible to conjecture that this will decrease latency and increase precision and recall. The next step will be to implement it in an information retrieval system and to evaluate the improvement of the system.

Section 2 gives the definition of synonymy and specifies how to calculate the degree of synonymy between two entries of the dictionary. Section 3 describes our general model of dictionary and allows us to understand the role of the finite-state automata here. In Sect. 4, we describe Blecua's Spanish dictionary of synonyms [1] and detail all the transformations performed on it with the help of our automata-based architecture for dictionaries. Finally, Sect. 5 presents our conclusions.

2 SYNONYMY

The most frequent definition of synonymy conceives it as a relation between two expressions with identical or similar meaning. The controversy of understanding synonymy as a precise question or as an approximate question, i.e. as a question of identity or as a question of similarity, has existed from the beginning of the study of this semantic relation. In the present work, synonymy is understood as a gradual relation between words. In order to calculate the degree of synonymy, we use measures of similarity applied on the sets of synonyms provided by a dictionary of synonyms for each of its entries. In the examples shown in this work, we will use as our measure of similarity *Jaccard's coefficient*, which is defined as follows. Given two sets X and Y , their *similarity* is measured as:

$$sm(X, Y) = \frac{|X \cap Y|}{|X \cup Y|}$$

On the other hand, let us consider a word w with m_i possible meanings, where $1 \leq i \leq M$, and another word w' with m_j possible meanings, where $1 \leq j \leq M'$. By $dc(w, m_i)$, we will represent the function that gives us the set of synonyms provided by the dictionary for every entry w in the concrete meaning m_i . Then, the degree of synonymy of w and w' in the meaning

m_i of w is calculated as follows [2]:

$$dg(w, m_i, w') = \max_{1 \leq j \leq M'} sm[dc(w, m_i), dc(w', m_j)]$$

Furthermore, by calculating

$$k = \arg \max_{1 \leq j \leq M'} sm[dc(w, m_i), dc(w', m_j)]$$

we obtain in m_k the meaning of w' closest to the meaning m_i of w .

The conception of synonymy as a gradual relation implies a distancing from the idea that considers it as an equivalence relation. This is coherent with the behaviour of synonymy in the printed dictionary, since it is possible to find cases in which the reflexive, symmetrical and transitive properties do not hold:

- The reflexive relation is not usually included in dictionaries in order to reduce the size of the corresponding implementations, since it is obvious that any word is a synonym of itself in each one of its individual meanings.
- The lack of symmetry can be due to several factors. In certain cases, the relation between two words can not be considered as one of synonymy. This is the case of the words **granito** (*granite*) and **piedra** (*stone*), where the relation is a hyponymy. This phenomenon also occurs with some expressions: for instance, the expression **ser uña y carne** (*to be inseparable* or, in literal translation, *to be nail and flesh*) and the word **uña** (*nail*). In other cases, symmetry is not present because a word can have a synonym which is not an entry in the dictionary. One reason for this is that the lemmas of the words are not used when these words are provided as synonyms. Another possible reason is an omission by the lexicographer who compiled the dictionary.
- Finally, if synonymy has been understood as similarity of meanings, it is reasonable that transitivity does not always hold.

In the following section, we will describe a general architecture that uses minimal deterministic acyclic finite-state automata in order to implement large dictionaries of synonyms, and how this general architecture has allowed us to modify an initial dictionary with the purpose of letting the relations between the entries and the expressions provided as answers satisfy the reflexive and symmetrical properties, but not the transitive one.

3 GENERAL ARCHITECTURE OF A DICTIONARY OF SYNONYMS

The use of finite-state automata to implement efficient dictionaries is a well-established technique. The main reasons for compressing a very large dictionary of words into a finite-state automaton are that its representation of the set of words is compact, and that the process of looking up a word in the dictionary is proportional to the length of the word, and therefore very fast. Of particular interest for natural language processing applications are minimal acyclic finite-state automata, which recognize finite sets of words, and which can be constructed in various ways [3, 7]. The aim of this section is to build a general architecture to handle a large Spanish dictionary of synonyms [1].

Words in a dictionary of synonyms are manually inserted by linguists. Therefore, our first view of a dictionary is simply a text file, with the following line format:

```
word    meaning    homograph    synonym
```

Words with several meanings, homographs or synonyms use a different line for each possible relation. With no loss of generality, these relations could be alphabetically ordered. Then, in the case of Blecua's dictionary, the point at which the word *concesión* (*concession*) appears could have this aspect:

```
concesión  1   1   gracia      (grace)
concesión  1   1   licencia    (licence)
concesión  1   1   permiso     (permission)
concesión  1   1   privilegio  (privilege)
concesión  2   1   epítrope   (a figure of diction)
```

For a later discussion, we say that the initial version of the dictionary had $M = 27,029$ different words, with $R = 87,762$ possible synonymy relations. This last number is precisely the number of lines in the text file. The first relation of *concesión* appears in the line 25,312, but the word takes the position 6,419 in the set of the M different words ordered lexicographically.

Of course, this is not an operative version for a dictionary. Therefore, what is important now is to provide a compiled version to compact this large amount of data, and also to guarantee an efficient access to it with the help of automata. The compiled version is shown in Fig. 1, and its main elements are:

- The *Word_to_Index* function (explained later) changes a word into its relative position in the set of different words (e.g. *concesión* into 6,419).
- In a *mapping* array of size $M + 1$, this number

is changed into the absolute position of the word (e.g. 6,419 into 25,312). This new number is used to access the rest of arrays, all of them of size R . The lexicographical ordering guarantees that the relations of a given word are adjacent, but we need to know how many they are. For this, it is enough to subtract the absolute position of the word from the value of the next cell (e.g. $25,317 - 25,312 = 5$ relations).

- The arrays *m1* and *h1* store numbers which represent the meanings and homographs, respectively, of a given word. The arrays *m2* and *h2* have the same purpose for each of its synonyms.
- The array *w2* is devoted to synonyms and also stores numbers. A synonym is a word that also has to appear in the dictionary. The number obtained by the *Word_to_Index* function for this word is the number stored here, since it is more compact than the synonym itself. The original synonym can be recovered by the *Index_to_Word* function (explained later).
- The array *dg* directly stores the degrees of every possible synonymy relation. In this case, no reduction is possible.

Note that the arrays *m2*, *h2* and *dg* store data that are not present in the original version of the dictionary. This new information was easily calculated from the rest of arrays with the formulas explained in Sect. 2, once the dictionary had been compiled into this general model and those initial data could be efficiently accessed. The specific transformations performed on the initial dictionary, including this one, are detailed in Sect. 4.

This is the most compact architecture for storing all the information of the words present in a dictionary, when this information involves specific features of each word, such as the degree of a synonymy relation. Furthermore, this architecture is very flexible: it is easy to incorporate new arrays for other additional data (such as part-of-speech tags), or to remove the unused ones (saving the corresponding space). To complete this model, we only need the implementation of *Word_to_Index* and *Index_to_Word*. Both functions operate over a special type of automata, the numbered minimal acyclic finite-state automata described in [3].

4 IMPROVING THE DICTIONARY

The implementation of the dictionary of synonyms [1] was carried out in several steps, some of which required manual processes whereas others could be made automatically. The initial version of the dictionary had

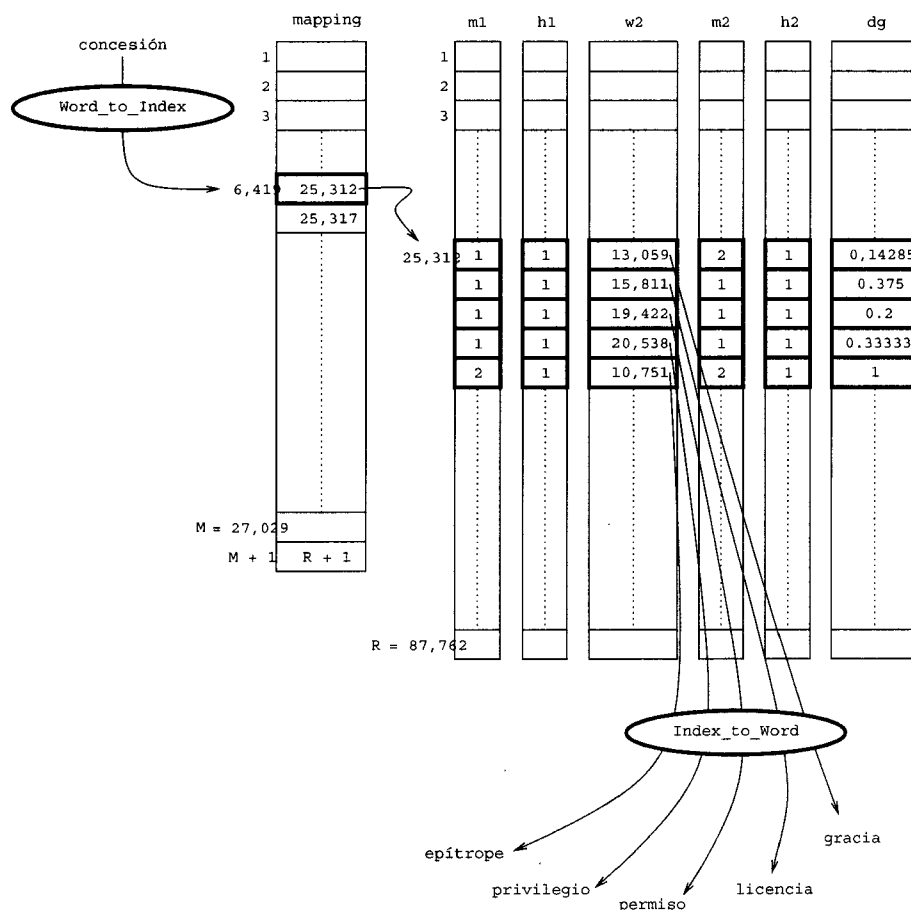


Figure 1: Compact modeling of a dictionary of synonyms

21,098 entries; however it also included 5,931 expressions that appear as synonyms of others but were not in themselves entries (from now, no-entries). This version had 87,762 pairs of synonyms and our first goal was to fill the information corresponding to the $m2$, $h2$ and dg arrays described in Sect. 3. With respect to dg and $m2$, this could be done mechanically by using the formulas of Sect. 2. The automatic detection of homographs $h2$ was carried out by including all the homographs of the second word in the calculation of the degree, but only 300 entries of dictionary proved to have homographs. From these initial data we made further modifications related to the properties that the synonymy relation satisfies in the dictionary:

- **Symmetry**: One of the reasons why symmetry does not hold is the existence of 11,596 pairs involving no-entries. This means that there exist pairs of the form (entry, no-entry) but not the converse pairs. The next improvement was to add as entries all no-entry expressions. In order to do so, we had to associate a set of synonyms to each no-entry. This set was made up of all en-

tries in which the no-entry expression appears as a synonym. In this way, the number of entries and the number of pairs were increased to 27,029 and 99,358 respectively. At this moment, all the expressions involved in the dictionary appear as entries. Nevertheless, the synonymy relation is still non-symmetric. Since we use a measure of similarity, in this case Jaccard's coefficient, two meanings of two different entries will be non zero synonyms (i.e. will be synonyms) if its associated sets of synonyms have some element in common. Following this criterion, if an entry x has synonyms in common with another y given two respective meanings of them, y will have the same synonyms in common with x for those meanings. We have improved the dictionary again by adding to each set of synonyms X the new entries that had meanings whose associated sets of synonyms had elements in common with X . This step does not modify the number of entries that the dictionary had by then but the number of pairs is modified increasing to 621,265. We obtained a symmetric relation of synonymy and we transformed

the initial dictionary into a richer one.

- Reflexivity: The final improvement was to incorporate the reflexive pairs in the synonymy relation by adding for each entry of the dictionary the entry word itself in all the corresponding sets for each meaning of it. This is useful in order to avoid some problems in the calculation of the degrees of synonymy. For instance, when a word x appears as a unique synonym of another y and y as a unique synonym of x for two specific meanings of them, the corresponding sets of these meanings have no elements in common. In this case, the degree of synonymy is 0; therefore x and y will not be considered as synonyms, which is not very intuitive. By adding the reflexive case in the sets of synonyms we avoid this problem. After this modification the number of pairs is 655,583 and the relation is now reflexive and symmetric.
- Transitivity: Since the criterion followed indicates that two entries are synonyms if their corresponding sets of synonyms have elements in common, it is reasonable to think that the synonymy relation is not necessarily a transitive one. This is because, in general, from the fact that a set of synonyms X has elements in common with Y and Y has elements in common with Z it can not be inferred that X has elements in common with Z . Although there exist some dictionaries of synonyms whose synonymy relation is transitive, the dictionary we have used includes a considerable number of examples showing the non-existence of this property.

With regard to the time figures involved in this final configuration of Blecua's dictionary, the time needed to build the automaton (27,029 words, 27,049 states and 49,239 transitions) is 2.85 seconds, in a Pentium II 300 MHz. under Linux operating system. It is also necessary an extra 16.90 seconds to incorporate the information regarding meanings, homographs, synonyms and degrees, thus giving us a total compilation time of 19.75 seconds. Finally, it should be noted that the recognition speed of our automata is around 80,000 words per second. This figure makes it possible to access the information very rapidly, this proving the correct adaptation of our general architecture for both the processes of improvement and the use of this Spanish dictionary of synonyms.

5 CONCLUSIONS

We have shown an electronic implementation of a Spanish dictionary of synonyms which manages degrees of synonymy using deterministic acyclic finite-

state automata. The implementation with automata turns it into a quick and effective tool. This allows us to conjecture that the use of the e-dictionary in a Spanish searcher will lead to an improvement in recall and precision parameters, with no negative effect on latency. It is the first Spanish e-dictionary of synonyms and a pioneer in the task of calculating the degree of synonymy.

The next step will be to integrate this dictionary of synonyms into a searcher, and to measure the improvements produced in the above-mentioned parameters. The use of synonymy relations in the task of automatic query expansion is not a new subject, but the approaches presented until now do not assign a weight to the degree of synonymy that exists between the original terms present in the query and those produced by the process of expansion [4]. In spite of this limitation, the results reported show potential improvements in the coverage, since they retrieve relevant documents which do not contain any of the terms present in the query, particularly in the case of short and incomplete queries. It therefore seems reasonable to think that the use of more sophisticated synonymy relations will allow us to obtain further improvements.

References

- [1] Blecua Perdices, J.M. (dir.) (1997) *Diccionario Avanzado de Sinónimos y Antónimos de la Lengua Española*. Vox.
- [2] Fernández Lanza, S. (2001). *Una contribución al procesamiento automático de la sinonimia utilizando Prolog*. Publicaciones de la Univ. de Santiago de Compostela (Tesis Doctoral en CD-ROM).
- [3] Graña Gil, J.; Barcala Rodríguez, F. M.; Alonso Pardo, M. (2001). Compilation methods of minimal acyclic finite-state automata for large dictionaries. In *Proc. of the Sixth International Conference on Implementation and Application of Automata (CIAA-2001)*, Pretoria, South Africa, pp. 116-129.
- [4] Greenberg, J. (2001). Automatic query expansion via lexical-semantic relationships. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, vol. 52(5), pp. 402-415.
- [5] Trillas, E.; Alsina, C. (1999). A reflection on what is a membership function. *Mathware & Soft Computing*, vol. 6, pp. 201-215.
- [6] Turtle, H.R.; Croft, W.B. (1997). Uncertainty in Information Retrieval Systems. In Motro, A. & Smets, P. (eds.), *Uncertainty Management Information Systems*, Kluwer.

- [7] Watson, B.W. (1993). *A Taxonomy of Finite Automata Construction Algorithms*. Computing Science Note 93/43, Eindhoven University of Technology, The Netherlands.

FISS: Aplicación de la Relación Borrosa de Sinonimia y de Ontologías Borrosas a un Metabuscador

Pablo J. GARCÉS
Universidad Pontificia Comillas,
ICAI, España
e-mail:pgarces@upco.es

José A. OLIVAS
Dpto.Informática UCLM
España
e-mail:joseangel.olivas@uclm.es

Francisco P. ROMERO
Soluziona Software Factory
España
e-mail:fromero@uf-isf.es

Resumen

En este trabajo se ha desarrollado un modelo de representación de conceptos (FIS-CRM) basado en dos tipos de interrelaciones borrosas entre términos, la de sinonimia y la de generalidad, obtenidas a partir de un diccionario borroso de sinónimos [1] y de una ontología borrosa de términos respectivamente. El modelo de representación ha sido implantado en el metabuscador FISS (*Fuzzy Interrelations and Synonymy based Searcher*) que es capaz de producir grupos de páginas Web conceptualmente relacionadas entre sí, mejorando así la calidad de los resultados de las búsquedas.

Palabras Clave: Búsqueda, Representación de Conceptos, Internet, Lógica Borrosa, Ontología, Sinonimia.

1 INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

En la actualidad, la gran mayoría de los motores de búsqueda en Internet son capaces de recuperar cientos de enlaces a páginas Web en apenas unas décimas de segundo, pero por desgracia, una gran proporción de las páginas recuperadas suelen carecer de relevancia para el usuario.

Por ejemplo, si realizamos una búsqueda con el término "judías" recuperaremos una gran cantidad de páginas relacionadas con estas legumbres y la forma de cocinarlas, y otras tantas páginas relativas al pueblo judío, y sin embargo, no se obtendrán páginas que contengan sinónimos del término "judías" como "alubias" o "pochas"

(suponiendo que el objetivo de la búsqueda fuese este campo).

De forma similar, si se realiza una búsqueda con el término "deporte" obtendremos páginas que contengan este término, pero dejaremos de recuperar otras que a pesar de no contener este término, sí que contienen otros términos relacionados ontológicamente con el término "deporte", como podrían serlo los términos "fútbol", "baloncesto" o "petanca".

En ambos casos, la causa de la falta de calidad del resultado se debe a que los buscadores únicamente contemplan aspectos lexicográficos a la hora de comparar los términos de la búsqueda con los términos contenidos en los documentos Web, ignorando los aspectos semánticos de los mismos.

En este sentido, y con objeto de extraer una parte de la riqueza semántica de los documentos, resulta de gran utilidad el tratamiento de los sinónimos, así como de aquellas palabras relacionadas ontológicamente con las contenidas en los documentos. Evidentemente, este proceso se ve dificultado por la ambigüedad propia del lenguaje natural, que se ve acrecentada por la gran variedad de fenómenos lingüísticos como la polisemia, las metáforas, etc... Así, y con objeto de paliar estas ambigüedades resulta fundamental el tratamiento del contexto de los documentos.

El modelo de representación de conceptos (FIS-CRM) que se ha desarrollado se basa en todos los aspectos mencionados, y es aplicado a los documentos obtenidos a partir del metabuscador FISS [5]. De esta forma, y mediante un algoritmo de *clustering* que contempla la co-ocurrencia de conceptos como base de su función de similitud, los documentos obtenidos por el metabuscador son dinámicamente agrupados conceptualmente. Asimismo, los grupos resultantes son etiquetados mediante los términos que representan los conceptos contenidos en sus documentos.

2 FIS-CRM: MODELO DE REPRESENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE UN DOCUMENTO

Normalmente, los sistemas de representación de documentos están basados en el estudio de la frecuencia de las palabras contenidas en ellos. Así, la comparación de documentos consiste en calcular co-ocurrencias de palabras entre cada pareja de documentos.

El modelo FIS-CRM se puede considerar como una extensión del modelo vectorial de representación de documentos.

El modelo vectorial se caracteriza por representar cada documento mediante un vector de dimensión N (donde N es la cantidad de términos totales), en el que cada elemento del mismo almacena un peso proporcional a la cantidad de veces que aparece el correspondiente término en el documento [7].

La base del modelo FIS-CRM estriba en el hecho de que un concepto puede ser representado por varias palabras (sinónimos y palabras relacionadas ontológicamente). Por tanto, si en un documento D aparece una palabra P, se debe dar un peso a las palabras que describen el concepto asociado a la palabra P.

Des esta forma, el objetivo del modelo FIS-CRM es que el vector de un documento represente ocurrencias de conceptos en lugar de ocurrencias de términos.

Para conseguirlo, y partir de la representación vectorial de los documentos, se debe realizar un reajuste de los pesos de los elementos de los vectores, de forma que un término pueda tomar un peso en un vector aunque no aparezca en el documento, siempre y cuando el concepto al que represente dicho término subyaga en el mismo.

Para llevar a cabo el reajuste se tiene en cuenta la relación borrosa de sinonimia y la relación borrosa ontológica existente entre los términos.

2.1. RELACIÓN BORROSA DE SINONIMIA.

Recientes estudios en el campo de la sinonimia han permitido comprobar que la relación de sinonimia tiene un comportamiento borroso en el sentido de que se trata de una relación gradual. Así, podemos encontrarnos con diferentes medidas (coeficiente Jaccard, coeficiente del coseno,...) que permiten establecer el grado de certidumbre de la relación de sinonimia entre dos términos.

Por ejemplo, se podría calcular el grado de sinonimia entre los términos A y B mediante la expresión:

$$GS(A, B) = \frac{\text{Ctdad de sinónimos comunes a A y a B}}{\text{Ctdad total de sinónimos de A y B}} \quad (1)$$

El ajuste de los vectores a partir de la relación de sinonimia se ve dificultado por el hecho de que son muchos los términos polisémicos (con varias acepciones). En este trabajo, a éstos términos se les denomina *débiles*, mientras que los términos con una única acepción son llamados *fuertes*. En función del tipo de los términos implicados se distinguen dos tipos de reajuste: Ajuste entre sinónimos fuertes y ajuste dependiente del contexto.

2.2.1. Ajuste entre términos fuertes.

Se aplica cuando en un documento aparece un término fuerte, y en algún otro documento de la colección aparece un sinónimo de éste, que también es fuerte.

Por ejemplo, suponiendo que en el documento D1 tuviésemos dos ocurrencias del término "lápiz" y en el documento D2 el término "lapicero" apareciese tres veces, sus vectores, antes del reajuste serían los mostrados en la figura *, imposibilitándose ninguna similitud entre los documentos.

	Lápiz	Lapicero
D1	2	0
D2	0	3

El reajuste aplicable en este caso se basa en la siguiente expresión:

$$Peso(x) = C(x) \sqrt{\frac{1}{T(x)}} \quad (2)$$

donde:

- C(x) es la cantidad de ocurrencias del concepto que representa el término 'x'.
- T(x) es la cantidad de términos que representan el mismo concepto que 'x'

Los vectores después del reajuste quedarían así:

	Lápiz	Lapicero
D1	1.414	1.414
D2	2.121	2.121

Con estos vectores, al realizar la comparación de documentos se obtendrían las 6 co-ocurrencias deseadas ($1.414 * 2.121 + 1.414 * 2.121$).

2.1.2. Ajuste dependiente del contexto del documento.

Este ajuste se aplica cuando en un documento se encuentra un término débil y también se encuentra alguno de sus sinónimos (fuertes).

Por ejemplo, consideremos el siguiente vector:

Profesor Monitor Pantalla

1	1	0
---	---	---

Teniendo en cuenta que el término "monitor" tiene varias acepciones (una relacionada con la enseñanza y otra con equipos electrónicos), no se podría primar alegremente a los términos representativos de estas acepciones ("profesor" y "pantalla" respectivamente). En este caso, puesto que en el documento también aparece el término profesor, parece lógico aplicar un ajuste que potencie el peso de este término, y que devalúe el peso del término monitor.

Este reajuste se hace mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} \text{Peso}(f_i) &= C(f_i) + C(d) \sqrt{\frac{GS(d, f_i)}{1 + \text{SumaGS}}} \\ \text{Peso}(d) &= C(d) \sqrt{\frac{1}{1 + \text{SumaGS}}} \end{aligned} \quad (3)$$

donde:

- $C(d)$ es la cantidad de ocurrencias del término débil
- $C(f_i)$ es la cantidad de ocurrencias del término fuerte f_i , que es sinónimo del término d y aparece en el documento.
- $\text{SumaGS} = \sum GS(f_i, d)$ para todos los términos f_i (sinónimos de d que están en el documento)

Después del reajuste el vector quedaría así:

Profesor Monitor Pantalla

1.577	0.816	0
-------	-------	---

Los pesos actuales potenciarían la similitud de este documento con otros relacionados con la enseñanza, y harían disminuir su similitud con otros en los que apareciese el término monitor sin estar "definida" su acepción.

2.2. RELACIÓN ONTOLÓGICA BORROSA.

Además de la sinonimia, existen otros tipos de interrelaciones entre los términos de un documento que permiten extraer un mayor conocimiento acerca del mismo. Una de estas interrelaciones es la que se obtiene a partir de las ontologías o clasificaciones jerárquicas de términos. Una ontología se puede considerar como un conjunto de árboles interrelacionados en los que cada nodo representa un término. Un nodo A es hijo de otro nodo B si el término A es más concreto que el término B, o también, si el término B es más genérico que el nodo A.

El sistema propuesto por Widyantoro and Yen [8] permite obtener ontologías automáticamente a partir de una colección de documentos seleccionados de un campo concreto, ya que la construcción de ontologías generales es más que discutible. Este sistema, además obtiene una medida borrosa de la relación de generalidad existente entre cada pareja de términos de la colección.

El uso que se da en la herramienta FISS a las ontologías es muy diferente al realizado por Widyantoro and Yen, como se comprueba a continuación.

2.2.1. Ajuste del vector por relación de generalidad.

Este tipo de ajuste permite dar un peso a un término A de un documento aunque no esté en dicho documento, siempre y cuando el término A tenga una relación de generalidad con otro término B contenido en el documento. En este caso el ajuste es lineal y proporcional al grado de generalidad entre los términos A y B.

Por ejemplo, el vector de un documento que contuviese el término "fútbol" pero no el término "deporte" sería:

Fútbol Deporte

2	0
---	---

Si suponemos que el término "fútbol" es más concreto que el término "deporte" con un grado de certidumbre de 0.4, el vector quedaría así después del ajuste:

Fútbol Deporte

2	0.8
---	-----

Así, este vector verá potenciado su grado de similitud con otros relacionados con el deporte.

Como ocurre con la relación de sinonimia, para realizar este tipo de reajuste se debe tener en cuenta el tipo de los términos, siendo necesario el contexto cuando se trata de términos débiles.

3 FISS: METABUSCADOR BASADO EN INTERRELACIONES BORROSAS.

El metabuscador FISS se caracteriza por los siguientes aspectos:

- Genera consultas alternativas a la consulta original utilizando para ello el diccionario borroso de sinónimos.
- Se sirve de los servicios de otros buscador (Google en este caso) para buscar los enlaces deseados.

- A partir de los *snippets* (fragmentos de páginas Web) obtenidos por Google, del diccionario borroso de sinónimos y de las ontologías borrosas, y usando el modelo FIS-CRM como sistema de representación, consigue una visión conceptual de los documentos recuperados.
- Mediante un algoritmo de *clustering*, agrupa dinámicamente los documentos obtenidos en base a los conceptos contenidos en los mismos.

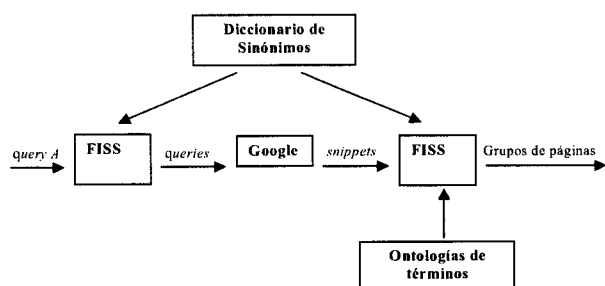


Figura 1: Proceso global de búsqueda

Más en detalle, el proceso llevado a cabo en una consulta se puede descomponer en las siguientes fases:

1. Generar nuevas consultas.

A partir de los sinónimos de los términos especificados en la consulta original se generan las consultas alternativas, en las cuales el número de términos contenidos es el mismo que el de la consulta original. Los términos de cada consulta se combinan con los operadores lógicos (AND, OR, NOT) especificados en la consulta original. Cada una de éstas tiene un grado de compatibilidad con la consulta original que depende del grado de sinonimia de los términos incluidos respecto a los términos originales. Para obtener este valor se utiliza una T-norma (producto).

2. Lanzar consultas y obtener *snippets*.

Las consultas generadas se lanzan a Google, y posteriormente se recuperan los *snippets* recuperados a partir del código HTML obtenido. Los documentos recuperados tienen un grado de pertenencia a la solución final que depende del grado de compatibilidad de la consulta que los ha producido.

3. Construir un índice de términos que incluye la totalidad de los términos incluidos en los *snippets*.

En este paso las palabras son preprocesadas (se excluyen las incluidas en una *stop list*, se convierten a minúsculas y a su forma singular...).

4. Construir una matriz de sinonimia y una matriz de la ontología que almacenen los grados de sinonimia y de generalidad entre cada pareja de términos.
5. Representar los *snippets* mediante vectores.
6. Reajustar los pesos de los vectores mediante el modelo FIS-CRM de representación conceptual.

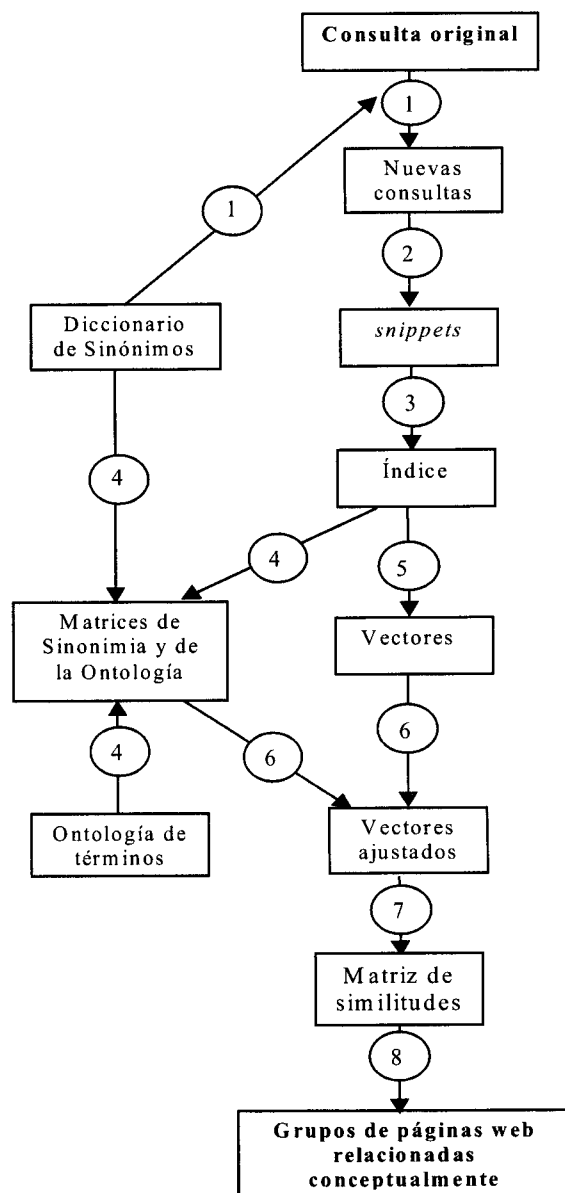


Figura 2: Proceso detallado de una consulta

7. Construir la matriz de similitud que almacena el grado de similitud entre cada pareja de documentos de la colección.

La función de similitud contempla la coocurrencia de términos y frases, el tamaño de los documentos, la rareza de los términos e, implícitamente, la coocurrencia de conceptos.

8. Generar grupos de páginas Web conceptualmente relacionadas entre sí.

Para ello se ha implementado un algoritmo de *clustering* que, estando basado en el expuesto por Widyantoro y Yen [8], se ha modificado con objeto de optimizar los grupos resultantes y para poder conseguir una estructura jerárquica de grupos. Además, Este paso incluye el etiquetado de los grupos obtenidos con los términos que representan los conceptos contenidos en sus documentos.

4 PRUEBAS Y VALIDACIÓN.

Las pruebas realizadas con el metabuscador FISS han permitido obtener interesantes resultados como se puede comprobar a través del ejemplo anteriormente mencionado de la búsqueda realizada a partir del término "judías".

El *snippet* de uno de los enlaces recuperados es el que muestra la figura 3.

lomo judias
... Lomo con **judías**. para 6 personas. 600 g. de lomo cortado a rodajas. 800 g. de **judías** cocidas. 2 cucharadas de manteca. aceite de oliva. ...
www.mercatsantacaterina.com/sp_rt3.htm

Figura 3: *Snippet* de uno de los documentos recuperados

La siguiente figura permite comparar los pesos del vector correspondiente a este documento antes (vector A) y después (vector B) de aplicar el reajuste de pesos del modelo FIS-CRM.

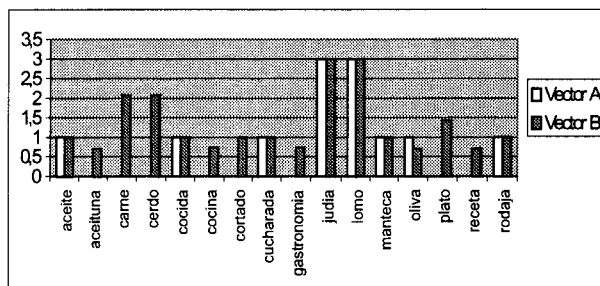


Figura 4: Pesos del vector antes y después del ajuste.

Se puede comprobar como algunos términos como, "carne" o "cerdo" han cobrado un peso en el documento gracias a su relación ontológica con el término "lomo", mientras que otros términos como "aceituna" lo han tomado debido a su relación de sinonimia con el término "oliva", el cual ha visto devaluado su peso a favor de éste.

La siguiente figura ilustra la expansión semántica que sufre el documento después de aplicar el reajuste de

pesos. En este caso, el vector B-A representa la ampliación semántica del documento.

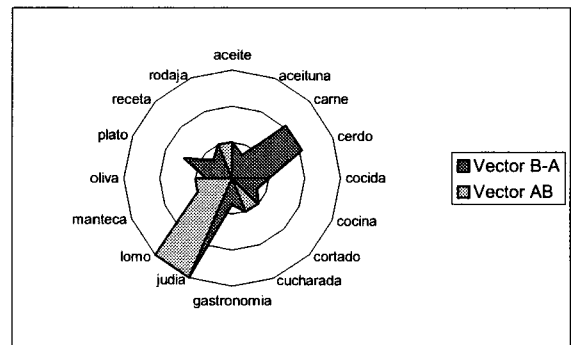


Figura 5: Expansión semántica de un documento

Gracias a la aplicación del modelo FIS-CRM a los documentos recuperados, se consigue que determinadas parejas de documentos vean potenciada su similitud, mientras que para otras disminuya. Esto último ocurrirá cuando el contexto permita concretar el significado de un término "débil" en un documento. Por ejemplo, en un documento en el que aparezca el término "judías", si el contexto permite comprobar que el término alude al pueblo judío, su similitud se verá potenciada con los documentos relacionados con esta área, mientras que disminuirá respecto de los documentos relacionados con las legumbres.

Para ilustrar que el resultado final de la búsqueda son grupos de páginas Web relacionadas conceptualmente, tomemos como ejemplo uno de los grupos formados por FISS como resultado a la búsqueda ya mencionada.

Grupo 0. Cantidad de páginas: 8

israeli(8) hebreo(8) judía(7) cocina(3) gastronomía(3)

Índice de Recetas Judías

Click here! Discount Travel Hebreos Net - Cocina Hebreos Net, Recetas de la cocina judía. Beiguelj; ...
www.hebreos.net/Cocina/

Nota aparecida en el Diario "El País" - España

... Cartas **Judías** www.hebreos.net correo@hebreos.net
#hebreos (www.undernet.org) Unir a los judíos hispanohablantes del mundo es el objetivo de esta lista de ...
www.hebreos.net/Info/elpais0700.htm

seder

... Fiestas **Judías**. 1- El "Seder" (orden), la "Cena Pascual", es la gran comida de Rey que celebran los judíos el día primero de la Pascua, donde Jesús ...
biblia.com/catolicos/seder.html

Mostrar Todas las Páginas del Grupo 0

Figura 6: Parte de la salida producida por FISS

Lo más destacado de este grupo es que, por una parte, ha agrupado 8 páginas relacionadas con el pueblo judío, y por otra parte, ha incluido la página titulada "Índice de recetas judías" en el grupo que también pertenece a otro grupo relacionado conceptualmente con la "gastronomía".

Como muestra de la efectividad de la potenciación de la similitud de dos documentos después de aplicar el reajuste de vectores, consideremos los siguientes documentos:

Chef Uri : Entremetier. Alubias con Chorizo
 ... **Alubias** con Chorizo. sal; pimienta Poner las **alubias** en remojo la noche anterior. Ponerlas en una olla cubiertas con agua y cocerlas junto con el chorizo. En ...
www.chefuri.com/java/entre/alubiasconchorizo.htm

Pochas con panceta. Recetas. Especial Gastronomía. EL CORREO ...
 ... **EL MENÚ / RECETAS Pochas** con panceta.
 Ingredientes para dos raciones: 300 g. de **pochas**; 150 g. de panceta de cerdo ibérico ahumada; 1 tomate; 1 pimiento verde ...
www.diario-elcorreo.es/gastronomia/recetas/receta290700.html

Figura 7: Snippets relacionados conceptualmente

Estos dos documentos que no tienen términos relevantes en común, después del reajuste llegan a tener más de un 30 por ciento de similitud debido a la relación de sinonimia entre los términos "alubias" y "pochas", y a que los términos "chorizo" y "panceta" están relacionados ontológicamente con un término común, como es el "cerdo".

5 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

A pesar de que la extracción y representación de los conceptos de un documento resulta hoy en día una utopía, mediante el modelo FIS-CRM expuesto en este trabajo se consigue explotar una parte del potencial semántico de los documentos, y lo que es más importante, se proporciona un sistema de representación compatible con el utilizado por la mayoría de los buscadores de la red.

En cuanto a la herramienta FISS [5] se refiere, son numerosos los aspectos que podrían ser mejorados, como la eficiencia de algunos de los algoritmos, la utilización de ontologías de otros dominios, la exploración de otros tipos de interrelaciones entre los términos de los documentos o la posibilidad de aplicar prototipos borrosos deformables en el proceso de *clustering* [4].

El modelo FIS-CRM también puede mejorar la calidad de los servicios de los agentes inteligentes en el entorno de Internet (filtrado de mensajes, determinación de la

relevancia de los mensajes, identificación de la autoría de los mensajes...)[6].

En cualquier caso, donde más partido se puede sacar a este modelo es aplicándolo a las páginas Web almacenadas en los índices del motor de búsqueda (en tiempo de indexación), en lugar de aplicarlo a las páginas ya recuperadas por él. De esta forma, sin que tener que realizar ningún tipo de modificación en los algoritmos de búsqueda del motor, se conseguiría dar un importante paso en el campo de las "búsquedas conceptuales".

Referencias

- [1] Fernandez Lanza, S. (2001): "Una contribución al procesamiento automático de la sinonimia utilizando Prolog", Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, España.
- [2] King-Ip Lin y Kondadadi, R.: (2001): "A similarity-based soft clustering algorithm for documents". Accesible en www.msci.memphis.edu/~linki/_mypaper/dasfa01clus.doc. Última visita 04/01/2002.
- [3] Olivas, J. A.: (2002): "Application of Fuzzy Prototypes: Forest Fire Prediction and Medical Diagnosis". Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence IC-AI'99. CSREA Press, USA (Computer Science Research, Education and Applications Press), Ed. H.R. Arabnia. pp. 662-668 VOL II, 1999.
- [4] Olivas, J.A.: (2000): "Contribución al estudio experimental de la predicción basada en categorías deformables borrosas". Tesis Doctoral, Universidad de Castilla-La Mancha, España.
- [5] Olivas, J.A.; Garcés y P. Romero, F.; (2002): "FISS: Application of Fuzzy Technologies to an Internet Metasearcher". Proceedings of the NAFIPS 2002, New Orleans, USA.
- [6] Romero, F.; Garcés, P. y Olivas, J.A.: (2002): "Improving Internet Intelligent Agents using Fuzzy Logic and Data Mining Techniques". Proceedings of the IC-AI'2002, Las Vegas, USA.
- [7] Salton, G. y McGill: (1983), "Introduction to Modern Information Retrieval", McGraw-Hill.
- [8] Widyanoro D.H. y Yen J.: (2001): "Incorporating fuzzy ontology of term relations in a search engine". In Nikraves, M. and Azvine, B. (eds.), Proceedings of the 2001 BISC International Workshop on Fuzzy Logic and the Internet FLINT 2001, Memorandum No. UCB/ERL M01/28, University of California-Berkeley, 155-160.
- [9] Zadeh, L. A. (1982): "A note on prototype set theory and fuzzy sets". Cognition, 12, 291-297.
- [10] Zamir, O. y Etzioni, O.: (2001): "Grouper: A dynamic clustering interface to Web search results". Accesible en citeseer.nj.nec.com/zamir99grouper.html. Última visita 26/12/2001.

Sesión

B1

Hardware Fuzzy

Hardware Fuzzy

FILTRO DIFUSO DE MEDIANA PARA DETECCIÓN DE SEÑALES CDMA EN ENTORNOS NO GAUSSIANOS

Joan Bas

Universitat Politècnica de Catalunya
Dept. de Teoría de la Señal y de las Comunicaciones
jbas@gps.tsc.upc.es

Ana Pérez Neira*

Universitat Politècnica de Catalunya
Dept. de Teoría de la Señal y de las Comunicaciones
anуска@gps.tsc.upc.es

Resumen

Las técnicas de detección de señales de Múltiple Acceso Divididas en Código (CDMA) permiten incrementar la capacidad de los sistemas de comunicación. El presente trabajo propone un receptor CDMA para entornos de ruido no gaussianos aprovechar la teoría de conjuntos fuzzy. Finalmente, sus prestaciones son comparadas respecto a otros receptores existentes.

Palabras Clave: Mediana, CDMA, detector.

1 INTRODUCCIÓN

En muchos canales reales, tales como los canales urbanos, interiores[2] o acústicos en medios submarinos, se sabe experimentalmente que el ruido ambiente es no-Gaussiano. Este comportamiento se explica por las interferencias impulsivas creadas ya sea bien por la naturaleza o bien por el efecto del hombre. En consecuencia el modelado de tales escenarios no puede afrontarse desde una óptica de suposición gaussiana.

En este trabajo se aborda el problema de la detección de señales de espectro ensanchado (CDMA) en canales de comunicación no-Gaussianos. Por tanto, los detectores que se diseñen han de ser robustos a tales comportamientos. En concreto, nuestro criterio de diseño buscará que en medios con ruido impulsivo, la eficiencia del detector no se degrade mucho. Para llevar a cabo tal propósito, emplearemos la teoría de conjuntos que aporta la lógica Fuzzy para diseñar un filtro de mediana fuzzy.

El filtro de mediana está basado en las técnicas de ordenamiento de muestras según un rango jerárquico. El uso de tal ordenamiento es un método muy empleado en el campo del procesamiento robusto de la señal. En especial, en [1] se realiza tal ordenamiento teniendo en cuenta la secuencia temporal de las muestras. Este artículo introduce tal técnica en la detección robusta de señales de espectro ensanchado afectadas por canales no-Gaussianos.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección II se presenta el modelo de señal para un sistema de comunicaciones DS-CDMA. En la Sección III,

se muestra el filtro de mediana para la detección de un solo usuario en presencia de ruido no-Gaussiano. A continuación, en la sección IV, se repasan los actuales detectores multiusuario para entornos no-Gaussianos así como su relación con el filtro de mediana. Seguidamente, en la Sección V se muestra como mejorar las prestaciones de un detector basado en el filtro de mediana mediante lógica fuzzy. Finalmente, los resultados y conclusiones se presentan en las secciones VI y VII respectivamente.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE SEÑAL.

Se asume que tenemos un sistema de comunicaciones CDMA con K usuarios cuyas signatures viene representadas por $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), \dots, s_K(t))^T$ y tienen una duración temporal $T = NT_c$, donde N es la longitud del código y T_c denota la duración de un chip. Las formas de onda $s_k(t)$ están moduladas antipodalmente por la secuencia de los bits de información $\mathbf{b}(i) = (b_1(i), \dots, b_K(i))^T \in \{-1, 1\}^K$. La señal recibida $r(t)$ viene dada por:

$$r(t) = \sum_{i=-M}^M \sum_{k=1}^K b_k(i) a_k s_k(t - iT - \tau_k) + n(t) \quad (1)$$

donde a_k es la amplitud del canal de comunicaciones para el usuario k -ésimo y $n(t)$ es el ruido ambiente. Se asume que todos los posibles vectores de información $\mathbf{b}(i)$ son independientes e igualmente probables. Por sencillez en el análisis, el desarrollo del algoritmo de la detección robusta multiusuario está restringida al caso síncrono, es decir $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_K = 0$.

La señal recibida $r(t)$ se filtra mediante un filtro adaptado al vector signature y a continuación se muestrea tiempo de chip. En sistemas síncronos CDMA, las señal muestreadas corresponden al j -ésimo chip del i -ésimo símbolo de información:

$$r_j(i) = \sum_{k=1}^K b_k(i) a_k s_k^j + n_j(i) \quad (2)$$

o en forma vectorial:

* This work has been supported by Spanish Government Grants: TIC 99-0849 and FIT-070000-2000-649 (Medea and Unilan European project)

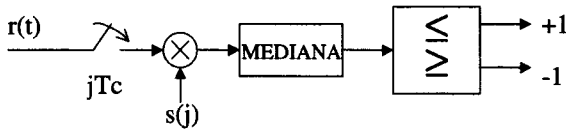


Fig. 1. Filtro de Mediana (FM) para señales BPSK.

$$r(i) = \sum_{k=1}^K b_k(i) a_k s_k + n(i) = \sum_{k=1}^K d_k(i) s_k + n(i) \quad (3)$$

donde $n(i)$ son las muestras del vector de ruido para el i -ésimo intervalo de símbolo. En el escenario de comunicaciones móviles planteado, se representa el ruido con una probabilidad de obtener picos de señales baja pero no nula. La función de densidad de probabilidad empleada para representar tal escenario ha sido la que proporciona el modelo empírico conocido como *ϵ -mixture*. Dicho modelo se caracteriza por la siguiente función de distribución:

$$f(x) = (1 - \epsilon) f_n(x) + \epsilon f_i(x) \quad (4)$$

donde la densidad f_n representa el ruido de fondo nominal y el término de densidad f_i representa una componente impulsivo, las cuales son de media cero y varianzas σ_n^2 y $\sigma_i^2 = \gamma^2 \sigma_n^2$, respectivamente. El parámetro ϵ representa la probabilidad que un impulso suceda en un rango comprendido entre 0 y 1, $\epsilon \in [0,1]$. Finalmente, cuando f_n y f_i presentan una distribución Gaussiana, este modelo sirve como una aproximación al importante modelo de ruido Middleton de Clase A [6].

3 FILTRO DE MEDIANA.

La salida del filtro de mediana convencional para un conjunto de N muestras viene dada por: $y = \text{MED}\{x(0), \dots, x(N-1)\}$ tomando la forma particular de:

$$\text{med}(\mathbf{x}) = x_{(\tilde{N})}$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector de $N = 2\tilde{N} + 1$ observaciones y $x_{(1)}, \dots, x_{(N)}$ son los elementos del vector $\mathbf{x}$ ordenados de menor a mayor ($x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(N)}$). El filtro de mediana puede ser interpretado como un valor β que minimiza la siguiente expression [9]:

$$\beta = \arg \left\{ \min_{\beta} \sum_{i=0}^{N-1} |x(i) - \beta| \right\} \quad (5)$$

Tal modelo de estimación nos puede ser de gran utilidad ya que simplifica enormemente la estructura del detector óptimo. Nota que si la población de los datos ($\mathbf{x}$) presenta una distribución Laplaciana, el filtro de mediana proporciona de una manera sencilla la implementación de la estimación de Máxima Verosimilitud [5].

Si se considera ahora el sistema multiusuario formulado en (2) modelando $n(t)$ mediante una distribución Laplaciana, entonces el logaritmo de la función de verosimilitud viene dado por :

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left| r(jT_c) - \sum_{k=1}^K d_k s_k(jT_c) \right| \quad (6)$$

De la anterior expresión se puede observar que el filtro de mediana se engloba en los métodos de detección no paramétricos, ya que no depende de ningún estadístico para realizar la estimación de la información transmitida $\mathbf{d}$. Una cota superior para la expression (6) se puede formular mediante:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=0}^{N-1} |r(jT_c) - d_k s_k(jT_c)| \quad (7)$$

Esta estructura sugiere un esquema de detección multiusuario [8], la cual se presentará en la siguiente sección como un detector multietapa de mediana.

4 DETECCIÓN ROBUSTA MULTIUSUARIO

En esta sección se presentan técnicas robustas para la detección multiusuario en canales CDMA con ruido no gaussiano. Primeramente, consideraremos un detector decorrelador diseñado siguiendo el criterio de estimación robusta minimax. Tal criterio de diseño obtiene un estimador $\mathbf{M}$ de Huber, que minimiza la siguiente función de coste [4]:

$$\hat{\mathbf{d}} = \arg \min_{\mathbf{d}} \sum_{j=1}^N \rho \left(r_j - \sum_{k=1}^K s_j^k d_k \right) \quad (8)$$

siendo ρ la función que modela las pérdidas del sistema. Por ejemplo, cuando ρ es la norma cuadrática, (8) formula el decorrelador lineal. En cambio, cuando $\rho(x) = -\log f(x)$, entonces (9) formula la estimación de máxima verosimilitud. El estimador $\mathbf{M}$ intenta obtener la mejor eficiencia para el peor caso posible de varianza de ruido. En particular, este estimador minimiza la máxima varianza asintótica, la cual viene regulada por la siguiente función de pérdidas:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\sigma_n^2} & \text{para } |x| \leq k\sigma_n^2 \rightarrow \text{Decorrelador Lineal} \\ \frac{k^2\sigma_n^2}{2} - k|x| & \text{para } |x| > k\sigma_n^2 \rightarrow \text{Decorrelador NoLineal} \end{cases} \quad (9)$$

Nota que el Decorrelador Lineal (DL) tiene una mayor presencia de linealidad residual que el Decorrelador No Lineal (DNL). Esta linealidad residual es debida a la estimación de la señal de información y presenta componentes importantes de ruido impulsivo. En consecuencia, a causa de este motivo el detector DL tendrá menores prestaciones que el detector DNL. En [8] se presentan los procedimientos para el cálculo de la salida de los decorreladores multiusuario no lineales. Sea $\mathbf{d}^l$ la estimación en la iteración l -ésima; entonces, su actualización está regida por :

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^l &= \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{S}^T \mathbf{d}^l) \\ \mathbf{d}^{l+1} &= \mathbf{d}^l + (1/\mu)(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{z}^l \end{aligned} \quad (10)$$

siendo Ψ la derivada de p y μ el parámetro que controla el paso de adaptación. En cada iteración, la diferencia entre la señal recibida $\mathbf{r}$ y la remodulada $\mathbf{S}\mathbf{d}^l$ (señal residual) se pasa a través de una no linealidad $\Psi(\cdot)$ y de un decorrelador lineal. Finalmente, la iteración se para si $\|\mathbf{d}^l - \mathbf{d}^{l-1}\| \leq \delta$ para un valor pequeño de δ . Experimentos numéricos muestran que en promedio la convergencia del algoritmo lleva menos de diez iteraciones. Hay sin embargo la cuestión de cómo fijar los parámetros σ_n^2 y k .

Otra alternativa para la detección multiusuario es la que se propone en [8]. Esta opción se basa en un banco de filtros FM adaptados a un usuario específico. De este modo en cada etapa la estimación de la información de un usuario sirve para eliminar la interferencia MAI que provoca en la detección de la información en la siguiente etapa. Si el retardo en procesar una etapa se denota mediante T , la salida obtenida para el usuario k -ésimo del detector FM multietapa será:

$$y_k^m(i) = \text{MED}\left\{ (r(t) - \sum_{l \neq k} \hat{b}_l^{m-1}(i) a_l s_l(t - iT)) s_k(t - iT) \right\} \quad (11)$$

donde el bit transmitido $\hat{b}_k(i)$ tiene la siguiente expression :

$$\begin{aligned} \hat{b}_k^m(i) &= \text{sgn}(y_k^m(i)) \\ \hat{b}_k^1(i) &= \text{sgn}(\text{MED}\{r(t) s_k(t - iT)\}) \end{aligned} \quad (12)$$

Así de (12) se desprende que la estimación en la etapa m -ésima del bit $b_k(i)$ vendrá dada por el signo de la salida del banco de filtros FM de la etapa $m-1$. Un esquema de bloques del detector FM multietapa para la demodulación del usuario k -ésimo en un sistema de comunicaciones síncrono se muestra en la figura 2.

Un estudio detallado del comportamiento de este detector se encuentra en [8]. En este artículo se demuestra mediante simulaciones de MonteCarlo que la BER del detector de mediana multietapa presenta un mejor comportamiento que el que ofrece el Decorrelador No Lineal (DLN) de [7] cuando los escenarios de transmisión presentan una alta probabilidad de ruido impulsivo.

No obstante, en [8] también se muestra que cuanto más Gaussiano es el comportamiento del ruido menor es la calidad que ofrece el detector FM multietapa. Además, con valores altos de energías de bit la BER del detector FM multietapa es muy pobre. En la siguiente sección se propone el uso de la teoría de conjuntos fuzzy para mejorar los detectores monousuario (FM) y multiusuario (DNL)

5 FILTRO DE MEDIANA FUZZY

El comportamiento robusto que proporcionan los métodos de ordenamiento según un rango proviene

principalmente de : (1) la distribución de las posiciones de las muestras antes y después de ordenar son

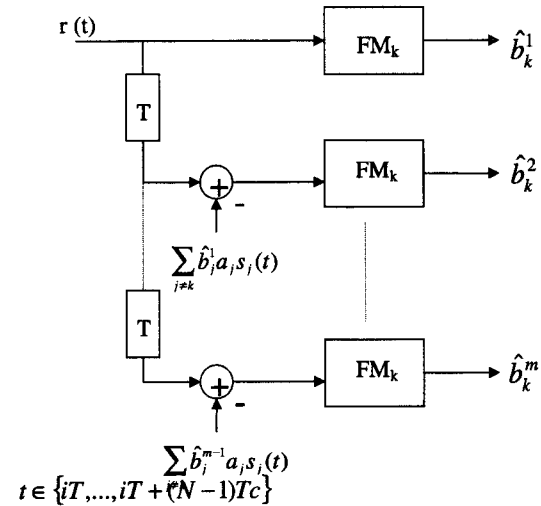


Fig. 2. Detector multietapa FM para el usuario k -ésimo. En cada etapa la estimación de la interferencia de múltiple acceso es sustraída de la señal recibida. A continuación, la señal resultante se procesa mediante un filtro F AM adaptado al usuario k . El tiempo retardo de una etapa al filtrar una muestra se denota por T .

independientes, y (2) el hecho de que las observaciones que presentan picos de ruido impulsivo están generalmente localizadas en los extremos del conjunto ordenado. El filtro de mediana presenta un comportamiento robusto a señales no gaussianas, pero se degrada notablemente cuando la señal de entrada tiene una distribución que tiende a ser gaussiana. Para solucionar este inconveniente en [3] los autores proponen un filtro fuzzy basado en técnicas de ordenamiento temporal para eliminar el ruido impulsivo en la restauración de imágenes. Allí el Filtro de Mediana Fuzzy se formula de la siguiente manera:

$$y_{FM-Fuzzy} = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\sum_{n=1}^N \mu_n} r_o(n) \quad (13)$$

donde μ_n representan los grados de pertenencia y r_o el vector de muestras ordenadas. Las funciones de pertenencia presentan un modelo abierto de diseño, aunque comúnmente se utilizan funciones gaussianas o triangulares para representarlas. Finalmente, señalamos que los grados de pertenencia μ_n introducen la información sobre la anchura de las muestras ordenadas del vector r_o cuando la estimación del filtro de mediana y_{FM} se toma como referencia de todas las muestras que forman el vector ordenado r_o . De este modo la expresión de las funciones de pertenencia será :

$$\mu_G(r_o(n), y_{FM}) = e^{-(r_o(n) - y_{FM})^2 / \sigma^2}$$

$$\mu_T(r_o(n), y_{FM}) = \begin{cases} 1 - \frac{|(r_o(n) - y_{FM})|}{\sigma} & \text{para } |(r_o(n) - y_{FM})| \leq \sigma \\ 0 & \text{para otro caso} \end{cases}$$

A diferencia de [3], en este artículo se propone emplear el filtro de mediana para obtención de estimaciones robustas de señales de espectro ensanchado en escenarios no gaussianos. Además el filtro de mediana fuzzy es una generalización de los filtros de median y de mediana. Nota que cuando la anchura de las funciones de pertenencia $\sigma \rightarrow \infty$ el filtro de mediana fuzzy proporciona la media aritmética del vector ordenado r_o . Por otra parte cuando la anchura de las mismas $\sigma \rightarrow 0$ el filtro de mediana fuzzy es equivalente al filtro de mediana. Esta propiedad es muy útil ya que con el mismo detector se puede obtener robustez a diferentes distribuciones de ruido.

En la siguiente sección se aplica el filtro de mediana fuzzy tanto a los detectores CDMA mono y multi-usuario. En el caso de detección multi-usuario y para mejorar los resultados del detector FM multietapa este trabajo propone incorporar en su última etapa el filtro de mediana fuzzy. A continuación, en el apartado de simulaciones se muestran los resultados conseguidos.

6 SIMULACIONES

En esta sección consta de dos grupos de simulaciones: i) estudio comparativo de las prestaciones de los detectores monousuario; y ii) estudio de la eficiencia de los detectores multiusuario. El vector signatura de cada usuario consiste de una secuencia maximal de $N=31$ chips. En las simulaciones, el ruido impulsivo se modela mediante (2), donde f_n y f_i son procesos gaussianos y los parámetros ε y γ^2 se han escogido de tal manera tal que la potencia de ruido total sea constante e igual a $\sigma^2 = (1 - \varepsilon)\sigma_n^2 + \varepsilon\sigma_i^2$.

6.1. Detectores monousuario de espectro ensanchado

Fig. 3 compara los detectores basados en el filtro adaptado, el filtro de mediana convencional y el filtro de mediana fuzzy presentado en (13). El escenario de simulación consiste en un solo usuario CDMA, ruido no gaussiano ($\varepsilon=0.01$). La figura muestra que el filtro de mediana fuzzy es el que presenta mejores resultados. En cambio cuando $\varepsilon=0.1$ el filtro de mediana convencional es el mejor y para $\varepsilon=0$ el óptimo es el filtro adaptado. No obstante, se ha de hacer constar que siempre el rendimiento que ofrece el filtro de mediana fuzzy se sitúa en medio del que ofrecen los filtros de mediana y adaptado.

También comentar que las simulaciones llevadas a cabo en presencia de interferencias de múltiple acceso (MAI),

el filtro de mediana fuzzy ofrece los mejores resultados para cualquier valor de impulsividad del ruido. Los detectores monousuario FM son más sensibles a las interferencias MAI que el filtro adaptado convencional. Es decir, el filtro adaptado puede ofrecer mejores estimaciones que el filtro de mediana clásico cuando el ruido del canal es impulsivo.

6.2. Detectores multi-usuario CDMA .

Fig. 4 compara varios detectores multiusuario: el Decorrelador Lineal (DL), el Decorrelador No Lineal (DNL) [8], banco de Filtros de Mediana (FM) (Fig. 2) y un banco de filtros FM incorporando el filtro de mediana fuzzy en su última etapa. La relación de potencia del señal a interferencia (SIR) es igual a -10 dB. En la figura, para altas energías de la señal interferente (bajas SNR), el detector FM multietapa estima bien las señales interferentes y consecuentemente su efecto se reduce enormemente. De cualquier otra forma el detector fuzzy en la última etapa mejora los resultados.

Finalmente, Fig. 5 y 6 comparan el comportamiento del Decorrelador No Lineal (DNL) con el que ofrece el Filtro de Mediana Multietapa (FMM). En estas simulaciones se ha considerado un escenario con $K=6$ usuarios y un control de potencia perfecto. Nota que el carácter impulsivo del ruido del canal de comunicaciones puede degradar de una manera importante la eficiencia del detector DNL respecto del detector multietapa FMM. Por otra parte el sistema DNL muestra un mejor comportamiento cuando el ruido es más Gaussiano (valores pequeños de ε). En las diferentes figuras, observamos que la propuesta de incorporar al filtro de mediana convencional en su última etapa lógica fuzzy mejora su comportamiento. Por tanto, de esta manera se demuestra mediante simulación, que el comportamiento del filtro de mediana fuzzy produce una solución intermedia para diferentes condiciones de ruido de los canales ε -mixture.

7 CONCLUSIONES

Este trabajo tiene por objetivo demostrar la utilidad de la teoría de conjuntos fuzzy en la obtención de un detector CDMA robusto. En la detección de un solo usuario la solución propuesta presenta una calidad que comprende desde la que ofrece el filtro de mediana clásico a la que muestra el filtro adaptado. En la detección multi-usuario, el detector fuzzy mejora el comportamiento del filtro de mediana convencional (FM) en situaciones con poca presencia de interferencias de múltiple acceso (MAI) i/o de ruido impulsivo.

Referencias

- [1] K.E.Barner, A.Flaig, G.R.Arce, "Fuzzy time-rank relations and order statistics", IEEE Signal Process. Lett. 5 (October 1998), 252-255.
- [2] K.L.Blackard et al., "Measurements and models of radio frequency impulsive noise for indoor wireless communications," IEEE J.Select. Areas Commun., vol.11, pp.991-1001, Set. 1993.
- [3] A.Flaig et al., "Fuzzy ranking: theory and applications," Signal Processing, Special issue on Fuzzy Logic in Signal Processing, Guest Editor Ana Pérez-Neira, vol.80, no.6, Junio 2000.
- [4] P.J.Huber, "Robust Statistics". New York: Wiley, 1981.
- [5] V.Katkovnik, "A new concept of adaptive beamforming for moving sources and impulse noise environment," Signal processing 80 (2000), 1863-1882.
- [6] D.Middleton, "Channel modeling and threshold signal processing in underwater acoustics: An analytical overview," IEEE J. Oceanic Eng., vol. OE-12, pp. 4-28, 1987.
- [7] X.Wang, H.V.Poor, "Robust multiuser detection in non-gaussian channels," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 47, n°.2, Feb. 1999.
- [8] R.Wichman et al., "Matched median detectors for multiple-access channels," Signal Processing 38 (1994), 345-357.
- [9] L.Yin, et al. "Weigthed median filters: a tutorial," IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 43, no.3, Marzo 1996

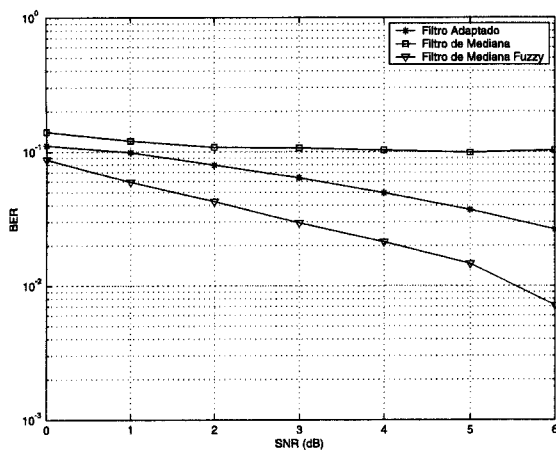


Figura. 3. BER vs. SNR. Estudio comparativo cuando $\epsilon=0.01$. Detección Monousuario

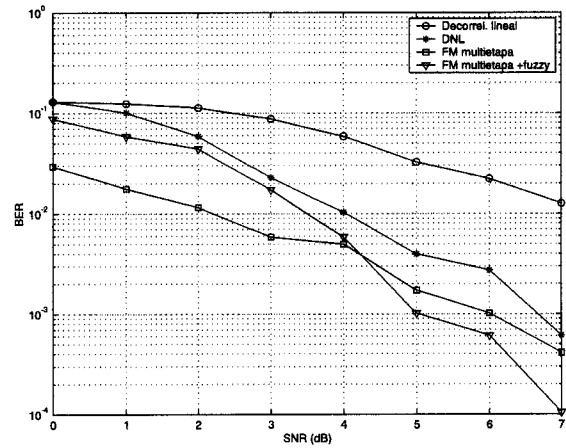


Figura. 4. BER vs. SNR. Estudio comparativo cuando $\epsilon=0.1$ y hay 2 usuarios presentes (SIR=-10dB) Detección Multiusuario

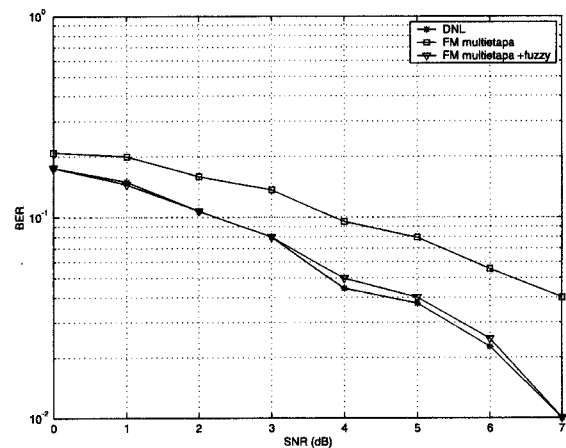


Figura. 5. BER vs. SNR. Estudio comparativo cuando $\epsilon=0$ y hay 6 usuarios presentes

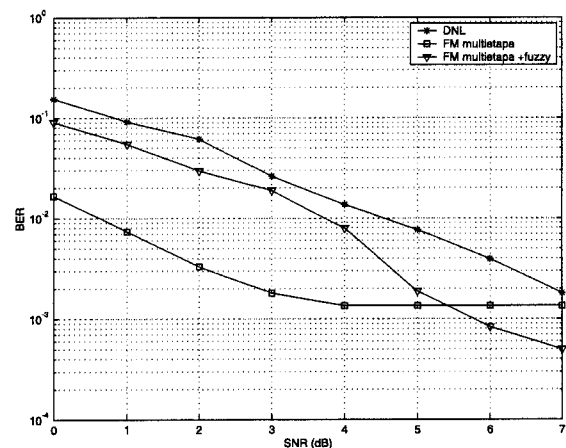


Figura. 6. BER vs. SNR. Estudio comparativo cuando $\epsilon=0.1$ y hay 6 usuarios presentes

CONTROLADOR BORROSO HARDWARE SECUENCIAL DE PROPÓSITO GENERAL

Gerardo Aranguren Aramendía

Dpto de Electrónica y
Telecomunicaciones
jtpararg@bi.ehu.es

Eduardo M. González Izquierdo

Dpto de Electrónica y
Telecomunicaciones
gonzalez_izquierdo@yahoo.es

Jonatan Alonso Ibáñez

Dpto de Electrónica y
Telecomunicaciones
alibj@wanadoo.es

E.T.S. Ingenieros, UPV/EHU, Alameda Urquijo s/n, 48013 Bilbao

Resumen

En el congreso Estylf'98 se presentó el diseño de un circuito de control borroso hardware denominado CICIB (Circuito Integrado de Control por Inferencia Borrosa) que conseguía combinar la velocidad ofrecida por las técnicas de paralelismo utilizadas en los ASICs¹ con la flexibilidad proporcionada por un tratamiento secuencial de las instrucciones similar al utilizado en los microprocesadores. En el presente artículo se presenta una variante de dicho circuito que pretende aumentar el grado de paralelismo del diseño anterior, modificando el sistema de cálculo de la función de pertenencia pero manteniendo el tratamiento secuencial.

Palabras Clave: Control borroso, Pipe-line.

1 INTRODUCCIÓN

Dentro de las aplicaciones del control borroso son numerosas aquellas que requieren llevar a cabo operaciones en tiempo real. En estos casos la velocidad de procesamiento es un factor clave, y por ello es necesario recurrir a soluciones hardware que presenten las prestaciones requeridas.

Entre las distintas posibilidades de implementaciones hardware, el empleo de ASICs es la que permite obtener unas características óptimas en cuanto a velocidad, gracias a la utilización de técnicas que permiten un alto grado de paralelismo en el tratamiento de los datos. Como ejemplo de estas arquitecturas cabe citar la presentada por Samoladas y Petrou [4] o la presentada por Watanabe [5]. Sin embargo este tipo de controladores borrosos suele tener importantes limitaciones en el aspecto de la flexibilidad. Para aumentar estos valores es necesario

recurrir a ampliaciones de tipo sistólico, lo que, en caso de que no trabajemos al máximo de sus posibilidades, implica el desaprovechamiento de parte del silicio utilizado.

En general los controladores borrosos comentados anteriormente suelen trabajar con sistemas para el cálculo de la función de pertenencia adaptados a cada una de las variables de entrada: cada una de ellas presenta un sistema independiente, de modo que varias de ellas pueden ser tratadas de modo simultáneo.

En [3] se detalló el funcionamiento de CICIB, un circuito que utilizaba elementos paralelos, fundamentalmente pipeline, que permitían trabajar a una elevada velocidad, analizando unos 10 millones de instrucciones por segundo. La diferencia de este circuito respecto a los anteriormente comentados es que utiliza un procesamiento secuencial de los datos similar al de un RISC para conseguir unas elevadas condiciones de flexibilidad: 32 variables de entrada, 32 variables de salida y un número de reglas limitado únicamente por el tamaño de la memoria destinada a almacenarlas. Para ello se utiliza como sistema de cálculo del grado de cumplimiento una LUT² genérica que permite tratar cualquier entrada.

La ventaja de este sistema genérico es que los recursos requeridos no crecen con el número de variables de entrada permitidas, y la desventaja es que únicamente puede ser tratada una subpremisa por ciclo.

En el presente artículo se propone un nuevo circuito con dos variantes que, exceptuando el número de variables de entrada permitidas, presenta unas características de flexibilidad idénticas a las de CICIB, y una mayor velocidad de procesamiento gracias a la incorporación de un sistema de cálculo de los grados de pertenencia similar al utilizado en los primeros circuitos comentados: con un elemento específico para cada variable de entrada.

¹ ASIC: Application Specific Integrated Circuit. Circuito Integrado de Aplicación Específica.

² LUT: Look-up table. Memoria destinada a almacenar los resultados de una operación, permitiendo acelerar o simplificar su obtención.

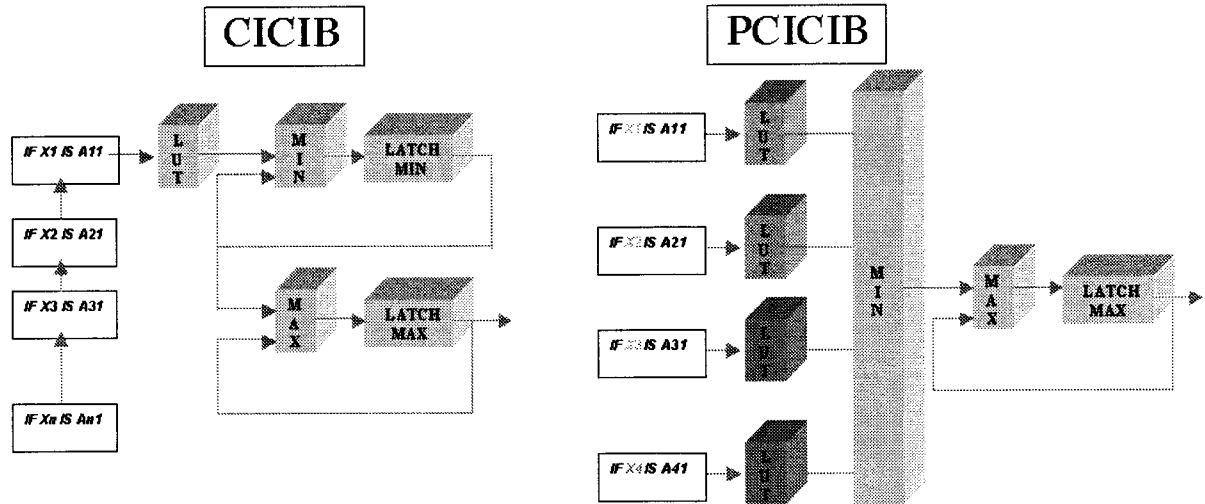


Figura 1: Diagrama de bloques de CICIB y de PCICIB.

2 MODIFICACIONES INTRODUCIDAS EN EL NUEVO CIRCUITO

La primera versión del nuevo circuito, al que se ha denominado PCICIB, permite un máximo de 4 variables de entrada. Tal y como se muestra en la Figura 1 cada una de estas variables dispondría de un sistema propio para cálculo de la función de pertenencia. De este modo se permite el tratamiento simultáneo de las 4 variables y se consigue procesar cada regla con una única instrucción.

2.1. MODIFICACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN IF

Respecto al juego de instrucciones utilizado para CICIB que se describía en [3], es necesario modificar el formato de la instrucción IF. Mientras que en el circuito anterior esta instrucción debía aportar la información referida a una sola variable, para el nuevo circuito deberá incluir la información relativa a las 4 variables consideradas.

Como muestra la Figura 2, para un bus de instrucciones con una anchura de 16 bits en el que debemos reservar al menos uno de ellos para el código de la instrucción, podemos asignar a cada variable i de entrada un campo formado por 3 bits ($L_i L_i L_i$) en el que aparece el código del literal asociado a cada variable en la regla. De este modo disponemos de 8 valores posibles para el código, de los cuales uno se reserva para indicar que la variable no participa en la regla. Como consecuencia cada variable de entrada puede ser definida con un máximo de 7 literales. La única limitación respecto a los literales de salida viene dada por los 6 bits utilizados para definirlos.

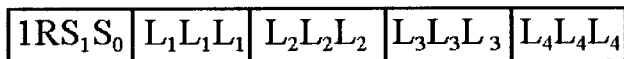


Figura 2: Formato de la instrucción IF en PCICIB

2.2. CÁLCULO DEL GRADO DE PERTENENCIA

El proceso del cálculo del grado de pertenencia se lleva a cabo en 4 sistemas independientes, uno para cada variable. Cada uno de ellos está formado por una memoria LUT, en la que se almacena la información mínima necesaria acerca de su variable, y un sencillo elemento que se encarga de obtener el grado de cumplimiento para el literal que aparece en la instrucción a partir de dicha información.

Una cuestión importante, sobre todo de cara a la realización de una versión que permita trabajar con un mayor número de variables de entrada, es minimizar el tamaño de la LUT correspondiente a cada variable. Para ello se ha impuesto dos condiciones: la limitación del factor máximo de solapamiento de los literales a 2 y la normalización del universo de discurso borroso. Esta segunda condición consiste en que para todo elemento x del universo de discurso X se cumpla:

$$\sum_i \mu_i(x) = 1 \quad (1)$$

Siendo $\mu_i(x)$ el grado de cumplimiento del literal i para el elemento x .

Si se cumplen las condiciones anteriores bastará con disponer de la información asociada a un literal para cada uno de los posibles valores de la variable de entrada. Esto implica que para grados de cumplimiento de 6 bits y un tamaño del vector de grados de cumplimiento de 128, se requeriría una LUT con 768 (128*6) bits para almacenar la información asociada a cada variable.

En la Figura 3 se representa el formato en que se almacena dicha información. Para los puntos situados entre P_{i-1} y P_i en la LUT se almacenará el valor del grado de cumplimiento del literal i .

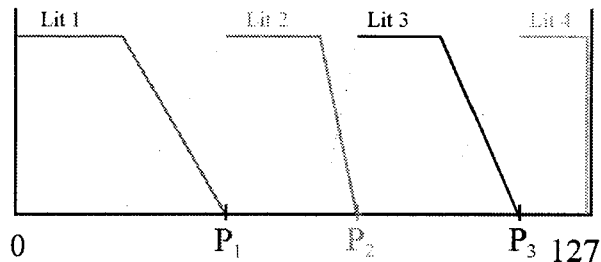


Figura 3: Información almacenada acerca de una variable.

A partir de μ_i (grado de cumplimiento almacenado en la LUT), i (código del literal al que hace referencia dicho grado de cumplimiento) y j (código del literal que aparece en la subpremisa de la variable) un elemento posterior a la LUT se encarga de hallar el grado de cumplimiento de la subpremisa (μ_j).

La tarea de este elemento de cálculo es bastante sencilla, si tenemos en cuenta las dos condiciones impuestas y el formato de almacenamiento utilizado en la LUT se pueden dar tres casos:

$$a) \text{ Si } j = i: \quad \mu_j = \mu_i \quad (2)$$

$$b) \text{ Si } j = i+1: \quad \mu_j = 1 - \mu_i \quad (3)$$

$$c) \text{ En otro caso:} \quad \mu_j = 0 \quad (4)$$

2.3. AMPLIACIÓN DEL NÚMERO DE VARIABLES DE ENTRADA

Para las aplicaciones que requieran el procesamiento de más de cuatro variables de entrada las reglas quedarán divididas en varias instrucciones IF, cada una de las cuales llevará la información asociada a 4 variables.

Para ello se utilizarán los bits S_1S_0 de la instrucción IF presentados en la Figura 2 a modo de índice: en función del valor de estos bits la información que les siga estará referida a un grupo de 4 variables u otro. De este modo se podrá trabajar con aplicaciones que utilicen hasta 16 variables de entrada manteniendo un máximo de 4 subpremisas analizadas por ciclo.

De cara al circuito es necesario introducir una LUT adicional que pueda almacenar los datos para cada nueva variable de entrada permitida por el circuito.

Además del aumento de memoria asociado y de la introducción de algunos multiplexores no se requiere incorporar nuevos elementos. Se produce una reutilización de los recursos empleados que evita los problemas de desaprovechamiento de recursos en condiciones de baja carga que se producían en arquitecturas con un mayor grado de paralelismo.

3 SIMULACIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DE LOS CONTROLADORES

Para la verificación del correcto funcionamiento de los dos controladores (CICIB y PCICIB) se ha utilizado el programa Max+plus II de Altera. Con este software se ha diseñado un circuito denominado Entorno que simula las condiciones de funcionamiento en una aplicación orientada al guiado automático de vehículos.

Las condiciones en las que se da esta aplicación se muestran en la Figura 4. Consistiría en un coche que se mueve dentro de un espacio de naturaleza discreta limitado por 4 paredes, en el que las coordenadas X e Y varían entre 0 y 1000. El coche virtual está equipado con tres sensores, con orientaciones separadas por un ángulo de 45° , que se encargan de proporcionar las distancias a la pared más próxima. El coche se desplaza con una velocidad fija de modo que en cada movimiento avanza una distancia de 10 unidades de longitud.

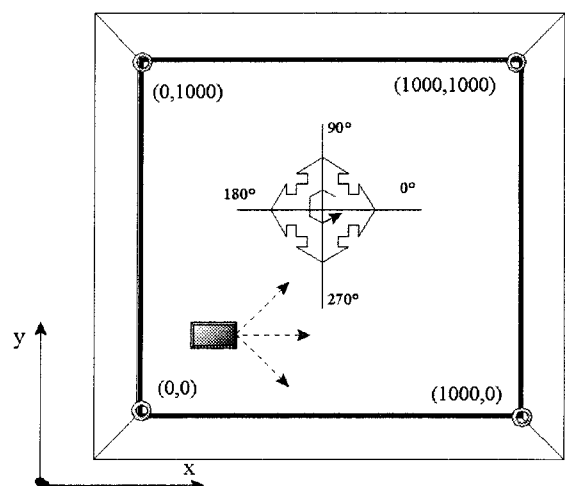


Figura 4: Entorno de simulación.

El funcionamiento de la simulación comienza con el cálculo en el circuito Entorno de las tres distancias medidas por los sensores para la situación inicial. El

controlador escogido lleva a cabo el procesamiento borroso, y a partir de las tres distancias nos proporciona el giro que debe llevar a cabo el coche de acuerdo con las reglas utilizadas.

Tal y como se representa en la figura 5, conociendo el giro impuesto por el controlador, dentro de Entorno se puede determinar la inclinación del nuevo movimiento. Al ser la velocidad un valor constante se puede obtener la siguiente posición del coche. Esta posición se comunica a tres bloques independientes que obtienen la distancia medida por cada uno de los tres sensores.

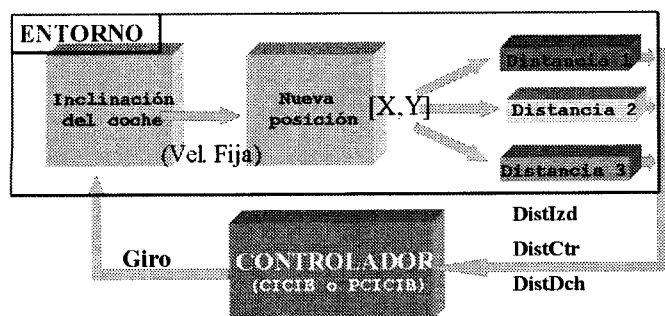


Figura 5: Funcionamiento del proceso de simulación.

Para el funcionamiento de la aplicación se ha generado un programa de reglas mediante el software descrito en [2]. Este programa se basa en una estrategia de guiado consistente en conducir tomando como referencia la pared derecha. El recorrido obtenido es idéntico para los dos controladores y se muestra en la Figura 6.

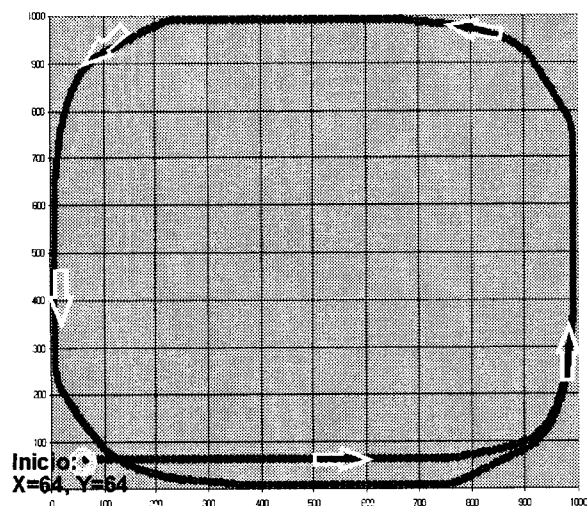


Figura 6: Recorrido obtenido en las simulaciones.

4 ANÁLISIS COMPARATIVO

4.1. VELOCIDAD DE PROCESAMIENTO

Las arquitecturas de control borroso tradicionales utilizadas para la realización de circuitos en ASICs presentan un alto grado de paralelismo que permite el tratamiento simultáneo de múltiples reglas.

En el circuito CICIB se utiliza un tratamiento secuencial subpremisa a subpremisa para buscar una mayor flexibilidad. Este sistema no permite obtener una velocidad tan elevada como el caso anterior, aunque esta desventaja se ve compensada en parte con la utilización de técnicas pipe-line y eficientes algoritmos borrosos [1] que permiten acelerar el procesamiento.

El nuevo circuito, PCICIB, incorpora al anterior un sistema para el cálculo del grado de pertenencia adaptado a cada variable, lo que permite el tratamiento simultáneo de 4 subpremisas. Para la versión que permite hasta 4 variables esto significa el procesamiento de una regla por instrucción. Con el conjunto de reglas utilizado en la simulación se ha llegado a multiplicar la velocidad de CICIB por un factor de 2.18, aunque este valor puede variar según el caso escogido.

4.2. FLEXIBILIDAD

Los controladores implementados en ASICs suelen presentar importantes restricciones en cuanto a las reglas y variables de entrada y salida permitidas. De este modo el circuito presentado en [4] sólo permite trabajar con cuatro variables de entrada y una única variable de salida. También se limita el número de reglas a 40. Es posible trabajar con valores superiores a los anteriores pero a costa de multiplicar los recursos requeridos.

CICIB y PCICIB, gracias a su tratamiento secuencial, permiten trabajar con una cantidad de variables de salida y un número de reglas sólo limitado por la anchura del bus de instrucciones y el tamaño de la memoria externa de instrucciones respectivamente. En el caso de CICIB el número de variables de entrada permitidas (32) tampoco está limitado por los recursos del sistema, mientras que para PCICIB la memoria requerida si que depende del número de variables de entrada.

4.3 MEMORIA REQUERIDA

En los circuitos de control borroso, exceptuando el proceso de deborrosificación, la mayoría de las operaciones con los datos se reducen simplemente a la

ejecución de comparaciones entre los mismos. Por ello la memoria requerida basta para obtener una idea bastante aproximada de los recursos (puertas lógicas) empleados por el circuito.

La arquitectura presentada por Samoladas en [4] tiene unos requerimientos mínimos de bits de memoria dados por:

$$\text{Mem.bits} = (N+1) \cdot P \cdot L \cdot \square \quad (5)$$

Siendo N el número de variables de entrada permitidas, P el número de reglas, L la amplitud del vector de grados de cumplimiento y $\square$ el número de bits utilizados para la codificación de los grados de cumplimiento.

En CICIB los bits de memoria requeridos vienen determinados por las dimensiones de la LUT genérica utilizada para la obtención de los grados de cumplimiento, lo que implica que este valor no dependerá del número de variables de entrada ni de las reglas consideradas:

$$\text{M.b.} = 16 \cdot L \cdot \square \quad (6)$$

Para PCICIB la cantidad de memoria requerida sí depende directamente del número de variables de entrada:

$$\text{M.b.} = N \cdot L \cdot \square \quad (7)$$

Para el caso en que se utilicen parámetros de diseño de $N=4$, $L=128$ (variables de entrada de 7 bits), $\square=6$ y $P=40$ la primera arquitectura necesitaría 153600 bits de memoria, mientras que CICIB requería 12288 bits y PCICIB sólo 3072 bits.

Como se puede observar los requerimientos de la primera arquitectura pueden llegar a ser demasiado altos en algunos casos. Aunque para el ejemplo mostrado CICIB requiere una mayor cantidad de memoria, la ventaja que presenta es que esta cantidad es independiente del número de variables de entrada. De este modo para 16 variables la cantidad de memoria requerida por los dos últimos circuitos sería similar, y a partir de este valor los requerimientos de PCICIB serían cada vez más superiores a los de CICIB.

5 CONCLUSIONES

Las arquitecturas tradicionalmente utilizadas para la implementación de controladores borrosos en ASICs proporcionan una velocidad muy elevada pero presentan limitaciones importantes en cuanto a la flexibilidad por lo que pueden resultar inadecuadas para ciertas aplicaciones. A la hora de fijar unos valores para el diseño de un

circuito de este tipo corremos el riesgo de que si son demasiados bajos, el circuito no se adapte a las prestaciones requeridas, mientras que si los valores son demasiado altos en muchos casos se producirá un desaprovechamiento de los recursos empleados.

El circuito CICIB consigue evitar el problema anterior y presenta una elevada flexibilidad a la vez que ofrece unas prestaciones altas en cuanto a la velocidad.

En este artículo se ha presentado un nuevo circuito, PCICIB, que permite aumentar la velocidad del anterior sin aumentar los recursos requeridos siempre que el número de variables de entrada con las que se trabaje no sea superior a 16.

De este modo se dispone de dos circuitos de control alternativos cuyo correcto funcionamiento también se ha comprobado en este trabajo de investigación. Uno (PCICIB) permite obtener una mayor velocidad en el tratamiento de los datos para aplicaciones que no requieran más de 16 variables de entrada. Otro (CICIB) dispone de un sistema de cálculo del grado de pertenencia genérico, de modo que los recursos requeridos son independientes del número máximo de variables de entrada permitidas, y este valor sólo estará condicionado por otros factores como puede ser el tamaño del bus de instrucciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado por la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea: UPV 00147.345-13475

Referencias

- [1] G. Aranguren, M. Rodríguez y M. Barrón, "Controlador Secuencial Segmentado para Lógica Borrosa Implementado en FPGA", *ESTYLF'96*, Oviedo, Pág. 255-259, 1996.
- [2] G. Aranguren, M. Rodríguez, J. López de Arroyabe and N. Altarriba, "Software de compilación, simulador y emulación borrosos", *ESTYLF'97*, Tarragona, Pág. 77-82, 1997.
- [3] G. Aranguren, M. Barron, J. López de Arroyabe and A. Chavarria, "Controlador borroso implementado en FPGA", *ESTYLF'98*, Pamplona, Pág. 425-430, 1998.
- [4] V. Samoladas, L. Petrou, "Special-purpose Architectures for Fuzzy Logic Controllers", *Microprocessing and Microprogramming*, vol. 40, n° 4, Pág. 275-289, 1994.
- [5] H. Watanabe, W. D. Dettloff and K. E. Yount, "A VLSI Fuzzy Logic Controller with Reconfigurable, Cascadable, Architecture", *IEEE J. Solid State Circ.*, vol. 25, n° 2, Pág. 376-381, 1990.

Microcontroller-Based versus Mixed-Signal Programmable Chip Fuzzy Controller in A Soft-Start of DC Motor Application

Rafael Navas-González
Dto. de Electrónica
Complejo Tecnológico,
Campus de Teatinos
Universidad de Málaga
29071-Málaga
email:navas@ctima.uma.es

Fernando Vidal Verdú
Dto. de Electrónica
Complejo Tecnológico,
Campus de Teatinos
Universidad de Málaga
29071-Málaga
email:vidal@ctima.uma.es

Angel Rodríguez Vázquez
Dto. de Diseño de Circuitos
Analógicos y de Señal Mixta
C N M-Universidad de Sevilla
Edificio CICA, C/Tarfia s/n,
41012-Sevilla
email:angel@cnm.us.es

Abstract

In this paper we present and compare results obtained from two examples of soft-start of DC motors, for a mixed-signal programmable chip or a microcontroller based system implementing a fuzzy control-loop. In the presented application, the controller determines the proper duty cycle of a PWM control circuit for the DC-DC switching converter that powers the motor drive. The main goal is getting a safe and fast start of the motor at constant starting torque. Experimental results show that a very efficient control is only possible in the mixed-signal chip case.

Keywords : Fuzzy Control, DC-Motors, Soft Start, Mixed-Signal, Fuzzy Hardware, ASIC, Microcontrollers, Switching Converters.

fuzzy computations, while a digital shell allows to program dynamically this core to increase the complexity [15]. Then, instead of having the analog circuitry around a digital heart that makes the computations, we use an analog core which is programmed by digital circuitry around it. This provides easy programming access to and from other digital systems, at the same time that the processing and interface with the outer world is carried out by the analog core.

On the other hand, because of the spreading of the microprocessor technology in the industry, most of the reported fuzzy controllers are usually implemented with microcontroller or DSP based systems, which usually include real time control resources on chip, like complex timer unit, A/D, D/A interfaces, and complex interrupt controllers, and they feature complex computing capabilities, flexibility and low cost. In many of these applications the fuzzy processing is the main task that the microcontrollers must execute [7][10][17], while it is only one among others in the global control system in other cases [1][16][19].

1 INTRODUCTION

Power systems and motion control are fields where fuzzy systems and fuzzy controllers are widely applied in recent years [2][3][8][9][11][13]. Many of these applications are related to real-time control of non-linear systems, where complex control laws, which include plant modelling and parameter estimation tasks, are often required to cope with non linearity, parameter variation, and system disturbance effects [1][4][5][6][7][10][14][16][17][18][19].

In [14] we presented an application to soft-start of a DC motor to illustrate the performance of a new proposed mixed-signal programmable fuzzy controller chip which increases the complexity while preserves most of the advantages of pure analog monolithic fuzzy controllers against their digital counterpart: small input-output delay time and good performance in terms of area and power consumption. The controller chip is based on a multiplexed strategy where a very simple programmable analog core, which implements the *simplest fuzzy system*, performs the

Thus, despite the good performance of the reported fuzzy chip, it could be argued that a similar one is achieved by this general purpose processors. In this paper we try to answer this question by comparing both approaches in the same application example. Specifically, we present the results obtained when a microcontroller replaces the fuzzy controller chip in the closed-loop control example in [14]. In the application example the controller determines the proper duty cycle to a PWM control circuit for the DC-DC switching converter that powers the motor drive, from the sensed motor speed, the armature current and the programmed control law. This example was chosen in order to force high speed in the control action.

From comparison we conclude that, although the microcontroller based control seems to works properly, and performs the control strategy, it cannot tight the current close to a safe value at the very beginning of the start, and the starting torque is not kept as stable as the fuzzy controller chip does. In others words, fuzzy chip is able to respond to changes in the armature current that the

microcontroller based system cannot, and a very efficient control is only possible in the former case.

Finally, although the enhanced computation speed of new microcontrollers can be exploited to implement complex control algorithms with very high sampling rate, some times high performance control systems require the partition of the control task into modules that are executed concurrently in several processors. Then, the derived improvements will not be only in CPU computing but in the integration level that will permit the incorporation of more complex devices on the same chip to work in parallel [12]. For this kind of control systems, an approach with semi-custom ASIC, PLD's or system compatible macro-cells will be privileged [4][5][6][14][18]. In this context, the circuitry implemented in [14] in an ASIC could be adapted to build a macro-cell in this more powerful processors, to perform low-level, high-speed control tasks in parallel with the other high-level control algorithms. Hence, the research in mixed signal complex fuzzy cells is justified, not just to build ASICs, but to be parts of more complex chips.

In Section 2, we will briefly explain the control strategy and describe the experimental system used in both control examples. In Section 3, the microcontroller based realization results are presented and compared with the reported fuzzy controller chip realization results. Finally, section 4 collects the conclusions.

2 APPLICATION EXAMPLE: SOFT-START OF DC MOTORS.

2.1 CONTROL STRATEGY

As said above, the control consists in providing a proper duty cycle to the switching converter that powers a DC electrical motor. In [14] it was discussed in more detail the closed-loop control strategy adopted, which mainly tries to get a safe and fast start of the motor.

In brief, for the closed-loop control scheme in Fig.1(a), if we consider the motor is a time invariant plant, we can write the following set of equations for the motor dynamic and control law respectively,

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \Phi_{\omega}(\omega(t), I_m(t), D) \\ \dot{I}_m(t) &= \Phi_{I_m}(\omega(t), I_m(t), D) \\ D &= g(\omega(t), I_m(t))\end{aligned}\quad (1)$$

The latter equation should be chosen to force the plant state $(\omega(t), I_m(t))$ to follow a given target trajectory $(\omega_d(t), I_{md}(t))$. In the examples, the target trajectory is

determined by two conditions: first, the starting must be safe; second, it should be as fast as possible.

In order to reach these goals, the control function $D = g(\omega(t), I_m(t))$ is built with the fuzzy approach as follows

$$\text{IF } I_m(t) \text{ is below } I_{m\max} \text{ THEN } D = D_T \quad (2)$$

$$\text{IF } I_m(t) \text{ is above } I_{m\max} \text{ THEN } D = D_{\min} \quad (3)$$

where D_T and $D_{\min}$ are respectively the target and the minimum duty cycle. The previous rules force the current $I_m(t)$ to keep close to $I_{m\max}$, the maximum safe armature current value. Simultaneously, the target speed trajectory is forced by providing the duty cycle determined by the DC motor steady state equations, in a way that the starting trajectory could be figured out as a sequence of steady states

$$\text{IF } I_m(t) \text{ is } I_{m\max} \text{ THEN } D = \frac{K_{\phi}}{V_{cc}}\omega(t) + \frac{R_m}{V_{cc}}I_m(t), \quad (4)$$

where K_{ϕ} and R_m are motor constant parameters, and V_{cc} the power supply voltage.

Note that, although expressed as IF-THEN rules, the previous sentences are not the final fuzzy rules, which are obtained by interpolating the ramp in (4) as well as forcing (2) and (3) for every value of ω along this ramp and taking into account that the control finishes once the duty cycle reaches the value it has in the target steady state.

2.2 EXPERIMENTAL SYSTEM DESCRIPTION

Fig.1(b) illustrates the experimental system building blocks used in the control examples. The motor drive used in both examples is the same. The armature current and speed are sensed by means of a resistor and a tachometer respectively, and the corresponding sensed signal are used as the controller input variables.

In the example in [14] the fuzzy controller is a mixed-signal programmable chip, while a microcontroller based system is used in the present work. Thus, in the former some interface circuitry is needed at input and output of the controller to adapt the ranges as well as to translate the output into a PWM circuitry control signal, as Fig.1(b) shows. In the second case, the chosen microcontroller incorporates A/D converter on chip, as well as the PWM circuitry, so it provides the switch control signal S_C in Fig.1(b), although some interface circuitry is yet needed to adapt the input signals to the A/D input ranges. Thus, because of the different interface requirements, the interface circuitry blocks in Fig.1(b) have little differences in both examples. In addition, the power supply V_{cc} value and the frequency of the PWM signal S_C are a little bit

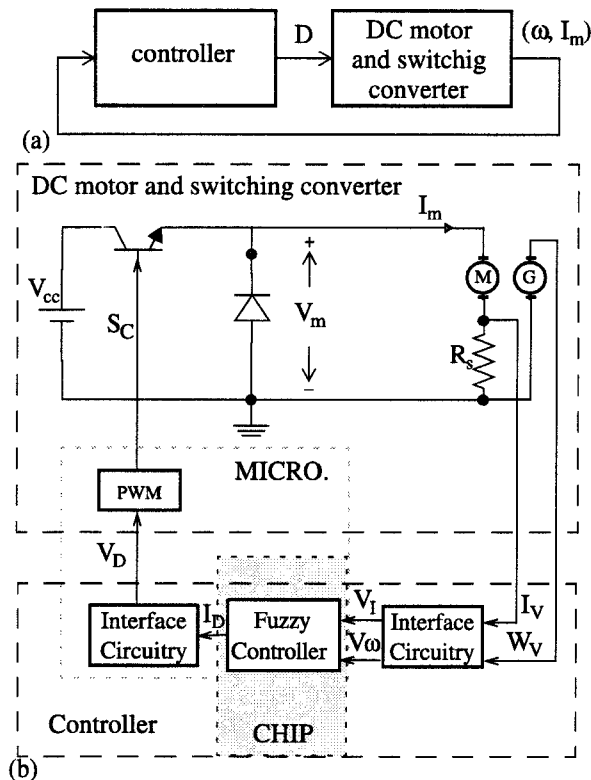


Fig. 1: Closed loop soft-start of a DC motor by a fuzzy controller: a) Concept; b) microcontroller and ASIC implementations.

different in both examples, but the differences do not have much effect on the comparison items, because the difference in the supply voltage is roughly compensated by different final duty-cycle targets, while the frequencies of S_C are in the same order of magnitude (100Khz and 62.7Khz. for the chip and microcontroller example respectively).

The fuzzy controller chip is widely described in [14] and [15], thus we only highlight its main features here;

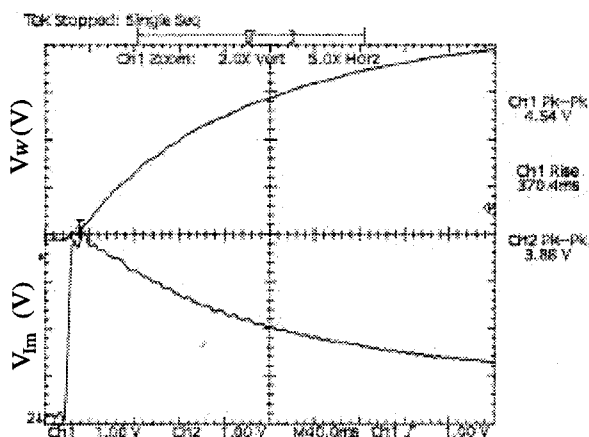


Fig. 2: Direct connection starting of a DC motor: Speed curve (top); Armature Current curve (bottom)

specifically, the fuzzy controller has two inputs, implements 64 rules and the measured input-output delay is around 500ns.

The microcontroller based system includes a 16 bits CMOS M30624FGFP microcontroller from the M16C/62 family, and the development board MSA0654-G02, both from Mitsubishi. This microcontroller has been selected because it is very suitable to high speed control applications. The fuzzy controller in this case has also two inputs, one output and implements 49 rules. The fuzzy algorithm has been optimized and written in assembly language in order to get minimum program execution time. The execution time, taking into account A/D time conversion of the controller inputs is around 500 microsecond.

3 EXPERIMENTAL RESULTS AND COMPARISON

Fig.2 shows the starting curves for a direct-start experiment, which means that the motor is powered by the switching converter controlled by the signal S_C whose duty-cycle is kept constant at its maximum value $D_T = 99\%$. The sensed input $V_ω$ and V_{Im} are shown at the top and bottom of Fig.2 respectively. From this values the current peak measured value is 1.61A, 4.88 times larger than the steady-state motor current after starting, whose value is 0.33 A. On the other hand the measured rise time was 370.4ms.

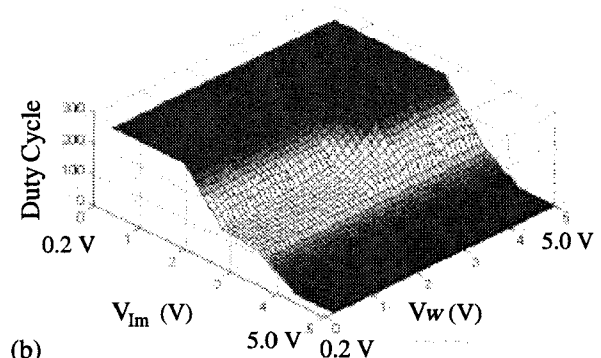
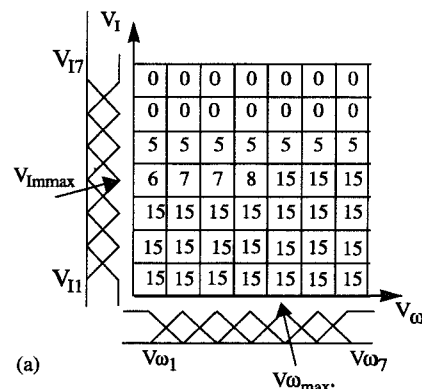


Fig. 3: Fuzzy rule set (a); and Control surface (b) for the microcontroller based application example

The curves in Fig.4 correspond to a soft-start experiment with the control strategy described above executed by the microcontroller based system. The fuzzy rule set and control surface implemented by the controller are shown in Fig.3. The sensed input V_w and V_{Im} are shown at the top and bottom of Fig.4 respectively. Note that V_{Im} rises when the motor is powered, although the control action forces it to reach a value close to I_{Imax} . This control action is kept until the motor speed is close to its final value. The measured rise time was 395.2ms, only 1.07 times larger than that obtained with the direct connection, and the measured current peak value is 0.96 Amp., 2.91 times larger than the final steady-state motor current, and close to the current peak target (1A).

From these data we could conclude that the soft-start control seems possible and work properly, providing almost the same rise time with an important reduction in the current peak value. However, if we compare the curves in Fig.4 with the curves in Fig.5, which correspond to the experiment with the chip in [14], the main difference we

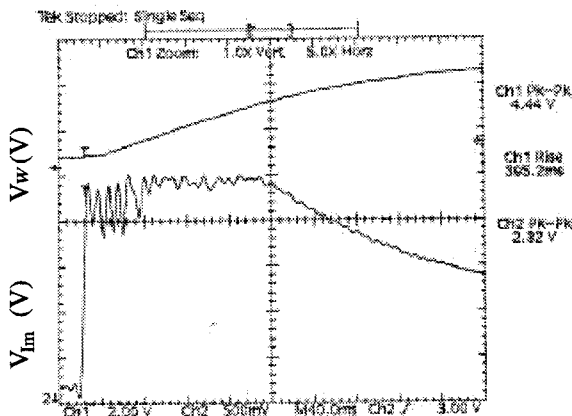


Fig. 4: Results from the soft-start procedure for the microcontroller based example: Speed V_w ; Armature Current V_{Im} .

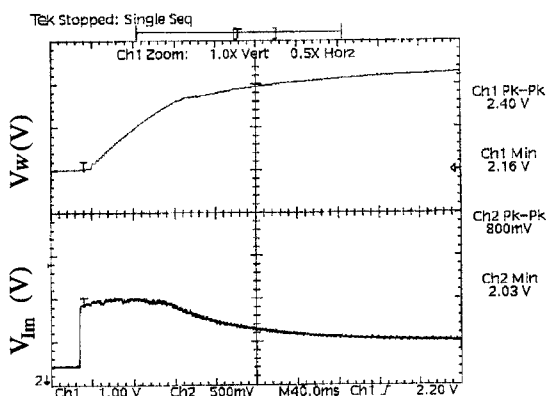


Fig. 5: Results from the soft-start procedure in [14]: Speed V_w ; Armature Current V_{Im}

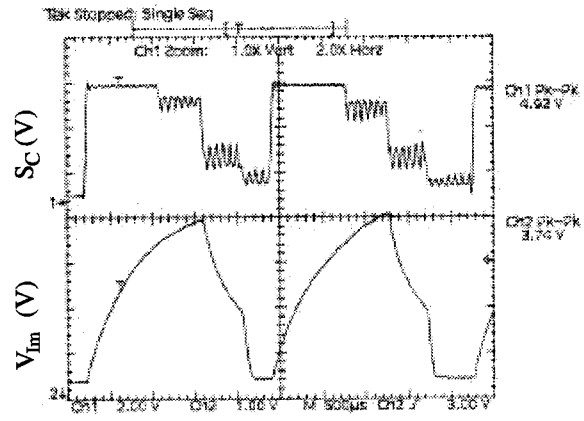


Fig. 6: Starting zoom : PWM signal S_C (top); Armature Current V_{Im} (bottom).

can note is that the current ripple during the control action in Fig.4 is larger than the current ripple in Fig.5.

To highlight the observed current ripple differences, Fig.6 and Fig.7 show views of the first starting milliseconds in both control actions. Fig.6 depicts a zoom in the microcontroller based system example, where the current variable (V_{Im}) and the PWM output signal (S_C) are shown. In this figure the duty-cycle changes correspond to different voltage levels in S_C , and illustrate the discrete-time fuzzy controller action. From this graphic is clear that the current responds to these changes, but it cannot be kept close to the target value. Moreover, it presents a large ripple.

On the other hand, Fig.7 is a view for the example in [14]. In this figure, the armature current variable (V_{Im}) and the fuzzy controller output (V_D) are shown. The figure illustrates the smoothness of the continuous-time chip control action and how the current is kept close to the target value, 0.8A in that case, in response to the control action.

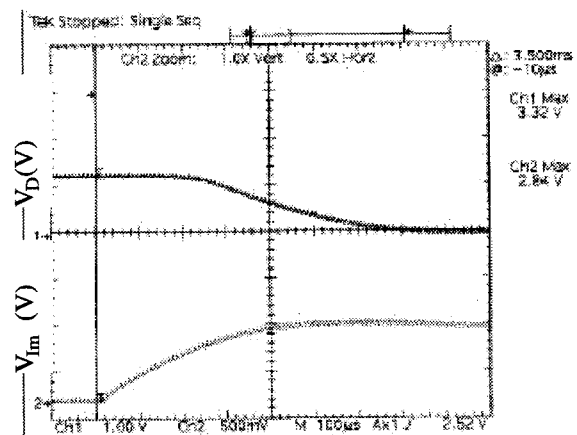


Fig. 7: Starting zoom in [14] example: Controller output V_D (top); Armature Current V_{Im} (bottom).

4 CONCLUSIONS

This paper compares results from two examples of closed-loop soft-start of a DC motor. In the first example a general purpose programmable fuzzy controller chip is included in the control-loop, while a microcontroller based system replaces it in the second. The fuzzy control strategy is the same in both examples, and the fuzzy rule matrix is also similar. From the point of view of the results in Fig.2 and Fig.4, we could conclude that the microcontroller based control seems to perform the control strategy according to the proposed target if a precise control of current and torque is not needed. On the contrary, a more detailed view in Fig.6 clearly shows that the microcontroller system cannot always keep the current close to the safe value and it neither can keep the starting torque constant.

On the other hand, with the use of a fast mixed-signal fuzzy controller a very efficient control is possible as Fig.5 and Fig.7 illustrate.

Finally, this paper does not intend to suggest that the microcontrollers should be replaced by ASIC in motor control tasks. It is not possible, specially in the case of induction motors or a more general motion control system, because some powerful computing resources are needed. Instead, we propose the use of external ASICs to implement low-level high-speed tasks in parallel with the microcontrollers operation. This could be implemented ideally by integrating the dedicated fuzzy control circuitry in [14] as a macro-cell inside a microcontroller or DSP.

References

- [1] F. Alonge, F.D'Ippolito, F.M. Raimondi and A.Urso, "Method for Designing PI-type fuzzy controllers for induction motor drives", IEE Proc.-Control Theory Appl., vol. 148, No.1, January 2001.
- [2] P.P. Bonissone et al., "Industrial Applications of Fuzzy Logic at General Electric", Proceedings of the IEEE, Vol. 83, pp. 450-465, March 1995.
- [3] B. K. Bose, "Expert Systems, Fuzzy Logic, and Neural Network Applications in Power Electronic and Motion Control" Proceedings of the IEEE, Vol. 82, pp. 1303-1323, August 1994.
- [4] M. Criscione, G. Giustolisi, A. Lionetto, M. Muscarà, G. Palumbo, "A Fuzzy Controller for Step-Up DC/DC converters", The 8th. IEEE Inter. Conf. on Electronics, Circuits and Systems (ICECS 2001), vol. 2 pp.977-980, 2001.
- [5] E. Franchi, N. Manaresi, R. Rovatti, A. Bellini, and G. Baccarani, "Analog Synthesis of Nonlinear Functions Based on Fuzzy Logic", IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 33, no. 6, June 1998.
- [6] S. Gomáriz, E. Alarcon, F. Guinjoan, E. Vidal-Idiarte, L. Martinez-Salamero, "Two-Rules-Based Boundary Layer Fuzzy Controller for DC to DC Switching Regulators" IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems (ISCAS, 2001), vol. 2 , pp.664-667, 2001.
- [7] P. Guillemín, "Fuzzy Logic Applied to Motor Control", IEEE Trans. on Industry Applications, vol 32, no.1, Jan./Feb. 1996.
- [8] F.Harashima, "Power Electronics and Motor Control.- A Future Perspective", Proceedings of the IEEE, vol.82, no.8,pp.1107-1111. August 1994.
- [9] R. M. Hilloowala and A. M. Sharaf, "A Rule-Based Fuzzy Logic Controller for a PWM Inverter in a Stand Alone Wind Energy Conversion Scheme", IEEE Trans. on Industrial Applications, vol. 32, no.1, pp. 57-65, Jan./Feb.1996.
- [10] P. Hyo-Sik and K. Hee-Jun, "Simultaneous Control of Buck and Boost DC-DC converter by Fuzzy Controller", Proceeding of the International Symposium on Industrial Electronics (ISIE2001), vol. 2, pp. 1021-1025, Korea 2001.
- [11] S.Jiancheng et at., "Study on Electricity Saving Fuzzy Controller of Asynchronous Motors Based on Fuzzy Logic", Proc. of the 5th. Inter. Conf. on Electrical Machines and Systems ICMS'01, vol. 2, pp. 774-777, Aug. 2001.
- [12] H. Le-Huy, "Microprocessors and Digital IC's for Motion Control", Proceedings of the IEEE, Vol. 82, pp. 1140-1163, August 1994.
- [13] B.R.Lin, "Analysis of Neural and Fuzzy-Power Electronic Control", IEE Proc.Sci. Meas. Technol., vol. 144, no. 1, Jan. 1997.
- [14] R. Navas-González, F. Vidal-Verdú, and A. Rodríguez-Vázquez, "A mixed-signal fuzzy controller chip and application example". Actas de ESTYLF'00, pp. 267-272, Sevilla, España, Septiembre 2000.
- [15] R. Navas-González, F. Vidal-Verdú, and A. Rodríguez-Vázquez, "Una Arquitectura para Controladores Neuro-Difusos CMOS Mixtos de Alta Complejidad". Actas de ESTYLF'98, pp. 217-223, Pamplona, España, Septiembre 1998.
- [16] K. Sang-Hoon and K. Lark-Kyo, "Design of a Neuro-Fuzzy Controller for the Speed Control applied to AC

DC Servo Motor" Proceeding of the International Symposium on Industrial Electronics (ISIE2001), vol. 1, pp. 435-440, Korea 2001.

- [17] M. Smyej, M. Saneba and A. Cheriti, "A Fuzzy Controller for a DC to DC Converter Using a Digital Integrator", Proc. of the 2000 IEEE Canadian Conf. on Electrical and Computer Engineering, vol. 1, pp.578-581, Halifax March 2000.
- [18] M. Smyej and A. Cheriti, "Fuzzy Logic Controller for a DC to DC Converter", Proc. of the 1999 IEEE Canadian Conf. on Electrical and Computer Engineering, vol. 2, pp.1020-1023, Edmonton May 1999.
- [19] K. Young-Ho and K. Lark-Kyo, "Design of Neuro-Fuzzy Controller for the Speed Control of a DC Servo Motor", Proceeding of the V International Conference on Electrical Machines and Systems, vol. 2, pp. 731-734, August 2001.

APLICACIÓN DE LA LÓGICA BORROSA A LOS REGULADORES DE CARGA EN SISTEMAS FOTOVOLTAICOS AUTÓNOMOS

J. C. Bago, S. G. Galán, J. Aguilera
Investigación y desarrollo en Energía Solar y
Automática (IDEA).
Dpto. de Electrónica.
Universidad de Jaén.
E.U.P. de Linares Alfonso X El Sabio, 28.
23700 Linares (Jaén) Spain
E-mail: {jcbago, sgalan, aguilera}@ujaen.es

Juan Ramón Velasco Pérez
Dpto. Ingeniería de Sistemas
Telemáticos
Universidad Politécnica de Madrid.
E.T.S.I. de Telecomunicación.
Ciudad Universitaria s/n, 28040
Madrid Spain.
E-mail: juanra@gsi.dit.upm.es

Luis Magdalena Layos
Dpto. Matemática Aplicada a las
Tecnologías de la Información
Universidad Politécnica de Madrid.
E.T.S.I. de Telecomunicación.
Ciudad Universitaria s/n, 28040
Madrid Spain.
E-mail: llayos@mat.upm.es

Resumen

Este documento presenta una aplicación práctica de control borroso, concretamente en el campo de los sistemas fotovoltaicos autónomos. Previamente se realizará una introducción a la problemática existente en estos sistemas en cuanto al funcionamiento de los reguladores de carga. Posteriormente, se presentará el control borroso como una forma para mejorar las prestaciones de estos sistemas. Para finalizar se presentará una implementación de un regulador borroso comparando los resultados de operación con el funcionamiento de un regulador comercial de alta gama.

Palabras Clave : Aplicación, Regulador de carga, Sistemas fotovoltaicos autónomos.

1 INTRODUCCIÓN

La energía solar fotovoltaica es, hoy en día y sin lugar a dudas, una forma limpia y fiable de producción de energía eléctrica a pequeña escala. En ocasiones, como por ejemplo en emplazamientos aislados, cuyo abastecimiento a través de la red eléctrica no resulta fácil, se utilizan los denominados Sistemas Fovoltavicos Autónomos (SFA). Un SFA, está constituido por los siguientes elementos:

- **Generador Fovoltavico:** Produce energía eléctrica a partir de la radiación solar incidente.
- **Sistema de acumulación de energía:** La inserción de baterías en los SFA se realiza para adaptar los diferentes ritmos de producción y demanda de energía eléctrica.

- **Controlador de carga:** Su función consiste en proteger al sistema de acumulación y evitar situaciones de comportamiento extremo que puedan dañar las baterías.
- **Inversor:** Estos elementos se utilizan cuando se quiere utilizar cargas que requieran corriente alterna.
- **Carga:** Elementos a los que se pretende alimentar con energía eléctrica.

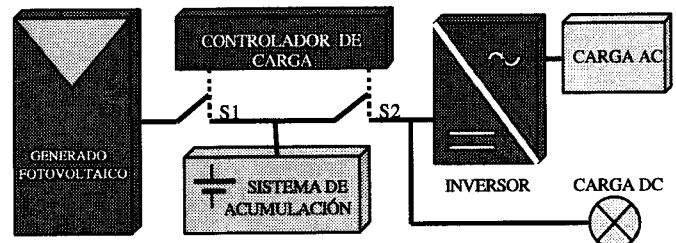


Figura 1: Sistema Fovoltavico Autónomo.

La energía eléctrica generada no sólo alimentará a la carga eléctrica, sino que además, con el exceso de energía generada, se cargarán los acumuladores. Por lo tanto, el sistema regulador debe, por un lado, evitar sobrecargas en el acumulador (debido a una tensión excesiva proporcionada por el generador), y por otro lado, impedir que las baterías se sobredescarguen (debido a una alimentación excesiva a la carga, por parte del sistema de acumulación).

En definitiva, el sistema de control de carga debe proteger al acumulador de situaciones extremas de funcionamiento, independientemente del tamaño de la instalación, del diseño, y de los posibles cambios estacionales en el perfil de consumo, en la radiación solar y en la temperatura de operación. Todo ello buscando como objetivo final alargar la vida útil del sistema acumulador.

Existen distintos tipos de controladores de carga, pero el

más utilizado en SFA es el controlador serie con dos interruptores (Generación y Consumo).

En un controlador serie, el interruptor de generación actúa desconectando el generador de la batería cuando ésta alcanza un valor a partir de cual entraría en sobrecarga. El interruptor de consumo corta el suministro de energía cuando la tensión de la batería llega a un umbral mínimo.

2 JUSTIFICACIÓN DE LA UTILIZACIÓN DE UN CONTROLADOR BORROSO

A pesar de la aparente simplicidad en el funcionamiento de los controladores de carga, en la práctica se observa que presentan un comportamiento manifiestamente mejorable, no mostrando unos requerimientos necesarios de calidad en los sistemas [6]. Esta circunstancia se debe fundamentalmente, a que el funcionamiento de estos controladores no tiene en cuenta todos los aspectos relacionados con los procesos de carga y descarga. Así, cuando se utilizan baterías de Plomo-Ácido [1], sería deseable contemplar ciertas características de funcionamiento, entre las que cabe destacar las siguientes:

- A elevados regímenes de descarga las baterías suministran menores capacidades, ya que las transformaciones internas son superficiales.
- Las descargas a bajos regímenes aumentan la capacidad ya que se produce un mejor y más completo uso de materiales activos y del ácido.
- Cuanto menor es la temperatura, menor será la capacidad de la batería, pues menor es la viscosidad del ácido y más lentos los procesos de difusión iónica.
- Una aspecto positivo para las baterías, es que una cantidad adecuada de sobrecarga puede evitar problemas de estratificación.
- Como resultado del envejecimiento, la resistencia interna de la batería aumenta, por lo que la tensión máxima de carga debería ir aumentando para mantener el mismo régimen de carga.
- Es interesante realizar cargas de flotación para conservar las baterías completamente cargadas, incluso cuando no están en operación, compensando pérdidas por autodescarga.
- Las bajas temperaturas y los altos regímenes de carga, afectan negativamente la aceptación de la carga.

Como puede apreciarse, estas características deseables de funcionamiento, nada precisas, pueden modelarse con un sistema experto [2][3][4]. De esta forma, puede obtenerse un controlador borroso con una base de conocimiento, cuyas reglas pueden representar las características anteriormente mencionadas.

3 REGULADOR DE CARGA BORROSO

La estructura del regulador de carga borroso se muestra en la figura 2. El Estado de Carga de la batería (SOC), la corriente generada (Igen) y la corriente de carga (Icarga), son las entradas del regulador de carga borroso. La salida del regulador, determinará el modo de operación de controlador de carga. Es importante señalar, que el estado de carga de la batería (SOC) con el que se trabaja es un valor estimado en cada instante a partir de la cantidad de corriente que, en ese instante, almacena la batería y el valor de la capacidad correspondiente al régimen de trabajo de ese instante. Igualmente, es importante señalar que los conmutadores S1 y S2 representados en la figura 1 no son del tipo ON-OFF, sino que son de tipo continuo.

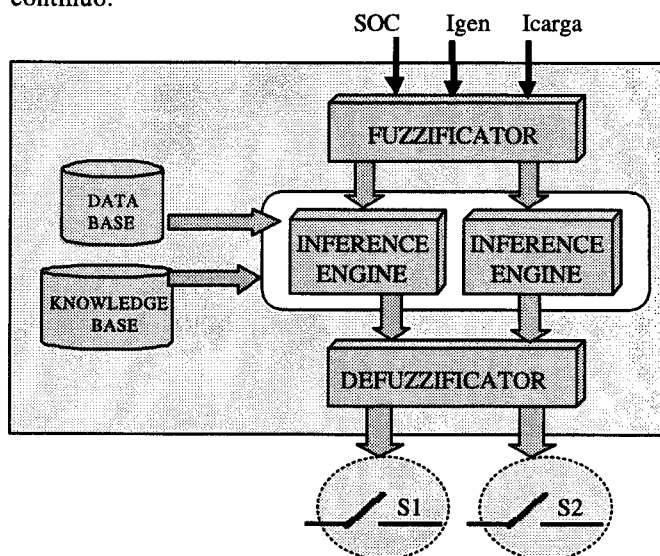


Figura 2: Estructura del regulador de carga borroso.

Dadas las características del sistema a controlar, sólo es necesario actuar en los estados de sobrecarga y sobredescarga. Esta circunstancia afectará a la distribución de los conjuntos borrosos, los cuales cubrirán dichos estados y las zonas próximas.

La base de datos contiene información sobre los conjuntos borrosos asociados a cada una de las variables, tanto de entrada como de salida. Hay que significar que los conjuntos borrosos representados están normalizados en el intervalo [0,1].

Se han utilizado dos bases de conocimiento, una para

actuar en los estados de sobrecarga (conmutador S1) y otra para actuar en los estados de sobredescarga (conmutador S2). Estas bases de conocimiento representan un pequeño subconjunto del conocimiento existente en relación a las condiciones en las que se debe de cargar y descargar una batería.

4 RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Antes de la instalación del controlador borroso real, y para probar inicialmente la bondad y por lo tanto la viabilidad de utilización de un regulador de carga borroso, se han utilizado unos modelos matemáticos para el cálculo de la corriente entregada por el generador fotovoltaico, así como del comportamiento del sistema de acumulación.

Los resultados se han obtenido simulando un generador fotovoltaico de 100 KWp, una batería de 100Ah y 12 V. El perfil de carga que se ha considerado ha sido de 19:00 a 24:00 con 6Ah de consumo para la sobredescarga y de 2Ah para la sobrecarga. Para los datos de radiación y temperatura se han utilizado valores reales medidos en la localidad de Jaén (España).

Los conjuntos borrosos que se han utilizado se presentan en la figura 3.

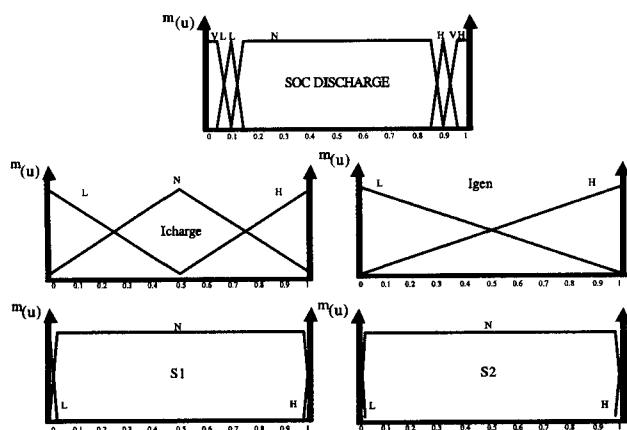


Figura 3: Conjuntos borrosos utilizados en simulación.

Las bases de conocimiento se muestran en las tablas 1 y 2.

Tabla 1: Base de conocimiento para el estado de sobrecarga

BASE DE CONOCIMIENTO PARA LA SOBRECARGA B1		
Nº	ANTECEDENTES	S1
R1	IF "SOC=N"	H
R2	IF "SOC=H" and "IGEN=L"	H
R3	IF "SOC=H" and "IGEN=L" and "ICAR=L"	N
R4	IF "SOC=H" and "IGEN=L" and "ICAR=N"	H
R5	IF "SOC=H" and "IGEN=L" and "ICAR=H"	H
R6	IF "SOC=VH"	L

Tabla 2: Base de conocimiento para el estado de sobredescarga.

BASE DE CONOCIMIENTO PARA LA SOBREDISCARGA B2		
Nº	ANTECEDENTES	S2
R1	IF "SOC=VL"	L
R2	IF "SOC=L" and "IGEN=H"	H
R3	IF "SOC=L" and "IGEN=L" and "ICAR=L"	H
R4	IF "SOC=L" and "IGEN=L" and "ICAR=N"	H
R5	IF "SOC=L" and "IGEN=L" and "ICAR=H"	N
R6	IF "SOC=N"	H

A continuación se explican cada una de las reglas de las dos bases de conocimiento:

Regla B1-R1: El estado de carga de la batería es normal y por lo tanto se permite plenamente la carga de la batería.

Regla B1-R2: El estado de carga de la batería es relativamente alto, y como la corriente generada por el generador fotovoltaico es pequeña, se permite plenamente la carga de la batería.

Regla B1-R3: El estado de carga de la batería es relativamente alto, y la corriente generada por el generador fotovoltaico es alta, mientras que la corriente consumida por la carga es baja. En esta circunstancia el controlador de carga permite cargar la batería de forma parcial.

Regla B1-R4: El estado de carga de la batería es relativamente alto, y la corriente generada por el generador fotovoltaico es alta, mientras que la corriente consumida por la carga es relativamente alta. En esta circunstancia el controlador de carga permite plenamente cargar la batería.

Regla B1-R5: El estado de carga de la batería es relativamente alto y la corriente generada por el generador fotovoltaico es alta, al igual que la corriente consumida por la carga es relativamente alta. En esta circunstancia el controlador de carga permite plenamente cargar la batería.

Regla B1-R6: El estado de carga de la batería es muy alto, por lo que es conveniente no cargarla.

Para el caso de la sobredescarga la base de conocimiento que se ha utilizado es simétrica respecto a la anterior:

Regla B2-R1: Si el estado de carga de la batería es muy bajo, no permitir que llegue corriente a la carga.

Regla B2-R2: Si el estado de carga es relativamente bajo y la corriente generada por el generador fotovoltaico es alta, permitir plenamente el consumo de energía.

Regla B2-R3: Si el estado de carga es relativamente bajo, la corriente generada por el generador fotovoltaico es baja y la corriente consumida por la carga es baja también, permitir plenamente el consumo de energía.

Regla B2-R4: Si el estado de carga es relativamente bajo, la corriente generada por el generador fotovoltaico es baja y la corriente consumida por la carga es normal, permitir plenamente el consumo de energía.

Regla B2-R5: Si el estado de carga es relativamente bajo,

la corriente generada por el generador fotovoltaico es baja y la corriente consumida por la carga es alta, permitir parcialmente el consumo de energía.

Regla B2-R6: Si el estado de carga de la batería es alto, permitir plenamente el consumo de energía.

Los resultados que se han obtenido con este regulador permiten afirmar que la utilización de un controlador borroso, con el conocimiento experto adecuado, puede mejorar el comportamiento de los reguladores convencionales.

5 INSTALACIONES REALES

Con el objeto de comparar resultados de operación entre el comportamiento de un regulador de carga serie y el regulador de carga borroso diseñado, se han instalado dos sistemas fotovoltaicos autónomos, uno con un regulador serie convencional y el otro, con el regulador de carga borroso anteriormente explicado.

La estructura del sistema global que se ha instalado queda representada en la figura 4. En esta figura se pueden apreciar los dos sistemas fotovoltaicos autónomos. El primero de ellos (SFA1), utiliza el controlador de carga serie, y el segundo (SFA2), utiliza el controlador de carga borroso.

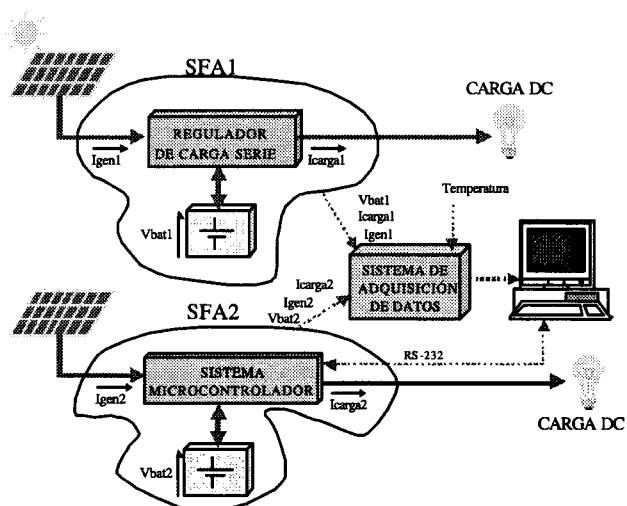


Figura 4: Estructura del sistema global.

Es importante señalar que la única diferencia existente entre las dos instalaciones consiste, evidentemente, en el regulador de carga utilizado.

6 REGULADOR BORROSO REAL

Existen algunas diferencias entre el controlador borroso real y el que se ha simulado. Estas diferencias no son de

tipo estructural, sino que se deben a cambios que se han incorporado con el objetivo de mejorar el comportamiento global del sistema. Aunque también han sido consecuencia de algunos cambios en las características de las instalaciones fotovoltaicas instaladas con respecto a las simuladas. A continuación se presentan las bases de conocimiento que se están utilizando actualmente en el sistema real instalado.

Los conjuntos borrosos que se están utilizando actualmente son los mostrados en la figura 5. Según estos conjuntos borrosos, se considera que el estado de carga de la batería empieza a ser alto a partir del 80%, y se considera bajo a partir del 40%. Los dos conjuntos borrosos para la corriente generada y los tres conjuntos borrosos para la corriente de carga, se han distribuido de forma uniforme. Los relativos a la tensión de la batería se han elegido teniendo en cuenta las tensiones utilizadas en el ciclo de histéresis. Más peculiar es la forma de los conjuntos borrosos de los consecuentes. Esta distribución se debe a la no linealidad en el funcionamiento de los FET que regulan el paso de las corrientes, de modo que con esta distribución se linealiza en parte el funcionamiento de los mismos. Conviene recordar que los controladores utilizados no son interruptores, sino que su funcionamiento es continuo.

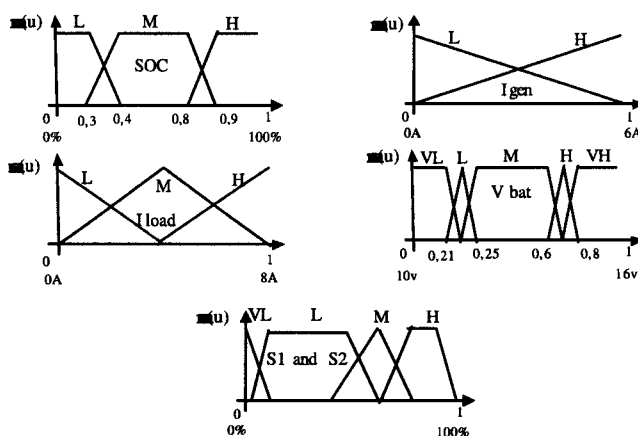


Figura 5: Conjuntos borrosos de regulador implementado.

La base de conocimiento para la sobrecarga se presenta en la tabla 3, mientras que la base de conocimiento para la sobredescarga se presenta en la tabla 4.

Tabla 3: Base de conocimiento para la sobrecarga.

BASE DE CONOCIMIENTO PARA LA SOBRECARGA		
Nº	ANTECEDENTES	S1
R1	IF "Vbat=VH"	VL
R2	IF "Vbat=H" and "SOC=H"	VL
R3	IF "Vbat=H" and "SOC=M"	L
R4	IF "Vbat=H" and "SOC=L"	M
R5	IF "Vbat=M"	H
R6	IF "Vbat=L"	H
R7	IF "Vbat=VL"	H

Tabla 2: Base de conocimiento paro sobredescarga.

BASE DE CONOCIMIENTO PARA LA SOBREDISCARGA		
Nº	ANTECEDENTES	S1
R1	IF "Vbat=VH"	H
R2	IF "Vbat=H"	H
R3	IF "Vbat=M"	H
R4	IF "Vbat=L" and "SOC="H"	M
R5	IF "Vbat=L" and "SOC="M"	L
R6	IF "Vbat=L" and "SOC="L"	VL
R7	IF "Vbat=VL"	VL

A continuación se explican cada una de las reglas de las dos bases de conocimiento:

Regla B1-R1: Cuando la tensión de la batería es muy alta, no se permite la carga de la misma.

Regla B1-R2: Cuando la tensión de la batería es alta y el estado de carga es alto, no se permitirá la carga de la batería.

Regla B1-R3: Aunque la tensión de la batería sigue siendo alta, el estado de carga no lo es tanto, por lo que se permite una leve carga de la misma.

Regla B1-R4: Este caso es similar al anterior pero con un estado de carga menor, por lo que se permite una mayor carga de la batería.

Regla B1-R5,R6,R7: En el caso de que la tensión de la batería no sea muy alta se permitirá la carga de la misma, pero no plenamente.

Para el caso de la sobredescarga la base de conocimiento que se ha utilizado es simétrica respecto a la anterior, igual que ocurría en simulación:

Regla B2-R1,R2,R3: Siempre que la tensión de la batería no sea bajo se permitirá plenamente el consumo de energía.

Regla B2-R4: Cuando la tensión de la batería es baja, aunque el estado de carga sea alto, sólo se permitirá un consumo parcial de energía.

Regla B2-R5: Al tener una baja tensión en la batería y un estado de carga mediano, se permite un bajo consumo de energía.

Regla B2-R6: Esta situación es similar a la anterior, pero como ahora el estado de carga de la batería es bajo, no se permite el consumo de energía.

Regla B2-R7: Esta regla se utiliza para proteger la batería, de modo que cuando la tensión de la batería sea muy baja, no se permitirá el consumo de energía.

7 RESULTADOS DE OPERACIÓN

Aplicando el sistema de control borroso descrito en el apartado anterior a una de las instalaciones fotovoltaicas se han obtenido una serie de resultados experimentales. Para explicar estos resultados se hará uso de una representación gráfica de los mismos, figura 6.

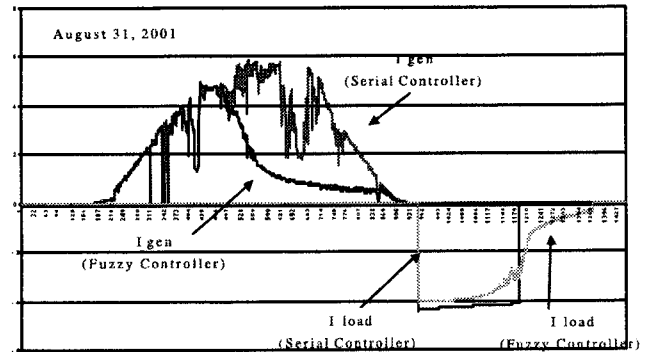


Figura 6: Comparación de resultados experimentales.

En la figura 6, se presenta una comparativa de los datos experimentales obtenidos el 31 de Agosto de 2001. En esta figura puede apreciarse como las variaciones sufridas por las corrientes de generación y de carga están más suavizadas en el sistema que utiliza el sistema de control borroso. Esta circunstancia es especialmente importante ya que disminuye el desgaste sufrido por la batería.

También puede observarse como puede suministrarse energía durante periodos de tiempo mayores utilizando el controlador borroso, aunque esta energía suministrada decrece, fundamentalmente en los espacios de tiempo en los que no se suministra energía con el controlador serie.

Otro de los aspectos a destacar consiste en la limitación de los periodos de sobrecarga por parte del regulador borroso. Esto último es importante ya que la sobrecarga es conveniente (provoca gasificación que evita contrarresta el fenómeno de la estratificación), pero no durante periodos largos de tiempo.

8 CONCLUSIONES

El regulador de carga borroso propuesto es un regulador de fácil implementación y que mejora de fiabilidad de anteriores diseños. Una de las características más importantes del controlador de carga borroso es la flexibilidad intrínseca de los controladores borroso, los cuales permiten incorporar nuevo conocimiento con la sola inclusión de nuevas reglas en la base de conocimiento.

Más concretamente, hay una serie de características destacables, fruto de la comparación del comportamiento de los reguladores descritos (regulador de carga serie y regulador de carga borroso):

Los resultados de simulación muestran la posibilidad de utilizar sistemas de control borrosos en el diseño de controladores de carga para sistemas fotovoltaicos autónomos. No sólo es posible sino que además pueden diseñarse con el objetivo de mejorar alguna o algunas de

las características de estos sistemas. Esto último, hemos tenido la oportunidad de observarlo tanto en las pruebas de simulación como con las pruebas realizadas en las instalaciones implementadas. Como caso particular de esta circunstancia, hemos podido apreciar comportamientos que permiten predecir un menor desgaste sufrido por las baterías, en el sistema que utiliza el sistema de regulación de carga borroso con las bases de conocimiento descritas.

Para finalizar, es importante remarcar que aunque el diseño actual se ha basado en un ordenador, futuras implementaciones se realizarán con la ausencia del mismo. Igualmente se suprimirá el uso del sistema de adquisición de datos. La justificación de la supresión de estos elementos se debe al precio de los mismos de cara a desarrollar un regulador de carga borroso con características de tamaño y precio semejantes a los controladores comerciales.

Otro aspecto en el que se está trabajando en la actualidad consiste en la incorporación de un sistema de aprendizaje utilizando Algoritmos Genéticos, de forma que pueda generarse bases de conocimiento de forma automática que tengan un mejor comportamiento.

Referencias

- [1] Copetti Biancon, J. Modelado de acumuladores de plomo-ácido para aplicaciones fotovoltaicas. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid. 1993.
- [2] Bago, J.C. Galán, S.G. Aguilera, J. Velasco, J. R. Magdalena, L. "Fuzzy charge Controller for stand-alone Photovoltaic systems". 17th European Photovoltaic Solar Energy Conference and Exhibition. Munich, October 2001.
- [3] Galán, S.G. Bago, J.C. Aguilera, J. Magdalena, L. "Fuzzy charge controller for stand-alone photovoltaic systems". EUSFLAT 01, pp160-163, 2001.
- [4] Magdalena, L. Velasco, J.R. "Fuzzy Rule-Based Controllers that Learn by Evolving their Knowledge Base". In F. Herrera and J.L. Verdegay. editors, Genetic Algorithms and Soft Computing. Physica-Verlag, 1996.
- [5] Pedryck, W. "Fuzzy Control and Fuzzy Systems". Wiley, 1989.
- [6] Preiser, Kumhmann, K.L., Parodi, O. "Quality Issues for solar Home Systems", 13th European Photovoltaic Solar Energy Conference. Nice, France, pp 510-513. 1995.

Sesión **C1**

Aplicaciones a la Economía

Economic applications

SOME RESULTS IN APPLICATION OF FUZZY SETS TO STOCK PRICE FORECASTING

D. Marcek

Faculty of Management Science and Informatics, University of Žilina, 010 26 Žilina Slovak Republic,
Faculty of Philosophy and Science, Salesian University, 74601 Opava, Czech Republic
marcek@fria.utc.sk

Summary

Based on the work by [7], [8] a dynamic process with linguistic values of stock prices is defined and studied in this paper. A complete fuzzy modelling approach is proposed which includes: the defining of the universe of discourse within the observed data are, defining of linguistic values and determining of memberships for each element in the respective fuzzy sets, choosing, determining and developing of a fuzzy time series model, obtaining of the knowledge to forecast the stock price, computing of forecasted outputs, i.e. defuzzification and interpretation of forecasted outputs. Finally concluding remarks are provided.

Keywords: fuzzy time series model, fuzzy system, fuzzy bank rules, mean square error, autoregressive models

1 Introduction

The conventional statistical methodologies of stock price prediction are discussed in papers [3], [4]. Especially, models based on efficient market theory, AR and transfer function models were examined. In conventional statistical methods it is searched in principle for dependencies of the dependent variable y_t on random variables $\{\varepsilon_t\}$ of the model. Then observations $\{y_t\}$ are constructed by traditional statistical model, i.e.

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$t = 1, 2, \dots, N,$$

where $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$ are the data points, $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$ is white noise, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ are the parameters of the model and N is the length of the time series under study. Using time series data the model is estimated and checked for validity. Are the estimated residuals white noise? Does the model give good predictions outside the

estimation period? These and other questions are important for many problems in a financial management. For instance, in real situations it is difficult to forecast an expected stock price, exchange rate changes for currencies, expected return rate or risk of the portfolio, stock market returns and other macroeconomic variables of generally high frequency because their values have likely originated from chaotic systems of decision processes. As mentioned in [6] the nature of the decisions to be made will dictate many of the desired characteristics of the forecast. A study of the decision problem should help answer questions about what is to be forecast, what form the forecast should take and so on.

A possible approach to stock price forecasting based on fuzzy system is proposed in Section 2.

2 Fuzzy sets and their application to stock price forecasting

In this section, we describe one possible application from fuzzy set theory to the stock price forecasting. There are lists available with hundreds applications of fuzzy sets theory in all industrial areas, electrical and electronic markets [1] and primarily for control and predictive diagnostics of complicated systems and processes.

As we mentioned above in practice it is difficult to forecast the expected stock price P_t since economic and financial decisions are highly erratically. The objective value of the expected stock price can be vague and uncertain. Next, we describe a basic structure of the fuzzy rule based system for stock price forecasts (see Fig. 1). The data set used in this paper (163 observations, stock price) is available, and is depicted in [2]. To build a forecast model we have defined the sample period for analysis $y_1, \dots, y_{128}$, i.e. the period over which we will be building or estimating the forecasting model and the ex post forecast period (validation data set), $y_{129}, \dots, y_{163}$ as the time period from the first observation after the end of the sample period to the most recent observation.

The fuzzy rule based system has three blocks: (a) block for fuzzification input variables (fuzzification process), (b) knowledge base block and (c) defuzzification block.

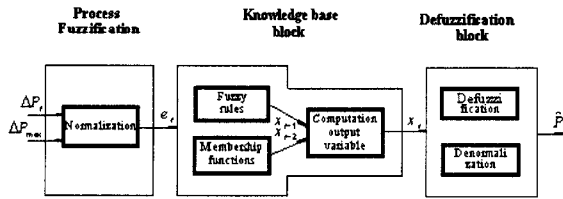


Figure. 1: Structure of the fuzzy system for stock price forecast.

In the fuzzification process firstly, we define the universe of discourse U as an interval comprising all data values and transform U to the interval x_t as

$$x_t = \Delta P_{t, \max} \frac{1}{100}, \quad t = 2, 3, \dots, N, \quad (1)$$

where $\Delta P_{t, \max}$ represents the simple maximum first difference calculated for the stock price time series variable P_t during the observations. The first differences are calculated as $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$, where Δ denotes the difference operator. The transformation (1) is especially useful in examining the direction and absolute magnitude of changes in P_t . In our example, the values x_t are within the range -2 to 2. We performed the fuzzification of input variables by dividing the domain to 4 equidisting fuzzy sets: Negative Large (NL), Negative Slight (NS), Zero (Z), Positive Slight (PS), Positive Large (PL) with 50 percent overlap (see Fig. 2).

As is known, the knowledge base of a fuzzy rule based system consists of two components: a database containing the definitions of the scaling factors and the membership functions of the fuzzy sets specifying the meaning of the linguistic terms, and the rule base, which is constituted by collection of fuzzy rules.

The fuzzy system uses for prediction of normalized stock prices x_t the two stage fuzzy relation model in the following form

$$\text{IF } x_{t-2} \text{ \& } x_{t-1} \text{ THEN } x_t \quad (2)$$

where x_{t-2} , x_{t-1} are fuzzy sets of 2 antecedents, x_t is fuzzy set of a consequent. As can be seen from Fig. 2, the computation of the consequent was performed using of

triangular membership functions $\mu(x)$. These membership functions are given as:
for NL:

$$\mu(x)_{NL} = \begin{cases} -1 - x & : x < -1 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

NS:

$$\mu(x)_{NS} = \begin{cases} 2 + x & : x \leq -1 \\ -x & : -1 < x < 0 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

Z:

$$\mu(x)_Z = \begin{cases} 1 + x & : -1 < x \leq 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

(3)

PS:

$$\mu(x)_{PS} = \begin{cases} x & : 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & : 1 < x \leq 2 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

PL:

$$\mu(x)_{PL} = \begin{cases} x - 1 & : 1 < x \leq 2 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

The following four control rules (relations R1 - R4), which take the form of a "if ... then ..." sentence, was derived purely from the database of x_t , x_{t-1} and x_{t-2} describing previous behaviour of the system (see Fig. 3 and [4]).

R1: IF x_1 is NS AND x_2 is PL THEN x is NS ALSO
R2: IF x_1 is NL AND x_2 is PS THEN x is PS ALSO
R3: IF x_1 is PS AND x_2 is PS THEN x is PL ALSO
R4: IF (x_1 is NL AND x_2 is NL) OR

...

all combinations of the linguistic terms
THEN x_1 is Z

(4)

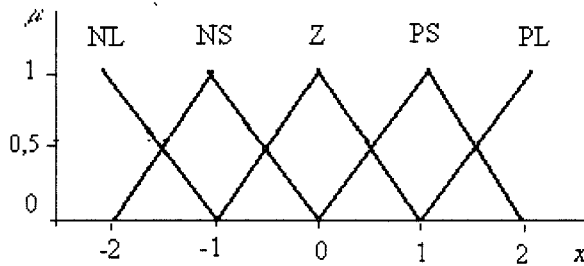


Figure 2: The membership function for the fuzzification of the data.

		X2				
		PL	PS	Z	NS	PL
X1	NL	Z	PS	Z	Z	Z
	NS	NS	Z	Z	Z	Z
	Z	Z	Z	Z	Z	Z
	PS	Z	PL	Z	Z	Z
	PL	Z	Z	Z	Z	Z

Fig. 3: Matrix of the rules

As can be seen the fuzzy rules (4) are the fuzzy relations. The Mamdani's method [5] was used to determine these relations. The output of the fuzzy controller is the required fuzzy value of x_{128} .

Substitution of $x_{126} = -0,66$ and $x_{127} = 1,61$ into (3), we obtain:

For x_1 :

$$\begin{aligned}\mu_{NL}(-0,66) &= 0 \\ \mu_{NS}(-0,66) &= 0,66 \\ \mu_{PS}(-0,66) &= 0 \\ \mu_{PL}(-0,66) &= 0\end{aligned}$$

For x_2 :

$$\begin{aligned}\mu_{NL}(1,61) &= 0 \\ \mu_{NS}(1,61) &= 0 \\ \mu_{Z}(1,61) &= 0 \\ \mu_{PS}(1,61) &= 0,39 \\ \mu_{PL}(1,61) &= 0,61\end{aligned}$$

and by application of particular rules, we obtain

$$R1: \text{if } x_1 \text{ is NS AND } x_2 \text{ is PL} = \min(0,66;0) = 0$$

$$R2: \text{if } x_1 \text{ is NL AND } x_2 \text{ is PS} = \min(0,0) = 0$$

$$R3: \text{if } x_1 \text{ is PS AND } x_2 \text{ is PS} = \min(0,0) = 0.$$

We observe at this point that the linguistic variable x_{128} will already not take the values NS, PS, PL.

$$\begin{aligned}R4: \text{if } x_1 \text{ is NL AND } x_2 \text{ is NL} &= \min(0,0) = 0 \\ x_1 \text{ is PL AND } x_2 \text{ is Z} &= \min(0,0) = 0 \\ x_1 \text{ is NL AND } x_2 \text{ is PS} &= \min(0;0,39) = 0 \\ x_1 \text{ is PL AND } x_2 \text{ is PL} &= \min(0;0,61) = 0 \\ x_1 \text{ is NS AND } x_2 \text{ is NS} &= \min(0,66;0) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 \text{ is NS AND } x_2 \text{ is Z} &= \min(0,66;0) = 0 \\ x_1 \text{ is NS AND } x_2 \text{ is PS} &= \min(0,66;0,39) = 0,39 \\ x_1 \text{ is Z AND } x_2 \text{ is NL} &= \min(0,34;0) = 0 \\ x_1 \text{ is Z AND } x_2 \text{ is NS} &= \min(0,34;0) = 0 \\ x_1 \text{ is PL AND } x_2 \text{ is PS} &= \min(0;0,61) = 0 \\ x_1 \text{ is Z AND } x_2 \text{ is Z} &= \min(0,34;0) = 0 \\ x_1 \text{ is Z AND } x_2 \text{ is PS} &= \min(0,34;0,39) = 0,34 \\ x_1 \text{ is Z AND } x_2 \text{ is PL} &= \min(0,34;0,61) = 0,34 \\ x_1 \text{ is PS AND } x_2 \text{ is NL} &= \min(0,0) = 0 \\ x_1 \text{ is PS AND } x_2 \text{ is Z} &= \min(0,0) = 0 \\ x_1 \text{ is PS AND } x_2 \text{ is PS} &= \min(0;0,39) = 0 \\ x_1 \text{ is PS AND } x_2 \text{ is PL} &= \min(0;0,61) = 0 \\ x_1 \text{ is PL AND } x_2 \text{ is NL} &= \min(0,0) = 0 \\ x_1 \text{ is PL AND } x_2 \text{ is NS} &= \min(0,0) = 0 \\ x_1 \text{ is PL AND } x_2 \text{ is Z} &= \min(0,0) = 0 \\ x_1 \text{ is PL AND } x_2 \text{ is PS} &= \min(0;0,39) = 0\end{aligned}$$

We obtain the resulting value of $x_{128} = 0,61$ from fuzzy relations as max-min product.

To evaluate the forecast $x_t = x_{128}$, our next step was the defuzzification. The defuzzification block contains defuzzification modules. In our case, we applied for defuzzification of the data First of Maximum method (FOM) [6]. To forecast the value of x_t , we used the following equation (see Eq. (3) for term Z).

$$\mu(x) = 0,61 = 1 + x_{128} \Rightarrow x_{128} = -0,39.$$

Now using Eq. (1) we find the appropriate characteristic value of $\Delta P_t = \Delta P_{128}$ as

$$\Delta P_t = \mu_N(x_{128})100 = -39$$

and the ex post one-period forecast for stock price P_{129} as

$$P_{129} = P_{128} + \Delta P_{128} = 1512,31 - 39 = 1473,31.$$

This forecast is now exactly better than as that obtained by statistical AR(2). Model.

The remaining forecasts for ex post forecast period $t = 130, 131, \dots, 163$, may be generated similarly. To evaluate this method, we calculated the ex post forecast summary statistics MSE (Mean Square Error). On the basis of this measure and at this stage of the analysis, we can conclude that the fuzzy model is not superior to the other models discussed in [2].

3 Conclusion and remarks

In this paper, we have discussed an application of the fuzzy model to forecast stock prices. Using of technical analogy, we designed the fuzzy system structure. We derived the short term behaviour in the stock price movements and evaluated stock price forecast by fuzzy model. In the presented example, the fuzzy model has the MSE statistics larger as that calculated in standard

statistical analysis or fuzzy neural approach. The statistical and fuzzy neural network models used in this comparison rest on well known hypothesis of efficient markets theory. In general, the results confirm the difficulty of stock prices forecasting. Thus the statistical AR(2) model and model based on fuzzy neural network discussed in [2] produce better forecasts than proposed fuzzy system. Since the results were based on chosen stock and data set, they were difficult to generalise to other situations. Yet, the results certainly provide a rational way for improvement of forecasting ability in chaotic economic systems.

Our next attention was directed to understanding why models based on statistical procedures are better than model based on presented fuzzy system. As we stressed above, the economic and technical consideration of the fuzzy system led to the identification of rules given in Fig. 3. We recall again that our solution to set up a formal fuzzy model in the form of "if-then" rules was based on the assumption only that the hypothesis of the efficient market theory is valid. In our opinion methods for identification of the fuzzy system can be extended in various ways, e.g. by including a larger number of observations and through experimentation with other techniques, e.g. using clustering, competitive learning and so on. It is one way to extend this research.

Acknowledgement

This work was supported by Slovak grant foundation under the grant No. 1/9183/02.

References

- [1] HELLENDORF, H.: *Industrial Application of Fuzzy Control*. Fuzzy Structures, Current Trends. Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences Bratislava, Volume 13, 1997, (69-91)
- [2] MARČEK, D.: *Stock Price Forecasting: Autoregressive Modelling and Fuzzy Neural Network*. Mathware & Soft Computing, UPC Barcelona Spain, Vol. VIII, n. 2-3/2000, (139-148)
- [3] MARČEK, D.: *Stock Price Prediction Using Autoregressive Models and Signal Processing Procedures*. Proc. of 16th Int. Conf. on Mathematical Method in Economics, Cheb, CZ, September 8-10, 1998
- [4] MARČEK, D., CABANOVÁ, R.: *Fuzzy system for stock price forecasts*. Proc. of second Int. Conf.: Informatics - Algorithms'98, Prešov, SK, 3 -4, September 1998 (in Slovak)
- [5] MAMDANI, E., H.: *Application of a fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis*. IEE Trans. Comput. 26 (1977) 1182-1191
- [6] MONGOMERY, D.C., JOHNSTON, L.A., GARDINER, J.S.: *Forecasting and Time Series Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 1990
- [7] SONG, Q., CHISSON, B., S.: *Fuzzy time series and its models*. Fuzzy Sets and Systems, 54, 1993, (269-277)
- [8] ZIMMERMANN, H., J.: *Fuzzy set theory and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996

MANAGEMENT OF STAFF COMPETENCIES THROUGH A HYBRID FUZZY MODEL OF SOFM

Raquel Flórez López

Department of Economics and Business Administration, University of León

Campus de Vegazana s/n, 24071 León, Spain

E-mail: dderfl@unileon.es

Summary

The management of human resources based on competencies is one of the most interesting techniques for personnel selection, integrating both professional skills and psychological characteristics from candidates. However, many of these variables only can be measured in linguistic terms, making difficult their integration with numerical data in order to obtain a global indicator of candidates' relative value and finally, to select the best applicant for the job. In this paper a new hybrid fuzzy model of Self Organising Feature Map (SOFM) based on the 2-tuple approach is proposed for the effective developing of this task.

Keywords: Fuzzy variables, 2-tuple approach, SOFM, competencies, hybrid ANNs.

1 STAFF MANAGEMENT BASED ON COMPETENCIES

The management of human resources is one of the most critical decisions for enterprises, due to work force is the only resource who has an autonomous capacity of thinking and acting. Additionally, human resources control the rest of inputs, so getting an efficient selection of workers is very important in order to maximize the overall firm's generated added value.

There are many different policies to get a good personnel selection, one of the most interesting is the strategy based on "competencies" [13], that considers not only the professional skills of people but their psychological features needed to an efficient development of a job [14]. Competencies can be defined like the overall knowledge, abilities and conducts that a subject has, letting him to develop some activity successfully [16]; in that way, competencies consider cognitive, affective, psychomotive and psycho-physic aspects of the individual, integrating them to obtain a global idea about the person's suitability. Competencies, established through the analysis of characteristics from good and bad workers, are specially important in nowadays, with a business reality characterised for a large dynamism and a higher importance of individual abilities.

Competencies are multidimensional in nature and direct related with the context where they are applied. They are integrated by different characteristics which combination obtain the global level. There is not a general accepted number of competencies, nor a whole of characteristic integrating these competencies, but each author defines his own. One of the more interesting taxonomy of competencies is proposed by Hay McBer [18], who considers six different groups ("conglomerates") of competencies (Table 1) as far as management and sales jobs is concerned. Of course another sort of jobs like educators or scientific investigators could need others competencies, but the main group of firms needs workers who submit these attributes.

Table 1: Summary of competencies (Hay McBer)

Conglomerate	Competencies
1. Act and success	1.1. Orientation to success. 1.2. To worry about quality, order and accuracy 1.3. Initiative 1.4. To look for information.
2. Support and human service	2.1. Interpersonal understanding 2.2. Orientation to client's service
3. Impact and influence	3.1. Impact and influence 3.2. Organisational conscience 3.3. Relationships establishment
4. Management	4.1. Development of others people 4.2. Asertivity 4.3. Team work and co-operation 4.4. Leadership
5. Cognitive level	5.1. Analytical thought 5.2. Conceptual thought 5.3. Professional skills
6. Personal effectiveness	6.1. Auto-control 6.2. Auto-confidence 6.3. Flexibility 6.4. Organisational commitment

The relative importance of conglomerates depends on the specific job to be developed; in addition, there is not a global agreement about the relevance of each competence for each conglomerate, but experts usually differs in their opinions about this significance.

This sort of information should be consider in order to get an efficient personnel selection; nevertheless, habitually it is not done due to the difficult treatment of these data,

which use to combine both numerical evaluations and linguistic terms ("important", "not relevant", etc.) [4], [10].

The Fuzzy Sets Theory [20] provides a very interesting way for treating with this sort of linguistic data without reducing them to numerical ('crisp') values, which degrades a lot the intrinsic information of these terms. To combine both numerical and linguistic data it could be very useful the 2-tuple fuzzy linguistic model [Martínez, 1999], [Herrera et al, 1999].

Classical analysis of competencies uses statistical models to obtain indices about the suitability of candidates, like multiple regression models or expectations tables. The main inconvenient of these methods is the need to convert fuzzy information in a crisp one and the lack of a multi-dimensional positioning which lets get a global view about candidates' suitability and distance among them.

The employment of the IA paradigm known as Artificial Neural Networks (ANNs), and specially the proposed hybrid fuzzy model of Self-Organising Feature Map (SOFM) avoids these difficulties, obtaining a topographic map that joins both numerical and linguistic data, representing in a simple but robust way the relative candidates' fitness, their strengths and weaknesses.

2. THE SOFM MODEL AND THE 2-TUPLE APPROACH

Artificial Neural Networks (ANNs) constitute a Machine Learning paradigm that appeared like attempts to establish mathematical formulas about brain structure, characterised by learning through the experience and the extraction of knowledge from multiple data. Architectures used in ANNs can be divided into three categories, from the point of view of data flow direction: *feedforward* networks, where the information flows in an only direction, *feedback* networks, where data can flow in different directions between layers and *competitive, unsupervised or self-organising* models, based on cells' competition through mutual lateral interactions. The Self-Organising Feature Map (SOFM) proposed by professor Kohonen in 1982 belongs to this third category [8], [9].

The net is composed by two layers; the first one (input layer) has m cells, one for each input variable, which task is to pick up the data from the environment; the second one, or output layer, usually presents a rectangular feature, making all the information processing (Figure 1).

The SOFM model presents two different stages:

1.- *Learning or Training Stage*: In the learning stage the network establishes the categories which will be used in the operation stage to classify new data. The training process is characterised by the successive presentation to the system of different patterns; each time an individual $x(t)$ is treated by the system, the net obtains a "winner cell" $m_{ij}^*(t)$ (the nearest neuron to the pattern) which will modify its weight vector together to other neurones

situated in its neighbourhood (calculated through a function $h(|i-c|, t)$ that determinates the 'neighbourhood radio' to actualise weights) in the following way:

$$m_{ijk}(t+1) = m_{ijk}(t) + \alpha(t) \cdot h(|i-c|, t) \cdot (x_k(t) - w_{ijk}(t)) \quad \text{if } i \in N_c(t)$$

$$m_{ijk}(t+1) = m_{ijk}(t) \quad \text{if } i \in N_c(t)$$

Being k the input variable and $\alpha(t)$ a parameter known as "learning rate" so that $0 < \alpha < 1$. The process is repeated for many patterns (when the entire patterns have been presented to the network it is called an "epoch" of learning), so different weight vectors approach the probability density function of inputs, in a process that has got quite similarities with the clustering method.

The training process uses to finish after some pre-fixed steps or epochs (for example, a 'thumb rule' stops the system at 100.000 steps). It is possible to perform a second training stage ("fine tuning") to get a better fit of weight vectors; the learning rate is very small (near 0.01) and the neighbour radio is fixed to 1 to obtain the adjustment of each output layer's weight vector.

2.- *Operation or Working Stage*: After the learning stage the working stage begins, where the weight vectors remain fixed. This phase is relatively simple, generating an only one output from an input vector. This output is obtained through the parallel calculus for each neurone in the output layer of the distance between the input data and its weight vector. The neurone with the maximum similarity is established as winner, and the input vector is assigned to this cell. In that way, each cell acts like a specific feature detector, where the winner points the feature or patron detected in the input data.

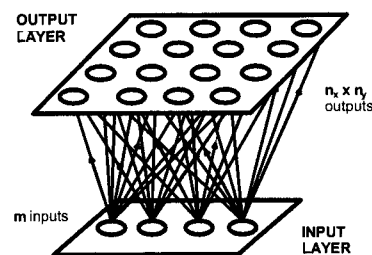


Figure 1: SOFM Model

One of the most important human task is the process known as "decision-making", consisting of finding the best option from a feasible set. Even when sometimes it takes place in a quantitative setting, where the information is expressed by means of numerical values, many aspects of different variables in real world are not able to be assessed in a quantitative form but in a qualitative one, characterised by the presence of a vague or imprecise knowledge. In that cases, a better approach could be obtained using linguistic assessments based on the Fuzzy Sets Theory, with qualitative aspects represented as linguistic values by mean of linguistic variables. As far as Kohonen's neural networks is concerned, the problem could be defined as follows: there is a initial group of variables used to establish the

topographic map explaining the neighbourhood's relations between the patterns considered, being difficult to establish the individual significance of each feature. In addition, it is able to get different experts' opinions about the interest of these items in the formation of the map, expressed both in numerical terms or in linguistic ones ("very important", "quite important"), being necessary to integrate these data without losing information

Focusing in the fuzzy linguistic approach, it is necessary to choose the appropriate linguistic descriptors for the term set and their semantic, analysing the "granularity of uncertainty", i.e., the level of discrimination among different counts of uncertainty. There are different proposals about linguistic terms, one example is showed in Figure 2. Terms' semantic is given by fuzzy numbers defined in the $[0,1]$ interval, which are usually described by membership functions. It is considered that lineal trapezoidal membership functions (one of its particular cases is the well-known triangular fuzzy numbers) are good enough to capture the vagueness of these data.

The 2-tuple fuzzy method [12] lets to integrate both numerical and linguistic data, being a model based on symbolic methods and on the concept of Symbolic Translation. Linguistic information is represented by means of a 2-tuple (s, α) , being s a linguistic term and α the numerical value that supports the value of the symbolic translation. In that way, the Symbolic Translation of a linguistic term $s_i \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$ is a numerical value assessed in $[-0.5, 0.5]$ that supports the "difference of information" between a counting of information $\beta \in [0, g]$, obtained after a symbolic aggregation operation (acting on the order index of the labels) and the closest value in $\{0, \dots, g\}$ that indicates the index of the closest linguistic term in S (s_i). In a 2-tuple (s_i, α_i) , $s_i \in S$ and $\alpha_i \in [-0.5, 0.5]$, s_i represents the linguistic label centre of the information and α_i is a numerical value representing the translation from the original result β to the closest index label in the linguistic term set (s_i). There are some interesting functions to make transformations between linguistic terms, 2-tuples and numerical values [7], being the most important for this paper's proposal:

- (1) Let $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ be a linguistic term set and $\beta \in [0, g]$ a value supporting the result of a symbolic aggregation operation, then the 2-tuple that expresses the equivalent information to β is obtained through the following function:

$$\Delta: [0, g] \rightarrow S \times [-0.5, 0.5]$$

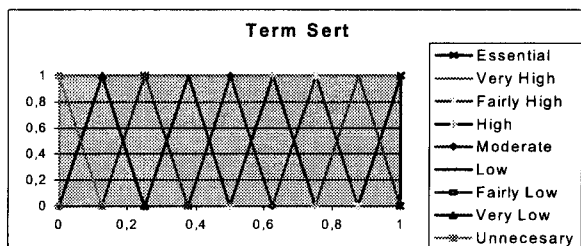


Figure 2: Different linguistic terms

$$\Delta(\beta) = \begin{cases} s_i & i = \text{round}(\beta) \\ \alpha = \beta - i & \alpha \in [-0.5, 0.5] \end{cases}$$

- (2) Let $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ be a linguistic term set and (s_i, α) be a linguistic 2-tuple. There is always a Δ^{-1} function, such that, from a 2-tuple it returns its equivalent numerical value $\beta \in [0, g]$.

$$\Delta^{-1}: S \times [-0.5, 0.5] \rightarrow [0, g]$$

$$\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha = \beta$$

There are several transformation for changing a number $\vartheta \in [0, 1]$ into a linguistic 2-tuple and vice versa, and there are some functions that let to change linguistic 2-tuples into values in the interval $[0, 1]$ (see [5], [6]).

In addition, there are some conditions to be imposed on the linguistic term set S for avoiding any loss of information during the transformation process, that it to say, to guarantee the following expression:

$\kappa(\delta(\Delta^{-1}(\Delta(\chi(\tau(\vartheta))))) = \vartheta$. These conditions are: (1) S is a fuzzy partition, that is to say, $\sum_{i=0}^g \mu_{s_i}(x) = 1, \forall x \in X$; (2)

the membership functions of its terms are triangular; (3) the $CV(s_i) = x / \mu_{s_i}(x) = 1$ (maximum), being $CV(s_i)$ the function providing a characteristic value for the final 2-tuple. Finally, after having all the information expressed in form of linguistic 2-tuples (in this case, the linguistic terms will be the experts' opinions about the relevance of variables employed in Kohonen's neural net), it is necessary to analyse the disposable operators to aggregate this sort of non-weighted linguistic information. There are different options to do this combination [12], operators based on numerical methods or symbolic aggregation operators. This last group includes two interesting operators, the *extended LOWA* (below) and the *extended I-LOWA*, based on the linguistic weighted averaging operator (LOWA) and the inverse-linguistic ordered weighted averaging operator (I-LOWA) [6].

In addition, a non-symbolic very useful operator which was specially developed for the 2-tuple model is the "extended weighted media" defined in [12]:

The extended weighted-media operator

Let $x = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$ be a set of 2-tuples to be aggregated and $W = (w_1, \dots, w_m)$ the numeric vector of associated weights for each tuple, then the extended weighed media operator $\bar{x}^e$ is defined as:

E=	Essential	(0.875, 1, 1)
VH=	Very High	(0.75, 0.875, 1)
FH=	Fairly High	(0.625, 0.75, 0.875)
H=	High	(0.5, 0.625, 0.75)
M=	Moderate	(0.375, 0.5, 0.625)
L=	Low	(0.25, 0.375, 0.5)
FL=	Fairly Low	(0.125, 0.25, 0.375)
VL=	Very Low	(0, 0.125, 0.25)
U=	Unnecessary	(0, 0, 0.125)

$$\bar{x}^e = \Delta \left(\frac{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^m w_i} \right) = \Delta \left(\frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^m w_i} \right).$$

If the weight vector is $W = \{(w_1, \alpha_1), \dots, (w_m, \alpha_m)\}$ (a 2-tuples vector), then the extended weighed media operator $\bar{x}_i^e$ can be redefined as:

$$\bar{x}_i^e = \Delta \left(\frac{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)}{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)} \right) = \Delta \left(\frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \beta_{w_i}}{\sum_{i=1}^m \beta_{w_i}} \right).$$

In that way, the 2-tuple fuzzy linguistic model based on the "extended weighted media operator" $\bar{x}_i^e$ formerly presented has been used to obtain the relative weights of SOFMs variables (conglomerates and competencies). This new approach could be applied to the analysis of candidates' strategic position to obtain a more complete information about it, being developed in the next section.

3 THE FUZZY STRATEGIC SOFM

Considering Hay McBer's classification, there are twenty competencies that should be measured to select efficient workers for sales and management, grouped in six conglomerates, but there is not an only opinion about their relevance for the job.

In that way, here it is considered that, for an specific firm and job ("internal auditor"), four experts have been consulted about their opinions on this discussion (Table

2); these experts express their opinions using both numerical data (0-10 scale for expert 2 and 1-5 scale for expert 3) and linguistic terms [5-terms set for expert 1 (Figure 4) and 7-terms set for expert 4 (Figure 3)]. In addition, each expert has an associated linguistic term (Figure 2) due to their opinions are not equally relevant.

Table 2: Experts opinions and importance

Conglomerate		Expert 1	Expert 2	Expert 3	Expert 4
1. Act and Success	1.1.	High	10.0	Maximum	4.2
	1.2.	High	9.8	Maximum	4.9
	1.3.	Very high	5.2	Very high	3.5
	1.4.	Very high	7.8	Maximum	5.0
2. Support & Human Service	2.1.	Moderate	5.2	Low	1.5
	2.2.	A bit	6.0	Minimum	1.2
3. Impact and Influence	3.1.	Very high	9.2	High	4.0
	3.2.	High	5.6	Maximum	4.8
	3.3.	A bit	3.0	Low	3.6
4. Management	4.1.	Very little	4.0	Minimum	1.3
	4.2.	A bit	4.6	High	4.3
	4.3.	Very little	6.0	Minimum	1.0
	4.4.	A bit	4.4	Medium	1.0
5. Cognitive Level	5.1.	High	8.0	Maximum	4.5
	5.2.	High	8.4	Maximum	4.5
	5.3.	Very High	9.0	Maximum	4.9
6. Personal Effectiveness	6.1.	Very high	6.4	Medium	4.0
	6.2.	Moderate	9.6	Very high	3.0
	6.3.	Moderate	9.2	Maximum	3.2
	6.4.	High	5.2	Maximum	4.0
Expert Relevance		High	Fair high	Very high	Very high

For this post there are 8 candidates being evaluated about the previous items through different proves. Some of these proves have a numerical (N) scale but others are valued through linguistic (L) terms, using term sets defined in Figure 2. Results obtained for candidates are shown in Table 3.

Table 3: Valuations of candidates

Variables	Candidate 1	Candidate 2	Candidate 3	Candidate 4	Candidate 5	Candidate 6	Candidate 7	Candidate 8	Scale
1.1.	Very High	Very High	Absolute	Fairly High	Very High	Moderate	Moderate	Very High	9-terms (L)
1.2.	5.1	7.8	2.1	6.8	5.9	8.1	9.5	8.2	0-10 (N)
1.3.	Very high	Very low	Very high	Maximum	Minimum	Medium	Very high	High	7- terms (L)
1.4.	3.9	6.9	7.1	9.6	2.1	6.3	9.7	8.9	0-10 (N)
2.1.	Very high	A bit	Very high	Medium	Medium	Very little	Very high	Medium	5-terms (L)
2.2.	High	Minimum	Very high	Maximum	Minimum	Low	Very high	Minimum	7-terms (L)
3.1.	11.1	3.1	11.8	9.6	1.2	5.0	10.8	6.1	1-12 (N)
3.2.	Very high	Very low	Minimum	High	Medium	High	Very high	Maximum	7-terms (L)
3.3.	Very high	Medium	Very high	High	A bit	A bit	Very high	A bit	5-terms (L)
4.1.	Very high	Very low	Minimum	High	Low	Minimum	High	Medium	7-terms (L)
4.2.	12	2.3	11.5	9.8	1.3	1.6	11.7	2.3	1-12 (N)
4.3.	Very high	Very high	Very little	High	Very high	Medium	Very high	A bit	5-terms (L)
4.4.	High	Very low	Inexistent	Absolute	Very low	Very low	Moderate	Fairly low	9-terms (L)
5.1.	7.2	7.8	2.1	9.2	5.6	6.5	9.8	7.8	0-10 (N)
5.2.	8.7	5.2	7.2	8.6	7.8	8.3	9.7	9.1	0-10 (N)
5.3.	5.6	6.3	2.1	7.3	0.5	9.2	8.9	9.6	0-10 (N)
6.1.	Very high	Low	Low	Fairly high	Very low	Moderate	Absolute	Very high	9-terms (L)
6.2.	4.0	10.3	4.2	9.6	5.2	10.9	11.0	11.3	1-12 (N)
6.3.	Maximum	Low	Maximum	Very high	Moderate	Low	Maximum	High	7-terms (L)
6.4.	High	Fairly low	Very low	Low	Absolute	Moderate	Very high	Moderate	9-terms (L)

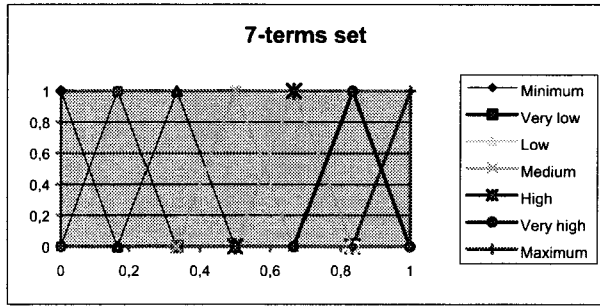


Figure 3: 7-terms linguistic set

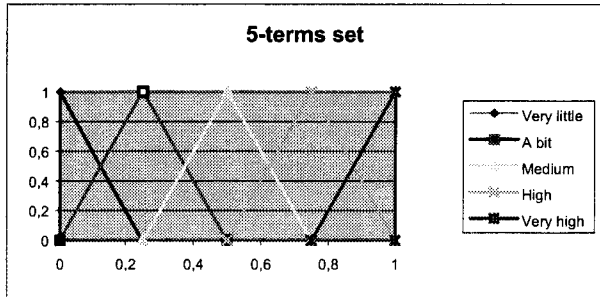
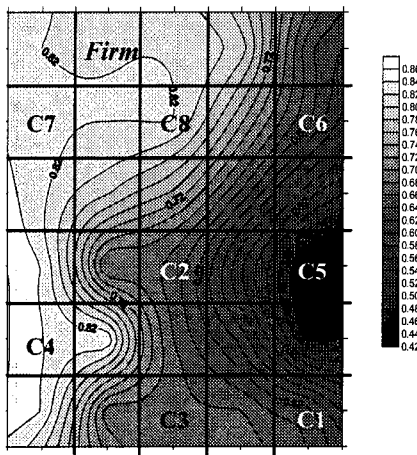


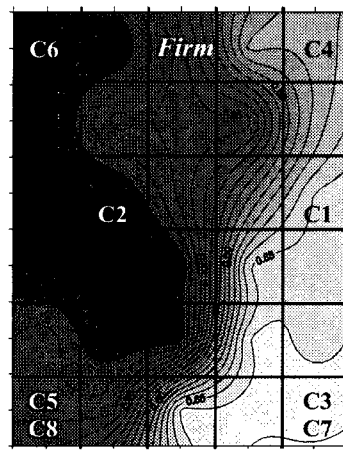
Figure 4: 5-terms linguistic set

To get an overall result about variables' importance, expert opinions (Table 2) were transformed in 2-tuples associated to the 9-term set and then integrated using the extended weighted media operator. This operator has been selected over other possibilities to obtain a more realistic result. Results obtained were (2-tuples):

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^e(1.1.) &= (VH, -0.115); \bar{x}_i^e(1.2.) = (VH, 0.138); \bar{x}_i^e(1.3.) = (FH, -0.270) \\ \bar{x}_i^e(1.4.) &= (VH, 0.161) \\ \bar{x}_i^e(2.1.) &= (L, -0.142); \bar{x}_i^e(2.2.) = (FL, -0.094); \\ \bar{x}_i^e(3.1.) &= (FH, 0.418); \bar{x}_i^e(3.2.) = (FH, 0.402); \bar{x}_i^e(3.3.) = (L, 0.178) \\ \bar{x}_i^e(4.1.) &= (VL, 0.292); \bar{x}_i^e(4.2.) = (H, -0.374); \bar{x}_i^e(4.3.) = (FL, -0.435) \\ \bar{x}_i^e(4.4.) &= (L, -0.495) \\ \bar{x}_i^e(5.1.) &= (VH, -0.248); \bar{x}_i^e(5.2.) = (VH, -0.171); \bar{x}_i^e(5.3.) = (VH, 0.358) \end{aligned}$$



$$\bar{x}_i^e(6.1.) = (H, 0.495); \bar{x}_i^e(6.2.) = (FH, -0.382); \bar{x}_i^e(6.3.) = (FH, -0.980)$$



$$\bar{x}_i^e(6.4.) = (FH, -0.022)$$

Previous results have been used to obtain the relative importance of features employed for calculating the weight vectors associated to 4 hybrid fuzzy-SOFMs (one for conglomerate), using the defuzzification method based on the maximum value. Final lattices have 6x5 output cells, which is enough to distribute 8 candidates in an efficient way, obtaining this relation using the information about the internal structure of data provided by Sammon Mapping. As far as the learning rate is concerned, it has been used a decay mechanism, beginning the process with $\alpha=0.9$ and finishing with $\alpha=0.1$. The neighbourhood radio has been adjusted too, from 6,40 (initial maximum Euclidean distance) to 1 (actualisation of the winner cell and its four nearest neighbours neurons). Finally it was applied a two-stages learning, as it has been explained.

Maps obtained using these weights and candidates' numeric and linguistic variables (Table 3) are shown in Figures 5 to 10, including a coloured topographic reference about maps' weights m_{ij} ; clearer grey means higher scores and darker grey means lower ones. In order to best understand the relative worker's positions, and additional pointer about company's requirements has been included (obtained from previous $\bar{x}_i^e$ from experts).

As it can be observed (Figure 5), C4 is the best candidate for the first conglomerate, who gets a punctuation mark much higher that required. Candidates C7 and C8 are very good situated too, been the nearest to firms' requests so their global values have been obtained in a very similar way to enterprise's desires. Others candidats obtain lower scores that necessary, being C5, C1 and C6 the weakest. Figure 6 shows a whole topographic map about aspirants' scores for the "Support and Human Service" conglomerate. C3 and C7 obtain the highest suitability for this magnitude, much better that company's needs. C1 and C4 have a good punctuation mark too, upper that it requested for experts. C5 and C8 present a fitness similar to enterprise's desires, but it has been obtained in a different way, due to their distance in the map. C2 and C6

are both located in the worst positions.

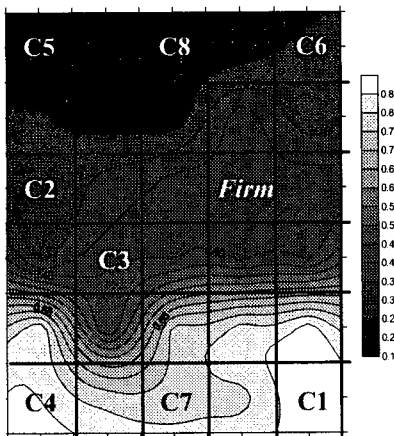


Figure 5: "Act and Success"
Figure 8: "Management"

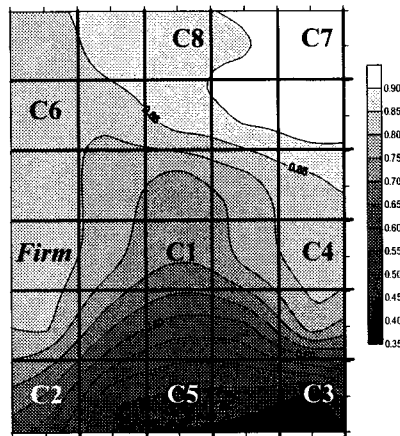


Figure 6: "Support and Human Service"
Figure 9: "Cognitive level"

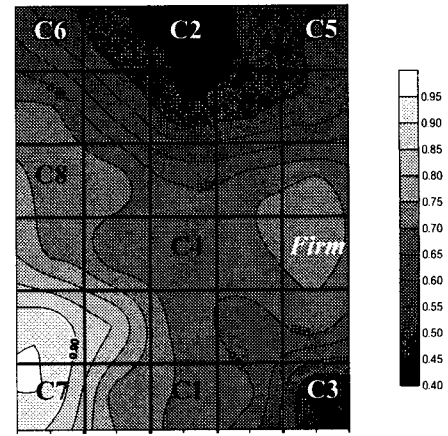


Figure 7: "Impact and Influence"
Figure 10: "Personal Effectiveness"

Figure 7 shows that C1 and C7 are the best applicants in terms of "Impact and Influence" conglomerate, better than firm's requirements. Applicants C8 and C4 both obtain a minor score than required, but it is formed by different ways: C4 has a higher punctuation in 3.1 and 3.3 variables but lesser in 3.2, so these individuals are located far away in the map; something, analogous happens for C3 and C6, who get a similar competence but who are located in different zones. Locations for C2 and C5 are really poor. The analysis of fourth conglomerate (Figure 8) allows examine that enterprise's need is a medium one, being C1, C4 and C7 the most proficient individuals about this sort or characteristics, C3 is situated in a medium position, near firm's score, and C5, C8 and C6 present the weakest positions. It is possible to observe again some dissimilarities among aspirants getting a comparable punctuation mark; for instance, C1 and C4 both present a very good competence, but it has been obtained from different items: C1 has highest values for the first three variables but C4 has a much higher value for item n. 4.4. Considering the cognitive level (Figure 9) C7 presents a very good level, highest than any other. Both C8 and C4 obtain a good score too but due to different characteristics (C4 has upper values for the two first items and C8 for the last one). C6 is placed in an average term, not far from company's needs, and C2 and C1 have lower scores than necessary. Finally C5 and C3 are not good situated at all. Finally, in terms of "Personal Effectiveness" (Figure 10), C7 is again the best suitable candidate; C8, C1 and C4 have a little worse situation, with efficiencies near to experts' desires. C6, C2, C5 and C3 are situated in the weakest zone of the map.

Previous analysis lets obtain an initial idea about candidates's fulfillment of job's requirements. In that way, C7, C1, C8 and C4 seems to be the most efficient individuals, and C5, C2 the weakest ones. However, this information is not enough to adopt the final selection decision: previous maps have been achieved considering individuals scores, weighted by $\bar{x}_i^e$ results, so they could be biased as a result of positive characteristics (higher than enterprise's needs) could be balancing lower scores. In this manner, to develop an optimum personal selection only critical data should be considered.

In addition, it is necessary to get an overall indicator of candidates' value, to select the most efficient worker. To get that, it was developed a new hybrid fuzzy SOFM. Values for applicants (Table 3) were transformed in 2-tuples associated with the 9-terms set (Figure 2); these 2-tuples were compared with experts' opinion about relative relevance of variables (previously $\bar{x}_i^e$ calculate for the 20 items) by means of the extended linguistic conjunction "Min", defined as follows:

$$LC_1^{e \rightarrow}((c, \beta), (a, \alpha)) = \Delta(MIN(\Delta^{-1}(c, \beta), \Delta^{-1}(a, \alpha)))$$

This operator was selected due to critical data are composed by scores fewer or equal than required; higher scores are not needed so, even when they constitute an useful information (Figures 5-10), they could increase final punctuation marks artificially.

Figure 11: Global hybrid fuzzy SOFM

Results obtained were employed for developing a new weighted-SOFM (considering as relative weights for variables previous $\bar{x}_i^e$), via the defuzzificator based on maximum heights (Figure 11). Similar SOFM's architecture and learning parameters were applied.

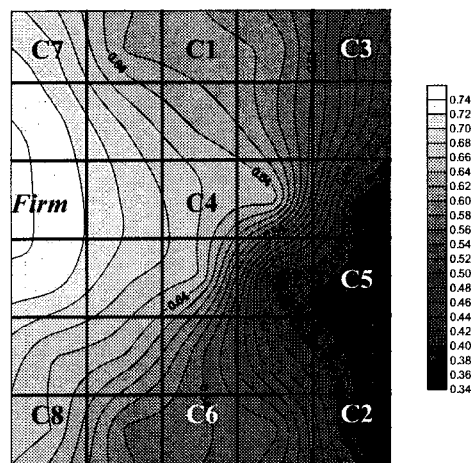
The scrutiny of Figure 11 shows that there are not candidates who perfectly fit job's requests. So, applicants have higher scores than firm in some categories but they really do not catch the required values for all of them. Best situated aspirant is C7, obtaining only a little lower punctuation mark than necessary; like it can be tested in Figures 5 to 10, if lower scores are authorized to offset upper ones, then C7 is the most efficient worker, even better that firm's desires.

C8, C1 and C4 are quite efficient too (specially C4 and C8), but scores decreases a lot for C6 and C3, being C5 and C2 the more ineffective persons. Considering previous information, firm should clearly select Candidate 7 because of, even when he does not suit absolutely, he has extraordinary scores for some of the most important items and his global competence is very acceptable.

4. CONCLUDING REMARKS

Results obtained from this paper could be resumed in two main conclusions: First of all, it is possible to integrate both numerical and linguistic information in order to obtain a better representation of the relative effectiveness of candidates in a personnel selection process based on competencies, using the 2-tuple fuzzy linguistic model and applying the new hybrid fuzzy-SOFM proposed in this article.

Secondly, the employment of the new Kohonen's SOFM model, integrating both relative scores of candidates and expert's opinions about the importance of competencies' variables allows obtain an efficient map about the



competitive situation of human applicants in terms of firm's requirement, detecting the best candidate and intrinsic groups of them, together to neighbourhood relations, improving results gets with classical methods.

Finally it could be interesting to remark the high potential possibilities of this sort of models to improve characteristic maps in order to better understand different economics events, specially in real problems coming from uncertainty environments where many times only linguistic variables and experts' opinions are available.

References

- [1] Delgado, M., Verdegay, J.L. and Vila, M.A., 1993: "On aggregation Operations of Linguistic Labels". *Internat. Journal of Intelligent Systems*, 8, pp. 351-370
- [2] Herrera, F. and Herrera-Viedma, E., 1995: "Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information". *Technical Report #DECSAI-95120*. Universidad de Granada. Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial.
- [3] Herrera, F. and Herrera-Viedma, E., 1997: "Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information". *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetic*, 26, pp. 646-656.
- [4] Herrera, F., López, E., Mendaña, C. And Rodríguez, M.A., 2001: "Linguistic Decision Model for Personnel Management solved with a Linguistic Biobjective Genetic Algorithm". *Fuzzy Sets and Systems*, 118, pp. 47-64.
- [5] Herrera, F. And Martínez, L., 1999: "A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words". *Technical Report #DECSAI-990102*, Dept. Computer Sciences and A.I., University of Granada.
- [6] Herrera, F. and Martínez, E., 1999b: "A Fusion method for Multi-Granularity Linguistic Information based on the 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model". *Technical Report #DECSAI-99107*, Dept. Computer Sciences and A.I., University of Granada.
- [7] Herrera, F. and Martínez, L., 2000: "An Approach for Combining Numerical and Linguistic Information Based on the 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model in Decision-Making". *Int. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 8, 5, págs. 539-562.
- [8] Kohonen, T., 1997: "Self-Organizing Maps". Springer-Verlag. Heidelberg.
- [9] Kohonen, T., 1990: "The Self-Organizing Map". *Proceedings of the IEEE*, 78, pp. 1464-1480.
- [10] López, E., Mendaña, C. y Rodríguez, M.A., 1996: "La Selección de Personal con un Algoritmo Genético Borroso". *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*, 2:2, pp.61-76.
- [11] Martín, B. and Sanz, A., 1997: "Redes neuronales y sistemas borrosos". Ra-Ma. Madrid.
- [12] Martínez, L., 1999: "Un nuevo modelo de representación de información lingüística basado en 2-tuplas para la agregación de preferencias lingüísticas". Ph Thesis. University of Granada, Spain.
- [13] McClelland, D.C., 1973: "Testing for Competencies rather than intelligence". *American Psychologist*, 28, pp. 1-4.

- [14] McClelland, D.C., 1993: "Introduction". Included in Spencer, L.M. et al: "*Competence at Work*". John Wiley and Sons. New York.
- [15] Porter, M.E., 1986: "*Estrategia Competitiva*". Campus. Rio de Janeiro.
- [16] Rodríguez, N. and Feliú, P., 1996: "*Curso Básico de Psicometría*". Psico Consult.
- [17] Simmonds, 1981: "Strategic Management Accounting", *Management Accounting*, april.
- [18] Spencer, L.M. and Spencer, S.M., 1993: "*Competence at Work*". John Wiley and Sons. New York.
- [19] Yang, J. and Mandan, G., 1994: "An Evidential Reasoning Approach for Multiple Attribute Decision Making with Uncertainty". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 24, pp. 1-17.
- [20] Zadeh, L.A., 1965: "Fuzzy Sets". *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353.

Predicción de información contable con un modelo híbrido. Comparación con técnicas de regresión clásicas¹

Antonio Arauzo Azofra Juan Luis Castro Peña

arauzo@decsai.ugr.es castro@decsai.ugr.es
E.T.S. Ingeniería Informática
Universidad de Granada
18071 GRANADA

Miguel Delgado
Calvo-Flores

mdelgado@ugr.es

M^a Angustias
Navarro Ruíz

José M^a de la Torre
Martínez

jdltorre@platon.ugr.es
Facultad de Ciencias Económicas y
Empresariales
Universidad de Granada
18011 GRANADA

Resumen

En los últimos años se ha venido prestando una atención considerable al análisis y modelado de la información contable para toma de decisiones en el mercado de capitales. Para ello se ha empleado usualmente la regresión en sus múltiples variantes.

En este trabajo se presenta el empleo de una técnica híbrida (que combina la selección de variables con la aproximación con RNN's Artificiales) desarrollada para evitar las dificultades procedentes de la actuación local de los métodos de regresión. Trata de identificar ejemplos mal evaluados no desde un punto de vista local, sino global, es decir, teniendo en cuenta la repercusión de cualquier empresa de la muestra sobre el error global del ajuste.

Se realiza además una comparación de los resultados obtenidos mediante el empleo de la regresión logística y el antedicho método en el problema de clasificación de las empresas integrantes de la muestra, con objeto de identificar el método más adecuado para la determinación de las variables que discriminan en mayor grado la pertenencia de aquéllas al grupo de las entidades más valoradas en el mercado.

Palabras Clave: Métodos Híbridos, Redes Neuronales Artificiales, Información contable, mercado de capitales, regresión logística.

1 INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos, se ha dedicado una atención considerable, a determinar que información proporcionada por las empresas y disponible para los inversores resulta relevante para los mismos.

En estudios anteriores [13] [14] se trató de verificar la importancia que la información económico-financiera de las empresas pudiera tener en relación con la valoración que los inversores realizan de las mismas en el mercado de valores. En dichos trabajos, y en línea con otros anteriores [11] [17] [20], se llevó a cabo un análisis basado en información contable, empleando modelos de regresión logística que clasificaban a las empresas integrantes de la muestra seleccionada en dos grupos: aquéllas que habían permanecido de manera estable en el tiempo en un índice bursátil y aquéllas que no, en función de una serie de indicadores económico-financieros clásicos, elaborados de acuerdo con los criterios de devengo y caja, además de variables tendentes a informar acerca de algunos activos intangibles de las empresas, y otras de carácter cualitativo. Las conclusiones alcanzadas ponían de manifiesto la importancia que los inversores otorgaban a la política de dividendos seguida por las empresas a la hora de asignarles un determinado valor, así como su aparente preferencia por una estructura financiera apalancada [1] [22], a la vez que por una garantía suficiente que elimine el riesgo de que la unidad económica incurra en insolvencia financiera. Por otra parte, las conclusiones alcanzadas por numerosos estudios que han tratado de analizar la relevancia para la valoración de las variables de caja, aunque con diferentes conclusiones al respecto ([4], [6], [8], [9], [12], [18], [19], [21], o [24]), hacían pensar que dichas variables podrían tener un mayor poder discriminatorio a la hora de diferenciar las empresas más valoradas por los inversores. No obstante, los resultados obtenidos no corroboraron lo anterior.

¹ Este trabajo ha sido realizado con financiación del proyecto CICYT-TIC2000-1362-C02-01.

El objetivo de la presente comunicación es presentar una técnica híbrida para identificar las variables y modelar las relaciones más relevantes para la toma de decisiones por parte de los inversores en el mercado de capitales. El mismo problema se resuelve empleando una técnica clásica, la regresión logística, para comparar los resultados.

2 METODOLOGÍA

2.1. SELECCIÓN DE LAS VARIABLES

Como variable dependiente se ha considerado la pertenencia o no de las empresas de la muestra al grupo de entidades que han permanecido en el Índice General de la Bolsa de Madrid desde 1993 hasta 1998; tomando el valor 1 en caso de pertenencia, y 0 en caso contrario. Tal como se ha indicado, dicha pertenencia viene determinada entre otros factores y de modo importante por la capitalización bursátil de los títulos, que vendría a indicar a su vez la valoración de los mismos por parte de los inversores participantes en el mercado. El uso de esta variable dependiente se ve apoyado por el empleo de los precios de las acciones en los trabajos de investigación en el área del mercado de capitales encuadrados dentro del paradigma utilitarista de la investigación contable [16] [15].

Las variables independientes seleccionadas han sido las que se relacionan en el Cuadro 1.

Cuadro 1: Relación de variables independientes

■ NIVEL DE ENDEUDAMIENTO	■ MARGEN
■ COMPOSICIÓN DEL ENDEUDAMIENTO	■ RENTABILIDAD ECONÓMICA TOTAL
■ FONDO DE MANIOBRA	■ RENTABILIDAD FINANCIERA
■ DISPONIBILIDAD	■ COSTE DEL ENDEUDAMIENTO
■ TEST-ÁCIDO	■ GASTOS FINANCIEROS
■ SOLVENCIA	■ I+D
■ GARANTÍA	■ PUBLICIDAD
■ TAMAÑO	■ DEMORA
■ RECURSOS GENERADOS	■ DEMANDAS
■ ROTACIÓN DEL ACTIVO	■ INCIDENCIAS
■ ROTACIÓN DE EXISTENCIAS	■ AUDITORIA
■ ROTACIÓN DE DERECHOS	■ SOLVENCIA CAJA (C/P)
■ RENTABILIDAD ECONÓMICA DE LA EXPLOTACIÓN	■ SOLVENCIA CAJA (L/P)
	■ CALIDAD DEL BENEFICIO
	■ RETORNO LÍQUIDO

2.2. SELECCIÓN DE LA MUESTRA

La muestra empleada está integrada por 64 empresas no financieras que cotizan en la Bolsa de Madrid, para las que se proporcionan datos consolidados relativos a balances y cuentas de resultados correspondientes a los ejercicios 1997 y 1998, obtenidos a partir de la base de datos de Intertell. Por otra parte, los datos relativos a los gastos en publicidad realizados por las firmas que conforman la muestra en los referidos ejercicios fueron suministrados por la empresa Infoadex. Para la selección de la muestra, se excluyeron las empresas inmobiliarias y constructoras, así como las concesionarias de autopistas, debido a que las características específicas de dichos sectores pueden distorsionar los resultados arrojados por los modelos resultantes del trabajo.

La relación de empresas fue obtenida a través de la página web de la Bolsa de Madrid, seleccionando, en primer lugar, aquellas que, desde 1993 hasta 1998, han formado parte de la composición del Índice General de la Bolsa de Madrid.

Las 64 empresas estaban divididas en dos grupos de 32. El primero formado por aquellas que presentan la característica de permanencia, y el de entidades que no reunían dicha característica.

2.3. REGRESIÓN LOGÍSTICA

Con el fin de alcanzar una explicación coherente acerca de la mayor o menor relevancia que los indicadores citados puedan tener en la capitalización bursátil de las unidades económicas de la muestra seleccionada, se aplicó en primer lugar el modelo de regresión logística.

La elección del mismo en detrimento de otros, tales como el análisis discriminante o la regresión lineal, se fundamenta en las características de las variables, tanto independientes como dependiente. [23]

En base a todo lo anterior, se aplicó la regresión logística a la muestra anteriormente especificada, utilizando para ello el programa SPSS 10.0, obteniéndose un modelo con un nivel de acierto global del 85% de los casos. Para su ajuste se siguió el método condicional de introducción por pasos de las variables consideradas.

2.4. UN MODELO HÍBRIDO BASADO EN rrrnaa Y ARBOLES DE DECISION

El segundo método de análisis aplicado se basa en el empleo de un método híbrido con objeto de seleccionar las características más relevantes, y ajustar el modelo QU se pretende. Se parte de la metodología propuesta en SEPARATE (SEmiglobal PARTition to design Authomatic sysTEms) [10], adaptándola para considerar tanto variables discretas como continuas, y combinándola

con la metodología de selección de características del algoritmo FOCUS [5].

La filosofía de SEPARATE consiste en conjugar particiones globales y locales para aunar las ventajas de las Redes Neuronales (particiones globales, buena generalización) y los Árboles de Decisión (particiones locales, buen ajuste). En este caso, además, se pretende obtener las características más relevantes, con lo cual parecía apropiado utilizar también algún método para seleccionarlas. Se ha escogido el algoritmo de FOCUS por su alto grado de eficiencia y efectividad (lo que lo hace ser uno de los más empleados) aunque en principio esta limitado a problemas donde todas las variables fuesen de naturaleza discreta.

En un primer momento, se adaptó el algoritmo FOCUS, con el objetivo de considerar todas las variables tanto discretas como continuas, obteniendo de esta manera la variante C-FOCUS [7]. Finalmente, la adaptación de SEPARATE se realizó de la siguiente forma:

1. Obtener mediante C-FOCUS las variables más relevantes para el problema, ordenadas según su grado de relevancia.
2. Si en la primera posición hay variables discretas, utilizar un árbol de decisión para dividir el problema en casos, y volver a aplicar este algoritmo para cada uno de esos casos. Si, por el contrario, no hay variables discretas en la primera posición, ajustar el modelo mediante una red neuronal, utilizando solamente las variables obtenidas como relevantes.

En base a lo anterior, se aplicó el C-FOCUS, en el que se obtuvieron las variables relevantes. Dado que la primera era discreta, se aplicó de nuevo el algoritmo para los dos casos que definía esta variable. El paso posterior consistió en la aplicación de redes neuronales tanto para la muestra total como para los dos casos en los que se segmentó el problema. Para la aplicación de esta última técnica, se dividieron los casos en un 25% para validación y un 75% para entrenamiento, elegidos al azar. Además, se modificó ligeramente el procedimiento de entrenamiento BackPropagation, cambiando la función de error por una función truncada del mismo (se hace 0 si $|\text{error}| < 0.2$), con lo que se consiguió elevar de forma notable el porcentaje de aciertos.

3 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS Y CONCLUSIONES

Como hemos indicado anteriormente el principal objetivo del presente trabajo es presentar una técnica híbrida para selección y modelado de variables empleandola sobre el problema de la selección de las variables más relevantes para la toma de decisiones de los inversores en el mercado de capitales, comparando sus resultados con los

obtenidos por regresión logística. Esta, al igual que el resto de técnicas clásicas de regresión para identificación de funciones a partir de datos, aunque en menor medida que las demás de esta categoría, presenta el inconveniente de que los ajustes se realizan de manera local, de modo que el espacio de datos de entrada se divide en regiones, dentro de cada una de las cuales se estudia el ajuste de un modo relativamente independiente. Ello hace aconsejable la búsqueda de técnicas alternativas, que permitan superar estos inconvenientes, lo que ha llevado a la aplicación de técnicas basadas en inteligencia artificial.

La aplicación de la regresión logística a la muestra seleccionada ha llevado a la obtención de un modelo para el cual, como se observa en la Tabla 1, el test de significación global de los coeficientes presenta un nivel de significación de 0, lo cual hace rechazar la hipótesis nula, es decir, el modelo no ajusta bien sólo con el término independiente, lo que equivale a afirmar que los coeficientes obtenidos para las distintas variables integrantes del modelo son distintos de cero.

Tabla 1: Bondad del ajuste.

ESTADÍSTICO	VALOR	G	SIG.	H ₀	RESULTADO
		L			
TEST DE SIGNIFICACIÓN GLOBAL DE LOS COEFICIENTES	39,33	4	0,000	EL MODELO SÓLO CON EL TÉRMINO INDEPENDIENTE AJUSTA BIEN LOS DATOS	RECHAZAR
TEST DE BONDAD DEL AJUSTE DE HOSMER Y LEMESHOW	12,79	8	0,119	EL MODELO AJUSTA BIEN LOS DATOS	NO SE PUEDE RECHAZAR

El modelo clasifica correctamente las empresas que no pertenecen al grupo de permanentes al IGBM en un 89,7% de los casos, y las que pertenecen en un 81,3% de los casos, lo cual verifica de nuevo que el modelo es aceptable. Por último, se consigue asignar de forma correcta en su conjunto el 85,2% (Tabla 2).

Tabla 2: Clasificación de pertenencia.

VALORES OBSERVADOS	VALORES PRONOSTICADOS		PORCENTAJE DE ACIERTOS
	(0) NO PERTENENCIA	(1) PERTENENCIA	
(0) NO PERTENENCIA	26	3	89,7 %
(1) PERTENENCIA	6	26	81,3 %
TOTAL			85,2 %

La Tabla 3 muestra el modelo final obtenido, en el que aparecen las variables relativas a la tasa de reparto de dividendos, composición del endeudamiento, garantía y tamaño de la unidad económica, así como sus coeficientes, todos ellos significativos.

Tabla 3: Modelo final ajustado.

VARIABLE	χ^2	SE	WALD	GL	SIG.
COMPOSICIÓN DEL ENDEUDAMIENTO	0,875	0,374	4,402	1	0,036
PAYOUT	6,872	3,300	4,798	1	0,028
GARANTÍA	1,284	0,512	6,294	1	0,012
TAMAÑO (1)	3,017	1,057	8,149	1	0,004
CONSTANTE	-6,576	1,938	11,510	1	0,001

Por otra parte, la aplicación del algoritmo C-FOCUS a la muestra considerada produjo los resultados que se muestran en la tabla 4. La misma proporciona una relación de las variables con mayor poder discriminatorio de entre las veintinueve incorporadas al estudio que resultan de la aplicación de esta técnica a la muestra total considerada, así como aquellas más relevantes en el caso en que la misma se subdivide en función de la dimensión de las unidades económicas que la integran.

Tabla 4: Resultados del algoritmo C-FOCUS.

VARIABLE	TODAS	MEDIANAS	GRANDES
TAMAÑO	×		
PAYOUT	×		×
GARANTÍA	×	×	
SOLVENCIA CAJA L/P	×	×	
ROTACIÓN ACTIVO	×		×
FONDO MANIOBRA	×		×
COSTE ENDEUDAMIENTO	×		
NIVEL ENDEUDAMIENTO			×
AUDITORÍA		×	

Gráficamente, los modelos obtenidos pueden representarse como se muestra en la Figura 1.

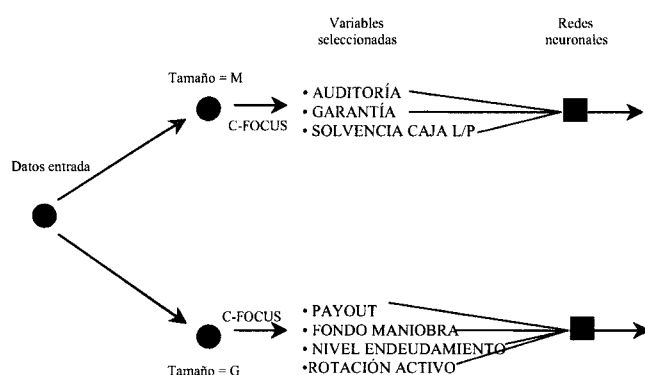


Figura 1: Aplicación del algoritmo C-FOCUS.

Los resultados alcanzados con los dos tipos de análisis realizados resultan coherentes entre sí, aunque las técnicas basadas en inteligencia artificial, en todos los casos, proporcionan porcentajes de acierto más elevados,

como muestran las tablas 5 y 6, referidas, respectivamente, a la red neuronal aplicada sobre la muestra total una vez seleccionadas las variables con el C-FOCUS, y a las redes aplicadas a las dos submuestras.

Tabla 5: Clasificación de pertenencia, muestra total.

VALORES OBSERVADOS	VALORES PRONOSTICADOS		PORCENTAJE DE ACIERTOS
	(0) NO PERTENENCIA	(1) PERTENENCIA	
(0) NO PERTENENCIA	29	2	93'54 %
(1) PERTENENCIA	0	36	100 %
TOTAL			97'01 %

Tabla 6: Clasificación de pertenencia, submuestras.

Tabla 8. Clasificación de pertenencia, submuestras.			
VALORES OBSERVADOS	VALORES PRONOSTICADOS		PORCENTAJE DE ACIERTOS
	(0) NO PERTENENCIA	(1) PERTENENCIA	
TAMAÑO=M			
(0) NO PERTENENCIA	17	0	100 %
(1) PERTENENCIA	0	5	100 %
TAMAÑO=G			
(0) NO PERTENENCIA	12	2	85'7 %
(1) PERTENENCIA	0	31	100 %
TOTAL			97'01 %

Pese a la coincidencia, en líneas generales, de los resultados obtenidos, nuestro método proporciona niveles de acierto superiores a los correspondientes al análisis mediante regresión logística, lo que hace más aconsejable su uso para resolver el problema planteado, además de su capacidad de aprendizaje.

El tamaño resultó ser, en ambos casos, la variable con mayor poder discriminatorio a la hora de clasificar las empresas en el grupo de unidades económicas que han permanecido en el Índice General de la Bolsa de Madrid.

Es de destacar también que, al segmentar la muestra total en función de esta variable, los indicadores más valorados para las empresas grandes y para las de más reducida dimensión difieren. Mostrando de esta forma la idoneidad de la metodología SEPARATE en este problema.

Referencias

- [1] ABAD, C., GARCÍA BORBOLLA, A., LAFFARGA, J., LARRÁN, M. y PIÑERO, J. (1997): "La información financiera de los grupos de sociedades frente a la información individual: evidencia empírica de la Bolsa de Madrid". *Comunicación presentada al X Congreso de AECA*. Salamanca, pp. 19-38.

- [2] ABARBANELL, J.S. y BUSHEE, B.J. (1997): "Fundamental Analysis, Future Earnings, and Stock Prices". *Journal of Accounting Research*, Vol. 35, nº 1, pp. 1-24.
- [3] ABARBANELL, J.S. y BUSHEE, B.J. (1998): "Abnormal Returns to a Fundamental Analysis Strategy". *Accounting Review*, Vol. 73, nº 1, January, pp. 19-45.
- [4] ALI, A. (1994): "The Incremental Information Content of Earnings Working Capital from Operations and Cash Flows". *Journal of Accounting Research*, Vol. 32, pp. 61-74.
- [5] ALMUALLIM, H. AND DIETERICH, T.G (1994). "Learning Boolean Concepts in the Presence of Many relevant Features". *Artificial Intelligence*, 69 (1-2): 279-305.
- [6] ANSÓN LAPEÑA, A. y PINA MARTÍNEZ, V. (1994): "Contenido Informativo de la Información Económico-Financiera para Evaluar la Rentabilidad Empresarial". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. XXIII, nº 78, pp. 143-157.
- [7] ARAUZO, A., CASTRO, J.L (2002). "C-FOCUS: a continuous extension of FOCUS". DECSAI Technical Report 02-01-23.
- [8] BALL, R. y BROWN, P. (1968): "An Empirical Evaluation of Accounting Income Numbers". *Journal of Accounting Research*, Vol. 10, pp. 159-178.
- [9] BEAVER, W.H. y DUKES, R. (1972): "Interperiod Tax Allocation, Earning Expectations and the Behaviour of Security Prices". *The Accounting Review*, Vol. 47, pp. 320-332.
- [10] CASTRO, J.L., DELGADO, M. & MANTAS, C.M.(2000), "SEPARATE: a method of machine learning based on semiglobal partitions", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 11, nº 3, pp. 710-720, Mayo, 2000
- [11] CRESPO DOMINGUEZ, M. A. (1991): "El análisis contable y el mercado de capitales: un estudio empírico acerca de la relación entre la información contable y los precios de las acciones". *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. 69, pp. 969-984.
- [12] CHARITOU, A. y PANAGIOTIDES, G. (1999): "Financial Analysis, Future Earnings and Cash Flows, and the Prediction of Stock Returns: Evidence for the UK". *Accounting and Business Research*, Vol. 29, nº 4, pp. 281-298.
- [13] DE LA TORRE MARTÍNEZ, J.M.; NAVARRO RUIZ, M.A. y SÁNCHEZ VIZCAÍNO, G. (2000): "Relevancia de la Información Contable para Discriminar las Empresas más Valoradas en el Mercado Español: Un Estudio Empírico". *IX Encuentro de Profesores Universitarios de Contabilidad*. Las Palmas de Gran Canaria. Vol. 2, pp. 669-680.
- [14] DE LA TORRE MARTÍNEZ, J.M.; NAVARRO RUIZ, M.A. y SÁNCHEZ VIZCAÍNO, G. (2001): "Incidencia de la Información Contable Basada en el Criterio de Devengo vs. Criterio de Caja en la Valoración de Acciones en el Mercado Español: Una Aproximación Empírica". *XI Congreso AECA*. Madrid.
- [15] GARCÍA BENAÚ, M.A. y GINER INCHAUSTI, B. (2000): "Perspectiva de Investigación de la Contabilidad Financiera en el Ámbito Internacional". *IX Encuentro de Profesores Universitarios de Contabilidad*. Las Palmas de Gran Canaria. Vol. 1, pp. 56-136.
- [16] JENNINGS, R.; ROBINSON, J.; THOMPSON, R.B. y DUVALL, L. (1996): "The Relation Between Accounting Goodwill Numbers and Equity Values". *Journal of Business, Finance and Accounting*, Vol. 23, nº 4, pp. 513-533.
- [17] LEV, B. y THIAGARAJAN (1993): "Fundamental Information Analysis". *Journal of Accounting Research*, Vol. 31, nº. 2, pp. 190-215.
- [18] LIVNAT, J. y ZAROWIN, P. (1990): "The Incremental Information Content of Cash Flow Component". *Journal of Accounting of Economics*, Vol. 13, pp. 25-46.
- [19] McLEAY, S., KASSAB, J. y HELAN, M. (1997): "The Incremental Information Content of Accruals: Evidence Based on the Exponential Smoothing of Levels and Trends in Pre-Tax Earnings, Funds Flow and Cash Flow". *Journal of Business Finance & Accounting*, Vol. 24, nº 7 y 8, pp. 1147-1167.
- [20] MITCHELL, M. y MULHERIN, H. (1994): "The Impact of Public Information on the Stock Market". *Journal of Finance*, July, pp. 923-951.
- [21] PFEIFFER, R.J. y ELGERS, P.T. (1999): "Controlling for Lagged Stock Price Responses in Pricing Regressions: An Application to the Pricing of Cash Flows and Accruals". *Journal of Accounting Research*. Vol. 37, nº 1, pp. 239-247.
- [22] REES, W. (1997): "The Impact of Dividends, Debt and Investment on Valuation". *Journal of Business, Finance and Accounting*, vol. 24, pp. 1111-1140.
- [23] SÁNCHEZ VIZCAÍNO, G. (2000): "Regresión Logística", en LUQUE MARTÍNEZ, T. (ed.): *Técnicas de Análisis de Datos en Investigación de Mercados*. Ed. Pirámide. Madrid.
- [24] SLOAN, R.G. (1996): "Do Stock Prices Fully Reflect Information in Accruals and Cash Flows About Future Earnings?". *The Accounting Review*, Vol. 71, nº 3, pp. 289-315.

UN MODELO DE ÍNDICES CON BETAS DIFUSAS PARA LA SELECCIÓN DE CARTERAS

A. Bilbao

Universidad de Oviedo
ameliab@correo.uniovi.es

M. Jiménez

Universidad del País Vasco
eupjilom@se.ehu.es

M. Arenas

Universidad de Oviedo
mariammar@correo.uniovi.es

J. Antomil

Universidad de Oviedo
jantomil@correo.uniovi.es

Resumen

Este trabajo presenta una aplicación de la Teoría de Subconjuntos Difusos a la Selección de Carteras bajo la hipótesis del modelo de índice único de Sharpe. La estimación de la Beta futura de cada título es un número difuso trapezoidal y, por tanto, la Beta de la cartera también. Hemos trabajado con los conceptos de *valor*, *ambigüedad* y *difusidad* de la Beta de la cartera; con estos tres índices se recoge suficiente información sobre el número impreciso que cuantifica la Beta y su manejo es muy sencillo en nuestro problema. El modelo propuesto es un modelo de metas que incluye aspiraciones imprecisas del inversor sobre las proporciones de activos de alto y bajo riesgo, la semántica de estas metas se basa en la pertenencia difusa a un conjunto de satisfacción de la meta. Hemos incluido un ejemplo ilustrativo del modelo.

Palabras Clave: Selección de Carteras, Índice, Beta, Número Difuso, Valor, Ambigüedad, Difusidad.

1 INTRODUCCIÓN

La Teoría Moderna de Carteras nace en los años 50 con los trabajos pioneros de Markowitz [12, 13]. A pesar de su incuestionable rigurosidad teórica el modelo de optimización de Markowitz ha presentado problemas de implementación práctica, sobre todo, en aquellos casos en los que el número de activos candidatos a formar parte de la cartera es grande. La primera razón de estas dificultades reside en la propia naturaleza de los datos (Elton y Gruber[9]) ya que es necesario disponer de pronósticos fiables sobre las rentabilidades medias, varianzas, covarianzas entre cada par de

activos, siendo estas últimas las que presentan mayor problemática. Los analistas financieros encuentran muchas dificultades en pronosticar los movimientos conjuntos de títulos y para paliar esta situación se han propuesto en la literatura (Sharpe [18, 19], Markowitz y Perold [14], Perold [16], Connor y Korajczyk [5]) diversos modelos cuyo objetivo es la determinación de la estructura de correlación entre las rentabilidades de los títulos. La modelización más sencilla es la de índice único propuesta por Sharpe que conlleva la estimación de la Beta de cada valor candidato a formar parte de la cartera. Dichas estimaciones sobre las betas futuras podrían obtenerse estimando la Beta a partir de datos pasados y utilizando esta Beta histórica como un valor de partida de la Beta futura. El analista puede, entonces, preocuparse de estudiar las circunstancias que pueden influir en la Beta futura. Existen en la literatura métodos estadísticos para corregir las Betas históricas (Blume [3], Vasicek [20], Beaver et al. [2]) que por su propia naturaleza probabilística no sirven para introducir la experiencia subjetiva y, por tanto, imprecisa del analista. Nuestro trabajo puede ser considerado una aportación al tratamiento de la información imprecisa en la estimación de la Beta. La cuantificación de la imprecisión va a ser tratada mediante números difusos y vamos a utilizar los conceptos de *valor*, *ambigüedad* y *borrosidad* introducidos por Delgado et al. ([6, 7]).

Muchos decisores prefieren seguir un criterio satisfactorio en lugar de uno optimizador. La Programación por Metas, creada por Charnes y Cooper [4], es una técnica de programación matemática que permite el tratamiento de múltiples objetivos bajo una filosofía satisfactoria que se expresa mediante el concepto de meta. Debido a la naturaleza claramente biobjetivo (maximizar la rentabilidad-minimizar el riesgo) del problema de la selección de carteras, la Programación por Metas se ha utilizado en la literatura ([11], [10], [1]) para obtener la cartera eficiente que satisface, tanto como sea posible, las preferencias del inversor.

En el diseño de un problema de metas se fijan los niveles de aspiración para cada objetivo, esto da lugar a dos tipos de dificultades, en primer lugar puede resultar complicado para el decisor fijar estos umbrales de forma nítida y, por otra parte, la solución obtenida utilizando la teoría clásica puede desviarse demasiado de los niveles de aspiración propuestos. Para salvar estas carencias, proponemos un tratamiento flexible de las metas. En este trabajo introducimos funciones de pertenencia que modelizan el cumplimiento de las metas con un umbral de tolerancia que marca la frontera de lo no admisible, con esta propuesta el decisor puede controlar "suavemente" la satisfacción de las metas.

2 NOTACIÓN Y DEFINICIONES BÁSICAS

2.1 MODELO CLÁSICO DE SHARPE

Consideramos una cartera, P , formada a partir de un conjunto de n activos $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ como un vector $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ donde cada x_i representa la proporción del presupuesto total invertida en el activo s_i . Suponemos que las ventas a crédito no están permitidas, lo que da lugar a la condición de no negatividad sobre las x_i , y que el presupuesto se gasta totalmente, es decir, $\sum x_i = 1$. En el modelo de índice único de Sharpe se supone que la variación en el precio se debe a variaciones en el índice general del mercado, I_m , y a variaciones que son exclusivas de cada valor. Denotamos por R_i la variable aleatoria rentabilidad de s_i y asumiendo las hipótesis de un modelo de índice único podemos escribir:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i I_m + e_i \quad (1)$$

donde: $R_i = \frac{P_{i1} - P_{i0} + D_i}{P_{i0}}$ con P_{i0} el precio del activo al principio del periodo considerado, P_{i1} es la variable aleatoria que indica el precio del título i al final del periodo y D_i los ingresos por dividendos en ese periodo.

α_i representa la componente de s_i que es independiente de la variación del índice I_m .

β_i es una constante que mide el cambio esperado en R_i dado un cambio en I_m .

e_i representa el elemento aleatorio de R_i no justificado por I_m y denotamos por σ_{e_i} su desviación estándar.

Los parámetros α_i , β_i y $\sigma_{e_i}^2$ se obtienen habitualmente mediante regresión de series temporales y, por tanto, β_i es la pendiente de la recta de regresión de las rentabilidades de s_i con respecto a los cambios en el índice I_m .

La hipótesis básica del modelo de índice único es la

independencia de los términos residuales, e_i y e_j , es decir, $E(e_i, e_j) = 0$, en consecuencia la utilización del modelo para representar el movimiento conjunto de los títulos proporciona los siguientes resultados sobre rentabilidades medias, varianzas y covarianzas de los s_i :

- La rentabilidad media, $E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(I_m)$.
- La varianza de la rentabilidad de s_i , $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2$.
- La covarianza de las rentabilidades entre s_i y s_j , $\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$.

siendo σ_m^2 la varianza del índice I_m .

La rentabilidad esperada de la cartera P , E_P , se obtiene de:

$$E_P = \sum E(R_i) x_i \quad (2)$$

y la varianza de la cartera como:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{e_i}^2 \quad (3)$$

Expresando el riesgo de la cartera, medido por la varianza, en términos de la Beta de la cartera, $\beta_P = \sum x_i \beta_i$, se tiene:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{e_i}^2 \quad (4)$$

El segundo sumando en (4) representa el riesgo diversificable que tiende a 0 en carteras de gran tamaño, bajo esta hipótesis el riesgo de la cartera se aproxima a:

$$\sigma_P = \beta_P \sigma_m \quad (5)$$

De la ecuación (5) se deduce que como σ_m es una constante para todas las carteras β_P se puede considerar una medida del riesgo de P . Un posible objetivo de la inversión es obtener la mayor tasa de rentabilidad esperada consistente con el máximo riesgo para el cual el inversor no es adverso.

A partir de lo anterior diremos que una cartera es (E_P, β_P) -eficiente si verifica que tiene la mayor rentabilidad esperada entre todas las que tienen la misma β_P y la menor β_P entre todas las que tienen la misma E_P . La frontera eficiente está formada por todos los pares (E_P, β_P) -eficientes.

2.2 ESTIMACIÓN DE LAS BETAS

En nuestro trabajo vamos a considerar una estimación subjetiva ofrecida por el analista sobre la beta futura

de cada título. Cada estimación, $\tilde{\beta}_i$, vendrá representada por un número difuso trapezoidal. Las estimaciones tanto estadísticas como imprecisas pueden ser recogidas en el número trapezoidal de manera sencilla y transparente para el analista, por ejemplo el diseño de $\tilde{\beta}_i$ se podría realizar atendiendo a que su conjunto modal (núcleo) contenga a la beta estimada mediante regresión a partir de la serie histórica más reciente respecto del periodo de predicción y/o a las betas obtenidas mediante técnicas de ajuste de las anteriores (ver técnicas de Blume [3], de Vasicek [20], de Beaver, Kettler y Scholes [2] y de Rosenberg et al. [17]). También es posible mediante una representación trapezoidal tener en cuenta las regresiones hacia 1 que, empíricamente se ha demostrado sufren las betas de un periodo al siguiente. Definimos la **Beta difusa de la cartera**, $\tilde{\beta}_P$, mediante:

$$\tilde{\beta}_P = \sum x_i \tilde{\beta}_i \quad (6)$$

según la aritmética de números difusos $\tilde{\beta}_P$ será también un número difuso trapezoidal.

2.3 ALGUNOS RESULTADOS SOBRE VALOR, AMBIGÜEDAD Y DIFUSIDAD DE UN NÚMERO DIFUSO

Delgado y otros ([6], [7]) introducen los conceptos de *valor*, *ambigüedad* y *difusidad* de un número difuso como índices que de forma sencilla son capaces de reflejar mucha de la información contenida en dicho número. Si η es un número difuso cuyos α -cortes se representan por $[L_\eta(\alpha), R_\eta(\alpha)]$ denotamos por $V_s(\eta)$, $A_s(\eta)$, $F_s(\eta)$ el valor, ambigüedad y difusidad, respectivamente, del número η con respecto a la función de reducción $s(\alpha)$. Es fácil probar que con respecto de la suma extendida con la t-norma min, los anteriores operadores son lineales puesto que dados dos números difusos η y θ y dos números reales r y t , aplicando el principio de extensión con t-norma min, Dubois y Prade [8] demuestran la siguiente relación para los α -cortes:

$$\begin{aligned} [L_{r\eta+t\theta}(\alpha), R_{r\eta+t\theta}(\alpha)] &= r[L_\eta(\alpha), R_\eta(\alpha)] + \\ &+ t[L_\theta(\alpha), R_\theta(\alpha)] \end{aligned} \quad (7)$$

que junto con la linealidad de las integrales que definen los tres conceptos permiten concluir la proposición.

3 FORMULACIÓN DEL MODELO DE PROGRAMACIÓN POR METAS

3.1 OBJETIVOS Y METAS

Los objetivos fundamentales que tienen que tenerse en cuenta en la selección de la cartera óptima serían:

- Maximización de la rentabilidad esperada que se transforma en una meta del tipo:

$$E_P + n - p = E_{P_{\min}}^* \quad (8)$$

donde la variable de desviación negativa, n , deberá minimizarse y $E_{P_{\min}}^*$ es el valor mínimo admitido para la rentabilidad esperada de la cartera.

- Minimización de la Beta de la cartera que se transforma en una meta del tipo:

$$\tilde{\beta}_P + n - p = \tilde{\beta}_{P_{\max}}^* \quad (9)$$

donde la variable de desviación positiva, p , deberá minimizarse y $\tilde{\beta}_{P_{\max}}^*$ es el valor máximo admitido para la Beta de la cartera.

Además admitiremos otros objetivos:

- Minimizar o maximizar, según las expectativas sobre el mercado, la suma ponderada de la varianza residual de cada título, e_i^2 :

$$Var_{res} = \sum x_i e_i^2 \quad (10)$$

Bajo expectativas favorables podría ser deseable una gran variación no explicada por el mercado y alternativamente, con expectativas desfavorables lo contrario.

- Inversión máxima en cada activo (diversificación ingenua). Fijar una cota superior para las proporciones invertidas en cada activo, la llamada diversificación ingenua, puede no ser correcto desde el punto de vista de la Teoría de Carteras, pero puede reflejar las preferencias del decisor y, por otra parte, ha de tenerse en cuenta por el gestor de un fondo de inversión ya que existen restricciones legales sobre las proporciones máximas en activos o grupos de activos.

La diversificación -no se puede invertir más del $k_i\%$ de la cartera en s_i - se puede tratar bien como una restricción o como una meta, en este último caso tenemos:

$$x_i + n - p = k_i/100 \quad (11)$$

donde la variable de desviación positiva, p , deberá minimizarse.

- Preferencias flexibles sobre las betas.

i) El inversor puede ordenar los activos según su Beta y decidir que la cartera satisfactoria debería, si es posible, contener como mucho alrededor de un $j\%$ en activos cuya beta sea mayor o igual que un valor prefijado mayor que 1 (limitar la inversión en activos arriesgados, ar). Así se tiene la meta:

$$\sum_{i \in ar} x_i \lesssim \frac{j}{100} \quad (12)$$

cuyo tratamiento flexible ($\lesssim$) podría expresarse mediante una función de pertenencia μ_{ar} definida por:

$$\mu_{ar}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad \sum_{ar} x_i \leq \frac{j}{100} \\ \in [0, 1] & si \quad \frac{j}{100} \leq \sum_{ar} x_i \leq \frac{j}{100} + h \\ 0 & si \quad \sum_{ar} x_i > \frac{j}{100} + h \end{cases} \quad (13)$$

con esta función el inversor acota de una manera "suave" el incumplimiento de la meta, no admitirá una violación de la meta mayor que el umbral h , y estará más satisfecho cuánto más cerca de 0 se encuentre dicho umbral.

ii) Además, el inversor desea que como poco alrededor del $l\%$ de la cartera se invierta en acciones con betas menores que un valor prefijado menor que 1 (cota mínima de activos de bajo riesgo, br). Así se tiene la meta:

$$\sum_{i \in br} x_i \gtrsim \frac{l}{100} \quad (14)$$

cuyo tratamiento flexible ($\gtrsim$) podría expresarse mediante una función de pertenencia μ_{br} definida por:

$$\mu_{br}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad \sum_{br} x_i < \frac{l}{100} + f \\ \in [0, 1] & si \quad \frac{l}{100} + f \leq \sum_{br} x_i \leq \frac{l}{100} \\ 1 & si \quad \sum_{br} x_i > \frac{l}{100} \end{cases} \quad (15)$$

en este caso tendremos consideraciones análogas a las dichas anteriormente en i), el umbral para esta meta es f .

La agregación de los grados de satisfacción (μ_{ar}, μ_{br}) respecto del cumplimiento de cada meta va a llevarse a cabo utilizando el enfoque de Zimmermann [21]. Bajo esta perspectiva el inversor se comporta de una manera precavida y considera que el grado de satisfacción agregado es el mínimo de los dos lo que da lugar al siguiente problema max - min.

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ s.a \quad & \lambda \leq \mu_{ar}(x) \\ & \lambda \leq \mu_{br}(x) \end{aligned} \quad (16)$$

3.2 TRATAMIENTO DE LAS BETA DIFUSAS

La formulación del modelo de metas plantea, en nuestro caso, la determinación de la semántica del segundo

objetivo, minimizar la beta de la cartera, y su correspondiente transformación en meta. Nuestra propuesta utiliza los conceptos de *valor*, *ambigüedad* y *difusidad* introducidos por Delgado y otros ([6], [7]) tomando como función de reducción la identidad. Así el objetivo de minimizar la Beta da lugar a tres nuevos objetivos:

$$\min V(\tilde{\beta}_P), \min A(\tilde{\beta}_P), \min F(\tilde{\beta}_P) \quad (17)$$

que transformados en metas son, respectivamente:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\beta}_P) + n - p &= V\tilde{\beta}_P^*_{\max} \\ A(\tilde{\beta}_P) &\cong 0 \\ F(\tilde{\beta}_P) &\cong 0 \end{aligned} \quad (18)$$

en el primer caso la variable a minimizar será la p . Debido a que, en general no va a ser posible conseguir el nivel de aspiración nulo para la ambigüedad y la difusidad planteamos un tratamiento flexible para estas metas similar al expuesto en 3.1, así definimos las funciones de pertenencia, μ_A y μ_F :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad \sum x_i A(\tilde{\beta}_i) = 0 \\ \in [0, 1] & si \quad 0 \leq \sum x_i A(\tilde{\beta}_i) \leq A^u \\ 0 & si \quad \sum x_i A(\tilde{\beta}_i) > A^u \end{cases} \quad (19)$$

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1 & si \quad \sum x_i F(\tilde{\beta}_i) = 0 \\ \in [0, 1] & si \quad 0 \leq \sum x_i F(\tilde{\beta}_i) \leq F^u \\ 0 & si \quad \sum x_i F(\tilde{\beta}_i) > F^u \end{cases} \quad (20)$$

y la agregación de los grados μ_A y μ_F se lleva a cabo mediante el mismo enfoque max - min utilizado en el problema (16).

3.3 FUNCIÓN OBJETIVO

Además de fijar las metas para cada objetivo es posible establecer prioridades entre ellas y dentro de cada una se pueden ponderar cada meta mediante pesos o bien coeficientes de normalización. Suponemos la siguiente estructura de prioridades:

- En la prioridad 1 se incluyen las metas sobre rentabilidad esperada (meta1) y *valor* de la Beta de la cartera (meta 2) con pesos α_{11} y α_{12} , respectivamente, para n_1 y p_2 .

- En la prioridad 2 se incluye la meta sobre la suma ponderada de la varianza residual de cada título (meta 3), denotamos por q_3 la variable de desviación no deseada que será n_3 en el caso de condiciones de mercado favorables o, alternatively, p_3 para condiciones desfavorables.

• En la prioridad 3 se incluye la meta de la preferencias flexible sobre las Betas de los títulos (meta 4). En este caso la variable no deseada es n_4 .

• En la prioridad 4 se incluyen las metas sobre *ambigüedad* y *difusidad* de la Beta de la cartera (meta 5). En este caso la variable no deseada es n_5 .

A partir de lo anterior, la función objetivo del modelo de programación por metas se formula como:

$$\min z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \quad (21)$$

$$\text{con } z_1 = \alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}p_2; z_2 = q_3; z_3 = n_4; z_4 = n_5.$$

4 EJEMPLO

Con el fin de ilustrar las ideas anteriores hemos diseñado un ejemplo en el que trabajamos con 17 títulos cuyas Betas, varianzas residuales y rentabilidades esperadas están recogidas en la siguiente tabla:

	(b_1, b_2, b_3, b_4)	e_i^2	$E(R_i)$
β_1	(.67,.7,.77,.85)	.005	4.80%
β_2	(.69,.75,.8,.83)	.005	4.90%
β_3	(.76,.8,.88,.95)	.002	5.05%
β_4	(.8,.81,1,1.05)	.006	5.10%
β_5	(.88,.9,.97,1.05)	.009	5.20%
β_6	(.9,.97,.98,.99)	.008	5.25%
β_7	(.92,.97,1,1.01)	.007	5.28%
β_8	(.95,1,1.1,1.15)	.007	5.30%
β_9	(1,1.1,1.15,1.2)	.004	5.33%
β_{10}	(1,1.23,1.24,1.25)	.005	5.45%
β_{11}	(1,1.3,1.32,1.33)	.015	5.65%
β_{12}	(1.05,1.3,1.35,1.38)	.008	5.67%
β_{13}	(1.1,1.25,1.39,1.43)	.006	.69%
β_{14}	(1.4,1.5,1.57,1.65)	.007	5.76%
β_{15}	(1.5,1.54,1.59,1.68)	.021	5.80%
β_{16}	(1.5,1.8,1.83,1.86)	.012	6%
β_{17}	(1.8,1.9,1.97,1.98)	.015	6.23%

Para la selección de la cartera se han fijado los siguientes parámetros:

- Rentabilidad esperada mayor o igual que 5.25%.
- Valor de la Beta de la cartera menor o igual que 1.1.
- La suma ponderada de la varianza residual se debe mantener por debajo de 0.012.
- Grado de satisfacción sobre la proporción de activos de alto y bajo riesgo como mínimo 0.5.
- *Ambigüedad* y *difusidad* de la Beta de la cartera menor o igual que 0.08 con grado de satisfacción como mínimo 0.5.
- Se han considerado como restricciones del problema que la proporción máxima en cada título no supere el 15%.

• Las funciones de pertenencia μ_{ar} y μ_{br} son lineales y se ha fijado $j = 15$, $h = 50\%$, es decir, "como mucho alrededor del 15%" en activos de alto riesgo (con valor de la Beta mayor que 1.5) pero nunca se puede superar el 50% y $l = 60$, $f = 45\%$, es decir, "como poco alrededor del 60%" en activos de bajo riesgo (con valor de la Beta menor que 0.95) pero nunca quedarse por debajo del 45%. Con estas hipótesis el problema (16) viene formulado como:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=14}^{17} x_i + 0.35\lambda \leq 0.5 \\ & \sum_{i=1}^5 x_i - 0.15\lambda \geq 0.45 \\ & 0 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \quad (22)$$

• Las funciones de pertenencia μ_A y μ_F son lineales y se ha fijado $A^u = F^u = 0.08$, con estas hipótesis el problema (16) viene formulado como:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda' \\ \text{s.a.} \quad & \sum x_i A(\beta_i) + 0.08\lambda' \leq 0.08 \\ & \sum x_i F(\beta_i) + 0.08\lambda' \leq 0.08 \\ & 0 \leq \lambda' \leq 1 \end{aligned} \quad (23)$$

Hemos utilizado el método secuencial para la resolución lexicográfica con ponderaciones y aplicaremos coeficientes de normalización a las variables de desviación no deseadas. La solución calculada mediante el software PROMO ([15]) es: $x(1) = 0.15$, $x(2) = 0.15$, $x(3) = 0.02116$, $x(4) = 0.15$, $x(5) = 0.15$, $x(11) = 0.15$, $x(15) = 0.15$, $x(17) = 0.07884$. Los valores de las metas en este punto son: $E_P = 5.31553\%$, $V(\beta_P) = 1.1$, $Var_{res} = 0.0103749$, el grado de satisfacción de las preferencias flexibles sobre las Betas (λ) es igual a 0.5, lo mismo que el grado de satisfacción sobre la ambigüedad y la difusidad de la Beta de la cartera. Por tanto, podemos concluir que la cartera obtenida es satisfactoria, se ha superado el nivel de aspiración en la rentabilidad esperada, el valor de la Beta de la cartera alcanza exactamente su nivel de aspiración, la varianza residual ponderada permanece por debajo de su nivel, las preferencias flexibles sobre la Betas se cumplen con grado 1 respecto de los activos de bajo riesgo (se invierte el 62.116% en ellos) y con grado 0.5 para los activos de alto riesgo (se invierte el 23% en ellos en lugar del 15% o menos), la Beta de la cartera tiene ambigüedad y difusidad baja ($A(\beta_P) = 0.0042048$, $F(\beta_P) = 0.0021681$) debido al umbral elegido y a la propia ambigüedad y difusidad de los datos.

5 CONCLUSIONES

Este trabajo presenta una aplicación de la Teoría de Subconjuntos Difusos al problema de la Selección de Carteras bajo la hipótesis del modelo de índice único de Sharpe. La estimación de la Beta futura de cada título admite una representación mediante un número difuso trapezoidal capaz de aunar conocimiento estadístico con conocimiento relevante de los analistas financieros. El modelo trabaja, entonces, con datos que contienen más información que cualquier modelo clásico sin demasiado esfuerzo extra: utilizando los conceptos de *valor*, *ambigüedad* y *difusidad* de un número difuso se consigue resolver el problema añadiendo solamente dos nuevos objetivos lineales a la versión no difusa del mismo (ambigüedad y difusidad de la Beta de la cartera).

También se ha aplicado lógica difusa en el tratamiento flexible de las metas, la selección de la cartera atendiendo a diversas preferencias del decisor está basada en expresiones lingüísticas imprecisas que pueden modelizarse mediante grados de satisfacción obtenidos como grados de pertenencia de un conjunto difuso.

En posteriores trabajos nuestra intención es utilizar el modelo para tratar fondos de inversión españoles en el periodo 1996-2000. Una extensión de nuestro modelo sería admitir funciones de pertenencia no lineales para trabajar con los grados de satisfacción y verificar otros enfoques distintos del de Zimmermann para agregar dichos grados.

Por último, consideramos que una característica importante de este modelo es su sensibilidad a los juicios del analista, además de a las preferencias del decisor lo que permite una interacción con ambos a la hora del diseño de la cartera óptima.

Referencias

- [1] Arenas M. ; Bilbao A. ; Rodríguez Uría M.V. (2001): A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. *European Journal of Operational Research* 133, pp.287-297.
- [2] Beaver, W.; Kettler, P.; Scholes, M. (1970): The association between market determined and accounting determined risk measures. *The Accounting Review*, 45. pp. 654-682.
- [3] Blume, M. (1975): Betas and their regression tendencies. *Journal of Finance*, X, No. 3. pp. 785-795.
- [4] Charnes, A. ; Cooper, W.W. (1961): *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. Vol. I, Wiley, New York.
- [5] Connor, G.; Korajczyk, R.A. (1995): The arbitrage pricing theory and multifactor models of asset returns. R. Jarrow et al., Eds., *Handbook in OR MS*, Vol.9, pp. 87-143.
- [6] Delgado, M.; Vila, M.A.; Voxman W.(1998): On a canonical representation of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems* 93, pp.125-135.
- [7] Delgado M.; Vila M.A.; Voxman W.(1998): A fuzziness measure for fuzzy numbers: Applications. *Fuzzy sets and systems* 94, pp. 205-216.
- [8] Dubois, D.; Prade, H. (1978): Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*, Vol.9, N.6, pp.613-626. pp. 205-216.
- [9] Elton, E.J.; Gruber, M.J. (1973): Stimating the dependence structure of share prices -implications for portfolio selection, *The Journal of Finance* 28, pp.1203-1233.
- [10] Lee S.M.; Chesser D.L.(1980): Goal programming for portfolio selection. *The Journal of Portfolio Management*, pp.22-26.
- [11] Lee S.M.; Lerro A.J.(1973): Optimizing the portfolio selection for mutual funds. *The Journal of Finance*. Vol. XXVIII. No. 5.
- [12] Markowitz, H.M. (1952): Portfolio Selection, *The Journal of finance* 7(1), 77-91.
- [13] Markowitz, H.M.(1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, Nueva York.
- [14] Markowitz, H.M.; Perold, A.F. (1981): Portfolio analysis with factors and scenarios. *the Journal of Finance*. Vol. XXXVI, No.14, pp. 871-877.
- [15] Molina Luque, J. (2000): *Toma de decisiones con criterios múltiples en variable continua y entera: implementación computacional y aplicación a la Economía*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.
- [16] Perold, A.F. (1984): Large-scale portfolio optimization, *Management Science* 30(10), pp.1143-1160.
- [17] Rosenberg; Barr; Guy, J. (1976): Prediction of Beta from Investment Fundamentals, *Financial Analysts Journal*, 32, No.3, Part I: (May-June) pp.60-72 and Part II: (July-Aug.) pp.62-70.
- [18] Sharpe, W.F. (1963): A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science*, January, pp. 277-293.
- [19] Sharpe, W.F. (1970): *Portfolio Theory and Capital Markets*. McGraw-Hill, New York.
- [20] Vasicek, O. (1973): A Note on Using Cross-Sectional Information in Bayesian Estimation of Security Betas, *Journal of Finance*, VIII No. 5, pp.1233-1239.
- [21] Zimmerman, H.J. (1978): Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems* 2, pp.45-55.

Soft Computing e Internet (II)

Soft Computing and Internet (II)

UNA REPRESENTACIÓN FUZZY PARA PÁGINAS WEB

Víctor Fresno Fernández

Dept. Ciencias Experimentales e Ingeniería
Universidad Rey Juan Carlos
28933 Móstoles (MADRID)
v.fresno@escet.urjc.es

Ángela Ribeiro Seijas

Instituto de Automática Industrial
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
28500 La Poveda – Arganda del Rey (MADRID)
angela@iai.csic.es

Resumen

En el presente artículo se describe un método de representación de páginas web basado en un modelo de espacio vectorial, en el que la función de asignación de peso para cada palabra tiene en cuenta características particulares propias del lenguaje HTML. A partir de varios conjuntos de etiquetas HTML se definen criterios heurísticos que permiten establecer la relevancia de cada palabra dentro de la página. Se proponen dos métodos de combinación de estos criterios: uno analítico y otro fuzzy. Tanto el método como las dos propuestas de combinación de criterios se evalúan, utilizando la representación en una tarea de aprendizaje y posterior clasificación de páginas web, mostrando que la combinación fuzzy de criterios reporta mejor comportamiento en este tipo de tareas. Una de las principales ventajas de la representación propuesta es que no requiere un conocimiento previo del dominio, haciéndolo muy apropiado al contexto Internet.

Palabras Clave: Representación de páginas web, Modelo de espacio vectorial, Clasificación de páginas web, Lógica Fuzzy.

1 INTRODUCCIÓN.

Internet se ha convertido desde hace años en la mayor fuente de información en formato digital disponible en el mundo. El crecimiento de esta red de comunicación global es imparable y la capacidad que se nos ofrece de compartir toda esa información dependerá en gran medida de nuestra capacidad de extraer conocimiento útil de la misma. Clasificar la información contenida en la red de un modo eficiente se ha convertido en una necesidad y es, por ello, que las técnicas de Recuperación de Información (IR) y de Clasificación Automática de Textos (TC) se estén aplicando a gran escala en este dominio.

Fundamentalmente podemos distinguir dos enfoques en la recuperación de la información contenida en Internet: buscadores web y directorios temáticos.

En el caso de los buscadores de páginas web, se posibilita realizar consultas basadas en palabras clave sobre los contenidos de los documentos, mostrándose a continuación los resultados en una lista ordenada en función de un grado de relevancia. Las principales limitaciones de estos sistemas son la ambigüedad y el gran número de resultados que devuelven [1].

En el segundo caso, los directorios temáticos organizan un pequeño subconjunto de todo el material disponible dentro de una jerarquía de categorías. Ejemplos de estos directorios se pueden encontrar en: Altavista, Hotbot y Infoseek¹ con temáticas generales, o en Intomi y Excite², con directorios más restringidos. En cualquiera de los dos casos, las principales limitaciones de estos accesos a la información son: la subjetividad propia de cualquier clasificación humana y el pequeño dominio que representan frente al universo de información potencial disponible. Es precisamente el tamaño de este universo el que imposibilita, tanto en el caso de los buscadores como en el de los directorios temáticos, la actualización y clasificación manual de contenidos.

La combinación de ambos métodos, es decir, la realización de consultas sobre los contenidos de un directorio se ha convertido en una práctica común para la mayoría de los usuarios, que intentan de este modo minimizar las limitaciones de los sistemas de recuperación de información.

De cualquier modo, tanto en un caso como en el otro, la tarea de representar de un modo adecuado los documentos HTML resulta fundamental para el procesamiento automático de las páginas web. Esta representación deberá ser, en primer lugar, fiel al contenido del documento, incluyendo la información necesaria para poder extraer un conocimiento útil y, a la

¹ AltaVista., <http://altavista.digital.com> Hotbot, <http://hotbot.com> Infoseek, <http://infoseek.go.com>

² Inktomi, <http://www.inktomi.com/products/search/> Excite, <http://excite.com>

vez, deberá ser compatible con las entradas a los algoritmos que se empleen a continuación.

La representación de páginas web se ha realizado bajo diferentes enfoques. En la representación por contexto [16] se explota la información subyacente en los *links* HTML incluyendo también el análisis de material multimedia. En [6] se realiza un análisis de las URL (Universal Resource Location) y de las etiquetas. En este caso, el fin es extraer información sobre la estructura del documento, al igual que en [15], que también busca información de la estructura, pero que explícitamente descarta el hecho de analizar etiquetas de composición o énfasis. El análisis de las Metaetiquetas también ha sido usado como tarea previa a la representación [11], pero este enfoque adolece de poca generalidad, ya que, según estudios realizados por [5][11], el número de páginas web que disponen de estos metadatos no supera el 30 por ciento del total de páginas analizadas. En la representación por contenido [1] la información se extrae del texto del documento y no explora ni la estructura del mismo ni la topología de los *links*. Cabe destacar dentro de este grupo las representaciones que se basan en la identificación de conceptos, que exploran técnicas con redes neuronales o análisis semántico y lingüístico. También podemos encontrar dentro de este enfoque representaciones apoyadas en sistemas borrosos [9], dentro del ámbito de la IR.

Nuestra propuesta se enmarca dentro de estos métodos de análisis de contenidos y de medidas de similitud, más concretamente, dentro del modelo de espacio vectorial - *vector space model* [14] -. Este modelo, que se explicará con detalle en la sección 2, está basado fundamentalmente en el llamado principio de independencia que considera independientes entre sí las palabras dentro de un mismo documento. Esta suposición inexacta reduce sin embargo drásticamente la complejidad de cómputo brindando resultados, como veremos, muy aceptables. En el modelo de espacio vectorial, los textos quedan representados como un conjunto de pares (término, relevancia). Con el método propuesto la relevancia para cada palabra/término se calcula a partir de la combinación de un conjunto de criterios que quieren evaluar para cada palabra/término la intención del autor a través del etiquetado HTML.

En trabajos anteriores [5] se mostró una mejora en la calidad de la asignación de pesos, al combinar los criterios de un modo analítico respecto a la bolsa de palabras clásica, donde se considera como relevancia la frecuencia de aparición de cada término en el documento. Asimismo en [13] mostrábamos como nuestra propuesta de representación mejoraba el comportamiento de herramientas comerciales como Copernic Summarizer³.

El propósito del presente artículo es mostrar cómo una combinación de criterios a partir de un sistema de reglas fuzzy suministra una representación más exacta de una página web que una combinación analítica. La

comparación se realiza usando las representaciones suministradas por ambos métodos de combinación de criterios, en tareas de aprendizaje y clasificación.

Este artículo se estructura como sigue: en la sección 2 se introduce el modelo de espacio vectorial, en el que se basa nuestra representación; en la sección 3, se explicará la estructura de los documentos HTML y los criterios heurísticos empleados en la representación; en la sección 4 se muestra la combinación de criterios tanto de forma analítica como mediante el sistema de reglas fuzzy; en las secciones 5 y 6 se presentan los resultados experimentales y las conclusiones.

2 MODELO DE ESPACIO VECTORIAL

Este modelo ha sido empleado en multitud de sistemas dentro del campo de la IR y la TC. Además de asumir el principio de independencia, el modelo no tiene en cuenta el orden en que aparecen los términos, por lo que la semántica de un documento queda reducida a la de las palabras que aparecen en él. Estas suposiciones, aunque incorrectas, reducen drásticamente la complejidad computacional sin afectar en demasía a la calidad de los resultados [8]. Dentro de este modelo se pueden encontrar excepciones a estas asunciones [3].

Este espacio vectorial se genera a partir de un conjunto de términos definidos a priori y que constituyen vectores base. Cada documento se representa como una combinación lineal de estos vectores y los coeficientes de dicha combinación representan la relevancia del término dentro del documento. La representación en este espacio se basa fundamentalmente en la función de asignación de pesos que se utilice.

El modelo de representación más sencillo en este contexto es el conocido como conjunto de palabras - set of words - o modelo de espacio vectorial binario, donde la relevancia es un valor {0,1} en función de si el término aparece o no en el documento. Dentro de los modelos no binarios tenemos el llamado bolsa de palabras - bag of words [18]- donde el valor de la relevancia representa la frecuencia de aparición del término en el documento.

Otras funciones de asignación de pesos no binarias son: el factor de frecuencia inversa del documento TF-IDF [14]; Information Gain (IG) ; Mutual Information (MI) ; Chi-square (χ^2); NLG coefficient (NLG) ; Odds Ratio (OR) ; Relevance score (RS) y el GSS coefficient. Las expresiones de todas estas funciones se pueden encontrar en [15] y una comparativa entre ellas en [8] y [18]. La mayoría de ellas mejoran los resultados de la bolsa de palabras, sin embargo requieren un conjunto de documentos etiquetados a priori.

En el caso de representación de páginas web, sería deseable no necesitar este conocimiento a priori, ya que la representación en sí misma puede considerarse como una tarea de IR, siempre que la representación ayude al usuario a determinar si esa página web es o no de su interés.

³ Copernic Summarizer. 2001: <http://www.copernic.com>

3 ESTRUCTURA DE UNA PÁGINA WEB

Las páginas web son los documentos propios de Internet. Están escritos en lenguaje HTML y se construyen como una combinación de etiquetas e información textual que los exploradores web reconocen y visualizan. La principal característica de este lenguaje de marcado es que sus etiquetas están orientadas principalmente a la visualización, salvo unas pocas metaetiquetas – metadatos como palabras clave, resumen del contenido, etc. – que se introducen como información adicional para los buscadores y que no son visibles al usuario [10].

Hay muchos tipos de etiquetas web: referencias a imágenes o archivos, enlaces a otras páginas o atributos textuales entre otras. El método que presentamos en este artículo tiene su base en estas etiquetas textuales, al igual que [9], que de alguna forma incluyen la intención del autor. Si determinadas palabras han sido enfatizadas de algún modo se puede extraer como conclusión que la intención del autor es la de destacarlas del resto, y es en esta suposición en la que nos apoyamos para, mediante una selección heurística de algunas de estas etiquetas, extraer una serie de criterios que combinamos para obtener la relevancia de cada término dentro de la página.

Los criterios que consideramos para definir nuestra función de asignación de relevancia son los siguientes:

3.1. TÍTULO

Parece obvio que si determinados términos aparecen situados entre las etiquetas <title> y </title> deberíamos considerarlos con una relevancia elevada dentro del documento, sin embargo esta etiqueta no aparece en la mayor parte de las páginas web analizadas en el estudio descrito en [5]. En muchos casos es resultado de una generación automática que no refleja el contenido del texto del documento. Así pues, el título debe ser un factor a tener en cuenta al calcular la relevancia pero no el único.

3.2. ÉNFASIS

El lenguaje HTML tiene etiquetas cuya función es la de destacar determinadas partes de un texto de otras, como por ejemplo: ..., <u>...</u>, ..., <i>...</i> o

El texto señalado con estas etiquetas llama la atención del usuario y en muchos casos basta con tomar estos fragmentos enfatizados para hacernos una idea sobre el contenido de un documento, aunque en otros casos esta derivación no sea tan directa.

3.3. POSICIÓN

La posición dentro de un documento en algunos casos puede resultar muy relevante. En estos casos es

interesante considerar más representativo un término que aparece en la introducción o en la conclusión, frente a otro que aparece en el cuerpo o desarrollo del discurso. No obstante, aunque gran parte de los documentos HTML contenidos en Internet no siguen esta estructura ni ninguna otra, frecuentemente existe una tendencia a emplear este esquema en documentos de gran tamaño.

3.4. FRECUENCIA

El número de veces que aparece un término en un documento debe ser un factor determinante a la hora de establecer su relevancia. Sin embargo, al igual que el resto no se debe considerar como criterio único ya que esto podría potenciar la conocidas como palabras comodín, es decir, palabras muy utilizadas en el discurso pero que sin embargo no permiten distinguir claramente los contenidos de documentos con temática diferente.

4 COMBINACIÓN DE CRITERIOS

Una vez definidos cada uno de los criterios que se van a tener en cuenta para el cálculo de la función de relevancia, en los siguientes puntos se detalla para la combinación de criterios, tanto un método analítico como uno basado en un sistema de reglas fuzzy.

4.1. APROXIMACIÓN ANALÍTICA

En esta aproximación la función de asignación de pesos se construye como una combinación lineal de los criterios anteriores y las funciones empleadas son:

4.1.1. Función de frecuencia en la página

$$f_f(i) = n_f(i) / N_{tot} \quad (1)$$

Donde $n_f(i)$ representa la frecuencia de aparición del término i en el documento, y N_{tot} es el número total de palabras aparecidas en la página.

4.1.2. Función de frecuencia en el título

$$f_t(i) = n_t(i) / N_{tit} \quad (2)$$

Donde $n_t(i)$ representa la frecuencia del término i en el título del documento, y N_{tit} es el número total de palabras aparecidas en el título.

4.1.3. Función de enfatizado

$$f_e(i) = n_e(i) / N_{enf} \quad (3)$$

Donde $n_e(i)$ representa la frecuencia del término i en los distintos enfatizados, y N_{enf} es el número total de palabras enfatizadas en la página.

4.1.4. Función de posición

Para computar el criterio posición, dividimos la página web en cuatro partes iguales, de forma que la función será:

$$f_p(i) = (3/4 \cdot n_{1,4} + 1/4 \cdot n_{2,3}) / N_{tot} \quad (4)$$

Donde $n_{1,4}(i)$ y $n_{2,3}(i)$ representan el número de veces que el término i aparece en la introducción o conclusión – partes primera y cuarta – y en el cuerpo del documento – parte segunda y tercera – respectivamente.

4.1.5. Cálculo de la relevancia. Método analítico

Una vez definidas las funciones, se realizó un estudio estadístico [5] para determinar cuales eran los coeficientes de la combinación lineal más adecuados y los resultados se muestran en la Tabla 1:

Tabla 1: Coeficientes de la combinación analítica.

C_1 (Frecuencia)	0.30
C_2 (Título)	0.15
C_3 (Énfasis)	0.25
C_4 (Posición)	0.30

Obteniendo la función de asignación de relevancia:

$$r(i) = 0.3f_f(i) + 0.15f_t(i) + 0.25f_e(i) + 0.3f_p(i) \quad (5)$$

Para un estudio más detallado ver [5].

4.2. APROXIMACIÓN BORROSA

La combinación analítica de criterios mejora la representación frente a la bolsa de palabras [5], pero a menudo un criterio toma verdadera importancia al aparecer unido a otro, debido a las limitaciones ya descritas a lo largo de la sección 3. Como ejemplo, un término que aparece en el título y con un alto grado de énfasis no tendrá la misma relevancia que apareciendo únicamente en el título.

Los sistemas de razonamiento borrosos representan el marco más adecuado para capturar el conocimiento experto humano cualitativo y resolver la ambigüedad inherente a cualquier proceso de razonamiento, fusionando el conocimiento y la experiencia en un conjunto de expresiones lingüísticas que tratan con palabras en lugar que con datos numéricos.

Aproximaciones con lógica borrosa a la representación de documentos se pueden encontrar en [4] [2], en el ámbito de la IR, donde se definen sistemas basados en reglas fuzzy para estimar la relevancia de los términos de un documento, buscando después correspondencias – matching – con las palabras clave que constituyen la propia consulta. En [17] se muestra un enfoque de TC con aprendizaje, donde las funciones de pertenencia se basan únicamente en las frecuencias de aparición de los términos del documento.

Una representación particular para páginas web puede encontrarse en [9], donde se emplea la lógica fuzzy

para hallar las relevancias de cada término dentro de cada criterio, y a continuación combinar dichos valores de un modo analítico.

En el presente trabajo planteamos un sistema basado en reglas borrosas tanto en la función de asignación de pesos como en su combinación posterior dentro de un modelo de espacio vectorial para la representación de páginas web.

En este caso, las variables lingüísticas que vamos a considerar son: *text_frequency*, *title_frequency*, *emphasis* y *global_position*.

4.2.1. Variables lingüísticas

Estas variables lingüísticas representan los mismos criterios que en el caso analítico y servirán de entrada al sistema de reglas borrosas. Como salida del sistema tendremos una única variable, la *relevance*.

Para hacer las reglas independientes del tamaño del documento, las entradas a la *text_frequency*, *title_frequency* y *emphasis* estarán normalizadas a la mayor de las frecuencias aparecidas en cada criterio en el documento. Las Figuras 1 y 2 muestran estas variables lingüísticas.

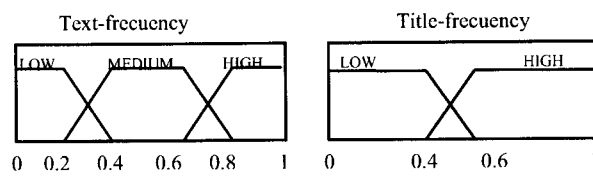


Figura 1: *text-frequency* y *title-frequency*

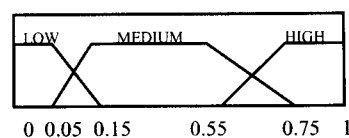


Figura 2: *emphasis*

En el caso de la posición, el valor de entrada a la variable lingüística *global_position* deberá calcularse a partir de la contribución de todas las posiciones del término en la página. Este nuevo sistema tendrá como variable lingüística de entrada la *line_position* y como variable de salida la *global_position*. La contribución de la ocurrencia o del término i se expresa como:

$$c_p(i, o) = n_p(i, o) / N_{tot} \quad (6)$$

Donde $n_p(i, o)$ representa el número de línea de la ocurrencia ' o ' del término ' i ' y N_{tot} el total de términos en el documento. Por tanto la ecuación 6 se deberá calcular para cada ocurrencia del término.

Mediante el proceso de *fuzzificación*, a cada ocurrencia se le asigna un grado de pertenencia dentro del conjunto de etiquetas lingüísticas que se muestran en la Figura 3.

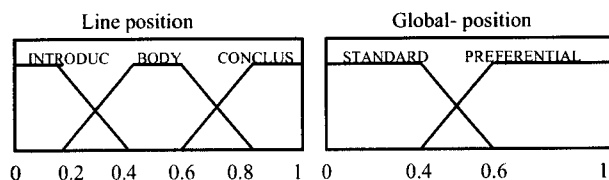


Figura 3: *line-position* y *global-position*

La salida de este sistema auxiliar son las dos etiquetas que se muestran en la figura 5. El conjunto de reglas de este sistema puede encontrarse [13] y en definitiva expresan que si la posición del término de entrada se corresponde con la introducción o la conclusión, entonces la salida es preferente, mientras que si el término se encuentra en el cuerpo del documento la salida es standard

La variable de salida *relevance* del sistema fuzzy general se muestra en la Figura 4.

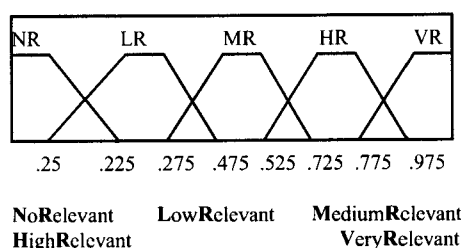


Figura 4: *relevance*

El conjunto de reglas del sistema general, función de asignación de relevancia, se puede encontrar en [13]. Para entender bien la base de reglas IF-THEN debemos tener en cuenta los siguientes puntos:

- El título sólo es relevante si aparece acompañado de algún otro criterio
- La frecuencia en texto pasa a ser muy relevante cuando se combina también con algún otro criterio
- El énfasis tiene una salida generalmente más alta que el resto de los criterios, considerándose por tanto como el criterio más relevante
- Un término con mucha frecuencia de aparición puede ser poco discriminante.

Tanto en el sistema global como en el intermedio relativo a la posición, el operador AND se implementa como producto y se emplea una desborrosificación por centro de masas.

5 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Las representaciones obtenidas por medio de las aproximaciones analítica y borrosa se usan como entradas en un proceso de aprendizaje supervisado que permite la extracción de las representaciones de dos clases, a partir de un conjunto de páginas web seleccionadas manualmente entre Medicina-Farmacología y Tecnología Aeroespacial. Una vez realizado el aprendizaje se lleva a

cabo un proceso de clasificación con el que se estima la calidad de las representaciones de clase obtenidas. En los siguientes apartados se presentan brevemente los principales aspectos del aprendizaje y la clasificación, así como un resumen de los resultados.

5.1 FASE DE APRENDIZAJE

Las representaciones de clase se obtienen a partir de un método de aprendizaje supervisado en el que se asume el teorema central del límite, de forma que la clase quedaría representada por una matriz $3 \times N$ dimensional donde las primeras componentes se corresponderían con los términos que aparecen en los documentos de entrenamiento y la otras dos serían los parámetros de una distribución Normal (μ, σ) .

La ecuación 8 muestra la función f_i densidad de probabilidad de un término i , con relevancia r , para una determinada clase.

$$f_i(r_i; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(r_i - \mu)^2 / 2\sigma^2} \quad (7)$$

La media μ y la varianza σ se obtienen a partir de un conjunto de ejemplos seleccionados para cada clase por estimación de máxima verosimilitud. Para más detalles referirse a [13].

5.2 FASE DE CLASIFICACIÓN

La clasificación se lleva a cabo mediante una modificación del algoritmo Naive-Bayes, que resulta ser de los más efectivos en las tareas de clasificación de textos [7]. La expresión final del algoritmo se expresa en la ecuación 9.

$$c_{ML} = \arg \max_{c_j \in C} \left(\sum_i \ln(s_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{ij}^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{ij}^2}(s_i - \mu_{ij})^2} + 1 \right) \quad (8)$$

Para ver detalles de la aplicación de este algoritmo [13].

En la Tabla 2 se muestran los resultados de la clasificación obtenidos para dos clases con un conjunto de ejemplos de 200 páginas web seleccionadas manualmente. La selección del conjunto de prueba se hizo tomando páginas de diferentes tamaños y distintos servidores web. Se evitaron también los directorios temáticos para no sesgar los resultados de la clasificación. Por otro lado, se tomó el 65% del conjunto de entrenamiento para la fase de aprendizaje y el resto para la evaluación de la clasificación. Los resultados muestran una mejora en el caso de la representación con combinación de criterios a través de un sistema de reglas fuzzy.

Tabla 2. Principales resultados de la clasificación

	Medicina-Farmacología		Tecnología aeroespacial		Valores medios	
	Acierto (%)	Fallo (%)	Acierto (%)	Fallo (%)	Acierto (%)	Fallo (%)
Analítica	82.45	17.55	71.93	28.07	77.19	23.61
Fuzzy	84.21	15.79	89.47	10.53	86.84	13.16

6 CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un nuevo método de representación de páginas web y dos modos distintos de obtenerlo. La representación se basa en el modelo de espacio vectorial y la función de asignación de pesos toma algunas características propias del lenguaje HTML y otros atributos más "clásicos", a menudo utilizados en técnicas de IR. La característica principal es que analiza el texto visible al usuario, y se demuestra que con la fusión de criterios extraídos de la propia naturaleza del lenguaje HTML mejoran las representaciones y más aún si la fusión se realiza de un modo borroso.

Es importante también hacer notar que con el método propuesto la dimensión del vector que representa la página web se ve drásticamente reducida.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado completamente a través de contrato directo con la empresa Innovatec S.A.

Referencias

- [1] Attardi G., Gulli A., Sebastiani F. "Automatic Web Page Categorization by Link and Context Analysis". *European Symposium on Telematics, Hypermedia and Artificial Intelligence, Varese, 1999*.
- [2] Berzal F., Martin-Bautista M.J., Vila M-A., Larsen H.L. "Computing with words in information retrieval" *IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Joint 9th*, 5, 3088-3092, 2001.
- [3] Billhardt H. "A Context vector Model for information Retrieval". *Journal of the American Society and technology* 53, 3, 2002
- [4] Bordogna G., Pasi G. "Fuzzy Rule Based Information Retrieval". Fuzzy Information Processing Society. *18th International Conference of the North American*, 585-589, 1999.
- [5] Fresno V., Ribeiro A. "Feature Selection and dimensionality reduction in Web pages representation" *International ICSC Congress on Computational Intelligence: Methods & Applications*. Bangor, Wales (U.K.), 416-421
- [6] Merkl D. "Text data mining. A handbook of Natural languages Processing techniques and Applications for the Procesising of Languages as Text". Dale R., Moisl H. and Somers H.(Eds). New York: Marcel Dekker, 1998.
- [7] Mitchell T. M.. Machine Learning. *Mc Graw-Hill International Editions*. 1997.
- [8] Mladenic' D. "Feature subset selection in text learning". In *Proceedings of ECML-98, 10th European Conference on Machine Learning* (Chemnitz, Germany, 95-100, 1998
- [9] Molinari A., Pasi G. "A Fuzzy Representation of HTML Documents for Information Retrieval Systems". In *Proc. of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, New Orleans, 1, 107-112, 1996.
- [10] Musciano C. and Kennedy B., "HTML: The Complete Guide" *McGraw-Hill*, 1997
- [11] Pierre M., "On the Automated Classification of Web Sites". *Linköping Electronic Articles in Computer and Information Science*, 6. Linköping University Electronic Press. Linköping, Sweden
- [12] Ribeiro A., Fresno V. "A Multi Criteria Function to Concept Extraction in HTML Environment" *International Conference on Internet Computing IC'2001, Las Vegas (USA)*, 1, 1-6, 2001
- [13] Ribeiro A., Fresno V., M.C.García-Alegre, D.Guinea "A fuzzy system for a web page representation" *Intelligent Exploration of the Web (P.S.Szczepaniak, J.Segovia, J.Kacprzyk., L.A.Zadeh, Eds)*. Springer-Verlag. Alemania. Publicación a finales de 2002
- [14] Salton G., Buckley C., "Term weighting Approaches in Automatic text Retrieval". *Information Processing & Management*, 24, 5, 513-523, 1988.
- [15] Sebastiani F.: "Machine Learning in Automated Categorization" *ACM Computing Surveys*, Vol. 34, No. 1, March 2002, pp 1-47
- [16] Srihari R. K., "Automatic Indexing and content-based retrieval of captioned images", *Computer*, 28(9), 49-56, 1995
- [17] Taheo C. Jo. "Text Categorization with the Concept of Fuzzy Set of Informative Keywords". *Proc. of the IEEE International Fuzzy Systems Conference*, Seoul, 2, 609-614, 1999.
- [18] Yang Y., Pedersen J.I. "A comparative study on feature selection in text categorization" In *Proc. ICLM-97, 14th Intenational Conference on Machine Learning*. Nashville, TN. 412-420, 1997.

UTILIZACIÓN DE LA LÓGICA BORROSA PARA LA MEJORA DE LA CALIDAD DE SERVICIO DE LOS AGENTES INTELIGENTES EN INTERNET

Francisco Pascual Romero
Soluziona Consultoría
fromero@uf-isf.es

José Ángel Olivas
Universidad de Castilla-La Mancha
JoseAngel.Olivas@uclm.es

Pablo Garcés Rubira
Universidad Pontificia de Comillas
pgarces@upco.es

Resumen

Como ampliación de los algoritmos y técnicas utilizadas en la metodología FIS-CRM[1] se muestra la aplicación de técnicas de lógica borrosa y data mining para la extracción y representación del conocimiento dentro de entornos basados en Internet (chat, grupos de news, correo electrónico). La utilización de técnicas de clustering borroso, la representación del conocimiento utilizando Prototipos Deformables Borrosos y el aprovechamiento de este conocimiento por parte de los agentes inteligentes posibilita la obtención de una mejora substancial en la calidad de los servicios que éstos ofrecen a los usuarios.

Palabras Clave: Agentes Inteligentes, Clustering Borroso, Prototipos Borrosos, Data Mining, Chat, E-mail.

manera exponencial. Sus funciones van desde la simple asistencia al usuario hasta la generación y distribución de la información dentro de entornos Groupware y Workflow. Por ello son una herramienta imprescindible para la captura y aprovechamiento del conocimiento subyacente dentro de los entornos corporativos, sobre todo dentro los basados en la tecnología Internet.

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo mediante la utilización de la Lógica Borrosa junto con diversas técnicas de Data Mining se logra incrementar el conocimiento incorporado en los agentes inteligentes haciendo más eficaz su funcionamiento y mejorando la calidad de los servicios que ofrecen. Concretamente, se plantea una arquitectura de agentes que cubren todo el espectro de funcionalidades necesarias para al asistencia en entornos síncronos (p.e. chat) o asíncronos (p.e. correo electrónico). La utilización de técnicas de lógica borrosa en la construcción de estos agentes posibilita una mejora en su capacidad de observación y detección de comportamientos y por lo tanto un aumento del espectro de situaciones a las cuales el agente pueda reaccionar.

1 INTRODUCCIÓN

El panorama empresarial actual está viéndose condicionado por la cultura de las autopistas de la información por lo que su infraestructura tecnológica se ha transformado para terminar basándose en los entornos Internet/Intranet/Extranet. Este cambio proporciona innumerables posibilidades para la obtención de información tanto del cliente como de los componentes de la organización como por ejemplo: el correo electrónico, las reuniones remotas entre empleados o entre empleados y clientes, etcétera. El problema reside en el insuficiente aprovechamiento actual de estas fuentes potenciales de conocimiento.

Actualmente es un hecho la incorporación de los agentes inteligentes dentro de los sistemas de información empresariales. Cada día, el número y complejidad de las tareas que realizan los agentes inteligentes crece de

2 MEJORANDO LA CAPACIDAD DE LOS AGENTES INTELIGENTES

2.1. AGENTES INTELIGENTES

Teóricamente un agente es "cualquier entidad capaz de percibir su ambiente a través de sensores y actuar en el ambiente a través de efectores". En el mundo de la Informática un agente es un asistente software realiza tareas que directa o indirectamente redundan en beneficio del usuario. Un ejemplo de agentes software son los detectores automáticos de errores ortográficos y gramaticales de los procesadores de textos.

La estructura de un agente inteligente se puede dividir en dos partes bien diferenciadas, su *cuerpo*, formado por el software que permite su funcionamiento autónomo, y su

programa encargado de realizar el mapeo entre percepciones y acciones; es en esta función donde reside la inteligencia del agente y generalmente es construida mediante técnicas basadas o cercanas a la Inteligencia Artificial.[8]

2.2. LOS AGENTES INTELIGENTES EN EL ENTORNO DE TRABAJO

Dentro de los entornos basados en Internet, los agentes software poseen generalmente un rol mediador, por ejemplo facilitando la interacción entre una persona y un programa o servicio (portal de Internet), entre personas que están trabajando y colaborando desde distintos lugares del planeta, entre programas que "cooperan" entre sí ante un mismo objetivo, etc.[2].

Para cumplir con este rol de mediador las funciones de los agentes pueden ser muy diversas: coordinar (dar soporte a conferencias y reuniones), diagnosticar (soporte al cliente ante averías, telediagnóstico médico...), analizar información (extracción de conocimiento de bases de datos, análisis de imágenes...) y ayudar a la enseñanza (tutores, apoyo a estudiantes...). Los objetivos de estas funciones deben estar debidamente alineados con la estrategia de negocio de la empresa.[2]

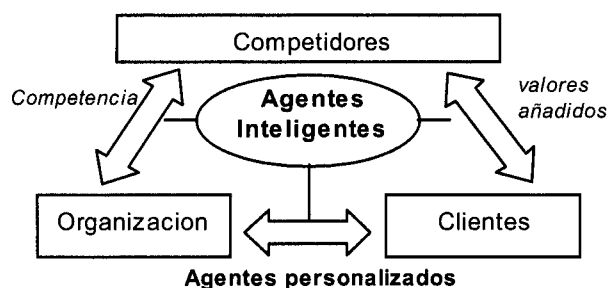


Figura 1: Entornos de operación de los agentes inteligentes.

Dentro de estos entornos se pueden distinguir dos posibles comportamientos o actitudes de los agentes inteligentes:

- *actitud pasiva u observadora*: Observa las situaciones que se presentan en su entorno y las analiza.
- *actitud activa o ejecutora*: Según lo observado y detectado determina qué acciones se deben realizar y las ejecutan.

Las mejoras que se plantean en este trabajo no entran en las especificaciones concretas que tengan las acciones del agente, es decir, no se trata en ningún momento el modo de ejecutar las acciones si no que se intenta mejorar la capacidad para determinar qué acciones deben ser realizadas. Esto es debido a que la forma de ejecución de una determinada acción depende únicamente del dominio de intervención del agente.

2.3. ARQUITECTURA DE AGENTES

Para realizar tareas complejas la actuación de un solo tipo agente software no suele ser suficiente, por lo que se suele recurrir a utilizar un conjunto de agentes que realizan tareas independientes pero que cooperan entre sí para lograr un objetivo común.

La principal innovación y componente crucial de nuestra arquitectura es el *agente extractor*; en su construcción han utilizado diversas técnicas de Lógica Borrosa y Data Mining con el fin de obtener conocimiento relevante a partir del background de documentos que posea la empresa.

Tanto los agentes encargados de la monitorización del entorno como el agente encargado de la toma de decisiones suelen ser elementos habituales dentro cualquier entorno colaborativo. En los sistemas actuales la conversación se procesa mediante la detección de palabras clave y la utilización de estadísticas de participación. El conocimiento reside en el agente evaluador que cuenta con una base de reglas crisp para inferir las acciones.

El principal inconveniente que presenta esta arquitectura consiste en que sólo se aprovecha el conocimiento a priori del experto y no un conocimiento obtenido de forma automática y actualizado dinámicamente. En este trabajo se incorporan en los agentes que operan on-line mecanismos de representación conceptual de la conversación y técnicas de inferencia, de esta forma se posibilita el aprovechamiento de la base de conocimiento que construye el extractor.

2.3.1. El Agente Extractor

Este agente realiza las funciones de construcción y actualización de la base de conocimiento que el resto de agentes utilizará como apoyo a sus funciones. En cualquier entorno el agente extractor posee el mismo esquema de funcionamiento:

1. *Recibir* unos datos de entrada o documentos base que forman parte del background del servicio o empresa (mensajes, conversaciones de chat...).
2. *Realizar* una representación conceptual de cada entidad de estudio utilizando técnicas basadas en la Lógica Borrosa como las utilizadas en [1].
3. *Analizar* las entidades de estudio mediante algoritmos de clustering borroso obteniendo agrupaciones de elementos con sus correspondientes grados de pertenencia a los grupos.

4. *Procesar* los resultados del clustering para obtener la representación formal de las agrupaciones utilizando Prototipos Deformables Borrosos. [6]
5. *Definir* con ayuda de un experto en el dominio un marco de probabilidades de acción para cada prototipo.

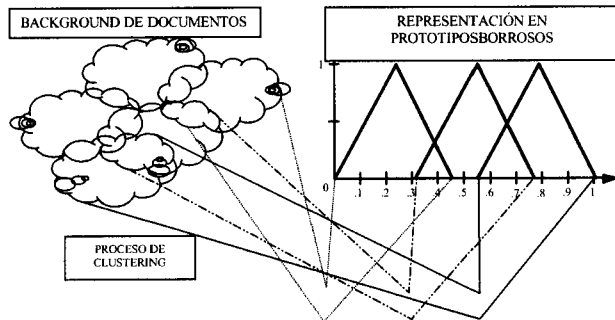


Figura 2: De Documentos a Prototipos Borrosos

Se definen los *Prototipos Deformables Borrosos*[6], como una combinación lineal de Prototipos Borrosos[9] con la capacidad de adaptarse a una situación real. Los coeficientes utilizados para realizar la adaptación serán los grados de pertenencia a cada una de estos Prototipos Borrosos. Cada prototipo viene definido por un *número borroso* dentro de unos ejes de referencia (principalmente triangular) y un marco de definición de la situación, que en este caso consistirán en un *marco de probabilidad de acción*.

Una vez construida la base de conocimiento es necesario actualizarla de forma dinámica. Periódicamente el agente extractor trabajará sobre el material generado por el sistema desde la última actualización o con un material que se pueda considerar *actual* dentro del contexto del servicio. Se utilizarán los resultados obtenidos para actualizar la base de conocimiento existente. La utilización como mecanismo de representación de los Prototipos Deformables Borrosos [6] facilita el mantenimiento de la base de conocimiento debido a que son más fácilmente actualizables que las bases de reglas borrosas (o crisp).

2.3.2. El "equipo" de monitorización

Dentro de los entornos de trabajo síncronos la interacción eficiente de los agentes que forman el equipo de monitorización de la conversación es clave para que los datos ofrecidos al agente evaluador sean de calidad (precisos, correctos y dentro del contexto). Los entornos de trabajo asíncronos no poseen este tipo de agentes.

El agente *procesador de estadísticas* cumple sus funciones en los herramientas síncronas como el chat, en las que está muy difundido. Su principal misión es la de ofrecer información básicamente cuantitativa al agente

evaluador. Entre este tipo de información cabe destacar la frecuencia de participación a nivel de usuario y a nivel de conversación, el establecimiento de los tiempos muertos dentro de la sesión y la frecuencia de utilización de palabras.

El *procesador de conversaciones* tiene como misión principal el procesamiento online de la conversación y el análisis de su contenido. Para ello este agente trabaja con distintas unidades de estudio: preproceso de las frases individuales (p.e. eliminación de stop words, reducción o transformación de cada palabra a su término representativo), representación de la conversación global, y el análisis sobre la "subconversación" actual (inicialmente delimitada por los tiempos muertos indicados por el procesador de estadísticas). Para la representación conceptual del contenido de la conversación se utilizarán todas las técnicas utilizadas en FIS-CRM[1], como la relación borrosa de *sinonimia* y una serie de *ontologías* creadas especialmente para el contexto del servicio (temática principal, temas prohibidos...). En resumen, como entrada tenemos la conversación y datos que ofrecen el resto de agentes monitores, obteniendo como resultado una representación formal de las unidades de estudio.

El *controlador de situación* es el encargado de detectar las situaciones "objetivo" dentro de la conversación. Para esto tiene que hacer una preevaluación de la representación formal ofrecida por el agente procesador de conversaciones y un análisis de la información que le facilite el procesador de estadísticas. Este agente cuenta con la posibilidad de inferir conclusiones basándose en una pequeña base de reglas borrosas de rápida evaluación obtenidas a partir de la base de conocimiento construida por el agente extractor. El componente borroso de estas reglas permitirán una mejor manipulación de la vaguedad propia de estos entornos y posibilitar así una buena y rápida elección que facilite la labor del agente evaluador.

2.3.3. El Agente Evaluador

El Agente Evaluador toma como entrada toda la información que le pueda ofrecer el equipo de monitorización, la información inferida por el agente experto y la base de conocimiento generada por el extractor. A partir de todo este conocimiento su esquema de funcionamiento es el siguiente:

1. Realizar una comparación o *matching* de la situación real ofrecida por los agentes del equipo de monitorización con los prototipos que existen en la base de conocimiento.
2. A partir de los grados de pertenencia a los prototipos, generar una representación en forma de marco de la probabilidad de acción.

3. Tomar una decisión para realizar una acción basándose en el marco de probabilidad y las reglas del experto.
4. Transmitirle la orden de acción al ejecutor.

La utilización de un marco de probabilidades de acción posibilita que el agente ofrezca un comportamiento variado antes las situaciones que aparezcan y no presente un funcionamiento previsible.

2.3.3. Los agentes dependientes del dominio

El *agente experto* debe aportar al resto de agentes del sistema la información suficiente para la realización de las tareas que dependan específicamente del dominio de trabajo. Con este fin, se ocupa de forma exclusiva de la parte de la base de conocimiento creada de forma específica por los expertos la propia empresa.

El *agente ejecutor* es un agente específico para el dominio de acción del sistema que realiza las acciones pertinentes en el entorno para cumplir las órdenes recibidas de parte del agente evaluador.

3 EL TRABAJO DE LOS AGENTES EN ENTORNOS SÍNCRONOS Y ASÍNCRONOS

3.1. FUNCIONAMIENTO EN ENTORNOS SÍNCRONOS

Los servicios de chat que ofrecen los portales deben de mantener una mínima organización para demostrar que ofrecen un servicio verdaderamente útil. Este aspecto es aún más crítico si nos referimos a un chat de uso exclusivamente corporativo (sistema de atención al cliente, tele-reuniones).

La principal función de los agentes inteligentes en estos entornos es la detección automática de las diversas situaciones que se presenten en la conversación y actuar de forma rápida y correcta frente a ellas. Actualmente los agentes que realizan estas funciones utilizan una base de reglas IF-THEN y analizan estadísticamente la conversación [3]. La propuesta que se realiza en este trabajo consiste en que el sistema de agentes base sus acciones en el análisis del contenido de la conversación y en la inferencia sobre una base de conocimiento automáticamente construida.

3.1.1. Extracción de conocimiento

Antes de efectuar de la obtención de los prototipos de comportamiento de grupo e individuales es necesario realizar un preproceso sobre todos los chat-logs motivo de estudio.

Entre otras operaciones, en esta fase de preproceso se deben realizar las siguientes tareas:

- Extraer características cuantitativas de la conversación: frecuencia de interacción, ratio de palabras por participación, tiempo entre participaciones, entre otras.
- División provisional de cada conversación completa en subconversaciones (grupo de frases o diálogos dentro de un intervalo definido de forma temporal o temática).
- Construcción de los elementos de estudio por parte del proceso de clustering.
 - o Crear una sola entidad de términos por cada subconversación.
 - o Crear una entidad de términos para cada usuario.

Cada entidad de estudio se representará conceptualmente de la misma forma que se hace con los snippets en [1]. Posteriormente se efectuará entonces el proceso de clustering tanto sobre las subconversaciones como sobre los usuarios utilizando el algoritmo de Soft-Clustering [4] modificado en [1]. Como resultado se obtendrá una agrupación jerárquica sobre las que se realizará un proceso de clasificación [4][7] para extraer las características esenciales (términos) que definan a cada prototipo.

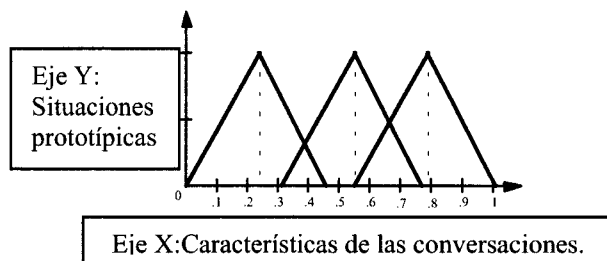


Figura 3. Prototipos resultantes de subconversaciones

Una vez obtenidos los prototipos de subconversaciones y usuarios es necesario que el experto en el dominio catalogue estas agrupaciones identificándolas con una etiqueta lingüística y añadiendo a cada prototipo con el marco de probabilidad de acciones a efectuar ante cada situación representada.

Como ejemplo, de un conjunto de chat-logs procedentes de un entorno de aprendizaje colaborativo se obtienen los prototipos indicados en la tabla 1:

Tabla 1. Prototipos detectados en la base de logs

Subconversaciones	Usuarios
Conversación óptima	Activo dentro de contexto
Off-topic fuera de tema	Activa fuera del contexto
Hiperactiva, caos	Hiperactivos
Nulas, sin tema	Pasiva

3.1.2. Operativa on-line

En la parte operativa habrá dos niveles de evaluación y acción: la subconversación y el participante. Las acciones inferidas a partir de información de la subconversación deberán afectar a todos los participantes, si por el contrario la acción se infiere a partir del comportamiento de un único individuo, sólo deberán afectarle a él.

La operativa es similar para los dos niveles. Cada vez que el agente procesador de estadísticas detecte una nueva subconversación (o la entrada de un nuevo usuario) la situación se calificará dentro de una referencia neutra. Según evolucione la conversación el agente procesador de estadísticas irá realizando sus cálculos y el agente procesador de la conversación irá preprocesando la conversación y obteniendo una representación conceptual de ésta. De forma paralela, el agente controlador de la situación utilizará esta información para extraer las características (normalmente borrosas) de la conversación y proceder al envío de "alarmas" de acción al agente evaluador cuando proceda. Para ello contará con un pequeño *controlador borroso* que como entrada tomará las diferentes características de la situación (por ejemplo el nivel de cambio desde la referencia neutra) y como salida ofrecerá una representación borrosa de la necesidad de actuación. Cuando el índice procedente de la *defuzzificación* supere cierto umbral se enviarán todos los datos al agente evaluador (alarma).

Una vez recibida la alarma, el agente evaluador procede a la comparación entre la situación y prototipos de la base de conocimiento, a la obtención de los marcos de probabilidad de acción a partir de los grados de pertenencia de la situación a los prototipos y por último tomará la decisión sobre la acción a realizar que transmitirá debidamente al agente ejecutor.

Dentro del ámbito de la subconversación el agente ejecutor puede ralentizar las intervenciones de los usuarios, introducir frases y llamadas de atención mediante un usuario virtual que lo represente, etc. Si nos fijamos dentro del ámbito del usuario las acciones que puede tomar este agente van desde retardarle la participación al usuario (o facilitársela) hasta la expulsión de la conversación o realizar una llamada de atención dentro de la conversación en nombre de un participante virtual que que represente al agente.

3.2. FUNCIONAMIENTO EN ENTORNOS ASINCRONOS

La finalidad principal del sistema de agentes propuesto en entornos asíncronos es la de aprovechar el conocimiento que existe dentro de la gran cantidad de documentos que se almacenan en los buzones de mail, las listas de correo o los grupos de noticias. Como resultado inmediato se

obtiene una mejor gestión y organización de los documentos posibilitando el aprovechamiento posterior de la base de conocimiento para otros fines como, por ejemplo, la depuración y el aprovechamiento de la gran cantidad de mails generados por una lista de correo temática.

En los entornos webmail utilizados por la mayoría de usuarios de los portales de Internet y por los empleados de todo tipo de empresas se ofrece una organización del buzón en carpetas que deben ser llenadas o bien directamente por el usuario o bien de forma automática tras la previa definición de una base de reglas personalizadas que normalmente está muy lejos de ser completa. Estas reglas son *crisp* y únicamente trabajan sobre conceptos *crisp* representados en la información estructurada del mail (la existencia de términos en el asunto, las direcciones de origen, etc.).

3.2.1. Extracción de conocimiento

El agente extractor parte en este caso de gran número de mensajes sin organización alguna. El objetivo principal de sus análisis será el contenido del mensaje, pudiendo disponer como apoyo de la información estructurada que lo acompaña (campos de dirección de origen, dirección de copia, asunto, firma...)

En primer lugar realizará el preproceso (eliminación de stop words y expresiones preestablecidas...) y la representación conceptual de los mensajes utilizando las técnicas utilizadas en [1].

Una vez obtenida la representación de cada mensaje se ejecutará un proceso de clustering similar al efectuado en los entornos asíncronos. Como resultado se obtendrá una organización jerárquica de tal forma que cada documento posee un grado de pertenencia al grupo o a los grupos en los que esté integrado. Cada una de las agrupaciones representa a un prototipo de mensaje el cual estará definido mediante los términos más relevantes de sus elementos y otros factores ofrecidos por el usuario como la etiqueta lingüística que identificará unívocamente al prototipo y el marco de probabilidad de acciones a ejecutar en el caso de que llegue un mensaje de este tipo.

También se puede caracterizar a las personas (direcciones) que nos envían los mails, obteniendo una clasificación de usuarios, en los que las direcciones origen estarían en uno o varios grupos con un grado de pertenencia a cada uno de ellos. Las agrupaciones de mensajes y usuarios pueden estar interrelacionadas entre sí mediante pequeñas bases de reglas borrosas, lo cual posibilita que las decisiones sobre acciones se tomen en base a criterios más completos que incluyen tanto el remitente del mensaje como su contenido.

La actualización de la base de conocimiento se realiza por orden expresa del usuario cuando lo crea necesario debido desorganización del buzón, cambios en sus criterios de preferencia ,etc.

3.2.2. Actuación de los agentes

El aprovechamiento de la base de conocimiento corre a cargo del agente evaluador. una vez que llega un mensaje al sistema la operativa de este agente dentro de estos entornos es la siguiente:

1. Obtención de la representación conceptual del mensaje recibido mediante las técnicas utilizadas en FIS-CRM [1].
2. Comparación entre las características descubiertas en el mensaje y los prototipos de la base del conocimiento.
3. Almacenamiento del mensaje en las carpetas correspondientes, marcándolo como no leído en la carpeta a la que más grado de pertenencia posea.
4. Construcción del marco de probabilidad de acción mediante la combinación lineal de los marcos de los prototipos a los que tiene un grado de pertenencia mayor que cero.
5. Procesar este marco de probabilidad de acción teniendo en cuenta factores externos definidos por el usuario mediante etiquetas lingüísticas y procesadas en forma de reglas borrosas.
6. Tomar la decisión sobre la acción a realizar. Por ejemplo: priorización máxima del mensaje, mostrar un índice de importancia del mensaje no leído, autorespuesta al mensaje basándose en el contenido de éste (muy utilizado en sistemas automáticos de procesamiento de correo electrónico),eliminación del mensaje por considerarlo peligroso, etc.

El usuario no pierde totalmente el control sobre el sistema sino que participa de forma activa en la definición de sus prioridades (identificación de los prototipos, definición de los marcos de acción, construcción de reglas para el tratamiento de factores externos) lo cual posibilita que la solución ofrecida se adapte perfectamente a sus exigencias sin tener que definir cada una de las reglas de actuación que sean necesarias.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se ha presentado un sistema de agentes inteligentes que proporcionan un mejor servicio al usuario debido a la incorporación de conocimiento obtenido de forma automática a partir del background de la empresa o servicio. El proceso de extracción y aprovechamiento del conocimiento se basa principalmente en técnicas de Lógica Borrosa y Data Mining.

El uso de los agentes inteligentes cada vez es más amplio y no se restringe a la utilización dentro de un sistema colaborativo basado en un chat o a la manipulación de un buzón de mensajes de mail. Disciplinas tan actuales como el e-CRM, B2B, comercio electrónico, workflow... están utilizando de forma masiva agentes inteligentes con el fin de manejar de forma eficiente todos los aspectos relacionados con la interacción con el cliente. La ampliación de la arquitectura propuesta para su eficiente utilización en estos entornos será motivo de futuras investigaciones.

También sería abordable el estudio de la extracción de conocimiento de los contenidos con formato diferente al texto que abundan por los entornos Internet (imágenes, sonidos, videos ...), aproximación que queda muy cercana al procesamiento y análisis de información multimedia.

Referencias

- [1] Garcés, P., Romero F. and Olivas J.A. (2002): "FIS-CRM: A Representation Model based on Fuzzy Interrelations for Internet Search", Proceedings of the IC-AI'2002, Las Vegas, USA,2002
- [2] Gilbert A. et al. The role of intelligent Agents in the informations infrastructure, IBM, 1995. Disponible en <http://activist.gpl.ibm.com:81/whitepaer/ptc2.htm>
- [3] Hearst, M.A. Text Data Mining. Issues, Techniques and the Relation to Information Access. UC Berkeley, 2002. Disponible en <http://www.sims.berkely.edu/~hearst>
- [4] King-Ip and Kondadadi, R.: "A similarity based soft-clustering algorithm for documents",2001, disponible www.msci.memphis.edu/~linki/_mypaper/dasfa01clus.doc.
- [5] Nikravesh, M. and Azvine, B. (editores). Proceedings of the 2001 BISC International Workshop on Fuzzy Logic and the Internet FLINT 2001. Memorandum No UCB ER M01/28. University of California-Berkeley. 2001
- [6] Olivas, J.A. Contribución al estudio experimental de la predicción basada en Categorías Deformables Borrosas, Tesis Doctoral, Universidad de Castilla- La Mancha, 2000
- [7] Tkach, D. Text Data Mining Technology. Turning Information Into Knowledge. A White Paper from IBM, 2002
- [8] Wooldridge M. and N.R. Jennings: "Intelligent Agents: Theory and Practice". Knowledge Engineering Review, 1995 disponible en www.labs.bt.com/projects/agents/zeus/index.htm
- [9] Zadeh, L. A note on prototype set theory and fuzzy sets. Cognition, 291-297, 1982.

UN MÉTODO DE ANÁLISIS DE EXPERIENCIAS DE APRENDIZAJE COLABORATIVO EN UN ENTORNO TELEMÁTICO USANDO LÓGICA DIFUSA

Miguel A. Redondo

Dpto. de Informática
Univ. Castilla – La Mancha
Paseo de la Universidad, 4
13071 – Ciudad Real. Spain
Miguel.Redondo@uclm.es

Crescencio Bravo

Dpto. de Informática
Univ. Castilla – La Mancha
Paseo de la Universidad, 4
13071 – Ciudad Real. Spain
Crescencio.Bravo@uclm.es

Manuel Ortega

Dpto. de Informática
Univ. Castilla – La Mancha
Paseo de la Universidad, 4
13071 – Ciudad Real. Spain
Manuel.Ortega@uclm.es

Resumen

La mayoría de los sistemas que afrontan el aprendizaje colaborativo con ordenadores no suelen profundizar en un análisis detallado de la interacción que se produce. En este artículo describimos nuestro planteamiento para analizar actividades de aprendizaje colaborativo que se realizan con DomoSim-TPC, un entorno telemático para el aprendizaje en grupo de técnicas de resolución de problemas de diseño de instalaciones para la automatización de viviendas y edificios. Del mismo modo, apuntamos algunos detalles sobre cómo se ha implementado nuestro planteamiento en dicho entorno.

Palabras Clave: Lógica Fuzzy, Razonamiento Aproximado, Colaboración, e-learning

1 INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La mayoría de los sistemas que afrontan el aprendizaje colaborativo con ordenadores no suelen profundizar en un análisis detallado de la interacción que se produce, a pesar que algunos autores resaltan la importancia del estudio riguroso de la interacción para la obtención de conclusiones sobre el trabajo realizado [2]. En este artículo tratamos de dar respuesta a esta necesidad observada de forma particular en un entorno telemático y colaborativo para el aprendizaje del diseño de instalaciones de automatización de servicios en viviendas y edificios. Este entorno se denomina DomoSim-TPC [4] y, de forma experimental, se emplea para la enseñanza práctica de la disciplina anterior en algunos centros de Formación Profesional de la provincia de Ciudad Real.

Dillenbourg [6] resalta la dificultad para identificar una perspectiva teórica para realizar análisis de interacciones de forma productiva. Otros autores [10] argumentan que la solución puede ser el planteamiento de teorías más cercanas al dominio y a las tareas específicas

que se realizan. Revisando diversos sistemas se pueden observar distintas técnicas como aproximación para resolver el problema. El sistema EPSILON [15] registra actos del habla y acciones de los estudiantes que posteriormente modela mediante Modelos Ocultos de Markov para tratar de determinar situaciones de aprendizaje efectivo y no efectivo. CARDBOARD / CARDDALIS [12] plantea la utilización de complejas reglas construidas en base a parámetros representativos del dialogo. Estas reglas determinan la probabilidad de alcanzar una situación potencial de conflicto. GRACILE [1] mantiene un modelo de usuario para cada estudiante que, también mediante reglas, emplea para determinar el potencial de aprendizaje del grupo. Group Leader [11] emplea máquinas de estados finitos para inferir el estado de la interacción mediante la comparación de secuencias de comunicación con patrones preestablecidos. Más cercano a nuestro planteamiento es el modelo que se propone en DEGREE [3]. Estos autores caracterizan el proceso de colaboración mediante variables que definen en términos cualitativos y que modelan mediante variables lingüísticas, es decir, como conjuntos difusos con varios atributos lingüísticos. Con la definición parcial de los conjuntos difusos en la que participa el observador que realiza el análisis y con un valor de referencia calculado a partir del análisis de otras tareas similares realizadas por los estudiantes queda condicionado el rango de valores del dominio de cada variable. A partir de esta definición de variables y de un conjunto de reglas, se realiza un proceso de inferencia difusa que proporciona conclusiones sobre cómo ha trabajado cada alumno en relación al resto y sobre cuál ha sido el comportamiento del grupo como unidad.

Considerando el modelo de actividades de aprendizaje en grupo del diseño de instalaciones domésticas definidas en el sistema DomoSim-TPC¹, nos proponemos plantear métodos automáticos que permitan a los pro-

¹ En Web, <http://chico.inf-cr.uclm.es/domosim>

fesores el análisis y el estudio de los resultados derivados de la realización de dichas actividades.

En el resto del artículo se apunta la estrategia que se sigue en el sistema anterior para analizar actividades de aprendizaje. A continuación, describimos las características más relevantes del estudio que se efectúa sobre el proceso de colaboración para resolver un problema de diseño en grupo. Finalmente, se extraen algunas conclusiones sobre este trabajo y se señala la dirección por la que lo continuaremos.

2 LA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS EN DOMOSIM-TPC

Nuestro primer objetivo es el de organizar el gran volumen de información registrada en el sistema sobre la elaboración a nivel individual, la discusión y la argumentación, los productos generados y la interacción de los usuarios con el sistema para inferir actitudes de los usuarios y del grupo.

Seleccionamos varios factores que deben estudiarse para realizar el análisis. Estos factores los podemos sintetizar en:

- **Las tareas de elaboración individual que generarán soluciones a los problemas propuestos.** En estas soluciones no sólo se especifican las características de las mismas sino también los pasos que se siguen para construirlas. En este sentido deberemos definir descriptores que nos permitan determinar algunos aspectos que califiquen dichas soluciones.
- **La colaboración que se establece en el proceso de discusión y argumentación en el que se justifican y explican decisiones que se han tomado al tiempo que se cuestionan otras alternativas.** Buscaremos algunos identificadores que nos permitan valorar la colaboración desde el punto de vista de las dimensiones social, interactiva y participativa, tal y como señaló Henri [7].
- **Algunos aspectos cognitivos relacionados con el aprendizaje que alcanzan los alumnos.** Trataremos de determinar la relación existente entre el conocimiento que el estudiante tiene del dominio en función de la forma en que afronta la resolución de los problemas. Contrastaremos las estructuras de resolución que plantea con estructuras propuestas por expertos, en forma de plan, para inferir conclusiones al respecto.
- **Las relaciones que se observan entre el proceso de elaboración individual, la colaboración, los resultados generados y el nivel de conocimiento que alcanzan los participantes.** Plantearemos el marco necesario para realizar un estudio profundo que permita determinar qué vínculos se observan entre los elementos anteriormente citados para cada actividad de aprendizaje.
- **El punto de vista del observador que evalúa la actividad.** Los métodos de análisis deben de ser lo suficientemente flexibles para que se adapten a los

criterios que persiguen y valoran los usuarios finales. Para ello es necesario que faciliten la interpretación subjetiva de la información. De esta forma, el observador podrá centrar los objetivos didácticos de una determinada actividad sobre algunos aspectos particulares y podrá evaluar la experiencia en función de la orientación que ha establecido.

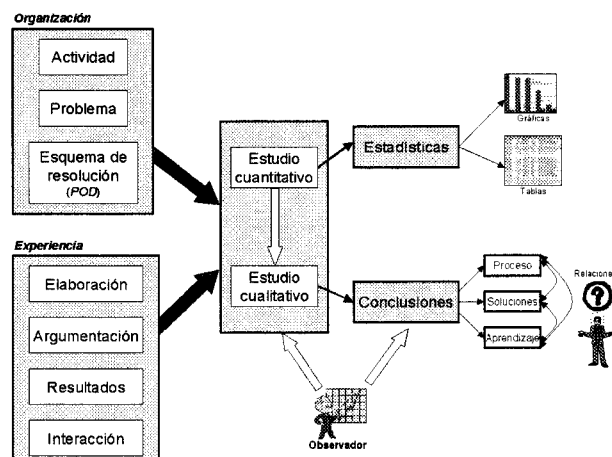


Figura 1: Esquema general del planteamiento para el análisis de experiencias.

En términos generales, y a partir de los factores anteriormente enunciados, definimos nuestro modelo de análisis de actividades como se muestra en la figura 1. La información que se procesa proviene de datos de dos orígenes diferentes: la organización de la actividad y su realización. Respecto al planteamiento de la actividad (organización), se consideran las características generales de la misma, el problema cuya resolución se plantea y las estrategias óptimas que perfilan su solución. Se tiene presente la estructuración en tareas para resolver el problema y el reparto de la mismas entre los participantes en la actividad. Junto con cada tarea del problema será necesario disponer del esquema o plan de diseño que, asociado a cada una de ellas, propone la mejor estrategia a seguir para construir una solución a la misma. Estos esquemas se emplearán para contrastarlos con las soluciones planteadas por los alumnos y determinar y valorar las diferencias que se observen. La información relativa a la realización de la actividad (experiencia) es aquella que el sistema registra como consecuencia de la interacción de los usuarios con el sistema. En particular, proviene de la elaboración individual de modelos mediante *PlanEdit* [14], del proceso de discusión y argumentación de propuestas y de la tabla de contenidos que generan como resultado de la realización de dicha actividad. Además, se consideran algunos datos generales sobre la utilización que hacen los usuarios del sistema. De este tipo de datos extraemos información sobre la propia interacción con el sistema. Destacamos que *PlanEdit* constituye una herramienta adaptativa (presenta características de adaptación al entorno o plataforma de trabajo, al usuario

y a los mecanismos de resolución que éste propone) para la resolución de problemas de diseño mediante la cual se especifica el modelo que se propone como solución a un problema de diseño y la estrategia procedimental que se sigue para construirla.

La información anterior se procesa en un estudio cuantitativo en el que se organiza la información y se generan estadísticas que reflejan una valoración sobre determinados aspectos de la realización de la actividad. Esta valoración se presenta en el sistema tanto de forma tabular como gráfica. No obstante, se pueden exportar los datos para ser procesados con otras herramientas más específicas. Este estudio se complementa con otro de carácter cualitativo en el que se modelan características mediante reglas y mediante lógica difusa. Así, partiendo de la información estadística generada anteriormente y considerando algunos criterios del observador que realiza el análisis, se infieren conclusiones sobre la actividad de aprendizaje. Estas conclusiones se clasifican en relativas al proceso de elaboración y discusión, relativas a las soluciones generadas y relativas al nivel de conocimiento que los participantes han adquirido. A partir de estas conclusiones, y considerando toda la información obtenida anteriormente, se pueden tratar de buscar relaciones existentes entre las mismas.

En este artículo nos centraremos en el estudio del proceso de colaboración. A su vez, éste se complementa con un análisis detallado de los productos generados y la búsqueda de relaciones entre el proceso y resultados generados.

3 EL PROCESO COLABORATIVO

3.1 ESTUDIO CUANTITATIVO DEL PROCESO

Los datos que se utilizarán para este estudio proceden de la representación y organización de la información relativa al proceso de discusión que el sistema registra sobre la interacción de los usuarios con el mismo.

Hemos seleccionado algunos descriptores cuantificables que pueden aportar información sobre las características de la discusión y la argumentación. Una vez definidos éstos, el estudio consistirá en procesar los datos registrados durante la actividad, clasificarlos en categorías, contabilizarlos y asociarlos a cada descriptor que hemos definido. En particular, hemos identificado los siguientes descriptores como más significativos para que nuestro sistema implemente los mecanismos apropiados para su procesamiento:

- Accesos al sistema que ha realizado cada alumno para trabajar en la actividad.
- Contribuciones emitidas.
- Número medio de contribuciones.
- Tamaño medio de las contribuciones.
- Tipo de las contribuciones.
- Contribuciones replicadas y continuadas.
- Profundidad del proceso para cada apartado.
- Consultas del tablón de noticias.
- Número de mensajes de planificación.

- Número de mensajes de coordinación.
- Número de mensajes de sistema.
- Accesos a la mensajería en línea

Una vez definidos los descriptores, la realización de los cálculos oportunos consiste en organizar y procesar los datos previamente registrados. Se determinará cuáles afectan al descriptor para el que se está realizando el cálculo y cuál es el efecto que produce, aunque generalmente se trata de un proceso de contabilidad.

La información generada como consecuencia del análisis estadístico realizado sobre los descriptores definidos para estudiar el proceso de discusión, se puede presentar de forma tabular y gráfica. Como representación gráfica se generan diagramas que presentan una correspondencia directa con la información de la visualización tabular. El objeto de esta representación es el de facilitar la rápida interpretación de la información generada. Con este objetivo se incorporan varias posibilidades en cuanto al tipo de representación gráfica que se puede utilizar: gráficos de barras, de líneas y de tarta.

3.2 EXTRACCIÓN DE CONCLUSIONES

El estudio anterior arroja un gran volumen de información que caracteriza el proceso colaborativo de un modo cuantitativo. Sin embargo, cuando pretendemos extraer algunas conclusiones sobre la forma de trabajar del grupo y que situamos en las dimensiones participativa, social e interactiva que definió Henri [7], necesitamos de una interpretación de las anteriores representaciones. En este sentido, Henri & Rigault [8] proponen realizar un estudio detallado de las contribuciones que emiten los participantes en la discusión.

Nosotros nos proponemos aplicar una simplificación del planteamiento descrito en [3] para analizar las actividades de aprendizaje con DomoSim-TPC, aumentando la flexibilidad para que el evaluador que realiza el análisis pueda expresar su punto de vista en el análisis y condicionar el resultado del mismo. Las variables, sus atributos y sus valores los definirán los evaluadores en cada actividad. Es decir, se mantendrán diferentes definiciones de las variables que enunciemos para cada actividad y para cada evaluador que analiza dicha actividad. Los valores de algunas de las variables que definimos y que consideraremos como conclusiones serán calculadas a partir de la información arrojada por el estudio cuantitativo. Otros valores serán inferidos a partir de dicho estudio, a partir de las variables calculadas y de la propia definición de la actividad.

3.2.1 Definición de variables

Es necesario hacer una primera distinción entre los tipos de variables que utilizaremos en este proceso. Hablaremos de variables de entrada y de variables de salida. Las variables de entrada serán algunas de las calculadas en estudios anteriores o la conversión en variable lingüística de alguna de éstas. Las variables de salida representarán las conclusiones obtenidas en el análisis. Éstas a su vez

pueden ser calculadas a partir de datos anteriores (*conclusiones calculadas*) o inferidas mediante un algoritmo de inferencia difusa (*conclusiones inferidas*). Nos centraremos en definir las variables que consideramos de salida y que, por lo tanto, representan conclusiones relativas al proceso de discusión.

3.2.2 Conclusiones calculadas

Se obtienen mediante el estudio del tipo y cantidad de las contribuciones que se han emitido durante la discusión. El observador puede asociar un peso o una ponderación a cada tipo de contribución. Para cada tipo variable que se pretende calcular, el observador debe definir los pesos que asocia a los diferentes tipos de contribuciones. Así, cada conclusión obtenida como variable calculada estará caracterizada por los pesos que se han definido y por la cantidad de contribuciones de cada tipo que se han emitido. La siguiente expresión formaliza el cálculo de este tipo de variables:

$$Variable_k = \sum_{i=1}^n Num_i * Peso_{ik} \quad (1)$$

En esta expresión, k hace referencia a la variable que se pretende calcular, i se corresponde con cada tipo de contribución permitida en el proceso de discusión y argumentación, n es el número total de contribuciones permitidas, Num_i es el número de contribuciones que hay para el tipo i , y finalmente, $Peso_{ik}$ es el peso asociado a las contribuciones de tipo i en el cálculo de la variable o conclusión k .

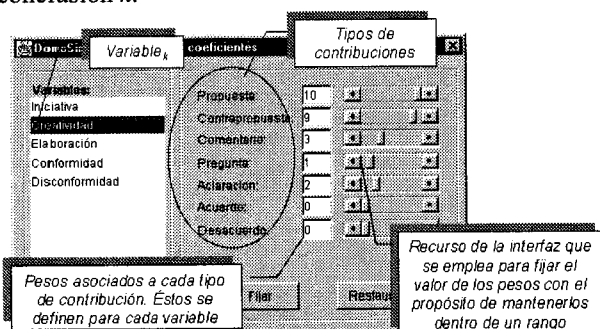


Figura 2: Configuración de los pesos asociados a los tipos de contribuciones.

La figura 2 muestra el aspecto de la interfaz de usuario desarrollada para que los evaluadores puedan definir los pesos asociados a cada tipo de contribución y para cada variable a calcular. En la zona de la izquierda se dispone de una lista con todas las variables definidas y cuyo valor se pretende calcular. En la zona de la derecha se presentan los tipos de contribuciones con los pesos que tienen asociados para la variable seleccionada en la lista anterior. Los valores de los pesos se mantienen dentro de un rango que va desde -10 a +10, aunque este límite es configurable. Para evitar errores en la introducción de datos por parte de los usuarios se han utilizado barras de desplazamiento para ajustar el valor de dichos pesos.

Como se observa en la misma figura, se ha añadido a DomoSim-TPC la funcionalidad necesaria para calcular

variables como la *Iniciativa*, la *Creatividad*, la *Elaboración*, la *Conformidad* y la *Disconformidad*. No obstante, el sistema permite la definición de nuevas variables que aparecerán en la lista situada en la zona izquierda de la ventana y cuya caracterización quedará almacenada en la base de datos de la herramienta.

3.2.3 Conclusiones inferidas

Estas conclusiones se asocian a variables de salida que se obtienen en un proceso de inferencia. Dependerán de algunos de los descriptores y variables descritas en los apartados anteriores y de un conjunto de reglas que aporten conocimiento sobre la influencia de la información anterior en las conclusiones. Algunas de las conclusiones que se obtendrán serán relativas al grupo como unidad mientras que otras harán referencia a cada uno de los participantes en la actividad.

Además de las variables estudiadas en [3] (*Trabajo*, *Argumentación*, *Coordinación*, *Cooperación* y *Colaboración*) nosotros hemos considerado las siguientes como conclusiones relativas al grupo: *Modelado*, *Discusión*, *Cohesión* y *Colaboración*.

Con referencia a los individuos que conforman el grupo y que participan en la actividad estudiamos las siguientes características: *Modelado*, *Revisión*, *Crítica*, *Justificación* y *Participación*.

En el proceso de inferencia difusa de conclusiones se trabaja con variables que se modelan como un conjunto difuso compuesto por diversos atributos o etiquetas lingüísticas que definen el dominio de la variable. Hemos considerado que todas las variables estarán caracterizadas por un número fijo de cinco atributos que se corresponden con las siguientes etiquetas: *Muy Bajo*, *Bajo*, *Normal*, *Alto* y *Muy Alto*.

Para definir cada uno de estos atributos empleamos un trapecio caracterizado por una cuaterna de valores [5]. Cada elemento de la cuaterna hace referencia a la proyección de un vértice del trapecio sobre el eje de abscisas. De esta forma, definir un atributo consistirá en definir los valores de los vértices del trapecio asociado al mismo. Es decir, $Atributo_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

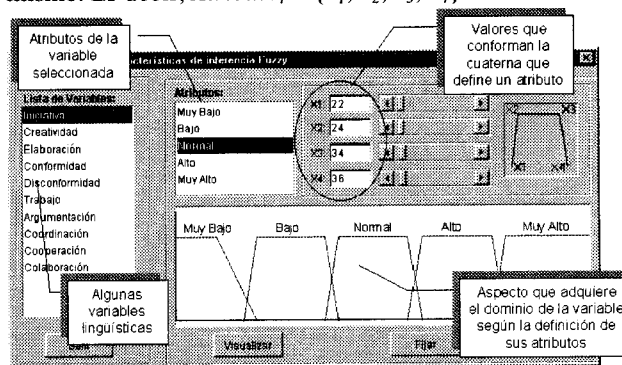


Figura 3: Interfaz de la herramienta para la definición de los atributos de las variables lingüísticas.

Las conclusiones que se obtengan dependerán muy directamente de la definición de los atributos de cada una

de las variables involucradas en el proceso de inferencia. La definición de los atributos es independiente para cada variable y para cada actividad de aprendizaje. Es el observador que realiza el análisis quien deberá materializar y configurar los atributos para así aportar un cierto grado de subjetividad. Para tal fin se ha diseñado una herramienta cuyo interfaz se muestra en la figura 3. En la zona de la izquierda aparece la lista de variables que serán tratadas como lingüísticas. Tras seleccionar una de ellas, el resto de la ventana muestra sus características. En la zona superior se presentan los atributos. Para establecer el trapecio que define cada uno de estos atributos, se seleccionarán uno a uno o se actuará sobre las barras de desplazamiento que varían los valores de sus vértices (x_1 a x_4). En la parte inferior de la ventana hay una zona donde se muestra de forma gráfica la definición completa de todos los trapecios correspondientes a los cinco atributos que se han considerado para cada variable.

3.2.4 El proceso de inferencia de conclusiones

Considerando la definición de variables que hemos realizado y las operaciones que sobre las mismas hemos definido, describimos a continuación el proceso completo para la obtención de conclusiones relativas a la colaboración. Éste se divide en dos subprocesos que se destinan, respectivamente, a la obtención de conclusiones sobre los participantes y sobre el grupo.

El siguiente algoritmo describe el subproceso que se realiza para analizar la colaboración desde el punto de vista de los individuos que participan en una actividad:

ALGORITMO CONCLUSIONES_INDIVIDUOS

Entrada:

Conclusiones calculadas VAR_{ik} , y
descriptores cuantitativos

Salida:

Conclusiones inferidas sobre el trabajo
de los individuos, VRS_{ik}

Pasos:

Para cada participante S_i en la Actividad A
Obtener variables calculadas, VAR_{ik} , para
el participante S_i

Para cada VAR_{ik}

Obtener la definición de atributos
asociado a VAR_{ik}

Obtener VAR_{ik}^* como resultado de

fuzzificar VAR_{ik}

Fin_para

Obtener las reglas de inferencia de la
base de conocimiento

Iniciar las variables de salida, Sal_{ik}^*

$Sal_{ik}^* = \text{Inferencia}(\text{Reglas}, VAR_{ik}^*,)$

$VRS_{ik} = \text{Desfuzzificar}(Sal_{ik}^*)$

Para cada participante S_i

mostrar las k conclusiones asociadas a
 VRS_{ik}

Fin_para

Fin_para

El algoritmo empleado para analizar la colaboración desde el punto de vista del grupo como unidad es una pequeña variación del anterior y se describe a continuación:

ALGORITMO CONCLUSIONES_GRUPO

Entrada:

Conclusiones calculadas VAR_{ik} , y
descriptores cuantitativos

Salida:

Conclusiones inferidas sobre el trabajo
del grupo VR_{ik}

Pasos:

Para cada tarea T_i de la Actividad A

Obtener variables calculadas, VAR_{ik} , para
la tarea T_i

Para cada VAR_{ik}

Obtener la definición de atributos
asociado a VAR_{ik}

Obtener VAR_{ik}^* como resultado de
fuzzificar VAR_{ik}

Fin Para

Obtener reglas de inferencia de la base
de conocimiento

Iniciar las variables de salida, Sal_{ik}^*

$Sal_{ik}^* = \text{inferencia}(\text{Reglas}, VAR_{ik}^*,)$

Obtener las k variables resultado, VR_k , a
partir de Sal_{ik}^*

$VR_k = \min_{i=1}^n (Sal_{ik})$

Mostrar VR_k

Fin Para

Para la inferencia de las variables de salida a partir de las variables de entrada y de las reglas de la base de conocimiento se emplea el algoritmo propuesto en [9].

La operación que hemos notado como *Min* y que se emplea para el cálculo de las variables resultado constituye un enfoque pesimista para determinar el atributo que mejor califica algún aspecto sobre la realización de las tareas de una actividad. Se elige el menor valor de todos ellos. Es decir, el peor observado después de analizar todas las tareas de la actividad.

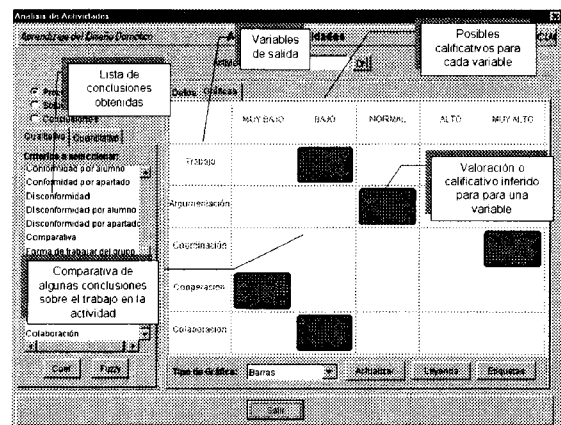


Figura 4: Presentación de conclusiones sobre el proceso colaborativo.

3.2.5 Presentación de las conclusiones

Para la presentación de las conclusiones inferidas se ha diseñado e incorporado una interfaz en la misma ventana que habíamos diseñado para la presentación de las conclusiones calculadas. A esta interfaz se accede pulsando sobre la pestaña etiquetada como Cualitativo (ver figura 4). En la zona de la izquierda se muestra la lista de los identificadores de todas las conclusiones que se han

obtenido. Seleccionando alguna de ellas, en la zona de la derecha se mostrará un gráfico descriptivo. Este gráfico presenta los resultados en forma de tabla de doble entrada mediante la que se relacionan variables y atributos o calificativos que pueden ser asociados a las mismas. La intersección variable-atributo marcada en azul determina el calificativo que se ha inferido para esa variable.

Algunas de estas conclusiones se agrupan en torno a los conceptos de individuo y de grupo para que comparativamente se observe el resultado obtenido para los miembros del grupo o del propio grupo como unidad.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este artículo describimos un método flexible de análisis que proponemos para estudiar aspectos característicos de los procesos de aprendizaje colaborativo asistido por computador y orientados al estudio de materias altamente experimentales.

Se ha desarrollado una herramienta que, partiendo de datos registrados automáticamente durante la interacción de los usuarios con el sistema, realiza un estudio de aspectos cuantitativos y cualitativos que caracterizan el proceso de colaboración. Esta herramienta se ha integrado en el sistema Domosim-TPC y está siendo sometida a evaluación. Según la opinión de los expertos en la docencia de la materia, los primeros resultados confirman su efectividad.

El estudio que se realiza sobre el proceso de colaboración podría combinarse con un análisis de los modelos generados (resultados de la actividad). Esta combinación proporcionaría un marco excelente para profundizar en el estudio de las relaciones existentes entre proceso y solución, así como en la búsqueda de mecanismos de razonamiento que permitan inferir dichas relaciones. Creemos que ésta es la línea por la que debemos continuar este trabajo.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha y a la Universidad de Castilla-La Mancha el apoyo prestado en el proyecto DomoSim-TPC del que forma parte este trabajo.

Referencias

- [1] Ayala, G. & Yano, Y. (1998). A collaborative learning environment based on intelligent agents. *Expert Systems with Applications*, 14, 129-137.
- [2] Barbieri, M. S. & Light, P. (1992) Interaction, gender and performance on a computer based problem solving task. *Learning and Instruction*, 2, 199-214.
- [3] Barros, B., Verdejo, M.F., (2000). Analysing student interaction processes in order to improve collaboration. The DEGREE approach. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 11, pp. 221-241.
- [4] Bravo, C., Redondo, M.A., Bravo, J., Ortega, M., (2000) DOMOSIM-COL: A Simulation Collaborative Environment for the Learning of Domotic Design. Reviewed Paper. *Inroads - The SIGCSE Bulletin of ACM*, vol. 32 (2), pp.65-67.
- [5] Cuena, J., (1995). *Notas sobre Modelos de Representación del Razonamiento*. Fundación General de la Universidad Politécnica de Madrid.
- [6] Dillengourgh, P., Baker, M., Blaye, A., & O'Malley, C., (1996). The evolution of research on collaborative learning. In E. Spada & P. Reiman (Eds), *Learning in Humans and Machine: Towards and interdisciplinary learning science*. Oxford: Elsevier. pp. 189-211.
- [7] Henri, F., (1991). Computer conferencing and content analysis. In A.R. Kaye (Ed.). *Collaborative Learning through Computer Conferencing*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- [8] Henri, F., & Rigault, C.R., (1996). Collaborative Distance Learning and Computer Conferencing. In T. Liau (ed.) *Advanced Educational Technology: Research Issues and Future Potential*. New York: Springer, pp. 45-76.
- [9] Looney, C.G., (1988). Fuzzy Petri Nets for Rule-Based Decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. Vol. SMC-18, No. 1, pp. 178-188.
- [10] Mandl, H. & Renkl, A. (1992). A plea for "more local" theories of cooperative learning. *Learning and Instruction*, 2, 281-285.
- [11] McManus, M. and Aiken, R. (1995). Monitoring computer-based problem solving. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, 6(4), 307-336.
- [12] Muehlenbrock, M., & Hoppe, U., (1999). Computer supported interaction analysis of group problem solving. *Proc. of CSCL '99*. Palo alto, CA: Stanford University, pp. 398-405.
- [13] Newman, D.R., Johnson, C., Webb, B., & Cochrane, C., (1997). Evaluating the quality of learning in Computer Supported Co-operative Learning. *Journal of the American Society for Information Science*, vol. 45, núm. 6, pp. 485-495.
- [14] Redondo, M.A., Bravo, C., Ortega, M., Verdejo, M.F., (2002). PlanEdit: An adaptive tool for design learning by problem solving. *2nd Conference on Adaptive Hypermedia Systems (AH2002)*. Málaga (Spain).
- [15] Soller, A., Wiebe, J., & Lesgold, A., (2002). A Machine Learning Approach to Assessing Knowledge Sharing During Collaborative Learning Activities. *Proc. of CSCL '2002*.

APRENDIZAJE AUTOMÁTICO DE CONSULTAS BOOLEANAS EXTENDIDAS PARA SISTEMAS DE RECUPERACION DE INFORMACIÓN DIFUSOS MEDIANTE ALGORITMOS SA-P

O. Cordón, E. Herrera-Viedma, M. Luque

Dpto. de Ciencias Computación e I.A.

E.T.S.I. Informática

Universidad de Granada

18071 - Granada

e-mail: {ocordon,viedma}@decsai.ugr.es

mluque@fedro.ugr.es

F. Moya

Dpto. de Biblioteconomía.

Fac. Biblioteconomía y Doc.

Universidad de Granada

18071 - Granada

e-mail: felix@ugr.es

C. Zarco

PULEVA Salud S.A.

Camino de Purchil, 66

18004 - Granada

e-mail: czarco@puleva.es

Resumen

Presentamos un método de aprendizaje automático de consultas Booleanas extendidas para Sistemas de Recuperación de Información Difusos basado en un nuevo paradigma evolutivo híbrido que combina los algoritmos de Enfriamiento Simulado y Programación Genética. Validaremos el buen comportamiento de nuestra propuesta, aplicándola sobre una base documental habitualmente empleada en el área y comparando los resultados obtenidos con el otro enfoque existente para la misma tarea, el método de Kraft y otros.

Palabras clave: Recuperación de Información Difusa, consultas Booleanas extendidas, Inductive Query By Example, algoritmos SA-P.

1 INTRODUCCIÓN

La Recuperación de Información se define como el problema de la selección de información documental de un soporte de almacenamiento en respuesta a unas ecuaciones de búsqueda (consultas) proporcionadas por un usuario [2, 16]. Los Sistemas de Recuperación de Información (SRIs) son un tipo de Sistemas de Información que trabajan con bases de datos compuestas por elementos de información —documentos que pueden ser textuales, gráficos o registros sonoros— y procesan las consultas de los usuarios permitiéndoles acceder a la información relevante en un intervalo de tiempo adecuado.

La mayoría de los SRI comerciales se basan en el modelo Booleano [19], el cual presenta algunas limitaciones. Debido a ello, se han diseñado otros paradigmas con el fin de extender este modelo de recuperación y superar sus problemas, como la RI difusa (RID) [4].

Sin embargo, el aumento en la potencia del modelo de recuperación también conlleva un aumento en la complejidad del lenguaje de consulta. Tanto en el modelo Booleano como en el difuso, es difícil para los usuarios no expertos expresar sus necesidades de recuperación en forma de consulta involucrando diferentes sentencias unidas por los operadores lógicos *Y* y *O*. En este último, además es especialmente complicado para el usuario especificar los pesos numéricos asociados a los términos de consulta.

De este modo, el paradigma del "Inductive Query By Example" (IQBE) [5], consistente en la derivación automática de una consulta a partir de un conjunto de documentos proporcionados por un usuario, puede ser útil para resolver este problema y asistir al usuario en el proceso de formulación de consultas. En concreto, una de las técnicas más conocidas para aprender consultas difusas es la propuesta por Kraft y otros [12], un algoritmo IQBE basado en Programación Genética (PG) [11], que ha obtenido buenos resultados.

En este trabajo propondremos un nuevo proceso de IQBE basado en el paradigma SA-P [17], un híbrido entre los algoritmos de Enfriamiento Simulado [1] y PG. Para ello, estructuraremos la contribución del siguiente modo. La Sección 2 se dedicará a introducir los preliminares, incluyendo las bases de los SRIDs, así como un resumen sobre las técnicas de IQBE. El método de Kraft y otros se repasará en la Sección 3. La Sección 4 presentará la estructura de nuestra nueva propuesta mientras que los distintos experimentos realizados para validarla se mostrarán en la Sección 5. Por último, la Sección 6 recogerá algunas conclusiones.

2 PRELIMINARES

2.1 Sistemas de Recuperación de Información Difusos

Los SRIDs permiten manejar la incertidumbre y la imprecisión inherentes al proceso de recuperación ex-

tendiendo los SRI Booleanos en los tres aspectos siguientes [4]:

Indización difusa: Las representaciones de los documentos D se convierten en conjuntos difusos definidos sobre un universo de términos T , y los términos se transforman en conjuntos difusos definidos sobre el universo de los documentos tratados, introduciendo así un grado de relevancia ("relación") entre un documento y un término. Así, la función de indización $F : D \times T \rightarrow [0, 1]$ define un conjunto difuso bidimensional (una relación difusa), que se proyecta para obtener el conjunto difuso asociado a cada documento y término individuales:

$$d_i = \{ \langle t, \mu_{d_i}(t) \rangle \mid t \in T \} \quad ; \quad \mu_{d_i}(t) = F(d_i, t) \\ t_j = \{ \langle d, \mu_{t_j}(d) \rangle \mid d \in D \} \quad ; \quad \mu_{t_j}(d) = F(d, t_j)$$

Existen diferentes formas para definir la función de indización F . En este caso, trabajaremos con la frecuencia inversa del documento (IDF) normalizada [16]:

$$w_{d,t} = f_{d,t} \cdot \log(N/N_t) \quad ; \quad F(d, t) = \frac{w_{d,t}}{\max_d w_{d,t}}$$

donde $f_{d,t}$ es la frecuencia del término t en el documento d , N es el número de documentos en la colección y N_t es el número de documentos donde el término t aparece al menos una vez.

Relevancia parcial: La relevancia de los documentos a las consultas se mide mediante el denominado valor del estado de la recuperación (en inglés "retrieval status value", RSV), valor numérico en $[0,1]$ que introduce una gradación en el proceso de recuperación. Para ello, el enfoque de coincidencia exacta y el conjunto de operadores booleanos se modelan mediante operadores difusos que ejecutan adecuadamente el emparejamiento de las consultas y los documentos de tal forma que preservan el significado de los anteriores¹.

Estructura de la consulta: Por último, la estructura de la consulta se extiende asociando un peso numérico o lingüístico [4, 10] a cada término de la consulta. Estos pesos pueden interpretarse de distintas formas [4]. Por ejemplo, pueden definir la importancia relativa entre los términos de la consulta como en este trabajo.

¹En este trabajo, modelamos los operadores Y , O y NO mediante los convencionales mínimo, máximo y uno-menos, aunque es posible trabajar con cualquier otra t -norma, t -conorma y función de negación.

2.2 Inductive Query By Example

La IQBE fue propuesta en [5] como "un proceso en el que los usuarios proporcionan una serie de documentos de muestra (ejemplos) y los algoritmos inducen (o aprenden) los conceptos clave para encontrar otros documentos relevantes". De este modo, la IQBE es un proceso para asistir a los usuarios en el proceso de formulación de consultas realizado por métodos de aprendizaje automático [14]. Trabaja a partir de un conjunto de documentos relevantes (y opcionalmente no relevantes) proporcionados por el usuario —que puede ser obtenido a partir de una consulta preliminar o a través de un proceso de browsing en la base documental— aplicando un método de aprendizaje fuera de línea para generar automáticamente una consulta que describa las necesidades del usuario (representadas en el conjunto de documentos aportados). La consulta obtenida puede ser ejecutada en otros SRIs para obtener más documentos relevantes. Así, no hay necesidad de que el usuario interactúe con el proceso como ocurre en otras técnicas de refinamiento de consultas como la retroalimentación por relevancia [2, 16].

Todas las técnicas de aprendizaje automático empleadas en ese trabajo (árboles de regresión, algoritmos genéticos y enfriamiento simulado) trabajan con el modelo vectorial. Además, en [18], Smith y Smith propusieron un método de aprendizaje automático de consultas Booleanas basado en PG. Dicho método fue extendido en [9] haciendo uso de técnicas multiobjetivo que permiten aprender varias consultas con distinto balance entre exhaustividad y precisión en cada ejecución. En lo que respecta a las aplicaciones en SRIDs, tenemos el algoritmo de Kraft y otros, que revisaremos en la sección siguiente, y nuestro método GA-P con nichos que extiende al anterior considerando un algoritmo evolutivo más sofisticado [7]. Pueden consultarse las descripciones de las técnicas anteriores basadas en algoritmos evolutivos en [6].

3 EL ALGORITMO DE PG DE KRAFT Y OTROS PARA EL APRENDIZAJE DE CONSULTAS BOOLEANAS EXTENDIDAS

El proceso IQBE de Kraft y otros [12] es un algoritmo de PG con las siguientes componentes²:

Esquema de codificación: Las consultas difusas se codifican en árboles de expresión, cuyos nodos ter-

²Nótese que hemos alterado la definición de algunas con objeto de mejorar el rendimiento del algoritmo. Naturalmente, hemos preservado las bases del mismo.

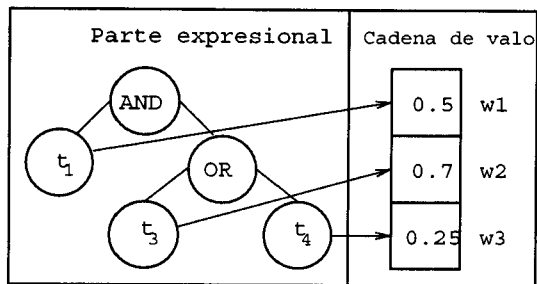


Figura 1: Ejemplo de individuo válido

minales son términos de la consulta con sus respectivos pesos y cuyos nodos interiores son operadores booleanos *Y*, *O* o *NO*. La parte izquierda de la Figura 1 muestra un ejemplo de individuo válido.

Esquema de selección: Se basa en el clásico esquema generacional, en el que se crea una población intermedia a partir de la población actual mediante el muestreo estocástico universal de Baker [3], y se hace uso de la selección elitista.

Operadores genéticos: Se considerará el operador de cruce convencional de la PG [11], basado en la selección aleatoria de una arista en cada padre y el intercambio de los dos subárboles que penden de estas aristas entre ambos padres.

Por otro lado, las tres posibilidades siguientes serán seleccionadas aleatoriamente —con la probabilidad mostrada— para el operador de mutación:

- Selección aleatoria de una arista y generación aleatoria de un nuevo subárbol que sustituirá al antiguo situado en dicha arista ($p=0,4$).
- Cambio aleatorio de un término de la consulta por otro no presente en la misma pero perteneciente a algún documento relevante ($p=0,1$).
- Cambio aleatorio del peso de un término de la consulta ($p=0,5$), mediante el operador de mutación no uniforme de Michalewicz [13].

Generación de la población inicial: El primer individuo se obtendrá mediante la generación de un árbol aleatorio que represente una consulta con la longitud máxima predefinida compuesta por términos elegidos aleatoriamente de entre los existentes en los documentos relevantes iniciales proporcionados por el usuario, y con todos los pesos de los términos fijados a 1. El resto de los individuos se generarán del mismo modo pero considerando pesos aleatorios en el intervalo $[0,1]$.

Función de pertenencia: Se considerará la siguiente, que combina las medidas clásicas de precisión y exhaustividad (véase [19]):

$$F = \alpha \cdot \frac{\sum_d r_d \cdot f_d}{\sum_d f_d} + \beta \cdot \frac{\sum_d r_d \cdot f_d}{\sum_d r_d} \quad (1)$$

donde $r_d \in \{0,1\}$ es la relevancia del documento d para el usuario y $f_d \in \{0,1\}$ es la recuperación del documento d en el procesamiento de la consulta actual.

Además, puesto que las consultas simples son preferibles, incorporamos un criterio de selección al algoritmo para considerar mejor adaptadas las consultas más simples de entre un grupo de consultas con el mismo valor de adaptación.

4 UNA NUEVA PROPUESTA DE ALGORITMO IQBE PARA EL APRENDIZAJE DE CONSULTAS DIFUSAS BASADO EN SA-P

Aunque el algoritmo de Kraft y otros estudiado en la sección anterior presenta un rendimiento adecuado, sufre de las limitaciones habituales del paradigma PG, que en este problema se reflejan en su incapacidad para derivar los pesos de los términos. Estos valores se generan aleatoriamente cuando comienza la ejecución del algoritmo y sólo pueden ser alterados mediante la mutación. Por tanto, en el problema del aprendizaje de la consulta ponderada, el algoritmo es capaz de encontrar los términos, positivos o negativos, que expresan las necesidades de los usuarios y combinarlos apropiadamente mediante los operadores *Y* y *O*, pero es muy difícil para él obtener los pesos de los términos, lo que constituye un inconveniente importante debido a la importancia de éstos en la efectividad de la consulta. De este modo, el procedimiento de selección puede descartar consultas difusas con la estructura óptima debido a la mala definición de los pesos incluidos en ellas.

Puede solucionarse este problema adaptando concurrentemente la estructura de la consulta y los pesos de los términos (tal y como se hace en el algoritmo GA-P propuesto en [7]). En este trabajo, realizamos la misma tarea mediante un algoritmo híbrido entre Enfriamiento Simulado (ES)³ y PG, el paradigma SA-P,

³El ES [1] es un algoritmo de búsqueda por entornos que modifica el criterio habitual de aceptación de la búsqueda local básica permitiendo que en, algunas ocasiones, se acepte una solución peor que la actual para evitar el estancamiento en óptimos locales. El ES comienza desde una solución inicial y genera una solución candidata a partir de la misma (un vecino) aplicando cambios aleatorios sobre ella. Si la solución vecina es mejor que la actual, la reemplaza automáticamente. En caso contrario, aún puede

```

algoritmo SAP-IQBE
entradas: MaxEval /*n\ 'umero m\ 'aximo de evaluaciones*/, MaxNeighs /*n\ 'umero
m\ 'aximo de vecinos generados por temperatura*/, MaxSuccess /*n\ 'umero
m\ 'aximo de vecinos aceptados por temperatura*/, c /*factor de
enfriamiento*/, T_0 /*temperatura inicial*/, p /*probabilidad de
mutaci\ 'on de la cadena de valores*/, K_1 /*par\ 'ametro de mutaci\ 'on de
la cadena de valores*/
salida: Ibest

I=Ibest=random individual
T=T_0
Eval=1
while (Eval<=MaxEval) do
  num_neighs=num_success=0
  while (num_neighs<MaxNeighs) && (num_success<MaxSuccess)
    Icand=macromutation(I,p,T,K_1)
    num_neighs=num_neighs+1
    delta=F(I)-F(Icand)
    Eval=Eval+1
    v=random value with uniform distribution U(0,1)
    if (delta<0) or (v<exp(-delta/T)) then
      I=Icand
      num_success=num_success+1
      if (I>Ibest) then Ibest=I end if
    end if
  end while
  T=c*T
end while

```

Figura 2: Algoritmo SA-P considerado

propuesto en [17]. El algoritmo se basa en codificar tanto una parte expresional (el árbol de expresiones) como una cadena de valores (los coeficientes manejados en la expresión) y en adaptarlas con el esquema de búsqueda de ES mediante un operador de vecino consistente en el operador de cruce habitual de PG y un operador de mutación de la cadena de valores.

De este modo, la consulta Booleana extendida se codifica almacenando su estructura —términos y operadores lógicos— en la parte expresional, y los pesos de los términos en la cadena de valores mediante un esquema real (Figura 1). El operador de vecino (macro-mutación) genera la consulta difusa candidata cambiando bien la parte expresional, bien la cadena de

valores de la consulta actual. Esta decisión se toma aleatoriamente con respecto a una probabilidad de mutación de la cadena de valores p ($p=1$ representa “sólo mutación de pesos”, mientras que $p=0$ indica “sólo mutación de la estructura de la consulta”). Esta última se muta seleccionando un arco del árbol de expresión y substituyendo el subárbol por otro generado aleatoriamente. El vector de pesos se muta mediante la recombinación intermedia [15] aplicada sobre el vector actual de pesos ($pesos(I)$) y un vector aleatorio W con un parámetro de amplitud que depende de la temperatura actual T y de una constante $K1$:

$$pesos(I) = pesos(I) \cdot (T/K1) + (1 - (T/K1)) \cdot W$$

ser aceptada con una probabilidad que depende de la diferencia de los costes de ambas soluciones y del valor de un parámetro de control denominado *temperatura*. Esta temperatura se inicializa a un valor alto (lo que indica que se aceptarán soluciones mucho peores a la actual) y este valor se va decrementando mediante un procedimiento denominado “estrategia de enfriamiento” cada vez que se genera un cierto número de vecinos.

El algoritmo SA-P empleado se muestra en la Figura 2. Como se observa en el mismo, la solución inicial es una consulta difusa aleatoria. La temperatura inicial T_0 se calcula mediante la expresión: $T_0 = \frac{\phi}{-\ln(\mu)} \cdot F(I)$, donde I es la solución inicial y ϕ es la probabilidad de aceptación de una solución un μ por 1 peor que $F(I)$. Ambos parámetros se definen en $[0, 1]$.

5 EXPERIMENTOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Hemos considerado la base documental *Cranfield*, habitualmente empleada en el área, para analizar el comportamiento del método propuesto. Los 1400 documentos han sido indizados automáticamente, extra-
yéndose en primer lugar las palabras vacías de contenido, obteniendo así un total de 3857 términos índice diferentes. La función IDF de Salton (presentada en la Sección 2.1) ha sido considerada como función de ponderación. De entre las 225 consultas asociadas a esta colección, hemos seleccionado aquellas con 20 o más documentos relevantes (consultas 1, 2, 23, 73, 157, 220 and 225). El número de documentos relevantes asociados a cada una de estas siete consultas es 29, 25, 33, 21, 40, 20 and 25, respectivamente.

Hemos ejecutado nuestra propuesta y la de Kraft y otros partiendo de los conjuntos de documentos relevantes anteriores. Para hacer una comparación justa, ambos algoritmos se han ejecutado tres veces con distintas inicializaciones durante el mismo número de evaluaciones de la función de adaptación (100.000). Por simplicidad, no consideraremos el uso del operador *NO* en nuestros experimentos (tal y como se hizo en [12]).

Los valores de parámetros considerados son un máximo de 20 nodos para la parte expresional, $(\alpha, \beta) = (1, 2, 0, 8)$ en la función de adaptación, y 0,1 para el umbral de recuperación del SRID. El algoritmo de Kraft y otros se ha ejecutado con una población de 1600 consultas, y con probabilidades de cruce y mutación de 0,8 y 0,2, respectivamente. Por último, en el algoritmo SA-P, hemos fijado los valores del cálculo de la temperatura inicial ϕ y μ a 0,5, el número máximo de vecinos generados y aceptados por temperatura a 500 and 50, respectivamente, el parámetro de enfriamiento a 0,9, la probabilidad de mutación de la cadena de valores a 0,5 y el parámetro $K1$ considerado por esta mutación a 5.

Los resultados obtenidos por ambos métodos en cada una de las siete consultas se muestra en las Tablas 1 y 2, donde $\#c$ representa el número de consulta, Ej corresponde a la ejecución en cuestión (1 a 3), T al tiempo de ejecución (en un Pentium II a 350 MHz. con 64 MB de memoria), Ta al tamaño de la consulta generada, F al valor de la función de adaptación, P y E a los valores de precisión y exhaustividad, respectivamente, $\#r$ al número de documentos recuperados por la consulta y $\#rr$ al número de documentos relevantes recuperados.

Analizando estos resultados, podemos observar claramente como nuestro algoritmo SA-P IQBE mejora sig-

Tabla 1: Resultados obtenidos por Kraft y otros

#c	Ej	T	Ta	F	P	E	#r/#rr
1	1	12:48	19	1,282	1	0,103	3/3
	2	13:01	19	1,282	1	0,103	3/3
	3	12:49	17	1,255	1	0,068	2/2
2	1	12:58	17	1,328	1	0,160	4/4
	2	12:44	17	1,328	1	0,160	4/4
	3	12:51	13	1,296	1	0,120	3/3
23	1	12:52	19	1,272	1	0,090	3/3
	2	12:49	17	1,272	1	0,090	3/3
	3	12:48	17	1,272	1	0,090	3/3
73	1	12:36	19	1,466	1	0,333	7/7
	2	12:59	19	1,466	1	0,333	7/7
	3	12:49	17	1,504	1	0,380	8/8
157	1	12:47	19	1,260	1	0,075	3/3
	2	12:45	19	1,260	1	0,075	3/3
	3	12:49	17	1,240	1	0,050	2/2
220	1	12:40	17	1,400	1	0,250	5/5
	2	12:47	17	1,400	1	0,250	5/5
	3	12:43	7	1,360	1	0,200	4/4
225	1	12:41	19	1,328	1	0,160	4/4
	2	12:51	17	1,328	1	0,160	4/4
	3	12:45	17	1,328	1	0,160	4/4

nificativamente el rendimiento del algoritmo de Kraft y otros en todos los casos. El menor porcentaje de mejora corresponde a la consulta 73, con un 37,5 por ciento (un valor de exhaustividad de 0,523810 para el SA-P contra el 0,380952 resultante del algoritmo de Kraft y otros), y el mayor a la consulta 157 con un 300 por ciento (una exhaustividad de 0,225 para el SA-P contra 0,075 en Kraft y otros).

En lo que respecta al tiempo de máquina, ambos métodos necesitan aproximadamente el mismo, aunque el SA-P parece un poco más lento. Pensamos que esto se debe a la inclusión del criterio de selección para la obtención de consultas más simples en el método de Kraft y otros (véase la Sección 3) que no se consiguiera en nuestra propuesta. Este criterio hace que la población vaya llenándose de consultas más simples según va convergiendo el algoritmo, provocando que su evaluación —la componente más costosa— requiera mucho menos tiempo.

6 COMENTARIOS FINALES

En este trabajo, hemos propuesto un nuevo algoritmo IQBE para SRIDs basado en un algoritmo híbrido ES-PG y lo hemos validado en la conocida colección Cranfield compuesta por 1400 documentos. Se han obtenido muy buenos resultados en la recuperación,

Tabla 2: Resultados obtenidos por SAP-IQBE

#c	Ej	T	Ta	F	P	E	#r/#rr
1	1	13:38	17	1,365	1	0,206	6/6
	2	13:04	19	1,393	1	0,241	7/7
	3	13:23	19	1,393	1	0,241	7/7
2	1	13:09	17	1,424	1	0,280	7/7
	2	12:39	17	1,488	1	0,360	9/9
	3	12:53	19	1,488	1	0,360	9/9
23	1	13:29	19	1,369	1	0,212	7/7
	2	13:02	19	1,369	1	0,212	7/7
	3	13:02	19	1,321	1	0,151	5/5
73	1	12:38	19	1,619	1	0,523	11/11
	2	13:06	19	1,619	1	0,523	11/11
	3	13:05	19	1,619	1	0,523	11/11
157	1	13:43	19	1,380	1	0,225	9/9
	2	13:43	19	1,320	1	0,150	6/6
	3	13:28	19	1,380	1	0,225	9/9
220	1	13:05	17	1,520	1	0,400	8/8
	2	13:22	19	1,560	1	0,450	9/9
	3	13:40	19	1,640	1	0,550	11/11
225	1	13:18	19	1,520	1	0,400	10/10
	2	13:22	19	1,488	1	0,360	9/9
	3	13:21	17	1,488	1	0,360	9/9

mejorando la propuesta anterior de Kraft y otros.

Por otro lado, en [8] puede consultarse una extensión del método propuesto en la que se adapta el umbral de recuperación, un parámetro que habitualmente fija el usuario a priori. Esta característica permite mejorar aún más la efectividad del sistema sin repercutir negativamente en el tiempo de ejecución del algoritmo.

Referencias

- [1] Aarts, E.H.L.: Simulated annealing and boltzman machines: a stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing, Wiley (1989).
- [2] Baeza-Yates, R., Ribeiro-Neto, B.: Modern information retrieval, Addison-Wesley (1999).
- [3] Baker, J.E.: Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm, Proc. Second International Conference on Genetic Algorithms (ICGA'87), Hillsdale, (1987) 14-21.
- [4] Bordogna, G., Carrara, P., Pasi, G.: Fuzzy approaches to extend Boolean information retrieval, en: P. Bosc, J. Kacprzyk (Eds.), Fuzziness in database management systems (1995) 231-274.
- [5] Chen, H., Shankaranarayanan, G., She, L., Iyer, A.: A machine learning approach to inductive query by examples: an experiment using relevance feedback, ID3, genetic algorithms, and simulated annealing, Journal of the American Society for Information Science **49:8** (1998) 693-705.
- [6] Cordón, O., Moya, F., Zarco, C.: Breve estudio sobre la aplicación de los algoritmos genéticos a la recuperación de información, Actas del Cuarto Congreso de la International Society for Knowledge Organization (ISKO) (EOCONSID'99), Granada, España, (Abril, 1999) 179-186.
- [7] Cordón, O., Moya, F., Zarco, C.: A GA-P algorithm to automatically formulate extended Boolean queries for a fuzzy information retrieval system, Mathware & Soft Computing **7:2-3** (2000) 309-322.
- [8] Cordón, O., Moya, F., Zarco, C.: A new evolutionary algorithm combining SA and GP for relevance feedback in fuzzy information retrieval systems, Soft Computing, **6:5** (2002).
- [9] Cordón, O., Herrera-Viedma, E., Luque, M.: Evolutionary Learning of Boolean Queries by Multiobjective Genetic Programming, Proc. Seventh Intl. Conference on Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VII), LNCS, Granada, España, (Septiembre, 2002).
- [10] Herrera-Viedma, E.: Modelling the retrieval process of an information retrieval system using an ordinal fuzzy linguistic approach, Journal of the American Society for Information Science **52:6** (2001) 460-475
- [11] Koza, J.: Genetic programming. On the programming of computers by means of natural selection, The MIT Press (1992).
- [12] Kraft, D.H., Petry, F.E., Buckles, B.P., Sadasivan, T.: Genetic algorithms for query optimization in information retrieval: relevance feedback, en: E. Sanchez, T. Shibata, L.A. Zadeh, Genetic algorithms and fuzzy logic systems 155-173, World Scientific (1997).
- [13] Michalewicz, Z.: Genetic algorithms + data structures = evolution programs, Springer-Verlag (1996).
- [14] Mitchel, T.M.: Machine learning, McGraw-Hill (1997).
- [15] Mühlenbein, H., Schlierkamp-Voosen, D.: Predictive models for the breeder genetic algorithm: I. Continuous parameter optimization, Evolutionary Computation **1:1** (1993) 25-49.
- [16] Salton, G., McGill, M.J.: Introduction to modern information retrieval, McGraw-Hill (1984).
- [17] Sánchez, L., Couso, I., Corrales, J.A.: Combining GP operators with SA search to evolve fuzzy rule based classifiers, Information Sciences **136:1-4** (2001) 175-191.
- [18] Smith, M.P., Smith, M.: The use of genetic programming to build Boolean queries for text retrieval through relevance feedback, Journal of Information Science **23:6** (1997) 423-431.
- [19] van Rijsbergen, C.J.: Information retrieval (2nd edition), Butterworth (1979).

Sesión

B2

Razonamiento temporal borroso

Fuzzy temporal Reasoning

MODELADO EN EL TIEMPO DE SISTEMAS DINÁMICOS

Juan Moreno, Luis Jiménez, Luis Rodríguez, Xavier Aguado

Universidad de Castilla-La Mancha

E.U.I.T. Industrial Toledo, E.S. Informática Ciudad Real, E.U.P. Almadén, F.C.D. Toledo

Juan.Moreno@uclm.es, Luis.Jimenez@uclm.es, Luis.Rodriguez@uclm.es, Xavier.Aguado@uclm.es

Resumen

En este trabajo se presenta la definición y obtención de los llamados *modelos difusos temporales*. Dichos modelos son útiles para el estudio de sistemas que cambian en el tiempo (sistemas dinámicos). Los MDTs se obtienen mediante la aplicación del algoritmo que en este trabajo se presenta a modelos difusos basados en etiquetas lingüísticas. Dicho algoritmo se ha aplicado a los modelos difusos obtenidos con el *algoritmo directo de inducción difusa* [6] de un lanzamiento de peso del atleta Manuel Martínez.

Palabras Clave: Modelos de inducción, modelos lingüísticos, sistemas dinámicos.

1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es definir una estructura que represente la evolución en el tiempo de un sistema dinámico [7, 5], y que permita simular el comportamiento del mismo en base a una entrada. Para ello se definen y se obtienen los modelos difusos temporales (MDTs), además se muestra la inferencia en los mismos. Informalmente, los MDTs son una secuencia de reglas ordenadas, donde cada regla representa una zona en el tiempo. Para su obtención se utiliza el algoritmo 1 aplicado a cualquier modelo difuso M basado en etiquetas lingüísticas definidas a priori. Los pasos a seguir para obtener un MDT a partir de M son:

1. Obtención de un modelo difuso M a partir de un conjunto de etiquetas para cada variable de entrada y salida aplicando cualquier algoritmo de inducción.
2. Aplicación del algoritmo 1 que convierte M a su correspondiente MDT.

En el siguiente apartado se definen los MDTs y se describe el algoritmo de obtención de los mismos. En el tercer apartado se verá la inferencia en los MDTs. A continuación se realiza la prueba del algoritmo sobre un lanzamiento de peso del lanzador Manuel Martínez. Y finalmente se verán las conclusiones obtenidas.

2 Conversión de Modelo difuso a MDT

Antes de ver el algoritmo de conversión se ofrece la estructura de nuestro conjunto de ejemplos E , se definen las secuencias de etiquetas lingüísticas de las variables lingüísticas de entrada y salida y las definiciones necesarias para ver el funcionamiento del algoritmo de conversión.

Consideremos un sistema dinámico MISO (Multiple Input Simple Output) llamado Ξ , que tiene un conjunto de m variables reales de entrada definidas sobre el dominio $X = X_1 x X_2 x \dots x X_m \subset R^m$, y una variable real de salida S definida sobre el dominio $S \subset R$ ($\Xi : X \rightarrow S$). Del sistema Ξ se obtiene su comportamiento mediante un conjunto de ejemplos E de n elementos, de tal forma que $E = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ donde:

$$e_i = (x_1^i \dots x_m^i, s^i, t_i) \quad (1)$$

donde $x_j^i \in X_j$, $s^i \in S$ y t_i es el instante en que ocurre dicho ejemplo.

Los MDTs trabajan con variables lingüísticas [10] que tienen definidas sobre su dominio una secuencia de etiquetas lingüísticas con una serie de restricciones que deben verificar. A estas variables las denominaremos *variables lingüísticas continuas* (a partir de ahora simplemente *variables*). Las etiquetas lingüísticas (a partir de ahora simplemente *etiquetas*) de cada una de las m variables continuas son definidas a priori, es decir, antes de crear el MDT.

Luego para cada una de las variables de entrada X_j se

define una secuencia de etiquetas SA_j con la siguiente estructura:

$$SA_j = \{SA_j^1, SA_j^2 \dots SA_j^{i_j}\} \quad (2)$$

donde en SA_j^i el exponente i es la posición de la etiqueta en la secuencia SA_j y j es el número de variable lingüística de entrada para la que SA_j se ha definido, e i_j es el número de etiquetas en SA_j .

Y para la variable de salida S se ha definido una secuencia de etiquetas SC con la estructura:

$$SC = \{SC^1, SC^2 \dots SC^{i_y}\} \quad (3)$$

donde en SC^i el exponente i es la posición de la etiqueta en la secuencia SC , y i_y es el número de etiquetas en SC .

Las definiciones de la 2.1 a 2.8 establecen el orden de las etiquetas asociadas a cada una de las variables, definen las variables continuas y expresan las condiciones de las etiquetas definidas sobre ellas.

Definición 2.1 El centroide de una etiqueta SA_j^a definida sobre una variable X_j es el valor central de su soporte, y se calcula con la siguiente expresión:

$$CENT(SA_j^a) = \min_{SA_j^a} + \frac{\max_{SA_j^a} - \min_{SA_j^a}}{2}$$

donde $CENT(SA_j^a)$ es el centroide de la etiqueta SA_j^a , $\min_{SA_j^a}$ es el mínimo valor discreto del soporte de SA_j^a y $\max_{SA_j^a}$ es el máximo valor discreto del soporte de SA_j^a .

Definición 2.2 Se dice que la etiqueta SA_j^a es de centro inferior respecto a la etiqueta SA_j^b si se verifica:

$$CENT(SA_j^a) \leq \min_{SA_j^b}$$

donde $CENT(SA_j^a)$ es el centroide de la etiqueta SA_j^a y $\min_{SA_j^b}$ es el mínimo valor discreto del soporte de SA_j^b .

Definición 2.3 Se dice que la etiqueta SA_j^a es menor que la etiqueta SA_j^b si estando ambas definidas sobre X_j se verifica:

$$CENT(SA_j^a) < CENT(SA_j^b).$$

donde $CENT(SA_j^i)$ es el centroide de la etiqueta SA_j^i .

Definición 2.4 Se dice que la etiqueta SA_j^a es mayor que la etiqueta SA_j^b si estando ambas definidas sobre X_j se verifica que:

$$CENT(SA_j^a) > CENT(SA_j^b).$$

donde $CENT(SA_j^i)$ es el centroide de la etiqueta SA_j^i .

Definición 2.5 Se dice que la etiqueta SA_j^a es igual que la etiqueta SA_j^b si estando ambas definidas sobre X_j se verifica que:

1. $\min_{SA_j^a} = \min_{SA_j^b}$, $\max_{SA_j^a} = \max_{SA_j^b}$, es decir, tienen el mismo soporte.
2. SA_j^a y SA_j^b tienen la misma función de pertenencia.

Definición 2.6 Sean las etiquetas SA_j^i y SA_j^{i+1} que verifican que SA_j^i es de centro inferior respecto de SA_j^{i+1} , la etiqueta SA_j^{i+1} se denomina etiqueta sucesora de la etiqueta SA_j^i .

Definición 2.7 Sean las etiquetas SA_j^i y SA_j^{i+1} que verifican que SA_j^i es de centro inferior respecto de SA_j^{i+1} , la etiqueta SA_j^i se denomina etiqueta predecesora de la etiqueta SA_j^{i+1} .

Definición 2.8 Una variable continua X_j es una variable que tiene una semántica asociada a cada etiqueta SA_j^i definida sobre ella que verifica:

1. Toda etiqueta SA_j^i está definida sobre un soporte ordenado.
2. Existe un orden fijado entre las etiquetas definidas sobre ellas (definiciones de la 2.1 a 2.7), es decir, para todas las etiquetas definidas sobre X_j , la etiqueta SA_j^i es la etiqueta predecesora de SA_j^{i+1} .
3. La suma de las pertenencias de un valor a todas las etiquetas de una variable continua debe ser 1, es decir:

$$\sum_{SA_j^i \in SA_j} \mu_{SA_j^i}(x) = 1$$

donde x es un valor discreto definido en el dominio de X_j , y SA_j es la secuencia de etiquetas definido para la variable X_j .

4. Si aumenta o disminuye la pertenencia de x_j a SA_j^i , la pertenencia de x_j a SA_j^{i+1} disminuye o aumenta en el mismo grado.

5. Cualquier valor discreto x_j del dominio de definición de X_j tiene un máximo de 2 etiquetas con valores pertenencia mayor que 0, es decir, se verifica una de las siguientes expresiones:

$$\mu_{SA_j^i}(x_j) = 1$$

$$\text{ó}$$

$$\mu_{SA_j^i}(x_j) = a \text{ y } \mu_{SA_j^{i+1}}(x_j) = 1 - a.$$

La figura 1 muestra una secuencia correcta de 7 etiquetas trapezoidales asociadas a una variable continua.

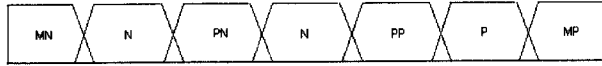


Figura 1: Secuencia correcta de 7 etiquetas

A continuación se darán un serie de definiciones necesarias para ver la estructura de las reglas de M y de las reglas de los MDTs.

Definición 2.9 Sea $SA_j = \{SA_j^1, SA_j^2 \dots SA_j^{i_j}\}$ una secuencia de etiquetas para una variable continua X_j . Un intervalo lingüístico ordenado de longitud c es una secuencia de etiquetas consecutivas definidas en SA_j , y se representa como:

$$LI_{j,p}^c = \{SA_j^p, SA_j^{p+1} \dots SA_j^{p+(c-1)}\}$$

donde p es la posición en SA_j de la primera etiqueta del intervalo lingüístico y c es el número de etiquetas del intervalo lingüístico.

Por ejemplo, dada la secuencia de etiquetas ordenadas de la figura 1 el intervalo lingüístico de longitud 3 $LI_{j,2}^3$ es la secuencia de etiquetas $\{N, NR, P\}$.

Definición 2.10 Sea a_j un valor discreto definido en el dominio de la variable continua X_j , y $LI_{j,p}^c$ un intervalo lingüístico de longitud c , la función de pertenencia de $LI_{j,p}^c$ se define como:

$$\mu_{LI_{j,p}^c}(a_j) = \sum_{SA_j^z \in LI_{j,p}^c} \mu_{SA_j^z}(a_j)$$

donde $z \in [p..p+c-1]$.

Los intervalos lingüísticos (a partir de ahora simplemente intervalos) se utilizan para definir de manera lingüística los "rangos" de valores de una variable de entrada de un sistema, y su función de pertenencia es la suma del grado de pertenencia de a_j a cada etiqueta SA_j^z perteneciente al intervalo.

Definición 2.11 Dados dos intervalos $LI_{j,p_1}^{c_1}$ y $LI_{j,p_2}^{c_2}$ se dice que $LI_{j,p_1}^{c_1} \subset LI_{j,p_2}^{c_2}$ si se cumple que:

$$\forall SA_j^i \in LI_{j,p_1}^{c_1}, SA_j^i \in LI_{j,p_2}^{c_2}$$

Definición 2.12 La secuencia de m intervalos definidos sobre m variables se conoce como la secuencia de m intervalos (SLI_m), y se representa como:

$$SLI_m = \{LI_{1,p_1}^{c_1}, LI_{2,p_2}^{c_2} \dots LI_{m,p_m}^{c_m}\}$$

donde p_j es la posición en SA_j de la primera etiqueta del intervalo j , y c_j es el número de etiquetas en el intervalo j .

Definición 2.13 Sea $e_i = (x_1^i \dots x_m^i, s^i, t^i)$ un ejemplo del conjunto E y una secuencia de m intervalos SLI_m , la función de pertenencia de SLI_m se define como:

$$\mu_{SLI_m}(e_i) = *(\mu_{LI_{j,p_j}^{c_j}}(x_j^i))$$

donde $j \in [1..m]$ y $*$ es una t -norma.

La secuencia de m intervalos se utiliza para representar de manera lingüística los "rangos" de valores de las m variables de entrada de un sistema. Y su grado de pertenencia es una t -norma entre la función de pertenencia de sus intervalos.

Definición 2.14 Dadas dos secuencias de m intervalos SLI_m^1 y SLI_m^2 se dice que $SLI_m^1 \subset SLI_m^2$ si se cumple que:

$$\forall LI_{j,p_1}^{c_1} \in SLI_m^1 \text{ y } \forall LI_{j,p_2}^{c_2} \in SLI_m^2, LI_{j,p_1}^{c_1} \subset LI_{j,p_2}^{c_2}$$

donde $j \in [1..m]$.

Así, el modelo difuso M a convertir está formado por reglas difusas con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} &\text{IF } (x_1 \text{ es } SA_1^a \text{ OR } \dots \text{OR } x_1 \text{ es } SA_1^b) \text{ AND} \\ &\quad (x_2 \text{ es } SA_2^a \text{ OR } \dots \text{OR } x_2 \text{ es } SA_2^b) \text{ AND} \\ &\quad \dots \\ &\quad \dots (x_m \text{ es } SA_m^e \text{ OR } \dots \text{OR } x_m \text{ es } SA_m^f) \\ &\text{THEN } y \text{ es } SC^w \end{aligned} \quad (4)$$

donde x_j son las variables de entrada e y es la variable de salida. Cada etiqueta SA_j^s se define en la secuencia SA_j y SC^w es una etiqueta definida en SC .

El antecedente de la regla difusa anterior es equivalente a una secuencia de m intervalos SLI_m , ya que el antecedente de la regla difusa es una conjunción de m disyunciones de etiquetas, y que una disyunción es

equivalente a un intervalo. Así consideraremos el antecedente como un SLI_m .

Una vez vistos los conceptos previos el algoritmo 1 muestra como realizar la transformación de un modelo difuso a MDT. Como puede verse se realiza en dos fases que se relatan en los subapartados 2.1 y 2.2. Este algoritmo necesita como entrada el modelo difuso M que se quiere transformar, las secuencias de etiquetas $SA_1, SA_2 \dots SA_m$ y SC y el conjunto de ejemplos E utilizado para inducir M .

Algoritmo 1 De modelo difuso M a MDT

- 1) Convertir M a modelo difuso con conjunto de ejemplos asociado M_{asoc} (algoritmo 2).
 - 2) Convertir M_{asoc} a MDT M_{Tord} (algoritmo 3).
-

2.1 DE M A M_{asoc}

El primer paso del algoritmo 1 consiste en convertir el modelo difuso M en un modelo difuso con conjunto de ejemplos asociado M_{asoc} , es decir, se asocia un conjunto de ejemplos $E_{SLI_m}^i$ a la secuencia de m intervalos de cada regla R_i del modelo difuso (algoritmo 2).

Definición 2.15 Dada una secuencia de m intervalos SLI_m de una regla R_i , el conjunto de ejemplos $E_{SLI_m}^i$ asociado a él se define como:

$$E_{SLI_m}^i = \{e_j \in E / \mu_{SLI_m}(e_j) > 0\}$$

donde E es el conjunto de ejemplos inicial.

El conjunto $E_{SLI_m}^i$ es un subconjunto de E que está compuesto por los ejemplos e_i de E que verifican el antecedente de la regla R_i . Para obtener $E_{SLI_m}^i$ de cada regla R_i del modelo M se utiliza el algoritmo 2.

Algoritmo 2 Algoritmo para obtener los $E_{SLI_m}^i$

```

for  $i = 1$  to  $N^o Reglas(M)$  do
   $E_{SLI_m}^i \leftarrow \emptyset$ 
  for  $j = 1$  to  $N^o Ejemplos(E)$  do
    if  $\mu_{SLI_m}(e_j) > 0$  then
       $E_{SLI_m}^i = E_{SLI_m}^i + e_j$ 
    end if
  end for
end for

```

Como puede verse se utilizan dos bucles **for**, el bucle más externo recorre las reglas del modelo indicando la regla R_i sobre la que se está calculando $E_{SLI_m}^i$ y el bucle más interno recorre el conjunto de ejemplos E , y si la pertenencia de algún ejemplo $e_j \in E$ a la secuencia SLI_m de la regla R_i es mayor que 0 lo añade en el conjunto de ejemplos $E_{SLI_m}^i$.

2.2 DE M_{asoc} a M_{Tord}

Una vez obtenido M_{asoc} se debe transformar a MDT denominado M_{Tord} mediante el algoritmo 3. A continuación se darán una serie de definiciones necesarias para ver el funcionamiento del mismo.

Definición 2.16 Un conjunto de ejemplos $E_{p,u}$ se denomina conjunto de ejemplos sucesivos si verifica:

1. $p \leq u$
2. $E_{p,u} \subset E$
3. $\forall k \in [p, u], \exists e_k \in E_{p,u}$
4. $\forall e_a, e_b \in E_{p,u}, a \neq b$.

donde E es el conjunto de ejemplos, p , u y k son los índices enteros de los elementos de E . Así pues el conjunto $E_{p,u}$ contiene $u - p + 1$ ejemplos.

Definición 2.17 Una regla difusa temporal $R_{p,u}$ es una regla difusa que verifica:

1. Su antecedente es una secuencia de m intervalos SLI_m .
2. Su consecuente es una etiqueta SC^w .
3. Tiene asociado al SLI_m un conjunto de ejemplos sucesivos $E_{p,u}$.

Definición 2.18 Se dice que una regla difusa temporal $R_{k,l}$ está contenida en otra regla difusa temporal $R_{i,j}$ si se verifica que $i \leq k$ y $j \geq l$.

Definición 2.19 Se dice que una regla difusa temporal $R_{i,j}$ es menor que otra regla difusa temporal $R_{k,l}$ si se verifica:

1. $R_{k,l}$ no está contenida en $R_{i,j}$.
2. $i < k$.

Definición 2.20 Se dice que una regla difusa temporal $R_{i,j}$ es igual que otra regla difusa temporal $R_{k,l}$ si se verifica $i = k$ y $j = l$, es decir, si cubre el mismo conjunto de ejemplos.

Definición 2.21 Se dice que una regla difusa temporal $R_{i,j}$ es mayor que una regla difusa temporal $R_{k,l}$ si se verifica:

1. $R_{i,j}$ no está contenida en $R_{k,l}$.
2. $i > k$.

Definición 2.22 Un modelo difuso temporal desordenado M_{Tdes} es un modelo compuesto por reglas difusas temporales las cuales no están ordenadas (definiciones de 2.19 a 2.21).

Definición 2.23 Un modelo difuso temporal M_{Tord} es un modelo compuesto por reglas difusas temporales ordenadas (definiciones de 2.19 a 2.21).

Algoritmo 3 De M_{asoc} a M_{Tord}

```

 $M_{Tdes} \leftarrow \theta$ 
for  $i = 1$  to  $N^{\circ}Reglas(M_{asoc})$  do
   $SET \leftarrow Partir(E_{SLI_m}^i)$  {SET es un cto de ctos de ejemplos consecutivos}
  for  $j = 1$  to  $N^{\circ}Ejemplos(SET)$  do
     $S \leftarrow ObtenerConjunto(SET)$  {Obtiene un cto de ejemplos consecutivos S}
     $A \leftarrow ObtenerAntecedente(S, R_i)$  {Usando S se simplifica  $SLI_m^i$ }
     $C \leftarrow ObtenerConsecuente(S)$  {Usando S se obtiene un consecuente}
     $R_{p,u} \leftarrow CrearRegla(S, A, C)$  {Se crea la regla  $R_{p,u}$  usando S, A y C}
     $M_{Tdes} \leftarrow M_{Tdes} + R_{p,u}$  {Se añade la nueva regla a  $M_{Tdes}$ }
  end for
end for
 $M_{Tord} \leftarrow ObtenerModeloOrdenado(M_{Tdes})$  {Se obtiene  $M_{Tord}$  a partir de  $M_{Tdes}$ }

```

El funcionamiento del algoritmo 3 consiste en recorrer todas las reglas R_i del modelo difuso M_{asoc} . Para cada regla R_i se divide $E_{SLI_m}^i$ obteniendo el conjunto SET , que está formado por los conjuntos de ejemplos sucesivos posibles obtenidos a partir de $E_{SLI_m}^i$. Utilizando el conjunto SET se obtienen tantas reglas difusas temporales $R_{p,u}$ como conjuntos $E_{p,u}$ tiene SET , y todas las reglas $R_{p,u}$ obtenidas se añaden al modelo difuso temporal desordenado M_{Tdes} . Cuando se ha realizado este proceso para todas las reglas difusas temporales se obtiene el modelo ordenado M_{Tord} a partir del modelo desordenado M_{Tdes} utilizando el algoritmo 5.

Del algoritmo 3 se deben aclarar como se realizan las siguientes cuestiones:

1. ¿Cómo dividir el conjunto de ejemplos $E_{SLI_m}^i$?
2. ¿Como obtener el SLI_m de la regla difusa temporal?
3. ¿Como obtener la etiqueta del consecuente SC^w de la regla difusa temporal?
4. ¿Como obtener las reglas difusas temporales del modelo temporal ordenado M_{Tord} ?

Estas cuestiones se aclaran en los siguientes puntos.

2.2.1 Dividir el conjunto $E_{SLI_m}^i$

Para resolver la primera cuestión se debe tener en cuenta que cada regla R_i del modelo M_{asoc} tiene asociado un conjunto de ejemplos $E_{SLI_m}^i$. El conjunto $E_{SLI_m}^i$ está formado por grupos de secuencias de ejemplos sucesivos en el tiempo. Cada uno de estos grupos es un conjunto de ejemplos sucesivos $E_{p,u}$. De la partición del conjunto de ejemplos $E_{SLI_m}^i$ se obtiene el conjunto SET , cuyos elementos son conjuntos de ejemplos sucesivos $E_{p,u}$.

Algoritmo 4 Obtención del conjunto SET

```

 $E_{aux} \leftarrow \theta$ 
for  $i = 2$  to  $N^{\circ}Ejemplos(E_{SLI_m}^i)$  do
  if  $t_i$  es el tiempo siguiente a  $t_{i-1}$  en el conjunto de ejemplos  $E$  then
     $E_{aux} = E_{aux} + e_i$ 
  else
     $SET = SET + E_{aux}$ 
     $E_{aux} \leftarrow \theta$ 
  end if
end for

```

El algoritmo 4 muestra la forma de obtener el conjunto de conjuntos de ejemplos sucesivos (SET). En dicho algoritmo E_{aux} es un conjunto de ejemplos sucesivos que se utiliza para agrupar los ejemplos sucesivos de $E_{SLI_m}^i$. El conjunto E_{aux} se inicializa al conjunto vacío θ en el algoritmo. El único bucle **for** se encarga de recorrer los elementos del conjunto $E_{SLI_m}^i$, si el ejemplo e_i es el siguiente en el conjunto E temporalmente hablando a su ejemplo anterior e_{i-1} en $E_{SLI_m}^i$ entonces el ejemplo e_i se introduce en el conjunto E_{aux} ya que e_{i-1} y e_i son sucesivos, sino ocurre esto ya se ha obtenido el conjunto de ejemplos sucesivos, luego se inserta E_{aux} en el conjunto SET , y se sigue realizando el mismo procedimiento para los ejemplos de $E_{SLI_m}^i$.

2.2.2 Obtener el SLI_m de una regla difusa temporal

El siguiente paso es obtener el SLI_m de cada regla difusa temporal $R_{p,u}$, para esto se simplifica el SLI_m de la regla utilizada para obtener $R_{p,u}$. El método de simplificación utilizado consiste en que para cada intervalo $LI_{j,p_j}^{c_j}$ en SLI_m se cambia la primera y última etiqueta; como consecuencia de esto se reduce el número de etiquetas en el nuevo intervalo.

Así, la nueva primera etiqueta SA_j^f en cada intervalo $LI_{j,p_j}^{c_j}$ es la menor etiqueta que verifica:

$$\exists e_i \in E_{p,u} / \mu_{SA_j^f}(x_j^i) > 0 \quad (5)$$

donde x_j^i es el valor real en la posición j en el ejemplo e_i .

La nueva última etiqueta SA_j^l en cada $LI_{j,p_j}^{c_{j_1}}$ es la que mayor etiqueta que verifica:

$$\exists e_i \in E_{p,u} / \mu_{SA_j^l}(x_j^i) > 0 \quad (6)$$

donde x_j^i es el valor real en la posición j del ejemplo e_i .

En resumen, la nueva primera y última etiquetas son la menor y mayor de $LI_{j,p_j}^{c_{j_1}}$ que tiene uno o más ejemplos en $E_{p,u}$ con un grado de pertenencia mayor que cero. Así el intervalo tiene $l - f + 1$ etiquetas y se representa como $LI_{j,f}^{l-f+1}$.

2.2.3 Obtener el consecuente

Para obtener la etiqueta del consecuente se utiliza la siguiente ecuación:

$$\max_{SC^w} \mu_{SC^w}(v) \quad (7)$$

$$\text{donde } w=1..i_y \text{ y } v = \frac{\sum_{i=1}^{N(E_{SLI_m})} s^i}{N(E_{SLI_m})}$$

donde E_{SLI_m} es el conjunto de ejemplos de SLI_m , $N(E_{SLI_m})$ es el número de ejemplos en E_{SLI_m} , y s^i es el valor real de salida en el ejemplo e_i que pertenece a E_{SLI_m} .

En resumen, la etiqueta seleccionada para el consecuente es la que tiene el máximo grado de pertenencia al valor medio de los valores de salida en los ejemplos de E_{SLI_m} . Otras posibilidades se encuentran en [9].

2.2.4 Obtener las RDT de M_{Tord}

Primeramente se dan las definiciones de unión de intervalo y de secuencias de intervalos que van a ser necesarias para la obtención de M_{Tord} .

Definición 2.24 Dados n intervalos $LI_{j,p_{j_1}}^{c_{j_1}}, LI_{j,p_{j_2}}^{c_{j_2}}, \dots, LI_{j,p_{j_n}}^{c_{j_n}}$ definidos sobre la misma variable continua X_j se define su unión como otro intervalo $LI_{j,p}^{u-p+1}$, donde:

1. La primera etiqueta SA_j^p de $LI_{j,p}^{u-p+1}$ es la menor de $LI_{j,p_{j_1}}^{c_{j_1}}, LI_{j,p_{j_2}}^{c_{j_2}}, \dots, LI_{j,p_{j_n}}^{c_{j_n}}$.
2. La última etiqueta SA_j^u de $LI_{j,p}^{u-p+1}$ es la mayor de $LI_{j,p_{j_1}}^{c_{j_1}}, LI_{j,p_{j_2}}^{c_{j_2}}, \dots, LI_{j,p_{j_n}}^{c_{j_n}}$.
3. El intervalo está formado por todas las etiquetas de p a u , esto es, $LI_{j,p}^{u-p+1} = \{SA_j^p, SA_j^{p+1}, \dots, SA_j^u\}$.

Definición 2.25 Dadas n secuencias de m intervalos $SLI_m^1, SLI_m^2, \dots, SLI_m^n$ se define su unión como otra secuencia de m intervalos SLI_m , donde cada intervalo $LI_{j,p_j}^{c_{j_1}}$ de SLI_m se ha obtenido mediante la unión de los n intervalos $LI_{j,p_{j_1}}^{c_{j_1}}, LI_{j,p_{j_2}}^{c_{j_2}}, \dots, LI_{j,p_{j_n}}^{c_{j_n}}$ de $SLI_m^1, SLI_m^2, \dots, SLI_m^n$.

Definición 2.26 Dadas n reglas difusas temporales $R_{p_1,u_1}, R_{p_2,u_2}, \dots, R_{p_n,u_n}$ se define su unión en el instante t_i como otra regla $R_{i,i}$, donde:

1. Su SLI_m se obtiene mediante la unión de las n secuencias $SLI_m^1, SLI_m^2, \dots, SLI_m^n$.
2. El conjunto de ejemplos asociado es igual a $E_{SLI_m} = \{e_i\}$.
3. La etiqueta se calcula mediante la ecuación 7.

Definición 2.27 Dados n reglas difusas temporales $R_{p_1,u_1}, R_{p_2,u_2}, \dots, R_{p_n,u_n}$ se define su unión total como otra regla $R_{p,u}$, donde:

1. Su SLI_m se obtiene mediante la unión de las n secuencias $SLI_m^1, SLI_m^2, \dots, SLI_m^n$.
2. El conjunto de ejemplos asociado es igual a $E_{SLI_m} = \bigcup E_{SLI_m^j}$, donde $j \in [1..n]$.
3. La etiqueta de salida se calcula mediante la ecuación 7.

Algoritmo 5 Obtención de M_{Tord}

```

 $M_{Tord} \leftarrow \theta$ 
 $R_{ant} \leftarrow \theta$  {Mantiene temporalmente las reglas que representan una misma zona}
for  $i = 1$  to  $N^o Ejemplos(E)$  do
   $R_{i,i} \leftarrow UnionInstante(M_{Tdes}, t_i)$  {Unir las reglas de  $M_{Tdes}$  con  $t_i$  (definición 2.26)}
  if  $Consecuente(R_{ant}) = Consecuente(R_{i,i})$  then
     $R_{ant} \leftarrow UnionTotal(R_{ant}, R_{i,i})$  {Unir las reglas  $R_{ant}$  y  $R_{i,i}$  (definición 2.27)}
  else
     $M_{Tord} \leftarrow M_{Tord} + R_{ant}$  {Se añade la regla  $R_{ant}$  a  $M_{Tord}$ }
     $R_{ant} \leftarrow R_{i,i}$  { $R_{ant}$  es ahora  $R_{i,i}$ }
  end if
end for
 $M_{Tord} \leftarrow M_{Tord} + R_{ant}$  {Se añade la última regla al modelo}

```

El algoritmo 5 obtiene el MDT M_{Tord} utilizando M_{Tdes} . La regla R_{ant} es la llamada "regla anterior", es decir, la regla temporal de los ejemplos consecutivos anteriores que todavía no ha sido añadida a M_{Tord} .

M_{Tord} inicialmente no contiene ninguna regla. El bucle **for** calcula las reglas temporales del modelo ordenado M_{Tord} , para ello recorre los ejemplos e_i del conjunto de ejemplos E , y para cada e_i calcula la regla temporal $R_{i,i}$ uniendo todas las reglas del modelo desordenado M_{Tdes} que tienen el ejemplo e_i en su conjunto asociado de ejemplos (definición 2.26). Después se comprueba si la etiqueta del consecuente de la regla $R_{i,i}$ es igual a la etiqueta del consecuente de R_{ant} , si ocurre esto entonces se deben unir ambas reglas (definición 2.27), pues representan la misma zona de salida, en caso contrario se añade la regla R_{ant} al modelo temporal ordenado M_{Tord} , y R_{ant} pasa a ser $R_{i,i}$. Finalmente al salir del bucle se añade la regla que queda sin añadir al modelo temporal ordenado M_{Tord} .

3 INFERENCIA EN MDTs

El algoritmo 6 muestra el método de inferencia seguido para obtener la salida de un MDT cuando recibe como entrada un conjunto de ejemplos E . Los índices i y j llevan la cuenta del ejemplo actual y de la regla actual respectivamente. El bucle **for** se utiliza para recorrer el conjunto de ejemplos. La regla R_j o R_{j+1} con mayor grado de pertenencia a e_i es la regla que da la salida, en caso de ser R_{j+1} la regla activa pasa a ser la R_{j+1} .

La salida obtenida es una etiqueta (consecuente de R_j o R_{j+1}), si se desea obtener una salida discreta se debe realizar un proceso de desfuzzificación. Para este proceso se puede utilizar el método del centro de gravedad [9], criterio del máximo [9] y criterio de la media de los máximos [9].

Algoritmo 6 Método de Inferencia

```

j ← 1
for i = 1 to N°Ejemplos(E) do
  if  $\mu_{R_j}(e_i) > \mu_{R_{j+1}}(e_i)$  then
    s ← Cons( $R_j$ )
  else
    s ← Cons( $R_{j+1}$ )
  j ← j + 1
end if
end for

```

4 PRUEBA DEL MÉTODO

La prueba del algoritmo se ha realizado sobre un lanzamiento de peso del atleta Manuel Martínez. El conjunto de ejemplos E utilizado ha sido capturado a lo largo del desarrollo de la tesis de Ignacio Grande [4] y corresponde un lanzamiento de Manuel Martínez que obtuvo una longitud de 19.43 metros y se realizó en el campeonato de España de 1998 de San Sebastián. La

información relativa al proceso de captura de datos se encuentra en [1, 4].

E tiene las siguientes variables de entrada: ángulo pélvico escapular ($APelEsc$), ángulo del codo derecho ($ACodo$), eje derecha-izquierda ($EjeDI$) y eje atrás-adelante ($EjeAD$). La variable de salida es la altura (Al).

Por otro lado se han utilizado secuencias de 7 etiquetas con soportes igualmente espaciados para todas las variables. Las secuencias de etiquetas para todas las variables se muestran en la figura 1 donde MN es muy negativo, N es negativo, PN es poco negativo, NR es normal, PP es poco positivo, P es positivo y MP es muy positivo.

APelvEsc	ACodo	EjeDI	EjeAD	Al
PP a MP	MN	PP a P	MN a PN	N
N a NR	MN	P a MP	MN	MN
MP	MN	PP	NR	N
MN	PP a MP	MN	MP	MP
MN	NR	MN	P	P
N	MN a N	MN a N	PP	NR
MN a N	N a PN	MN	P	PP
N a NR	MN	PN a NR	NR a PP	PN
NR	MN	P	N	N
PP a P	MN	NR	NR	PN
P	MN	PP	NR	PN

Tabla 1: Modelo difuso M

Como se ha indicado anteriormente el algoritmo necesita un modelo lingüístico de entrada M que ha sido generado con el método lingüístico de inducción directa [6] y que se muestra en la tabla 1. Al aplicar el algoritmo 1 a M con E y con las secuencias de etiquetas definidos previamente se obtiene el MDT de 7 reglas de la tabla 2.

APE	ACodo	EjeDI	EjeAD	Al
N a PP	MN	P a MP	MN	MN
NR a MP	MN	PP a P	MN a NR	N
N a MP	MN	PN a PP	NR a PP	PN
N	MN a N	MN a N	PP	NR
MN a N	N a PN	MN	P	PP
MN	NR	MN	P	P
MN	PP a MP	MN	MP	MP

Tabla 2: Modelo MDT obtenido

La gráfica 2 muestra el reparto temporal de cada una de las reglas respecto de la función de salida, como puede verse cada una de las reglas cubre una zona de la gráfica.

La inferencia del MDT sobre el conjunto E ofrece

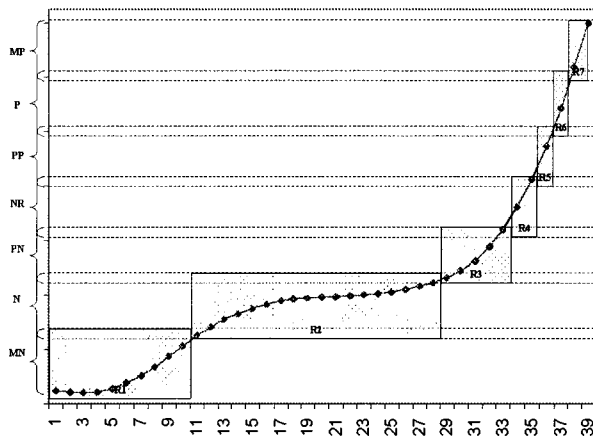


Figura 2: Reparto temporal de las reglas

la salida de la gráfica 3, como puede verse la línea de salida se ajusta perfectamente a la salida real cometiéndose un error de 0.0665 metros.

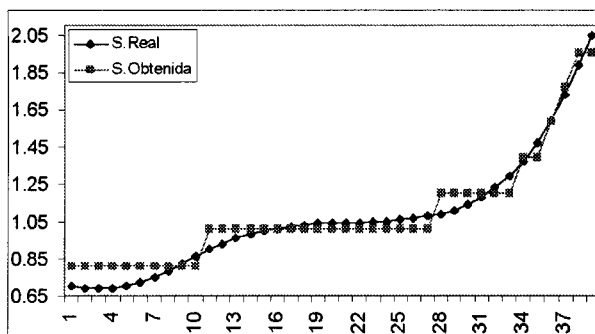


Figura 3: Inferencia sobre MDT

5 CONCLUSIONES

Los MDTs son un nuevo método para representar sistemas dinámicos de manera totalmente lingüística y con etiquetas definidas a priori, lo que hace que los MDTs sean totalmente descriptivos.

Los resultados obtenidos confirman que el error cometido por nuestro método es similar a métodos clásicos como ID3 [8] y CART [2], y otros más actuales como ADRI [3], pese a que las etiquetas son definidas a priori. Además el error puede disminuir si se realiza un ajuste a cada regla considerando sólo los ejemplos de la zona temporal que cubre.

Como trabajos futuros nos planteamos la reducción del error mediante el estudio de métodos ajuste local y modelo del error. Así como la búsqueda de un método que ajuste "ligeramente" las etiquetas definidas a priori.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto TIC2000-1362-C02-02 del Ministerio de Ciencia y tecnología.

Referencias

- [1] X. Aguado, J.L. López y I. Grande. Estudio de la técnica de los mejores lanzadores de peso españoles y del mundo con kinescan IBV. Aspectos metodológicos y prácticos", *Biomecánica*, 28-33, 2000.
- [2] L. Breiman, J. Friedman, R. Olshen y C. Stone. Classification and regression tree. *Monterey, Ca.:Wadsworth*, 1984.
- [3] M. Delgado, A.F. Gomez y L. Jimenez. A regression methodology to induce a fuzzy model. *International Journal of intelligent*, Vol. 16, Pág. 169-190, 2001.
- [4] I. Grande. Cinemática del modelo técnico individual del lanzamiento de peso. *Tesis Doctoral. Universidad de León*, 2000.
- [5] D.G. Luenberger. Introduction to dynamic systems: theory, models and applications. *John Wiley and sons*, 1979.
- [6] J. Moreno y L. Jimenez. A direct linguistic induction method for systems. *Proceedings of EUSFLAT2001*, 2001.
- [7] K. Ogata. Ingeniería de control moderna. *Prentice-Hall HispanoAmericana SA*, 1998.
- [8] J. R. Quilan. Induction of decision trees. *Machine Learning*, 81-106, 1986.
- [9] K. Tanaka. An introduction to fuzzy logic for practical applications. *Springer*, 1998.
- [10] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to Approximate reasoning. Part I, II, III. *Information Science*, 1975.

Evaluación de Algoritmos de Preproceso para Redes de Restricciones Temporales Borrosas Disyuntivas

Alfonso Bosch, Manuel Torres

Dpto. Lenguajes y Computación
Universidad de Almería
04120 La Cañada (Almería)
e-mail: abosch@ual.es

Roque Marín

Dpto. Ingeniería de la Información y las Comunicaciones
Universidad de Murcia
30071-Espinardo (Murcia)
e-mail: roque@dif.um.es

Resumen

Las Redes de Restricciones Temporales Borrosas Disyuntivas permiten expresar restricciones complejas cualitativas y cuantitativas, pero su complejidad general es exponencial. La complejidad podría reducirse con algoritmos de preproceso, antes de aplicar retroceso. Para ver la utilidad de este enfoque, se ha realizado un proceso de evaluación de un conjunto de estos algoritmos.

Palabras Clave: Satisfacción de Restricciones, Preproceso, Evaluación de algoritmos.

1 Introducción

Las Redes de Restricciones Temporales Borrosas Disyuntivas (RRTBD) [1],[10] permiten expresar restricciones temporales disyuntivas mediante un conjunto finito de distribuciones de posibilidad, normalizadas y convexas. Las restricciones temporales borrosas permiten combinar información precisa e imprecisa, que puede ser cualitativa y cuantitativa. Este modelo permite tener grados intermedios de consistencia, y cuantificar la posibilidad y necesidad de una relación entre eventos o consulta.

Este modelo generaliza el marco TCSP (*Temporal Constraint Satisfaction Problem*) propuesto en [3], y permite restricciones tales como "El Riego está *mucho antes* o *poco después* del Tratamiento", recogiendo el álgebra de puntos (PA) de Vilain y Kautz [12]. El modelo RRTBD permite representar todas las relaciones posibles entre instantes e intervalos de tiempo y sus disyunciones.

Este modelo está siendo integrado con un sistema basado en conocimiento para control de plagas en in-

vernaderos (SAEPI). El sistema elabora un plan de tratamiento, y con el modelo RRTBD estudiamos la viabilidad de dicho plan, comprobando su consistencia, y generando una secuencia permitida de acciones.

La principal desventaja del modelo RRTBD es su coste computacional, ya que generalmente son redes no descomponibles [3], necesitando aplicar retroceso para encontrar una solución, determinar la consistencia de un problema y calcular su red mínima. Por ello, sería interesante simplificar su procesamiento, y una posible aproximación consiste en aplicar una fase de preproceso antes de ejecutar el retroceso. Esto permitiría reducir el problema original, suprimiendo valores que no conducen a soluciones, y detectar en una primera fase la inconsistencia del problema.

Para ver la efectividad del preproceso, es necesario evaluar el comportamiento de los distintos algoritmos aplicables. Para ello, proponemos realizar una evaluación empírica mediante la generación de conjuntos de problemas RRTBD aleatorios con distintas características y la ejecución de los algoritmos.

La sección 2 presenta las bases del modelo RRTBD y el preproceso en problemas de satisfacción de restricciones (CSPs). La sección 3 describe la generación de problemas RRTBD aleatorios y los parámetros implicados. En la sección 4 acotaremos el ámbito de la evaluación, y en la sección 5 presentaremos los resultados de ésta. La sección 6 recoge las conclusiones y trabajos futuros.

2 Preproceso de RRTBD

2.1 Definición del modelo RRTBD

Una red de restricciones temporales borrosas disyuntivas (RRTBD) L^d consta de un conjunto finito de $n+1$ variables temporales, $X_0, X_1, \dots, X_n$ (X_0 es el origen de tiempos), cuyo dominio es un conjunto de instantes precisos equidistantes τ , y un conjunto finito de restricciones binarias disyuntivas L_{ij}^d entre estas varia-

bles. La separación entre dos instantes consecutivos, $t_{i+1} - t_i$, será el factor de máxima precisión f_p , que puede seleccionarse en función del problema.

Una restricción binaria disyuntiva L_{ij}^d entre las variables temporales X_i, X_j se define con un conjunto finito de distribuciones de posibilidad $\{\pi_{ij}^1, \dots, \pi_{ij}^k\}$, definidas sobre un conjunto I , isomorfo con los enteros, normalizadas y convexas. Para $s \in I$, $\pi_m(s) \in [0, 1]$ representa la posibilidad de que una cantidad de tiempo m pueda ser precisamente s unidades temporales.

Una asignación de valores para las variables X_i, X_j , $X_i = a, X_j = b$, $a, b \in \tau$, satisface la restricción L_{ij}^d si y solo si satisface como mínimo una de sus restricciones individuales:

$$\exists \pi_{ij}^p \in L_{ij}^d / \pi_{ij}^p(b - a) > 0 \quad (1)$$

El máximo grado de satisfacción de posibilidad de L_{ij}^d para una asignación $X_i = a, X_j = b$ es

$$\sigma_{ij}^{max} = \max_{1 \leq p \leq k} \pi_{ij}^p(b - a) \quad (2)$$

Una restricción L_{ij}^d define también una restricción simétrica L_{ji}^d , y la ausencia de restricción entre dos variables se define con la restricción universal π_U . Una RRTBD puede representarse con un grafo dirigido, donde cada nodo corresponde a una variable y cada arco a una restricción entre las variables conectadas, omitiendo restricciones simétricas y universales. El conjunto de posibles soluciones de una RRTBD L^d se define como el subconjunto borroso de τ^n asociado a la distribución de posibilidad dada por:

$$\pi_S(t_1, \dots, t_n) = \min_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} (\sigma_{ij}^{max}(t_i, t_j)) \quad (3)$$

Una tupla $T = (t_1, \dots, t_n) \in \tau^n$ de instantes precisos es una solución σ -posible de L^d si $\pi_S(T) = \sigma$. Diremos que una RRTBD L^d es consistente si tiene al menos una solución 1-posible, y diremos que es inconsistente en caso contrario.

Dada una RRTBD L^d , existen múltiples redes que generan el mismo conjunto de soluciones, es decir, son equivalentes a L^d . Por ejemplo, son equivalentes las redes obtenidas al sustituir las restricciones universales por las restricciones inducidas implícitas determinadas por las relaciones entre las variables. Estas se calculan usando las operaciones de composición e intersección de restricciones, definidas en [1] para el caso RRTBD. La red equivalente a L^d cuyas restricciones son mínimas respecto a la inclusión es denominada red mínima M^d asociada a L^d . Si M^d tiene una restricción vacía, L^d es inconsistente. El cálculo de la red mínima requiere resolver todas las posibles combinaciones generadas seleccionando una distribución de

posibilidad de cada restricción disyuntiva, y su complejidad es exponencial [10]. Si hay un máximo de p distribuciones de posibilidad en cada restricción, y la red tiene q restricciones disyuntivas y n variables, la red mínima M^d se calcula con una complejidad $O(p^q n^3)$, donde n^3 es el coste de resolver cada caso no disyuntivo RRTB [8]. Esto nos lleva a buscar enfoques para intentar reducir el coste del cálculo de la red mínima y/o la detección de la inconsistencia del problema.

2.2 Preproceso en problemas de satisfacción de restricciones

Cuando es inevitable usar el retroceso para resolver una RRTBD, es conveniente partir de una red equivalente pero más reducida que la original. El *preproceso* de una red de restricciones consiste en eliminar información inútil de la misma, y puede realizarse con varios métodos. Como primer grupo de técnicas, están los algoritmos de camino-consistencia. Estos usan las operaciones de intersección y composición definidas en [1]. El segundo grupo de técnicas incluye algoritmos específicos para tratar restricciones disyuntivas, como ULT y LPC [11], que utilizan operaciones modificadas para reducir la complejidad.

Todos estos algoritmos calculan una RRTBD equivalente a la original, y además pueden decidir correctamente, pero no completamente, su inconsistencia.

La camino-consistencia es una propiedad de los CSPs, que asegura que la restricción directa entre un par de variables X_i, X_j no permite un valor prohibido por una restricción inducida a lo largo de un camino $C = X_i, X_k, X_j, k \neq i, j$. Para hacer que una RRTBD sea camino-consistente, necesitamos eliminar de las restricciones todos los valores prohibidos por las restricciones inducidas generadas para todos los caminos de longitud 2.

La camino-consistencia se alcanza con la operación de *relajación* de restricciones, que para RRTBD es [2]:

$$L_{ij}^d \leftarrow L_{ij}^d \dot{\cap} L_{ik}^d \dot{\cup} L_{kj}^d \quad (4)$$

Esta operación se ejecuta hasta alcanzar un punto fijo en el que no se producen modificaciones en ninguna restricción. Si en este proceso una restricción resulta no normalizada, el problema es inconsistente. El primer algoritmo de camino-consistencia es PC-1 [9], que relaja toda la red cuando hay una modificación. PC-2 [7] calcula los caminos a examinar, reduciendo el posible número de pasos. Otro algoritmo de camino-consistencia es DPC [4], con un número fijo de pasos y sobre una ordenación de las variables. Como otra alternativa, proponemos el algoritmo SPC (*single-pass path-consistency*), usado para resolver redes RRTB [8], y que ejecuta un número fijo de pasos, superior al

de DPC. Para el caso RRTBD, estos algoritmos están afectados por la complejidad añadida por las disyunciones en las operaciones de relajación.

El grupo de técnicas con operaciones especiales para disyunciones intenta limitar la complejidad y evitar la fragmentación, que se produce al obtener en el pre-proceso una red con más disyunciones que la original, con una mayor complejidad en el retroceso. Entre estas técnicas, tenemos los algoritmos ULT y LPC [11], que pueden extenderse a RRTBD. ULT (*Upper-Lower Tightening*) utiliza *envolventes* para las restricciones disyuntivas, reduciéndolas a una única distribución de posibilidad. LPC (*Loose Path-Consistency*) usa una operación de intersección modificada, combinando envolventes y restricciones disyuntivas. ULT es prácticamente inmune a la complejidad añadida por las disyunciones.

3 Generación aleatoria de problemas RRTBD

Para la evaluación, vamos a utilizar distribuciones de posibilidad trapezoidales, $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, que simplifican las operaciones de composición e intersección, y para el caso de distribuciones normalizadas y convexas no suponen una limitación adicional. Hemos construido un generador de problemas aleatorios en C, que genera archivos de problemas RRTBD con distribuciones de posibilidad trapezoidales en formato de texto ASCII. El generador de problemas aleatorio, llamado GENEDIS, utiliza los siguientes parámetros de entrada, tomados de un archivo de texto ASCII:

- (n) Número de variables: entero de 2 a 100
- (q) Conectividad: entero de 1 a 100
- (R) Rango de las restricciones: dos enteros, mínimo y máximo
- (T) Amplitud: real de 0 a 1
- (F) Grado de imprecisión: real de 0 a 1
- (p) Número de distribuciones de posibilidad por restricción: entero de 0 a 100
- (d) Tipo de patrón: entero (0,1).
- (d_1, d_2) Número de distribuciones y restricciones afectadas: entero (1-100) y entero positivo.

q define la probabilidad (en forma de porcentaje) de que exista una restricción entre dos variables X_i y X_j , con $i < j$. $q=100\%$ genera un grafo completo. R controla el rango de los valores de distancias posibles entre dos variables. T indica la fracción de valores de distancia permitidos por las restricciones, dentro de R . F indica la proporción de valores que van a tener una posibilidad intermedia (entre 0 y 1). $F = 0$ da

lugar a intervalos. $F = 100$ da lugar a distribuciones de posibilidad triangulares.

El proceso de generación se divide en la construcción del grafo del problema y en la asignación de distribuciones de posibilidad a los arcos, y lo realiza el algoritmo Genedis.

Algoritmo Genedis()

```
V <- {}
For i = 0 To n-1 Visitado[Xi]=False
For each i,j (i<j, i,j<n)
  If (Random(100) ≤ q) Then V=V+(Xi,Xj)
DFS(X0)
For i = 1 To n-1
  If No(Visitado[Xi]) Then DFS(Xi); V=V+(X0,Xi)
If (p=0) Then LeerPatrónDistribuciones
For each (Xi,Xj) In V
  If Fijo Then (Xi,Xj).Distribuciones = p
  ElseIf Aleat Then (Xi,Xj).Distrib = Aleat
  Else (Xi,Xj).Distrib = Cíclico
For each (Xi,Xj) In V CalcularRestricciones
```

En la fase de construcción del grafo, si el número aleatorio generado es menor o igual que q , se crea el arco (X_i, X_j) . Posteriormente, es necesario comprobar si el grafo es conexo. Si no lo fuera, tendríamos subproblemas independientes. Para esta comprobación, aplicamos el algoritmo de búsqueda en profundidad (DFS), a partir del nodo X_0 . En caso de encontrar un nodo no visitado, el grafo no es conexo. En este caso, podríamos descartar el grafo e insistir hasta obtener un grafo conexo, o añadir arcos al grafo para hacerlo conexo. Hemos optado por la segunda alternativa, ya que la primera supondría repetir el proceso muchas veces, sobre todo para valores bajos de q . Conectaremos los subproblemas por el origen de tiempos, ya que esto nos garantiza que no vamos a agregar complejidad al problema generado [2].

En la segunda fase generamos las distribuciones de posibilidad de cada arco. En este proceso podemos diferenciar varias etapas. La primera consiste en ver el mecanismo para fijar el número de distribuciones de posibilidad de cada arco. El generador puede trabajar de tres modos, controlados por p y d . Con un valor de p entre 1 y 100, todas las restricciones generadas tendrán ese mismo número de distribuciones de posibilidad. Si $p = 0$, el número de distribuciones de posibilidad obedecerá a un patrón, que depende de d . Si $d = 0$, d_2 especifica la probabilidad de que una restricción tenga el Número de distribuciones especificado (d_1). Si $d = 1$, d_2 especifica un número fijo de restricciones con d_1 distribuciones. Pueden incluirse varias líneas d_1, d_2 .

En la segunda etapa se asigna un número de distribuciones de posibilidad a cada restricción, fijo para todas las restricciones, generando un número aleatorio o de forma cíclica. La tercera etapa consiste en generar las distribuciones de posibilidad de cada restricción. Primero se generan de forma aleatoria las posiciones de las distribuciones dentro del rango de valores permitidos, a partir de la distribución de la fracción de valores no permitidos, y por último se calculan los valores de los parámetros de cada distribución y se escribe el resultado en el archivo de salida.

4 Delimitación de la evaluación

Una vez preparado el entorno de generación e implementados los algoritmos, necesitamos definir el ámbito de la evaluación. Para ello, tendremos en cuenta la influencia de las diferentes propiedades de los problemas sobre la complejidad de su resolución, y elegiremos el conjunto de combinaciones de parámetros a utilizar para realizar la evaluación de las distintas técnicas. Los parámetros usados son n (número de variables), R (rango de las restricciones), p (número de distribuciones de posibilidad por restricción), q (conectividad), T (amplitud o *tightness*) y F (imprecisión). Los problemas se han generado con el mismo número de distribuciones de posibilidad en todas sus restricciones. La tabla 1 muestra los valores seleccionados para los parámetros de la batería de experimentos.

Tabla 1: Parámetros seleccionados para la evaluación.

Parámetro	Valores
n	4-40
R	(0,600)
p	1,2,4,8,16,32
q	10,30,50
T	0.1,0.5,0.9
F	0.1

n va de 4 a 40 variables, porque deseamos ver la evolución del comportamiento de las técnicas desde problemas muy pequeños hasta problemas relativamente grandes.

R tiene un valor fijo de 0 a 600, suficiente para encajar el valor máximo de p con el que vamos a trabajar (32), y debido a la naturaleza continua del modelo (frente a los modelos de CSPs discretos), no parece necesario probar con valores diferentes.

p va desde 1 (problemas no disyuntivos) hasta 32 (problemas fuertemente disyuntivos).

Para q utilizaremos tres niveles, desde el 10% al 50%, suficientes para crear grafos con distintos niveles de interconexión.

Para T se plantean tres casos: pocos valores permitidos (0.1), la mitad de valores permitidos (0.5) y muchos valores permitidos (0.9). Este parámetro es fundamental para hacer que un problema sea fácil o difícil de resolver, o sea consistente o inconsistente [6], aunque no participe en las complejidades [2].

Para (F) seleccionamos el valor 0.1, que introduce un grado moderado de imprecisión. No vamos a utilizar diversos valores porque no deseamos estudiar inicialmente la influencia de la imprecisión, y no participa en las complejidades de las diversas técnicas.

El número de combinaciones de parámetros es $npqT = 37 \times 6 \times 3 \times 3 = 1998$. Para cada una de estas combinaciones, hemos generado un conjunto de 20 problemas. Esta cifra parece ser suficiente para que los resultados obtenidos sean representativos frente a todos los problemas correspondientes a su combinación de parámetros, aunque también será necesario comprobarlo. Una vez generados los problemas, los procesamos, almacenando los resultados en una base de datos. Los problemas generados y los problemas obtenidos al procesarlos se almacenan en un repositorio, para poder realizar experimentos adicionales o encadenados.

El objetivo de la evaluación es estudiar los algoritmos teóricamente interesantes para RRTBD, para ver su eficiencia y su eficacia, viendo su comportamiento frente a problemas con distintas características. Así, se podría obtener información heurística para seleccionar la técnica o combinación de técnicas a emplear para resolver un problema en función de sus características (parámetros del modelo y topología).

Concretamente, vamos evaluar el coste y la eficacia de varios algoritmos de preproceso como herramientas para la eliminación de valores que no contribuyen a soluciones. Respecto al cálculo de soluciones, también necesitamos evaluar la utilidad de la descomposición en árbol como técnica alternativa para calcular soluciones en redes camino-consistentes. Todos estos procesos deben realizarse con todas las distintas combinaciones de parámetros, intentando ver la influencia de cada uno de ellos.

Para alcanzar estos objetivos generales, se ha realizado esta serie de experimentos sobre la batería de problemas generados:

1. Aplicar cuatro algoritmos de preproceso, para ver su coste y pasar los resultados obtenidos a otros algoritmos: DPC, PC2, SPC y ULT.
2. Aplicar el algoritmo de descomposición en árbol, TD [10], a los problemas resultantes de aplicar el algoritmo PC2, viendo su capacidad para obtener solu-

ciones.

3. Calcular la reducción de los problemas efectuada por los algoritmos de preproceso sobre los resultados del experimento 1.

Tras la fase 2, se realizó un proceso de validación, repitiendo los experimentos para 4, 6 ... 40 variables. La diferencia en el número de problemas descomponibles en árbol fue de un 0,3%, y la diferencia en tiempo de ejecución de algoritmos de preproceso de un 2,6%, resultados que respaldan la corrección del diseño experimental propuesto.

5 Resultados de la evaluación

En esta sección se presentan gráficamente algunos resultados de la evaluación del preproceso, mostrando los resultados medios obtenidos para los distintos conjuntos de problemas y parámetros del modelo. Los primeros resultados de la evaluación de la descomposición en árbol pueden verse en [1].

En general, el algoritmo ULT resulta el más rápido con diferencia, al ser inmune al carácter exponencial de los algoritmos de camino-consistencia. La Figura 1 representa los tiempos medios de ejecución de los algoritmos para cada tamaño de problema, todas las combinaciones de conectividad, amplitud y distribuciones de posibilidad. Podemos ver claramente la influencia del tamaño del problema, y se manifiesta la complejidad exponencial de PC2.

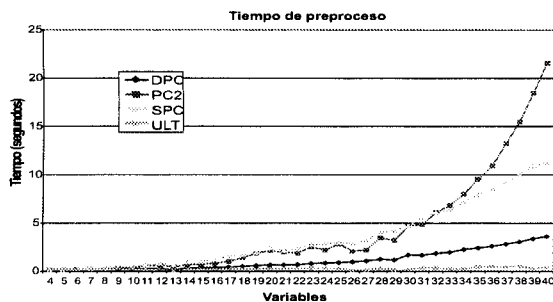


Figura 1: Tiempo de preproceso en función del número de variables.

Para ver la influencia de los restantes parámetros, podemos representar los tiempos medios en función del número de distribuciones de posibilidad por restricción, de la amplitud y de la conectividad.

En la Figura 2 observamos que para un número muy elevado de disyunciones, el comportamiento de SPC es peor que el de PC2 mientras que ULT y DPC siguen la misma tendencia que en la Figura 1. Debemos indicar que SPC ejecuta un número predeterminado de pasos sobre todo el problema, mientras que PC2 se ejecuta

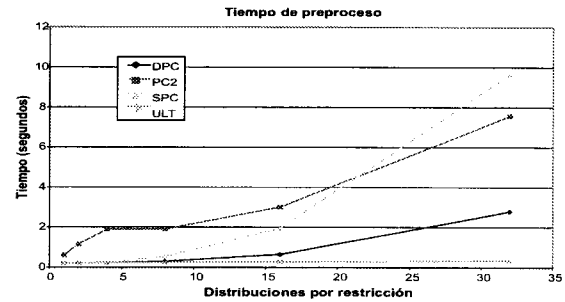


Figura 2: Tiempo de preproceso en función del número de distribuciones de posibilidad por restricción.

mientras haya modificaciones. No hay oscilaciones en las curvas, puede que por tener menos puntos.

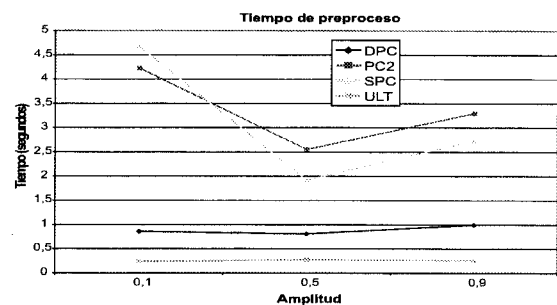


Figura 3: Tiempo de preproceso en función de la amplitud de las restricciones.

En la Figura 3, podemos ver que cuando la amplitud es pequeña (problemas más difíciles), los tiempos son más elevados, presentando el valor mínimo cuando la amplitud vale 0.5, y volviendo a incrementarse para valores de 0.9 (problemas teóricamente más fáciles), excepto en el caso de ULT, que apenas varía, y presenta el tiempo máximo para $T=0.5$. Aquí, PC2 presenta un mayor coste, excepto cuando la amplitud es pequeña.

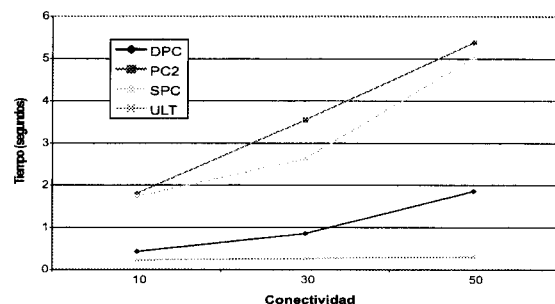


Figura 4: Tiempo de preproceso en función de la conectividad del problema.

En el caso de la conectividad, la Figura 4 muestra que todos los algoritmos presentan tiempos mayores al aumentar la conectividad. En el caso de PC2 y

ULT, esta tendencia es lineal, mientras que SPC y DPC presentan una tendencia polinomial respecto a la conectividad. Lo más significativo es que el orden de los algoritmos es el mismo para los valores estudiados, aunque SPC parece tender a presentar un coste superior a PC2 para valores de conectividad superiores a los estudiados.

La Figura 5 muestra la fracción de eliminación de valores realizada por los algoritmos de preproceso en función del tamaño del problema. La menor reducción corresponde al algoritmo DPC, y los tres restantes realizan reducciones similares, siendo siempre superior el algoritmo PC2. Al incrementar el número de variables aumenta la reducción efectuada por los algoritmos de preproceso.

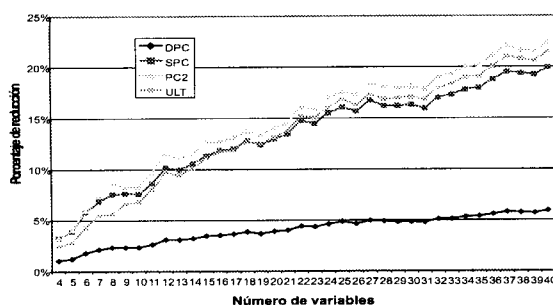


Figura 5: Capacidad de reducción de los algoritmos de preproceso en función del número de variables.

6 Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo hemos definido e implementado un procedimiento de generación de problemas aleatorios para la evaluación de técnicas de gestión de RRTBD, delimitando y ejecutando varios experimentos, centrados en el preproceso. Hemos verificado el diseño del experimento, y mostrado algunos resultados obtenidos. El algoritmo de preproceso más eficiente es con diferencia ULT, siendo algo menos eficaz que PC2. Los algoritmos de preproceso reducen los dominios de los problemas en función del tamaño de los mismos.

Como trabajos futuros sobre preproceso, tenemos la realización de experimentos adicionales para detección de inconsistencia y la reducción del coste del retroceso. También podemos abordar otras técnicas basadas en topología de grafos (como CNS [5]), y hacer un estudio detallado de la influencia de los distintos parámetros.

En evaluaciones posteriores, podrían estudiarse problemas con distintos números de distribuciones de posibilidad en sus restricciones o topologías concretas, para adaptar el proceso a las características de un dominio de aplicación particular. La generación basada en topología requeriría ampliar la funcionalidad del

generador. También podemos plantearnos comprobar si el modelo RRTBD presenta una transición de fase entre problemas fáciles y difíciles de resolver [6].

La información recogida en la evaluación podría inyectarse en un gestor de RRTBD, para seleccionar de forma dinámica las técnicas más adecuadas para resolver un problema, en función de sus características.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto CICYT-FEDER 1FD97-0255-C03-01.

Referencias

- [1] A. Bosch, M. Torres, I. Navarrete, R. Marín. Tree Decomposition of Disjunctive Fuzzy Temporal Constraint Networks. *FLA2001*, Bangor (UK), #1714-066, 7 Pág., 2001.
- [2] A. Bosch, M. Torres, R. Marín. Reasoning with Disjunctive Fuzzy Temporal Constraint Networks. *TIME-2002*, Manchester (UK), 8 Pág., 2002 (aceptado y pendiente de publicación).
- [3] R. Dechter, I. Meiri, J. Pearl. Temporal constraint networks. *Artificial Intelligence* 49, Pág. 61-95, 1991.
- [4] R. Dechter, J. Pearl. Network-based heuristics for constraint-satisfaction problems. *Artificial Intelligence*, 34, Pág. 1-38, 1987.
- [5] S. Even. Graph Algorithms. Computer Science Press, Rockville, MD (1979)
- [6] T. Hogg, B. A. Huberman, C. P. Williams. Phase transitions and the search problem. *Artificial Intelligence*, 81, Pág. 1-15, 1996.
- [7] A. Mackworth. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence* 8, Pág. 99-118, 1977.
- [8] R. Marín, M. Cardenas, M. Balsa, J. Sanchez. Obtaining solutions in fuzzy constraint networks. *Int. Journal of Approximate Reasoning*, 16, Pág. 261-288, 1997.
- [9] U. Montanari. Networks of constraints: fundamental properties and applications to picture processing. *Inf. Sci.*, 7, Pág. 95-132, 1974.
- [10] I. Navarrete, R. Marín, M. Balsa. Redes de Restricciones Temporales Disyuntivas Borrosas. *ES-TYLF'95*, Murcia, Pág. 57-63, 1995.
- [11] E. Schwalb, R. Dechter. Processing Disjunctions in Temporal Constraint Networks. *Artificial Intelligence*, 93 Pág. 29-61, 1997.

- [12] E. Schwalb, L. Vila. Temporal Constraints: A Survey. *Constraints* 3(2/3) Pág. 129-149, 1998.

Un Prototipo de Sistema de Gestión de Información Temporal Borrosa

A. Bosch, C. Martínez, F. Guil

Dpto. Lenguajes y Computación

Universidad de Almería

04120 La Cañada (Almería)

e-mail: {abosch, cmcruz, fguil}@ual.es

R. Marín

Dpto. Ingeniería de la Información y las Comunicaciones

Universidad de Murcia

30071-Espinardo (Murcia)

e-mail: roque@dif.um.es

Resumen

Presentamos un gestor de Redes de restricciones temporales borrosas disyuntivas (RRTBD) que permite realizar las tareas básicas de razonamiento mediante diferentes técnicas, aplicándolo al dominio fitosanitario.

1 Introducción

Este trabajo refleja el diseño y la implementación de la arquitectura de un sistema de gestión global de información temporal, representada mediante redes de restricciones temporales borrosas disyuntivas (RRTBD) [?] que permite abordar las tareas básicas de obtención de relaciones mínimas y obtención de soluciones. La arquitectura permite definir el núcleo de un especialista temporal, de propósito general. Como antecedentes podemos citar a LaTeR [?], sistema gestor de información temporal de propósito general, que no maneja disyunciones y tiene una potencia expresiva equivalente al modelo STP [?]; la propuesta de Van Beek [?], implementada sobre el Algebra de Intervalos que no maneja restricciones métricas entre puntos y en [?] se plantea un SBC que maneja información temporal, TCLIPS, desarrollado sobre CLIPS.

La principal característica distintiva del sistema gestor planteado es la incorporación de conocimiento heurístico para elegir la técnica disponible más adecuada para cada operación, intentando paliar la complejidad exponencial del modelo. Las operaciones fundamentales son la aserción y retractación de información temporal, la comprobación de la consistencia y la generación y comprobación de soluciones del problema.

2 Prototipo del sistema gestor de RRTBD

Se ha desarrollado un prototipo de sistema gestor de RRTBD llamado *Restric*, en Visual C++. La red se

guarda en una base de datos implementada, en forma de objetos de las clases Red, Evento, Restricción y Distribución. Cada evento guarda su descripción textual y su número de variable temporal asociada. Cada objeto Restricción se relaciona con dos objetos Evento (Origen y Destino), y contiene las descripciones textuales y las distribuciones de posibilidad de cada una de las disyunciones que puede contener (ver figura 1).

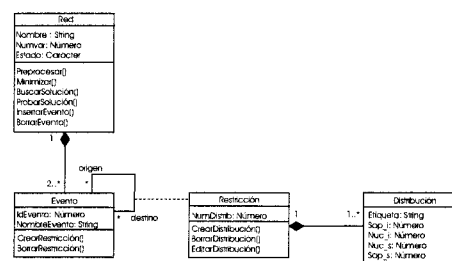


Figura 1: Diagrama de clases UML de la base de datos de eventos y restricciones

Restric permite que el usuario seleccione un conjunto de técnicas para preproceso, minimización y obtención de soluciones, o bien seleccione el modo de funcionamiento automático, en el que el sistema aplica las reglas heurísticas para seleccionar la técnica más adecuada en cada caso.

Los algoritmos de preproceso incluidos son: Camino-consistencia direccional (DPC), Camino-consistencia (PC2), Camino-consistencia en un paso (SPC) y Reducción por envoltente (ULT). Los algoritmos de minimización incluidos son: Algoritmo de retroceso (BT) y Descomposición en componentes no separables (CNS). Los algoritmos de búsqueda de soluciones son: Algoritmo de retroceso (BT) y Algoritmo de descomposición en árbol (TD).

La aplicación permite introducir eventos, restricciones y ejecutar tareas. La figura 2 muestra la ventana para definir expresiones textuales y las distribuciones de posibilidad.

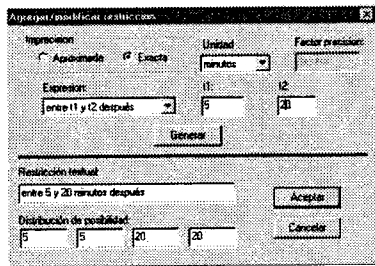


Figura 2: Ventana para editar una restricción.

La distribución puede generarse de forma exacta o aproximada (borrosa). Las expresiones contempladas son *antes*, *t1 antes*, *después*, *t1 después*, *al mismo tiempo*, *entre t1 y t2 antes*, *entre t1 y t2 después* y *entre t1 antes y t2 después*, con una unidad de tiempo. La información será preprocesada cuando se ejecute la aserción. A continuación, se puede minimizar el problema, indicando si se ha encontrado inconsistencia al intentarlo. Sobre el resultado se puede introducir una posible solución, formada por un conjunto de valores de tiempos, uno por evento. Si la solución es correcta, se informa del grado de posibilidad de la misma; si no, se informa de la primera relación temporal que no es satisfecha por dicha solución.

El proceso de selección de técnicas implementado por el conjunto de reglas heurísticas es el siguiente: en primer lugar se comprueba si el problema tiene estructura de árbol. En caso afirmativo, no es necesario preprocesarlo ni minimizarlo [?], y para obtener la solución se aplica el algoritmo de obtención de soluciones en estructuras de árbol. En caso negativo se comprueba si tiene disyunciones. Si no tiene, se aplica el algoritmo SPC. En el caso general, hay que caracterizar el problema, extrayendo:

- número de variables
- número total de restricciones
- número de restricciones disyuntivas
- número total de disyunciones
- rango y amplitud de las restricciones
- número de componentes no separables

Este proceso de evaluación permitirá seleccionar una técnica concreta para realizar las tareas básicas: En el *preproceso* se establece un Umbral de complejidad por debajo del cual no es necesario ejecutarlo y por encima se utiliza el algoritmo ULT (aunque dependiendo de las características a veces hay otros algoritmos más aconsejables). En la *minimización* se utiliza la información obtenida en la evaluación de la descomposición en árbol y el retroceso con componentes no separables. Se estima si es viable la descomposición en árbol, y se intenta; si no es viable se considera la descomposición en componentes no separables. Como última alternativa, se recurre al algoritmo de retroceso para calcular la red mínima. Para la *obtención de solu-*

ciones se elegirá entre la descomposición en árbol y el retroceso.

La figura 3 muestra la información inicial de un ejemplo de planificación de tratamiento de control fitosanitario. La figura 4 muestra la solución propuesta.

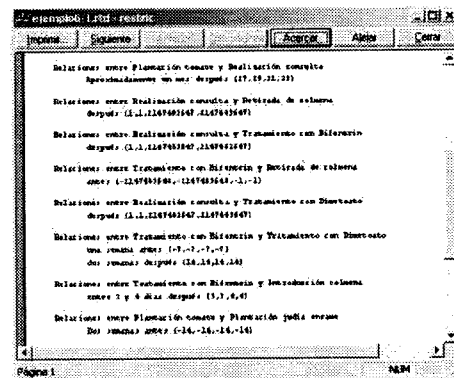


Figura 3: Información de entrada del ejemplo

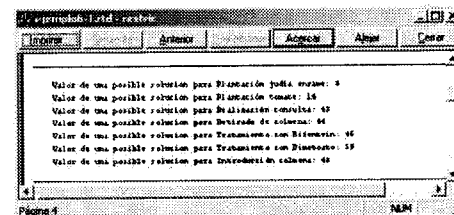


Figura 4: Resultado del ejemplo

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de los proyectos CICYT-FEDER 1FD97-0255-C03-01 y MCYT TIC2000-0873-C02-02.

Referencias

- [1] Van Beek, P. Reasoning about qualitative temporal information. *Artificial Intelligence* 58, Pág. 297-326, 1992.
- [2] A. Bosch, M. Torres, R. Marín. Reasoning with Disjunctive Fuzzy Temporal Constraint Networks. *TIME-2002*, Manchester (UK), Pág. 8, 2002 (aceptado y pendiente de publicación).
- [3] V. Brusoni, L. Console, B. Pernici, and P. Terenziani, LaTeR: a general purpose manager of temporal information, *Methodologies for intelligent systems* 8, LNCS 869, Springer, Pág. 255-264, 1994.
- [4] R. Dechter, I. Meiri, J. Pearl. Temporal constraint networks. *Artificial Intelligence* 49, Pág. 61-95, 1991.
- [5] M. Sanahuja, M. Rebollo, E. Onaindia. TCLIPS: Representación y Razonamiento Temporal en un SBC desarrollado en CLIPS, *Actas de las Jornadas de Transferencia Tecnológica de IA a Industria, Medicina y Aplicaciones Sociales*, Pág. 13-28, 1995.

FuzzyTIME (Fuzzy Temporal Information Management Engine)

M. Campos
<mcm3@alu.um.es>

A. Cárcelos
<acm3@alu.um.es>

J. Palma
<jpalma@dif.um.es>

R. Marín
<roque@dif.um.es>

Depto.Ingeniería de la Información y las Comunicaciones
Facultad de Informática. Universidad de Murcia
Campus de Espinardo. Murcia 30100

Abstract

In this work we introduce the design and implementation of a temporal reasoner that allows us to represent heterogeneous temporal information and to answer queries about that information efficiently. The architecture developed is based on a model of three levels that facilitates the translation of heterogeneous temporal expressions into a homogeneous, computationally tractable, internal representation. The model proposed offers an optimal trade off between expressive power and efficiency. In the implementation, we take into account issues related to the computational efficiency of the processes to thus maintaining the internal structure and the resolution of the queries.

Keywords: FTCN, temporal reasoning, fuzzy constraint.

1 Introduction

FuzzyTIME (Fuzzy Temporal Information Management Engine) is a module for managing temporal information which is completely independent of the domain, and it has been designed to be integrated into applications which require a temporal reasoner that is able to treat fuzzy temporal information efficiently. The scope of possible applications includes tasks like monitoring, diagnosis, planning and scheduling. As Brusoni et al. [3] indicate, there is a great divergence between the proposed solutions for managing temporal information from the perspective of artificial intelligence and the proposed solutions from the perspective of temporal databases. The former place emphasis on aspects related to inferring temporal relations by propagating temporal constraints and their computational complexity. On the other hand, the latter place emphasis on the design of a high level language for

asserting, retracting, and answering complex queries about the temporal information stored in a temporal database, as well as in the efficiency of algorithms applied to information retrieval. In addition, most of the proposed solutions from the point of view of the temporal databases only allows the manipulation of data with absolute temporal labels ("time stamps"). The first serious attempt to reconcile both perspectives is LATER [3], whose main contributions are the use of an efficient mechanism to solve queries based on local propagation of constraints [4], the capacity to combine qualitative and quantitative temporal relations defined on time points and time intervals, and the introduction of an architecture of two layers that reduces all temporal relations to constraints between points. However, LATER does not allow disjunctive queries and represents temporal imprecision by means of error ranks. The problem of combining qualitative and quantitative temporal information between points and intervals had already been studied previously from a theoretical perspective [7, 9], but the problem of asserting, retracting and answering queries about temporal information was not dealt with. [1] present a model for a temporal reasoner but doesn't deal with either the architecture or the implementation; besides, the language only admits primitive relations, while the one presented here includes convex disjunct relations.

Independently, Van Beek [10, 11] has already proposed a model to answer queries about temporal relations between points and intervals which admits disjunctive queries, but which is limited to qualitative relations and not quantitative. One of Van Beek [10] main contributions, consists of introducing a distinction between queries about possibility and queries about necessity. Both types of queries have to be answered in a different way, and this allow a wider range of nuances when formulating a question in a diversity of practical applications. In [10], this problem is solved by means of the use of classic modal operators, because only qualitative information is dealt with. LATER [3] also deals with quantitative information, but it con-

tinues to use classic modal operators of possibility and necessity. However, when introducing indefinite quantitative temporal information, it seems more advisable to apply the Possibility Theory [5] to the resolution of queries, thus extending the expressive power of the model. This is the main motivation of the work described in this article. Besides, FuzzyTIME allows the formulation of disjunctive queries, not considered in LATER. Additionally, FuzzyTIME copes with the problem of temporal granularity and its projection on possibility distributions. Throughout this article, we will use a classic example [9] to illustrate the features of our approach. The example has been slightly modified to reflect the extended expressive capacity of FuzzyTIME.

Example 1. John and Fred work in the main office of a company. Usually, it takes John less than 20 minutes to get to work, while it takes Fred approximately 15 minutes. John left home approximately at 7:10 a.m. Fred get to work about 7:45 a.m. We also know that Fred and John met at a traffic light on their way to work.

In this example the following temporal entities are presented: a time origin P_0 ; the points P_1 y P_2 in which John and Fred left home, respectively; and the points P_3 y P_4 in which John and Fred arrived at work. The time they take to get to work is given by the intervals $[P_1, P_2]$ y $[P_3, P_4]$, respectively. The last sentence in the example forces the two intervals to overlap. Therefore, the example includes indefinite quantitative and qualitative temporal information.

In the rest of the article, we describe the architecture of FuzzyTIME and the underlying temporal model in detail. In section 2 there is a summarized description of the FTCN model that composes the basic layer of the system. In section 3 we introduce the architecture of the complete system and temporal relations that are contemplated. The two first levels, the temporal world and FTCN levels, are also described. In section 4 the different types of queries allowed in the model appear, as well as how they are solved. This article finishes with the conclusions, the future work and on going work.

2 Temporal Framework

We consider time as being projected on a one-dimensional discrete axis $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ [1]. Thus, given an i belonging to the set of natural numbers $\mathbb{N}$, t_i represents a *precise instant*. We assume that t_0 represents the temporal origin, before which the existence of any fact is not relevant for the problem under

consideration. We consider a total order relation between the precise instants ($t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$), and a uniform distance between them, in such a way that for every $i \in \mathbb{N}$, $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, where Δt is a constant. Thus t_i represents a distance $i \times \Delta t$ to the time origin t_0 . Δt represents the *discretization factor*.

In [1, 8] a *Fuzzy Temporal Constraint Network* (FTCN) is introduced, and a complete language is defined that allows the generation of binary temporal constraints by applying arithmetic operators to linguistic expressions. We now will briefly describe this model.

Let T_i be a temporal variable, that is, a variable representing an unknown instant belonging to τ . If no constraints were defined, any precise time point $t \in \tau$ could be assigned to T_i . Let $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_n\}$, where we will suppose that T_0 is a temporal variable representing the time origin t_0 . For simplicity, we will assume that $t_0 = 0$.

A binary constraint L_{ij} on two temporal variables T_i and T_j is defined by means of a normalised and unimodal possibility distribution $\pi_{L_{ij}}$, whose discourse universe is $\mathbb{Z}$, and it restricts the possible values of the time elapsed between both temporal variables. In the absence of other constraints, the assignments $T_i = t_i$ and $T_j = t_j$ are possible if $\pi_{L_{ij}}(t_j - t_i) > 0$ is satisfied.

A *Fuzzy Temporal Constraint Network* (FTCN) is a pair $\mathcal{N} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{L} \rangle$ consisting of a finite set of temporal variables, $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_n\}$, and a finite set of binary temporal constraints, $\mathcal{L} = \{L_{ij}, 0 \leq i, j \leq n\}$ defined on the variables of $\mathcal{T}$. A FTCN can be represented by means of a directed constraint graph where nodes represent temporal variables and arcs represent binary temporal constraints.

A n -tuple $S = (t_1, \dots, t_n) \in \tau^n$ is a σ -possible solution of a FTCN network $\mathcal{N}$ if $\pi^{S_{\mathcal{N}}} = \sigma$, where $\pi^{S_{\mathcal{N}}} = \min\{\pi_{L_{ij}}(t_j - t_i), 0 \leq i, j \leq n\}$. The possibility distribution $\pi^{S_{\mathcal{N}}}$ defines the fuzzy set $S_{\mathcal{N}}$ of the σ -possible solutions of the network, with $\sigma \geq 0$. A FTCN network $\mathcal{N}$ is *consistent* if and only if $S_{\mathcal{N}}$ is normalised.

Although there is no need to insert an explicit relation between all variables, they can be obtained by propagating the rest of well-known constraints. An algorithm that combines all constraints exhaustively is applied to achieve that target; in this way, the side effect of the increase of the imprecision is avoided. The algorithm generates all minimal constraints, that are those that contains the smallest degree of imprecision. The method for constraint propagation is the fuzzy composition operator. The result of this process is a minimal network that makes explicit all the implicit constraints in the network. There exist efficient algo-

rithms for that type of structure [6, 11].

3 General structure

3.1 Software architecture

The architecture of the temporal reasoner FuzzyTIME (Fuzzy Temporal Information Management Engine) can be described from a horizontal and a vertical perspective (Figure 1). The former distinguishes the modules that provide the user with the system functionalities : a) explicit assertion and retraction of temporal relations and entities, thus keeping the temporal data consistent; b) resolution of complex queries about the temporal information available. From a vertical perspective, we distinguish three levels of abstraction in the reasoner. This three level architecture is motivated by the need to provide a high level language to update and query temporal information with efficient temporal model and algorithms. Two different processes are required to make it possible: a) a process to translate high level expressions into intermediate representations, providing a wide range of temporal relations and entities; and b) another process to translate this intermediate representation into the low level FTCN (Fuzzy Temporal Constraint Network) formalism, which provides an efficient framework to manage temporal information. Therefore, the upper layer (the translator in Figure 1) corresponds to the user interface, where a translator transforms the expressions introduced by the user into temporal relations between temporal entities (points and intervals). As a result, qualitative (point-to-point, point-to-interval, interval-to-point and interval-to-interval) and quantitative (definite or fuzzy metric point-to-point relations) temporal relations are obtained, the computational representation of which is stored in the intermediate layer, i.e. the temporal world in Figure 1. It is in this level, where the semantics of the user's expressions is analyzed and, if correct, stored, thus making possible to retract temporal relations in the future.

The bottom layer is based on the FTCN model. As can be deduced from section 2, this model only manages fuzzy metric relations between points. This representation allows the use of efficient algorithms developed explicitly for this type of constraint network [6, 11].

3.2 Language of Temporal Expressions

In the upper layer, the linguistic expressions introduced by the user are processed. The language of temporal expressions allows the user to define **temporal statements** and **temporal relations**.

A **temporal statement**, like "John works" or "John commutes", represents the occurrence of an event

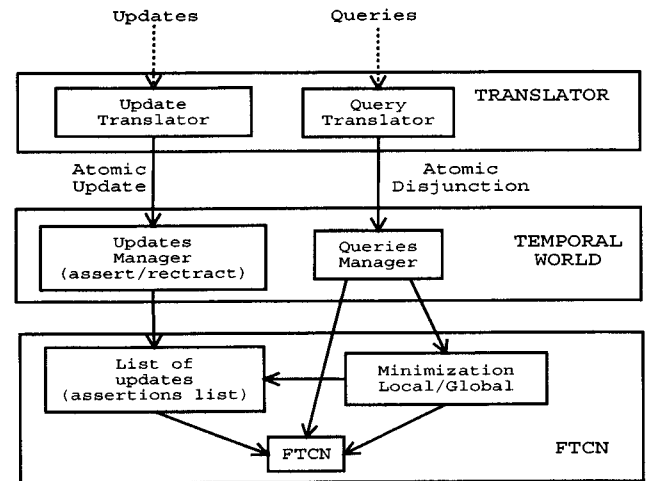


Figure 1: General structure.

(John arrives at work) at a specific moment (the instant in which he arrives at work) or the persistence of a state ("John going to work") during a time interval (the interval elapsed between his leaving of the house and his arrival at work). Therefore, there are two possible implicit temporal entities in the temporal statement: time intervals and points, where an interval is considered to be an ordered pair of points. A **temporal relation** represents a correspondence among the temporal entities implicit in the temporal statement. For example, the expression "John_home APPROX 15 John_work" indicates that the moment in which John leaves home occurs approximately 15 minutes before the moment in which he arrives at work.

The type of temporal entity implicit in a temporal statement (point or interval) is identified in the upper layer by means of the syntactic analysis of the whole expression. On the other hand, the temporal relation implicit in every interval is also identified, which is a basic qualitative relation indicating that the beginning of the interval occurs before the ending of the interval.

A wide range of qualitative and quantitative temporal relations between temporal entities are allowed in the high level language. The user is able to establish explicitly a number of qualitative and quantitative temporal relations among the temporal entities. There are five kinds of basic relations [8, 7, 9, 10, 12]:

- Qualitative interval-interval relations (QII): It is a set of 13 feasible relations consisting of: BEFORE, MEETS, STARTS, DURING, FINISHES, OVERLAPS, their inverses and the equality relation EQUAL.
- Qualitative point-interval relations (QPI): BEFORE, STARTS, DURING, FINISHES and AFTER.

- Qualitative interval-point relations(QIP): The inverses of the previous relations.
- Qualitative point-point relations (QPP): AFTER, BEFORE and EQUAL.
- Metrics point-point relation (MPP): Express the distance between two points in a indefinite quantitative way.

Besides previous basic relations, all convex disjunctions of relations are admitted. The disjunctions can be expressed as subsets of every set of basic relations. Thus, there are seven QPP admissible relations: all the subset of the set of basic relations {AFTER, BEFORE, EQUAL}, except {AFTER, BEFORE} which is not a convex relation. In the case of QII relations, there are 181 possible convex relations [10].

As can be noticed, non-convex relations are not allowed in the high level language. This restriction limits the expressive power of temporal expressions. However, allowed convex relations provide the maximum computationally tractable expressive power. Furthermore, expressions based on convex relations have a direct mapping among the different layers. Returning to the initial example, its representation in the exterior layer would correspond to a conjunction formed by the following expressions:

Example 2.

- MPP: time_origin APPROX 10 john_home
- MPP: john_home LESS THAN 20 john_work
- MPP: time_origin APPROX 45 fred_work
- MPP: fred_home APPROX 15 fred_work
- QII: john_commute O OI S SI D DI F FI EQ fred_commute
- Additionally, as the interval [john_home, john_work] and [fred_home, fred_work] are defined, the implicit qualitative relations *john_home BEFORE john_work* and *fred_home BEFORE fred_work* are established.

3.3 Temporal World Layer

The computational representation of the temporal entities and relations referenced in the linguistic expression of the upper layer are stored in the intermediate layer, once its convexity has been verified.

All different types of convex temporal relations are decomposed moreover into more simple relations. For example, a qualitative interval-to-point relation, like "interval_A BEFORE FINISHES point_B" is translated into a conjunction of two qualitative point-to-point

relations: "beginning_interval_A BEFORE point_B" and "ending_interval_A BEFORE EQUAL point_B". This conjunction of qualitative point-to-point relations is also translated into a conjunction of metric point-to-point relations by applying a fuzzy generalization of the QUAN operator [9]. The result will be stored in the bottom layer as described in the next section.

Each temporal entity maintains a reference to the bottom level entities associated to it. This design requirement makes retraction of relations possible, since an immediate correspondence between entities of the temporal world and temporal variables of the FTCN in the bottom layer can be established.

In addition, disjunctive relations are stored like an atomic unit. For example, if the relation "interval_A BEFORE FINISHES point_B" has been previously asserted, the only thing that can be retracted is the whole relation, not a part, like "interval_A BEFORE point_B". This requirement leads to an efficient implementation since 1) only one relation is inserted but instead of the basic ones, with the consequent saving of memory; and 2) to facilitate the verification of the convexity of each relation before asserting its translation in the bottom layer.

3.4 FTCN Layer

The management of low level temporal constraints is implemented in the bottom layer. The FTCN layer only stores a graph composed of nodes (temporal variables representing time points) and fuzzy metric constraints between nodes (fuzzy number representing the temporal distance between two points). These are binary and directional constraints. A symmetric constraint is automatically created for every binary directional constraint, whose duration is the inverse of the original one. Each point or interval of the temporal world layer corresponds to one or two temporal variables, respectively, of this layer.

In this layer, the minimal network is the only physically stored network. The constraints in the minimal network represent the minimal temporal distance between the source and target nodes. The minimization algorithm is a variation of the of the classic Floyd-Warshall algorithm and consists of a fuzzy version of the path-consistency algorithm [12]. It is also in this layer where the consistency degree of queries and assertions are determined once the minimal network is obtained (see Section 1 for consistency degree definition).

Example 3. If we translate the previous example into the FTCN level, the result is the assertion of the conjunction given by the following constraints (for simplicity we omit the symmetric relations):

- The intervals: fred_home BEFORE fred_work
-> (fred_home (1,1,+∞,+∞) fred_work) and
john_home BEFORE john_work-> (john_home
(1,1,+∞,+∞) john_work)
- MPP: time_origin APPROX 10 john_home ->
(time_origin (7,8,12,13) john_home)
- MPP: time_origin APPROX 45 fred_work ->
(time_origin (42,43,47,48) fred_work)
- MPP: john_home LESS THAN 20 john_work ->
(john_home (-∞,-∞,20,20) john_work)
- MPP: fred_home APPROX 15 fred_work ->
(fred_home (12,13,17,18) fred_work)
- QII: the relation “john_commute OVER-
LAPS OVERLAPS_INVERSE STARTS
STARTS_INVERSE DURING DURING_INVERSE
FINISHES FINISHES_INVERSE EQUAL
fred_commute” is translated into four in-
dependent constraints, established from the
beginning and the end of the first interval, to the
beginning and the ending of the second interval:
 - universal constraint:
john_home (-∞,-∞,+∞,+∞) fred_home.
 - BEFORE:
john_home (1,1,+∞,+∞) fred_work.
 - AFTER:
john_work (-∞,-∞,1,1) fred_home.
 - universal constraint:
john_work (-∞,-∞,+∞,+∞) fred_work.
- The minimal net is shown in Table 1.

4 Queries

The process of answering queries is based on the Possibility Theory [5]. Therefore, there are two types of queries: queries about possibility $\Pi(F)$ and about necessity $N(F)$, where F is a formula constructed with the logical connectives (conjunction, disjunction and negation) applied to admissible temporal expressions, like those described in section 3.1.

In order to understand how these queries are solved, it is important to consider that the minimal FTCN can be seen as a logical conjunction $(e_1 R_{11} e_1 \wedge \dots \wedge e_1 R_{1n} e_n) \wedge \dots \wedge (e_n R_{n1} e_1 \wedge \dots \wedge e_n R_{nn} e_n)$, where R_{ij} is the relation between the entities e_i and e_j . This conjunction is the result of all temporal constraints that have been asserted, which were reduced to conjunctions of simple fuzzy metric constraints, as we saw in previous sections.

Taking this into account, a query about possibility, $\Pi(F)$, can be solved in the following form. First of all, the formula F is transformed into disjunctive normal

form (DNF), that is to say, $\Pi(F) = \Pi(F_1 \vee \dots \vee F_n)$, where each formula F_i is a conjunction of admissible temporal expressions, $F_i = E_i^1 \wedge \dots \wedge E_i^m$. This transformation is made in the upper layer of FuzzyTIME. Considering one of the basic axioms of the Possibility Theory, $\Pi(F) = \Pi(E_1^1 \wedge \dots \wedge E_1^m) \vee \dots \vee \Pi(E_n^1 \wedge \dots \wedge E_n^m)$, the problem is reduced to the evaluation of the possibility of every conjunction, $\Pi(E_i^1 \wedge \dots \wedge E_i^m)$. Each conjunction of temporal expressions, $F_i = E_i^1 \wedge \dots \wedge E_i^m$, is translated into the temporal world layer, and then into the FTCN layer as a conjunction of simple fuzzy metric constraints. The following step consists on an attempt to incorporate this conjunction into the FTCN, as described for assertions in section 3.3. Automatically, the minimal network is obtained and the degree of consistency of the FTCN network is returned as described in section 2. This resulting network is composed of the original conjunction $(e_1 R_{11} e_1 \wedge \dots \wedge e_1 R_{1n} e_n) \wedge \dots \wedge (e_n R_{n1} e_1 \wedge \dots \wedge e_n R_{nn} e_n)$ extended with the conjunction of constraints obtained from the query.

Queries about necessity, $N(F)$, are solved by applying another basic axiom of the Possibility Theory: $N(F) = 1 - \Pi(\neg F)$. With this, a query about necessity is reduced to a query about possibility, which is solved as previously described.

Example 4 A query like MAY((john_home APPROX 25 john_work) OR (fred_home APPROX 15 fred_work)) can be divided into two simpler questions: MAY(john_home APPROX 25 john_work) OR MAY(fred_home APPROX 15 fred_work). These relations are inserted independently in the net, establishing that the second one is compatible but that the first one is not.

5 Conclusions and future work

The main aim of this work was the design, development and implementation of FuzzyTIME, a temporal reasoner which is completely independent of the domain, and which is prepared to be integrated in any application that requires the management of fuzzy temporal information. FuzzyTIME provides a general framework for the representation and management of qualitative or quantitative, precise or imprecise, temporal relations between points or intervals. FuzzyTIME is based on a three layer architecture which provides a high-level of abstraction to write complex temporal expressions, but simultaneously, these complex expressions are internally reduced to simpler fuzzy metric constraints between points. Among the main contributions we underline the following. First of all, we have achieved an optimal trade off between efficiency and expressivity. In assertions, expressivity is limited to convex temporal relations, but we get

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
P_0	(0,0,0,0)	(7,8,12,13)	(25,27,32,33)	(24,26,31,32)	(42,43,47,48)
P_1	(-13,-12,-8,-7)	(0,0,0,0)	(12,15,20,20)	(11,14,19,19)	(29,31,36,37)
P_2	(-33,-32,-27,-25)	(-20,-20,-15,-12)	(0,0,0,0)	(-9,-6,-1,-1)	(9,11,16,17)
P_3	(-32,-31,-26,-24)	(-22,-21,-19,-16)	(1,1,6,9)	(0,0,0,0)	(12,13,17,18)
P_4	(-48,-47,-43,-42)	(-37,-36,-31,-29)	(-17,-16,-11,-9)	(-18,-17,-13,-12)	(0,0,0,0)

Table 1: Minimal network of the example.

the maximum expressive power by propagating computationally tractable relations. In those situations, in which more expressivity is required (at the expense of efficiency), RESTRIC [2] is a better choice.

Furthermore, FuzzyTIME is able to answer any type of temporal query that can be translated into a disjunctive normal form, unlike other temporal reasoners, like LATER [3], which manage qualitative and quantitative information but only admit conjunctive queries. Thus we can say that FuzzyTIME is more expressive and includes the language of LATER. Although this capacity is already found in the model proposed by Van Beek [10], this model only works with qualitative relations, whereas the model proposed here admits fuzzy or non fuzzy metric relations. On the other hand, in [3] and [10], queries only admit classic modal operators of possibility and necessity that provide a boolean answer. Computational complexity for answering queries is similar to the one obtained in [3], $O(n^3)$ since local propagation of constraints is also included in the implementation. Another strong point of FuzzyTIME is its capacity to retract temporal assertions, which extends its spectrum of possible applications to multiple domains and tasks.

The implementation has been made in Java. In the present state, this is a prototype that represents the fuzzy constraint computationally by means of normalized trapezoidal distributions, but the generalization to non-normalized distributions is in course. At the moment, FuzzyTIME only accepts queries that are already in DNF.

Acknowledgements

This work was supported by the Spanish Science and Technology Office under project number TIC2000-0873-C02-02.

References

- [1] S. Barro, R. Marín, R. Mira, and J. Patón. A model and a language for the fuzzy representation and handling of time. *Fuzzy Sets and Systems*, 61:153–175, 1994.
- [2] A. Bosch, M. Torres, I. Navarrete, and R. Marín. Tree decomposition on disjunctive fuzzy temporal constraint networks. In *International ICSC Congress on Computational Intelligence: Methods and Applications (CIMA'2001)*, 2001.
- [3] V. Brusoni, L. Console, and P. Terenziani. Efficient query answering in LaTeR. In *TIME-95 International Workshop on Temporal Representation and Reasoning*, pages 121–128, 1995.
- [4] V. Brusoni, L. Console, and P. Terenziani. On the computational complexity of querying bounds on differences constraints. *Artificial Intelligence*, 74(2):367–379, apr 1995.
- [5] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. *Possibilistic Logic*, in: *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. 3. D.M. Gabbay, C.J. Hogger and J.A. Robinson, 1994.
- [6] A. Gerevini and L.K. Schubert. Efficient algorithms for qualitative reasoning about time. *Artificial Intelligence*, 74(2):207–248, apr 1995.
- [7] H. Kautz and P. Ladkin. Integrating metric and qualitative temporal reasoning. In *AAAI-91*, pages 241–246, 1991.
- [8] R. Marín, S. Barro, F. Palacios, R. Ruiz, and F. Martín. An approach to fuzzy temporal reasoning in medicine. *Mathware & soft Computing*, 3:265–276, 1994.
- [9] I. Meiri. Combining qualitative and quantitative constraints in temporal reasoning. *Artificial Intelligence*, 87(1-2):343–385, 1996.
- [10] P. van Beek. Temporal query processing with indefinite information. In *Artificial Intelligence in Medicine*, volume 3, pages 325–339, 1991.
- [11] P. van Beek and D. Manchak. The design and experimental analysis of algorithms for temporal reasoning. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 4:1–18, 1996.
- [12] L. Vila and L. Godo. On fuzzy temporal constraint networks. In *Mathware and Soft Computing*, volume 3, pages 315–334, 1994.

Sesión

A3

Fundamentos teóricos (I)

Theoretical foundations (I)

BINARY KERNEL AGGREGATION OPERATORS

E. MUEL

Dpt. of Computer Science,
University of Alcalá,
E-28871 Alcalá de Henares, Spain
enriqueta.muel@uah.es

J. MORDELOVÁ

Dpt. of Mathematics, SvF,
Slovak University of Technology,
Radlinského 11,
81368 Bratislava, Slovakia

A. KOLESÁROVÁ

Dpt. of Mathematics, FChFT,
Slovak University of Technology,
Radlinského 9,
81237 Bratislava, Slovakia
kolesaro@cvt.stuba.sk

Abstract

Several types of constructions of binary kernel aggregations operators are given. The uniqueness of such operators with some prescribed marginal values is studied, stressing the role of shift invariant operators and k-medians.

Key words: aggregation operator, shift invariantness, stability.

1 INTRODUCTION

The study of stability of aggregation operators under input errors [3] has lead to the introduction of so called kernel aggregation operators. These operators naturally occurs also when fuzzy measures are extended to aggregation operators by means of Möebius transform [4, 12] (recall that starting from *min* operator, resulting extension is just the Choquet integral), by the study of shift invariant aggregation operators [10], etc. The aim of this paper is a continuation of the study of kernel aggregation operators started in [8, 9, 13]. We will deal here with binary operators only. Note that each such binary operator can be extended to n-ary operation in different manners, still keeping the kernel property (i.e., maximal stability).

Definition 1 A binary operator $K : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ is called a kernel aggregation operator whenever it is non-decreasing, $K(0, 0) = 0$, $K(1, 1) = 1$ and

for all $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, 1]^2$,

$$\frac{|K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2)|}{\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)} \leq 1 \quad (1)$$

Recall that each kernel aggregation operator K is necessarily continuous and idempotent, i.e., $K(x, x) = x$ for all $x \in [0, 1]$.

Recall some distinguished classes of kernel aggregation operators:

- Choquet integrals, including weighted means and OWA operators [4, 12, 16]
- Sugeno integrals, including *max-min* operators [13, 14].
- k-medians [2, 5, 6].
- shift invariant operators [10].
- root-power operators with parameter $p \geq 1$.

Note also that kernel aggregation operators form a convex class closed under standard duality of aggregation operators and closed under permutation of variables.

The paper is organized as follows.

In the next section, we introduce some construction methods for kernel aggregation operators. An important role by construction of kernel aggregation operators is played by their marginal values (i.e., values on the boundary of the unit interval).

In [8] we have studied the relationship of kernel aggregation operators and their marginals. In Sections 3, 4, 5 we continue this study looking for explicit determination of a kernel aggregation operator from its marginals or from some part of them, including the construction of relevant (unique) operator K .

In Section 3, we study kernel aggregation operator when only the value in point $(0, 1)$ (respectively $(1, 0)$) is known. In Section 4, we expect that values on lower boundaries of the unit square are known, while in section 5, we know the values on entire boundary of $[0, 1]^2$.

Finally, some conclusions are given. Full proofs and more details can be found in [9].

2 SOME CONSTRUCTION METHODS FOR KERNEL AGGREGATION OPERATORS

Proposition 1 Let L_1, L_2 be two kernel aggregation operators, a, b two real constants and $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a non-decreasing idempotent operator fulfilling the kernel property (1) such that $H(a, b) = 0$ and $H(a+1, b+1) = 1$.

Then the operator $K_{a,b}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ given by

$$K_{a,b}(x, y) = H(L_1(x, y) + a, L_2(x, y) + b)$$

is a kernel aggregation operator. ■

Example 1

(i) Let $H = \min$ and $a \leq b$. Then to apply Proposition 1, necessarily $a = 0$ and $b \geq 0$, i. e., for any $L_1, L_2 \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ being the set of all binary kernel aggregation operators, also $K = \min(L_1, L_2 + b) \in \mathcal{K}$, e. g.,

$$K(x, y) = \min\left(\max(x, y), \min(x, y) + \frac{1}{2}\right), \text{ which is}$$

indeed a shift invariant aggregation operator.

(ii) Let H be OWA operator with weights $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{4}$, i. e.,

$$H(x, y) = \frac{\min(x, y) + 3 \max(x, y)}{4}$$

Then, for, $a \leq b$, $H(a, b) = \frac{a+3b}{4}$ and

$$H(a+1, b+1) = 1 + \frac{a+3b}{4}, \text{ i. e., we can apply}$$

Proposition 1 whenever $a = -3b, b \geq 0$. For $b = \frac{1}{10}$

this means $a = -\frac{3}{10}$ and for any $L_1, L_2 \in \mathcal{K}$ also

$$K = H\left(L_1 - \frac{3}{10}, L_2 + \frac{1}{10}\right) =$$

$$\frac{\min\left(L_1 - \frac{3}{10}, L_2 + \frac{1}{10}\right) + 3 \max\left(L_1 - \frac{3}{10}, L_2 + \frac{1}{10}\right)}{4} \in \mathcal{K}$$

Putting as before $L_1 = \max$ and $L_2 = \min$, we get a kernel aggregation operator

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{3 \min(x, y) + \max(x, y)}{4}, & \text{if } |x - y| \leq 0.4 \\ \frac{\min(x, y) + 3 \max(x, y)}{4} - \frac{1}{5}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Again K is a shift invariant aggregation operator (as far as all H, L_1, L_2 are shift invariant).

Proposition 2 Let $H, L_1, L_2 \in \mathcal{K}$, $a, b \in [0,1]$. Then the operator $P_{a,b}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ given by $P_{a,b} = H(aL_1, bL_2)$ is a kernel aggregation operator whenever $H(a, b) = 1$. ■

Observe that evidently $P_{a,b}(0,0) = H(0,0) = 0$ independently of the choice of a and b . Further, due to the idempotency of kernel aggregation operators $H(a, b) = 1$ is possible only if $\max(a, b) = 1$.

Example 2

Put $H = L_1 = \max$ and $L_2 = \min$, $a = 1/2, b = 1$. Then we can apply Proposition 2 and the operator

$$K(x, y) = \max\left(\frac{\max(x, y)}{2}, \min(x, y)\right) \in \mathcal{K},$$

$$K(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{if } 2 \min(x, y) \geq \max(x, y) \\ \frac{\max(x, y)}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Observe that K is not shift invariant. Note also that K is weighted max-min operator as discussed in [14] and that it can be obtained as Sugeno-like integral (based on the standard multiplication see [15]).

Obviously, we can combine Proposition 1 and Proposition 2.

Proposition 3 Let $L_1, L_2 \in \mathcal{K}$, $a_1, a_2 \in [0,1]$ and $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Let $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a non-decreasing idempotent operator filling the kernel property (1) such that $H(b_1, b_2) = 0$ and

$H(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = 1$. Then the operator $K: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$

given by $H(a_1 L_1 + b_1, a_2 L_2 + b_2)$ is a kernel aggregation operator. ■

Example 3 Putting $H = \min$, $a_1 = 1/2, b_1 = 0, a_2 = 2/3, b_2 = 1/3$, all requirements on H in Proposition 3 are fulfilled. Therefore the operator

$K(x, y) = \min\left(\frac{\max(x, y)}{2}, \frac{2 \min(x, y) + 1}{3}\right)$ is a kernel aggregation operator (which is not shift invariant).

3 $K(0,1)$ IS KNOWN

In [8] we have shown that any binary kernel aggregation operator $K \in \mathcal{K}$ can be expressed by means of two symmetric operators $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_s$,

$$K(x, y) = \begin{cases} K_1(x, y) & \text{if } x \leq y \\ K_2(x, y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

This observation allows to restrict all next considerations to the study of symmetric kernel aggregation operators, whose class will be denoted by $\mathcal{K}_s$.

Suppose that for an operator $K \in \mathcal{K}_s$ only the value $K(0,1) = a$ is known.

Proposition 4 Let $\mathcal{K}_a = \{K \in \mathcal{K}_S \mid K(0,1) = a\}$. Then the class $\mathcal{K}_a$ is a convex class with maximal element K^* and minimal element K_* , $\mathcal{K}_a = \{K \in \mathcal{K}_S \mid K_* \leq K \leq K^*\}$, where

$$K^*(x, y) = \min(\max(x, y), \min(x, y) + a)$$

$$K_*(x, y) = \max(\min(x, y), \max(x, y) - 1 + a)$$

Corollary 1 Let $K \in \mathcal{K}_S$ and let $K(0,1) = a$. Then K is determined univocally if and only if $a \in \{0,1\}$ and then $K \in \{min, max\}$.

4 $K(0,y) = f(y)$ IS KNOWN

Proposition 5 Let $f: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ be a non-decreasing 1-Lipschitz function with $f(0) = 0$. Then the convex class $\mathcal{K}_f = \{K \in \mathcal{K}_S \mid K(0,y) = f(y), y \in [0,1]\}$ has the minimal element $K_*(x, y) = \max(\min(x, y), f(\max(x, y)))$, and the maximal element $K_*(x, y) = \min(x, y) + f(|x - y|)$.

Example 4 Put $f: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, $f(y) = \frac{y}{2}$. Then all requirements of Proposition 5 are satisfied,

$$K_*(x, y) = \max\left(\min(x, y), \frac{\max(x, y)}{2}\right), \text{ see also Example 2.}$$

Further, $K^*(x, y) = \min(x, y) + \frac{|x - y|}{2} = \frac{x + y}{2}$, i. e., K^* is the arithmetic mean. Obviously, any convex combination $K = \lambda K_* + (1 - \lambda)K^*$, $\lambda \in [0,1]$, is contained in $\mathcal{K}_f$.

We turn again to the problem when the known values of a symmetric kernel aggregation operator K on the left-lower boundary of its domain determine K univocally, i. e., when $K_* = K^*$, or, explicitly when for all $(x, y) \in [0,1]^2$ it holds

$$\max(\min(x, y), f(\max(x, y))) = \min(x, y) + f(|x - y|) \quad (2)$$

Putting $x = 1$, (2) turn to $\max(y, f(1)) = y + f(1 - y)$, i. e., substituting $1 - y$ by u , $f(u) = \max(0, u - 1 + f(1)) = \max(0, u - b)$, where $b = 1 - f(1) \in [0,1]$.

On the other hand, as far as $\min(x, y) + |x - y| = \max(x, y)$, it is not difficult to check that f given above solves (2). Summarising, we get:

Proposition 6 $K \in \mathcal{K}_S$ and let $f(y) = K(0, y), y \in [0,1]$. Then there is no other $L \in \mathcal{K}_S$ such that $L(0, y) = f(y)$,

$y \in [0,1]$ if and only if there is $b \in [0,1]$ such that for all $y \in [0,1]$, $f(y) = \max(0, y - b)$.

In other words, K differs from the all other elements of $\mathcal{K}_S$ on the left-lower boundary of the unit square if and only if $K(x, y) = \max(\min(x, y), \max(x, y) - b)$. Note that this means that K is obtained by means of Proposition 1 from $H = L_2 = \max$ and $L_1 = \min$. Observe also that by duality, K differs from all other members of $\mathcal{K}_S$ on the upper-right boundary only if $K = \min(\max, \min + b)$, see Example 1 (i).

5 K IS KNOWN ON THE BOUNDARY OF THE UNIT SQUARE

Suppose that for an operator $K \in \mathcal{K}_S$ we know its values on the boundary of the unit square, i. e., $K(0, y) = f(y)$, $y \in [0,1]$, $K(x, 0) = g(x)$, $x \in [0,1]$, are known (due to symmetry of K , $K(y, 0) = f(y)$ and $K(1, x) = g(x)$). The next result was proved in [9].

Proposition 7 Let $f, g: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ be the marginals of some operator $K \in \mathcal{K}_S$, i. e., for all $x, y \in [0,1]$, $f(y) = K(0, y)$ and $g(x) = K(1, x)$. Then the class $\mathcal{K}_{f,g} = \{K \in \mathcal{K}_S \mid K(0, y) = f(y), K(x, 1) = g(x), x, y \in [0,1]\}$ is a convex subset of $\mathcal{K}_S$ with to weakest element K_* and the strongest element K^* , where, for all $(x, y) \in [0,1]^2$, $K_*(x, y) = \max(f(\max(x, y)), g(1 - |y - x|) - 1 + \max(x, y))$, $K^*(x, y) = \min(g(\min(x, y)), \min(x, y) + f(|y - x|))$.

Our aim is to find all operators $K \in \mathcal{K}_S$ which are univocally determined by their marginals f and g , i. e., when $K_* = K^*$, see Proposition 7. Observe that operators described in Proposition 6 necessarily solves our last problem, too.

Proposition 8 Under requirements of Proposition 7, there is unique symmetric kernel aggregation operator K with marginals f and g if and only if $f, g: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ are non-decreasing 1-Lipschitz functions, $f(0) = 0$, $f(1) = g(0) = a$, $g(1) = 1$, such that for $y_0 = \min\{y \in [0,1] \mid f(y) = a\}$ and $x_0 = \max\{x \in [0,1] \mid g(x) = a\}$ it holds: $f(y) = a + \min(y - y_0, 0)$ if $y \in [y_0 - x_0, 1]$, $g(x) = a + \max(x - x_0, 0)$ if $x \in [0, 1 - (y_0 - x_0)]$.

and if $x \in [1 - (y_0 - x_0), 1]$ then $g(x) = x + f(1 - x)$ $\square$

Proof. The sufficiency follows from [8] see the next Figure 1.

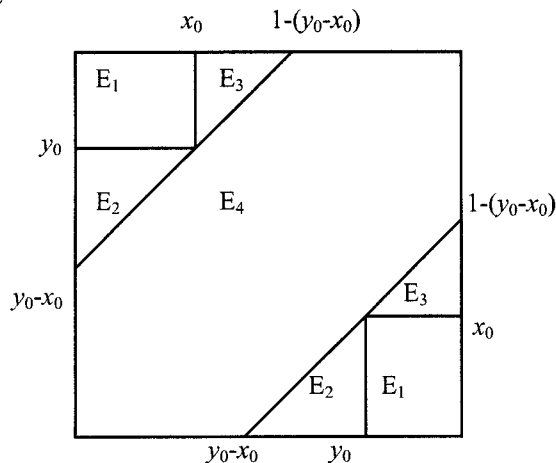


Figure 1

Subsets E_i corresponding to particular cases of unicity as discussed in [8] cover entire domain $[0,1]^2$, ensuring the unicity of our $K \in \mathcal{K}_{f,g}$.

For necessity see [9]. $\blacksquare$

Example 5 Evidently each shift invariant symmetric aggregation operator fulfils the requirements of Proposition 8 and it corresponds either to $x_0 = 0$ to $y_0 = 1$. Typical example with $x_0 = 0$ and $y_0 = 1$ corresponds to

$$f(y) = \frac{y^2}{2}, \quad g(x) = \frac{1+x^2}{2},$$

$$\text{and then } K(x, y) = \min(x, y) + \frac{(y-x)^2}{2}.$$

The other extremal case is when $x_0 = y_0 = a$, $f(y) = \min(x, y)$, $g(x) = \max(a, y)$, and $K(x, y) = \text{med}(a, x, y)$ is the a -median operator. As can be seen from Figure 1, each kernel aggregation operator $K \in \mathcal{K}_S$ univocally determined by its marginals can be seen as a combination of an a -median and of a shift invariant operator.

6 CONCLUSIONS

We have discussed how the knowledge of some values of a kernel aggregation operator K determines the entire operator K , and especially when the determination is complete. There are several related problems solved, e. g., in the area of triangular norms. So, for example, each strict t -norm T is uniquely determined by its diagonal and opposite diagonal [1, 7].

Recall that the diagonal of any kernel aggregation operator is known due to the idempotency (by t -norms,

the values on the boundary of the unit square are automatically known). For the opposite diagonal evidently $h(x) = K(x, 1-x)$, $x \in [0, 1]$ should be a 1-

Lipschitz function for which $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ (and if K is symmetric then $h(x) = h(1-x)$). Determination of kernel aggregation operators from their opposite diagonal, as well as some other problems of determining kernel aggregation operator having only a partial knowledge, will be the topic of our next investigations.

Acknowledgment

The work on this research was partially supported by the grants TIC 2000-1368-C03-01 and VEGA 1/7076/20, 1/8331/01.

References

- [1] Bézivin, J. P. & Tomás, S. "On the determinations of strict t -norms on some diagonal segments". *Aequat. Math.* 45, 1993, pp 239-245.
- [2] Calvo, T. & Mesiar, R. "Distance aggregation operators". *Proc. Eusflat-Estylf, Joint Conference, Palma de Mallorca, Spain 1999*, pp 363-365.
- [3] Calvo, T. & Mesiar, R. "Stability of aggregation operators". *Proc. of Eusflat'2001, Leicester, 2001*
- [4] Chateauneuf, A. & Jaffrey, J.Y. "Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion". *Mathematical Social Sciences* 17, 1989, pp. 263-283.
- [5] Fodor, J. "Aggregation of opinions in a non-homogeneous group". *Proc. IPMU, Paris, 1998*, pp. 832-836.
- [6] Fung, L. & Fu, K. "An axiomatic approach to rational decision-making in a fuzzy environment". In: *Fuzzy Set and their Applications to Cognitive and Decision Processes* (K. Tanaka, L. Zadeh, K. Fu & M. Shimura, eds.) Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975, pp. 227-256.
- [7] Klement, E. P., Mesiar, R. & Pap, E.: "Triangular Norms". Kluwer Academic Publishers, Trends in Logic 8, Dordrecht, 2000
- [8] Kolesárová, A., Mordelová, J. & Muel, E. "Kernel Aggregation Operator and their marginals". To appear in *Fuzzy Sets and Systems*.
- [9] Kolesárová, A., Mordelová, J. & Muel, E. "A note on the Construction of Binary Kernel Aggregation Operators". Submitted for publication.
- [10] Lázaro, J. & Růckšlossová, T. "Shift invariant binary aggregation operators". *AGOP 2001, Oviedo*, pp 77-80.

- [11] Mas, G., Mayor, G. & Torrens J. "t-operators". *Internat. J. of Uncertainty and Knowledge-Based Systems* 7, 1999, pp 31-50.
- [12] Mesiar, R. "A note to the Choquet integral". *Tatra Mountains Math. Publ.* 12, 1997, pp 241-245.
- [13] Mordelová, J. & Muel, E. "Kernel aggregation operators". *AGOP 2001, Oviedo*, pp 95-97
- [14] Ralescu, A. L. & Ralescu, R. A. "Extension of fuzzy aggregation". *Fuzzy Sets and Systems* 86, 1997, pp 321-330.
- [15] Weber, S. "Two integrals and some modified version-critical remarks". *Fuzzy Sets and Systems* 20, 1986, pp. 97-105.
- [16] Yager, R. R.: "On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking". *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* 18, 1988, pp. 183-190

FUNCIONES DE AGREGACIÓN Y EL PRINCIPIO DE MÍNIMA DESVIACIÓN

J. Martín, G. Mayor y J. Suñer

Depto. de Matemáticas e Informática

Universidad de las Islas Baleares

07071-Palma de Mallorca

{javier.martin,gmayor,jaume.sunyer}@uib.es

Resumen

En este trabajo se introduce el principio de mínima desviación para funciones de n variables sobre un conjunto con valores en el mismo conjunto. Al dotar al conjunto de inputs de diversos modelos de distancias se obtienen, al exigir la verificación del principio, funciones con propiedades y de naturaleza propia de las funciones de agregación. Especial atención se dedica al caso real y con distancias que derivan de distancias sobre $\mathbb{R}$ invariantes por traslación.

Palabras Clave: distancia, función de agregación, principio de mínima desviación

1 Introducción

Mucho se ha escrito sobre funciones de agregación, desde su definición hasta aplicaciones en campos tan notables como la toma de decisiones, síntesis de juicios, lógica borrosa, conjuntos borrosos, etc., pasando por la descripción de diferentes familias que aparecen imponiendo condiciones suplementarias a la definición. La manera usual de definir función de agregación incluye la propiedad de monotonía y condiciones de frontera. Es habitual también exigir la propiedad de idempotencia en aquellos ámbitos en que se pretenda que la agregación sea de tipo compensativo. Algunos textos recientes sobre funciones de agregación son [1], [2] y [3]. En este trabajo se hace una aproximación al estudio de las funciones de agregación desde un nuevo punto de vista: la verificación de lo que llamamos Principio de Mínima Desviación (PMD). La idea tiene su origen en otro reciente trabajo ([5]) de los mismos autores, en el que se definen las medias aritméticas sobre una cadena finita mediante una serie de condiciones que

incluyen la de exigir desviación mínima de los valores a agregar respecto del valor agregado. Al aplicar esta condición utilizando diferentes tipos de distancias, se ha conseguido ahora, por una parte, caracterizar algunas familias conocidas de funciones de agregación y, por otra, obtener nuevas familias de funciones que por su naturaleza y propiedades pueden también tener interés en el campo de la agregación. El trabajo está organizado de la forma siguiente. En la sección 2 se define el concepto de función que satisface el PMD y se presentan algunas propiedades generales de estas funciones. El caso real se analiza con cierto determinismo en la sección 3, utilizando distancias sobre $\mathbb{R}^n$ que derivan de la distancia usual sobre $\mathbb{R}$, así como del caso más general en que se toman distancias ponderadas en $\mathbb{R}$: $d(a, b) = \alpha|a - b|$ con $\alpha > 0$. En este ámbito aparecen funciones o familias de funciones fácilmente reconocibles como ejemplos de funciones de agregación. Finalmente, en la última sección, se plantea también el cálculo de funciones PMD en la situación de disponer de una distancia sobre $\mathbb{R}$ invariante por traslaciones, y con un generador suficientemente regular.

2 El Principio de Mínima Desviación

Definición 1 Sea X un conjunto cualquiera no vacío, $n \in \mathbb{N}$ y D una distancia sobre X^n . Diremos que una función $f : X^n \rightarrow X$ satisface el Principio de Mínima Desviación (PMD) (respecto de D) si, $\forall x \in X^n$,

$$D(x, f(x)) \leq D(x, t) \quad \forall t \in X$$

donde se ha identificado cada elemento $z \in X$ con la n -pla $\underline{z} = (\overbrace{z, \dots, z}^n)$. Así, tenemos $X \subset X^n$, y podemos considerar X dotado de la estructura métrica inducida por D .

Observación: Otra forma de ver la definición anterior es decir que $f : X^n \rightarrow X$ satisface el PMD si, y sólo si, para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, la función

$D_{(x_1, \dots, x_n)} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $D_{(x_1, \dots, x_n)}(t) = D(x, t)$ presenta mínimo absoluto en el punto $t = f(x_1, \dots, x_n)$.

Observemos por otra parte que la función $D_{(x_1, \dots, x_n)} : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua (uniformemente), por lo que, si X es compacto, esta función tiene mínimo absoluto (y máximo absoluto). Esto asegura, en este caso, la existencia de al menos una $f : X^n \rightarrow X$ que satisface el PMD.

Si $X \subset X^n$ no es cerrado, sea $x \in X^n \setminus X$ un punto de acumulación de X . Entonces $D(x, X) = \inf\{D(x, t) : t \in X\} = 0$ y, por tanto, $\{D(x, t) : t \in X\}$ no tiene mínimo. Así que, en estas condiciones, no existe ninguna $f : X^n \rightarrow X$ que satisfaga el PMD. Veamos un ejemplo: Sea $(\mathbb{Q}^2, D)$, donde D es la distancia euclídea. Sea $\Delta = \{(a, a) : a \in \mathbb{Q}\}$. El conjunto $\Delta \setminus \{(0, 0)\}$ no es un cerrado de $\mathbb{Q}^2$. Por otra parte, sea φ una biyección entre $\Delta \setminus \{(0, 0)\}$ y Δ , e indiquemos también por φ una extensión biyectiva de ella a $\mathbb{Q}^2$. Definimos sobre $\mathbb{Q}^2$ la distancia D' de la manera siguiente: $D'(x, y) = D(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$. Así $\varphi : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ es una isometría y, por tanto, un homeomorfismo entre $(\mathbb{Q}^2, D)$ y $(\mathbb{Q}^2, D')$. Consecuentemente $\Delta = \varphi(\Delta \setminus \{(0, 0)\})$ no es cerrado y, por tanto, no existe ninguna $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ que satisfaga el PMD (respecto de la distancia D').

En este trabajo, nos interesa especialmente el caso en que la distancia D sobre X^n está construida a partir de n distancias $d_1, \dots, d_n$ (iguales o diferentes) sobre X de una de las tres maneras siguientes:

- 1) $D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$,
- 2) $D_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i(x_i, y_i))^2}$,
- 3) $D_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$.

Veamos a continuación dos propiedades generales de las funciones que satisfacen el PMD.

Proposición 1 Si $f : X^n \rightarrow X$ satisface el PMD, entonces es idempotente.

Demostración:

Dado $(a, \dots, a) \in X^n$, $D_{(a, \dots, a)}$ presenta un mínimo absoluto (igual a 0) únicamente en el punto $t = a$ y, por tanto, $f(a, \dots, a) = a$. $\diamond$

Definición 2 Diremos que una distancia D sobre X^n es invariante por permutaciones si $D(x, y) = D(\pi(x), \pi(y))$ para toda permutación $\pi \in S_n$ donde, si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\pi(x) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$.

Ejemplos de este tipo de distancias son D_1, D_2 y D_3 en el caso que $d_1 = \dots = d_n$. Cuando no haya igualdad entre las n distancias sobre X , las D_i no son invariantes por permutaciones.

Proposición 2 Sea D una distancia invariante por permutaciones. Si $f : X^n \rightarrow X$ es la única función que satisface el PMD con respecto a la distancia D , entonces f es simétrica.

Demostración:

Supongamos que $f : X^n \rightarrow X$ es la única función que satisface el PMD y sea $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$. Entonces $D_{(x_1, \dots, x_n)}$ alcanza su valor mínimo absoluto sólo en el punto $f(x_1, \dots, x_n)$. Por otra parte, dada cualquier permutación $\pi \in S_n$, será $D_{(x_1, \dots, x_n)} = D_{(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})}$, por lo que $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ y f es simétrica. $\diamond$

Observación: Este resultado es cierto, por tanto, para las distancias D_1, D_2 y D_3 cuando $d_1 = \dots = d_n$.

Por otra parte, el recíproco no es cierto: En efecto, si $f : X^n \rightarrow X$ satisface el PMD y es simétrica, no tiene por que ser la única función entre X^n y X que satisface el PMD.

En el caso $X = \mathbb{R}$, supongamos que D satisface la condición "razonable" siguiente: Dados $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D(x, y) &\leq D(x, \min x_i) \implies \min x_i \leq y \leq \max x_i \\ D(x, y) &\leq D(x, \max x_i) \end{aligned}$$

Esta propiedad la cumplen todas las distancias que se deducen de $d_i(a, b) = \alpha_i |a - b|$, $\alpha_i > 0$, $i : 1, \dots, n$. Por otra parte, la distancia discreta es un ejemplo de distancia que no satisface esta condición. En estas condiciones, si $f : X^n \rightarrow X$ satisface el PMD, entonces $\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq \max\{x_1, \dots, x_n\} \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Estas funciones suelen llamarse de tipo compensativo.

Un caso interesante es cuando $d_1 = \dots = d_n$ es la distancia discreta, es decir, $d(a, b) = 1 \iff a \neq b$. En este caso tenemos las distancias siguientes:

- 1) $D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$
(distancia de Hamming)
- 2) $D_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (d(x_i, y_i))^2} = \sqrt{|\{i : x_i \neq y_i\}|}$,
- 3) $D_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i) = 1 \iff x \neq y$
(distancia discreta sobre X^n)

A efecto de simplificar la notación, cuando se trate de distancias D_1, D_2, D_3 , en lugar que escribir $D_x(t) = D(x, t)$, escribiremos $D_i(t)$, $i : 1, 2, 3$, eliminando de la notación la n -pla x como subíndice.

Para estas distancias, tenemos el resultado siguiente:

Proposición 3 Sea $f : X^n \rightarrow X$. Entonces

- 1) f satisface el PMD respecto de D_1 o D_2 si, y sólo si, $f(x_1, \dots, x_n)$ es uno de los valores $x_1, \dots, x_n$ con máxima frecuencia (una moda).
- 2) f satisface el PMD respecto de D_3 si, y sólo si, f es idempotente.

Demostración:

1) Para D_1 , observemos que, si $t \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces $D_1(t) = n$, mientras que si t es uno de los valores x_i , entonces $D_1(t) = |\{j : x_j \neq x_i\}|$. Por tanto, el mínimo se alcanzará en un x_i con máxima frecuencia.

Si tomamos la distancia D_2 , entonces el razonamiento anterior sigue siendo válido, pues lo único que hacemos es calcular la raíz cuadrada de los valores dados para D_1 .

2) Consideremos ahora D_3 . Entonces el valor mínimo de $D_3(t)$ es 0 y se alcanza cuando $x_1 = \dots = x_n = a$, en cuyo caso se alcanza en el valor común $t = a$. Por tanto, una función $f : X^n \rightarrow X$ satisface el PMD respecto de D_3 si, y sólo si, es idempotente. $\diamond$

3 Caso $X = \mathbb{R}$

Consideremos primero $d_1 = \dots = d_n$, con $d_i(a, b) = |a - b|$. Veamos cómo son las funciones que satisfacen el PMD.

Proposición 4 Las únicas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen el PMD respecto de D_1 son aquellas tales que

$$x_{[\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]} \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq x_{[\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor]} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

donde $x_{[1]} \leq \dots \leq x_{[n]}$ es una reordenación creciente de la lista $(x_1, \dots, x_n)$ y $[k]$ indica la parte entera por defecto de k .

Demostración:

Para cada n -pla $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la función $D_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vendrá dada por $D_1(t) = \sum_{i=1}^n |x_i - t|$. Según hemos comentado anteriormente, sabemos que el mínimo de D_1 se alcanzará en el intervalo $[\min x_i, \max x_i]$.

Teniendo en cuenta que $D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = D((x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}), (y_{\pi(1)}, \dots, y_{\pi(n)}))$ para cualquier

permutación π , podemos suponer que $x_1 \leq \dots \leq x_n$. Consideremos dos casos:

a) n impar: En este caso, veamos que el mínimo se alcanza en $t_0 = x_{\frac{n+1}{2}}$. Tenemos

$$D_1(t_0) = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} |x_i - x_{n-i+1}|$$

Para empezar, si $t \in [x_{\frac{n-1}{2}}, x_{\frac{n+3}{2}}] \setminus \{x_{\frac{n+1}{2}}\}$, entonces $D_1(t) = D_1(t_0) + |t - x_{\frac{n+1}{2}}| > D_1(t_0)$. Ahora, si $t \in [x_k, x_{k+1}]$, y tomamos un $k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{\frac{n-1}{2}\}$, entonces

$$\begin{aligned} D_1(t) &= |t - x_{\frac{n+1}{2}}| + \sum_{i=1}^k |x_i - x_{n-i+1}| \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{\frac{n-1}{2}} [|t - x_i| + |t - x_{n-i+1}|] \\ &> \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} |x_i - x_{n-i+1}| + |t - x_{\frac{n+1}{2}}| \\ &> D_1(t_0) \end{aligned}$$

b) n par: Veamos que, en este caso, el mínimo se alcanza en cualquier $t_0 \in [x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n+2}{2}}]$. Tenemos

$$D_1(t_0) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |x_i - x_{n-i+1}|$$

Por otra parte, si $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $k \neq \frac{n}{2}$, resultará:

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \sum_{i=1}^k |x_i - x_{n-i+1}| \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{\frac{n}{2}} [|t - x_i| + |t - x_{n-i+1}|] \\ &> \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |x_i - x_{n-i+1}| = D_1(t_0) \end{aligned}$$

$\diamond$

Proposición 5 La única función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface el PMD respecto de D_2 es

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Demostración:

Para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la función $D_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vendrá dada por $D_2(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - t|^2}$.

Observemos que es lo mismo minimizar D_2 que la función $h(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$. Entonces $h'(t) =$

$-2 \sum_{i=1}^n (x_i - t)$ e, igualando a 0, obtenemos $t = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, que evidentemente corresponde a un mínimo. $\diamond$

Proposición 6 La única función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface el PMD respecto de D_3 es

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\min\{x_1, \dots, x_n\} + \max\{x_1, \dots, x_n\}}{2}$$

Demostración:

Para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la función $D_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vendrá dada por $D_3(t) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - t|$. Según hemos comentado anteriormente, sabemos que el mínimo de D_3 se alcanzará en el intervalo $[\min x_i, \max x_i]$. Y ahora, es claro que lo alcanzará en el punto $t_0 = \frac{\min x_i + \max x_i}{2}$ ya que, si $t < t_0$, $D_3(t) = |t - \max x_i| > |\frac{\min x_i + \max x_i}{2} - \max x_i| = \frac{\max x_i - \min x_i}{2} = D_3(t_0)$ y, si $t > t_0$, $D_3(t) = |t - \min x_i| > |\frac{\min x_i + \max x_i}{2} - \min x_i| = \frac{\max x_i - \min x_i}{2} = D_3(t_0)$. $\diamond$

Observación: Las funciones de las que se habla en las proposiciones 4, 5 y 6 son ejemplos de operadores OWA con vectores de pesos constantes en unos casos y, en otros, dependientes de los valores a agregar.

Consideremos ahora las distancias sobre $\mathbb{R}$ siguientes: $d_i(a, b) = \alpha_i |a - b|$, $i = 1, \dots, n$, con $\alpha_i > 0 \forall i = 1, \dots, n$. En este caso, las distancias D_1, D_2 y D_3 son:

- 1) $D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i - y_i|$,
- 2) $D_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i |x_i - y_i|)^2}$,
- 3) $D_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i |x_i - y_i|$.

Si $n = 3$ la distancia D_1 es

$$D_1(x, y) = \alpha_1 |x_1 - y_1| + \alpha_2 |x_2 - y_2| + \alpha_3 |x_3 - y_3|.$$

Según sean los coeficientes α_1, α_2 y α_3 se pueden dar los siguientes casos:

1. Si uno de ellos, α_k , es mayor que la suma de los otros dos, la función que verifica el PMD es la proyección correspondiente, es decir, $f(x) = x_k$.
2. Si uno de ellos, α_k , es igual que la suma de los otros dos, entonces cualquier función que tome valores entre x_k y la mediana satisface el PMD.
3. Si cada uno de ellos es menor que la suma de los otros dos, la única función que satisface el PMD es la mediana.

Generalizemos el primero de estos casos.

Proposición 7 Si existe k tal que $\alpha_k > \sum_{j \neq k} \alpha_j$, entonces la única función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface el PMD respecto de D_1 es la proyección k -ésima.

Demostración:

Sea $x_{[1]} \leq \dots \leq x_{[n]}$ una reordenación creciente de $x_1, \dots, x_n$, y $\alpha_{[1]}, \dots, \alpha_{[n]}$ la reordenación de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ inducida por aquella. Supongamos que el subíndice ordenado que corresponde a k es $[m]$.

La función a minimizar es $D_1(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i - t|$.

Como es lineal en cada intervalo $[x_{[r]}, x_{[r+1]}]$, ha de alcanzar el mínimo en alguno de los $x_{[i]}$. Calculemos el valor que toma la función en estos puntos:

$$\begin{aligned} D_1(x_{[i]}) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j |x_j - x_{[i]}| = \\ &= \sum_{j=1}^{[i]-1} \alpha_{[j]} (x_{[i]} - x_{[j]}) + \sum_{j=[i]+1}^n \alpha_{[j]} (x_{[j]} - x_{[i]}) = \\ &= \sum_{j=1}^{[i]-1} a_j \sum_{l=1}^j \alpha_{[l]} + \sum_{j=[i]+1}^n a_j \sum_{l=j+1}^n \alpha_{[l]}, \end{aligned}$$

donde $a_i = x_{[i+1]} - x_{[i]}$, $i: 1, \dots, n-1$.

Si $[i] > [m]$, se tiene

$$\begin{aligned} D_1(x_{[i]}) - D_1(x_{[m]}) &= \\ &= \sum_{j=[m]}^{[i]} a_j (\alpha_{[1]} + \dots + \alpha_{[j]} - \alpha_{[j+1]} - \dots - \alpha_{[n]}), \end{aligned}$$

que es positivo porque en cada paréntesis $\alpha_{[m]}$ tiene signo positivo y es mayor que la suma de los demás por hipótesis. Por tanto $D_1(x_{[i]}) > D_1(x_{[m]})$.

Si $[i] < [m]$, un razonamiento análogo nos permite llegar a la misma conclusión, con lo que D_1 alcanza el mínimo en $x_{[m]}$, es decir, en x_k . $\diamond$

Proposición 8 Supongamos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = n$. La única función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface el PMD respecto de D_2 es la media aritmética ponderada con pesos $\frac{\alpha_i^2}{n}$.

Demostración:

La función a minimizar ahora es

$$D_2(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i |x_i - t|)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (x_i - t)^2}.$$

Es continua y derivable y su derivada se anula si $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (x_i - t) = 0$, es decir, si $t = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{n} x_i$. Este valor de t corresponde, evidentemente, a un mínimo, con lo que la función que buscamos es la media ponderada con pesos $\frac{\alpha_i^2}{n}$. $\diamond$

Observación: Obtenemos, por tanto, una única función que satisface el PMD y no es simétrica. Esto no contradice la proposición 2 ya que, como hemos dicho anteriormente, D_2 no es invariante por permutaciones excepto en el caso $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, caso que queda incluido en la presente generalización.

4 Distancias invariantes por traslación

Las distancias consideradas sobre $\mathbb{R}$ en este trabajo son ejemplos de las llamadas invariantes por traslación: $d(a+c, b+c) = d(a, b) \forall a, b, c \in \mathbb{R}$. La forma general de estas distancias es: $d(a, b) = g(a - b)$, donde la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

- 1) $g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 0 \iff x = 0$
- 2) $g(-x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$
- 3) $g(x+y) \leq g(x) + g(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$ (g es subaditiva)

Supongamos el caso $d_1 = \dots = d_n = d$ con $d(a, b) = g(a - b)$ invariante por traslaciones. Analicemos algunas particularidades de las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen el PMD respecto de D_1, D_2 y D_3 :

- 1) $D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n g(x_i - y_i)$,
- 2) $D_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i(x_i, y_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (g(x_i - y_i))^2}$,
- 3) $D_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i) = \max_{1 \leq i \leq n} g(x_i - y_i)$.

Una manera de generar funciones g y, por tanto, de generar distancias invariantes por traslaciones es a partir de funciones $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

- a) $h(0) = 0$
- b) $h'(x) > 0 \forall x > 0$
- c) $h''(x) < 0 \forall x > 0$

En efecto, si definimos ahora $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ así:

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \geq 0 \\ h(-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

podemos demostrar fácilmente que esta función satisface las condiciones 1, 2, 3. La condición de subaditividad se deduce del hecho que h es cóncava y $h(0) = 0$. La distancia obtenida mediante esta construcción es $d(a, b) = g(a - b) = h(|a - b|)$.

Ejemplos sencillos de funciones h son: $h(x) = x^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, o también $h(x) = \frac{x}{x + \alpha}$, $\alpha > 0$. Observemos, por otra parte, que no hay ninguna función polinómica que satisfaga las condiciones a, b y c .

A partir de ahora, supondremos que las distancias D_i proceden de distancias sobre $\mathbb{R}$ invariantes por traslaciones de una función h que satisfaga a, b, c .

Veamos algún resultado sobre las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen el PMD respecto de $D_1(x, y) = \sum_{i=1}^n g(x_i - y_i)$. Hemos de minimizar la función $D_1(t) = \sum_{i=1}^n g(x_i - t)$, $t \in \mathbb{R}$. Fijado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, los puntos críticos $t \neq x_i$ son solución de la ecuación $\sum_{i=1}^n g'(x_i - t) = 0$, pero $D_1''(t) = \sum_{i=1}^n g''(x_i - t)$, que es negativa para todo $t \neq x_i, i : 1, \dots, n$. Por tanto, podemos enunciar:

Proposición 9 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisface el PMD respecto de D_1 , entonces f ha de ser localmente interna, es decir, $f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\} \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

En [4] se hace un estudio de este tipo de funciones en el caso continuo.

En el caso $n = 2$, el recíproco de esta proposición también es cierto.

Proposición 10 Las únicas $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen el PMD respecto de D_1 son las funciones localmente internas.

Demostración:

De acuerdo con la proposición anterior, basta demostrar que, si f es localmente interna, entonces satisface el PMD respecto de D_1 . En efecto, se comprueba fácilmente que, para cada (x, y) con $x < y$, la función $D_1(t) = h(|x - t|) + h(|y - t|)$, $t \in \mathbb{R}$, es estrictamente decreciente para $t < x$, estrictamente creciente para $t > y$, estrictamente cóncava en $[x, y]$, y $D_1(x) = D_1(y)$. Por tanto, D_1 alcanza el mínimo absoluto en $t = x$ y en $t = y$. Como f es localmente interna ($f(x, y) = x$ o y), esto demuestra que satisface el PMD respecto de D_1 . $\diamond$

En el caso $n \geq 3$, puede obtenerse un resultado que precisa el de la proposición 9.

Proposición 11 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 3$, satisface el PMD respecto de D_1 , entonces $f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_{[2]}, \dots, x_{[n-1]}\} \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ donde, como antes, $x_{[1]} \leq \dots \leq x_{[n]}$ es una reordenación creciente de $x_1, \dots, x_n$.

Demostración:

Hemos de minimizar la función $D_1(t) = \sum_{i=1}^n h(|x_{[i]} - t|)$. Si $x_{[1]} < x_{[2]}$ se tiene:

$$D_1(x_{[1]}) = \sum_{i \neq 1} h(|x_{[i]} - x_{[1]}|)$$

$$D_1(x_{[2]}) = \sum_{i \neq 2} h(|x_{[i]} - x_{[2]}|)$$

Restando ambas expresiones resulta:

$$D_1(x_{[1]}) - D_1(x_{[2]}) = \sum_{i=3}^n (h(|x_{[i]} - x_{[1]}|) - h(|x_{[i]} - x_{[2]}|))$$

Si $i > 3$, $|x_{[i]} - x_{[1]}| > |x_{[i]} - x_{[2]}|$ y dado que h es creciente si $x \geq 0$, se tiene $h(|x_{[i]} - x_{[1]}|) > h(|x_{[i]} - x_{[2]}|)$, con lo que $D_1(x_{[1]}) - D_1(x_{[2]}) > 0$ y el mínimo no se puede alcanzar en $x_{[1]}$.

Un razonamiento análogo demuestra que $f(x) \neq x_{[n]}$.
◇

Este resultado nos dice en particular que si $n = 3$ entonces $f(x) = x_{[2]}$, es decir, la función PMD es la mediana. Si $n = 4$, se puede comprobar que la función PMD es:

$$f(x) = \begin{cases} x_{[2]} & \text{si } |x_{[2]} - x_{[1]}| < |x_{[2]} - x_{[3]}| \\ x_{[3]} & \text{si } |x_{[2]} - x_{[1]}| > |x_{[2]} - x_{[3]}| \\ x_{[2]} \circ x_{[3]} & \text{si } |x_{[2]} - x_{[1]}| = |x_{[2]} - x_{[3]}| \end{cases}$$

Digamos a continuación alguna cosa sobre las $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen el PMD respecto de

$$D_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (g(x_i - y_i))^2}. \text{ Hemos de minimizar}$$

$$\text{la función } D_2(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (g(x_i - t))^2}, t \in \mathbb{R}. \text{ Tene-}$$

$$\text{mos } D_2''(t) = \frac{-\sum_{i=1}^n g(x_i - t)g'(x_i - t)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (g(x_i - t))^2}}. \text{ Fijado } x =$$

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, los puntos críticos $t \neq x_i$ son, en este caso, solución de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^n g(x_i - t)g'(x_i - t) = 0 \quad (1)$$

Si t es uno de estos puntos críticos, el signo de $D_2''(t)$ es el signo de la expresión:

$$\sum_{i=1}^n [(g'(x_i - t))^2 + g(x_i - t)g''(x_i - t)] \quad (2)$$

Así, por ejemplo, si $h(x) = x^{1/2}$, $x \geq 0$, la ecuación (1) queda (para cualquier x) $n - j = j$, donde $x_1 \leq \dots \leq x_j < t < x_{j+1} \leq \dots \leq x_n$, $j : 1, \dots, n-1$. Por tanto, con n par, son críticos todos los valores t tales que $x_{n/2} < t < x_{n/2+1}$. Por otra parte, la expresión (2) es, en este caso, igual a 0, pero tenemos

$$\text{también } D_2(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (g(x_i - t))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - t|},$$

que presenta mínimo cuando lo presenta la cantidad subradical, caso ya estudiado anteriormente.

Finalmente, por lo que respecta a las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen el PMD respecto de $D_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} g(x_i - y_i)$, en este caso, hemos de minimizar la función $D_3(t) = \max_{1 \leq i \leq n} g(x_i - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Pero $D_3(t) = \max_{1 \leq i \leq n} g(x_i - t) = \max_{1 \leq i \leq n} h(|x_i - t|) = h(\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - t|)$, y el mínimo se presenta cuando lo hace $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - t|$, es decir, (caso estudiado anterior-

mente) para $t = \frac{\min\{x_1, \dots, x_n\} + \max\{x_1, \dots, x_n\}}{2}$.

Así, podemos enunciar:

Proposición 12 La única función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface el PMD respecto de D_3 es

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\min\{x_1, \dots, x_n\} + \max\{x_1, \dots, x_n\}}{2}$$

Observación: En los tres casos estudiados anteriormente, las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen el PMD toman sus valores entre el mínimo y el máximo de sus argumentos. En el caso de la distancia D_2 , este resultado se obtiene a partir de la condición (1).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el proyecto BFM2000-1114 de la DGI.

Referencias

- [1] B. Bouchon-Meunier. Aggregation and fusion of imperfect information. *Physica-Verlag, Heidelberg*, 1998.
- [2] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar. Aggregation operators. New trends and applications. *Physica-Verlag, Heidelberg*, 2002.

- [3] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms. *Kluwer Academic Publishers*, 2000.
- [4] G. Mayor, J. Martín. Locally internal aggregation functions. *Int. Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol. 7 (3), Pág. 235-241, 1999.
- [5] J. Martín, G. Mayor, J. Suñer. Symmetric aggregation functions on a finite chain. *Proceedings of the Ninth IPMU*, 2002.

OWG Operators that Maintain Reciprocity Property in the Aggregation of Multiplicative Preference Relations

F. Chiclana

Dept. of Computer Sci. and A. I.,
University of Granada,
18071-Granada, Spain,
chiclana@teleline.es

F. Herrera, E. Herrera-Viedma

Dept. of Computer Sci. and A. I.,
University of Granada,
18071-Granada, Spain,
herrera,viedma@decsai.ugr.es

L. Martínez

Dept. of Computer Sci.,
University of Jaen,
23071-Jaén, Spain,
martin@ujaen.es

Abstract

In multicriteria decision making (MCDM) problems, multiplicative preference relations are widely used to represent assessments on the set of alternatives with respect to all criteria. Multiplicative preference relations are usually assumed to be reciprocal. In [6] we present a decision model to solve a MCDM problem under multiplicative preference relations based on two steps: i) aggregation of the individual relations in a collective one and ii) exploitation of the collective relation. However, it is well known that reciprocity is not generally preserved after aggregation is carried out.

In this paper, we give conditions for maintaining reciprocity in the aggregation of reciprocal multiplicative preference relations using an OWG operator guided by a relative linguistic quantifier.

Key words: Multiplicative preference relations, aggregation, reciprocity.

1 INTRODUCTION

In any multicriteria decision making (MCDM) process the final solution must be obtained from the synthesis (aggregation) of performance degrees of the *majority* of criteria. The majority is traditionally defined as a threshold number of elements. This concept is not always included in the MCDM process. The *fuzzy logic* provides one way to model it.

Fuzzy majority is a soft majority concept expressed by a *fuzzy quantifier* [13], which is manipulated via a fuzzy logic calculus of linguistically quantified propositions. Therefore, using fuzzy majority guided ag-

gregation operators we can incorporate the concept of majority in the computation of the solution. These operators reflect the fuzzy majority calculating their weights by means of a fuzzy quantifier, as for example, the *Ordered Weighted Averaging (OWA)* operator [12].

The MCDM problem when assessments on the alternatives are expressed using multiplicative preference relations has been solved by Saaty using the decision AHP, which obtains the set of solution alternatives by means of the eigenvector method [11]. However, this decision process is not guided by the concept of majority [7, 8, 9]. As shown in [1, 2], the proper aggregation operator of ratio-scale measurements is not the *arithmetic mean* but the *geometric mean*. However, this operator does not allow to incorporate the concept of fuzzy majority in the decision processes. We could use the OWA operator, but as it presents a similar behavior to the arithmetic mean this is not possible.

In [3] we define the *Ordered Weighted Geometric (OWG)* operator, which is a fuzzy majority guided aggregation operator to aggregate information given on a ratio scale. It is based on the geometric mean and the OWA operator and it allows us to incorporate the concept of fuzzy majority in decision processes when the information is provided using a ratio scale. Then, using the OWG operator in [6] we present a decision model alternative to the AHP for MCDM problems under multiplicative preference relations. This model obtains the solution in two steps: *aggregation* of the individual multiplicative preference relations in a collective one using the OWG operator and *exploitation* of that collective multiplicative preference relation using choice functions based on the OWG operator.

Multiplicative preference relations are usually assumed to be reciprocal [4, 6, 11]. However, it is well known that reciprocity is not generally preserved after aggregation is carried out. In this contribution, we determine the set of OWG operators guided by a rela-

tive linguistic quantifier that maintain the reciprocity property when aggregating multiplicative reciprocal preference relations.

In order to do this, the paper is set out as follows. In Section 2 we present the problem. In Section 3, we study conditions under which reciprocity property is maintained when aggregating reciprocal multiplicative preference relations using an OWG operator guided by a relative linguistic quantifier. Finally, in Section 4 some concluding remarks are pointed out.

2 PRESENTATION OF THE PROBLEM

We assume MCDM problems where the alternatives, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, are assessed according to different criteria, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, by means of multiplicative preference relations, $\{A^1, \dots, A^m\}$, where $A^k = (a_{ij}^k)$, indicating a_{ij}^k a ratio of the preference intensity of alternative x_i to that of x_j , i.e., it is interpreted as x_i is a_{ij}^k times as good as x_j . According to Miller's study [10], Saaty suggests measuring a_{ij}^k using a ratio scale, and in particular the 1 to 9 scale [11]: $a_{ij}^k = 1$ indicates indifference between x_i and x_j , $a_{ij}^k = 9$ indicates that x_i is unanimously preferred to x_j , and $a_{ij}^k \in \{2, 3, \dots, 8\}$ indicates intermediate evaluations. It is usual to assume the multiplicative reciprocity property $a_{ij}^k \cdot a_{ji}^k = 1 \forall i, j$.

As we have said, using an OWG operator ϕ_Q^G guided by a linguistic quantifier Q , we obtain a collective multiplicative preference relation $A^c = (a_{ij}^c)$. Each value $a_{ij}^c \in [1/9, 9]$, represents the preference of alternative x_i over alternative x_j according to the majority of criteria, represented by Q . In this case,

$$a_{ij}^c = \phi_Q^G(a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^m) = \prod_{k=1}^m (b_{ij}^k)^{w_k}$$

where b_{ij}^k is the k -th largest value in the set $\{a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^m\}$, and

$$w_k = Q\left(\frac{k}{m}\right) - Q\left(\frac{k-1}{m}\right), \forall k.$$

Our objective in this paper is to study conditions under which reciprocity property is maintained when aggregating reciprocal multiplicative preference relations using an OWG operator guided by a relative linguistic quantifier, i.e.,

$$a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c = 1 \forall i, j.$$

3 RECIPROCITY OF THE COLLECTIVE MULTIPLICATIVE PREFERENCE RELATION

As we are assuming A^k reciprocal then $a_{ji}^k = 1/a_{ij}^k$, and therefore if $\{b_{ij}^1, \dots, b_{ij}^m\}$ are ordered from largest to lowest, $\{b_{ji}^1, \dots, b_{ji}^m\}$, being $b_{ji}^k = 1/b_{ij}^k$, are ordered from lowest to largest, and in consequence we have:

$$\begin{aligned} a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c &= \prod_{k=1}^m (b_{ij}^k)^{w_k} \cdot \prod_{k=1}^m (b_{ji}^k)^{w_{m-k+1}} \\ &= \prod_{k=1}^m (b_{ij}^k)^{w_k} \cdot \prod_{k=1}^m \left(\frac{1}{b_{ij}^k}\right)^{w_{m-k+1}} \\ &= \prod_{k=1}^m (b_{ij}^k)^{w_k - w_{m-k+1}} = \prod_{k=1}^m (b_{ij}^k)^{\bar{w}_k}, \end{aligned}$$

where

$$\bar{w}_k = \left[Q\left(\frac{k}{m}\right) - Q\left(\frac{k-1}{m}\right) \right] - \left[Q\left(\frac{m-k+1}{m}\right) - Q\left(\frac{m-k}{m}\right) \right].$$

If we denote

$$A(k) = Q\left(\frac{k}{m}\right) + Q\left(1 - \frac{k}{m}\right)$$

then

$$\bar{w}_k = A(k) - A(k-1).$$

The following result is obvious:

Proposition 1 *If Q is a linguistic quantifier with membership function verifying*

$$Q(1-x) = 1 - Q(x)$$

then the collective multiplicative preference relation, A^c , obtained by aggregating the set of multiplicative preference relations, $\{A^1, \dots, A^m\}$, using the OWG operator, ϕ_Q^G , guided by Q , is reciprocal.

Proof: If $Q(1-x) = 1 - Q(x)$ then $A(k) = 1, \forall k$ and in consequence $\bar{w}_k = A(k) - A(k-1) = 0, \forall k$. This implies that

$$a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c = \prod_{k=1}^m (b_{ij}^k)^{\bar{w}_k} = \prod_{k=1}^m (b_{ij}^k)^0 = \prod_{k=1}^m 1 = 1, \forall i, j.$$

In the case that Q is a relative non-decreasing linguistic quantifier with membership function:

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \leq 1 \end{cases} \quad a, b \in [0, 1],$$

the election of a suitable relative quantifier, for representing the concept of fuzzy majority that we desire to implement in our MCDM problem, reduces to selecting adequate values for parameters a and b . Therefore, the problem to solve is:

What condition do parameters a and b have to verify so that $a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c = 1, \forall i, j$?

We distinguish three possible cases, according to the value of $a+b$: (A) $a+b = 1$, (B) $a+b < 1$, (C) $a+b > 1$.

3.1 CASE A: $a + b = 1$

In this case $1 - a = b$ ($1 - b = a$) and therefore:

$$Q(1-x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \leq 1-x < a \\ \frac{1-x-a}{b-a} & a \leq 1-x \leq b \\ 1 & b < 1-x \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1-0 & 0 \leq x < a \\ 1-\frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1-1 & b < x \leq 1 \end{array} \right\} = 1 - Q(x).$$

Applying proposition 1 we have that in this case reciprocity property is maintained after the aggregation process is carried out.

The geometric mean operator is a particular case of OWG operator guided by a relative non-decreasing linguistic quantifier verifying this case and it is obtained using $(a, b) = (0, 1)$.

The above is summarized in the following proposition:

Proposition 2 If Q is a relative non-decreasing linguistic quantifier with parameters a and b verifying $a + b = 1$, then the OWG operator guided by Q maintains multiplicative reciprocity.

Example 1 Assume that we have a set of four criteria, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, and a set of three alternatives, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Suppose that assessments are given by means of the following multiplicative preference relations:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ \frac{1}{5} & 1 & 9 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix}.$$

Using the linguistic quantifier with the pair of values $(0.25, 0.75)$ and the corresponding OWG operator

with weight vector $(0, 0.5, 0.5, 0)$, the reciprocal collective multiplicative preference relation obtained is

$$A^c = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} & \sqrt{15} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 1 & \sqrt{10} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{10}}{10} & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 CASE B: $a + b < 1$

In this case, we have that $1 - a > b$ ($1 - b > a$) and as a consequence of being $a \leq b$ we have $a < 1/2$. We will start by assuming that $b \geq 1/2$, what implies that $1 - b \leq b$, and consequently:

$$Q(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \leq x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < 1-b \\ \frac{x-a}{b-a} & 1-b \leq x < b \\ 1 & b \leq x < 1-a \\ 1 & 1-a \leq x < 1, \end{array} \right.$$

$$Q(1-x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & 0 \leq x < a \\ 1 & a \leq x < 1-b \\ \frac{1-x-a}{b-a} & 1-b \leq x < b \\ \frac{1-x-a}{b-a} & b \leq x < 1-a \\ 0 & 1-a \leq x < 1, \end{array} \right.$$

and

$$A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & 0 \leq x < ma \\ \frac{x+m(b-2a)}{m(b-a)} & ma \leq x < m(1-b) \\ \frac{1-2a}{b-a} & m(1-b) \leq x < mb \\ \frac{m-x-m(b-2a)}{m(b-a)} & mb \leq x < m(1-a) \\ 1 & m(1-a) \leq x < m \end{array} \right.$$

It is clear that there exist $h_1, h_2, h_3, h_4 \in \{1, \dots, m\}$ such that

$$h_1 - 1 < ma \leq h_1,$$

$$h_2 - 1 < m(1-b) \leq h_2,$$

$$h_3 - 1 < mb \leq h_3,$$

$$h_4 - 1 < m(1-a) \leq h_4,$$

and in consequence:

$$A(0) = \dots = A(h_1 - 1) = 1$$

$$A(k) = \frac{k+m(b-2a)}{m(b-a)}, k = h_1, \dots, h_2 - 1$$

$$A(j) = \frac{1-2a}{b-a}, j = h_2, \dots, h_3 - 1$$

$$A(l) = \frac{m-l-m(b-2a)}{m(b-a)}, l = h_3, \dots, h_4 - 1$$

$$A(h_4) = \dots = A(m) = 1$$

Moreover, it is clear that $m - h_4 = h_1 - 1$, $m - h_3 = h_2 - 1$, so:

$$\bar{w}_1 = \dots = \bar{w}_{h_1-1} = 0 = \bar{w}_{h_4+1} = \dots = \bar{w}_m$$

$$\bar{w}_{h_1} = \frac{h_1 - ma}{m(b-a)} = -\bar{w}_{h_4} \geq 0$$

$$\bar{w}_{h_1+1} = \dots = \bar{w}_{h_2-1} = \frac{1}{m(b-a)} =$$

$$-\bar{w}_{h_3+1} = \dots = -\bar{w}_{h_4-1} \geq 0$$

$$\bar{w}_{h_2} = \frac{h_2 - mb}{m(b-a)} = -\bar{w}_{h_3} \geq 0$$

$$\bar{w}_{h_2+1} = \dots = \bar{w}_{h_3-1} = 0.$$

The expression of $a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c$ reduces to:

$$a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c = \left(\frac{b_{ij}^{h_1}}{b_{ij}^{h_4}} \right)^{\bar{w}_{h_1}} \cdot \prod_{k=h_1+1}^{h_2-1} \left(\frac{b_{ij}^k}{b_{ij}^{m-k+1}} \right)^{\frac{1}{m(b-a)}} \cdot \left(\frac{b_{ij}^{h_2}}{b_{ij}^{h_3}} \right)^{\bar{w}_{h_2}}$$

For being $\{b_{ij}^1, \dots, b_{ij}^m\}$ ordered from largest to lowest, we have that every fraction in the above expression is greater or equal to 1, and so the whole product is, i.e., $a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c \geq 1$. In the case of being $b < 1/2$, following a similar reasoning, we get the same conclusion. Summarizing, we have obtained the following result:

Proposition 3 Let $\{A^1, \dots, A^m\}$ be a finite set of individual reciprocal multiplicative preference relations, and Q a non-decreasing relative quantifier with membership function

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \leq 1 \end{cases}$$

and $a + b < 1$. Then, the collective multiplicative preference relation obtained using the OWG operator ϕ_Q^G , $A^c = (a_{ij}^c)$, $a_{ij}^c = \phi_Q^G(a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^m)$, verifies $a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c \geq 1$.

Example 2 Suppose again the same set of reciprocal multiplicative preference relations given in example 1. Using the linguistic quantifier "at least half" with the pair of values (0, 0.5) and the corresponding OWG operator with weight vector (0.5, 0.5, 0, 0), the collective multiplicative preference relation is:

$$A^c = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{15} & \sqrt{35} \\ \frac{1}{2} & 1 & 3\sqrt{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 CASE C: $a + b > 1$

As in the previous subsection, we have to distinguish two subcases: (i) $a < 1/2$ and (ii) $a \geq 1/2$. We will study just the first one because, following a similar reasoning, the same result is obtained in both subcases.

The expressions of $A(x)$ when $a < 1/2$ is the following:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < m(1-b) \\ \frac{m-x-ma}{m(b-a)} & m(1-b) \leq x < ma \\ \frac{1-2a}{b-a} & ma \leq x < m(1-a) \\ \frac{x-ma}{m(b-a)} & m(1-a) \leq x < mb \\ 1 & mb \leq x < m. \end{cases}$$

As in the previous case, there exist $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \{1, \dots, m\}$ such that

$$r_1 - 1 < m(1-b) \leq r_1,$$

$$r_2 - 1 < ma \leq r_2,$$

$$r_3 - 1 < m(1-a) \leq r_3,$$

$$r_4 - 1 < mb \leq r_4,$$

$$m - r_4 = r_1 - 1,$$

$$m - r_3 = r_2 - 1,$$

and therefore:

$$\bar{w}_1 = \dots = \bar{w}_{r_1-1} = 0 = \bar{w}_{r_4+1} = \dots = \bar{w}_m$$

$$\bar{w}_{r_1} = \frac{m-r_1-mb}{m(b-a)} = -\bar{w}_{r_4} \leq 0$$

$$\bar{w}_{r_1+1} = \dots = \bar{w}_{r_2-1} = \frac{-1}{m(b-a)} =$$

$$-\bar{w}_{r_3+1} = \dots = -\bar{w}_{r_4-1} \leq 0$$

$$\bar{w}_{r_2} = \frac{r_2-1-ma}{m(b-a)} = -\bar{w}_{r_3} \leq 0$$

$$\bar{w}_{r_2+1} = \dots = \bar{w}_{r_3-1} = 0.$$

The expression of $a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c$ reduces to:

$$a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c = \left(\frac{b_{ij}^{r_4}}{b_{ij}^{r_1}} \right)^{\bar{w}_{r_4}} \cdot \prod_{k=r_1+1}^{r_2-1} \left(\frac{b_{ij}^{m-k+1}}{b_{ij}^k} \right)^{\frac{1}{m(b-a)}} \cdot \left(\frac{b_{ij}^{r_3}}{b_{ij}^{r_2}} \right)^{\bar{w}_{r_3}}$$

For being $\{b_{ij}^1, \dots, b_{ij}^m\}$ ordered from largest to lowest, we have that every fraction in the above expression is lower or equal to 1 and so the whole product is, i.e., $a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c \leq 1$. Summarizing, we have obtained the following result:

Proposition 4 Let $\{A^1, \dots, A^m\}$ be a finite set of individual reciprocal multiplicative preference relations,

and Q a non-decreasing relative quantifier with membership function

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x \leq 1 \end{cases}$$

and $a + b > 1$. Then, the collective multiplicative preference relation obtained using the OWG operator ϕ_Q^G , $A^c = (a_{ij}^c)$, $a_{ij}^c = \phi_Q^G(a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^m)$, verifies $a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c \leq 1$.

Example 3 Using, in this case, the linguistic quantifier "as many as possible" with the pair of values (0.5, 1) and the corresponding OWG operator with weight vector (0, 0, 0.5, 0.5), then the collective multiplicative preference relation is:

$$A^c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{\sqrt{15}}{15} & 1 & 2 \\ \frac{\sqrt{35}}{35} & \frac{\sqrt{5}}{15} & 1 \end{bmatrix}.$$

4 Conclusions

We have studied conditions to maintain reciprocity when aggregating a finite set of multiplicative reciprocal relations using OWG operators guided by linguistic quantifiers. In the case of a relative non-decreasing quantifier with parameters (a, b) , reciprocity is maintained when $a + b = 1$ and not otherwise. Furthermore, the greater the value of $|a + b - 1|$ the more distant the collective multiplicative preference relation is from being reciprocal as we show in the case of fuzzy preference relations [5].

References

- [1] J. Azcél, C. Alsina, Procedures for Synthesizing Ratio Judgements, *Journal of Mathematical Psychology*, 27 (1983) 93-102.
- [2] J. Azcél, C. Alsina, Synthesizing Judgements: A Functional Equations Approach, *Mathematical Modelling*, 9 (1987) 311-320.
- [3] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The Ordered Weighted Geometric Operator: Properties and Application, *Proc. of 8th Int. Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, (2000) 985-991.
- [4] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating Multiplicative Preference Relations in a Multipurpose Decision Making Model Based on Fuzzy Preference Relations, *em Fuzzy Sets and Systems*, 112 (2001) 277-291.
- [5] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, Preserving Reciprocity in the Aggregation of Fuzzy Preference Relations Using OWA Operators, *Proc. of the EUROFUSE Workshop on Preference Modelling and Applications*, Granada (2001) 105-110.
- [6] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, Multiperson Decision Making Based on Multiplicative Preference Relations, *European Journal of Operational Research*, 129 (2001) 372-385.
- [7] J. Kacprzyk, Group Decision Making with a Fuzzy Linguistic Majority, *Fuzzy Sets and Systems*, 18 (1986) 105-118.
- [8] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, *Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory* (Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1990).
- [9] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, H. Nurmi, Group Decision Making and Consensus Under Fuzzy Preference and Fuzzy Majority, *Fuzzy Sets and Systems*, 49 (1992) 21-31.
- [10] G. A. Miller, The Magical Number Seven or Minus Two: Some Limits on Our Capacity of Processing Information, *Psychological Rev.*, 63 (1956) 81-97.
- [11] Th. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [12] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, 18 (1988) 183-190.
- [13] L. A. Zadeh, A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages, *Computers and Mathematics with Applications*, 9 (1983) 149-184.

SINTESIS Y PROPIEDADES DE OPERADORES DE AGREGACIÓN COMPENSATIVOS Y COMPENSATORIOS

Carlos Macua *

Dpto. Estadística e I.O.
Universidad Pública de Navarra
31006 PAMPLONA, Spain
Tfno. +34.948.16.91.96
cmacua@unavarra.es

Miren Portilla

Dpto. Estadística e I.O.
Universidad Pública de Navarra
31006 PAMPLONA, Spain
Fax. +34.948.16.92.04
mportilla@unavarra.es

Pedro Burillo

Dpto. Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
31006 PAMPLONA, Spain
Tfno. +34.948.16.92.52
pburillo@unavarra.es

Resumen

El propósito principal del trabajo es recopilar las propiedades de diversos operadores de agregación compensativos y compensatorios y completarlo con el análisis de nuevas propiedades.

Palabras Clave: Operadores de agregación, estabilidad, separabilidad.

puede encontrar fácilmente una transformación lineal que lleve el intervalo original al $[0, 1]$.

Otros autores como Komorníková [14] y Carbonell, Mas y Mayor [2], definen operadores de agregación, denominados extendidos, utilizando sucesiones de funciones de agregación, $F = (F^{(n)})_{n \in N^*}$ donde $F^{(1)}(x) = x$, $\forall x \in [0, 1]$ y $F^{(n)}$ con $n \geq 2$ es una función de agregación, es decir, mediante una función

$$F : \bigcup_{n \in N^*} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

que algunos autores denominan *agregador* [17].

Dado que en la bibliografía sobre este tema hay una gran variedad de operadores de agregación, hemos querido en este trabajo hacer un resumen y análisis de las propiedades de algunas de las funciones de agregación más habituales.

1 INTRODUCCIÓN

La agregación de varios datos de entrada en un único valor de salida es la base de muchos problemas tanto teóricos como prácticos. Es más, el problema de agregación es crucial en la mayoría de sistemas de información avanzados. La agregación aparece en múltiples situaciones, por ejemplo, cuando agregamos opiniones de expertos, funciones objetivo, criterios de evaluación, etc. De hecho la elección de una función de agregación es muy importante en cualquier esquema de toma de decisiones multicriterio o multiobjetivo. De ahí la conveniencia de analizar las múltiples definiciones, propiedades y ejemplos de operadores de agregación existentes.

La forma habitual de definir operadores de agregación es mediante funciones de la forma:

$$F^{(n)} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

con $n \in N^*$ (enteros positivos) y $n \geq 2$, que reciben el nombre de *funciones de agregación*.

Otros autores, Marichal, Mathonet y Tousset [17] o Grabisch, Orlovki y Yager [11] consideran que el resultado de la agregación es un número real, si bien se

2 AGREGACIONES COMPENSATIVAS Y COMPENSATORIAS

Desde el inicio de la teoría de conjuntos difusos se han venido definiendo, analizando y aplicando en diversos campos, los operadores necesarios para trabajar con funciones de pertenencia, es decir, con valores en $[0, 1]$, representando además de conjuntos y relaciones difusas, preferencias entre alternativas, opiniones de expertos, etc., muy útiles sobre todo en toma de decisiones y sistemas expertos. Basta señalar algunos de estos operadores, sobradamente conocidos, para hacernos una idea de la amplia variedad existente en estos momentos, ya que tenemos, entre otros:

- t-normas y t-conormas [12]
- Uninormas [10]
- Promedios [9]
- Operadores compensatorios [24]

*Autor para correspondencia.

- Agregaciones ponderadas [9, 25]

y multitud de operadores de agregación obtenidos con diversos métodos de construcción (ver [15]) a partir, por ejemplo, de sumas ordinales, mediante transformaciones con isomorfismos, dualización, combinaciones lineales y no lineales de operadores de agregación, etc.

Dada la variedad existente de funciones de agregación, tanto en entornos teóricos como aplicados, en este trabajo nos vamos a centrar en agregaciones *monótonas no decrecientes, simétricas* y que *verifican las condiciones frontera* $F^{(n)}(0, 0, \dots, 0) = 0$ y $F^{(n)}(1, 1, \dots, 1) = 1$. Más concretamente se van a analizar las propiedades de dos clases concretas de agregaciones: *funciones compensativas o promedios* y *funciones compensatorias*. No obstante, también incluiremos las *sumas simétricas* al analizar la propiedad de estabilidad para la negación, como ejemplo más habitual de funciones de agregación autoduales.

2.1 FUNCIONES PROMEDIO

Las t-normas y t-conormas, así como muchas de las funciones de agregación obtenidas con t-normas y t-conormas reiteradas, dan como resultado de la agregación valores menores o iguales que el mínimo o mayores o iguales que el máximo. Estas funciones son poco adecuadas para agregar valores en determinados campos aplicados, entre otros, en el ámbito estadístico. Las funciones promedio han sido utilizadas, en el marco de la Estadística, para obtener medidas de tendencia central (media aritmética, media geométrica, media armónica), de dispersión (desviación media respecto de la media, varianza, etc.) y de forma (asimetría y curtosis) tanto en una población como en una muestra.

El estudio de las funciones promedio desde el punto de vista de la teoría de conjuntos difusos lo iniciaron Fung y Fu (1975) [8] y Dubois y Prade (1984) [4] y [5], aunque desde enfoques distintos.

Una función de agregación $F^{(n)}$ es una función *promedio* si es *compensativa* (es decir, entre el mínimo y el máximo), *monótona no decreciente* y *simétrica*.

Algunos autores, como Fodor y Roubens [9], consideran además que una función promedio debe ser continua, sin embargo otros no exigen esta propiedad. Nosotros la consideraremos una propiedad deseable, ya que los ejemplos mostrados en este trabajo la cumplen.

Observemos que en las funciones promedio, al ser monótonas, ser compensativa es equivalente a ser idempotente.

El ejemplo más general de funciones promedio son las

medias generalizadas [13] o *medias cuasi-aritméticas* [1] definidas como:

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right]$$

donde f es una función continua y estrictamente monótona definida en $[0, 1]$.

Como casos particulares de las *medias generalizadas* son muy habituales la *media raíz-potencia* [6] $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha \right)^{1/\alpha}$ que se obtiene para $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \neq 0$, y que incluye a la *media aritmética* ($\alpha = 1$) y a la *media armónica* ($\alpha = -1$). Otro caso particular de media generalizada para $f(x) = \lg x$, $x \in (0, 1]$, es la *media geométrica*.

La familia de las *medias cuasi-lineales* [7] definidas mediante la expresión:

$$F^{(2)}(x_1, x_2) = f^{-1} [(1-p)f(x_1) + pf(x_2)]$$

$0 \leq p \leq 1$, donde f es una función continua, estrictamente monótona y tal que $f(0) = \nu$ con $0 \leq \nu \leq 1$, son también funciones promedio e incluyen para $p = \frac{1}{2}$ a las *medias cuasi-aritméticas* (para $n = 2$).

Otra función promedio habitual es el *estadístico de orden* k .

Por último, dentro de las agregaciones ponderadas, y más concretamente de las medias ponderadas, señalar que si bien todas son compensativas, al imponer la simetría a la función de agregación, la única media ponderada simétrica es el operador OWA de Yager [22]

$$F_{\omega^{(n)}}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_{(i)}$$

donde $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(k)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ y los pesos $\omega_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, con $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ y que incluye, entre otros, la media aritmética y los estadísticos de orden.

2.2 FUNCIONES COMPENSATORIAS

Vamos a considerar funciones de agregación *de tipo compensatorio* (en el sentido de que un valor bajo puede ser compensado por otro alto) pero que no tienen porqué ser *compensativas*, es decir que sus valores no se encuentran necesariamente entre el mínimo y el máximo.

Al agregar valores pueden plantearse dos situaciones extremas, la primera obtener un resultado de la agregación alto si y sólo si todos los valores que se agregan

son altos y la segunda obtener un resultado bajo si y sólo si todos los valores que se agregan son bajos. Ciertos resultados empíricos [24] indican que la agregación de información en el ámbito de la toma de decisiones o en evaluaciones por un grupo de personas, casi nunca se ajusta a uno de estos extremos y casi siempre muestra algún grado de compensación entre la información que se agrega. Las *funciones de agregación compensatorias* parecen más adecuadas en estos casos.

Históricamente Zimmermann y Zysno [24] proponen el primer ejemplo de *función de agregación compensatoria* como una combinación del producto algebraico y de la suma algebraica mediante la expresión:

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1-\gamma} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{\gamma}$$

donde $\gamma \in [0, 1]$ es el grado de compensación.

Las funciones así definidas cumplen las propiedades de *Continuidad, Monotonía, Simetría y Asociativa*.

Posteriormente, Zimmermann [23] define nuevas *funciones de agregación compensatorias* como una combinación convexa del mínimo y del máximo, es decir,

$$F^{(n)} = (1 - \gamma) \text{MIN}^{(n)} + \gamma \text{MAX}^{(n)}$$

En general, Turksen [21] y Zimmermann y Zysno [24] introducen operadores compensatorios como combinaciones convexas exponenciales y lineales de t-normas y t-conormas n-arias de la forma:

$$F^{(n)} = T^{(n)(1-\gamma)} S^{(n)\gamma}$$

$$F^{(n)} = (1 - \gamma) T^{(n)} + \gamma S^{(n)}$$

Partiendo de estas funciones y de manera más general pueden obtenerse *funciones de agregación compensatorias (generalizadas)* [16] mediante

$$F^{(n)} = M^{(2)}(G^{(n)}, H^{(n)})$$

donde $M^{(2)}$ es una función promedio binaria y las funciones n-arias $G^{(n)}$ y $H^{(n)}$ son monótonas no decrecientes, simétricas y cumplen las propiedades frontera.

Como funciones $G^{(n)}$ y $H^{(n)}$ pueden utilizarse, t-normas, t-conormas, funciones de agregación obtenidas con t-normas y t-conormas reiteradas o funciones promedio.

Las funciones *compensatorias* son monótonas no decrecientes, simétricas y cumplen las propiedades frontera. Si $G^{(n)} \leq H^{(n)}$, entonces $G^{(n)} \leq F^{(n)} \leq H^{(n)}$.

Notemos además que si $G^{(n)}$ y $H^{(n)}$ son funciones promedio, la función $F^{(n)}$ obtenida es una función promedio.

Las funciones compensatorias más habituales son las obtenidas con el promedio media aritmética o geométrica ponderada, es decir, las definidas por Turksen [21] y Zimmermann y Zysno [24]:

$$F^{(n)} = G^{(n)1-\gamma} H^{(n)\gamma}$$

$$F^{(n)} = G^{(n)}(1 - \gamma) + H^{(n)\gamma}$$

donde $\gamma \in [0, 1]$ es el grado de compensación.

y como ejemplos particulares más conocidos, la función de Luhandjula, las funciones compensatorias de Sales y las de Werners, entre otras.

3 CARACTERIZACIÓN Y PROPIEDADES

En esta sección enunciamos diversos teoremas de caracterización para algunas funciones de agregación consideradas en este trabajo. No se incluyen las demostraciones pero se hace referencia, en cada caso, a los artículos en los que pueden consultarse.

3.1 CARACTERIZACIÓN POR LA ESTABILIDAD

Antes de enunciar algunos teoremas de caracterización mediante las propiedades de estabilidad, es conveniente recordar las propiedades de estabilidad.

La utilización de las propiedades de estabilidad está relacionada con los tipos de escala definidos por Stevens [20] (ver también Coombs [3] y Robert [18]). Más concretamente, algunos autores como Fodor y Roubens [9] o Marichal, Mathonet y Tousset [17] definen *estabilidad ordinal, estabilidad para semejanzas admisibles, para traslaciones admisibles, para transformaciones lineales admisibles y estabilidad para una negación*. Notemos que en el caso de las funciones de agregación las transformaciones admisibles tienen que ser funciones ϕ de $[0, 1]$ en $[0, 1]$.

Definición.- Una función de agregación $F^{(n)}$ es *ordinalmente estable* si cumple

$$\begin{aligned} F^{(n)}(\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)) &= \\ &= \phi F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ y para toda función $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua y estrictamente creciente.

Si $\phi(x) = rx$ con $r \in R$ y $r > 0$ se dice que $F^{(n)}$ es *estable para semejanzas admisibles*. Cuando $\phi(x) = x+t$ con $t \in R$, $F^{(n)}$ es *estable para traslaciones admisibles*. Finalmente, si $\phi(x) = rx+t$, con $r, t \in R$ y $r > 0$ se dice que $F^{(n)}$ es *estable para transformaciones lineales admisibles*.

Por otra parte, es habitual analizar también la estabilidad para negaciones, es decir, analizar la autodualidad para determinadas negaciones en funciones de agregación, que viene dada por:

Definición.- Una función de agregación $F^{(n)}$ es estable para una negación N si se cumple

$$F^{(n)}(Nx_1, Nx_2, \dots, Nx_n) = NF^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$.

En este sentido Silvert [19] y Fodor y Roubens [9] demuestran el siguiente resultado:

3.1.1 Proposición [9] [19]

Una función de agregación $F^{(n)}$ continua, monótona no decreciente, simétrica, tal que $F^{(n)}(0, \dots, 0) = 0$ y $F^{(n)}(1, \dots, 1) = 1$, es estable para una determinada negación fuerte si y sólo si $F^{(n)}$ viene dada por:

$$\varphi^{-1} \left[\frac{g(x_1, x_2, \dots, x_n)}{g(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(Nx_1, Nx_2, \dots, Nx_n)} \right]$$

para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, donde g de $[0, 1]^n$ en $[0, 1]$ es continua, simétrica y tal que $g(0, 0, \dots, 0) = 0$ y la función φ es la generadora de la negación fuerte, es decir, $N(x) = \varphi^{-1}[1 - \varphi(x)]$.

Por tanto todas las funciones de agregación, según la definición de este trabajo, continuas serán autoduales si y sólo si vienen generadas por una función g de la forma anterior. Ahora bien, ¿bajo que condiciones estas agregaciones autoduales son compensativas, o lo que es equivalente, idempotentes? Para responder a esta cuestión, veamos en primer lugar una proposición para a continuación comentar diversos resultados ilustrados con ejemplos.

3.1.2 Proposición

Una función de agregación $F^{(n)}$ continua, monótona no decreciente, simétrica, tal que $F^{(n)}(0, \dots, 0) = 0$ y $F^{(n)}(1, \dots, 1) = 1$, estable para una negación fuerte generada por φ , es idempotente si y sólo si

$$\frac{g(x, x, \dots, x)}{g(Nx, Nx, \dots, Nx)} = \frac{\varphi(x)}{1 - \varphi(x)}$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Observemos que, según la proposición anterior, para la negación habitual $N(x) = 1 - x$ ($\varphi = Id$), es decir, para $F^{(n)}$ suma simétrica de Sylvert, si g es idempotente la función agregación $F^{(n)}$ también lo será, pero el recíproco no es cierto, como muestran los siguientes ejemplos:

· Para $g(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i$ (no idempotente) la función agregación es la media aritmética, que sí es idempotente.

· Para $g(x_1, \dots, x_n) = (\sum x_i^w)^{\frac{1}{w}}$, $w > 0$ que tampoco es idempotente, la función agregación $F^{(n)}$ correspondiente sí es idempotente

En cambio para otras negaciones fuertes habituales no es análogo, ya que la idempotencia de g no es una condición suficiente. Por ejemplo para las negaciones de Yager $N_w(x) = (1 - x^w)^{\frac{1}{w}}$ ($\varphi(x) = x^w$) $w > 0$, si g fuera idempotente, la función de agregación correspondiente sería idempotente si y solo si

$$x = x^2 + x(1 - x^w)^{\frac{1}{w}}$$

lo que se cumple únicamente para $x = 0$ y $x = 1$, cualquiera que sea w .

En cuanto a otras propiedades de estabilidad enunciaremos los siguientes resultados:

3.1.3 Proposición [17]

Una función de agregación $F^{(n)}$ es estable para transformaciones lineales admisibles si y sólo si existe una función de agregación $M^{(n)}$ definida en $[0, 1]^n$, tal que $F^{(n)}$ viene dada por

$$\begin{cases} x & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x, x, \dots, x) \\ (x_{(n)} - x_{(1)}) M^{(n)} \left[\frac{x_1 - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}, \dots, \frac{x_n - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}} \right] + x_{(1)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para todo $(x_1, \dots, x_n)$ de $[0, 1]^n$, donde $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ son los elementos de $(x_1, \dots, x_n)$ escritos en orden creciente, es decir, $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

3.1.4 Proposición [9] [1]

1) Una media generalizada $F^{(n)}$ es estable para traslaciones admisibles si y sólo si

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\alpha} \log \sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha x_i}}{n}; \quad \alpha \neq 0$$

o bien $F^{(n)}$ es la media aritmética.

2) Una media generalizada $F^{(n)}$ es estable para semejanzas admisibles si y sólo si

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha}; \quad \alpha \neq 0$$

o bien $F^{(n)}$ es la media geométrica

Corolario [9]

La medias generalizadas que son estables para semejanzas admisibles y para las negaciones de la forma

$N(x) = (1 - x^\alpha)^{1/\alpha}$ con $\alpha \neq 0$, corresponden a la familia de las medias raíz-potencia.

3.1.5 Proposición [9]

Una función de agregación $F^{(n)}$ es simétrica, compensativa, continua y ordinalmente estable si y sólo si $F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el estadístico de orden k , es decir,

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{(k)}$$

donde $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(k)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

3.1.6 Proposición [9]

Una función de agregación $F^{(n)}$ es monótona no decreciente, simétrica, idempotente, continua y estable para las transformaciones lineales admisibles en sentido generalizado de la forma

$$\begin{aligned} F^{(n)}(rx_{(1)} + t_{(1)}, \dots, rx_{(n)} + t_{(n)}) &= \\ = rF^{(n)}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) + T(t_{(1)}, \dots, t_{(n)}) \end{aligned}$$

donde $t_{(1)} \leq \dots \leq t_{(n)}$ y $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ si y sólo si es una media ponderada ordenada (OWA).

Observemos que, en consecuencia, las medias ponderadas ordenadas son también autoduales para la negación $N(x) = 1 - x$.

3.2 CARACTERIZACIÓN POR LA SEPARABILIDAD

Antes de analizar bajo qué condiciones las funciones de agregación son separables, recordemos la definición de separabilidad.

Definición.- Una función de agregación $F^{(n)}$ es *separable* si $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ se cumple

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1) * g(x_2) * \dots * g(x_n)$$

donde $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es *continua* y $*$: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una operación *continua, asociativa y cancelativa*.

Además, se dice que es *separable en sentido generalizado* si se verifica lo anterior para funciones g_i distintas en cada componente $i = 1, \dots, n$.

3.2.1 Proposición [9]

Una función de agregación $F^{(n)}$ es idempotente y separable si y sólo si es una media generalizada.

3.2.2 Proposición [9]

Una función de agregación $F^{(n)}$ es estable para semejanzas admisibles, idempotente y separable en sentido

generalizado si y sólo si

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}$$

o bien

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

donde $\alpha > 0$, $\omega_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$.

Lógicamente, las medias ponderadas ordenadas también son separables.

3.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES COMPENSATORIAS

A diferencia de los promedios analizados en los apartados anteriores, las funciones de agregación compensatorias no son tan habituales en la literatura ni han sido tan extensamente estudiadas como aquéllos. Ello es debido principalmente a que sus propiedades no pueden establecerse de forma tan general, ya que dependen en gran medida del tipo de compensación utilizado (combinación convexa lineal o exponencial o mediante promedios) y de las propiedades de las funciones que se compensan, que generalmente son t-normas y t-conormas.

De hecho los ejemplos habituales no verifican claramente muchas de las propiedades señaladas para promedios. Como muestra, el primer operador compensatorio introducido por Zimmermann y Zysno [24] en 1980 dado por:

$$F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1-\gamma} \left(\bigoplus_{i=1}^n x_i \right)^\gamma$$

ni es idempotente, ni estable para transformaciones lineales, ni autodual, ni separable. No obstante, el operador compensatorio presentado por Zimmermann [23] posteriormente en 1986

$$F^{(n)} = (1 - \gamma) \text{MIN}^{(n)} + \gamma \text{MAX}^{(n)}$$

sí es idempotente y estable para transformaciones lineales, aunque sigue sin ser ni autodual ni separable. Ello es debido a la proposición que demuestra en [17] que las únicas funciones de agregación asociativas y estables para transformaciones lineales son el mínimo y el máximo, es decir, la única t-norma y t-conorma que, además, son idempotentes.

En conclusión, las funciones de agregación compensatorias basadas en t-normas y t-conormas y las generalizadas mediante promedios, han sido definidas con

la finalidad principal de obtener un grado de compensación entre funciones y no coinciden ni en finalidad ni en propiedades con las funciones de agregación compensativas.

Referencias

- [1] Aczél J., Alsina C., Synthesizing judgements: a functional equations approach, *Math. Modelling*, 9 (1987) 311-320.
- [2] Carbonell M., Mas M., Mayor G., On a class of Monotonic Extended OWA Operators, *Proc. of the 6th IEEE Internat. Conference on Fuzzy Systems*, Barcelona (1997) 1695-1700.
- [3] Coombs C.H., A Theory of Psychological Scaling, *Eng. Res. Bull.* 34, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan (1952).
- [4] Dubois D., Prade H., Criteria aggregation and ranking of alternatives in the framework of fuzzy set theory, in: Zimmermann H. J., Zadeh L.A., Gaines B.R. (Eds), *Fuzzy Sets and Decision Analysis* (North-Holland) (1984) 209-240.
- [5] Dubois D., Prade H., A review of fuzzy set aggregation connectives, *Inform. Sci.* 36 (1985) 85-121.
- [6] Dujmovic, J. J., Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotechn. Fak.* (1974) 147-158.
- [7] Dykhoff H., Pedrycz W., Generalized means as model of compensative connectives, *Fuzzy Sets and Systems* 14 (1984) 143-154.
- [8] Fung L. W., Fu K. S., An axiomatic approach to rational decision-making in fuzzy environment, in: Zadeh L. A., Fu K. S., Tanaka K., Shimura M. (Eds), *Fuzzy sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Academic Press) (1975) 227-256.
- [9] Fodor J.C., Roubens M., Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support, *Kluwer Academic Publishers* 1994.
- [10] Fodor J.C., Yager, R.R. and Rybelov, A., Structure of uninorms. *Internat. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems*, 5 (1997) 411-427.
- [11] Grabisch M., Orlovski S., Yager R., Fuzzy Aggregation of Numerical Preferences in Fuzzy Sets in: *Decision Analysis, Operations Research and Statistics*, Edited by Slowinski R. Ed. Kluwer (1998).
- [12] Klir, J. and Yuan, B. Fuzzy sets and Fuzzy logic. theory and Applications, *Prentice-Hall* (1995)
- [13] Kolmogoroff A.N., Sur la notion de la moyenne, *Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez.*, 12 (1930) 388-391.
- [14] Komorníková M., Generated aggregation operators, *Proc. of the Eusflat-Estylf Joint Conference*, Palma de Mallorca (1999) 355-357.
- [15] Mesiar, R., Aggregation operators: some classes and construction methods. *Proc IPMU'2000*, Madrid (2000) 70-71.
- [16] Mizumoto M., Pictorial representations of fuzzy connectives, Part II: Cases of compensatory operators and self-dual operators, *Fuzzy Sets and Systems* 32 (1989) 45-79.
- [17] Marichal J.L., Mathonet P., Tousset E., Characterization of some aggregation functions stable for positive linear transformations, *Fuzzy Sets and Systems* 102 (1999) 293-314.
- [18] Roberts F.J., Measurement Theory with Applications to Decision-making, Utility and the Social Sciences, *Addison-Wesley, Reading, MA.* (1979).
- [19] Silvert W., Symmetric summation: A class of operations on fuzzy sets, *IEEE Trans. Systems, Man Cybernet.*, 9 (1979) 657-659.
- [20] Stevens S.S., On the Theory of Scales of Measurement, *Science*, 103 (1946) 677-680.
- [21] Turksen, I., Interval-valued fuzzy sets and "compensatory AND", *Fuzzy sets and Systems*, 20 (1992) 191-210.
- [22] Yager R.R., On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernet.*, 18 (1988) 183-190.
- [23] Zimmermann, H. J., Fuzzy set theory and mathematical programming, in: Jones A. y al., (Eds) *Fuzzy Sets Theory and Applications* (Reidel, Dordrecht) (1986) 99-114.
- [24] Zimmermann, H. J., Zysno, Latent connectives in human decision making, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980) 37-51.

Condición de modularidad para uninormas idempotentes

Daniel Ruiz

Dpt. de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
07071 Palma de Mallorca.
daruz@yahoo.com

Joan Torrens

Dpt. de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
07071 Palma de Mallorca.
dmijts0@clust.uib.es

Resumen

En este trabajo se caracterizan las uninormas idempotentes que satisfacen la propiedad modular. Se da también la caracterización para los casos especiales de uninormas idempotentes continuas por la izquierda y/o por la derecha de forma separada.

Palabras Clave: Uninormas, idempotencia, modularidad, operadores de agregación.

1 Introducción

Desde la introducción de las uninormas hecha por Yager-Rybalov en [11], éstas han sido extensivamente estudiadas por diversos autores tanto desde el punto de vista aplicado como del puramente teórico. De hecho, el gran número de campos en los que las uninormas han demostrado ser útiles como son los sistemas expertos, las redes neuronales, la agregación, la lógica difusa, la modelización de sistemas difusos, etc...; ha impulsado un estudio exhaustivo de estos operadores desde el punto de vista teórico.

Así, en [5] puede hallarse un estudio completo sobre la estructura de las uninormas, en [1] se establecen las clases conocidas que se dividen en tres grupos: las uninormas de $\mathcal{U}_{\min}$ y $\mathcal{U}_{\max}$, las uninormas *representables* y las *idempotentes*. Los dos primeros grupos se estudian y clasifican en [5] mientras que el tercero, las uninormas idempotentes, se caracterizan en [2] para los casos continuos por la izquierda y por la derecha. El caso general, sin ninguna hipótesis de continuidad, también ha sido caracterizado recientemente en [7] de una forma similar.

Por otra parte, diversas ecuaciones funcionales con uninormas han sido estudiadas en [3], [8] y [9]. Concre-

tamente, las condiciones de distributividad y de modularidad son resueltas respectivamente, en [8] y [9] para diferentes tipos de operadores incluyendo las uninormas de $\mathcal{U}_{\min}$ y $\mathcal{U}_{\max}$. Más aún, para el caso de uninormas idempotentes, la propiedad de distributividad ha sido también resuelta en [10].

El propósito de este trabajo es realizar un estudio similar para la ecuación funcional de modularidad cuando las funciones incógnitas son uninormas idempotentes. A partir de la caracterización de estos operadores como combinaciones especiales del Máximo y el Mínimo dependiendo de una función decreciente $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, demostramos que dos uninormas idempotentes, U_1 y U_2 , son modulares si y sólo si sus correspondientes funciones decrecientes, g_1 y g_2 , satisfacen ciertas condiciones adicionales. De dicha caracterización se deduce que, dadas dos uninormas idempotentes U_1 y U_2 con elementos neutros e_1 y e_2 , si $e_2 < e_1$ entonces U_1 es modular respecto de U_2 si y sólo si U_1 y U_2 forman un par distributivo. Los casos especiales de uninormas idempotentes continuas por la derecha y las continuas por la izquierda son presentados aparte debido a su interés específico, aunque en este caso se obtienen únicamente soluciones triviales o ya conocidas involucrando uninormas idempotentes de $\mathcal{U}_{\min}$ y $\mathcal{U}_{\max}$.

2 Preliminares

En esta sección recordamos algunos resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo. Para más detalles tanto sobre t-normas y t-conormas, como sobre uninormas puede consultarse por ejemplo, [6].

Definición 1 Una uninorma es un operador binario $U : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ asociativo, conmutativo, creciente respecto de cada variable y tal que existe un elemento $e \in [0, 1]$, llamado elemento neutro, que verifica $U(e, x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Resulta obvio que el operador U es una t-norma en el caso en que $e = 1$ y es una t-conorma cuando $e =$

0. Para cualquier uninorma se tiene $U(0,1) \in \{0,1\}$ y una uninorma U se dice que es conjuntiva cuando $U(1,0) = 0$ y disyuntiva cuando $U(1,0) = 1$. Por otra parte, una uninorma U se dice que es idempotente cuando $U(x,x) = x$ para todo $x \in [0,1]$. Así mismo, diremos que U es continua por la izquierda (derecha) si lo son sus secciones.

Teorema 1 ([2]) *Un operador binario U es una uninorma idempotente continua por la izquierda con elemento neutro $e \in [0,1]$ si y sólo si existe una función decreciente $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ con punto fijo e que satisface $g^2(x) \geq x$ para todo $x \leq g(0)$ y $g(x) = 0$ para todo $x > g(0)$ y tal que, para cualesquiera $x, y \in [0,1]$, U viene dada por*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } y \leq g(x) \text{ y } x \leq g(0) \\ \max(x,y) & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Teorema 2 ([2]) *Un operador binario U es una uninorma idempotente continua por la derecha con elemento neutro $e \in [0,1]$ si y sólo si existe una función decreciente $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ con punto fijo e que satisface $g^2(x) \leq x$ para todo $x \geq g(1)$ y $g(x) = 1$ para todo $x < g(1)$ y tal que, para cualesquiera $x, y \in [0,1]$, U viene dada por*

$$U(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } y \geq g(x) \text{ y } x \geq g(1) \\ \min(x,y) & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por otra parte, en [4] Czogala-Drewniak dan la forma general de operadores idempotentes más generales que las uninormas. Sin embargo, el recíproco de dicho resultado no ha sido demostrado hasta hace poco en [7]. Concretamente, se tiene la siguiente caracterización:

Teorema 3 ([7]) *Sea F un operador binario sobre $[0,1]$. F es asociativo, creciente respecto de cada variable, idempotente y tiene un elemento neutro $e \in [0,1]$ si y sólo si existe una función decreciente $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ con $g(e) = e$, $g(x) = 0$ para todo $x > g(0)$, verificando*

$$\inf\{y \mid g(y) = g(x)\} \leq g^2(x) \leq \sup\{y \mid g(y) = g(x)\}$$

para todo $x \in [0,1]$ tal que

$$F(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } y < g(x) \text{ o} \\ & y = g(x) \text{ y } x < g^2(x) \\ \max(x,y) & \text{si } y > g(x) \text{ o} \\ & y = g(x) \text{ y } x > g^2(x) \\ \min(x,y) & \text{si } y = g(x) \text{ y } x = g^2(x) \\ \max(x,y) & \end{cases}$$

Más aún, en este caso F es necesariamente conmutativo excepto quizás en el conjunto de puntos (x,y) tales que $y = g(x)$ con $x = g^2(x)$.

Nota: Dada una $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ decreciente con $g(e) = e$, notemos que la condición sobre g del teorema anterior se convierte en $g^2(x) = x$ para todos los $x \in [0,1]$ en los que g es estrictamente decreciente. En cambio, cuando g es constante en un intervalo (a,b) entonces $g^2(x)$ ha de ser tal que $a \leq g^2(x) \leq b$.

Notemos además que el teorema anterior da una caracterización de todas las uninormas idempotentes, requiriendo sencillamente conmutatividad en los puntos (x,y) tales que $y = g(x)$ y $x = g^2(x)$. En particular, esta caracterización incluye las dadas en los teoremas 1 y 2 para uninormas continuas por la izquierda y por la derecha. De hecho, si la función F es continua por la izquierda tendrá que valer el mínimo en todos los (x,y) tales que $y = g(x)$ y por lo tanto la función g tendrá que verificar $g^2(x) \geq x$ para todo $x \in [0,1]$. De forma similar se puede razonar para las continuas por la derecha.

A raíz del teorema anterior, de ahora en adelante denotaremos una uninorma idempotente por $U = (e, g)$ donde e representará el elemento neutro de la uninorma U y g su correspondiente función decreciente.

Finalmente, recordemos que en [10] puede hallarse la caracterización de las uninormas idempotentes que verifican la propiedad distributiva. De estos resultados destacamos el siguiente referente a *pares distributivos*, esto es: pares de uninormas (U_1, U_2) de forma que U_1 es distributiva respecto de U_2 y U_2 lo es respecto de U_1 .

Teorema 4 ([10]) *Sean $U_1 = (e_1, g_1)$ y $U_2 = (e_2, g_2)$ uninormas idempotentes con $e_2 < e_1$. Entonces, (U_1, U_2) es un par distributivo si y sólo si g_1 y g_2 satisfacen las siguientes propiedades:*

1. g_2 es constante en $[e_2, e_1]$.
2. g_1 es constante en $[e_2, e_1]$.
3. $g_1(x) = g_2(x)$ para todos los $x \in [0,1] \setminus [e_2, e_1]$.
4. Si existen x y z verificando $g_1(z) = g_2(z) = x$ y $g_1(x) = g_2(x) = z$, entonces necesariamente $U_1(x,z) = U_2(x,z)$.

3 Caso general: uninormas idempotentes

El objetivo de este artículo es resolver la ecuación funcional:

$$U_1(x, U_2(y, z)) = U_2(U_1(x, y), z) \quad \text{para } z \leq x \quad (1)$$

donde $U_1 = (e_1, g_1)$ y $U_2 = (e_2, g_2)$ son uninormas idempotentes. Cuando U_1 y U_2 verifican la ecuación (1) diremos que U_1 es modular respecto de U_2 .

Primero vemos la relación que necesariamente ha de existir entre los elementos neutros.

Proposición 1 Sean $U_1 = (e_1, g_1)$ y $U_2 = (e_2, g_2)$ dos uninormas idempotentes que satisfacen la ecuación (1). Entonces $e_1 \geq e_2$ y en el caso en que $e_1 = e_2$, se tiene que $U_1 = U_2$.

Demostración: Supongamos que $e_1 < e_2$, entonces poniendo $e_1 = y = z \leq x = e_2$ en (1), tendremos:

$$U_1(e_2, U_2(e_1, e_1)) = U_2(U_1(e_2, e_1), e_1)$$

es decir, $U_1(e_2, e_1) = U_2(e_2, e_1) = e_1$, por ser U_2 idempotente. Pero también tenemos que $U_1(e_2, e_1) = e_2$, llegando a que $e_2 = e_1$, lo que es una contradicción con lo que habíamos supuesto, $e_1 < e_2$.

Veamos ahora el caso en que $e_1 = e_2 = e$. Poniendo $y = e$ en (1) tenemos:

$$U_1(x, U_2(e, z)) = U_2(U_1(x, e), z)$$

para todo $z \leq x$, es decir: $U_1(x, z) = U_2(x, z)$ para todo $x \leq z$. Por conmutatividad tenemos que $U_1 = U_2$. ■

Ahora estudiamos el caso en que $e_2 < e_1$. Tenemos los siguientes resultados de necesidad en función de g_1 y g_2 .

Proposición 2 Sean $U_1 = (g_1, e_1)$ y $U_2 = (g_2, e_2)$ dos uninormas idempotentes con $e_2 < e_1$ que satisfacen la ecuación (1). Entonces

$$g_2(x) \leq g_1(x) \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Demostración: Supongamos que existe x tal que $e_1 \leq x$ y que $g_1(x) < g_2(x)$. Entonces existe un z que cumple la siguiente condición:

$$g_1(x) < z < g_2(x) \leq e_2 < e_1 \leq x$$

ya que $g_2(x) \leq e_2$ por ser g_2 decreciente. También podemos decir que $z < g_2(x) \leq g_2(e_1)$ de nuevo por el decrecimiento de g_2 . Usando la caracterización de uninormas idempotentes, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} U_1(x, U_2(e_1, z)) &= U_1(x, \min(e_1, z)) = \\ &= U_1(x, z) = \max(x, z) = x, \end{aligned}$$

pero por otra parte

$$U_2(U_1(x, e_1), z) = U_2(x, z) = \min(x, z) = z,$$

con lo cual llegamos a que (U_1, U_2) no cumplirían la ecuación (1).

Si suponemos ahora que existe $x \leq e_1$ tal que $g_1(x) < g_2(x)$ se llega a contradicción de forma similar. ■

Proposición 3 Sean $U_1 = (g_1, e_1)$ y $U_2 = (g_2, e_2)$ dos uninormas idempotentes con $e_2 < e_1$. Si U_1 y U_2 satisfacen la ecuación (1) entonces

$$i) \quad g_2(x) = e_2 \text{ para todo } x \in [e_2, e_1].$$

$$ii) \quad g_1(x) = e_1 \text{ para todo } x \in [e_2, e_1].$$

Demostración: Demostraremos solamente i) puesto que ii) se hace de forma similar. Supongamos, por lo contrario, que existe $y \in [e_2, e_1]$ tal que $g_2(y) < e_2$. Entonces existen x, z cumpliendo que: $g_2(y) < z < x < e_2$, y tenemos:

$$U_1(x, U_2(y, z)) = U_1(x, y) = \min(x, y) = x,$$

ya que $x < y \leq e_1 \leq g_1(y)$.

Y por otra parte tenemos que:

$$U_2(U_1(x, y), z) = U_2(x, z) = \min(x, z) = z$$

porque $z < x < e_2 \leq g_2(z)$.

Pero esto quiere decir que (U_1, U_2) no cumplen la ecuación (1) llegando a contradicción. ■

Proposición 4 Sean $U_1 = (g_1, e_1)$ y $U_2 = (g_2, e_2)$ dos uninormas idempotentes con $e_2 < e_1$. Si U_1 y U_2 satisfacen la ecuación (1) entonces

$$i) \quad g_2(x) = g_1(x) \text{ para todo } x > e_1.$$

$$ii) \quad g_2(x) = g_1(x) \text{ para todo } x < e_2.$$

Demostración: Veamos primero i). Supongamos que existe x tal que $e_1 < x$ y $g_1(x) > g_2(x)$ (sabemos por la proposición 2 que $g_2(x) \leq g_1(x)$). Distinguimos los siguientes casos:

- Si $g_1(x) \leq e_2$, entonces existe z tal que $g_2(x) < z < g_1(x) < e_2 < e_1 < x$, y tenemos:

$$U_1(x, U_2(e_2, z)) = U_1(x, z) = \min(x, z) = z,$$

y por otra parte:

$$U_2(U_1(x, e_2), z) = U_2(x, z) = \max(x, z) = x,$$

ya que por la proposición anterior $g_1(e_2) = e_1$, que es menor que x . Esto significa que (U_1, U_2) no cumplen la ecuación (1).

- Si $g_1(x) > e_2$, entonces existe z tal que $e_1 < z < x$, y tenemos:

$$U_1(x, U_2(e_2, z)) = U_1(x, z) = \max(x, z) = x,$$

ya que $g_1(x) \leq e_1 < z$. En cambio,

$$U_2(U_1(x, e_2), z) = U_2(e_2, z) = z,$$

porque $e_2 < g_1(x)$. Es decir, (U_1, U_2) no cumplen la ecuación (1).

Con respecto al apartado ii) dividimos la demostración en varios pasos:

- Vemos primero que $g_2(x) \geq e_1$ para todo $x < e_2$. Supongamos que existe $x < e_2$ tal que $g_2(x) < e_1$, entonces podemos tomar un z tal que $e_2 \leq g_2(x) < z < e_1$. Tenemos que $g_2(z) = e_2$ por la proposición anterior, por un lado tenemos que $x < g_2(z)$, es decir $U_2(x, z) = \min(x, z) = x$, pero también $z > g_2(x)$, lo que significa que $U_2(x, z) = \max(x, z) = z$, con lo que llegamos a contradicción, es decir, $g_2(x) \geq e_1$ para todo $x < e_2$.
- Vemos ahora que $g_2(x) = g_1(x)$ para todo $x < e_2$. Supongamos que existe $x < e_2$ tal que $g_2(x) < g_1(x)$. El paso anterior nos asegura que $e_1 \leq g_2(x)$ y por tanto, existe z tal que:

$$x < e_2 < e_1 \leq g_2(x) < z < g_1(x),$$

con lo que tenemos:

$$U_1(z, U_2(e_2, x)) = U_1(z, x) = x$$

y por otra parte:

$$U_2(U_1(z, e_2), x) = U_2(z, x) = z$$

porque $g_1(e_2) = e_1 < z$. Con esto deducimos de nuevo que (U_1, U_2) no cumplen la ecuación de modularidad. ■

Proposición 5 Sean $U_1 = (g_1, e_1)$ y $U_2 = (g_2, e_2)$ dos uninormas idempotentes con $e_2 < e_1$ que satisfacen la ecuación (1) entonces, si existen x, z tales que $g_1(z) = g_2(z) = x$ y $g_1(x) = g_2(x) = z$ es necesario que $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

Demostración: Supongamos que existen x y z tales que satisfacen: $g_1(z) = g_2(z) = x$ y $g_1(x) = g_2(x) = z$. Podemos suponer además, sin pérdida de generalidad, que $z < x$.

Tenemos que $z < e_2$, ya que si $z \geq e_2$ tendríamos que $g_2(z) = x \leq e_2 \leq z$, que contradice lo que hemos supuesto.

También tenemos que $x > e_1$, ya que si $x \leq e_1$ entonces $g_1(x) = z \geq e_1 \geq x$, que contradice que $z < x$.

Tenemos entonces que $z < e_2 < e_1 < x$ y entonces existe y tal que:

$$z < e_2 = g_2(y) < y < e_1 = g_1(y) < x$$

y por un lado tenemos:

$$U_1(x, U_2(y, z)) = U_1(x, z)$$

y por el otro:

$$U_2(U_1(x, y), z) = U_2(x, z)$$

y si satisface la ecuación (1) entonces necesariamente $U_1(x, z) = U_2(x, z)$. ■

Con los resultados anteriores podemos establecer ya la caracterización de los pares (U_1, U_2) verificando que U_1 es modular respecto de U_2 .

Teorema 5 Sean $U_1 = (e_1, g_1)$ y $U_2 = (e_2, g_2)$ dos uninormas idempotentes con $e_2 < e_1$. Entonces (U_1, U_2) satisfacen la ecuación (1) si y sólo si:

- $g_1(x) = e_1$ para todo $x \in [e_2, e_1]$.
- $g_2(x) = e_2$ para todo $x \in [e_2, e_1]$.
- $g_2(x) = g_1(x)$ para todo $x \in [0, 1] \setminus [e_2, e_1]$.
- Si existen x, z tales que $g_1(x) = g_2(x) = z$ y $g_1(z) = g_2(z) = x$ entonces $U_1(x, z) = U_2(x, z)$.

Demostración: La necesidad queda demostrada a partir de los resultados anteriores. La suficiencia es un cálculo haciendo casos sobre el orden de x, y, z . ■

Corolario 1 Sean $U_1 = (e_1, g_1)$ y $U_2 = (e_2, g_2)$ dos uninormas idempotentes con $e_2 < e_1$. Entonces U_1 es modular respecto de U_2 si y sólo si (U_1, U_2) forman un par distributivo.

Demostración: Inmediata a partir del teorema anterior y del teorema 4 de los preliminares. ■

Ejemplo 1 A continuación mostramos una familia de pares de uninormas (U_1, U_2) que satisfacen la ecuación de modularidad y por tanto son también un par distributivo.

Sean e_1 y e_2 dos números reales cualesquiera en $[0, 1]$ con $e_2 < e_1$. Consideramos las siguientes funciones $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$g_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{e_1-1}{e_2}\right)x + 1 & \text{si } x < e_2 \\ e_1 & \text{si } x \in [e_2, e_1] \\ \frac{e_2}{e_1-1}(x-1) & \text{si } x > e_1 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{e_1-1}{e_2}\right)x + 1 & \text{si } x < e_2 \\ e_2 & \text{si } x \in [e_2, e_1] \\ \frac{e_2}{e_1-1}(x-1) & \text{si } x > e_1 \end{cases}$$

y las uninormas definidas por:

$$U_1(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } y \leq g_1(x) \\ \max(x, y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$U_2(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } y < g_2(x) \text{ ó } (g_2(x) = y \\ & \text{y } x < e_2 \text{ ó } x > e_1) \\ \max(x, y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Estas uninormas cumplen las condiciones impuestas por el teorema y, por tanto, forman un par de uninormas (U_1, U_2) modular y distributivo. En la figura 1 se pueden observar las funciones g_1 y g_2 .

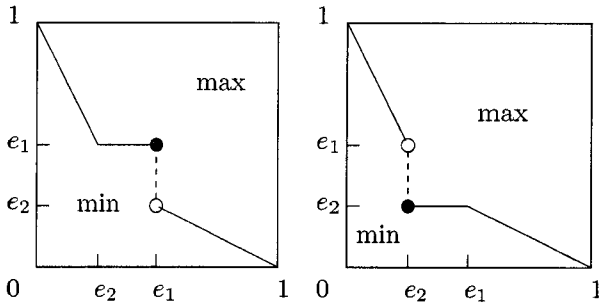


Figura 1. Funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ del ejemplo 1.

Como se puede observar, en dicha familia U_1 es siempre continua por la izquierda pero U_2 no tiene ninguna continuidad lateral.

Ejemplo 2 Ahora veremos otra familia de pares de uninormas (U_1, U_2) en las que es U_1 quien no presenta ninguna continuidad lateral.

Sean de nuevo e_1 y e_2 dos números reales cualesquiera en $[0, 1]$ con $e_2 < e_1$. Consideramos las siguientes funciones $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < e_2 \\ e_1 & \text{si } x \in [e_2, e_1] \\ e_2 & \text{si } x > e_1 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < e_2 \\ e_2 & \text{si } x \in [e_2, 1] \end{cases}$$

y las uninormas definidas por:

$$U_1(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } y < g_1(x) \text{ ó } (g_1(x) = y \text{ y } x \leq e_1) \\ \max(x, y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$U_2(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \text{si } y \geq e_2 \text{ y } x \geq e_2 \\ \min(x, y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Estas uninormas cumplen las condiciones impuestas por el teorema y, por tanto, forman un par de uninormas (U_1, U_2) modular y distributivo. En la figura 2 se pueden observar las funciones g_1 y g_2 . En este caso $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$ y U_1 no presenta ninguna continuidad lateral (excepto cuando $e_1 = 1$ ó $e_2 = 0$).

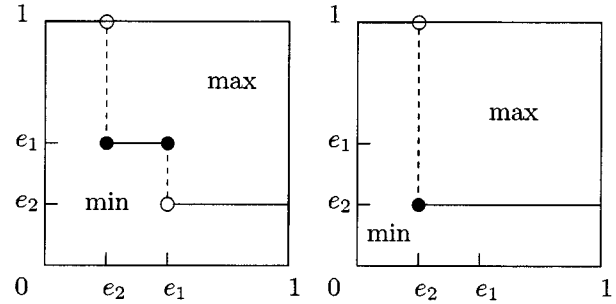


Figura 2. Funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ del ejemplo 2.

4 Casos de continuidad por la izquierda y/o por la derecha

A continuación restringimos la caracterización conseguida anteriormente al conjunto de uninormas idempotentes continuas por la izquierda y/o por la derecha.

Teorema 6 Sean $U_1 = (e_1, g_1)$ y $U_2 = (e_2, g_2)$ dos uninormas idempotentes con U_2 continua por la izquierda y $e_1 > e_2$. Entonces (U_1, U_2) satisfacen la ecuación (1) si y sólo si $U_2 = \max$ y $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$.

Demostración: Por una parte, si $U_2 = \max$ y $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$, es evidente que se cumplen las cuatro condiciones impuestas en el teorema.

Para demostrar que ésta es la única solución, veamos primero que $U_2 = \max$. Para ello, supongamos que $e_2 > 0$. Sabemos que para todo $0 \leq x < e_2$, $g_2(x) = g_1(x) \geq e_1$, pero entonces g_2 no es continua por la izquierda con lo cual tampoco lo es U_2 , es decir $U_2 = \max$.

Ahora se deduce del teorema anterior que $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$, ya que $g_1(x) = e_1$ si $x \in [0, e_1]$ y $g_1(x) = 0$ si $x \in (e_1, 1]$, es decir, $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$. ■

Teorema 7 Sean $U_1 = (e_1, g_1)$ y $U_2 = (e_2, g_2)$ dos uninormas idempotentes con U_1 continua por la derecha y $e_1 > e_2$. Entonces (U_1, U_2) satisfacen la ecuación (1) si y sólo si $U_1 = \min$ y $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$.

Demostración: Se demuestra de forma similar al anterior. ■

Teorema 8 Sean $U_1 = (e_1, g_1)$ y $U_2 = (e_2, g_2)$ uninormas continuas por la derecha o por la izquierda con $e_1 > e_2$. Entonces (U_1, U_2) satisfacen la ecuación (1) si y sólo si:

- $U_2 = \max$ y $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$, o bien,
- $U_1 = \min$ y $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$

Demostración: Por los dos resultados anteriores, si U_2 es continua por la izquierda o bien si U_1 es continua por la derecha, el resultado ya está demostrado.

Queda el caso en que U_1 es continua por la izquierda y U_2 es continua por la derecha. En este caso, si $e_2 = 0$, entonces está claro que $U_2 = \max$ y $U_1 \in \mathcal{U}_{\max}$. De esta forma, basta demostrar el caso en que $e_2 > 0$. Sabemos por la caracterización del teorema que $g_2(0) = g_1(0) \geq e_1$ por lo que consideramos los siguientes dos casos:

- $g_1(0) = g_2(0) = e_1$, entonces g_2 es:

$$g_2(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si } x \in [0, e_2) \\ e_2 & \text{si } x \in [e_2, e_1] \\ 0 & \text{si } x \in (e_1, 1] \end{cases}$$

pero para que g_2 sea continua por la derecha ha de ser $e_1 = 1$, es decir $U_1 = \min$ y entonces $U_2 \in \mathcal{U}_{\min}$.

- $e_1 < g_1(0) = g_2(0) < 1$. Por ser g_2 continua por la derecha, tenemos que $g_2(g_2(0)) \leq 0$, es decir $g_2(g_2(0)) = 0$. Como que g_1 y g_2 coinciden en $(e_1, 1]$, tenemos que $g_2(g_2(0)) = g_1(g_2(0))$. Entonces podemos aplicar la última condición del teorema 5 y llegamos a que $U_1(0, g_1(0)) = 0$ tiene que ser igual a $U_2(0, g_1(0)) = g_1(0)$. Pero $g_1(0) \neq 0$, con lo que llegamos a contradicción.
- $e_1 < g_1(0) = g_2(0) = 1$. Poniendo $y = e_2$, $x = 1$, $z = 0$ en la ecuación (1), tenemos:

$$U_1(1, U_2(e_2, 0)) = U_1(1, 0) = U_2(U_1(1, e_2), 0)$$

pero por otra parte

$$U_2(U_1(1, e_2), 0) = U_2(\max(1, e_2), 0) = U_2(1, 0)$$

es decir $U_1(1, 0) = U_2(1, 0)$.

Como que U_1 es continua por la izquierda, $U_1(1, 0) = U_2(1, 0) = 0$, y entonces por ser U_2 continua por la derecha, $0 < g_2(1) = g_1(1) \leq e_2$.

Ahora, si $g_2(1) = g_1(1) = e_2$, tenemos que g_1 es:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, e_2) \\ e_1 & \text{si } x \in [e_2, e_1] \\ e_2 & \text{si } x \in (e_1, 1] \end{cases}$$

pero en este caso g_1 no es continua por la izquierda, y por tanto U_1 no lo es, con lo que llegamos a contradicción.

Entonces nos queda únicamente el caso en que $0 < g_1(1) = g_2(1) < e_2$. Tenemos $g_1(g_1(1)) \geq 1$, es decir, $g_2(g_1(1)) = g_1(g_1(1)) = 1$ y podemos volver a aplicar la última condición del teorema 5, es decir $U_1(1, g_1(1)) = \min(1, g_1(1)) = g_1(1)$ y por

otro lado $U_2(1, g_2(1)) = \max(1, g_2(1)) = 1$, pero se tiene que cumplir $U_2(1, g_2(1)) = 1 = g_1(1) = U_1(1, g_2(1))$, cosa que contradice lo que habíamos supuesto. ■

Agradecimientos

El autor J. Torrens ha sido parcialmente financiado por el proyecto DGI BFM2000-1114.

Referencias

- [1] B. De Baets, Uninorms: the known classes, in Proc. Third International FLINS Workshop on Fuzzy Logic and Intelligent Technologies for Nuclear Science and Industry, Antwerp, Belgium, World Scientific, 1998.
- [2] B. De Baets, Idempotent uninorms, European J. Oper. Res. 118(3) (1999) 631-642.
- [3] T. Calvo, B. De Baets and J.C. Fodor, The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems 120 (2001) 385-394.
- [4] E. Czogala, J. Drewniak, Associative monotonic operations in fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984) 249-269.
- [5] J.C. Fodor, R.R. Yager and A. Rybalov, Structure of Uninorms, Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems 5 N. 4 (1997) 411-427.
- [6] E.P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, London (2000).
- [7] J. Martín, G. Mayor and J. Torrens, On locally internal monotonic operations, versión completa del abstract presentado en el EUROFUSE-2001 que ha sido aceptado para su publicación en un volumen especial de Fuzzy Sets and Systems.
- [8] M. Mas, G. Mayor and J. Torrens, The modularity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems 126 (2002) 207-218.
- [9] M. Mas, G. Mayor and J. Torrens, The distributivity condition for uninorms and t-operators, aparecerá en Fuzzy Sets and Systems
- [10] D. Ruiz and J. Torrens, Distributive idempotent uninorms, sometido a Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems
- [11] R.R. Yager and A. Rybalov, Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 80 (1996) 111-120.

What is the arithmetic mean of an infinite sequence?

L. González¹, E. Muel² and R. Mesiar^{3,4}

^{1,2}Dpt. of Computer Science
Alcalá University,
28871-Alcalá de Henares, Spain.

³Dpt. of Mathematics,
Slovak Technical University,
81368-Slovak Republic.

⁴Academy of Sciences of the Czech Republic
18208 Praha 8, Czech Republic.

^{1,2}{leon.gonzalez, enriqueta.muel}@uah.es ^{3,4}mesiar@vox.svf.stuba.sk

Abstract

We discuss several aspects of the generalization of the arithmetic mean for infinite sequences. It is shown that no operator on infinite sequences can possess all properties of the classical arithmetic mean. Some alternative operators are introduced and their properties compared.

1 Introduction

The standard arithmetic mean M can act on arbitrary subintervals $[a, b]$ of the extended real line. For the sake of simplicity we reduce our considerations to values from the unit interval $[0, 1]$. Then the arithmetic mean $M : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ is an aggregation operator, see ([2],[3],[4],[5]), which can be either given by several equivalent formulas, or characterized by some sets of properties. We list some of the possible approaches how to introduce the arithmetic mean M :

$$M(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

$$M(x_1, \dots, x_n) = \sup \left(c \in [0, 1] \mid \sum_{i=1}^n (x_i - c) \geq 0 \right) \quad (2)$$

$$M(x_1, \dots, x_n) = \inf \left(c \in [0, 1] \mid \sum_{i=1}^n (x_i - c) \leq 0 \right) \quad (3)$$

M is a symmetric additive aggregation operator. (4)

M is an OWA operator [6] with maximal entropy. (5)

Note that M is stable under linear transformations [7], it is a symmetric sum [8], (i.e., $M^d = M$, M is self-dual), it is idempotent, continuous, ∞ -stable, i.e., $|M(x_1, \dots, x_n) - M(y_1, \dots, y_n)| \leq \max_i |x_i - y_i|$, for details (see [4, 9]).

The aim of this contribution is to discuss possible generalizations of the arithmetic mean M to infinite domains. Note that in the case of interval index set $X = [a, b]$ the usual approach of generalizing arithmetic mean is related to the standard Lebesgue integral $M(f) = \int_X f dP$, where P is the uniform probability measure on $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$, i.e., $P = \frac{\lambda}{b-a}$, where λ is the Lebesgue measure. Evidently, then only measurable functions can be aggregated, i.e., M is not a universal aggregation operator.

In this contribution we restrict our considerations to the simplest infinite set, i.e., to $\mathbb{N}$. The problem is: how to introduce $M((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ for $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$?

2 Formula approach

We will try first to generalize formulas (1), (2), (3). One possible approach to generalize (1) is the

Cesaro means limit, i.e.,

$$M_1((x_n)_{n \in N}) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(x_1, \dots, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6)$$

Evidently, M_1 is not well defined on $[0, 1]^N$, as far as for some sequences $(x_n)_{n \in N}$ the limit (6) need not exist. Take, e.g., the sequence $(x_n)_{n \in N}$ given by $x_1 = 1, x_2 = \dots = x_{10} = 0, x_{11} = \dots = x_{100} = 1, \dots$. Then $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{10}{11}$ while $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{11}$.

Note that M_1 exist and equals c whenever $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. However, for $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ does not exist but $M_1((x_n)_{n \in N}) = \frac{1}{2}$.

Formula (2) and (3) can be generalized straightforwardly. Indeed, we can put

$$M_2((x_n)_{n \in N}) = \sup \left(c \in [0, 1] \mid \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - c) \geq 0 \right) \quad (7)$$

$$M_3((x_n)_{n \in N}) = \inf \left(c \in [0, 1] \mid \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - c) \leq 0 \right) \quad (8)$$

It can be checked that

$$M_2((x_n)_{n \in N}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (9)$$

while

$$M_3((x_n)_{n \in N}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (10)$$

Evidently, $M_2 \leq M_3$ and $M_2 = M_3$ if and only if M_1 is well defined. Note that M_2 and M_3 are defined for any input sequence $(x_n)_{n \in N}$.

As the last operator in this section we propose

$$M_4 = \frac{M_2 + M_3}{2} \quad (11)$$

Any of till now introduced operators M_1, M_2, M_3 and M_4 generalize the most applied classical formula (1) in the following spirit: for any given m -tuple $(x_1, \dots, x_m) \in [0, 1]^m$, with some $m \in N$,

let the sequence $s_x = (x_n)_{n \in N}$, $x_{km+i} = x_i$, $i = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots$, be derived; then $M_1(s_x) = M_2(s_x) = M_3(s_x) = M_4(s_x) = M(x)$. This property generalizes strong idempotency introduced in [15], and it will be called *generalized strong idempotency*.

3 Properties approach

Now we will try to introduce an operator described by the respective sets of properties (4).

First, suppose that A is a symmetric σ -additive aggregation operator on infinite sequences from $[0, 1]^N$, to be able to apply Lebesgue integral.

The σ -additivity of an operator $A : [0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$ means that A is a weighted mean operator, i.e., $A((x_n)_{n \in N}) = \sum_{i=1}^{\infty} w_n x_i$ where w_n are weights from $[0, 1]$ such that $\sum_{i=1}^{\infty} w_n = 1$ (i.e., we have a probability measure on N and A is simply the expectation operator).

The symmetry of an aggregation operator A means that for any permutation, i.e., for any bijective function $\varphi : N \rightarrow N$, $A((x_n)_{n \in N}) = A((x_{\varphi(n)})_{n \in N})$.

If A is additive, the symmetry of A will imply $w_1 = w_2 = \dots = w_n = \dots$, what is obviously impossible. Hence we cannot apply (4) directly, supposing σ -additivity, as a consequence of a result of Banach and Kuratowski (see [1]). However, we can require the additivity only, still following the axioms in [5].

Arithmetic mean on $[0, 1]$ can be characterized as a symmetric additive non-decreasing idempotent functional for any fixed $n \in N$.

To define arithmetic mean M on sequences $(x_n)_{n \in N} \in [0, 1]^N$, supposing the symmetry and additivity of aggregation operator M means that such functional, if it exist, should be (as shown in [10]) representable by means of the Choquet integral with respect to an additive measure m , $M((x_n)_{n \in N}) = (C) - \int (x_n)_{n \in N} dm$. Due to the symmetry of M , $m(\{k\}) = M((1_{\{k\}}(n))_{n \in N}) = M((1_{\{1\}}(n))_{n \in N}) = \alpha$ for all $k \in N$. The ad-

ditivity of M then results to

$$m(E) = M((1_E(n))_{n \in N}) = \alpha \times \text{card}(E)$$

for any finite E . Due to the monotonicity of m (and M), $\alpha \geq 0 = M((1_\emptyset(n))_{n \in N}) = m(\emptyset)$ and

$\alpha \times \text{card}(E) \leq 1 = M((1_N(n))_{n \in N}) = m(N)$ for any finite E , i.e., $\alpha = 0$.

Hence, m should be an additive non-decreasing measure on N vanishing on finite subsets of N . The existence of such set function is equivalent to the axiom of choice and was discussed by Ulam [11] and Tarski [12], and its applications to linear functionals can be found in [13]. Observe only that $m_* \leq m \leq m^*$, where m_* and m^* are the minimal and the maximal fuzzy measure respectively, having all finite subsets of N as null-sets, (see [20].

$$m_*(E) = \begin{cases} 0 & \text{if } E^c \text{ is infinite,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$m^*(E) = \begin{cases} 0 & \text{if } E \text{ is finite,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Evidently, m^* and m_* are a pair of dual fuzzy measures, both of them not additive. Consequently, the operator M induced via the Choquet integral by m , is bounded by operators M^* and M_* induced by m^* and m_* , respectively, i.e.,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} ((x_n)_{n \in N}) \leq M((x_n)_{n \in N}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} ((x_n)_{n \in N})$$

Recall that Tarski's measure m is related to an ideal $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(N)$,

$$m(E) = \begin{cases} 0 & \text{if } E \in \mathcal{M}, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and that

$$M((x_n)_{n \in N}) = \sup\{c \in [0, 1] \mid \{n \mid x_n \geq c\} \notin \mathcal{M}\}$$

Thought the existence of requested operator M is shown supposing the validity of the Choice axiom [13], the operator M cannot be constructed, in general and thus it is not applicable for general purposes. Similarly, as Cesaro means limit M_1 , it equals $\lim x_n$ if this exist, but in general we can only claim that it is between the $\limsup$ and the $\liminf$. Further, M cannot be symmetric, however it is finitely symmetric (i.e., stable under finitely many replacements of the input elements). It can be extended to $[0, \infty]$ or $\mathbb{R}$, however in that later case, it will be not homogeneous for all real constants, only for non-negative, see the case of asymmetric Choquet integral [14].

Similarly, as in the case of properties (4), we cannot find an operator on $[0, 1]^N$ fulfilling properties (5) directly, as far as there is no probability distribution on N with maximal entropy.

Recall that an OWA operator is a Choquet integral with respect to a fuzzy measure dependent only on the cardinality of measured sets ([16], [17]). Applying again the limit approach, in n -th step with $w_1 = w_2 = \dots = w_n = \frac{1}{n}$, i.e., the entropy $H(P_n) = \log n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} H(P_n) = \infty$, we obtain the following operator:

$$M_5((x_n)_{n \in N}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (12)$$

Similarly, we can define

$$M_6((x_n)_{n \in N}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (13)$$

and

$$M_7 = \frac{M_5 + M_6}{2} \quad (14)$$

Note that M_5 , M_6 and M_7 are defined for any input sequence $(x_n)_{n \in N} \in [0, 1]^N$, and that $M_6 \leq M_2 \leq M_4 \leq M_3 \leq M_5$. However, the generalized strong idempotency fails for M_5 , M_6 and M_7 , as far as

$$\begin{aligned} M_5(s_{\mathbf{x}}) &= \max(x_1, \dots, x_m) \\ M_6(s_{\mathbf{x}}) &= \min(x_1, \dots, x_m) \\ M_7(s_{\mathbf{x}}) &= \frac{M_5(s_{\mathbf{x}}) + M_6(s_{\mathbf{x}})}{2} \end{aligned}$$

4 Comparison of proposed operators

We summarize and compare operators M_1 to M_7 proposed in previous parts:

M_1 : Not defined for all input sequences, not symmetric;

Additive, self-dual, stable under linear transformations, finitely symmetric (i.e., if there are only finitely many input elements replacements), fulfilling generalized strong idempotency.

M_2, M_3 : Not self-dual, not symmetric, not additive;

Well defined, stable under non-negative linear transformations, finitely symmetric, fulfilling generalized strong idempotency.

M_4 : As M_2, M_3 , but self-dual and stable under any linear transformation. Observe that $M_2^d = M_3$.

M_5, M_6 : Not self-dual, not additive, not fulfilling generalized strong idempotency.

Well defined, stable under non negative linear transformations, symmetric.

M_7 : As M_5, M_6 , but self-dual and stable under any linear transformation.

Observe that only M_5, M_6, M_7 can be directly extended to act with any index set, however, on finite index sets they differ from standard M . Therefore, it seems that most appropriate is M_4 operator, which in the case when M_1 exists coincide with Cesaro means limit, $M_4 = M_1$.

5 Conclusions

We have introduced seven operators extending the action of arithmetic mean from finitely indexed input sets to infinite sequences. Obviously, then several genuine properties of the standard arithmetic mean are not conserved, as it happens also in other contexts, as the extension of the action of t-norms and t-conorms [18, 19] or of standard summation. We have shown also the existence of additive operator M , supposing the validity of the Choice axiom, with properties close to those of standard arithmetic mean, however with no practical use because of its inaccessibility.

As the most appropriate generalization of the arithmetic mean on infinite sequences we propose the operator M_4 , i.e.,

$$M_4((x_n)_{n \in N}) = \frac{1}{2} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (15)$$

6 Acknowledgements

This work is partially supported by grants VEGA 1/8331/01 and 1/7146/20, projects TIC2000-1368-C03-01 and by the special support of a NATO grant for R. Mesiar's stay in the University of Alcalá.

References

- [1] S. Banach et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fundamenta Math. 15 (1930) 127-131
- [2] T. Calvo, A. Kolesárová, M. Komorníková and R. Mesiar, *A Review of Aggregation Operators*, Alcalá University Press, 2001
- [3] G.H. Klir, T.A. Folger, *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, Prentice Hall, 1988
- [4] A. Kolesárová, M. Komorníková, *Triangular norm-based iterative aggregation and compensatory operators*, Fuzzy Sets and Systems 104 (1999) 109-120
- [5] R. Mesiar, M. Komorníková, *Aggregation operators*. In: D. Herceg and K. Surla, eds., Proceedings PRIM'96 XI Conference on Applied Mathematics (1996) 193-211
- [6] R.R. Yager, *On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking*, IEEE Trans. Syst., Man Cybern., 18 (1988) 183-190
- [7] J.-L. Marichal, P. Mathonet and E. Thousset, *Characterization of some aggregations functions stable for positive linear transformations*, Fuzzy Sets and Systems, 102 (1999) 293-314

- [8] W. Silvert, *Symmetric summation: A class of operations of fuzzy sets*, IEEE Trans. Sys. Man. Cyber. 9 (1979) 657–659
- [9] J. Mordelová, E. Muel, *Kernel aggregation operators*. In: Proc. AGOP'2001, 95–98, Oviedo University, Spain, 2001
- [10] D. Schmeidler, *Integral representation without additivity*, Proc. Am.Math.Soc. 97 (1986) 253–261
- [11] M. Ulam, *Concerning functions of sets*, Fundamenta Math. 14 (1929) 231
- [12] A. Tarski, *Une contribution a la théorie de la mesure*, Fundamenta Math. 15 (1930) 42–50
- [13] P. Benvenuti, R. Mesiar, *On a Tarski's contribution to the additive measure theory and its consequences*. To appear in: D.Niwinsky ed., Tarski's centenary, Kluwer
- [14] D. Denneberg, *Non-additive Measure and Integral*, Kluwer, 1994
- [15] T. Calvo, R. Mesiar and R.R. Yager, *Quantitative Weights and Aggregation*, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, (submitted)
- [16] M. Grabisch, *Fuzzy integral in multicriteria decision making*, Fuzzy Sets and Systems 69 (1995) 279–298
- [17] J.C. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, *Characterization of the ordered weighted averaging operators*, IEEE Trans. Fuzzy Sys. 3 (1995) 236–240
- [18] L. González, *A note on the infinitary action of triangular norms and conorms*, Fuzzy Sets and Systems 101 (1999) 177–180
- [19] R. Mesiar and H.Thiele, *On T-Quantifiers and S-Quantifiers*. In: V. Novak and I.Perfilieva eds., *Discovering the World with Fuzzy Logic*, Physica Verlag, Heidelberg, 2000, 310–326
- [20] E. Pap, *Null-additive Set Functions*, Kluwer, 1995

Sesión

B3

Control Fuzzy

Fuzzy Control

CONTROL FUZZY ADAPTATIVO EN REDES COMPLEJAS

Pablo Carbonell

Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad Politécnica de Valencia

Plaça Ferràndiz i Carbonell, 2, E-03801 Alcoi, España

Tfno: +34 96 652 8458; Fax: +34 96 652 8409; e-mail: pjcarbon@isa.upv.es

Resumen

La actuales redes de telecomunicaciones, energía, transporte y financieras son de gran complejidad y requieren un funcionamiento eficiente y seguro. Se presenta en este trabajo un esquema descentralizado de control de estas redes basado en lógica fuzzy y adaptativo. Se ilustra con un ejemplo de aplicación a redes TCP/IP.

Palabras Clave: Fuzzy, Adaptativo, Redes Complejas, TCP, Control Descentralizado.

recursos) proporciona los máximos beneficios, ya que el resultado final es un agregado de la acción individual de todos los agentes de la red, y sólo un esquema cooperativo impedirá su colapso [2].

Sin embargo, no resulta trivial dar una solución a este problema debido a la gran complejidad del sistema. En este trabajo se propone emplear la lógica borrosa como método de inferencia que asista al individuo en el ajuste de su comportamiento de manera que el resultado conjunto tienda hacia el estado óptimo de la red. Se mostrará una aplicación directa de esta propuesta al caso del control de congestión en redes TCP/IP [7]. Destaca la originalidad de la propuesta de aplicación de las técnicas de lógica borrosa frente a la de otros autores [4].

1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas socioeconómicos y medioambientales actuales dependen en gran medida de las grandes redes de telecomunicaciones, energía, transporte y financieras por lo que se hace imprescindible un funcionamiento eficiente y seguro de las mismas [1]. La escasez de los recursos hace que no sea ya válida la solución de incrementar estos últimos ante un incremento de la demanda. Por el contrario, que cada vez se invierten más esfuerzos de investigación para lograr el empleo eficiente de los recursos utilizados.

Desde la perspectiva de la Ingeniería de Control, el problema planteado supone un auténtico reto. Se trata de sistemas de gran complejidad, donde el control debe realizarse de forma descentralizada. La red está constituida por innumerables agentes que interaccionan entre sí a través de las interconexiones. Cada uno de estos agentes tiene por objetivo maximizar su utilidad, si bien desde el punto de vista de la red esto debe lograrse manteniendo al mismo tiempo un mínimo en el coste por el empleo de los recursos. No siempre la opción más egoísta (esto es: apropiarse de la mayor porción posible de los

2 MODELO DE LA RED

Se considera que una red está constituida por un conjunto J de j recursos o enlaces, con una capacidad finita $c = (c_j, j \in J)$. Por otra parte, existe un conjunto R de r rutas o usuarios, donde $r \subset J$.

Cada usuario r recibe una o varias señales de realimentación, a partir de las cuales debe estimar la probabilidad de congestión en su ruta $p_r(t)$. Generalmente estas señales sólo proporcionan información parcial procedente de ciertas mediciones locales. En el protocolo TCP representaría el número de paquetes enviados sin acuse de recibo; en una autopista, sería los tiempos indicados en paneles señalizadores; etc.

Si se define $x_r(t)$ como la carga introducida en la red por el usuario r , sea $y_r(t)$ la carga total asociada con la ruta r , es decir, el agregado de todos los usuarios que comparten algunos de los recursos j empleados por r :

$$y_r(t) = \sum_{j \in r} \sum_{s: j \in s} x_s(t) \quad (1)$$

La probabilidad de congestión en la ruta r depende de

$y_r(t)$:

$$p_r(t) = p_r(y_r(t)) \quad (2)$$

Hipótesis 1 La probabilidad de congestión (2) en la ruta r es una función creciente de la carga total asociada $y_r(t)$ con dicha ruta (1).

La hipótesis anterior parece razonable si se supone que las capacidades c_j se mantienen constantes.

El usuario decide incrementar o decrementar su suministro $x_r(t)$ a la red en función de $p_r(t)$. El modo cómo realiza esta variación depende del tipo de red. Por ejemplo, en una red TCP el tamaño de la ventana de transmisión se actualiza según el algoritmo de van Jacobson [5], basado en un incremento aditivo, decremento multiplicativo [3], ya que estudios previos han mostrado la eficiencia de dicho algoritmo para redes de transmisión orientadas a paquetes. En general, se considera una función estrictamente positiva y creciente de incremento $f_{ir}(x_r)$ y otra positiva y creciente de decremento $f_{dr}(x_r)$, ($f_{dr}(0) = 0$), que en promedio proporcionan una ley de actualización dada por:

$$\dot{x}_r(t) = (1 - p_r(t))f_{ir}(x_r) + p_r(t)f_{dr}(x_r) \quad (3)$$

3 EMPLEO DE LA LÓGICA FUZZY

La ley de actualización del suministro (3) no siempre proporciona los mejores resultados: aún considerando que las leyes de incremento y de decremento llevan a un comportamiento global óptimo de la red, la estimación de $p_r(t)$ está sometida a gran incertidumbre, debido al conocimiento parcial de la red y a la variación de las condiciones de la misma. Por tanto, se propone la sustitución de dicha ley por otra obtenida a partir de una base de reglas borrosas:

$$\begin{aligned} \text{IF CONGESTION THEN } \dot{x}_r(t) &= f_{dr}(x_r) \\ \text{ELSE } \dot{x}_r(t) &= f_{ir}(x_r) \end{aligned} \quad (4)$$

donde **CONGESTION** es una variable lingüística asociada a un conjunto fuzzy con función de pertenencia dada por $\mu_{dr}(p_r(t))$. El papel de esta última será precisamente el de ajuste de la ley de actualización original para lograr el comportamiento óptimo de la red.

Cabe señalar que la base de reglas anterior permite la inclusión de otras leyes de incremento y decremento por medio de la adición de nuevas reglas, lo cual permite emplear leyes de actualización más sofisticadas que la mostrada en (3), si bien será conveniente a efectos de poder asegurar la estabilidad reducirlas exclusivamente a una de incremento y otra de decremento.

Sin pérdida de generalidad, se considera que la función de pertenencia μ_{dr} es continua y estrictamente creciente y que

$$\mu_{dr}(0) = 0 \quad ; \quad \mu_{dr}(1) = 1$$

Tras la realización del proceso de *defuzzification* se obtiene a la salida del sistema fuzzy [12]:

$$\dot{x}_r(t) = f_{ir}(x_r) - \mu_{dr}(p_r)[f_{ir}(x_r) + f_{dr}(x_r)] \quad (5)$$

4 ESTABILIDAD

4.1 PUNTO DE EQUILIBRIO

En primer lugar, se considera el punto de equilibrio para el usuario r (x_{r0}, p_{r0}) a partir de (5):

$$\mu_{dr}(p_{r0}) = \frac{1}{1 + f_{dr}(x_{r0})/f_{ir}(x_{r0})} \quad (6)$$

Según las hipótesis realizadas sobre las funciones de incremento y decremento, se tiene que la función:

$$g_r(x_r) = \frac{f_{ir}(x_r)}{f_{ir}(x_r) + f_{dr}(x_r)} \quad (7)$$

es continua, decreciente, y con $\lim_{x_r \rightarrow 0} g(x_r) = 1$ y $\lim_{x_r \rightarrow \infty} g(x_r) = 0$.

Para unas condiciones dadas de la red definidas por los suministros constantes del resto de los usuarios x_i , $i \in R - \{r\}$, según la hipótesis 1 y las condiciones de regularidad exigidas a la función de pertenencia μ_r , ésta última y g_r intersectan en un único punto, que es el de equilibrio x_{r0} .

Corolario 1 Para una red gobernada por las leyes de actualización fuzzy (5), existe un punto de equilibrio x_{r0} , $r \in R$ y éste es único.

4.2 DINÁMICA ESTABLE

Teorema 1 Si se cumple la hipótesis 1, una red controlada por medio de 5) tiene un único punto de equilibrio estable x_{r0} ; $r \in R$, y la función:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r \in R} (y_r - y_{r0})(x_r - x_{r0}) \quad (8)$$

es una función de Liapunov del sistema, donde y_{r0} es la carga total (1) para la ruta r en su punto de equilibrio: $y_{r0} = \sum_{j \in r} \sum_{s: j \in s} x_{s0}$.

Demostración. La derivada en el tiempo de (8) viene dada por:

$$\dot{V} = \sum_{r \in R} (y_r - y_{r0})\dot{x}_r$$

$$= \sum_{r \in R} (y_r - y_{0r}) [f_{ir}(x_r) - \mu_{dr}(p_r) (f_{ir}(x_r) + f_{dr}(x_r))] \quad (9)$$

Según la hipótesis 1,

$$y_r > y_{0r} \rightarrow \mu_r < g_r \quad (10)$$

$$y_r < y_{0r} \rightarrow \mu_r > g_r \quad (11)$$

por tanto, se tiene que siempre se cumple $\dot{V} \leq 0$, lo cual implica que el sistema presenta estabilidad asintótica. $\square$

5 ADAPTACIÓN

5.1 FUNCIÓN OBJETIVO

Se ha visto en el apartado anterior que una red operada por agentes basados en reglas fuzzy según (25) permite llevar ésta hacia el punto de equilibrio x_{r0} , $r \in R$. Dicho punto depende de las características de la red, de las funciones de incremento f_{ri} y decremento f_{rd} y de la elección de las funciones de pertenencia μ_{rd} . Esta última puede emplearse por tanto como medio de ajuste, considerando que el resto de los factores son exógenos.

Este problema puede plantearse como una optimización de una función objetivo. Se acepta que en la mayoría de los casos este objetivo viene dado por un compromiso entre la denominada función de *utilidad* que el usuario r desea maximizar y la función de coste derivada del empleo de los recursos que realiza dicho usuario [8]:

$$U_r(x_r, y_r) = \phi_{ru}(x_r) - \phi_{rc}(y_r) \quad (12)$$

donde $\phi_{ru}(x_r)$ es la función de utilidad, que se asume creciente y estrictamente cóncava con el flujo de suministro $x_r(t)$; y $\phi_{rc}(y_r)$, que es la función de coste, que se asume creciente y estrictamente convexa con la carga total en los recursos y_r empleados por r . Esta formulación está adaptada del modelo propuesto por Kelly [6].

El usuario r no puede resolver la optimización de la función objetivo anterior (12) en tanto en cuanto desconoce el valor de y_r al tratarse de un control descentralizado. Una posibilidad es la substitución de éste por el de la señal medida $p_r(y_r)$ que según la hipótesis 1 es monótona creciente con respecto a y_r , de manera que la función objetivo modificada queda como:

$$U_{rm}(x_r, p_r) = \phi_{ru}(x_r) - \hat{\phi}_{rc}(p_r) \quad (13)$$

donde la función $\hat{\phi}_{rc}(p_r)$ puede diferir de la original $\phi_{rc}(y_r)$, al incluir algún tipo de corrección por la estimación debida a p_r .

Seguidamente se considera la función objetivo global como agregada de los objetivos de todos los usuarios, de manera que el óptimo de la red viene dado por:

$$(x^*, p^*) = \arg_{(x,p)} \max \sum_{r \in R} U_{rm} \quad (14)$$

5.2 ALGORITMO DE ADAPTACIÓN

Para plantear el algoritmo adaptativo [10], en primer lugar debe considerarse que dadas las condiciones impuestas sobre la función de pertenencia μ_{rd} , es posible definir una nueva función de Liapunov para la red dada por:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r \in R} (\mu_r(p_r) - \mu_{r0})(x_r - x_{r0}) \quad (15)$$

Se define la siguiente función candidata de Liapunov para el sistema fuzzy adaptativo:

$$V_a = \sum_{r \in R} \tilde{\mu}_{rd}(p_r) \tilde{x}_r(t) + \frac{1}{2} \tilde{\mu}_{rd}^2(p_r) \quad (16)$$

donde $\tilde{\mu}_{rd} = \mu_{rd} - \mu_{rd}^*$, siendo este último término la función de pertenencia ajustada para el óptimo; y sea $\tilde{x}_r(t) = x_r(t) - x_r^*$.

La derivada de la función (16) viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & \sum_{r \in R} \tilde{\mu}_{rd}(p_r) [f_{ri}(x_r) - \mu_{rd}(p_r) (f_{rd}(x_r) + f_{ri}(x_r))] \\ & + \tilde{x}_r(t) \dot{\mu}_{rd}(p_r) + \tilde{\mu}_{rd}(p_r) \frac{\dot{\mu}_{rd}(p_r)}{\lambda_{rd}} \end{aligned} \quad (17)$$

Tras ciertas manipulaciones se llega a:

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & \sum_{r \in R} \tilde{\mu}_{rd}(p_r) [f_{ri}(x_r) - \mu_{rd}^*(p_r) (f_{rd}(x_r) + f_{ri}(x_r))] \\ & + \tilde{x}_r(t) \dot{\mu}_{rd}(p_r) \\ & + \tilde{\mu}_{rd}(p_r) [-\tilde{\mu}_{rd}(p_r) (f_{rd}(x_r) + f_{ri}(x_r)) + \dot{\mu}_{rd}(p_r)] \end{aligned} \quad (18)$$

basándose en las hipótesis anteriores, puede considerarse la siguiente desigualdad:

$$\dot{V}_a \leq \sum_{r \in R} [\tilde{x}_r(t) + \tilde{\mu}_{rd}(p_r)] \dot{\mu}_{rd}(p_r) \quad (19)$$

Por tanto, para asegurar la convergencia basta con ajustar las funciones de pertenencia de manera que tiendan hacia el óptimo, por ejemplo a través del método del gradiente ya que:

$$\frac{\partial U_{rm}}{\partial x_r} \tilde{x}_r < 0, \forall x_r \quad (20)$$

$$\frac{\partial U_{rm}}{\partial p_r} \tilde{p}_r < 0, \forall p_r \quad (21)$$

Para probar la validez de la desigualdad (21), considérese la hipótesis 1.

En definitiva, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2 Una red gobernada por una ley adaptativa:

$$\dot{\mu}_{rd} = -\sigma_{rd} \frac{\partial U_{rm}}{\partial x_r} \quad (22)$$

donde σ_{rd} es la ganancia de adaptación, es asintóticamente estable y su punto de equilibrio se encuentra en el óptimo (14).

Sean θ_{ri} , $i \in I$ los i parámetros ajustables en la función de pertenencia μ_{rd} del conjunto I . La ley de adaptación para cada uno de estos, según (22), queda:

$$\dot{\theta}_{ri} = -\sigma_r \left[\frac{\partial \mu_{rd}}{\partial \theta_{ri}} \right]^{-1} \frac{\partial U_{rm}}{\partial x_r} \quad (23)$$

5.3 ESTIMACIÓN DEL GRADIENTE

En la propuesta de ley de adaptación (22) existe el problema de que es necesario estimar el gradiente de (13) no es totalmente conocido, ya que se tiene que:

$$\frac{\partial U_{rm}}{\partial x_r} = \frac{\partial \phi_{ru}}{\partial x_r} - \frac{\partial \phi_{rc}}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial x_r} \quad (24)$$

El último término en la expresión anterior es desconocido y, por tanto, será necesario el empleo de alguna técnica de estimación del gradiente, por ejemplo por aproximación en diferencias o el método propuesto por Spall [11]. Alternativamente, es posible considerar las propiedades estocásticas de las señal de congestión $p_r(t)$ [9].

6 APLICACIÓN A REDES TCP

El algoritmo de control de congestión, propuesto por van Jacobson, empleado en el protocolo de transmisión de internet (TCP) se basa en el ajuste del tamaño de la ventana de transmisión W . En su versión simplificada, es equivalente a las siguientes reglas lógicas:

IF (CONGESTION IS ON) THEN $W = W/2$
ELSE $W = W + 1/W$

Como muestra Kelly [?], este protocolo conduce al siguiente modelo aproximado para el usuario r :

$$\dot{x}_r = (1 - p_r) \frac{1}{T^2} - p_r \frac{x_r^2}{2} \quad (25)$$

donde p_r es la probabilidad de congestión, indicada por medio de acuses de recibo de paquetes duplicados

y T es el tiempo de ida y vuelta promediado. Modelos de mayor complejidad surgen si se consideran retardos y tiempos de ida y vuelta variables, si bien en este estudio, por simplicidad, no se considerarán.

Se tiene por tanto que las funciones de incremento y decremento, según (3) vienen dadas por:

$$f_{ri}(x_r) = \frac{1}{T^2} \quad (26)$$

$$f_{rd}(x_r) = \frac{x_r^2}{2} \quad (27)$$

Considérese a continuación una función de pertenencia sigmoide dada por

$$\mu_{rd}(p_r, \theta_{r1}, \theta_{r2}) = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_{r2}(p_r - \theta_{r1}))} \quad (28)$$

Los parámetros θ_1 and θ_2 serán adaptados en cada ciclo determinado por T , por medio de una versión discreta de la ley de adaptación (23).

La función objetivo (12) empleada está basada en la propuesta por Kelly en [6], ya que para el modelo considerado contiene algunas propiedades de convergencia puestas en evidencia por dicho autor. Ésta viene dada por:

$$U_{rm}(x_r, p_r) = \frac{2}{\pi} \arctan(\alpha_r x_r) - p_r^2 \quad (29)$$

donde α_r es un factor normalizador.

Su derivada parcial en (24) viene dada por:

$$\frac{\partial U_{rm}}{\partial x_r} = \frac{2\alpha_r}{\pi} \frac{1}{1 + (\alpha_r x_r)^2} - 2p_r \frac{\partial p_r}{\partial x_r} \quad (30)$$

En cuanto a las parciales de los parámetros ajustables de la función de pertenencia, aprovechando las propiedades de la función sigmoide (28), se tiene que:

$$\frac{\partial \mu_{rd}}{\partial \theta_{ri}} = -\mu_{rd}(p_r) * \overline{\mu_{rd}(p_r)} * \theta_{r2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mu_{rd}}{\partial \theta_{ri}} = -\mu_{rd}(p_r) * \overline{\mu_{rd}(p_r)} * (-p_r + \theta_{r1}) \quad (32)$$

7 RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Se ha realizado una simulación para un caso simple de transmisión punto a punto por un enlace que tiene una capacidad $c = 50$. Se comparan los resultados obtenidos empleando el protocolo TCP Reno (algoritmo de van Jacobson) con el obtenido empleando el fuzzy adaptativo (FATCP). Los parámetros son ajustados inicialmente en los valores $\theta_1 = 0,5$; $\theta_2 = 5$ y el parámetro $\alpha = 10^{-2}$ en (29). en la función objetivo. El gradiente es estimado por medio de un algoritmo de diferencias de primer orden.

En la figura 1 se muestra la evolución en la velocidad de envío de datos del usuario $x(t)$, sean estos recibidos o no por el receptor. Como ya es conocido, TCP Reno proporciona un comportamiento oscilatorio en torno a la capacidad máxima de la red. Esto es debido a que el control se efectúa por medio de la reducción a la mitad de la ventana de transmisión cada vez que se detecta congestión. Por el contrario, FATCP proporciona una evolución suave que converge a un valor que representa la máxima congestión que admite el usuario para el flujo de datos dado.

En la figura 2 se ha representado la adaptación en los parámetros θ_1 y θ_2 . Por último, en la figura 3 se ve claramente la superioridad del algoritmo FATCP, que además de proporcionar un comportamiento estable, conduce el sistema a un valor próximo al óptimo para la función objetivo planteada, lo cual no puede lograrse con el algoritmo TCP Reno.

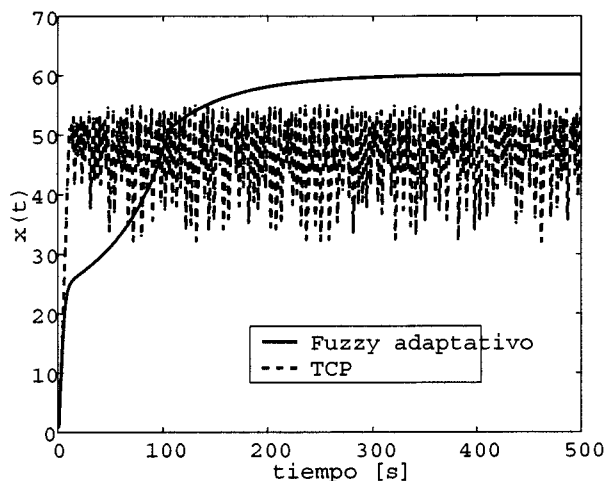


Figura 1: Evolución de $x(t)$.

8 CONCLUSIONES

En los apartados anteriores se ha mostrado la necesidad del empleo de algoritmos con capacidad de generalización y aprendizaje para el control de redes complejas. Esto es así porque se trata de un control descentralizado, compuesto por numerosos agentes que interaccionan entre sí, y donde es necesario la capacidad de adaptación a las condiciones cambiantes de la red.

La lógica fuzzy parece un firme candidato a una técnica viable para la implementación de dicha generalización. En concreto se ha mostrado cómo las redes TCP/IP pueden operar de forma más adecuada si se emplean algoritmos fuzzy adaptativos, que permiten el planteamiento de un proceso de

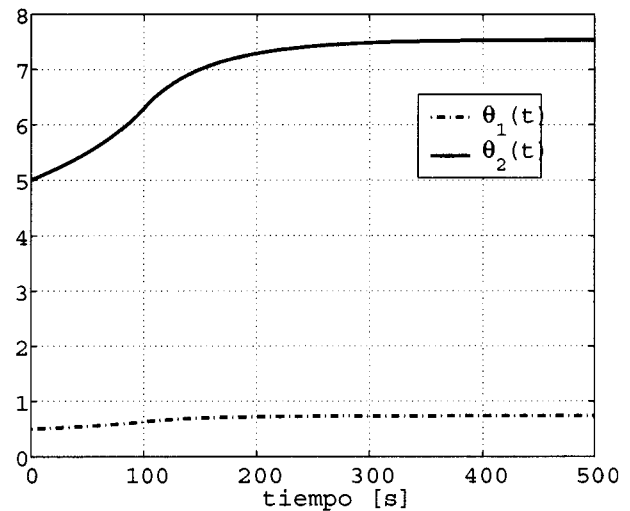


Figura 2: Adaptación de los parámetros θ_1 y θ_2 .

optimización de una función objetivo.

En este trabajo se propone un método de adaptación basado en la estimación del gradiente, sin embargo es posible que otros métodos propocionen aún mejores resultados, como los basados en redes neuronales o algoritmos genéticos. Queda este estudio abierto para futuros trabajos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado en parte por la Generalitat Valenciana y la Universidad Politécnica de Valencia en el marco del proyecto de investigación GV00-088-14.

Referencias

- [1] M. Amin. Modeling and control of complex interactive networks. *IEEE Control Systems*, vol. 22-1, 2002.
- [2] D. Bertsekas, R. Gallager. *Data Networks*. New Jersey: Prentice-Hall, second ed., 1992.
- [3] D. M. Chiu, R. Jain, Analysis of the increase and decrease algorithms for congestion avoidance in computer networks. *Journal of Computer Networks and ISDN Systems*, no. 17, Pág. 1-14, 1989.
- [4] S. Ghosh, Q. Razouqi, H. J. Schumacher, A. Celmins. A survey of recent advances in fuzzy logic in telecommunications networks and new challenges. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 6-3, Pág. 443-447, 1998.

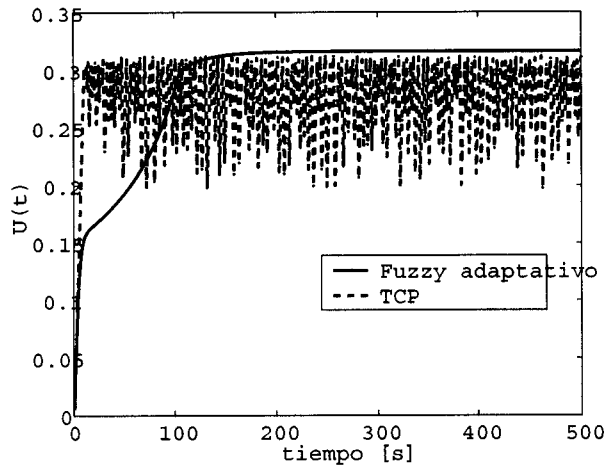


Figura 3: Comparación de valores de la función objetivo $U_m(t)$.

- [5] V. Jacobson. Congestion avoidance and control. *Proceedings of the ACM SIGCOMM'88*, Pág. 314–329, 1988.
- [6] F. Kelly. Mathematical modelling of the Internet. en *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, Pág. 685–702. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [7] S. H. Low, F. Paganini, J.C. Doyle. Internet congestion control. *IEEE Control Systems*, vol. 22-1, Pág. 28–43, 2002.
- [8] J.K. Mackie-Mason, H.R. Varian. Pricing the Internet. en *Public Access to the Internet*, B. Kahin and J. Keller, eds. Cambridge, MA: MIT Press, Pág. 269–314, 1995.
- [9] J. Padhye, V. Firoiu, D. Towsley, J. Krusoe. Modeling TCP Throughput: A Simple Model and its Empirical Validation. *ACM SIGCOMM '98 conference on Applications, technologies, architectures, and protocols for computer communication*, Vancouver, CA, Pág. 303–314, 1998.
- [10] M. Polycarpou, P. Ioannou. A robust adaptive nonlinear control design. *Automatica*, vol. 12-3, Pág. 423–427, 1996.
- [11] J.C. Spall. Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37-3, Pág. 332–341, 1992.
- [12] L.-X. Wang. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 1-2, Pág. 146–155, 1993.

EFFECTOS DE LA ACTUACIÓN POR PWM REGLA-A-REGLA EN EL CONTROL BORROSO DE MOTORES dc

Benito Artaloytia
E.T.S.I. Telecomunicación, UPM
bae@etsit.upm.es

Félix Monasterio-Huelin
E.T.S.I. Telecomunicación, UPM
felix@robolab.unex.es

Resumen

Utilizando la formulación de los sistemas dinámicos borroso aditivos es posible realizar un control regla a regla de sistemas reales. En este trabajo se estudian los efectos de esta forma de generación de la señal de control sobre un motor de corriente continua actuado mediante una modulación por anchura de pulsos (PWM), en relación con el controlador borroso convencional. En éste la actuación se realiza después de evaluar todas las reglas, y en consecuencia el período de muestreo puede hacerse excesivamente elevado en relación con el período de modulación. Se propone en este trabajo una nueva forma de sintonización del controlador borroso centrada en los parámetros implicados en la contribución de cada regla a la señal de control.

Palabras Clave: Actuación regla-a-regla borrosa, sistemas dinámicos aditivo borrosos, desborrosificación simplificada, controladores borrosos, motores DC

1 INTRODUCCIÓN

En 1963 Zadeh [17] señala que las matemáticas de funciones, puntos, conjuntos, etc. definidos con precisión dificulta el estudio de los sistemas biológicos, y sugiere "the mathematics of fuzzy or cloudy quantities which are not describable in terms of probability distributions" (p.857). En 1965 [18] introduce la noción de subconjunto borroso lo que permitió a Mamdani y Assilian [7] implementar, en 1975, el primer controlador borroso. Desde entonces se han realizado numerosos estudios, que no vamos a revisar en este trabajo.

En los sistemas de control basados en la lógica borrosa [5], [16] se define un mapa completo del espacio de las variables de entrada en relación con las de salida. Este mapa consiste en un conjunto de reglas del tipo (*IF x THEN y*) que se construyen realizando un razonamiento lingüístico sobre la relación causal entre entrada y salida en cada región o partición borrosa del espacio de las variables de entrada. En definitiva de lo que se trata es de

responder a la pregunta siguiente: ¿cuál debe ser la señal de control cuando la entrada (error, incremento de error) se encuentre, en el instante de tiempo k , en un determinado estado? La respuesta a esta pregunta tiene la forma típica de "si el error es positivo y muy alto, la señal de control debe ser alta", que se traduce a un código que constituye la regla borrosa: *IF e is PA THEN u is A*.

La característica fundamental de este sistema de reglas es que constituye un mapa completo de todos los estados posibles de entrada, lo que en la práctica significa que la evaluación de una única regla no aporta en general ninguna información positiva (es decir, la premisa resulta ser falsa), excepto si el sistema que se pretende controlar está precisamente en la región borrosa que define la premisa de la regla. Desde esta perspectiva parece absolutamente indispensable evaluar todo el sistema de reglas de tal manera que se evalúen, al menos, las reglas cuyas premisas borrosas sean verdaderas.

Lo que se investiga en este trabajo son los efectos, sobre el comportamiento del sistema a controlar, de la generación de una señal de control regla a regla.

La idea básica consiste en expresar recursivamente la contribución de cada una de las reglas, de tal manera que al evaluar secuencialmente todas las reglas la señal de control de la última regla evaluada coincida con la que se generaría si se hubiesen evaluado todas las reglas simultáneamente. La hipótesis que subyace a este método es que el tiempo de cálculo del sistema de reglas es superior al de la evaluación de una única regla, y en consecuencia el período de muestreo del controlador digital puede reducirse considerablemente. En este sentido debe tenerse en cuenta que en la práctica es habitual utilizar un ZOH, es decir un dispositivo que mantiene la última señal de control calculada durante un período de muestreo (ver Figura 1).

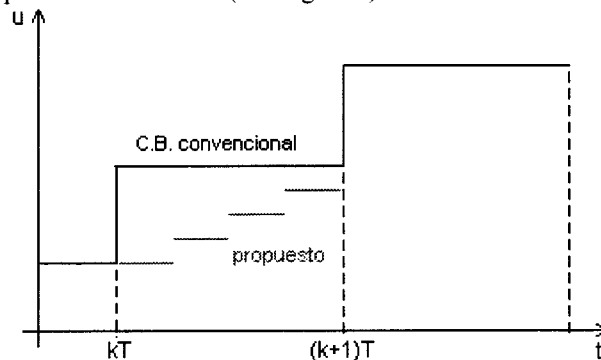


Figura 1

2 MOTOR DC Y PWM

En este trabajo se van a realizar simulaciones del comportamiento del controlador borroso propuesto en [11] sobre motores de corriente continua. Las ecuaciones que definen el comportamiento electromecánico simplificado de los motores de corriente continua [4], [13] se han refinado de forma que incluyen por un lado, el efecto de la variación de sus parámetros con la temperatura [3], [14] (se ha supuesto que sólo varía con la temperatura la resistencia del rotor) y por otro el efecto del par de fricción seco [1], [12].

Dichas ecuaciones pueden expresarse en el espacio de estados de la siguiente forma:

$$Dx_1 = x_2 \quad (1)$$

$$Dx_2 = -((B_m + B_L/N^2)/(J_m + J_L/N^2))x_2 + (K_{c25}/(J_m + J_L/N^2))x_3 - (((C_f \text{signo}(w_m)) + (C_{ext}/(N\eta_R)))/(J_m + J_L/N^2))x_2 \quad (2)$$

$$Dx_3 = (K_{v25}/L_a)x_2 - ((R_{a25}(1 + \alpha_{Cu}(x_4 + x_5)))/L_a)x_3 + (1/L_a)u \quad (3)$$

$$Dx_4 = (R_{th1}/\tau_{th1})(R_{a25}(1 + \alpha_{Cu}(x_4 + x_5)))x_3^2 + (R_{th1}/\tau_{th1})C_f x_2 + (R_{th1}/\tau_{th1})B_m x_2^2 - (1/\tau_{th1})x_4 \quad (4)$$

$$Dx_5 = (R_{th2}/\tau_{th2})(R_{a25}(1 + \alpha_{Cu}(x_4 + x_5)))x_3^2 + (R_{th2}/\tau_{th2})C_f x_2 + (R_{th2}/\tau_{th2})B_m x_2^2 - (1/\tau_{th2})x_5 \quad (5)$$

donde:

x_1 : posición angular el eje del motor

x_2 : velocidad angular en el eje del motor w_m

x_3 : corriente de armadura (par motor = $K_{c25}x_3$)

x_4 : temperatura relativa rotor/carcasa

x_5 : temperatura relativa carcasa/ambiente

u : tensión de excitación

$Dx_i = dx_i/dt$

Parámetros electromecánicos:

R_{a25} : resistencia del devanado de armadura a 25°C

L_a : inductancia del devanado de armadura

K_{v25} : constante de velocidad

K_{c25} : constante de par

J_m : inercia del rotor

B_m : coeficiente de fricción viscosa del rotor.

C_f : par de fricción seca del rotor

J_L : inercia de la carga

B_L : fricción de la carga

C_{ext} : par resistente

N : relación de reducción de la reductora

η_R : rendimiento máximo de la reductora.

Parámetros térmicos:

α_{Cu} : coeficiente de variación de la resistencia del hilo de Cu con la temperatura.

R_{th1} : resistencia térmica rotor-carcasa

R_{th2} : resistencia térmica carcasa-ambiente

τ_{th1} : cte de tiempo térmica rotor-carcasa

τ_{th2} : cte de tiempo térmica carcasa-ambiente

Puede apreciarse que un motor DC representa un sistema dinámico no lineal de orden cinco.

La actuación del motor se va a realizar mediante una modulación por anchura de pulsos (PWM), es decir la señal de control $u(t)$ consiste en la secuencia temporal que se muestra en la Figura 1, en la que se distingue el periodo de modulación (T_m) constante y la anchura de pulso τ_j variable, obtenida a partir de la salida del controlador u_j de la siguiente forma $\tau_{jk} = T_m/2(u_{jk} + 1)$.

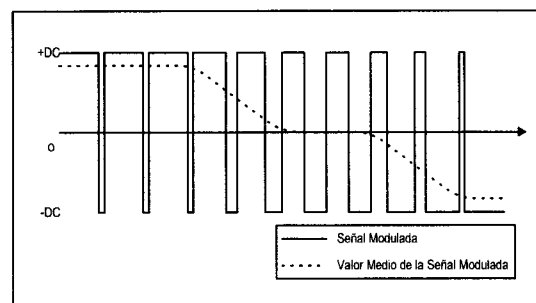


Figura 2. PWM

3 SISTEMAS DINÁMICOS BORROSO-ADITIVOS

Definiendo la operación $\otimes$ entre conjuntos borrosos asociados al mismo dominio, de la siguiente forma: $A \otimes B = \int_a^b A(x)B(x)dx$, se define el centroide de A como $a^* = (A \otimes x)/(A \otimes 1)$.

Se llama coeficiente de contracción de un conjunto borroso A relativo a otro C a $c_{A/C} = (A \otimes 1)/(C \otimes 1)$, y coeficiente de contracción de A a $c_A = (A \otimes 1)/(I \otimes 1)$.

Definiendo la operación $\oplus$ como la suma de dos conjuntos borrosos podemos escribir $C = \beta_1 A \oplus \beta_2 B$, (se considera que los parámetros cumplen las condiciones necesarias para que C sea un conjunto borroso, cuyo soporte es la unión de los soportes de los conjuntos implicados en la combinación lineal).

Un conjunto borroso triangular A, queda completamente caracterizado por su forma triangular (lineal) junto con el vector de características $C_A = (\epsilon_1, a^*, L_A \otimes 1, h_A)$ donde $X_A = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ es el soporte de A, h_A la altura de A ($h_A = \max_x \{A(x)\}$), $L_A \otimes 1$ la cardinalidad o área del conjunto borroso extendido de A (de altura unidad, tal que $A = h_A L_A$), y a^* el centroide de A.

Se llama sistema dinámico borroso aditivo (SDBA) (de orden 1 y tipo 1) a las siguientes secuencias borrosas iterativas A, B, C y D definidas sobre el mismo dominio X:

$$A_j = \alpha_{1j} A_{j-1} \oplus \alpha_{2j} D_j \quad (6)$$

$$B_j = \beta_{1j} A_j \oplus \beta_{2j} C \quad (7)$$

donde el índice j representa el parámetro de tiempo discreto.

Al conjunto A se le llama estado acumulador del sistema, a B salida del sistema, a D entrada del sistema y a C memoria del sistema. La ecuación (6) es la ecuación de estado del sistema y la (7) la ecuación de salida.

Se cumplen las siguientes relaciones:

$$a_j^* = \alpha_j a_{j-1}^* + (1 - \alpha_j) d_j^* \quad (8)$$

$$b_j^* = \beta_j a_j^* + (1 - \beta_j) c^* \quad (9)$$

donde

$$\alpha_j = \alpha_{1j} c_{Aj-1/Aj} = 1 - \alpha_{2j} c_{Dj/Aj} \quad (10)$$

$$\beta_j = \beta_{1j} c_{Aj/Bj} = 1 - \beta_{2j} c_{C/Bj} \quad (11)$$

(Para más detalles véase [11], [2])

4 ALGORITMO DE CONTROL BORROSO

Los sistemas dinámicos borroso aditivos (SDBA) pueden utilizarse como controladores, interpretando B como salida y D como entrada. En los sistemas de control realimentados pueden construirse funciones (α, β) dependientes de la variable de error (e).

Si se asocia el índice j a la regla j -sima de un CB de N reglas puede verse, que al evaluar la última regla, se habrá obtenido una salida que puede hacerse coincidir con la salida de una buena colección de controladores borrosos.

Los SDBA pueden utilizarse como compensadores iterativos que permite actuar sobre la planta a controlar cada vez que se evalúa una regla, cumpliendo la propiedad de que cuando se evalúan todas las reglas se obtiene una salida formalmente idéntica a la de los controladores borrosos convencionales que utilizan una desborrosificación lineal.

ALGORITMO DE CONTROL

Inicialización, POR PRIMERA VEZ, de las variables del controlador:

$$h_{Aj} = 0.0,$$

$$\alpha_j = 1.0,$$

$$\beta_j = 1.0;$$

$$a_0^* = b_0^* = c^* = 0$$

$$u_0 = 0.0 \text{ (salida del controlador)}$$

1.- Actuación sobre el motor con la señal de control obtenida en el período de modulación (50 μ seg) anterior (es decir con la salida obtenida de la evaluación de la regla anterior)

2.- Cálculo del error y del incremento del error del actual período de modulación

3.- Llamada a la función *controlador*

3.1.- Normalización de las entradas de error y de incremento de error

3.2.- Obtención del grado de verdad de las premisas de error (γ_E) y del incremento del error (γ_{VE}) según la tabla de reglas [6] para un controlador del tipo PI.

3.3.- Cálculo del grado de disparo de la regla según el operador mínimo: $h_{Dj} = \min(\gamma_E, \gamma_{VE})$

3.4.- Obtención del centroide del conjunto consecuente de la regla bajo evaluación d_j^*

3.5.- Cálculo de las condiciones iniciales, aplicando la relación $b_0^* = \beta_0 a_0^* + (1 - \beta_0) c^*$

Esta relación que expresa las condiciones iniciales del controlador, a aplicar al comienzo de cada período de muestreo, nos permitirá obtener los diferentes valores de c^* , para los distintos tipos de controladores que más adelante se plantearán. En general deberá cumplirse que $c^* = (b_0^* - \beta_0 a_0^*) / (1 - \beta_0)$ que queda indeterminado cuando $\beta_0 = 1$. En este caso se asignará a c^* (en el instante de tiempo k) algún valor, normalmente nulo o b_{0k}^* .

3.6. Cálculo de la altura del conjunto acumulador h_{Aj} mediante la ecuación $h_{Aj} = \alpha_{1j} h_{Aj-1} + k_j h_{Dj}$

Para la inicialización de h_{A0} se consideran dos casos posibles:

- Continuidad en h_{Aj} (h_{Aj} no se reinicializa en cada período de muestreo) en cuyo caso $h_{A0k} = h_{ANk-1}$

- No continuidad en h_{Aj} (h_{Aj} reinicializa en cada período de muestreo) en cuyo caso $h_{A0k} = h_{A00} = \text{constante prefijada, que normalmente será cero.}$

3.7.- Cálculo del parámetro α_j

$$\text{-Si } h_{Dj} \neq 0 \text{ y } h_{Aj} \neq 0 \Rightarrow \alpha_j = \alpha_{1j} h_{Aj-1} / h_{Aj} = 1 - k_j h_{Dj} / h_{Aj}$$

$$\text{-Si } h_{Dj} = 0 \text{ o } h_{Aj} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 1$$

3.8.- Cálculo del centroide del conjunto acumulador del sistema A_j , aplicando la ecuación $a_j^* = \alpha_{1j} a_{j-1}^* + (1 - \alpha_j) d_j^*$

3.9.- Cálculo del parámetro β_j .

3.10.- Cálculo del centroide del conjunto de salida B_j , aplicando la ecuación $b_j^* = \beta_{1j} a_j^* + (1 - \beta_j) c^*$

3.11.- Cálculo de la señal de control a aplicar al generador de señal PWM que excitará al motor de corriente continua. Puede demostrarse que no se pierde generalidad considerando $b_{0k}^* = 0$ (en el instante de tiempo k), en cuyo caso la señal de control de un controlador tipo PI será $u_{jk} = b_{jk}^* + u_{Nk-1}$.

(En esta situación no hay continuidad en el centroide b_j^* , es decir que $b_{0k}^* \neq b_{Nk-1}^*$, pero esto no supone ninguna limitación si se impone la restricción, propia de los controladores tipo PI de que la salida u_{Nk} se corresponda con la ecuación $u_{Nk} = b_{Nk}^* + u_{Nk-1}$.)

	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	-3	-3	-3	-3	-2	-1	0
-2	-3	-3	-2	-2	-1	0	1
-1	-3	-2	-1	-1	0	1	2
0	-3	-2	-1	0	1	2	3
1	-2	-1	0	1	1	2	3
2	-1	0	1	2	2	3	3
3	0	1	2	3	3	3	3

Tabla 1. MacVivar-Whelan (error versus incremento de error). Controlador tipo PI.

5 SIMULACIONES

Las simulaciones se han realizado con las características del motor 2842-012C de la firma Minimotors [8], junto con la reductora 38/3 (18.2:1), cuyos parámetros, a la temperatura ambiente de 25°C, son:

$$R_{a25} = 5.3 \, \Omega$$

$$L_a = 580e-6H$$

$$K_{v25} = 22.00e-3 \text{ voltios/rad/seg}$$

$$K_{c25} = 22.00e-3 \text{ Nm/A}$$

$$J_m = 14e-7 \text{ Nm/rad/seg}^2$$

$$B_m = 14e-8 \text{ Nm/rad/seg} \text{ (se ha estimado en un orden de magnitud menor que su momento de inercia } J_m)$$

$$C_f = 1.1e-3 \text{ Nm}$$

$$N = 18.2$$

$$\eta_R = 0.73$$

$$\alpha_{Cu} = 0.00392$$

$$R_{th1} = 2.0 \text{ K/W}$$

$$R_{th2} = 16.0 \text{ K/W}$$

$$\tau_{th1} = 8 \text{ seg.}$$

$$\tau_{th2} = 831 \text{ seg.}$$

Resultados de simulación.

En la siguiente tabla se presentan el conjunto de simulaciones realizadas. Básicamente están centradas en el estudio de los efectos de la contribución de cada regla a la señal de control desde dos perspectivas: los efectos debidos a la variación de los parámetros del controlador y los debidos a la reordenación de las reglas.

En las simulaciones se ha hecho coincidir el período de modulación (T_m) con el periodo de regla, es decir que se ha supuesto que puede evaluarse una regla en cada período de modulación. Estamos llamando período de muestreo (T) al tiempo que se emplea en evaluar las N reglas. Por comodidad se ha supuesto que $T = NT_m$, lo que se corresponde a un tiempo físico de funcionamiento del motor de 2.45 ms, ya que $N=49$ y $T_m=50\mu s$.

Casos	Tipo	h_{A0k}	β_i	c_k^*	k_j
1	1	0	1	0	1
2	1	h_{ANK-1}	1	0	1
3	2	0	1	0	1
4	2	h_{ANK-1}	1	0	1
5	3	0	1	0	1
6	3	h_{ANK-1}	1	0	1
7	1	h_{ANK-1}	j/N	b_{NK-1}^*	1
8	2	h_{ANK-1}	j/N	b_{NK-1}^*	1
9	3	h_{ANK-1}	j/N	b_{NK-1}^*	1
10	3	h_{ANK-1}	j/N	0	1
11	3	h_{ANK-1}	j/N	0	1
12	3	h_{ANK-1}	j/N	0	1
13	3	h_{ANK-1}	j/N	b_{NK-1}^*	1
14	3	h_{ANK-1}	j/N	b_{NK-1}^*	1
15	3	h_{ANK-1}	j/N	b_{NK-1}^*	1

Tabla 2.- Tipos de controlador bajo estudio

Un controlador borroso convencional con una desborrosificación de tipo lineal o simplificada [9] se obtiene como un caso particular del anterior algoritmo de control haciendo $a_0^*=0$, $k_j=\alpha_{ij}=\beta_j=1$ y $h_{A0}=0$. En este controlador se realiza una única medida en cada período de muestreo, y se genera una única señal de control $u_{Nk}=b_{Nk}^*+u_{Nk-1}$ después de evaluar todas las reglas, es decir en cada período de muestreo. Llamaremos a esta clase de controlador de tipo 1 (o convencional).

Si se realizan medidas en cada período de modulación (y por lo tanto en cada período de regla), pero se genera una única señal de control después de evaluar las N reglas, lo llamaremos de tipo 2 (o sensorial).

Y el controlador de tipo 3 (o regla-a-regla) es aquél en que se toma una medida en cada período de regla y se genera una señal de control tras la evaluación de cada regla.

Los casos 1, 3 y 5 (Fig. 3) se han realizado en las mismas condiciones que el convencional con $h_{A0}=0$.

Los casos 2, 4 y 6 (Fig. 4) se han realizado en las mismas condiciones pero con $h_{A0k}=h_{ANK-1}$. El caso 2 supone una ligera modificación de los controladores borrosos convencionales, pero puede apreciarse en las figuras la diferencia de comportamiento.

Puede apreciarse también que realizar medidas en cada período de modulación (tipo 2) supone una mejora en la respuesta del sistema con respecto a los de tipo 1, y que aunque podría esperarse este resultado, no conviene precipitarse en las conclusiones, ya que debe tenerse en cuenta que se están evaluando las reglas de acuerdo con una ordenación particular. El tipo 2 da una idea de la importancia que tiene calcular el grado de disparo de cada regla con el menor retardo posible en relación con la medida. En consecuencia, los controladores de tipo 3 están aprovechando este hecho.

En los casos 7, 8 y 9 (Fig. 5) se ha impuesto una variación para $\beta_j=j/N$ con $\beta_0=1$, y se ha fijado $c_k^*=b_{NK-1}^*$.

Debe entenderse que en ninguno de los casos se ha realizado ninguna sintonización especial de los parámetros del controlador, pero puede apreciarse que las diferencias de comportamiento entre los tipos 1, 2 y 3 y las debidas a la variación de los parámetros del controlador sugieren una nueva forma de sintonización.

Los casos 10, 11 y 12 (Fig. 6) se distinguen por la reordenación de las reglas a la hora de ser evaluadas en el controlador de tipo 3. Todos los anteriores (3 a 9) se han realizado con una ordenación tal que d_j^* presenta una forma en diente de sierra ascendente (de -1 a 1), como en el caso 10. El caso 11 es un diente de sierra descendente (de 1 a -1), y el 12 se ha seguido un orden secuencial de la tabla de MacVicar-Whelan de izquierda a derecha y de arriba-abajo. Lo mismo se aplica a los casos 13, 14 y 15 (Figura 7).

También se ha optado por el ordenamiento en diente de sierra ascendente (de -1 a 1) en los casos 1 a 9 cuando se

repite los conjuntos borrosos del consecuente. Como es obvio, los casos 1, 2 y 7 son independientes de la reordenación.

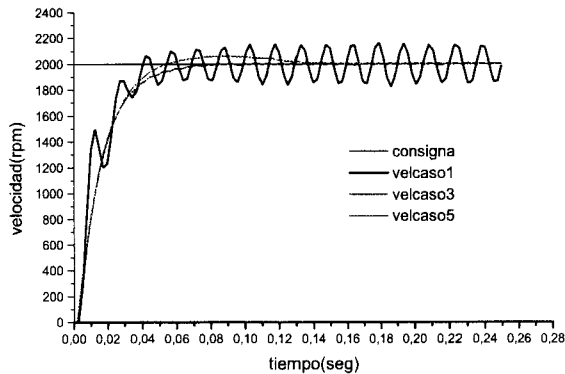


Figura 3

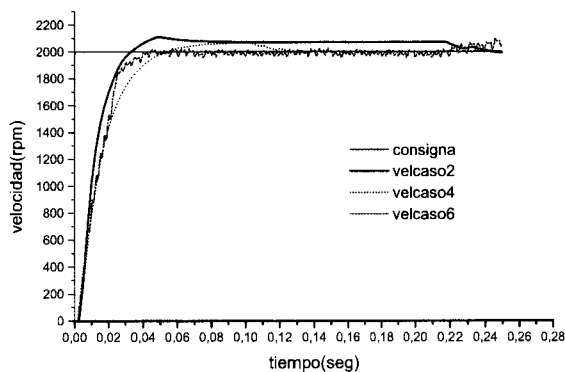


Figura 4

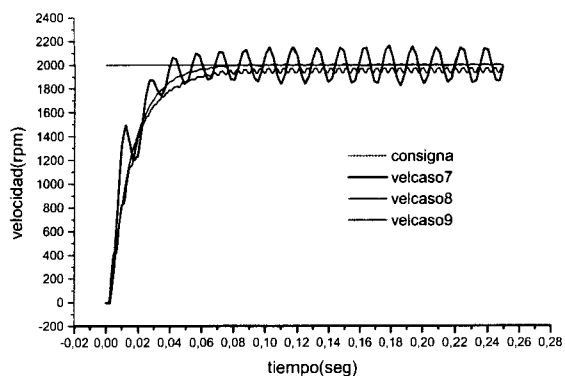


Figura 5

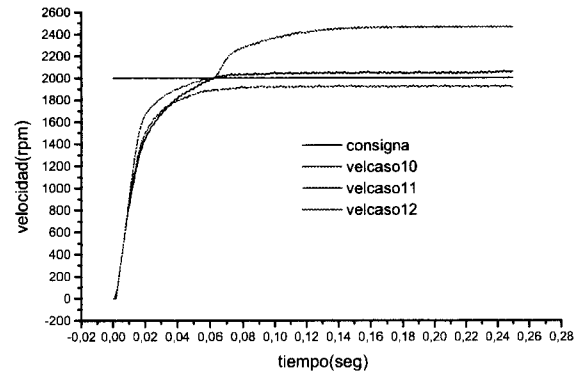


Figura 6

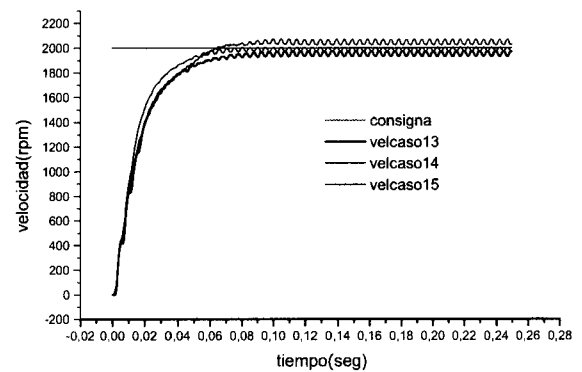


Figura 7

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se han realizado pruebas de simulación de los efectos de la contribución de cada regla de un controlador de tipo PI, utilizando un controlador dinámico borroso aditivo, actuando mediante PWM sobre un sistema no lineal que representa un motor eléctrico de corriente continua.

Se ha visto que los parámetros del controlador afectan significativamente el comportamiento del sistema en lazo cerrado, lo que sugiere que una elección adecuada de ellos permitiría una sintonización del controlador.

Por otro lado se ha señalado la importancia que puede tener la reordenación de las reglas, lo que sugiere que es interesante realizar una predicción de la región del espacio de estados en que se encuentre el sistema.

En este trabajo no se ha abordado el problema desde una perspectiva analítica. En la actualidad se están abordando todas estas cuestiones [2], así como la experimentación sobre motores reales.

REFERENCIAS

[1].- A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with

- Friction. B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont and C. Canudas de Wit. *Automatica*. Vol 30, nº 7, pp 1083-1138. 1994
- [2] B. Artaloytia, Control de motores de corriente continua mediante técnicas de sistemas borrosos aditivos. (Tesis doctoral en preparación. ETSI Telecomunicación, UPM, Madrid.)
- [3].- Electro-Craft Engineering Handbook by Reliance Motion Control Inc. Dc Motors Speds Controls Servo Systems. Fifth Edition. 1975
- [4].- T. Kenjo and S. Nagamori. *Permanet-Magnet and Brushless DC Motors*. Clarendon Press. Oxford. 1985
- [5] B. Kosko, *Neural networks and fuzzy systems. A dynamical approach to machine intelligence*. Prentice-Hall International Editions, 1992. (Véase especialmente el capítulo 11 firmado por P.J.Pacini y B.Kosko, "Comparison of fuzzy and Kalman-filter target-tracking control systems", pp. 379-406.)
- [6].- MacVicar-Whelan, P.J. "Fuzzy sets for man-machine interactions". *International Joournal of Man-Machine Studies*, 8, 687-697, 1977
- [7] E.H.Mamdani y S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller", *Int. J. Man-Machine Studies*, 7, 1-13, 1975
- [8].- Minimotors. Catálogo de motores. 1999/2000
- [9] M. Mizumoto, "Min-max-gravity method versus product-sum-gravity method for fuzzy control", *Proc. IV IFSA Congress, Bryselas, Engineering parrrt*, 127-130, 1991.
- [10] F. Monasterio, P. Bustos, B. Artaloytia., E. Serantes, D. Caballero, M. Broncano, M.A. Lima, F.J. Hernández, J. Usón. "A force-feedback laparoscopic tool for robotic minimally invasive surgery". VI International Symposium on Experimental Techniques, Viseu, Portugal, 6-7 diciembre, 2001.
- [11].- F. Monasterio-Huelin. "Sistemas Dinámicos Borroso-Aditivos como Controladores Iterativos de Actuación Regla a Regla". Presentado al congreso ESTYLF-2002.
- [12].- J. O. Jang, G. J. Jeon. "A parallel neuro-controller for DC motors containing nonlinear fricción". *Neurocomputing* 30 (2000), pp 233-248
- [13].- Ch.-M. Ong. *Dynamic simulation of electric machinery using Matlab/Simulink*. Prentice Hall PTR, 1998.
- [14].- Veljko Potkonjak. "Thermal Analysis and Dynamic Capabilities of DC Motors in Indutrial Robotics Systems". *Robotics & Computer-Integrated Manufacturing*. Vol 5, Nº 2/3.1989. pag 137-143
- [15].- J. Tal. "Desing and Analysis of Pulsewidth-Modulated Amplifiers for DC Servo Systems". *IEEE Trans. on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, vol IECI-23, no 1, feb. 1976. pp 47-55
- [16] R.R. Yager y D.P.Filev. *Essentials of fuzzy modeling and control*, Jhon Wiley and Sons, Inc. 1994.
- [17] L.A. Zadeh, "From circuit theory to system theory", *Proc. Of the IRE*, pp.856-865.
- [18] L.A. Zadeh. "Fuzzy sets", *Inf. Control* 8, 338-353, 1965.

Observer based fuzzy control. Application to a turboprop.

Elvia PALACIOS

LAAS-CNRS.

7, avenue du Colonel Roche
31077, Toulouse Cedex 4, FRANCE.

Tél: +33 5 61 33 69 62,

Fax: +33 5 61 33 69 36.

epalacio@laas.fr

André TITLI

LAAS-CNRS.

7, avenue du Colonel Roche
31077, Toulouse Cedex 4, FRANCE.

Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

135, avenue de Rangueil - 31077, Toulouse Cedex 4, FRANCE.

Tél: +33 5 61 33 64 45, Fax: +33 5 61 33 69 36.

titli@laas.fr

Abstract

In this paper, we use a classical Takagi-Sugeno (TS) fuzzy model to represent a non linear system (a turboprop) with the goal to control it. We suppose that all the states are not measurable; then, we need to design a fuzzy observer then a fuzzy controller, both based on the fuzzy model.

Conditions to find gain matrices for the observer and the controller globally stabilizing the closed loop system are formulated in terms of LMIs easy to solve.

An application to real system, a turboprop, is presented and shows that the method is valid for complex models.

Keywords: TS fuzzy model, separation principle, fuzzy observer, fuzzy control.

1 Introduction

One of the principal characteristics of a physical process is its nonlinearity. The techniques of nonlinear control needed to regulate this type of systems are very complex, which is the case of our application on a turboprop. The turboprops used in the modern airplanes are sophisticated and demand efficient control systems. For this end, the control design needs to use all the available information. Therefore, simple models for the calculus of the control law are not appropriate. Moreover, the single-stage reactors with constant geometry are replaced by 3-stages, multiple flows and variable geometry and the resulting model that describes completely the phenomena and interactions is really non linear with high dimension.

In the few last decades, the interest for fuzzy systems has increased considerably and the researchers

have considered a variety of models and control frameworks. A very successful fuzzy modeling technique is the fuzzy model of Takagi-Sugeno (TS) [7, 4, 5]. The popularity of TS fuzzy model not only comes to its simplicity, but also from the idea that the global dynamics of a nonlinear system can be represented by a limited set of fuzzy rules (corresponding to local linear models). Another characteristic of this model is to be an universal approximator for almost all the smooth nonlinear systems.

Since the TS fuzzy model is a bridge between fuzzy logic (used in the premisses of the rules) and the systems theory (used of linear models in the conclusions of the rules), classical tools of system theory can be used, for example the Lyapunov method for all the stability problems, the state feedback technique, the theory of observer when all the state variables are not measurable, like in our application.

Thanks to the use of linear models in the conclusion part of the rules, the design of the stabilizing gains for observers and controllers can be formulated in terms of linear matrix inequalities (LMI) easy to solve, then generalizing for non linear systems the well known "separation principle".

Therefore, our contribution is to design and observer based control for a non linear system represented by a TS fuzzy model. The section 2 of this paper presents the TS fuzzy model then the PDC procedure (Parallel Distribution Compensation [8]) and the fuzzy observers [2]. On section 3 application to the turboprop are given and developed.

2 Takagi-Sugeno Fuzzy Systems

2.1 The model

A TS fuzzy system is described by a set of fuzzy 'IF... THEN' rules with fuzzy sets in the antecedents and continuous-time LTI systems in the consequents. A generic TS model rule can be written as follows:

i^{th} Plant Rule:
IF $x_1(t)$ is M_{i1} and ..., $x_n(t)$ is M_{in}
THEN

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y &= C_i x(t)\end{aligned}$$

where $x \in R^n$ is the state vector with components $x_j, j = 1$ to n , $i = 1, \dots, r$, r is the number of rules, M_{ij} are input fuzzy sets, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, the input vector $u(t)$ and y the output. Using singleton fuzzifiers, max-product inference and center average defuzzifier, we can write the aggregated model as

$$\dot{x} = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t)(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(t)} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t)C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(t)}$$

where w_i is defined as

$$w_i(t) = \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(x_j(t)) \quad (2)$$

where μ_{ij} is the membership function of the j th fuzzy set in the i th rule. Defining

$$\alpha_i(t) = \frac{w_i(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(t)} \quad (3)$$

we can write (1) as

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)C_i x(t)$$

where $\alpha_i > 0$ and $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$.

2.2 The control

Using the same fuzzy partition for generating TS fuzzy rules for the controller, and assuming that the state is measurable, we have

i^{th} Controller Rule:
IF $x_1(t)$ is M_{i1} and ..., $x_n(t)$ is M_{in}
THEN $u(t) = F_i x(t)$.

The overall controller will be

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)F_i x(t) \quad (5)$$

The closed-loop TS fuzzy system is described as follows:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\alpha_j(t)(A_i - B_i F_j)x(t) \quad (6)$$

The sufficient conditions for the stability of (6) are the following:

Theorem 1 The equilibrium state of the continuous-time TS fuzzy system (6) (namely, $x = 0$), where the K_i 's are unknown is globally asymptotically stable if there exists a common symmetric positive definite matrix $Q = P^{-1} > 0$ which satisfies

$$\begin{aligned}QA_i^T + A_i Q + V_i^T B_i^T + B_i V_i &< 0 \\ i &= 1, 2, \dots, r \\ QA_i^T + A_i Q + QA_j^T + A_j Q + \\ V_j^T B_i^T + B_i V_j + V_i^T B_j^T + B_j V_i &< 0, \\ i &< j \leq r.\end{aligned} \quad (7)$$

where Q and $V_i = K_i Q, i = 1, 2, \dots, r$, are the new matrix variables of the LMIs.

The proof of this theorem is in [2]

2.3 The Observer

Coming back to the general model with an output equation:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(y)(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(y)C_i x(t)\end{aligned} \quad (8)$$

we define a fuzzy observer as a set of T-S **If-Then** rules which estimate the states of the system (8). A generic observer rule can be written as

i th Observer Rule:
If $y_1(t)$ is M_{i1} and ... $y_p(t)$ is M_{ip}
Then $\dot{\hat{x}} = A_i \hat{x} + B_i u + L_i(y - \hat{y})$.

where p is the number of measured outputs, $y_i = C_i x$ is the output of the i th T-S plant rule, $\hat{y}$ is the global output estimate, and $L_i \in R^{n \times p}$ is the local observer gain matrix. The defuzzified global output estimate can be written as

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j(y)C_j \hat{x}(t)$$

The aggregation of all fuzzy implications results in the following state equations:

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(y)(A_i \hat{x} + B_i u)$$

$$+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(y) \alpha_j(y) L_i C_j (x - \hat{x}). \quad (9)$$

Since $\sum_{j=1}^r \alpha_j(y) = 1$, we can write equation (9) as

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(y) \alpha_j(y) [(A_i - L_i C_j) \hat{x} + B_i u + L_i C_j x]. \quad (10)$$

Note, that now, we wrote the normalized membership functions as a function of y instead of x since the antecedents are measured output variables, not states. The controller is now based on the estimate of the state rather than the state itself, i.e. we have

$$u(t) = - \sum_{j=1}^r \alpha_j(y) K_j \hat{x}(t). \quad (11)$$

Substituting (11) in (4) we get the following equation for the closed-loop system:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(y) \alpha_j(y) (A_i x - B_i K_j \hat{x}). \quad (12)$$

Defining the state estimation error as

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

and subtracting (12) from (10) we have:

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(y) \alpha_j(y) (A_i \tilde{x} - L_i C_j \tilde{x}). \quad (13)$$

To guarantee that the estimation error goes to zero asymptotically, we can use Theorem 2 [2]. The observer dynamics is stable if a common positive-definite matrix P_2 exists such that the following matrix inequalities are satisfied:

$$\begin{aligned} (A_i - L_i C_i)^T P_2 + P_2 (A_i - L_i C_i) &< 0, \\ i &= 1, \dots, r, \\ (A_i - L_i C_j + A_j - L_j C_i)^T P_2 + \\ P_2 (A_i - L_i C_j + A_j - L_j C_i) &< 0, \\ i &< j \leq r \end{aligned} \quad (14)$$

Although the inequalities in (14) are not LMIs, they can be recast as LMIs by the following change of variables:

$$W_i = P_2 L_i,$$

Using the above variable change in (14) and using the LMI lemma [1], we obtain the following LMIs in P_2 and W_i :

$$\begin{aligned} P_2 &> 0, \\ A_i^T P_2 + P_2 A_i - W_i C_i - C_i^T W_i^T &< 0, \\ i &= 1, \dots, r, \\ (A_i + A_j)^T P_2 + P_2 (A_i + A_j) \\ - (W_i C_j + W_j C_i) - (W_i C_j + W_j C_i)^T &< 0, \\ j &< i \leq r. \end{aligned} \quad (15)$$

The observer gains are obtained from:

$$L_i = P_2^{-1} W_i. \quad (16)$$

Considering an augmented state of the system with the state estimation error, we obtain the following $2n$ -dimensional state equations for the observer/controller closed-loop system:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(A_i - B_i K_j) & q B_i K_j \\ 0 & q(A_i - L_i C_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_j C_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

$$q = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j.$$

The following theorem gives the stability conditions of the closed-loop observer/controller system.

Theorem 2 [2] *The closed-loop observer/controller system (17) is globally asymptotically stable if there exists a common, positive-definite matrix $\tilde{P}$ such that the following Lyapunov inequalities are satisfied:*

$$A_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} A_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (18)$$

$$(A_{ij} + A_{ji})^T \tilde{P} + \tilde{P} (A_{ij} + A_{ji}) < 0, \quad j < i \leq r, \quad (19)$$

where A_{ij} and $\tilde{P}$ can be defined as

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix},$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \lambda P & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

The proof is in [2]. Now, we will use the separation property in order to separate the LMIs in two sets, one for the observer and the second one for the controller.

Theorem 3 Separation Property of the Observer/Controller *The closed-loop system (17) is globally asymptotically stable if the inequalities in (7) and (15) are satisfied independently.*

The proof is in [2].

3 The turboprop model

The control problem of this turboprop is a global up thrust regulation. According to the lever position, the thrust management logic elaborates specifications of couple on tree and rotation speed of the propeller to reach programmed traction.

The studied control law must permit to modulate the propeller pitch and the fuel flow in a joined manner to reach the specifications. In the variation domain of the

lever, 6 representative points are distributed homogeneously on the domain. These points have been kept between the slow flight motion (point 6) and the full gas level (point 1). From the point 6 to the point 3, the reference for the propeller rotation speed is constant and the couple demand increases gradually. From the point 2 to the point 1, the couple demand remains constant (and maximal) and the reference of the propeller rotation speed increases.

An identification of local models for each operating point is given. The heart of the TS model has an identical structure to the identified models. The coefficients of the models are interpolated according to PS3, representative parameter of the power level delivered by the motor.

$$\begin{aligned}
 XN25 \frac{d\delta XN25}{dt} &= a_1 \delta XN2 + a_2 \delta XN25 + \\
 & b_1 \delta WF + b_2 \delta \beta \\
 XN2 \frac{d\delta XN2}{dt} &= a_3 \delta XN2 + a_4 \delta XN25 + \\
 & b_3 \delta WF + b_4 \delta \beta \\
 XN3P &= K XN2 \\
 \delta TRQ13P &= \frac{c_1 \delta XN2 + c_2 \delta XN25 + d_1 \delta \beta}{\delta XN3P}
 \end{aligned} \quad (20)$$

where

β angle of incidence of the blades of the propeller
 WF injected fuel
 $XN3P$ rotation speed of the propeller
 $XN2$ rotation speed of the BF shaft
 $XN25$ rotation speed of the HP body
 $TRQ13P$ couple on the shaft of the propeller
 $PS3$ input pressure of the combustion chamber
 $a_1, a_4, b_1, b_4, c_1, c_2$ and d_1 are coefficients which changes depending of the operational point. β and WF are the control inputs; $XN3P$ and $TRQ13P$ are the outputs to be controlled.

δ translates the variation between the data and a point of reference, that is the identification point of the model.

K is the reduction report of the main transmission box, (known mechanical data).

The main problem is that the coefficients of turboprop model vary with respect to an event: the lever position. To develop a fuzzy control system, we represent the system by a TS fuzzy model. In order to define the rules of the TS model, we take the lever position as a premise variable, and as consequent parts, the sub-models described by "point i " $i = 1, \dots, 6$. The TS rules are written as:

Plant Rule i

If lever is S_i , Then Point i

$i=1,2,3,4,5,6$.

Controller Rule i

If lever is S_i , Then $u = -F_i x(t)$

$i=1,2,3,4,5,6$.

Observer Rule i

If lever is S_i , Then

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))$$

$$\hat{y}(t) = C_i \hat{x} + D_i u(t) + E_i$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

where the points i are:

Point 6

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6.4329 & 0.6902 \\ 2.3093 & -0.6760 \\ 1.9202 & -0.0802 \\ -0.0085 & -0.2448 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.8702 \\ XN2 - 0.75 \\ WF - 0.2425 \\ \beta - 0.2618 \end{bmatrix} +$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.0316 & -2.5723 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.8702 \\ XN2 - 0.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7.264 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WF - 0.2425 \\ \beta - 0.2618 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1163 \end{bmatrix}$$

Point 5

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4.9172 & 0.2151 \\ 2.8557 & -0.8566 \\ 1.2562 & -0.1330 \\ -0.0128 & -0.5164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.8873 \\ XN2 - 0.75 \\ WF - 0.3750 \\ \beta - 0.49 \end{bmatrix} +$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.4424 & -10.3852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.8873 \\ XN2 - 0.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 15.0947 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WF - 0.375 \\ \beta - 0.49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 15.3896 \end{bmatrix}$$

Point 4

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3.5335 & 0.0332 \\ 2.9969 & -1.0780 \\ 0.7966 & -0.1975 \\ -0.0117 & -0.6992 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.9119 \\ XN2 - 0.75 \\ WF - 0.5261 \\ \beta - 0.6362 \end{bmatrix} +$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.8284 & -18.3095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.9119 \\ XN2 - 0.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20.2471 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WF - 0.5261 \\ \beta - 0.6362 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 26.5116 \end{bmatrix}$$

Point 3

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4.2825 & -0.0903 \\ 3.4785 & -1.4948 \\ 0.9840 & -0.4691 \\ -0.0157 & -0.7386 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.9396 \\ XN2 - 0.75 \\ WF - 0.6946 \\ \beta - 0.7532 \end{bmatrix} +$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.9557 & -23.3766 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.9396 \\ XN2 - 0.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 22.0811 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} WF - 0.6946 \\ \beta - 0.7532 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 35.4075 \end{bmatrix}$$

Point 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4.099 & -0.0589 \\ 4.9226 & -1.5343 \\ 0.7193 & -0.6161 \\ 0.0753 & -1.0147 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XN25 - 0.9726 \\ XN2 - 0.9107 \\ WF - 0.7947 \\ \beta - 0.6494 \end{bmatrix} +$$

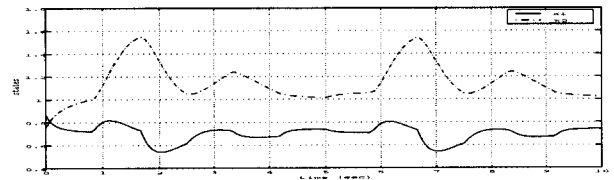


Figure 2: Simulation results for the states $XN25$ and $XN2$.

Figure 3: Simulation results for the inputs WF and β .

Figure 4: Sequence of the lever 6,5,4,3,2,1,6,5....

Figure 5: Simulation result for the output $XN3P$.

Figure 6: Simulation result of the output TRQ_{13P} .

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.0915 & -0.0521 \\ 0.3836 & -0.0131 \end{bmatrix}, K_6 = \begin{bmatrix} 31.139 & -5.5579 \\ 0.1739 & 0.0331 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.5277 & -0.2741 \\ 0.3242 & -0.1532 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0.5545 & -0.0926 \\ 0.3250 & -0.1589 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -0.0038 & -0.0105 \\ 0.7622 & -0.0084 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} 1.0747 & -0.00714 \\ 2.1394 & -0.8429 \end{bmatrix}$$

$$F_5 = \begin{bmatrix} 1.5674 & -0.2912 \\ 2.2092 & -0.5143 \end{bmatrix}, F_6 = \begin{bmatrix} 3.0465 & -0.4481 \\ 1.7402 & -0.6742 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.057714 & 0.114 \\ 0.114 & 1.0904 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 12.372 & -1.2722 \\ -1.2722 & 1.9884 \end{bmatrix}$$

Figures (5) and (6) show the outputs of the systems, $XN3P$ and $TRQ13P$, respectively. We remark the fuzzy model TS of turboprop is stable.

4 Conclusions

The simulation results for the turboprop show that the use of TS fuzzy observer/controller for real application is realistic even though the number of LMIs to be solved is important (21 for the observer and 21 for the controller). We verified that the closed loop system is stable and all the imposed restrictions are respected. Possible extensions of this work are to introduce delays in the model and/or constraints on the control variables.

References

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM series in Applied Mathematics, Vol.15, Philadelphia, PA., 1994.
- [2] S.S Farinwata, D. Filev and R. Langari, *Fuzzy control, synthesis and analysis*, Wiley & Sons, 2000.
- [3] X.J. Ma, Z.Q. Sun and Y.Y. He, Analysis and Design of fuzzy controller and fuzzy observer, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol.6, No.1, 1998, pp.41-50.
- [4] T. Takagi and M. Sugeno, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling control, *IEEE Trans. on Systems Man and Cyb.*, Vol.15, No.1, 1985, pp.116-132.
- [5] T. Takagi and M. Sugeno, Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Sets Syst.*, Vol.45, No.2, 1992, pp.135-156.
- [6] K. Tanaka and M. Sano, On the concept of fuzzy regulators and fuzzy observers, *Proceedings of the third IEEE Int. Conf. on fuzzy systems*, Vol.2, 1994, pp.767-772.
- [7] H.O. Wang, K. Tanaka, and M.F. Griffin, An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol.4, No.1, pp.14-23, 1996.
- [8] H.O. Wang, K. Tanaka, and M.F. Griffin, Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, pp.531-537, 1995.

SISTEMAS DINÁMICOS BORROSO-ADITIVOS COMO CONTROLADORES ITERATIVOS DE ACTUACIÓN REGLA A REGLA

Félix Monasterio-Huelin
E.T.S.I. Telecomunicación, UPM
felix@robolab.unex.es

Resumen

Se propone en este trabajo una clase general de sistemas dinámicos borrosos, y se demuestra que los de orden uno consisten en una representación iterativa (regla a regla) de todos los controladores borrosos que utilicen una desborrosificación simplificada. Los conjuntos borrosos implicados se definen por medio de un vector de características (centroide, altura, anchura) lo que permite realizar una separación de los parámetros en términos de estas características. Se propone también un método de sintonización de los controladores que consiste en imponer restricciones juiciosas a estas características.

Palabras Clave: Sistemas dinámicos borrosos, desborrosificación simplificada, controladores borrosos.

1 INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas que plantea el análisis de los sistemas basados en la teoría de conjuntos borrosos es su carácter no lineal, pero, por otro lado, esta es su principal virtud cuando se evalúa su funcionamiento en múltiples aplicaciones.

El diseño de sistemas fundamentados en los principios de la lógica borrosa no son una excepción. La definición de la estructura del sistema borroso se facilita enormemente utilizando variables lingüísticas y reglas causales entre ellas, pero el análisis y la imposición a priori de especificaciones de funcionamiento se hace tremendamente complejo.

Por otro lado, el hecho de que las variables lingüísticas constituyan una partición borrosa completa de un universo acotado (a partir de la cual se construyen reglas borrosas causales del tipo IF-THEN) obliga a que la transformación de entrada-salida del sistema deba realizar una proyección de todas las clases de la partición en una sola variable (operador ALSO en los sistemas de reglas borrosas). En muchas aplicaciones además, debe transformarse la variable borrosa de salida en una variable no borrosa (operador de desborrosificación).

Una de las consecuencias derivadas del mismo método de construcción de la estructura del sistema borroso, es que el número de reglas del sistema crece exponencialmente con la dimensión de la partición (número de variables lingüísticas) y con el número de variables de entrada y salida. Para paliar estos problemas se han propuesto muchas soluciones, como por ejemplo, descomponer el sistema en subsistemas desacoplados de menor dimensión, reduciendo la complejidad exponencial a una lineal.

En este trabajo se propone definir los sistemas dinámicos borrosos a través de variables borrosas (no necesariamente a través de variables lingüísticas) que evolucionan en el tiempo. Estas variables se representan mediante conjuntos borrosos. Hemos limitado este estudio a los sistemas aditivos de una entrada y una salida. Cada variable borrosa se caracteriza por medio de un vector de características (soporte, área, altura y centroide). En el apartado 3 se obtienen las ecuaciones dinámicas de dichos parámetros derivadas de las ecuaciones del sistema dinámico borroso-aditivo.

Con el fin de comprobar la utilidad de esta formulación, se estudia en el apartado 4 una posible forma de aplicarla al diseño de controladores. La entrada del sistema dinámico será la salida borrosa de cada una de las reglas de un controlador borroso convencional. El centroide del conjunto borroso de salida del sistema dinámico (para cada regla) constituirá la señal de control efectiva. Se verá que, en definitiva, se ha definido un algoritmo iterativo para el operador ALSO del sistema de reglas con una forma de desborrosificación lineal. En el apartado 5 se propone una metodología de análisis orientada a la sintonización de los parámetros del controlador. En el apartado 6 se comentan algunas conclusiones derivadas de este trabajo, y entre ellas algunas posibles generalizaciones.

2 COMBINACIÓN LINEAL DE CONJUNTOS BORROSOS

Un conjunto borroso A asociado al dominio X se define como la función (de pertenencia) $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$. En lo sucesivo se escribirá A en lugar de μ_A y sólo se considerará el caso en que $X=(a,b)$, con $a,b \in \mathbb{R}$.

El conjunto ordinario $X_A \subseteq X$ tal que $A(x) \neq 0$ se le llamará soporte del conjunto borroso A .

Se define la operación $\oplus$ o suma de dos conjuntos borrosos A y B, como la función C tal que $A(x) \oplus B(x) = C(x) \forall x \in X$. Debe entenderse que, en general, C no será un conjunto borroso. Por simplicidad de notación se escribirá la expresión anterior en la forma $A \oplus B = C$.

Una combinación lineal de conjuntos borrosos (o suma ponderada) tendrá la forma, $C = \beta_1 A \oplus \beta_2 B$, siendo $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Debe entenderse que C tampoco será, en general, un conjunto borroso. No obstante, en lo que sigue se considerará que β_1 y β_2 cumplen las condiciones adecuadas para que C sea un conjunto borroso, cuyo soporte es la unión ordinaria de los soportes de A y de B, $X_C = X_A \cup X_B$.

Se llamará conjunto borroso extendido de A, al conjunto borroso de altura unidad, L_A , tal que $A = h_A L_A$, siendo h_A la altura de A, es decir $h_A = \max_x \{A(x)\}$.

Se llamará forma canónica de una suma ponderada cuando se exprese en términos de los conjuntos extendidos. La forma canónica de $C = \beta_1 A \oplus \beta_2 B$ es $L_C = \beta_1 (h_A/h_C) L_A \oplus \beta_2 (h_B/h_C) L_B = \beta_{c1} L_A \oplus \beta_{c2} L_B$.

Se define la operación $\otimes$ entre conjuntos borrosos asociados al mismo dominio, de la siguiente forma: $A \otimes B = \int_a^b A(x)B(x)dx$.

Se llamará área de un conjunto borroso (se le suele llamar potencia o cardinalidad; también se le puede llamar masa) a $A \otimes 1 = \int_a^b 1(x)A(x)dx = \int_a^b A(x)dx$. Se escribirá $A \otimes x = \int_a^b x A(x)dx$. Por simplicidad de notación se escribirá $A \otimes 1$ y $A \otimes x$.

El centroide de A será $a^* = (A \otimes x) / (A \otimes 1)$.

Se llamará coeficiente de contracción de A relativo a C a $c_{A/C} = (A \otimes 1) / (C \otimes 1)$, y coeficiente de contracción de A a $c_A = (A \otimes 1) / (1 \otimes 1)$.

La forma canónica da lugar a la ecuación de alturas (1), $(h_C = \beta_1 (L_A \otimes 1 / L_C \otimes 1) h_A + \beta_2 (L_B \otimes 1 / L_C \otimes 1) h_B)$, y a la de anchuras (2), $(L_C \otimes 1 = \beta_1 (h_A/h_C) L_A \otimes 1 + \beta_2 (h_B/h_C) L_B \otimes 1)$. Se llamará ecuación de áreas a (3), ecuación de contracción (de áreas) a (4) y ecuación de centroides a (5):

$$h_C = \beta_1 h_A + \beta_2 h_B \quad (1)$$

$$L_C \otimes 1 = \beta_1 L_A \otimes 1 + \beta_2 L_B \otimes 1 \quad (2)$$

$$C \otimes 1 = \beta_1 A \otimes 1 + \beta_2 B \otimes 1 \quad (3)$$

$$\beta_1 c_{A/C} + \beta_2 c_{B/C} = 1 \quad (4)$$

$$c^* = \beta_1 c_{A/C} a^* + \beta_2 c_{B/C} b^* \quad (5)$$

Utilizando la ecuación de contracción y haciendo $\beta = \beta_1 c_{A/C} = 1 - \beta_2 c_{B/C}$ podemos escribir la ecuación de centroides en la forma:

$$c^* = \beta a^* + (1 - \beta) b^* \quad (6)$$

De esta manera queda claro que si $\beta \in [0, 1]$ entonces $c^* \in [a^*, b^*]$ (combinación lineal convexa).

(La demostración de todas estas expresiones es trivial, sin más que aplicar las definiciones correspondientes.)

Por último, se considerará que un conjunto borroso A se caracteriza, como mínimo, por el vector de características de A: $C_A = (X_A, a^*, L_A \otimes 1, h_A)$.

Debe observarse que hay infinitas formas de caracterizar un conjunto borroso. Por ejemplo, un conjunto borroso triangular, queda completamente caracterizado por su forma triangular (lineal) junto con $C_A = (\alpha_1, a^*, L_A \otimes 1, h_A)$ donde $X_A = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Se dirá que los conjuntos borrosos A y B:

- * están igualados en anchura si $L_A \otimes 1 = L_B \otimes 1$ o $c_{LA/LB} = 1$.

- * están igualados en altura si $h_A = h_B$.

- * están equilibrados si $A \otimes 1 = B \otimes 1$ o $c_{A/B} = 1$.

Si se cumplen dos cualesquiera de las anteriores propiedades se cumple la tercera. Pero no a la inversa.

Además, siendo $C = \beta_1 A \oplus \beta_2 B$:

- * si (A,B,C) están igualados en anchura, entonces:

$$h_C = \beta_1 h_A + \beta_2 h_B \quad (7)$$

- * si (A,B,C) están igualados en altura, entonces:

$$L_C = \beta_1 L_A \oplus \beta_2 L_B \quad (8)$$

cuya ecuación de área es $\beta_1 (L_A \otimes 1 / L_C \otimes 1) + \beta_2 (L_B \otimes 1 / L_C \otimes 1) = 1$.

- * si (A,B,C) están equilibrados, entonces:

$$1 = \beta_1 + \beta_2 \quad (9)$$

Como puede apreciarse la imposición de cualquiera de las tres propiedades definidas más arriba impone restricciones en los parámetros (β_1, β_2) de la suma ponderada borrosa.

Puede probarse que si se cumple a priori alguna de las ecuaciones anteriores, no se cumplirá necesariamente ninguna de las propiedades anteriores, y los parámetros (β_1, β_2) quedarán unívocamente determinados, lo que indica que la suma ponderada $C = \beta_1 A \oplus \beta_2 B$ no dependerá de ningún parámetro, tan solo de características de los conjuntos borrosos constituyentes. Pero si se cumple la propiedad que da lugar a la ecuación entonces la suma ponderada dependerá de un único parámetro.

3 SISTEMAS DINÁMICOS BORROSO-ADITIVOS

Una secuencia (o sucesión) de conjuntos borrosos asociados al mismo dominio, es un conjunto (ordinario) de conjuntos borrosos indexados con el índice $j \in J = \{1, 2, \dots, N\}$, que se escribirá $A(N) = \{A_1, \dots, A_N\}$ donde A_j es un conjunto borroso (el número entero N puede ser infinito.) (Si $A(N)$ fuese a su vez un conjunto borroso, se le llamará, como es habitual, conjunto borroso de tipo 2.

En este trabajo no se va a hacer ningún uso de esta posible generalización.)

Dadas dos secuencias borrosas $A(j)$ y $D(j+1)$, y un operador de agregación binario cualquiera F_{j+1} , se podrá construir una secuencia borrosa aumentada $A(j+1)$ mediante iteraciones: $A_{j+1}=F_{j+1}(A(j), D(j+1))$ con $A(j+1)=A(j) \cup \{A_{j+1}\}$. La secuencia así obtenida se llamará secuencia iterativa borrosa.

En las secuencias iterativas borrosas se deberá introducir la noción de conjunto borroso inicial, A_0 , que, en general, no será ni un conjunto vacío, ni un conjunto puntual, y aunque así sucediese no será necesario que su centroide sea nulo.

Una clase importante de secuencias iterativas, que se dirá que son de orden 1, tienen la forma: $A_{j+1}=F_{j+1}(A_j, D(j+1))$. En lo que sigue se estudian secuencias iterativas borrosas aditivas: $A_{j+1}=\sum_{k=1..j} \alpha_{kj+1} A_k \oplus \sum_{k=1..j+1} \beta_{kj+1} D_k$ y más específicamente las de orden 1: $A_j=\alpha_{1j} A_{j-1} \oplus \alpha_{2j} D_j$. Se llamará sistema dinámico borroso aditivo (SDBA) (de orden 1 y tipo 1) a las siguientes secuencias borrosas iterativas A, B, C y D definidas sobre el mismo dominio X :

$$A_j = \alpha_{1j} A_{j-1} \oplus \alpha_{2j} D_j \quad (10)$$

$$B_j = \beta_{1j} A_j \oplus \beta_{2j} C \quad (11)$$

donde el índice j representa el parámetro de tiempo discreto.

Se llamará a A estado acumulador del sistema, a B salida del sistema, a D entrada del sistema y a C memoria del sistema. El conjunto borroso A_0 se llamará condición inicial del sistema. La ecuación (7) es la ecuación de estado del sistema y la (8) la ecuación de salida.

El tipo de sistema se define por el número de elementos de C , lo que significa que la generalización a sistemas de tipo M es evidente, sin más que substituir $\beta_{2j} C$ por $\sum_{k=1..M} \beta_{2jk} C_k$ (en general los índices j y k son distintos). El orden del sistema coincide con la dimensión del estado del sistema, de aquí que para sistemas de orden mayor que uno los parámetros deban representarse mediante matrices, y el estado mediante un vector de conjuntos borrosos. Este estudio se limitará a analizar los sistemas de orden 1.

Lema 1.

a) Las ecuaciones de centroides del SDBA dado por (10) y (11) son de la forma:

$$a_j^* = \alpha_j a_{j-1}^* + (1-\alpha_j) d_j^* \quad (12)$$

$$b_j^* = \beta_j a_j^* + (1-\beta_j) c^* \quad (13)$$

donde

$$\alpha_j = \alpha_{1j} c_{A_j/A_j} = 1 - \alpha_{2j} c_{D_j/A_j} \quad (14)$$

$$\beta_j = \beta_{1j} c_{A_j/B_j} = 1 - \beta_{2j} c_{C/B_j} \quad (15)$$

b) Además, se cumple la siguiente ecuación de centroides de entrada-salida:

$$b_j^* = p_j b_{j-1}^* + q_j d_j^* + r_j c^* \quad (16)$$

donde

$$p_j + q_j + r_j = 1 \quad (17)$$

$$p_j = \alpha_j \beta_j / \beta_{j-1} \quad (18)$$

$$q_j = (1 - \alpha_j) \beta_j \quad (19)$$

Las ecuaciones (12) y (13) son equivalentes a (16), por lo que podemos decir que en relación con los centroides los sistemas de orden 1 pueden caracterizarse por dos conjuntos relacionados de dos parámetros independientes: (p_j, q_j) o (α_j, β_j) cuya relación entre ellos viene dada por (18) y (19), o equivalentemente por

$$\beta_{j-1} p_j + q_j = \beta_j \quad (20)$$

$$(1 - \alpha_j) p_j q_{j-1} - (1 - \alpha_{j-1}) \alpha_j q_j = 0 \quad (21)$$

(A partir de las relaciones (14) y (15) pueden obtenerse fácilmente las ecuaciones de alturas, de contracciones, de áreas y de anchuras.)

Teorema.

El centroide del SDBA dado por (10) y (11) sigue la siguiente ecuación lineal de orden dos de parámetros variables:

$$b_{j+1}^* = \tau_{1j+1} b_j^* + \tau_{2j+1} b_{j-1}^* + \tau_{3j+1} d_{j+1}^* + \tau_{4j+1} d_j^* \quad (22)$$

para $j=1..N-1$, junto con $b_1^* = p_1 b_0^* + q_1 d_1^* + r_1 c^*$, siendo los parámetros:

$$\tau_{1j+1} = (r_j + 1/r_j) + p_{j+1} \quad (23)$$

$$\tau_{2j+1} = - (r_j + 1/r_j) p_j \quad (24)$$

$$\tau_{3j+1} = q_{j+1} \quad (25)$$

$$\tau_{4j+1} = - (r_j + 1/r_j) q_j \quad (26)$$

Si $c^* = b_0^*$, entonces $b_1^* = q_1 d_1^* + (1-q_1) c^*$.

En el siguiente lema puede verse que en $(j+1)$ sólo hay dos parámetros independientes, que dependen, a su vez de otros dos en j .

Lema 2.

Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\tau_{1j+1} + \tau_{3j+1} = 1 - \tau_{4j+1}(1 - r_j)/\tau_{3j} \quad (27)$$

$$\tau_{2j+1} = ((1 - r_j)/\tau_{3j} - 1) \tau_{4j+1} \quad (28)$$

Significan estos resultados que los SDBA de orden uno (con memoria) tienen centroides que siguen la ecuación de un sistema de orden dos. Los centroides de un sistema

sin memoria ($r_j=0 \forall j$) siguen una ecuación de primer orden.

Aunque en este trabajo no va a hacerse un estudio analítico señalaremos, no obstante, que puede interpretarse la ecuación del centroide (16) como un filtro lineal (de parámetros variables) que tiene un polo en p_j . Si α_j y β_j son números en $[0,1]$ se cumple que $p_j \leq 1-r_j$. Desde esta perspectiva la ecuación (16) podría utilizarse como un controlador lineal realimentado no-borroso haciendo d_j^* coincidente con una función lineal del error normalizado, en cuyo caso el análisis y diseño podría realizarse utilizando las técnicas conocidas de la teoría de control lineal. Veremos en el siguiente apartado la aplicación de estos sistemas a controladores borrosos con una idea distinta a la que sugiere inmediatamente el anterior razonamiento.

4 APLICACIÓN A LOS CONTROLADORES BORROSOS

Los sistemas dinámicos borroso aditivos (SDBA) pueden utilizarse como controladores, interpretando B como salida y D como entrada. En los sistemas de control realimentados pueden construirse funciones (α, β) dependientes de la variable de error (e).

Suponiendo que la entrada D fuese la salida de un controlador borroso realimentado convencional (CB), el SDBA sería simplemente un corrector dinámico de esta salida, una especie de filtro o compensador borroso, en el que los coeficientes (α, β) podrían interpretarse como parámetros (variables en el tiempo) de un controlador lineal. Sin embargo es posible ver el sistema de una manera distinta.

Si se asocia el índice j a la regla j-sima de un CB de N reglas puede verse, que al evaluar la última regla, se habrá obtenido una salida que puede hacerse coincidir con la salida de una buena colección de controladores borrosos. El siguiente lema demuestra esta interpretación.

Lema 3

La ecuación general de entrada-salida del centroide puede expresarse en la forma:

$$b_j^* = \beta_j \sum_{k=1 \dots j} \omega_{kj} d_k^* + \beta_j \omega_{ja} a_0^* + (1-\beta_j) c^* \quad (29)$$

donde

$$\omega_{kj} = (1 - \alpha_k) \prod_{i=k+1 \dots j} \alpha_i$$

$$\omega_j = \prod_{i=1 \dots j} \alpha_i$$

$$\omega_{jj} = 1 - \alpha_j$$

$$\omega_0 = 1$$

Por un lado, podemos ver que se debe cumplir necesariamente la relación de condiciones iniciales

$$b_0^* = \beta_0 a_0^* + (1-\beta_0) c^* \quad (30)$$

y por otro, que cuando $j=N$ se cumplirá que

$$b_N^* = \beta_N \sum_{k=1 \dots N} \omega_{kN} d_k^* + \beta_N \omega_{Na} a_0^* + (1-\beta_N) c^* \quad (31)$$

La mayoría de los CB consideran $c^*=0$. Si se hace además $a_0^*=0$ y

$$\beta_N \omega_{kN} = \gamma_k / \sum_{i=1 \dots N} \gamma_i \quad (32)$$

siendo γ_k el grado de verdad de la premisa de la regla k-sima, se obtendría un controlador borroso convencional con una desborrosificación de tipo lineal o simplificada[1]. Puede probarse fácilmente que en esta situación, y con $\beta_N=1$,

$$\alpha_j = 1 - \gamma_j / \sum_{i=1 \dots j} \gamma_i \quad (33)$$

Las Memorias Asociativas borrosas (FAM) propuestas por Kosko [2] utilizadas como controladores, son también un caso particular, ya que consisten en hacer (siguiendo la notación de este trabajo), $B = \sum_{i=1 \dots N} D_i$, que al ponerse en forma recursiva será

$$B_j = B_{j-1} + D_j \quad (34)$$

con B_0 el conjunto vacío (o mejor, el conjunto de centroide y altura nulas), lo que en definitiva consiste en hacer $\beta_{1j}=1$, $\beta_{2j}=0$, $\alpha_{2j}=\alpha_{1j}=1$ en las ecuaciones (10) y (11). (En [5] Kosko y Dickerson llaman a su formulación sistema borroso aditivo.)

Por último, la solución propuesta por Yager y Filev [3] de compromiso entre los dos métodos extremos de razonamiento borroso, el constructivo o de Mamdani y el destructivo o lógico, consiste en hacer (también con nuestra notación)

$$d_j^* = \lambda f_j^* + (1-\lambda) g_j^* \quad (35)$$

siendo f_j^* y g_j^* las salidas de cada regla de los sistemas constructivo y destructivo respectivamente.

Una vez definida esta solución de compromiso, los autores mencionados utilizan un método de desborrosificación simplificado, por lo que lo convierten en un caso particular nuestro, si bien el hincapié se hace en la forma de obtener la entrada al SDBA. Podemos proponer aquí, no obstante una generalización de esta idea, haciendo

$$D_j = \lambda_{1j} F_j + \lambda_{2j} G_j \quad (36)$$

cuyos centroides tendrán la forma

$$d_j^* = \lambda_j f_j^* + (1-\lambda_j) g_j^* \quad (37)$$

Algo similar puede decirse del modelo de Takagi-Sugeno [4], ya que en este caso $d_j^* = f(e_j, de_j)$ siendo f una función lineal del error, incremento del error, y que fácilmente puede generalizarse, como ya ha sido hecho por otros

autores a un sistema dinámico genérico. La desborrosificación también es la simplificada.

Resumiendo, los SDBA puede utilizarse como un compensador iterativo que permite actuar sobre la planta a controlar cada vez que se evalúa una regla, cumpliendo la propiedad de que cuando se evalúan todas las reglas se obtiene una salida formalmente idéntica a la de los controladores borrosos convencionales que utilizan una desborrosificación lineal.

Por otro lado, haciendo $b_0^*=c^*$ se garantiza una continuidad o suavidad en la señal de control. De esta manera el periodo de muestreo (T) de un controlador borroso convencional puede dividirse teóricamente en N subperiodos de muestreo (T_j) con una actuación real. En la práctica se abre la posibilidad de reducir el periodo de muestreo sin comprometer la calidad del controlador, o incluso pudiendo imponer restricciones adicionales, como por ejemplo una minimización del consumo energético en los motores eléctricos, como se estudia en [6].

Puede interpretarse el sistema de control en su conjunto como un sistema de control lineal de parámetros variables dependientes de la entrada. No obstante, si los coeficientes dependen de la señal de error el controlador será claramente un sistema no lineal.

5 DISEÑO MEDIANTE LA IMPOSICIÓN DE RESTRICCIONES EN LOS PARÁMETROS

Una de las consecuencias de la formulación de los sistemas dinámicos que aquí se hace es que el razonamiento necesario para el diseño no está fundamentado explícitamente en variables lingüísticas, sino en conjuntos borrosos que representan el estado, la entrada y la salida del sistema. Esto puede verse como una dificultad desde la perspectiva de diseño. En el apartado anterior hemos visto una posible forma de superar este problema, pero en general convendrá desarrollar alguna metodología de diseño que permita un razonamiento orientado a la satisfacción de especificaciones propias de la aplicación.

En este apartado se realiza la descomposición de los parámetros del sistema en términos de las características del conjunto acumulador A_j . Esto puede facilitar el diseño, siempre y cuando logre darse una interpretación razonable de este conjunto borroso.

Con el fin de simplificar la notación nos resultará conveniente adoptar la siguiente notación: $s_{jhC} = \alpha_{2j} L_{Dj} \otimes 1 / L_C \otimes 1$, $k = (C \otimes 1) / (L_{A0} \otimes 1)$, $k_j = ks_j$.

Imponiendo como restricciones las propiedades definidas en el apartado 2, se obtienen las siguientes relaciones.

- Caso $A_j \otimes 1$ constante $\forall j$ (equilibrados) es decir $\alpha_j = \alpha_{1j}$, quedando reducido el problema a la elección de la forma de variación de este único parámetro.
- Caso $L_{Aj} \otimes 1$ constante (igualación en anchura). En este caso,

$$h_{Aj} = \alpha_{1j} h_{Aj-1} + k_j h_{Dj} \quad (38)$$

$$\alpha_j = \alpha_{1j} h_{Aj-1} / h_{Aj} = 1 - k_j h_{Dj} / h_{Aj} \quad (39)$$

Para el caso particular de variación de k_j siguiente:

$$k_j = a - b h_{Aj-1} \quad (40)$$

siendo (a,b) parámetros positivos constantes, se cumplirá

$$h_{Aj} = \alpha_{1j} h_{Aj-1} + a h_{Dj} - b h_{Dj} h_{Aj-1} \quad (41)$$

que recuerda a la ecuación de la probabilidad de la unión de conjuntos. (El caso $\alpha_{1j} = a = 1$ y $b = 0$ se corresponde con los CB convencionales.)

c) Caso h_{Aj} constante $\forall j$ (igualados en altura)

$$\alpha_j = \alpha_{1j} L_{Aj-1} \otimes 1 / L_{Aj} \otimes 1 \quad (42)$$

$$L_{Aj} \otimes 1 = \alpha_{1j} (L_{Aj-1} \otimes 1) + k'_j h_{Dj} \quad (43)$$

con $k'_j = k_j (L_{A0} \otimes 1) / h_{A0}$.

Puesto que A_j representa una especie de estado interno del sistema borroso, que liga su entrada y su salida, podría intentarse esbozar algún razonamiento similar al que se hace con el vector de estados de los sistemas no borrosos. Sin embargo debe tenerse en cuenta que un sistema borroso opera sobre conjuntos borrosos y que estos representan, en cierta forma, una función de la información que se dispone sobre las variables. Es razonable pensar que un sistema dinámico borroso se inicializa en un estado de total o parcial desinformación, y que conforme el sistema evoluciona en el tiempo la información sobre las variables cambia, aumentando o disminuyendo. El problema consiste, por lo tanto, en dotar de significado al estado del sistema en relación con el significado de las variables de entrada y de salida, así como en relación al papel funcional de todo el sistema, que en el caso de un controlador sería, obviamente, controlar eficazmente una planta.

En un sistema dinámico podemos imaginar al menos tres situaciones fácilmente interpretables.

La primera es que, conforme j aumente, h_{Aj} tendiese a 1 y $L_{Aj} \otimes 1$ tendiese a 0, o lo que es lo mismo, que A_j tendiese a un conjunto puntual o no borroso. La segunda situación es que h_{Aj} tendiese a 1 y $L_{Aj} \otimes 1$ tendiese a $1 \otimes 1$, lo que implicaría que A_j tendiese al conjunto universal I . Esta situación es extraña desde un punto de vista realista ya que vendría a decir que cualquier valor posible del estado es igualmente posible. Es decir sería el caso de máxima ambigüedad. La tercera es que $A_j \otimes 1$ tendiese a una constante, lo que implicaría que A_j podría ser interpretado como una especie de probabilidad (el caso de máxima ambigüedad sería un caso particular de éste). Este caso puede conseguirse imponiendo las restricciones de igualación en anchura o en altura anteriores. El caso general, sin ninguna clase de restricción sobre las

características de A_j , permitiría utilizar algoritmos independientes para la variación de h_{A_j} y $L_{A_j} \otimes 1$.

Un problema que debe resolverse siguiendo con este razonamiento es cómo definir el estado inicial A_0 . Esto dependerá de la interpretación. Si se considera que A_j representa la información del sistema puede pensarse que inicialmente debe coincidir con la memoria, es decir $A_0 = C$. Esto implica que $a_0^* = c^*$, y de aquí que $\beta_0 = 1$.

Por otro lado, con el fin de que la salida sea suave convendrá imponer la condición de ciclicidad, es decir $C_{k+1} = B_{Nk}$.

Otra cuestión que conviene tener en cuenta es decidir cómo debe comportarse el estado del sistema en relación con la entrada cuando ésta presenta ciertos valores significativos. Concretamente definiremos y analizaremos las consecuencias de una serie de criterios que tratan de imponer la condición de que el estado no varíe cuando $h_{D_j} = 0$ (en un sistema de reglas esta situación querría decir que la regla j -sima no se ha disparado).

Criterio 1A. Si $h_{D_j} = 0$, el centroide del estado acumulador del sistema deberá ser independiente de d_j^* .

Criterio 1B. Si $h_{D_j} = 0$, el área del estado del sistema deberá permanecer inalterado, es decir, $A_j \otimes 1 = A_{j-1} \otimes 1$.

Si se cumplen simultáneamente ambos criterios se deberá cumplir que: $a_j^* = a_{j-1}^*$, $\alpha_j(0) = \alpha_{j-1}(0) = 1$ y $A_j \otimes 1 = A_{j-1} \otimes 1$.

También podemos ver que los criterios 1A y 1B implican $q_j(0) = 0$, $r_j(0) = 1 - p_j(0)$.

6 CONCLUSIONES

Una de las características de la clase de sistemas borrosos que aquí se propone consiste en la posibilidad de realizar una distribución iterativa de la contribución de cada regla de un controlador borroso a la señal de salida. De esta manera puede reducirse el periodo de muestreo, lo que es en general deseable en aplicaciones de tiempo real, además de que permite suavizar la señal de control entre instantes de muestreo.

Esta clase de sistemas borrosos sugiere generalizaciones evidentes a sistemas multivariables y de orden más elevado a uno. Otra posible generalización es al caso de sistemas borrosos continuos, es decir a aquellos en los que las ecuaciones del sistema se expresen mediante ecuaciones diferenciales.

Otra característica es que resulta ser una generalización de una colección de sistemas borrosos propuestos en la literatura. Una de ellas es la representación de Takagi-Sugeno, cuando las ecuaciones se hacen depender de los conjuntos borrosos de error (o en general del antecedente). Otra se corresponde con la formulación de las FAM propuesta por Kosko. No obstante, no parece probable que la propuesta de este trabajo permita obtener equivalentes de los dos grandes extremos en los métodos de razonamiento borroso, el constructivo o de Mamdani y

el destructivo o lógico, pero la solución de compromiso propuesta por Yager-Filev (una ponderación inteligente de ambos extremos) es un caso particular de la formulación aquí presentada.

Quedan abiertas todas estas cuestiones, además del problema de la sintonización de los parámetros si esta clase de sistemas se utiliza como controlador, si bien se ha propuesto y esbozado una metodología de diseño basada en la imposición de restricciones al vector de características de los conjuntos borrosos implicados. De la misma manera podría utilizarse esta clase de sistemas en problemas de modelado borroso ya que, en definitiva, se tratará de identificar los parámetros utilizando algún algoritmo de identificación.

Diversos aspectos de estas cuestiones están siendo exploradas en la actualidad, tanto teóricamente como en aplicaciones prácticas [1],[6].

REFERENCIAS

- [1] M. Mizumoto, "Min-max-gravity method versus product-sum-gravity method for fuzzy control", Proc. IV IFSA Congress, Bryselas, Engineering parrrt, 127-130, 1991.
- [2] B. Kosko, Neural networks and fuzzy systems. A dynamical approach to machine intelligence. Prentice-Hall International Editions, 1992. (Véase especialmente el capítulo 11 firmado por P.J.Pacini y B.Kosko, "Comparison of fuzzy and Kalman-filter target-tracking control systems", pp. 379-406.)
- [3] R.R. Yager y D.P.Filev. Essentials of fuzzy modeling and control, Jhon Wiley and Sons, Inc. 1994.
- [4] T. Takagi y M.Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control", IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics 15, 116-132, 1985.
- [5] B.Kosko y J.Dickerson, "Function approximation with additive fuzzy systems" en el capítulo 12 de Theoretical Aspects of Fuzzy Control, Ed. H.T.Nguyen, M.Sugeno, R.Tong y R.R.Yager, John Wiley and Sons, Inc. , 1995.
- [6] B. Artaloytia, Control de motores de corriente continua mediante técnicas de sistemas borrosos aditivos. (Tesis doctoral en preparación. ETSI Telecomunicación, UPM, Madrid.)
- [7] F. Monasterio, P. Bustos, B. Artaloytia., E. Serantes, D. Caballero, M. Broncano, M.A. Lima, F.J. Hernández, J. Usón. A force-feedback laparoscopic tool for robotic minimally invasive surgery. VI International Symposium on Experimental Techniques, Viseu, Portugal, 6-7 diciembre, 2001.

CONTROL BORROSO EN SISTEMAS INTELIGENTES DE TRANSPORTE

Ricardo García
ricardo@iai.csic.es

Teresa de Pedro
tere@iai.csic.es

J. Eugenio Naranjo
jnaranjo@iai.csic.es

Jesús Reviejo
jesus@iai.csic.es

Carlos González
gonzalez@iai.csic.es

Instituto de Automática Industrial (CSIC)
Ctra. Campo Real Km. 0,200. La Poveda-Arganda del Rey. Madrid

Resumen

La industria del automóvil está muy interesada en la creación de sistemas de ayuda a la conducción – lo que actualmente se denomina Sistemas Inteligentes de Transporte, ITS en sus siglas inglesas- para hacer que el tráfico sea más eficaz y seguro. En este artículo se presentan los resultados de una serie de experimentos y las estrategias de control utilizadas para comprobar las ventajas de las técnicas borrosas en la creación de ayudas a la conducción de automóviles. Los experimentos pueden clasificarse en dos grupos relacionados con el control de la velocidad, semejantes a los que poseen algunos automóviles modernos, y los relacionados con el control de la dirección.

Palabras Clave: Sistemas Inteligentes de Transporte (ITS), conducción automática, control borroso.

1 INTRODUCCIÓN

El programa AUTOPÍA de control automático de coches tiene por finalidad el desarrollo de tecnologías que ayuden al conductor de un automóvil a realizar su tarea de una manera más segura y descansada. Los problemas derivados de la automatización de la conducción han sido clasificados en varios grupos [11] según sea el escenario en el que se desarrollen autopistas, carreteras, ..., y zonas urbanas. La conducción en zona urbana es el tipo más complejo de todos ellos, ya que existe un gran número de interacciones posibles entre los coches. Además la geometría de la calzada, con cambios bruscos en la dirección, hace aparecer problemas de coordinación entre

el control de la velocidad y de la dirección, control longitudinal y lateral respectivamente en la terminología de los SIT, que los fabricantes de vehículos han obviado en los primeros sistemas comerciales de ayuda a la conducción.

Existen programas de investigación para obtener ayudas automáticas a la conducción prácticamente en todos los países desarrollados. Entre los más importantes se pueden citar los proyectos japoneses "Japanesse Advance Cruise Assist Highway", "Advance Safety Vehicle" y "Super Smart Vehicle System", los proyectos americanos "American Intelligent Vehicle Initiative", "Partners for Advanced Transit and Highway" y "Cooperative Vehicle Highway Automation Systems" y para finalizar los proyectos europeos PROMETHEUS, VITA y CyberCars. En las referencias [3] y [7] puede encontrarse una descripción de todos ellos.

La utilización de técnicas borrosas en el desarrollo de ayudas a la conducción fue mostrada por el Prof. Sugeno en la UPM [15] donde aparece un catálogo de aplicaciones japonesas. En nuestro caso la utilización de técnicas borrosas ha sido una constante de trabajo desde que el primer sistema desarrollado para generación automática de controladores borrosos [9] fue utilizado en el control de robots móviles y manipuladores. Este sistema se continuó con el desarrollo de ORBEX [6]. En las primeras versiones se atendió a la generalidad de las aplicaciones y los métodos utilizados, que permitían integrar cualquier método de concreción, a continuación se hizo hincapié en la riqueza del lenguaje de descripción de reglas, que se pretendía que se aproximase al español definido por la RAE y, finalmente aquellos trabajos se han abandonado, buscando simplificar y centrar los problemas de control. Falta abordar un estudio formal que justifique resultados prácticos parecidos utilizando métodos distintos y aproximaciones en los algoritmos de concreción.

Se presenta el análisis de una serie de experimentos realizados de los que se proporciona la descripción de la estrategia borrosa utilizada, en forma de reglas de control, y los resultados numéricos obtenidos para las variables de salida, en concreto los resultados obtenidos en cambios de carril realizados para adelantar a otros vehículos o para evitar obstáculos.

2 MÉTODOS Y MATERIALES

2.1 Limitaciones actuales del guiado automático

En la actualidad existe en el mercado una diversidad de sistemas con capacidad de control de la velocidad de cruce de los vehículos. El control de estos sistemas está orientado únicamente al acelerador. Asimismo, están en fase de investigación controles automáticos para el freno, con el objetivo de mantener la distancia de seguridad. Están basados en sensores de láser, radar, o cámaras de visión artificial, junto con una amplia gama de algoritmos de control. Sin embargo, la fiabilidad de estos sistemas no está garantizada todavía y es imprescindible continuar investigando en el desarrollo de nuevos algoritmos y sensores que mejoren el rendimiento.

En lo referente al control automático de la dirección, todavía es un tema de investigación pura, no abordado aún por los constructores de automóviles. Algunas referencias en este ámbito son los proyectos "No Hands Across America" en Estados Unidos [12] y "The steering and brake control in case of lane invasion", en Italia [4].

2.2 Equipamiento y preparación de los recorridos experimentales

El equipamiento gracias al cual se han llevado a cabo los experimentos aquí descritos ha sido suministrado por los proyectos COVAN y GLOBO fundamentalmente. A continuación se hace una breve descripción de los recursos con los que se cuenta:

- El ZOCO, acrónimo de Zona de Conducción, es el conjunto de pistas asfaltadas donde se realizan las pruebas de campo. Las dimensiones de los carriles son las mismas que las de una carretera convencional, y la forma del circuito es similar a un barrio residencial.
- Una base GPS combinada, es decir con capacidad para la generación de correcciones diferenciales de código y de fase. Está asociada a un entorno de comunicaciones inalámbrico para transmitir toda la información necesaria [10].
- Dos vehículos eléctricos Citroën Berlingo equipadas con un computador industrial, un receptor GPS de

alta precisión, tarjetas de acceso al entorno de comunicaciones inalámbrico, un sistema de control borroso (ORBEX) y una serie de actuadores electrónicos y mecánicos [5] y [13].



El equipamiento para comunicaciones inalámbricas viene dado por un sistema de Radio-Ethernet. Gracias a él, se pueden transmitir las correcciones diferenciales desde la base GPS a los receptores instalados en los vehículos (con estas correcciones diferenciales se logra una precisión centimétrica en el posicionamiento de los vehículos). Otra función de este entorno es posibilitar la difusión de las posiciones de cada uno de los vehículos entre todos los demás que circulan en la zona de conducción, de tal manera que en cada momento cada coche automático conozca la posición de los demás y pueda realizar las maniobras oportunas en caso necesario.

El sistema de control borroso está basado en el entorno de desarrollo ORBEX [6], desarrollado en el Instituto de Automática Industrial en colaboración con otros centros de investigación.

Los distintos tramos del circuito ZOCO se identifican con los nombres de algunas personalidades importantes, algunas dedicaron su trabajo al arte de la navegación y otras se dedican a la lógica borrosa. Asimismo, cada una de estas calles figura en un mapa trazado con el GPS de precisión centimétrica, mapa que se utiliza como referencia para hacer recorridos automáticos. La construcción de mapas con GPS no es una tarea complicada, actualmente es fácil conseguir mapas GPS de la mayoría de las vías públicas españolas. En nuestro caso el mapa ha sido construido por nosotros mismos.

Cuando se desea hacer un recorrido se utiliza una lista con los nombres de las calles por las que se quiere que circule el vehículo en automático. Se conoce en todo momento el segmento de referencia definido por las posiciones extremas de la calle y el vector de posición del coche y la lectura del velocímetro proporciona la velocidad instantánea. Ambos datos son las entradas al controlador que implementa el guiado automático. Con él se consigue un rendimiento muy próximo al de un conductor humano.

El sistema de control borroso maneja de forma independiente os componentes: el sistema de control de la dirección y el sistema de control de la velocidad.

2.3 Control de la velocidad

Los sistemas para el control de la velocidad son denominados comercialmente en inglés Advanced Cruise Control (ACC). Algunos de los principales parámetros de entrada utilizados son la distancia al vehículo precedente, a los obstáculos detectados o las señales de tráfico. De momento, los sistemas ACC no son totalmente fiables ya que en algunas situaciones son incapaces de interpretar correctamente el entorno. Por ejemplo, pueden confundir algunas señales de tráfico o no detectarlas en caso de curvas. Este defecto hace que comercialmente no se vendan como sistemas autónomos de conducción, sino como simples ayudas al conductor. En consecuencia, es imprescindible una mejora de este tipo de sistemas, a fin de mejorar su rendimiento y fiabilidad.

Nuestro sistema permite mantener una velocidad prefijada independientemente del entorno por el que circule. El controlador de la velocidad emplea solo dos tipos de sensores. Por un lado el tacómetro del vehículo, que da la velocidad instantánea, por otro la red de comunicaciones inalámbrica, mediante la que se conocen las posiciones de todos los vehículos automáticos que se mueven por ZOCO. Esta información es procesada por el sistema de control borroso. Las variables de entrada son el error de velocidad y la aceleración, las cuales son ponderadas mediante sus correspondientes funciones de pertenencia [5]. Las reglas borrosas para el control de cruce son:

SI Error_vel MAYORQUE cero ENTONCES Acelerador levanta
SI Error_vel MENORQUE cero ENTONCES Acelerador pisa
SI Aceleracion MAYORQUE cero ENTONCES Acelerador levanta
SI Aceleracion MENORQUE cero ENTONCES Acelerador pisa

Siendo Error_vel la diferencia entre la velocidad deseada y la velocidad del vehículo. Haciendo una correspondencia con un controlador PID clásico se puede decir que el error de velocidad corresponde a la componente proporcional del control mientras que la aceleración corresponde a la componente derivativa.

2.4 Control de la dirección

El manejo automático de la dirección es un aspecto muy crítico para la seguridad, por lo que los fabricantes son muy precavidos al ofrecerlo como opción de venta. En nuestra investigación la automatización de la dirección se ha llevado a cabo mediante un controlador borroso que maneja el volante. Lógicamente, este control está íntimamente unido al de la velocidad, ya que la forma de conducción no puede ser la misma cuando se circula a velocidades bajas que a velocidades altas.

La estrategia básica para controlar la dirección es el seguimiento de las líneas de referencia, conociendo la posición y la orientación del vehículo, proporcionadas por el GPS. De esta manera se conoce en todo momento los errores de la posiciones angular y lateral del vehículo respecto de la línea de referencia de la calle. Estas dos medidas del error son empleadas como entradas al controlador borroso para obtener el valor del ángulo de giro del volante. Las reglas de control están basadas en las especificaciones de Sugeno [16], y son:

SI Error_lateral izquierda ENTONCES Volante derecha
SI Error_lateral derecha ENTONCES Volante izquierda
SI Error_angular izquierda ENTONCES Volante derecha
SI Error_angular derecha ENTONCES Volante izquierda

Estas reglas de control son utilizadas para los tres tipos de maniobras siguientes:

- Seguimiento de rectas (mantenimiento de la dirección y el sentido de la marcha).
- Seguimiento de curvas (cambio de dirección y sentido de la marcha).
- Cambios de carril (cambio de dirección pero no de sentido).

Aunque las reglas son las mismas para los tres tipos de maniobras, las variables de entrada y salida se ponderan de forma distinta para cada una de ellas, definiendo funciones de pertenencia distintas. Esto traduce el hecho de que los humanos conducen de diferente manera cuando siguen una recta o tienen que girar. En el primer caso, los giros del volante deben ser pequeños y lentos, mientras que en el segundo deben ser grandes y rápidos. Gracias a la lógica borrosa podemos conseguir una emulación más que satisfactoria de la conducción humana.

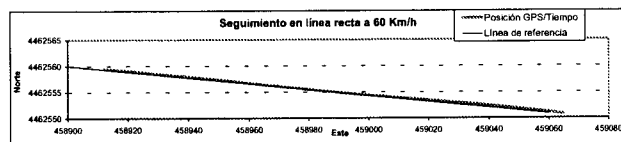
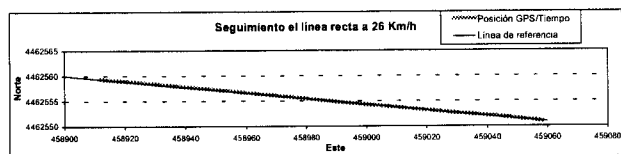
3 EXPERIMENTACIÓN

Los siguientes experimentos de conducción automática de vehículos se han llevado a cabo en nuestras pistas.

3.1 Seguimiento de un carril recto.

La calle elegida para este experimento es la Avenida Zadeh, que con una longitud de 250 metros es la calle más larga de ZOCO. Inicialmente, el vehículo está localizado al comienzo de la calle (UTM Este 459060 m.). El controlador borroso es capaz de guiar correctamente el vehículo a diferentes velocidades, entre 1 y 60 Km/h. El límite máximo de la velocidad viene dado por la corta longitud de la calle y la baja aceleración del vehículo, que hace que sea imposible alcanzar velocidades mayores. Sin embargo para el control borroso sería posible ir más rápido si el entorno lo permitiese.

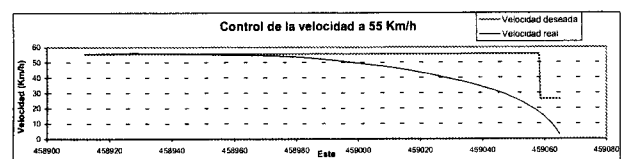
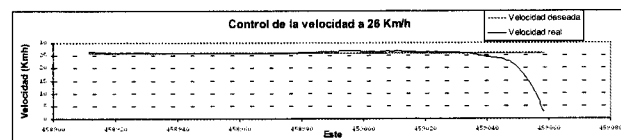
Las siguientes figuras muestran los resultados de los experimentos a dos velocidades representativas: velocidad media (26 Km/h) y velocidad alta (55 Km/h).



Estas figuras deben ser observadas de derecha a izquierda (de este a oeste), ya que el recorrido del vehículo está representado directamente en coordenadas UTM del GPS.

En ambos casos, el seguimiento de la referencia se hace a la perfección. Un análisis de los datos generados muestra que a una velocidad de 55 Km/h, el mayor error lateral que se produce es de 22 centímetros y el error angular es menor de 0.5 grados. Estos errores son imputables a los ajustes mecánicos entre el motor y la barra de dirección.

Las siguientes figuras muestran los resultados del control de la velocidad y el mantenimiento de velocidad deseada durante el mismo experimento.

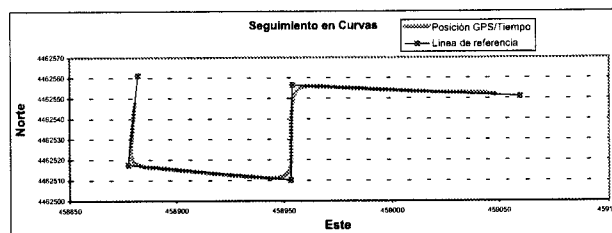


En ambos casos, la velocidad inicial es de 1.6 Km/h, lo cual significa que el control de la velocidad actúa en un principio acelerando el vehículo hasta la velocidad deseada, y luego manteniendo esa velocidad. El error medio de velocidad viene a ser alrededor de 0.28 Km/h.

3.2 Seguimiento en curvas

La finalidad de este segundo experimento es comprobar las prestaciones del control en giros muy pronunciados, de alrededor de 90 grados, es decir, reproducir el cambio de una calle a otra perpendicular de manera similar a como la circulación en zonas urbanas. Para recorrer la ruta, se cambia la línea de referencia por la que circula el vehículo en un momento dado, de manera que debe girar

a fin de seguir por la nueva calle. De la misma manera, el control de la velocidad debe adaptarse a un giro tan pronunciado, reduciendo la velocidad lo necesario. A fin de prevenir accidentes, la velocidad para tomar este tipo de curvas ha sido reducida a 8 Km/h. En la siguiente figura podemos apreciar el rendimiento del sistema en un recorrido combinado con rectas y curvas.



3.3 Cambio de carril

El tercer experimento consiste en pruebas de adelantamiento de obstáculos fijos, como primer paso para la generación de estrategias de adelantamiento de coches en movimiento. En este tipo de misiones el control se realiza a dos niveles: Un control a alto nivel se encarga de tomar la decisión de adelantar o no y un control a bajo nivel se encarga de pilotar el vehículo durante las maniobras de cambio de carril. Cuando la maniobra de cambio de carril ha finalizado el vehículo continúa su trayecto guiado por las reglas de conducción en recta.

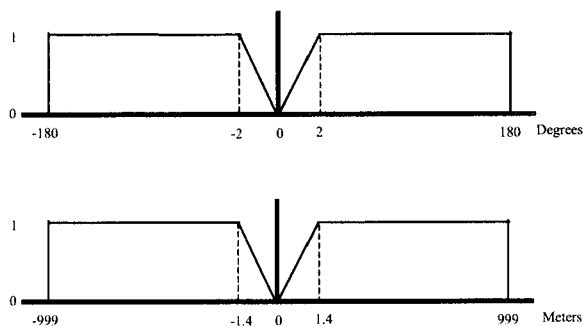
El programa de control de alto nivel realiza los siguientes pasos:

1. Leer la posición GPS del obstáculo a través de la red Radio Ethernet.
2. Comprobar si el obstáculo se encuentra en el mismo carril que el propio vehículo.
3. Comprobar si el modo de conducción es el de seguir rectas.
4. Comprobar si el carril contiguo está libre.
5. Computar el momento en el que la maniobra de cambio de carril debe comenzar.
6. Realizar el cambio de carril.
7. Retornar al modo de conducción en rectas.
8. Computar el momento en que se ha rebasado el obstáculo.
9. Realizar un nuevo cambio de carril para volver al de circulación normal.
10. Volver al modo de circulación en rectas.

El control de bajo nivel se puede dividir en dos fases: El control usual para seguimiento de líneas rectas y un control específico para llevar a cabo los cambios de carril. Este último control también es borroso y tiene las mismas reglas que el de conducción en recta, únicamente se modifican las funciones de pertenencia de las variables.

Los parámetros de estas funciones de pertenencia deben reflejar las características de la maniobra de cambio de carril, en la que la línea de referencia se desplaza, pero se mantiene paralela a línea de referencia inicial. Así, al principio de la maniobra el error lateral tiene mucha más importancia que el angular, a fin de llevar el coche cuanto antes a la nueva línea de referencia, mientras que al final de la maniobra la variable que tiene más importancia es el error lateral se crecerá de carril, ya que es importante que el coche entre bien orientado en el nuevo carril y no se salga por exceso, debido a una sobreactuación en el volante.

Estos requisitos han sido satisfechos con la definición de nuevas funciones de pertenencia para los errores angular y lateral, tal y como se puede apreciar en las siguientes figuras.



Una característica importante a tener en cuenta es que el incremento del ángulo de giro del volante es una variable dependiente de la velocidad del vehículo. Lógicamente, el máximo giro del volante debe ser diferente cuando se circula a 9 Km/h o a 60 Km/h. Según esto, la salida del control debe estar ponderada según la función siguiente, dependiente de la velocidad:

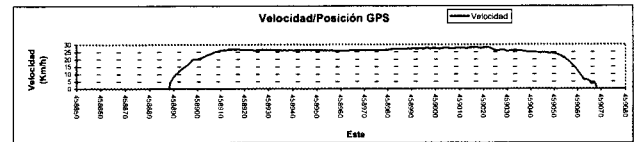
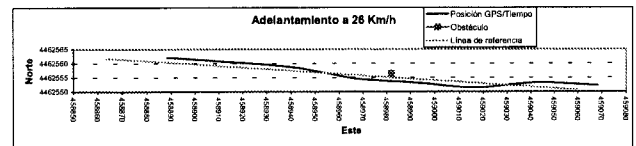
$$f(v_s, v_r) = -0.00185 \cdot \frac{1}{2}(v_s + v_r) + 0.137$$

Esta función ha sido determinada experimentalmente. La consigna de giro del volante (VP) sería entonces:

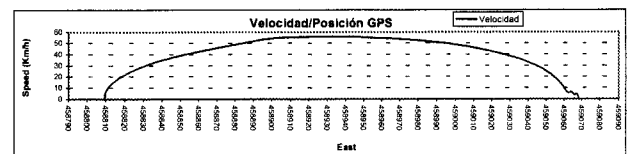
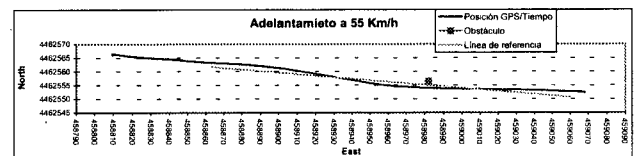
$$VP = f_{zz_0} \cdot f(v_s, v_r)$$

Donde v_s es la velocidad de consigna deseada, v_r es la velocidad real del vehículo y f_{zz_0} es el ángulo de giro del volante proporcionado por el controlador borroso. El uso de estas dos variables es imprescindible, ya que la mayoría de las operaciones de cambio de carril son llevadas a cabo cuando el vehículo está acelerando, y el valor $\frac{1}{2}(v_s + v_r)$ es una buena aproximación de la velocidad instantánea.

Este control ha sido ajustado experimentalmente circulando a velocidades de hasta 60 Km/h. Las dos gráficas siguientes muestran el comportamiento del sistema a dos velocidades representativas: velocidad media (26 Km/h) y velocidad alta (55 Km/h).



En las gráficas precedentes se puede apreciar que el vehículo ha alcanzado la velocidad deseada (26 Km/h) cuando el cambio de carril todavía no ha comenzado, por lo que la maniobra ha sido llevada a cabo en su totalidad a una velocidad constante. En este caso, la salida del volante dependerá solo de la velocidad real.



En estas figuras, la velocidad deseada (55 Km/h) es muy alta para ser alcanzada rápidamente con la aceleración del vehículo, por tanto, el coche se encuentra en fase de aceleración cuando comienza la maniobra de cambio de carril. En este caso se puede apreciar que la aproximación utilizada es buena.

4. Conclusiones

Con los experimentos realizados se ha demostrado la potencia del control borroso en la conducción automática de vehículos, no solo en el seguimiento de trayectorias, sino también en la consecución de maniobras complejas como son adelantamientos y evitación de obstáculos. En esta línea se continúa trabajando para controlar los operaciones de marcha en caravana y mantenimiento de la distancia de seguridad, habiéndose obtenido hasta el momento resultados muy satisfactorios.

Para más información, fotografías y vídeos se recomienda la visita de la página web del proyecto:
<http://www.iai.csic.es/autopia>.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado gracias a los siguientes proyectos:

- ORBEX, Ordenador Borroso Experimental. TIC 96 1393-C06 de la CICYT.
- ZOCO, Creación de una Infraestructura básica. IN 96-0118 de la CICYT.
- COVAN, Control de un vehículo autónomo en un ambiente natural. CAM 06T/042/9 de la Comunidad Autónoma de Madrid.
- GLOBO, Control de vehículos basado en GPS y lógica borrosa. TAP 98-0781 de la CICYT.

Referencias

- [1] Aglaia GmbH. Traffic Sign Recognition. <http://www.aglaia-gmbh.de>.
- [2] JM. Blosseville, M. Parent. "The French Program: La Route Automatisée". *IEEE Intelligent Systems*, May/June 2000, pp. 10-13.
- [3] Mark Bursa. "Big names invest heavily in advanced ITS technology". *ISATA Magazine* December/January 2000, pp. 24-30.
- [4] Jesse Crosse. "Tomorrow's World". *Automotive World*, January/February 2001, pp. 46-48.
- [5] R. Garcia, T. De Pedro, JE. Naranjo, C. Gonzalez, S. Alcalde, J. Reviejo. "An open frame to prove techniques and equipment for autonomous vehicles". *IFAC-MIM 2000*. Patras, Greece, July 2000, pp. 350-354.
- [6] R. Garcia, T. De Pedro. "First Application of the ORBEX Coprocessor: Control of Unmanned Vehicles". 1999 EUSFLAT-ESTYLF Joint Conference, *Mathware and Soft Computing*, n. 7, vol2-3, 2000, pp. 265-273.
- [7] Willie D. Jones, "Keeping cars from crashing". *IEEE Spectrum*. September 2001, pp. 40-45.
- [8] Shigang Li. "Route Description based upon Iconic and Geometrical Information". *IFAC-MIM 2000*. Patras, Greece. July 2000, pp. 344-349.
- [9] J. Gasós et al. "Environment for the Development of Fuzzy Controllers", *Artificial Intelligent Applications & Neural Networks*, 1990.
- [10] JE Naranjo. "Sistemas de Comunicaciones Inalámbricos Aplicados a la Conducción Automática de Vehículos". *Degree Thesis. Universidad Politécnica de Madrid*. Spain. September 2001.
- [11] M.S. Parrant et al. "Automatic Public Urban Vehicles for a Sustainable City", *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA- 2(3), pp 117-126, 1986.
- [12] D. Pomerleau, T. Jochem. "Rapidly Adapting Machine Vision for Automated Vehicle Steering". *IEEE Expert*. April 1996.
- [13] MA. Sotelo, S. Alcalde, J. Reviejo, JE Naranjo, R. Garcia, T. DePedro, C. Gonzalez "Vehicle Fuzzy Driving based on DGPS and Vision". *9th IFSA World Congress*, Canada, July 2001.
- [14] MA Sotelo. "Sistema de Navegación Global Aplicado al Guiado Automático de un Vehículo Autónomo Terrestre en Entornos Exteriores Parcialmente Conocidos". *Ph. Thesis. University of Alcalá*. Spain. October 2001.
- [15] M. Sugeno "Fuzzy Control and its Applications, Programa de Doctorado, Dept. Inteligencia Artificial, Fac. de Informática, UPM, 1998-1999.
- [16] M. Sugeno and Murofoshi, "Fuzzy Algorithmic Control of Model Car by oral Instructions", *2nd IFSA Congress*, Tokyo, 1991.

Sesión

A4

Fundamentos teóricos (II)

Theoretical foundations (II)

Relaciones entre medidas de posibilidad y capacidades maxitivas

Enrique Miranda *

Dep. de Estadística e I.O. y D.M.
Universidad de Oviedo
alu426@pinon.ccu.uniovi.es

Inés Couso

Dep. de Estadística e I.O. y D.M.
Universidad de Oviedo
couso@pinon.ccu.uniovi.es

Pedro Gil

Dep. de Estadística e I.O. y D.M.
Universidad de Oviedo
pedro@pinon.ccu.uniovi.es

Resumen

En este trabajo se estudia la relación entre las medidas de posibilidad y maxitivas desde el punto de vista de las probabilidades superiores de un conjunto aleatorio. En el caso de un referencial finito, es sabido que son equivalentes entre sí y vienen determinadas por un conjunto aleatorio consonante. En el caso infinito, existen ejemplos mostrando que estas relaciones no se mantienen. Se completan aquí estos resultados con condiciones necesarias y suficientes para los casos particulares más importantes.

Palabras Clave: Medidas de posibilidad, medidas maxitivas, conjuntos aleatorios, probabilidades superiores, condensabilidad, consonancia.

1 Introducción

Las medidas de posibilidad han gozado tradicionalmente de una gran atención en la literatura. Así, han sido utilizadas para modelar la incertidumbre lingüística ([19]), y también han sido estudiadas desde el punto de vista de la teoría de la medida ([2]). Constituyen un caso particular de capacidades maxitivas, las cuales han sido utilizadas por ejemplo en la teoría de extremos ([16]).

En el contexto de la teoría de la evidencia, y para referenciales finitos, Shafer ([17]) llamó medidas de plausibilidad consonantes a aquellas cuyos elementos focales estaban anidados. Este concepto coincide, en el caso finito, con los de medida de posibilidad y maxitiva. El autor utilizó este tipo de funciones para modelar

la denominada evidencia consonante, que es aquella proporcionada por fuentes de información que no se contradicen. Por otra parte, la teoría de la evidencia es una reinterpretación de los estudios de Dempster en conjuntos aleatorios ([5]).

Formalmente, un conjunto aleatorio es una aplicación multivaluada medible. Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un espacio medible $(X, \mathcal{A}')$ y una aplicación $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$, diremos que Γ es *fuertemente medible* ([9]) cuando para todo $A \in \mathcal{A}'$, $\Gamma^*(A) := A^* = \{\omega \in \Omega : \Gamma(\omega) \cap A \neq \emptyset\}$ pertenece a $\mathcal{A}$. A^* se denomina *inversa superior* de A . Análogamente, la *inversa inferior* de A se define por $\Gamma_*(A) := A_* = \{\omega \in \Omega : \Gamma(\omega) \subseteq A\}$. Se tiene la igualdad $A_* = (A^*)^c \cap X^*$, luego si Γ es fuertemente medible, $A_* \in \mathcal{A} \forall A \in \mathcal{A}'$.

Usando las inversas superiores e inferiores, Dempster ([5]) definió la *probabilidad superior* inducida por Γ por $P^*(A) = \frac{P(A^*)}{P(X^*)}$, y la *probabilidad inferior* por $P_*(A) = \frac{P(A_*)}{P(X_*)}$.

En la teoría de la evidencia, los conjuntos focales tienen el mismo papel que las imágenes de los conjuntos aleatorios en la teoría de Dempster, mientras que las medidas de plausibilidad (o capacidades ∞ -alternantes) tienen un papel análogo al de las probabilidades superiores de Dempster. Ello nos conduce a la búsqueda de una relación entre el anidamiento de las imágenes de un conjunto aleatorio y el hecho de que la probabilidad superior de éste sea una medida de posibilidad. Esto no sólo tiene un interés teórico (la obtención de una equivalencia entre ambas estructuras) sino también práctico (nos permitiría dar una interpretación de los conjuntos aleatorios consonantes y ver si la restricción de su probabilidad superior a los unipuntuales basta para caracterizar al conjunto aleatorio). En este trabajo, investigamos la relación entre estos dos modelos, completando los resultados de un artículo previo ([13]).

Hemos prestado especial atención a los conjuntos

*Facultad de Geología, despacho 5-16c. 33071, Oviedo.
Tel: 985102958, Fax: 985103354

aleatorios definidos en *espacios Polacos*. Un espacio Polaco (X, τ) ([11]) es un espacio topológico metrizable por alguna distancia d de forma que (X, d) es completo y separable. Denotaremos $\beta(\tau)$ la σ -álgebra de Borel engendrada por la topología. Los espacios Polacos constituyen una generalización del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, d)$, a la vez que mantienen la mayoría de las propiedades de éste. Además, también generalizan los espacios finitos $(X, \mathcal{P}(X))$. Por otra parte, algunos autores trabajan únicamente con conjuntos aleatorios de valores cerrados o compactos ([12]), debido a que suelen tener mejores propiedades que otras clases de conjuntos aleatorios. Por ello, vamos a estudiar en particular el comportamiento de este tipo de aplicaciones multivaluadas en nuestro contexto.

En las Secciones 2 y 3, introducimos y estudiamos los conceptos de medida de posibilidad y maxitiva, y de conjunto aleatorio consonante, respectivamente. A continuación, nos ocupamos del problema mencionado anteriormente; en primer lugar, investigamos si un conjunto aleatorio induciendo una medida de posibilidad es consonante (Sección 4) y a continuación estudiamos si un conjunto aleatorio consonante induce una medida de posibilidad (Sección 5). Por último, en la Sección 6 realizamos algunas observaciones adicionales.

2 Medidas de posibilidad y capacidades maxitivas

A lo largo de este trabajo, vamos a utilizar funciones de conjunto monótonas definidas sobre un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ y satisfaciendo $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = 1$.

Definición 2.1 [18] Dada una σ -álgebra $\mathcal{A}$, una red creciente es una subclase $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ t.q. $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}, \exists A \in \mathcal{C}$ con $A_1 \cup A_2 \subset A$.

Definición 2.2 [2, 10, 18] Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función de conjunto monótona y normalizada $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ se llama:

- maxitiva si $\forall A, B \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$.
- medida de posibilidad cuando $\forall (A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ con $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, es $\mu(\cup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \mu(A_i)$.
- capacidad de Choquet cuando es continua para sucesiones decrecientes de cerrados y para sucesiones crecientes (en este caso μ ha de estar definida en una σ -álgebra de Borel $\beta(\tau)$).
- condensable si para toda red creciente $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ con $\cup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{A}$ se tiene $\mu(\cup_{A \in \mathcal{C}} A) = \sup_{A \in \mathcal{C}} \mu(A)$.

El término *capacidad condensable* fue introducido por Shafer ([18]), y ha sido utilizado por Nguyen ([14]), entre otros. Es una condición más fuerte que la continuidad para sucesiones crecientes. Aunque este concepto se introdujo inicialmente para funciones en $\mathcal{P}(X)$, puede extenderse fácilmente a funciones μ definidas en una σ -álgebra $\mathcal{A}$, como hemos hecho nosotros aquí. En el caso en que $\mathcal{A}$ contenga a los unipuntuales¹, una función condensable está caracterizada sus valores en los conjuntos finitos.

Lema 2.1 [18] Sea $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Entonces, μ es condensable si y sólo si $\mu(A) = \sup\{\mu(J) : J \subset A \text{ finito}\}$.

Podemos deducir que la condensabilidad implica la siguiente condición: $\forall A \in \mathcal{A}, \exists B \subseteq A$ numerable t.q. $\mu(B) = \mu(A)$.

Por su parte, cuando está definida en los unipuntuales, una medida de posibilidad viene determinada por su *distribución de posibilidad*, $\pi : X \rightarrow [0, 1]$, definida por $\pi(x) = \mu(\{x\})$. Se tiene $\mu(A) = \sup_{x \in A} \pi(x)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Claramente, toda medida de posibilidad es maxitiva. El recíproco no es cierto en general: basta considerar ([6]) una función μ en $[0, 1]$ t.q. $\mu(A) = 1$ si A infinito, $\mu(A) = 0$ si A finito.

Este ejemplo nos muestra que para que una función maxitiva sea medida de posibilidad, se necesita alguna propiedad adicional de continuidad, de forma que no sea posible el salto que teníamos allí entre $\sup\{\mu(\{x\}) : x \in A\}$ y $\mu(A)$. Sin embargo, la continuidad para sucesiones crecientes no es suficiente: basta con modificar el ejemplo anterior y hacer $\mu(A) = 1$ si A es no numerable, $\mu(A) = 0$ en otro caso.

Podemos comprobar que hemos exigido la continuidad para redes crecientes (esto es, la condensabilidad) para tener la equivalencia:

Proposición 2.2 Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, y consideremos $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Entonces, μ es una medida de posibilidad si y sólo si es maxitiva y condensable.

Vamos a determinar condiciones necesarias y suficientes más sencillas para que una función sea medida de posibilidad. Para ello, hemos probado el siguiente resultado auxiliar:

Proposición 2.3 Sea (X, d) un espacio métrico, y consideremos una función $\mu : \beta(d) \rightarrow [0, 1]$ en su σ -álgebra de Borel continua para sucesiones decrecientes

¹Esta hipótesis no es demasiado restrictiva, puesto que en la mayoría de las proposiciones y ejemplos que veremos en esta sección trabajaremos con la σ -álgebra de Borel generada por una métrica o una topología Hausdorff.

de compactos. Si μ es maxitiva, entonces $\mu(K) = \max_{x \in K} \mu(\{x\})$ para todo K compacto.

En particular, el resultado anterior sigue siendo válido cuando la capacidad maxitiva μ es una capacidad de Choquet.

Vamos a utilizar los dos resultados anteriores para dar una caracterización más sencilla de las medidas de posibilidad y las capacidades maxitivas. Para ello, previamente debemos recordar la noción de *capacitabilidad*.

Definición 2.3 [11] Consideremos (X, τ) un espacio topológico Hausdorff, $\mu : \beta(\tau) \rightarrow [0, 1]$. Un conjunto $A \in \beta(\tau)$ se dice μ -capacitable cuando $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ compacto}\}$.

Algunos autores ([10]) también exigen que se cumpla la igualdad $\mu(A) = \inf\{\mu(G) : A \subset G \text{ abierto}\}$. Esta condición adicional no será relevante para este trabajo. Hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 2.4 Sea (X, d) e. métrico, μ continua para sucesiones decrecientes de compactos. Entonces, μ es una medida de posibilidad $\Leftrightarrow \mu$ es maxitiva y todo boreliano es μ -capacitable $\Leftrightarrow \mu(K) = \max_{x \in K} \mu(\{x\}) \forall K$ compacto y todo boreliano es μ -capacitable.

Vemos así que la capacitabilidad es un concepto clave para la equivalencia entre medidas de posibilidad y maxitivas. Este concepto ha sido estudiado por algunos autores (ver por ejemplo en [11] el estudio de conjuntos analíticos). Se tienen los siguientes resultados (el primero de ellos es una consecuencia directa del lema 2.1, y el segundo aparece en [10]):

Proposición 2.5 Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff, y consideremos $\mu : \beta(\tau) \rightarrow [0, 1]$.

1. Si μ es condensable, entonces todo $A \in \beta(\tau)$ es capacitable.
2. [10] Si (X, τ) es un espacio Polaco y μ es capacidad de Choquet, entonces todo $A \in \beta(\tau)$ es capacitable.

Nótese no obstante que los conceptos de condensabilidad y de capacidad de Choquet no son equivalentes, ni siquiera en espacios Polacos. Así, la medida de Lebesgue λ en $[0, 1]$ es una capacidad de Choquet que no es condensable. Por su parte, la función $\mu : \beta_{[0,1]} \rightarrow [0, 1]$ dada por $\mu(A) = 1$ si $A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, $\mu(A) = 0$ en otro caso es una función condensable que no es capacidad de Choquet.

Vamos a aplicar a continuación estos resultados en el contexto de conjuntos aleatorios y probabilidades superiores. En [1] se probó que la probabilidad superior

de un conjunto aleatorio compacto en un espacio Polaco era una capacidad de Choquet. De ello podemos deducir la siguiente propiedad:

Teorema 2.6 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico, (X, τ) un espacio Polaco y $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un conjunto aleatorio compacto. Entonces, P^* es una medida de posibilidad $\Leftrightarrow P^*$ es maxitiva $\Leftrightarrow P^*(K) = \max_{x \in K} P^*(\{x\})$ para todo K compacto.

Por otra parte, también se vio en [1] que la probabilidad superior de un conjunto aleatorio cerrado en un espacio Polaco es continua para sucesiones decrecientes de compactos. De esta forma, se satisfacen las hipótesis del teorema 2.4. Hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 2.7 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p., (X, τ) espacio Polaco localmente compacto, $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ conjunto aleatorio cerrado. Entonces, todo boreliano es P^* -capacitable. Como consecuencia, P^* es una medida de posibilidad $\Leftrightarrow P^*$ es maxitiva $\Leftrightarrow P^*(K) = \max\{P^*(\{x\}) : x \in K\}$ para todo K compacto.

Estos resultados serán importantes en las próximas secciones, cuando estudiemos la relación entre las medidas de posibilidad y los conjuntos aleatorios consonantes.

3 Conjuntos aleatorios consonantes

Vamos a centrar nuestra atención a continuación en los conjuntos aleatorios de imágenes anidadas. La mayoría de los autores que han tratado este tipo de conjuntos ([3, 7, 8]) han exigido que el espacio de partida sea el intervalo $[0, 1]$ o un retículo, y han supuesto entonces que $x \leq y \Rightarrow \Gamma(x) \subseteq \Gamma(y)$. Nosotros daremos aquí una definición más general.

Definición 3.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p., $(X, \mathcal{A}')$ un espacio medible y $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un conjunto aleatorio. Diremos que Γ es consonante de tipo:

- C1 si todo par $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ satisface $\Gamma(\omega_1) \subseteq \Gamma(\omega_2)$ o $\Gamma(\omega_2) \subseteq \Gamma(\omega_1)$.
- C2 si existe $N \subset \Omega$ nulo tal que todo par $\omega_1, \omega_2 \in \Omega \setminus N$ satisface la relación anterior.

La condición C1 se corresponde con la idea intuitiva de consonancia, y los conjuntos aleatorios denominados 'consonantes' en [3, 7, 8, 15] la satisfacen. La condición C2, aunque más débil, aparece debido a que podemos modificar un conjunto aleatorio en un conjunto nulo y ello no afecta a su probabilidad superior. De esta forma, podríamos tener dos conjuntos aleatorios Γ_1, Γ_2 t.q. $P_{\Gamma_1}^* = P_{\Gamma_2}^*$ de forma que Γ_1 sea C1 y Γ_2 no lo sea.

Se deduce entonces que estas dos condiciones tendrán las mismas implicaciones en la probabilidad superior. Es decir, si $C1$ implica P^* posibilidad, $C2$ también lo implicará. En cambio, P^* posibilidad podría implicar que Γ es $C2$ y no que es $C1$.

En [13], introdujimos otras condiciones de consonancia a partir de la probabilidad superior del conjunto aleatorio, y estudiamos la relación entre ellas. No obstante, son las condiciones $C1$ y $C2$ las que producen los resultados más interesantes en este trabajo, y por ello vamos a restringirnos a éstas.

En el caso en el que el espacio de llegada sea finito, existe una equivalencia entre consonancia y medidas de posibilidad, como demostramos en [13]:

Proposición 3.1 [13] Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio probabilístico, $(X, \mathcal{P}(X))$ un espacio medible, con $|X|$ finito, y $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ conjunto aleatorio. Entonces, son equivalentes:

1. P^* es medida de posibilidad.
2. P^* es maxitiva.
3. Γ es consonante $C2$.

Podemos obtener fácilmente ejemplos que muestran que la condición $C1$ es suficiente y no necesaria para que P^* sea posibilidad.

Esta proposición es uno de los argumentos que nos hace plantearnos la existencia de una equivalencia entre conjuntos aleatorios consonantes y medidas de posibilidad para el caso de referenciales infinitos. Esto viene además apoyado por algunos resultados establecidos para casos particulares de espacios infinitos ([4, 7, 8]) en los que se relacionan ambos conceptos. Sin embargo, como mostraremos en las próximas secciones, ninguna de las implicaciones se verifica en general, y son necesarias algunas hipótesis adicionales (aunque no demasiado restrictivas) para obtener la equivalencia.

4 ¿Posibilidad implica consonancia?

En [13], se trataron por separado los denominados problemas directo e inverso en esta equivalencia. Es decir, por un lado se estudió si el hecho de que la probabilidad superior de un conjunto aleatorio fuese posibilidad implicaba la consonancia del mismo; y también se investigó si un conjunto aleatorio consonante induce una medida de posibilidad.

Comencemos por los resultados correspondientes al problema directo. Este problema está relacionado con la representabilidad de las medidas de posibilidad

como probabilidades superiores: Goodman demostró [8] que dada una medida de posibilidad en $\mathcal{P}(X)$, existe un conjunto aleatorio que la induce como probabilidad superior. En ese caso, tomaba como espacio de partida $([0, 1], \beta_{[0,1]}, \lambda)$, y la aplicación obtenida era consonante. Nosotros vamos a estudiar algo más general, puesto que en nuestro caso el espacio de partida ya está determinado por el conjunto aleatorio y queremos ver si podemos extraer conclusiones acerca de las imágenes de Γ .

En primer lugar, vamos a mostrar que en general Γ no es consonante $C2$ aunque P^* sea una medida de posibilidad:

Ejemplo 4.1 Consideremos el espacio probabilístico $([0, 1], \beta_{[0,1]}, \lambda)$, el espacio medible $([0, 1], \beta_{[0,1]})$, y la aplicación multivaluada $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$ dada por $\Gamma(\omega) = [0, 1] \setminus \{\omega\} \forall \omega \in [0, 1]$. Γ no es consonante $C2$ (ni tampoco $C1$), puesto que dados $\omega_1, \omega_2 \in [0, 1]$, $\omega_2 \in \Gamma(\omega_1) \setminus \Gamma(\omega_2)$ y $\omega_1 \in \Gamma(\omega_2) \setminus \Gamma(\omega_1)$. Sin embargo, se verifica $P^*(\{x\}) = 1 \forall x \in [0, 1]$, y por lo tanto P^* es una medida de posibilidad.

Aunque este contraejemplo muestra la falta de una implicación en general, resultaría interesante estudiar lo que ocurre bajo algunas condiciones adicionales en el conjunto aleatorio. Se puede probar la implicación cuando las imágenes de Γ son cerradas en un espacio métrico compacto:

Proposición 4.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p., (X, d) un e.m. compacto, $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un conjunto aleatorio cerrado. Si P^* es maxitiva, entonces Γ es $C2$.

Utilizando esta proposición, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 4.2 Consideremos un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un espacio Polaco (X, τ) y un conjunto aleatorio $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Si se tiene alguna de las siguientes condiciones:

- Γ es compacto
- Γ es cerrado y X es localmente compacto

, entonces P^* maxitiva $\Rightarrow \Gamma$ es $C2$.

Nótese que en las condiciones de los resultados 4.1 y 4.2, los conceptos de maxitividad y posibilidad son equivalentes para la probabilidad superior, como vimos en la sección 2. En el caso particular en el que el espacio de llegada sea el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \beta)$, podemos deducir que se tiene la implicación siempre que el conjunto aleatorio sea de imágenes cerradas. El contraejemplo 4.1 nos ha mostrado además que esta condición sobre las imágenes no puede suprimirse.

5 ¿Consonancia implica posibilidad?

Nos ocupamos a continuación del problema inverso, esto es, de si un conjunto aleatorio consonante induce una medida de posibilidad. Uno de los principales resultados en este sentido es el siguiente:

Proposición 5.1 [4] *Consideremos el espacio medible $([0, 1], \beta_{[0,1]})$ y una probabilidad P definida en él. Consideremos un espacio medible $(X, \mathcal{P}(X))$, y una aplicación multivaluada $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Si*

$$[\forall (x, y) \in [0, 1]^2] [x \geq y \Rightarrow \Gamma(x) \subseteq \Gamma(y)],$$

entonces Γ es fuertemente medible e induce una medida de posibilidad.

Esta proposición extiende un resultado de [7]. Por otro lado, aparece también en [3], en donde se generaliza para el caso en el que el espacio de partida sea un retículo. Sin embargo, en ambos casos se asume que el orden del conjunto aleatorio es compatible con el del retículo, de forma que $s \succ t \Leftrightarrow \Gamma(s) \subseteq \Gamma(t)$. Además, en el segundo caso se exigen ciertas condiciones de continuidad. Esto no será posible en general.

Nosotros hemos demostrado que si un conjunto aleatorio es consonante, su probabilidad superior es maxitiva:

Proposición 5.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p., $(X, \mathcal{A}')$ un espacio medible, y $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un conjunto aleatorio C2. Entonces, P^* es maxitiva.*

Sin embargo, la consonancia de un conjunto aleatorio no garantiza que su probabilidad superior sea una medida de posibilidad, como se vio en un contraejemplo en [13]. Recordemos las principales ideas del mismo:

Ejemplo 5.1 [13] *Consideremos un buen orden en $[0, 1]$, y sea x_0 el primer elemento con una cantidad no numerable de predecesores. Denotemos P_x el conjunto de predecesores de x , y definamos una probabilidad Q en $\sigma(\{P_x : x \in [0, 1]\})$ satisfaciendo $Q(A) = 1$ si $\exists x \in P_{x_0}$ t.q. $P_{x_0} \setminus P_x \subset A$, $Q(A) = 0$ en otro caso. La aplicación multivaluada $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$ dada por $\Gamma(\omega) = (P_\omega)^c$ es consonante C1 y no induce una medida de posibilidad.*

La clave en este contraejemplo consiste en construir una probabilidad superior que no sea condensable, para lo cual es suficiente la existencia de algún conjunto A satisfaciendo $P^*(A) > P^*(B)$ para todo subconjunto numerable $B \subseteq A$.

Vemos así una ventaja de las capacidades maxitivas sobre las medidas de posibilidad: en general, la probabilidad superior de un conjunto aleatorio consonante no es una medida de posibilidad, pero sí es maxitiva.

Por otra parte, vimos en la sección 2 una serie de condiciones bajo las cuales los conceptos de medida de posibilidad y maxitiva eran equivalentes. Utilizando esos resultados, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5.3 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p., (X, τ) un espacio Polaco y $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un conjunto aleatorio C2. Entonces, P^* es una medida de posibilidad si se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

- Γ es compacto.
- Γ es cerrado y X es localmente compacto.

De esta forma, podemos establecer la equivalencia entre posibilidades y consonancia para ciertos casos particulares, uniendo este teorema con el resultado 4.2.

Corolario 5.4 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p., (X, τ) un espacio Polaco y $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un conjunto aleatorio. Si Γ es cerrado y X localmente compacto, o si Γ es compacto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. P^* es una medida de posibilidad.
2. P^* es maxitiva.
3. $P^*(K) = \max_{x \in K} P_\Gamma^*(\{x\}) \forall K$ compacto.
4. Γ es consonante C2.

6 Conclusiones

En este artículo, hemos completado los estudios iniciados en [13] acerca de los conjuntos aleatorios consonantes. Hemos caracterizado estas aplicaciones a través de la probabilidad superior que inducen. Ésta viene determinada en el caso de un espacio de llegada finito por sus elementos focales, los cuales vienen a su vez caracterizados por las imágenes del conjunto aleatorio.

En el caso general que hemos estudiado aquí, las capacidades ∞ -alternantes no poseen en general elementos focales, por lo que los resultados no se trasladan de forma directa. Ésta es también una de las causas de la falta de una definición general de consonancia: la mayoría de los autores que han tratado el problema han considerado conjuntos aleatorios definidos en $([0, 1], \beta_{[0,1]})$ o en un retículo, y han establecido una correspondencia entre el orden del retículo y el de las imágenes del conjunto aleatorio. Para espacios probabilísticos cualesquiera, se hace necesario comparar todos los pares de elementos del espacio inicial en función del anidamiento de sus imágenes. Esto da lugar a las definiciones de consonancia C1 y C2.

También hemos prestado atención a las capacidades maxitivas, en contraposición a las medidas de posibilidad. Estos dos tipos de funciones no son equivalentes en general, y en este artículo hemos estudiado las propiedades que los separan. Vemos que las capacidades maxitivas están más relacionadas con la consonancia que las medidas de posibilidad, al contrario de lo que cabría esperarse: la probabilidad superior de un conjunto aleatorio C_2 es maxitiva y no es necesariamente una medida de posibilidad. No obstante, ambos modelos son equivalentes para conjuntos aleatorios con imágenes cerradas o compactas en espacios con propiedades bastante generales (en particular, el espacio $(\mathcal{R}^n, \beta)$, que es el más utilizado en la práctica, satisface las propiedades exigidas). Es también interesante señalar que en esos casos el hecho de que la probabilidad superior de un conjunto aleatorio sea una medida de posibilidad es también equivalente a otra condición: que todo conjunto compacto contenga a un suceso elemental con la misma probabilidad superior.

Concluimos señalando algunas de las líneas de investigación que podrían derivarse de este artículo: por un lado, pretendemos realizar un estudio más detallado de las relaciones entre medidas maxitivas y de posibilidad. También podría estudiarse qué ocurre si eliminamos las restricciones en las imágenes o en el espacio de llegada de los conjuntos aleatorios. No obstante, no somos demasiado optimistas acerca de la obtención de alguna implicación para otros casos, puesto que en las demostraciones de los resultados de equivalencia se ha utilizado la capacitabilidad de los conjuntos de Borel, la cual no se verifica en general para estas otras situaciones.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado en parte por FEDER-MCYT, proyecto BFM2001-3515.

Referencias

- [1] I. Couso. *Teoría de la probabilidad para datos imprecisos. Algunos aspectos*. Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, 1999.
- [2] G. de Cooman. Possibility theory I-III. *International Journal of General Systems*, 25, Pág.291-371, 1997.
- [3] G. de Cooman y D. Aeyels. Supremum preserving upper probabilities. *Information Sciences*, 118, Pág.173-212, 1999.
- [4] G. de Cooman y D. Aeyels. A random set description of a possibility measure and its natural extension. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 30, Pág.124-130, 2000.
- [5] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38, Pág.325-339, 1967.
- [6] D. Dubois, S. Moral y H. Prade. A semantics for possibility theory based on likelihoods. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 305, Pág.359-380, 1997.
- [7] D. Dubois y H. Prade. The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, 24, Pág.279-300, 1987.
- [8] I. R. Goodman. Fuzzy sets as equivalence classes of possibility random sets. En R. R. Yager (ed.), *Fuzzy Sets and Possibility Theory: Recent Developments*, Pág.327-343. Pergamon, Oxford, 1982.
- [9] C. J. Himmelberg. Measurable relations. *Fundamenta Mathematicae*, 87, Pág.53-72, 1975.
- [10] P. J. Huber y V. Strassen. Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities. *Annals of Statistics*, 1, Pág.251-263, 1973.
- [11] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer Verlag, New York, 1995.
- [12] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. Wiley, New York, 1975.
- [13] E. Miranda, I. Couso y P. Gil. Relationships between possibility measures and nested random sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 10, Pág.1-15, 2002.
- [14] H. T. Nguyen. On modeling of linguistic information using random sets. *Information Sciences*, 34, Pág.265-274, 1984.
- [15] H. T. Nguyen. Some mathematical structures for computational information. *Information Sciences*, 128, Pág.67-89, 2000.
- [16] T. Norberg. Random capacities and their distributions. *Probability Theory and Related Fields*, 73, Pág.281-297, 1986.
- [17] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, New Jersey, 1976.
- [18] G. Shafer. Allocations of probability. *Annals of Probability*, 7, Pág.827-839, 1979.
- [19] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, Pág.3-28, 1978.

EXTRACCION DE INFORMACION RELEVANTE EN CONTEXTOS L-FUZZY

Ana Burusco

Dpto. de Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
31006 Pamplona, Spain
e-mail: burusco@si.unavarra.es

Ramón Fuentes González

Dpto. de Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
31006 Pamplona, Spain
e-mail: rfuentes@si.unavarra.es

Resumen

El objetivo de este trabajo es establecer mecanismos que nos permitan simplificar y organizar la información que se desprende de un contexto L-Fuzzy.

Para conseguirlo, tomando como punto de partida [3], comenzaremos construyendo el retículo de conceptos L-Fuzzy del contexto y agruparemos los conceptos en clases de equivalencia para una mejor interpretación de la información.

A continuación, utilizaremos los representantes de las distintas clases para construir, mediante técnicas de Fuzzy Clustering, una relación de similitud que permita clasificar, de forma vaga, los objetos y atributos del contexto.

Finalmente, eliminaremos aquellos objetos y atributos que no aporten información relevante, pasando así a un contexto reducido.

Ilustraremos este proceso a través de un ejemplo.

Palabras clave: Conceptos L-Fuzzy, Contextos L-Fuzzy, Métodos de análisis de datos, Procesamiento de la Información, Adquisición y representación del conocimiento.

1 CONCEPTOS L-FUZZY

En trabajos anteriores ([1,2]) definimos un contexto L-Fuzzy como (L, X, Y, R) con L retículo completo, X e Y conjuntos de objetos y atributos respectivamente, y $R \in L^{X \times Y}$ una relación L-Fuzzy. Estos contextos surgen como generalización al caso Fuzzy de los contextos formales de R. Wille ([7]), cuando se quieren estudiar relaciones entre los objetos y los atributos con valores en un retículo completo L en lugar de valores binarios como los que maneja R.Wille.

A la hora de trabajar con los contextos L-Fuzzy, utilizaremos los operadores derivación 1 y 2 definidos mediante las siguientes expresiones:

$$\forall A \in L^X, \forall B \in L^Y$$

$$A_1(y) = \inf_{x \in X} (A'(x) \vee R(x, y))$$

$$B_2(x) = \inf_{y \in Y} (B'(y) \vee R(x, y)) \quad (1)$$

donde A' y B' son los complementarios de los L-Fuzzy A y B .

La información almacenada en el contexto se visualiza mediante los conceptos L-Fuzzy que no son sino pares (M, M_1) con $M \in \text{fix}(\varphi)$, conjunto de puntos fijos del operador φ , siendo definido éste a partir de los operadores derivación 1 y 2 como $\varphi(A) = A_{12} = (A_1)_2$.

Estos pares, cuyas primera y segunda componentes son la extensión e intensión respectivamente, representan de forma vaga a un grupo de objetos que comparten una serie de atributos.

El conjunto $\mathcal{L} = \{(M, M_1) / M \in \text{fix}(\varphi)\}$ con la relación de orden $\preceq$ definida como

$$\begin{aligned} &\forall (M, M_1), (N, N_1) \in \mathcal{L}, \\ &(M, M_1) \preceq (N, N_1) \text{ si } M \leq N (\text{equiv. } N_1 \leq M_1) \end{aligned} \quad (2)$$

es un retículo completo al que llamaremos retículo de conceptos L-Fuzzy.

1.1 Ejemplo

Supongamos que queremos hacer un estudio de mercado sobre el consumo de una serie de refrescos en algunas de las principales ciudades españolas. Para ello, partiremos de un contexto L-Fuzzy (L, X, Y, R) con $L = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1\}$, y los conjuntos de objetos y atributos $X = \{\text{cola1, cola2, naranjada1, naranjada2, naranjada3, limonada1, limonada2, limonada3, tónica1, tónica2}\}$ (hemos evitado las marcas comerciales) e $Y = \{\text{Barcelona, Bilbao, Granada, Madrid, Málaga, San Sebastián, Santander, Sevilla, Valencia, Zaragoza}\}$ y $R \in L^{X \times Y}$ la relación L-Fuzzy que aparece en la Tabla 1 y que representa el consumo de refrescos en las distintas ciudades. (A partir de este punto, en algunas ocasiones sustituiremos los nombres de los objetos y los atributos por valores x_i e y_i que harán referencia al orden establecido en la definición de dichos conjuntos.)

Tabla 1

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
x_1	0.3	0.6	0.5	0.8	1.0	0.3	0.3	0.2	0.0	0.6
x_2	0.3	0.0	0.1	0.5	0.2	0.1	0.4	0.4	0.0	0.2
x_3	0.3	0.9	0.4	1.0	0.3	0.5	0.5	0.9	1.0	0.2
x_4	0.9	0.6	0.5	0.2	0.0	0.0	0.9	1.0	1.0	0.3
x_5	0.2	0.1	0.0	0.6	0.2	0.5	0.1	0.0	0.3	0.5
x_6	0.4	0.3	0.0	0.5	0.3	0.1	0.4	0.3	0.5	0.4
x_7	0.9	0.5	0.4	0.1	0.3	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3
x_8	0.5	0.3	0.5	0.4	0.1	0.1	0.2	0.5	0.2	0.2
x_9	0.1	0.6	0.4	0.2	0.0	0.0	0.3	0.0	0.1	0.1
x_{10}	0.4	0.2	0.1	0.3	0.0	0.0	0.2	0.6	0.1	1.0

Los valores de la tabla pertenecen al retículo $L = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1\}$ de forma que, por ejemplo, $R(x_1, y_4) = R(\text{cola1}, \text{Madrid}) = 0.8$ significa que el valor de verdad de la sentencia “en Madrid se consume la bebida cola1” es 0.8 (muy alto), mientras que $R(x_{10}, y_3) = R(\text{tónica2}, \text{Granada}) = 0.1$ tendrá el valor de verdad 0.1 (muy bajo). En otras palabras, “el consumo de la cola1 es alto en Madrid mientras que la tónica2 apenas se bebe en Granada”.

El retículo de conceptos L-Fuzzy que resulta $\mathcal{L} = \{(M, M_1) / M \in \text{fix}(\varphi)\}$ consta de 32 elementos que representaremos utilizando la notación de Kaufmann indicando para cada elemento su grado de pertenencia. Veamos como ejemplo uno de esos conceptos L-Fuzzy:

$\{x_1/0.3, x_2/0.3, x_3/0.3, x_4/0.4, x_5/0.3, x_6/0.3,$
 $x_7/0.3, x_8/0.3, x_9/0.3, x_{10}/0.3\},$
 $\{y_1/0.7, y_2/0.6, y_3/0.6, y_4/0.6, y_5/0.6, y_6/0.6,$
 $y_7/0.7, y_8/0.7, y_9/0.7, y_{10}/0.6\}$

es decir,

$\{\text{cola1}/0.3, \text{cola2}/0.3, \text{naranj.1}/0.3, \text{naranj.2}/0.4,$
 $\text{naranj.3}/0.3, \text{limon.1}/0.3, \text{limon.2}/0.3,$
 $\text{limon.3}/0.3, \text{tónica1}/0.3, \text{tónica2}/0.3\},$
 $\{\text{Barcelona}/0.7, \text{Bilbao}/0.6, \text{Granada}/0.6,$
 $\text{Madrid}/0.6, \text{Málaga}/0.6, \text{San Sebastian}/0.6,$
 $\text{Santander}/0.7, \text{Sevilla}/0.7, \text{Valencia}/0.7,$
 $\text{Zaragoza}/0.6\}$

Para interpretarlo nos fijaremos en aquellos objetos y atributos cuyos grados de pertenencia destacan frente al resto. Por tanto, en este caso, podemos concluir que “las ciudades Barcelona, Santander, Sevilla y Valencia tienen en común un alto consumo de naranjada2 (y no de otros refrescos)”.

Se puede observar que no todos los conceptos L-Fuzzy aportan información de ese tipo. En algunos casos, ningún objeto ni atributo destacan del resto, por lo

que no podemos establecer ninguna conclusión. Estos conceptos no serán interesantes para nosotros en el estudio que sigue.

Por otra parte, la teoría de conceptos L-Fuzzy junto con algunos resultados de P. and R. Cousot ([4]) nos permite también obtener los conceptos derivados de un determinado conjunto de partida que representa una situación interesante para estudiar.

Por ejemplo, si queremos hacer un estudio del consumo del refresco naranjada1, tomaremos el conjunto nítido de objetos de partida

$\{x_1/0, x_2/0, x_3/1, x_4/0, x_5/0, x_6/0, x_7/0, \dots, x_{10}/0\},$

y obtendremos el concepto L-Fuzzy

$\{x_1/0.4, x_2/0.4, x_3/0.5, x_4/0.4, x_5/0.4, x_6/0.4,$
 $x_7/0.4, x_8/0.4, x_9/0.4, x_{10}/0.4\},$
 $\{y_1/0.5, y_2/0.6, y_3/0.5, y_4/0.6, y_5/0.5, y_6/0.5, y_7/0.5,$
 $y_8/0.6, y_9/0.6, y_{10}/0.5\}$

donde vemos que “la naranjada1 es el único refresco cuyo consumo tienen en común las ciudades de Bilbao, Madrid, Sevilla y Valencia”.

Como nuestro interés es el de aplicar estos resultados a ejemplos concretos, y éstos tienen siempre un número finito de objetos y atributos, supondremos a partir de este momento que X e Y son finitos, y por lo tanto también el retículo de sus conceptos L-Fuzzy. Además $L = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1\}$.

2 RELACION DE EQUIVALENCIA EN $\mathcal{L}$

Ya que normalmente el cardinal del retículo de conceptos es alto, el siguiente objetivo será el de clasificar los conceptos L-Fuzzy de un contexto L-Fuzzy cualquiera para organizar mejor la información.

Dado el retículo de conceptos L-Fuzzy $\mathcal{L}$, definimos entre sus elementos la relación nítida R de la siguiente forma:

2.1 Definición

$$\forall(A, B), (C, D) \in \mathcal{L},$$

$$(A, B)R(C, D) \iff A^{-1}\{(M, 1]\} = C^{-1}\{(N, 1]\} \quad (3)$$

donde $M = \min\{\min_{x \in X} A(x), \min_{y \in Y} (1 - B(y))\}$,

$N = \min\{\min_{x \in X} C(x), \min_{y \in Y} (1 - D(y))\}$ y

$A^{-1}\{(\alpha, 1]\} = \{x \in X / A(x) > \alpha\}$, con $\alpha \in L$. $\square$

Con esta definición se demuestra el siguiente resultado:

2.2 Proposición

La relación R es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}$.

Dem: Es obvio que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. $\square$

Por tanto, podemos establecer una partición en $\mathcal{L}$, llamando $\mathcal{C}_i, i \in I$, a las distintas clases.

2.3 Representantes de las clases

Es importante disponer de un representante de clase que nos permita recoger la información general de la clase y así tener una visión rápida y general del retículo de conceptos sin más que observar estos representantes.

Para cada $\mathcal{C}_i = \{(A_{i,j}, B_{i,j}), j = 1 \dots k_i\}, i \in I$, sea $E_i = A_{i,j}^{-1}\{(M, 1]\}$ el subconjunto nítido de objetos, donde $M = \min\{\min_{x \in X} A_{i,j}(x), \min_{y \in Y} (1 - B_{i,j}(y))\}$.

Tomaremos como representante de la clase el supremo de sus elementos que se calcula, como quedó demostrado en [1], de la siguiente manera:

$$(A_{C_i}, B_{C_i}) = \left(\text{luis}(\varphi)(\bigvee_j A_{i,j}), (\text{luis}(\varphi)(\bigvee_j A_{i,j}))_1 \right) \quad (4)$$

donde

$$\text{luis}(\varphi)(\bigvee_j A_{i,j}) = \overline{\lim}_j (\bigvee_j A_{i,j}, \varphi(\bigvee_j A_{i,j}), \varphi^2(\bigvee_j A_{i,j}) \dots)$$

que se demuestra que pertenece a la clase.

2.4 Ejemplo

En este caso, siguiendo la definición (3), se obtienen 11 clases de equivalencia. Pondremos como ejemplo la clase $\mathcal{C}_3$:

$$\bullet \text{ Clase } \mathcal{C}_3 : E_3 = \{x_3\} = \{\text{naranjada1}\}$$

- $(\{x_1/0.3, x_2/0.3, x_3/0.4, x_4/0.3, x_5/0.3, x_6/0.3, x_7/0.3, x_8/0.3, x_9/0.3, x_{10}/0.3\}, \{y_1/0.6, y_2/0.7, y_3/0.6, y_4/0.7, y_5/0.6, y_6/0.6, y_7/0.6, y_8/0.7, y_9/0.7, y_{10}/0.5\})$
- $(\{x_1/0.3, x_2/0.3, x_3/0.5, x_4/0.3, x_5/0.3, x_6/0.3, x_7/0.3, x_8/0.3, x_9/0.3, x_{10}/0.3\}, \{y_1/0.5, y_2/0.7, y_3/0.5, y_4/0.7, y_5/0.5, y_6/0.5, y_7/0.5, y_8/0.7, y_9/0.7, y_{10}/0.5\})$
- $(\{x_1/0.4, x_2/0.4, x_3/0.5, x_4/0.4, x_5/0.4, x_6/0.4, x_7/0.4, x_8/0.4, x_9/0.4, x_{10}/0.4\}, \{y_1/0.5, y_2/0.6, y_3/0.5, y_4/0.6, y_5/0.5, y_6/0.5, y_7/0.5, y_8/0.6, y_9/0.6, y_{10}/0.5\})$

El último elemento de la clase es el supremo de la misma y por lo tanto el representante de la clase, tal y como lo hemos definido.

Como interpretación de los conceptos que pertenecen a la clase $\mathcal{C}_3$ podemos decir que se analiza el consumo alto de naranjada1 en Bilbao, Madrid, Sevilla y Valencia.

Además, si observamos los distintos elementos que forman esta clase, y más concretamente sus dos primeros conceptos, vemos que existe una relación inversa entre el objeto x_3 y los atributos y_1, y_3, y_5, y_6, y_7 y y_{10} , de forma que cuando el grado de pertenencia del primero sube, bajan los grados de pertenencia de los otros (no cambian los grados de pertenencia del resto de los elementos). Lo mismo ocurre con los objetos $x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ y los atributos y_2, y_4, y_8 y y_9 , al comparar los dos últimos conceptos de la clase.

Por otra parte, al observar todas las clases vemos que los objetos x_2, x_6, x_7, x_8 y los atributos y_3 y y_6 no aparecen en ninguna de ellas.

Finalmente, hemos asociado a cada clase su correspondiente E_i , de forma que siempre que queramos analizar únicamente un grupo de objetos, acudiremos a aquellas clases que contengan a dichos objetos entre los valores del correspondiente E_i . Por ejemplo, el objeto x_5 (naranjada3) únicamente lo estudiaremos a partir de los conceptos contenidos en la clase $\mathcal{C}_9$ ya que solamente E_9 contiene a x_5 y, sin embargo, x_3 (naranjada1) figura en las clases $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{10}$ y $\mathcal{C}_{11}$.

Tal y como hemos comentado en el ejemplo, este proceso, que lo hemos enfocado desde el punto de vista de los objetos, perfectamente podríamos haberlo hecho desde el de los atributos, obteniéndose en este caso 14 clases de equivalencia.

Por otra parte, en función de los cinco valores diferentes que aparecen en la relación, tendremos cinco α -cortes a considerar: $S_{0.87}^t, S_{0.89}^t, S_{0.91}^t, S_{0.94}^t, S_1^t$.

Estos α -cortes generarán una familia anidada de particiones que se representa, como indican J. Fodor y M. Roubens en [5], de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_1^t &: \boxed{x_1} \boxed{x_2, x_6, x_7, x_8} \boxed{x_3} \boxed{x_4} \boxed{x_5} \boxed{x_9} \boxed{x_{10}} \\ S_{0.94}^t &: \boxed{x_1} \boxed{x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9} \boxed{x_3} \boxed{x_4} \boxed{x_{10}} \\ S_{0.91}^t &: \boxed{x_1} \boxed{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9} \boxed{x_3} \boxed{x_{10}} \\ S_{0.89}^t &: \boxed{x_1} \boxed{x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}} \boxed{x_3} \\ S_{0.87}^t &: \boxed{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}} \end{aligned}$$

En el caso de utilizar $q = 1$, la relación de similitud resultante cambiaría aunque se comprueba que en este ejemplo concreto las clases de similitud serían análogas.

Podríamos repetir el proceso para los atributos (ciudades) obteniendo las siguientes clases de similitud:

$$\begin{aligned} T^t[y_1] &= T^t[y_7], T^t[y_2], T^t[y_3] = T^t[y_6], \\ T^t[y_4], T^t[y_5], T^t[y_8], T^t[y_9], T^t[y_{10}] \end{aligned}$$

Puede verse que los atributos y_3 e y_6 que como ya dijimos no pertenecían a ningún E_i , forman una clase. Sin embargo, existe otra de atributos significativos formada por y_1 e y_7 , lo que nos indica que este par de elementos, que sí aparecen en los conceptos L-Fuzzy, lo hacen siempre conjuntamente. Finalmente, aquí también obtendríamos una familia anidada de particiones igual que en el caso de los objetos.

Por tanto, estas relaciones de similitud nos permiten establecer clasificaciones vagas en el conjunto de objetos y en el de atributos.

4 REDUCCION DE UN CONTEXTO L-FUZZY

En frecuentes ocasiones nos encontramos con que no todos los objetos ni los atributos tienen la misma importancia dentro de un contexto. A veces ocurre que algunos de ellos no llegan a tener un papel relevante, lo que se deduce del hecho de que no existe ningún concepto L-Fuzzy en el que el grado de pertenencia de dichos objetos y atributos sobresalga con respecto a otros. Un primer e importante paso consistirá en detectar cuáles son estos elementos y si se considera oportuno eliminarlos. Esto ayudará a reducir considerablemente el tamaño de la relación L-Fuzzy, y por tanto los cálculos para la obtención del retículo de conceptos L-Fuzzy.

Una manera de hacerlo consiste en construir el retículo de conceptos L-Fuzzy y ver si existe algún

objeto o atributo que no aparece destacado en ningún concepto L-Fuzzy.

Si volvemos al ejemplo anterior, esto ocurre con los objetos x_2, x_6, x_7, x_8 y con los atributos y_3 e y_6 .

Tal y como hemos comentado en la introducción existe otra manera de obtener esos elementos a desechar sin tener necesidad de construir todo el retículo de conceptos L-Fuzzy, utilizando la teoría de P. and R. Cousot ([4]) que nos proporciona un mecanismo que permite aproximar el punto fijo que se deriva de un conjunto de partida. Partiendo de los conjuntos L-Fuzzy básicos de objetos y atributos (que asocian grado de pertenencia 0 a un grupo de elementos, y grado 1 al resto), utilizaremos la teoría de P. and R. Cousot ([4]) para calcular los conceptos que se derivan de ellos y desecharemos aquellos objetos y atributos cuyos conceptos L-Fuzzy asociados a los conjuntos básicos en los que intervienen no aporten información (es decir, todos los grados de pertenencia de los objetos coincidan, y lo mismo ocurra con los atributos).

Debemos ser cuidadosos en este estudio porque puede ocurrir que un objeto o atributo tenga asociado un concepto L-Fuzzy que no aporte información, pero sin embargo, en combinación con otros si que se obtengan conceptos significativos.

Si volvemos al ejemplo, vemos que el concepto L-Fuzzy asociado al objeto x_5 (naranjada3), es decir, el que se obtiene aplicando la teoría de P. and R. Cousot a

$$\{x_1/0, x_2/0, x_3/0, \dots, x_{10}/0\} \text{ es}$$

$$\begin{aligned} &(\{x_1/0.5, x_2/0.5, x_3/0.5, x_4/0.5, x_5/0.5, x_6/0.5, \\ &\quad x_7/0.5, x_8/0.5, x_9/0.5, x_{10}/0.5\}, \\ &\{y_1/0.5, y_2/0.5, y_3/0.5, y_4/0.5, y_5/0.5, y_6/0.5, \\ &\quad y_7/0.5, y_8/0.5, y_9/0.5, y_{10}/0.5\}) \end{aligned}$$

que no nos proporciona información ya que todos los grados de pertenencia de los objetos y de los atributos coinciden.

Sin embargo, existe un concepto L-Fuzzy en el que el objeto x_5 aparece destacado junto con x_1 y x_3 :

$$\begin{aligned} &(\{x_1/0.6, x_2/0.5, x_3/0.6, x_4/0.5, x_5/0.6, x_6/0.5, \\ &\quad x_7/0.5, x_8/0.5, x_9/0.5, x_{10}/0.5\}, \\ &\{y_1/0.4, y_2/0.4, y_3/0.4, y_4/0.5, y_5/0.4, y_6/0.4, \\ &\quad y_7/0.4, y_8/0.4, y_9/0.4, y_{10}/0.4\}) \end{aligned}$$

(Este es el concepto L-Fuzzy que se obtiene tomando como conjunto de partida $\{x_1/1, x_2/0, x_3/1, x_4/0, x_5/1, x_6/0, x_7/0, x_8/0, x_9/0, x_{10}/0\}$)

En otras palabras, "no podemos decir que ninguna ciudad se descate por su alto consumo en exclusiva de naranjada3, sin embargo, en Madrid se consumen tanto naranjada1 como cola1 y naranjada3".

4.1 Definición

Llamaremos contexto L-Fuzzy reducido, y lo denotaremos $(L, X_{red}, Y_{red}, R_{red})$, al que resulta de eliminar los objetos y atributos no significativos.

Esta definición nos permitirá reducir los cálculos a la hora de construir el retículo de conceptos L-Fuzzy.

Para nuestro ejemplo, los objetos no significativos son aquellos refrescos que no tienen un gran consumo en ninguna de las ciudades; y los atributos no significativos aquellas ciudades que no destacan por un alto consumo de ninguno de los refrescos.

4.2 Ejemplo

$(L, X_{red}, Y_{red}, R_{red})$ contexto L-Fuzzy reducido que resulta del contexto inicial, tiene como conjunto de objetos $X_{red} = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9, x_{10}\}$, y de atributos $Y_{red} = \{y_1, y_2, y_4, y_5, y_7, y_8, y_9, y_{10}\}$.

5 LINEAS FUTURAS

Además del proceso de reducción, la familia anidada de particiones del conjunto de objetos y atributos que hemos establecido en el apartado anterior nos puede ayudar a simplificar el contexto inicial sin más que agrupar los objetos y atributos

que aparezcan juntos en una misma clase mediante la agregación de las correspondientes filas o columnas de la tabla. Este es un tema que se abordará en trabajos futuros.

REFERENCIAS

- [1] A. Burusco, R. Fuentes-González, The Study of the L-Fuzzy Concept Lattice, *Mathware and Soft Computing*, Vol 1, No. 3, (1994), 209-218.
- [2] A. Burusco, R. Fuentes-González, Construction of the L-Fuzzy Concept lattice, *Fuzzy Sets and Systems* 97, No. 1, (1998), 109-114.
- [3] A. Burusco, R. Fuentes-González, Relaciones de equivalencia y de similitud en Contextos L-Fuzzy, *X Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Sevilla (20-22 Septiembre, 2000).
- [4] P. Cousot, R. Cousot, Constructive versions of Tarski's fixed point theorems, *Pacific Journal of Mathematics* 82, (1979) 43-57.
- [5] J. Fodor, M. Roubens, Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, The Netherlands, (1994).
- [6] G. J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications, Prentice Hall, (1995).
- [7] R. Wille, Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts, in : Rival I.(ed.), *Ordered Sets*, Reidel, Dordrecht-Boston (1982), 445-470.

PRUEBAS PROBABILÍSTICAS Y NO PROBABILÍSTICAS PARA EL ANÁLISIS DE LA PROPIEDAD TRANSITIVA EN LA TAREA DE PARES COMPARADOS.

HerenciaLeva,A.J

Dpto.de Psicología Social y
Metodología de las Ciencias
del Comportamiento.
Universidad de Granada .
18071- Granada.España
x9221697@fedro.ugr.es

Lamata,M.T

Dpto. Ciencias de la
Computación e Inteligencia
Artificial
Universidad de Granada .
18071- Granada.España
mtl@decsai.ugr.es

Pérez-Meléndez,C

Dpto.de Psicología Social y
Metodología de las Ciencias
del Comportamiento
Universidad de Granada .
18071- Granada.España
cristino@ugr.es

Resumen

En este trabajo se analiza el problema de la transitividad desde la perspectiva tanto de los modelos probabilísticos como no probabilísticos en su aplicación al escalamiento de estímulos. La principal aportación es la extensión del índice de Bezembinder, para ello, se ha tenido en cuenta tanto la propiedad transitiva como el grado en que un par recibe apoyo del resto de los pares.

Palabras Clave: Propiedad transitiva, Analytic hierarchy process, Índice de Bezembinder, Índice de consistencia.

1 INTRODUCCIÓN

Con el desarrollo de los llamados sistemas democráticos de toma de decisiones y la llamada Nueva Teoría de la Decisión Social de Fishburn [3], la propiedad transitiva ha cobrado una importancia vital. Esta importancia se debe a que para poder hablar de una alternativa mayoritaria para una muestra de sujetos, es necesario poder ordenar, al menos débilmente, sus opciones e integrarlas en un orden global que sea coherente con el dado por cada uno de ellos.

Sin embargo, la propiedad transitiva siempre ha presentado la problemática de que es demasiado exigente y de que parece no tener en cuenta las limitaciones que presentan los seres humanos a la hora de realizar juicios. Ya en 1944, von Neumann & Morgenstern [13] trataron el problema de la intransitividad en las matrices de dominancia. La solución fue definir un conjunto "S" compuesto por alternativas no comparables entre si y que dominaban al resto de opciones. Sin embargo, en este caso no se podría hablar de alternativa mayoritaria, sino de conjunto "S" de alternativas mayoritarias.

Dentro de los modelos no probabilísticos (o incorrectamente llamados modelos determinísticos, [11], la estrategia principalmente utilizada para resolver este problema, ha sido la de introducir la relación de semi-orden como unión de una relación de dominancia transitiva y otra de indiferencia intransitiva. La relación de semi-orden fue introducida por Luce en 1956 [2]; posteriormente fue aplicada a la medición extensiva por [6] y extendida a las medidas de probabilidad superiores e inferiores por Fishburn [4,5].

En la Figura I, se puede observar un semi-orden dibujada en (2). En el eje de ordenadas de dicha figura se ha representado la adhesión o preferencia que un individuo presenta por una alternativa ordenada dispuesta en el eje de abscisas de la misma figura. La parte central (representada por una línea punteada en blanco) se corresponde con el intervalo de indiferencia intransitiva.

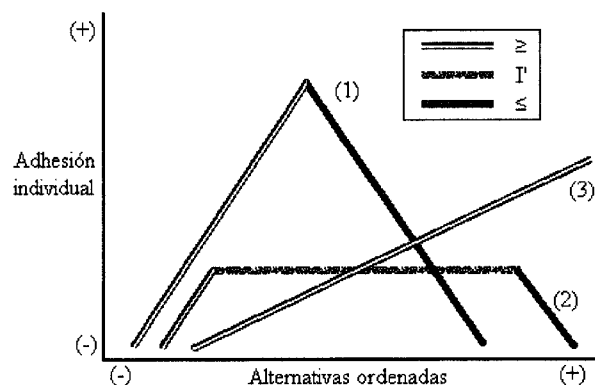


Figura I. Distribución de las preferencias a lo largo de las alternativas ordenadas.

(Adaptado de Fishburn, 1973: 101).

Por su parte, en los modelos probabilísticos la estrategia principal introducida ha sido la de definir diferentes pruebas, más débiles, de la propiedad transitiva, bajo la consideración de que las inconsistencias de los sujetos reflejan fluctuaciones aleatorias en el proceso de decisión [12]. Esta interpretación contrasta con la dada en los modelos no probabilísticos, en los que las inconsistencias se deben a que los sujetos son insensibles a determinadas diferencias entre las alternativas.

Las pruebas introducidas se denominan transitividad estocástica débil, moderada y fuerte [9]. A partir del mencionado artículo de Navarick y Fantino [9], estas pruebas también se han aplicado en las llamadas modelos de escalamiento unidimensional de estímulos.

En la Figura I se puede observar la distinción entre los modelos de escalamiento de estímulos o alternativas y los modelos de preferencias, comparando (1) con (3). En (3) todos los sujetos son replicas unos de otros y presentan un acuerdo total en cuanto a la ordenación de las alternativas, mientras que en (1) hay diferentes ordenamientos. Resulta evidente que si sólo tuviéramos un sujeto con el perfil (1), inmediatamente podríamos transformar su perfil en (3), reordenando las alternativas. De este hecho se deduce: 1) la importancia que cobran las técnicas de agregación de los diferentes ordenamientos dados por los sujetos en los modelos de preferencias; y 2) que dentro del análisis de la propiedad transitiva para un único sujeto, los modelos de escalamiento de estímulos no difieren de los de preferencias.

En este trabajo vamos a presentar tres enfoques diferentes para el análisis de la propiedad transitiva: uno de ellos procede de los modelos probabilísticos (y se desarrolla en el apartado 2.) y los dos restantes, de los modelos no probabilísticos (y se desarrollan en los apartados 3.1. y 3.2.). La finalidad de tal exposición será la de comparar tales pruebas para concluir con una serie de directrices a

seguir para construir una prueba de transitividad más acorde con las limitaciones perceptivas y de coherencia presentes en los decisores (este aspecto se desarrolla en el apartado de conclusiones).

2 PRUEBAS PROBABILÍSTICAS

En las pruebas probabilísticas se parte de una matriz producto, en la que las casillas representan la probabilidad de que la alternativa de la fila sea elegida como mayor que la alternativa de la columna, en una comparación binaria (solamente se utilizan dos categorías de respuestas).

Bezembinder [1] diferencia entre las pruebas diseñadas para analizar las matrices producto individuales (las cuales se obtienen haciendo que el sujeto repita una misma decisión en distintos momentos) y las diseñadas para analizar las matrices producto agregadas.

2.1 ANÁLISIS DE MATRICES PRODUCTO INDIVIDUALES

Dentro de las pruebas diseñadas para analizar las matrices individuales, una de las más utilizadas es el índice de consistencia de Kendall, el cual depende del número de objetos que el sujeto debe juzgar así como del nivel de significación con que se aplique la prueba de aleatoridad. El índice de Kendall se define como:

$$\zeta = 1 - \frac{C(n)}{C_{\max}(n)} \quad (1)$$

donde:

$$C(n) = \binom{n}{3} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i - 1)}{2},$$

siendo a_i el número de objetos que i domina y ocurriendo

que $\sum_{i=1}^n a_i = \binom{n}{2}$ cuando no hay triadas circulares

$$C_{\max}(n) = \begin{cases} (n^3 - n)/24 & \text{si } n \text{ es par} \\ (n^3 - 4n)/24 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

En las expresiones anteriores " $C(n)$ " representa el número de triadas circulares presentes en las respuestas de los

sujetos y " $C_{max}(n)$ " el número máximo de triadas circulares que se pueden dar para se número n de opciones. La mayoría de los autores (por ejemplo, Navarick & Fantino, 1974), sustituyen $C(n)$ por el cálculo de la propiedad transitiva estocástica moderada (TEM) o fuerte (TEF), dependiendo del modelo que estén considerando.

Sean $p(ab)$, $p(bc)$ y $p(ac)$, las probabilidades, todas ellas mayores que 0.5, con las que se dan, respectivamente, los pares ordenados $\langle b, a \rangle$, $\langle c, b \rangle$ y $\langle c, a \rangle$; las pruebas mencionadas anteriormente se pueden definir como sigue:

$$- \text{TEM: } p(ac) \geq \text{mínimo } [p(ab), p(bc)]. \quad (2)$$

$$- \text{TEF: } p(ac) \geq \text{máximo } [p(ab), p(bc)]. \quad (3)$$

2.2 ANÁLISIS DE MATRICES AGREGADAS

En lo que respecta al análisis de la propiedad transitiva en las matrices agregadas, se suele recurrir a pruebas de ajuste de las probabilidades estimadas a las probabilidades observadas, con la finalidad de vislumbrar si subyace un orden lineal en dicha matriz. Uno de los más utilizados es el índice " Q " de Block & Jones (1968), definido como sigue:

$$Q = \frac{\sum_{i,j \in I / i \neq j} [d(x_i, x_j) - (u(x_i) - u(x_j))]^2}{\sigma^2(x_i, x_j)}, \quad (4)$$

donde $d(x_i, x_j)$ es igual al valor de distancia en la curva normal que se corresponde con la proporción de veces que x_i es elegido frente a x_j , $u(x_i)$ y $u(x_j)$ son los valores de utilidad de las opciones x_i y x_j y $\sigma^2(x_i, x_j)$ es igual a:

$$\sigma^2(x_i, x_j) = \frac{\pi(x_i, x_j)\pi(x_j, x_i)}{Nh^2(\gamma(x_i, x_j))}, \quad (5)$$

donde:

— $\pi(x_i, x_j)$ y $\pi(x_j, x_i)$ se corresponden con las proporciones que en la curva normal dejan bajo si las distancias $u(x_i)$ y $u(x_j)$, respectivamente.

— N representa el número de pares distintos (como antes) y $\gamma(x_i, x_j)$ se corresponde con el cuadrado de la ordenada en la curva normal de la proporción estimada $\pi(x_i, x_j)$.

El estadístico Q sigue una distribución Chi-Cuadrado con N grados de libertad.

3 PRUEBAS NO PROBABILÍSTICAS

Estas pruebas se diferencian de las anteriores en el hecho de que no hacen ninguna asunción sobre la existencia de una determinada distribución teórica de probabilidad en las respuestas de los sujetos, evitando con ello tener que recurrir al concepto polémico de "distancia verdadera".

En el apartado 3.1. presentamos la prueba de transitividad que se suele utilizar en el modelo para estructuras jerárquicas de Saaty [10]. Esta prueba también se ha interpretado en la teoría de la utilidad subjetiva como un índice de aditividad [8].

Posteriormente, en el apartado 3.2. presentamos la aproximación al análisis de la intransitividad realizada por Bezembinder [1] basada en las relaciones de semiorden y en la determinación del ciclo de indiferencia de rango más alto.

Finalmente, en el apartado 4 presentamos una ampliación realizada por nosotros, del trabajo de Bezembinder. Estas dos últimas pruebas sólo pueden ser aplicadas a matrices individuales y en las que la evaluación del sujeto es dicotómica. Bezembinder [1] recurre a recodificar en dos categorías las probabilidades, pero esto supone perder mucha información disponible. Sin embargo presentan la ventaja de poder analizar la transitividad teniendo en cuenta todos los pares de la matriz producto.

3.1 PRUEBAS BASADAS EN EL MODELO DE SAATY

Saaty [10] para medir la inconsistencia o falta de transitividad de las preferencias propone un índice a partir del cual poder aceptar /rechazar una matriz de pares aportada por el decisor. Construye dicho índice en función del autovalor máximo $\lambda_{\max}$ y de un índice aleatorio RI obtenido para cada valor de n a partir de muestras aleatorias de tamaño 100. Estas muestras siguen una distribución de Weibull cuando $n=3$ y una distribución normal truncada para $n>3$.

$$CI = \frac{((\lambda_{\max} - n)/(n - 1))}{RI} \quad (6)$$

la matriz es aceptada si $CI < 0.1$ siendo los valores de RI los siguientes:

Tabla 1. Valores relativos al RC de Saaty

n	1 y 2	3	4	5	6	7	8
RI	0.00	.58	.90	1.12	1.24	1.32	1.41

En [7] se propone un método alternativo al de Saaty que en lugar de apoyarse en el autovalor está basado en el determinante aportado por las distintas transitividades o tripletas de tres elementos, ya que, tal y como dijimos en la introducción para medir una transitividad/intransitividad ó ver si existen ciclos ó subciclos necesitamos como mínimo tres alternativas que representaremos en una matriz cuadrada y reciproca de orden 3.

$$CI^*(M_{n \times n}) = NT(M_{n \times n}) \sum_{i=1}^{NT(M_{n \times n})} CI^*(\Gamma_{ijk}) \quad (7)$$

Donde:

Γ_{ijk} representa el determinante asociado con la transitividad $\{A_i, A_j, A_k\}$.

$NT(M_{n \times n})$ es el número de transitividades para cualquier matriz de pares comparados y dimensión n .

$CI^*(M_{n \times n})$ es el valor medio de los valores de los determinantes asociados con las diferentes transitividades o tripletas $\{\Gamma_{ijk}\}$.

Para obtener un valor crítico RC^* que nos permita aceptar/rechazar una matriz, generamos 10.000 matrices aleatorias de diferentes tamaños, obtuvimos los correspondientes CI^* , los ordenamos en orden creciente y hallamos los valores de corte para distintos percentiles.

Tabla2. Valores relativos al RC^* para distintos percentiles y tamaños de la matriz

Matrix Size	3	4	5	6	7	8	9
P_value							
0.01	0	0.406	1.697	3.23	4.698	6.158	7.618
0.05	0.05	1.301	3.350	5.84	8.641	11.44	14.23
0.10	0.166	2.098	4.857	8.30	11.66	15.02	18.38
0.15	0.355	2.885	6.387	10.51	14.11	17.66	21.20
0.20	0.694	3.679	7.915	12.81	16.49	20.17	23.85
0.25	1.033	4.918	10.09	16.00	19.38	23.66	26.99
0.30	1.432	5.695	11.70	17.30	20.64	23.99	27.33
0.35	2.25	6.908	13.87	19.54	22.77	26.01	29.25
0.40	2.722	8.514	16.62	22.04	24.92	27.81	30.70
0.45	3.52	10.45	19.53	24.65	26.79	28.92	31.06
0.50	4.28	12.95	22.88	27.06	28.96	30.86	32.75

Para un determinado valor de p una matriz es aceptada si CI^* es menor que el correspondiente RC^* , dado en la tabla anterior.

3.2 PRUEBAS BASADAS EN LAS RELACIONES DE SEMIORDEN

Bezembinder [1] construye un índice de circularidad, que se puede interpretar como sigue: dadas las limitadas capacidades perceptivas de los sujetos, estos consideran indiferentes estímulos cuyas distancias son reducidas, dando lugar a un hueco en el continuo psicológico en el que las opciones no son comparables (aI^*b ssi $[(aLb) \wedge \neg(bLa)]$).

Sin embargo las alternativas situadas en los extremos del hueco si son comparables, definiéndose una relación L de orden débil sobre ellas (si negamos $[(aLb) \wedge \neg(bLa)]$ obtenemos $[(aRb) \vee (bRa)]$, siendo R condicionalmente conectada pero no antisimétrica, y por tanto, R es un orden débil local; Falmagne, 1985: 24-28).

Bezembinder [1] define una partición " Z " compuesta por " v " clases mutuamente excluyentes en un digrafo en el que los nodos son las alternativas y los arcos denotan que una opción ha sido elegida sobre otra, estando cada clase definida por un componente fuerte, en el cual todos los nodos están conectados entre sí. Cada clase " v " está compuesta por " n_v " objetos y al ser una partición exhaustiva y no superpuesta, la suma de los " n_v " objetos de las " v " clases es igual a " n ". En cada una de estas clases, " N_v " es el número de arcos que unen a sus objetos, de modo que " N_v " puede ser como máximo igual a " $n_v(n_v-1)/2$ ". De este modo se puede definir la proporción de arcos del digrafo que están inmersos en un ciclo utilizando la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{\sum_{v \in Z} N_v}{N}, \quad (8)$$

siendo $N = n(n-1)/2$

Bezembinder [1] propone " $p(D)$ " como índice de circularidad, pudiéndose definir a partir de la expresión anterior como:

$$p(D) = \delta \times N + v - n \\ = v - n + \sum_{v \in Z} n_v(n_v - 1)/2 \quad (9)$$

estando comprendido " $p(D)$ " entre cero (cuando no existe ningún ciclo) y " $(n-1)(n-2)/2$ ", cuando todos los objetos están implicados en un mismo ciclo.

4 DESARROLLO PROPIO

Sea un conjunto X compuesto por n opciones $a, b, c, \dots$, de modo que poseemos $n(n-1)/2$ pares distintos en la matriz producto XxX , para los cuales (aR_ib) [a es elegido frente a b] y definamos para cada par (aR_ib) , los siguiente subconjuntos de pares conjuntos sobre XxX :

$$T_{ab} = \{(xR_1y) \mid (aR_ib) \& (xR_1y) \& x = a \& y \neq b\} \quad (10)$$

$$V_{ab} = \{(xR_1y) \mid (aR_ib) \& (zR_1w)=1 \& y = b \& x \neq a\} \quad (11)$$

$$W_{ab} = \{(xR_1y) \mid (aR_ib)=1 \& v(zR_1w)=1 \& (x = b \vee y = a)\} \quad (12)$$

Definamos ahora la clase M_i compuesta por los siguientes conjuntos de pares (aR_ib) de XxX :

$$0_p : \{(aP_ib) \mid [(no \exists_1 x \in P) / (aP_ix) \& (xP_ib)]\}$$

$$1_p : \{(aP_ib) \mid [(\exists_1 x \in P \& \exists_1 y \in P) / (aR_ix) \& (xR_1y) \& (yR_ib)]\}$$

$$2_p : \{(aP_ib) \mid [(\exists_1 x \in P \& \exists_1 y \in P \& \exists_1 z \in P) / (aP_ix) \& (xP_1y) \& (yP_1z) \& (zP_ib)]\}$$

...

$$n-2_p : \{(aP_ib) \mid [(\exists_1 x_1 \in P \& \dots \& \exists_1 x_{n-1} \in P) / (aP_{ix_1}) \& \dots \& (x_{n-1}P_ib)]\}$$

A continuación incluimos una serie de teoremas sin demostración, debido a cuestiones de espacio no se incluyen las demostraciones:

Proposición 1. La relación R_i es un orden lineal si y solamente si el cardinal de T_{ab} , V_{ab} y W_{ab} es inferior o igual a $n-2$.

Proposición 2. Supongamos que R_i es un orden lineal, entonces podemos afirmar que " $\forall[(aP_ib) \in 0_p, |W_{ab}| = n-2]$ "

$$\& \forall[(aP_ib) \in 1_p, |W_{ab}| = n-3] \& \dots \& \forall[(aP_ib) \in n-1_p, |W_{ab}| = 0]$$

Proposición 3. Los cardinales de T_{ab} , V_{ab} y W_{ab} son invariantes respecto a una inversión en un par procedente de 0_p .

Supongamos que en la matriz XxX sólo hay una intransitividad, independientemente del subconjunto en M_i en el que se produzca:

Proposición 4. Si el cardinal de W_{ab} es superior a $n-2$ no es posible construir ninguna sentencia para la propiedad transitiva en la que las dos premisas estén compuestas por dos pares del conjunto producto y la conclusión por el par (aR_ib) .

Proposición 5. El número de pares en que el cardinal de W_{ab} supere a $n-2$ es igual al número de sentencias para la propiedad intransitiva que se pueden construir a partir de dos pares del conjunto producto como premisas y el par (aR_ib) como conclusión.

Proposición 6. El número de pares en que el cardinal de W_{ab} sea inferior a $n-2$ es igual al número de sentencias para la propiedad transitiva que se pueden construir a partir de dos pares del conjunto producto como premisas y el par (aR_ib) como conclusión.

Eliminemos la restricción anterior sobre el número de intransitividades:

Proposición 7. El rango del ciclo con cardinal mayor viene dado por la expresión

$$\max_{(aR_ib) \in XxX} (W_{ab}) - n + 4 = \rho(D), \quad (13)$$

donde $\rho(D)$ es el índice de Bezembinder (1981).

5 CONCLUSIONES

Se han presentado dos grandes enfoques para el análisis de la propiedad transitiva. Uno procede del campo de los modelos probabilísticos, en ellos se recurre al cálculo del número de triadas circulares, desde diferentes reformulaciones de la propiedad transitiva; sólo en el análisis de las matrices agregadas se contemplan todos los estímulos de dicha matriz, pero las pruebas de ajuste

diseñadas no garantizan que haya en la matriz ciclos o triadas circulares.

Dentro de los modelos no probabilísticos, la prueba diseñada desde el modelo de Saaty permite estimar el ajuste de las razones estimadas a las observadas y al mismo tiempo ofrecer un índice del grado en que se consigue una transitividad completa. Sin embargo, se trata de una prueba excesivamente severa.

Dentro de las pruebas no probabilísticas, se ha podido observar como nuestra aproximación permite extender el índice de Bezembinder. Esta extensión se produce diferenciando entre intransitividad y transitividad, dos conceptos diferentes; no hablamos del grado en que una matriz viola la propiedad transitiva, sino también del grado en que la apoya. A su vez, cada par queda caracterizado por el grado en que recibe apoyo del resto de pares en la matriz, pudiendo servir como índice de la precisión del juicio.

Consideramos que las líneas de investigación futuras, deben ir encaminadas a aplicar esta última visión al caso en el que las celdas de la matriz estén compuestas por valuaciones no dicotómicas (como en el caso del modelo de Saaty), o bien probabilidades (como en la mayoría de modelos existentes).

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente financiado por la DGYCIT con el proyecto PB98-1305.

Referencias

- [1] T.G.G.Bezembinder. Circularity and inconsistency in paired comparisons. *British Journal of Mathematical and Social Psychology*, 34, 16-37, (1981).
- [2] J.C. Falmagne. *Elements of psychophysical theory*. Oxford Psychology Series num. 6. New York: Oxford University Press.(1985)
- [3] P.C Fishburn. *The Theory of Social Choice*. New Jersey: Princenton University Press. (1973).
- [4] P.C. Fishburn. Models of individual preference and choice. *Synthese*, 36, 287-314.(1977)
- [5] P.C. Fishburn. Interval models for comparative probability on finite sets. *Journal of Mathematical Psychology*, 30, 221-42.(1986).
- [6] D.H. Krantz. Extensive measurement in semi-orders. *Philosophy of Science*, 34, 348-62.(1967).
- [7] M.T.Lamata;J.I. Pelaez. "A method for improving the consistency of Judgements. *International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. Aceptado.
- [8] G. Mateos-Aparicio. *Teoría subjetiva de la probabilidad: fundamentos, evolución y determinación de probabilidades*. Colección Tesis Doctorales N° 30/93. Madrid: Editorial de la Universidad Complutense de Madrid.(1993)
- [9] D.J. Navarick; E.Fantino. Stochastic transitivity and unidimensional behavior theories. *Psychological Review*, 81(5), 426-41.(1974).
- [10] T.L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process*. New- York.(1980).
- [11] P. Suppes (1979). La estructura de las teorías y el análisis de los datos. En Frederick Suppe (Ed.), *La estructura de las teorías científicas*. Madrid: Editora Nacional. Traducción de "The Structure of Scientific Theories", University of Illinois Press, 1974.
- [12] A. Tversky. Intransitivity of Preferences. *Psychological Review*, 76(1): 31-48.(1969).
- [13] J. von Neumann; O. Morgenstern (1972). *Theory of games and economic behavior*. Princenton: Princenton University Press. Primera Edición: 1944.
- [14] R.D. Block; L.V. Jones. *The Measurement and Prediction of Judgement and Choice*. San Francisco: Holden-Day.(1968).

Normalización de Distribuciones Posibilísticas mediante t-normas

J. Lawry

Department of Engineering Mathematics
University of Bristol
Queens Building, University Walk
Bristol. BS8 1TR. UK.
j.lawry@bristol.ac.uk

J. Recasens

Sec. Matemàtiques i Informàtica. E.T.S.A.V.
Universitat Politècnica de Catalunya
Pere Serra 1-15
08190 Sant Cugat. Spain
recasens@ea.upc.es

Resumen

En este trabajo asumimos que la normalización de un subconjunto difuso de un universo X debe ser compatible con una t-norma dada.

Con este punto de vista se pueden obtener normalizaciones válidas y se demostrará que los métodos más usuales de normalización de subconjuntos difusos corresponde a las t-normas más comunes.

El subconjunto difuso normalizado $\hat{\mu}$ de un subconjunto dado μ puede interpretarse como la distribución de μ condicionada al (grado de) existencia de sus elementos de mayor grado de pertenencia y_1 , el subconjunto difuso normal menos específico de X entre los subconjuntos más similares a μ con respecto a E_X^T y como el subconjunto difuso normal que genera el mismo T -preorden difuso que μ .

Palabras Clave: normalización, distribución possibilística, t-norma, residuación, T -indistinguibilidad, T -preorden.

1 Introducción

Es bien sabido que un subconjunto difuso normal de un universo X genera una distribución de posibilidad en él [16]. Sin embargo, en muchas situaciones hay que tratar con subconjuntos difusos no normalizados que generan distribuciones que no cumplen las condiciones de las distribuciones de posibilidad. En estos casos, se asume que hay una falta de información o evidencia, lo que significa que las asignaciones de masa asociadas a la distribución suman una cantidad y_1 menor que 1. El defecto de masa $1 - y_1$ se asigna entonces normalmente al conjunto vacío. Si deseamos obtener una distribución possibilística a partir de un subconjunto

borroso no normalizado dado μ , tendremos que redistribuir la masa ausente $1 - y_1$, lo que es equivalente a normalizar μ de algún modo, y se han propuesto diversos métodos [3,4,9,10,14].

En [11] se puede hallar un enfoque axiomático para decidir cuando una normalización puede considerarse válida. Recordémosla brevemente.

Si μ es una distribución possibilística no normalizada en un conjunto X (durante todo el trabajo supondremos que el universo de discurso X es finito) con valores no nulos $y_1, y_2, \dots, y_n$ con $y_i > y_{i+1}$, los conjuntos focales son $M_i = \{x \in X | \mu(x) \geq y_i\}$ para $i = 1, \dots, n$ y la masa asociada a M_i es $m_i = y_i - y_{i+1}$ y el conjunto vacío M_0 tiene masa $m_0 = 1 - y_1$.

Una normalización *válida* de μ se define como una distribución que corresponde a una reasignación de masas a los conjuntos focales de μ tal que las nuevas masas de M_i son $m_i + u_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ con $\sum_{i=1}^n u_i = m_0$ y $0 \leq u_i \leq 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

En [11] se demuestra la siguiente caracterización.

Teorema 1.1. $\hat{\mu}$ es una normalización válida de μ si y sólo si $\hat{\mu}$ satisface los siguiente axiomas $\forall x, y \in X$:

$$(Ax1) \max_{x \in X} \hat{\mu}(x) = 1$$

$$(Ax2) \mu(x) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}(x) = 0$$

$$(Ax3) \mu(x) = \mu(y) \Rightarrow \hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(y)$$

$$(Ax4) \mu(x) > \mu(y) \Rightarrow \hat{\mu}(x) > \hat{\mu}(y)$$

$$(Ax5) \mu(x) \geq \mu(y) \Rightarrow \hat{\mu}(x) - \mu(x) \geq \hat{\mu}(y) - \mu(y)$$

En este trabajo vamos a relacionar este enfoque axiomático y los métodos más comunes de construir una normalización válida con el uso de t-normas particulares de manera que la elección de una normalización específica venga determinada por el modo en que se modelicen las conectivas lógicas.

En la sección 2, la normalización se relacionará con la residuación de una t-norma de tal modo que la normalización $\hat{\mu}$ de un subconjunto difuso μ (definida por $\hat{\mu}(x) = \hat{T}(y_1|\mu(x))$) se podrá ver como la distribución posibilística condicionada $\mu|y_1$ (la distribución de μ condicionada al (grado de) existencia de sus elementos de mayor grado de pertenencia y_1).

Los modos más frecuentes de normalizar subconjuntos difusos corresponden a la residuación de las t-normas más utilizadas (t-normas de Lukasiewicz, Producto y Mínimo).

También se demostrará que toda normalización válida de un subconjunto difuso puede obtenerse de este modo.

En la sección 3 imponemos que la normalización de un subconjunto difuso dado μ sea lo más similar posible a μ respecto a la indistinguibilidad natural E_X^T definida en el conjunto de subconjuntos difusos de X generada por una t-norma T dada. El mayor (i.e.: menos específico) subconjunto difuso normal $\hat{\mu}$ que cumple esta propiedad razonable será la normalización de μ respecto a E_X^T . El resultado más importante de la sección dice que la normalización de μ respecto a E_X^T coincide con la de la sección anterior.

La sección 4 relaciona la normalización con los T -preórdenes difusos. Como se recordará, todo subconjunto difuso μ de X genera un T -preorden difuso en X . Se demostrará que la normalización de μ obtenida en las secciones anteriores es el único subconjunto difuso normal de X que genera el mismo T -preorden difuso que μ en X .

2 Normalización mediante residuación

En esta sección la normalización $\hat{\mu}$ de un subconjunto difuso μ se generará mediante la residuación de una t-norma. $\hat{\mu}$ se puede interpretar como la distribución posibilística condicionada $\mu|y_1$ (La distribución de μ condicionada al (grado de) existencia de sus elementos de mayor grado de pertenencia y_1).

En este contexto, los métodos más usuales de normalizar subconjuntos difusos se corresponden con el uso de las t-normas Mínimo, Producto y Lukasiewicz.

También se demostrará que para cada normalización válida $\hat{\mu}$ de un subconjunto difuso μ existe una t-norma para la cual $\hat{\mu} = \mu|y_1$.

Recordemos antes algunas propiedades conocidas de la residuación.

Definición 2.1. La residuación $\hat{T}$ de una t-norma T se define para todo $x, y \in [0, 1]$ mediante

$$\hat{T}(x|y) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid T(\alpha, x) \leq y\}.$$

$\hat{T}$ puede interpretarse como la implicación $\rightarrow_T$ asociada a T .

Teorema 2.2. (Ling). Sea T una t-norma. T es arquimediana si y sólo si existe una función decreciente $t : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ con $t(1) = 0$ tal que para todo $x, y \in [0, 1]$

$$T(x, y) = t^{[-1]}(t(x) + t(y))$$

donde $t^{[-1]}$ es la pseudo-inversa de t definida mediante

$$t^{[-1]}(x) = \begin{cases} t^{-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq t(0) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

T es estricta si $t(0) = \infty$ y no estricta en caso contrario. t se llama un generador aditivo de T .

Proposición 2.3. Sea T una t-norma arquimediana y t un generador aditivo de T . Entonces

$$\hat{T}(x|y) = t^{[-1]}(t(y) - t(x)) \text{ si } y \leq x.$$

Ejemplos 2.4.

2.4.1. Si L es la t-norma de Lukasiewicz ($L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \forall x, y \in [0, 1]$), entonces

$$\hat{L}(x|y) = \begin{cases} 1 - x + y & \text{si } x > y \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2.4.2. Si Π es la t-norma Producto, entonces

$$\hat{\Pi}(x|y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & \text{si } x > y \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2.4.3. Si Min es la t-norma Mínimo, entonces

$$\hat{\text{Min}}(x|y) = \begin{cases} y & \text{si } x > y \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Más adelante necesitaremos el siguiente caso especial de suma ordinal.

Definición 2.5. Sea T una t-norma arquimediana y $a \in [0, 1]$. Entonces la t-norma O_{T_a} se define mediante

$$O_{T_a}(x, y) = \begin{cases} a + (1-a)T_a(x, y) & \text{si } x \geq a, y \geq a \\ \min(x, y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde $T_a(x, y) = T(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a})$.

Proposición 2.6. Si L es la t-norma de Lukasiewicz, entonces para todo $a, x, y \in [0, 1]$, $x \geq a$, $y \geq a$ $L_a(x, y) = L(x, y)$.

La siguiente definición da la normalización de un subconjunto difuso respecto a una t-norma T .

Como en la sección anterior, si μ es una distribución posibilística (no normalizada) (un subconjunto difuso) en un conjunto finito X , $y_1, y_2, \dots, y_n$ con $y_i > y_{i+1}$ serán sus valores no nulos.

Definición 2.7. Dada una t-norma T y una distribución posibilística no normalizada μ en X , la distribución normalizada $\hat{\mu}$ de μ respecto a T es el subconjunto difuso de X definido $\forall x \in X$ mediante

$$\hat{\mu}(x) = \begin{cases} \hat{T}(y_1|\mu(x)) & \forall x \in X \text{ tal que } \mu(x) \neq 0. \\ 0 & \text{si } \mu(x) = 0 \end{cases}$$

Definamos $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ mediante

$$\hat{y}_i = \hat{T}(y_1|y_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

i.e. $\hat{y}_i$ son los valores no nulos de $\hat{\mu}$.

Proposición 2.8. La distribución normalizada $\hat{\mu}$ de μ respecto a T satisface (Ax1), (Ax2) y (Ax3).

Si T es una t-norma continua, entonces $\hat{\mu}$ también cumple (Ax4).

Si además

$$\forall x, y \in Y \text{ tales que } x \geq y \Rightarrow \hat{T}(y_1|x) \geq \hat{T}(y_1|y), \quad (1)$$

entonces también se cumple (Ax5) y $\hat{\mu}$ es una normalización válida de μ .

Proposición 2.9. Si $\hat{y}_i = \hat{T}(y_1|y_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ es una normalización válida de μ , entonces $\hat{T}(y_1|y_i) \leq \hat{L}(y_1|y_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Proposición 2.10. $\hat{T}(y_1|y_i) \leq \hat{L}(y_1|y_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ si y sólo si $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \hat{y}_i \leq y_i + m_0$.

Los métodos más comunes de normalizar subconjuntos difusos corresponden al uso de las t-normas de Lukasiewicz, Producto y Mínimo.

La normalización minimal de un subconjunto difuso μ de X con mayor valor y_1 es el subconjunto difuso μ de X definido mediante

$$\hat{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{si } \mu(x) \neq y_1 \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Dicho de otro modo, $\hat{\mu}$ se obtiene de μ subiendo su mayor valor y_1 a 1.

Proposición 2.11. La normalización minimal corresponde a la residuación de la t-norma Mínimo.

La normalización maximal $\hat{\mu}$ de μ se obtiene subiendo todos los valores no nulos y_i de μ sumándoles $1 - y_1$ (la falta de evidencia) (i.e.: $\hat{y}_i = y_i + 1 - y_1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$).

Proposición 2.12. La normalización maximal corresponde a la residuación de la t-norma de Lukasiewicz.

En [11] se proponen normalizaciones intermedias. En éstas, la masa $1 - y_1$ del conjunto vacío se añade a todos los valores y_i de μ mayores o iguales a un $a \in [0, 1]$ dado.

Proposición 2.13. Las normalizaciones intermedias de [11] corresponden a la residuación de la suma ordinal O_{L_a} para distintos $a \in [0, 1]$ donde L es la t-norma de Lukasiewicz. Si los valores cambiados son $y_1, y_2, \dots, y_i$, entonces a se puede elegir en el intervalo $[y_i, y_{i+1})$.

Otro método usual de obtener $\hat{\mu}$ de μ es dividiendo sus valores por el mayor de ellos y_1 . En [11] se demuestra que esta normalización $\hat{\mu}$ minimiza la cross entropy relativa a μ .

Proposición 2.14. La normalización de μ que minimiza la cross entropy respecto a μ corresponde a la residuación de la t-norma Producto.

En el Teorema 2.16 se enuncia que para toda normalización válida $\hat{\mu}$ de un subconjunto difuso dado μ de X existe una t-norma T tal que $\hat{\mu}(x) = \hat{T}(y_1|\mu(x))$.

Antes necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.15. Sea μ una normalización válida de μ . Si $y_i = \hat{y}_i$, entonces $y_j = \hat{y}_j \quad \forall j \geq i$.

Teorema 2.16. Sea μ una normalización válida de μ . Existe una t-norma T (arquimediana o una suma ordinal del tipo O_{L_a}) tal que

$$\hat{y}_i = \hat{T}(y_1|y_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

3 Normalización y operadores de indistinguibilidad

Dada una t-norma T , existe una forma natural de generar un operador de indistinguibilidad E_X^T en el conjunto de subconjuntos difusos de un universo X . Entonces, como resultado de normalizar un subconjunto difuso μ de X sería deseable que se obtuviera un subconjunto difuso lo más similar posible a μ respecto a E_X^T . En esta sección se desarrollará esta idea y como mayor resultado el Teorema 3.8 afirma que el subconjunto difuso normal menos específico $\hat{\mu}$ de X entre los más similares a μ respecto a E_X^T es precisamente el de la Definición 2.7 (i.e.: $\hat{\mu} = \hat{T}(y_1|\mu)$).

Recordemos la definición de T -indistinguibilidad.

Definición 3.1. Dada una t-norma T , una T -indistinguibilidad E en un conjunto X es una relación difusa en X tal que para todo $x, y, z \in X$

$$3.1.1. E(x, x) = 1 \quad (\text{Reflexividad})$$

$$3.1.2. E(x, y) = E(y, x) \quad (\text{Simetría})$$

$$3.1.3. T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z) \quad (T\text{-transitividad})$$

Los operadores de T -indistinguibilidad extienden los conceptos de equivalencia e igualdad clásicas al mundo difuso $E(x, y)$ puede interpretarse como el grado de similitud o indistinguibilidad entre x e y . Para un estudio general de los operadores de indistinguibilidad, véase [2].

Lema 3.2. Todo subconjunto difuso μ de X genera un operador de T -indistinguibilidad E_μ en X del siguiente modo:

$$E(x, y) = T(\hat{T}(\mu(x)|\mu(y)), \hat{T}(\mu(y)|\mu(x))) \quad \forall x, y \in X.$$

Ejemplo 3.3 Si L es la t-norma de Lukasiewicz, entonces

$$E_\mu(x, y) = 1 - |\mu(x) - \mu(y)|.$$

Si Π es la t-norma Producto, entonces

$$E_\mu(x, y) = \text{Min}\left(\frac{\mu(x)}{\mu(y)}, \frac{\mu(y)}{\mu(x)}\right).$$

Si Min es la t-norma Mínimo, entonces

$$E_\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(x) = \mu(y) \\ \text{Min}(\mu(x), \mu(y)) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Definición 3.4. Dada una t-norma T continua, la T -indistinguibilidad natural en $[0, 1]$ se define mediante

$$E_T(x, y) = T(\hat{T}(x|y), \hat{T}(y|x)) \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

En este caso,

$$E_L(x, y) = 1 - |x - y|.$$

$$E_\Pi(x, y) = \text{Min}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right).$$

$$E_{\text{Min}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ \text{Min}(x, y) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

A partir de E_T se puede construir una T -indistinguibilidad natural entre los subconjuntos difusos de un universo X dado.

Proposición 3.5. Sea X un conjunto. La relación difusa E_X^T definida en el conjunto de subconjuntos difusos de X por

$$E_X^T(\mu, \nu) = \inf_{x \in X} E_T(\mu(x), \nu(x))$$

es un operador de T -indistinguibilidad.

E_T puede interpretarse como la conectiva biimpliación $\leftrightarrow_T$ asociada a T . Entonces E_X^T fuzzifica la igualdad clásica entre subconjuntos de un universo: ($A = B$ si y sólo si $\forall x \in X \ x \in A \Leftrightarrow x \in B$).

Sea μ un subconjunto difuso de X . Sea N_μ el conjunto de todos los subconjuntos difusos normalizados de X más similares a μ respecto a E_X^T y con el mismo soporte que μ (i.e.: $\nu \in N_\mu$ si y sólo si ν es normal, con el mismo soporte que μ y si ρ es un subconjunto difuso normal de X con el mismo soporte que μ , entonces $E_X^T(\mu, \nu) \geq E_X^T(\mu, \rho)$).

Lema 3.6. Sea $\nu \in N_\mu$. Entonces $E_X^T(\mu, \nu) = E_T(\mu(x), \nu(x)) \quad \forall x \in X$ tal que $\nu(x) = 1$.

Lema 3.7. Si $\nu, \rho \in N_\mu$, entonces $\text{Max}(\nu, \rho) \in N_\mu$.

Teorema 3.8. Sea μ un subconjunto difuso de X , y_1 su mayor valor y $\mu_N = \sup_{\nu \in N_\mu}$. Entonces $\forall x \in X$

$$\mu_N(x) = \begin{cases} \hat{T}(y_1 | \mu(x)) & \forall x \in X \text{ tal que } \mu(x) \neq 0. \\ 0 & \text{si } \mu(x) = 0 \end{cases}$$

Corolario 3.9. La normalización minimal de μ es el mayor subconjunto difuso normal de X más similar a μ por E_X^{Min} en N_μ .

Corolario 3.10. La normalización maximal de μ es el mayor subconjunto difuso normal de X más similar a μ por E_X^L en N_μ .

Corolario 3.11. Las normalizaciones intermedias de μ son los mayores subconjuntos difusos normales de X más similares a μ por $E_X^{O_{La}}$ en N_μ . Si los valores cambiados de μ son $y_1, y_2, \dots, y_i$, entonces a se puede elegir del intervalo $[y_i, y_{i+1})$.

Corolario 3.12. La normalización de μ que minimiza la cross entropy respecto a μ es el mayor subconjunto difuso normal de X más similar a μ por E_X^Π en N_μ .

Corolario 3.13. Sea $\hat{\mu}$ una normalización válida de μ y T una t-norma como en el Teorema 2.16. Entonces $\hat{\mu}$ es le mayor subconjunto difuso normal de X más similar a μ por E_X^T en N_μ .

La siguiente proposición afirma que si $\hat{\mu}$ es una normalización válida de μ respecto a la t-norma T , entonces las T -indistinguibilidades generadas por μ y $\hat{\mu}$ coinciden en el soporte de μ .

Lema 3.14. Sea T una t-norma y $x, y, z \in [0, 1]$ tales que $x \geq y \geq z$. Entonces

$$T(\hat{T}(x|y), \hat{T}(y|z)) = \hat{T}(x|z).$$

Proposición 3.15. Sea $\hat{\mu}$ una normalización válida de μ , T una t-norma como en el Teorema 2.16. y $E_{\hat{\mu}}$ y E_μ las relaciones de indistinguibilidad generadas por $\hat{\mu}$ y μ en el soporte de μ . Entonces $E_{\hat{\mu}} = E_\mu$.

El recíproco de esta proposición no es cierto en general, sino que depende de la naturaleza de la t-norma [7,8]. Se puede demostrar que el recíproco es válido para t-normas estrictas y para el Mínimo. Sin embargo, si T es una t-norma no estricta, t un generador aditivo de T y $\varphi(x) = t^{-1}(t(0) - t(x))$ la negación fuerte asociada, existen dos subconjuntos difusos normalizados

que generan la misma relación de indistinguibilidad que μ en el soporte de μ : $\hat{\mu}$ y su negado $\varphi(\hat{\mu})$.

Esta situación se clarificará en la siguiente sección con la ayuda de los T -preórdenes difusos.

4 Normalización y T -preórdenes difusos

Todo subconjunto difuso μ de un universo X genera un T -preorden difuso en X . Supongamos que μ describe una distribución en X y que estamos interesados en el orden de los elementos que es compatible con la evidencia que nos da μ . Si tenemos que normalizar la distribución, queremos obtener un subconjunto difuso normal $\hat{\mu}$ que genere el mismo T -preorden difuso que μ . Se demostrará que $\hat{\mu}$ es único y precisamente el subconjunto difuso hallado en las dos secciones anteriores.

Definición 4.1. Dada una t-norma T , un T -preorden difuso P en un conjunto X es una relación difusa en X tal que para todo $x, y, z \in X$

$$4.1.1. P(x, x) = 1 \quad (\text{Reflexividad})$$

$$4.1.2. T(P(x, y), P(y, z)) \leq P(x, z) \quad (T\text{-transitividad})$$

Del mismo modo que las relaciones de indistinguibilidad fuzzifican el concepto de relación de equivalencia clásica, los T -preórdenes difusos fuzzifican preórdenes clásicos.

Lema 4.2. Todo subconjunto difuso μ de X genera un T -preorden difuso P_μ en X del siguiente modo:

$$P_\mu(x, y) = \hat{T}(\mu(x) | \mu(y)) \quad \forall x, y \in X.$$

Ejemplo 4.3 Si L es la t-norma de Lukasiewicz, entonces

$$P_\mu(x, y) = \text{Min}(1 - \mu(x) + \mu(y), 1).$$

Si Π es la t-norma Producto, entonces

$$P_\mu(x, y) = \text{Min}\left(\frac{\mu(y)}{\mu(x)}, 1\right).$$

Si Min es la t-norma Mínimo, entonces

$$P_\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(x) \leq \mu(y) \\ y & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 4.4. Sea μ un subconjunto difuso de X y y_1 su mayor valor. Sea $\hat{\mu}$ un subconjunto difuso normalizado de X con el mismo soporte que μ tal que para una t-norma dada T $P_\mu = P_{\hat{\mu}}$ en el soporte de μ . Entonces

a) $\hat{\mu}$ es único.

b)

$$\hat{\mu}(x) = \begin{cases} \hat{T}(y_1 | \mu(x)) & \text{si } x \in \text{soporte de } \mu \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, la normalización $\hat{\mu}$ de un subconjunto difuso μ respecto a la t-norma T es el único subconjunto difuso normalizado que da el mismo orden difuso en el soporte de μ .

5 Conclusiones

Hemos estudiado la normalización de un subconjunto difuso suponiendo que debe ser compatible con una t-norma T .

Se ha demostrado que si $\hat{\mu}$ es una normalización válida de μ , entonces existe una t-norma T tal que $\hat{\mu}$ es la normalización de μ respecto a T .

Los métodos más usuales de normalizar un subconjunto difuso han sido relacionados con las t-normas más comunes.

Así, el subconjunto difuso normal $\hat{\mu}$ obtenido de μ se puede ver como

a) La distribución de μ condicionada al (grado de) existencia de sus elementos de mayor grado de pertenencia y_1 .

b) El subconjunto difuso normal menos específico de X entre los subconjuntos difusos más similares a μ respecto a E_X^T con el mismo soporte que μ .

c) El único subconjunto difuso normal con el mismo soporte que μ que genera el mismo T -preorden difuso que μ .

Agradecimientos

El segundo autor parcialmente subvencionado por el proyecto DGICYT número PB98-0924 y por la ayuda PR2001-0005 de la SEUI.

Referencias

[1] Baldwin, J. F., Martin, T. P., Pilsworth, B. W. (1995) *FRIL - Fuzzy and Evidential Reasoning in AI Research Studies* Press, John Wiley.

- [2] Boixader, D., Jacas, J., Recasens, J. (2000) Fuzzy Equivalence Relations: Advanced Material. En Dubois, Prade Eds. *Fundamentals de Fuzzy Sets*, Kluwer, 261-290.
- [3] Díaz-Hermida, F., Bugarín, A., Cariñena, P., Barro, S. (2000) Evaluación probabilística de proposiciones cuantificadas borrosas. Actas de ESTYLF'00. Sevilla, pp 477-482.
- [4] Dubois, D., Prade, H. (1987) An Alternative Approach to the Handling de Subnormal Possibility Distributions. *Fuzzy Sets and Systems* **24**, 123-126.
- [5] Dubois, D., Prade, H. (1988) *Possibility Theory* Plenum Press, New York.
- [6] Hernández, E., Recasens, J. (2002) On Possibilistic and Probabilistic Approximations of Unrestricted Belief Functions Based on the Concept de Fuzzy T -Preorder *IJUFKBS*, **10** 185-200.
- [7] Jacas, J., Recasens, J. (2001) The Group of Isometries of an Indistinguishability Operator. Actas de EUSFLAT 2001. Leicester.
- [8] Jacas, J., Recasens, J. (2002) Maps and Isometries between indistinguishability operators. *Soft Computing*, bf 6 14-20.
- [9] Joslyn, C. (1994) Empirical Possibility and Minimal Information Distortion. En Lowen, Ed. *Fuzzy Logic: State de Art*, Kluwer
- [10] Klir, G. J., Folger, T. A. (1988), *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [11] Lawry, J. (2001) Possibilistic Normalization and Reasoning under Partial Inconsistency *IJUFKBS*, **9** 413-436.
- [12] Schweizer, B., Sklar, A. (1983) *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, Amsterdam.
- [13] Valverde, L. (1985) On the structure de F-indistinguishability operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **17**, 313-328.
- [14] Yager, R. (1986) A Modification de the Certainty Measure to Handle subnormal Distributions. *Fuzzy Sets and Systems* **20**, 317-324.
- [15] Zadeh, L. A. (1971) Similarity relations and fuzzy orderings. *Inform. Sci.* **3**, 177-200.
- [16] Zadeh, L. A. (1978) Fuzzy Sets as a Basis for a Theory de Possibility. *Fuzzy Sets and Systems* **1**, 3-28.

PROBABILIDAD DE SUCESOS DIFUSOS, CARDINALIDADES ESCALARES Y t-NORMAS

J. Casasnovas

Dpt. de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
07071 Palma de Mallorca. Spain
dmijcc0@clust.uib.es

J. Torrens

Dpt. de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
07071 Palma de Mallorca. Spain
dmijts0@clust.uib.es

Resumen

En este trabajo se hace una definición de probabilidad de un suceso aleatorio difuso que generaliza la definición dada por Zadeh en [12] en la línea que se ha utilizado en [9] para caracterizar las cardinalidades escalares de los subconjuntos difusos finitos. Para estas probabilidades se estudia las propiedades de aditividad y valoración respecto de la t-norma y t-conorma utilizada para la intersección y unión de los sucesos difusos.

Palabras Clave: t-norms, probability of fuzzy events, cardinality of fuzzy sets.

1 INTRODUCCIÓN

Una teoría de probabilidad de sucesos difusos permite considerar sucesos aleatorios no suficientemente nítidos como “El número será mucho mayor que 26”, o: “El jugador será joven”. Esta clase de sucesos pueden ser descritos mediante conjuntos difusos [11], donde un conjunto difuso A de un Universo M puede ser identificado con una función de pertenencia $A : M \rightarrow [0, 1]$ y en esta comunicación estudiaremos la extensión a estos sucesos difusos de una medida de probabilidad en sentido clásico definida sobre el conjunto de partes del universo.

Si puede ser definido un espacio de probabilidad de Kolmogorov clásico $(M, B(M), p)$, donde $B(M)$ es una algebra Booleana de subconjuntos de M y p es una probabilidad tradicional sobre $B(M)$, la probabilidad de un suceso aleatorio difuso A es definida, por ejemplo en [12], por $m(A) = \int_M A(x) dP(x)$, utilizando la integral de Lebesgue-Stieljes y para todos aquellos subconjuntos difusos de M cuyas funciones de pertenencia son medibles-Borel.

Si A es un subconjunto finito y nítido de M , entonces $m(A) = \sum_{x \in A} p(x)$. Más aún, si $p(x) = p, \forall x \in A$, entonces $m(A) = p|A|$. Si A es un subconjunto difuso finito de M , es decir $\text{Supp}(A) = \{x \in M | A(x) > 0\}$ es un subconjunto finito (lo cual será expresado como $A \in FFS(M)$), entonces $m(A) = \sum_{x \in \text{Supp} A} A(x)p(x)$ e, incluso si $p(x) = p, \forall x \in A$, entonces $m(A) = p \sum_{x \in \text{Supp} A} A(x)$.

Por otra parte, $\sum_{x \in \text{Supp} A} A(x)$ es la **cardinalidad** del subconjunto difuso A , definido y estudiado por Zadeh y otros autores [2],[12],[8], y que suele recibir el nombre de *sigma count*. Ahora bien, podemos encontrar varias definiciones de cardinalidad de un subconjunto difuso finito en la literatura adecuada [2],[8],[9], [10].

Entre los diferentes caminos para definir el concepto de cardinalidad de un subconjunto difuso finito, la *cardinalidad escalar*, es decir la asociación de una cantidad natural o real a cada conjunto difuso finito, es relevante. Recientemente, una aproximación axiomática a las cardinalidades escalares de conjuntos difusos finitos ha sido presentada por M. Wygralak [9] permitiendo una familia infinita de posibles cardinalidades escalares que incluye todas las standard como las “sigma count” de un conjunto difuso, la cardinalidad de su “Core”, de su Soporte y también de sus conjuntos de α -nivel. Por otra parte, un intento de generalizar estos resultados para cardinalidades escalares con el postulado de aditividad definida a partir de una t-norma y una t-conorma se presenta en [10] y por los autores en [1].

Presentamos en esta comunicación una definición de probabilidad de un conjunto difuso que es una generalización de la definición dada en [12], está relacionada con la definición axiomática de cardinalidad escalar y estudiamos la propiedad de aditividad y la de valoración cuando se utiliza una t-norma y una t-conorma.

Concretamente, t significará una t-norma y s una t-conorma. Para las t-normas Arquimedianas (t continua y $t(x, x) < x$ para todo $0 < x < 1$) uti-

lizaremos la representación([4]): Una t -norma $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es Arquimediana si y sólo si, existe una función continua estrictamente decreciente $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ con $f(1) = 0$ tal que

$$t(x, y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$$

En este caso, la función f se llama un *generador aditivo* de t , es único salvo una constante positiva multiplicativa y $f(0) = +\infty$ si y sólo si t es estricta.

Si $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k \in K}$ es una familia numerable de subintervalos disjuntos $[0, 1]$ y t_k es una t -norma, para todo $k \in K$, la *suma ordinal* $\langle \alpha_k, \beta_k, t_k \rangle_{k \in K}$ se define como la t -norma t dada por

$$t(x, y) = \begin{cases} \alpha_k + (\beta_k - \alpha_k)t_k\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}, \frac{y - \alpha_k}{\beta_k - \alpha_k}\right), & \forall (x, y) \in [\alpha_k, \beta_k]^2, \\ \min(x, y), & \forall (x, y) \notin [\alpha_k, \beta_k]^2 \end{cases}$$

y tenemos el resultado ([4]): Toda t -norma continua o bien es el Mínimo, o bien es Arquimediana o una suma ordinal de t -normas Arquimedianas.

Recordemos también la familia de t -normas de Frank $\{t^a\}_{a \in [0, +\infty]}$ con

$$t^a(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } a = 0 \\ \Pi(x, y) & \text{si } a = 1 \\ W(x, y) & \text{si } a = +\infty \\ \log_a\left(1 + \frac{(a^x - 1)(a^y - 1)}{a - 1}\right), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde Π y W representan las t -normas producto y Lukasiewicz respectivamente. Representaremos $\{s^a\}_{a \in [0, \infty]}$ la familia de las t -conormas $(1 - j)$ -duals de las t -normas de Frank.

Para estas t -normas tenemos el resultado ([3]): Sea t una t -norma y s una t -conorma. Entonces t y s son soluciones de la ecuación funcional

$$t(x, y) + s(x, y) = x + y \quad \text{para todo } x, y \in [0, 1]$$

si, y sólo si, son de la forma: $t = \langle \alpha_k, \beta_k, t_k \rangle_{k \in K}$ y $s = \langle \alpha_k, \beta_k, s_k \rangle_{k \in K}$ donde cada t_k es una t -norma de Frank y s_k es la $(1 - j)$ -dual de t_k .

Una negación fuerte N (o simplemente una negación) es una función involutiva decreciente $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

La región cero de una t -norma t será representada por $Z(t)$, es decir,

$$Z(t) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid t(x, y) = 0\}$$

Siempre se satisface que

$$\{(0, x), (x, 0) \mid x \in [0, 1]\} \subseteq Z(t)$$

y cuando la inclusión anterior es una igualdad diremos que la t -norma t tiene región cero trivial. Éste es el caso del Mínimo y las t -normas estrictas mientras que las t -normas Arquimedianas no estrictas tienen una región cero delimitada por una negación. Esto es, existe una negación N_t tal que

$$Z(t) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y \leq N_t(x)\}$$

y esta negación N_t es dada por

$$N_t(x) = f^{-1}(1 - f(x)) \quad \text{para todo } x \in [0, 1]$$

donde f representa el generador aditivo normalizado de t . Esta negación N_t se llamará la negación asociada a la t -norma t . Todas estas notaciones pueden ser trasladadas a las t -conormas via dualidad obteniendo la 1-región de una t -conorma s y la negación asociada a s , representada de forma similar por N_s .

Una terna de Lukasiewicz es una terna (t, s, N) donde t es una t -norma Arquimediana no estricta, s la N -dual de t y N la negación asociada a t . Más aún, en este caso siempre se satisface: $N = N_t = N_s$.

Si $A, B : M \rightarrow [0, 1]$ son conjuntos difusos:

- la intersección de A y B con respecto a t , representada por $A \overset{t}{\frown} B$, es otro conjunto difuso el cual viene dado por

$$(A \overset{t}{\frown} B)(x) = t(A(x), B(x)) \quad \text{para todo } x \in M$$

- La unión de A y B con respecto a s , representado por $A \overset{s}{\cup} B$, es otro conjunto difuso el cual viene dado por

$$(A \overset{s}{\cup} B)(x) = s(A(x), B(x)) \quad \text{para todo } x \in M$$

- Representaremos por T el conjunto difuso tal que $T(x) = 0, \forall x \in M$ y por $A(x_i)/x_i$ el conjunto difuso tal que $A(x_i)/x_i(x_i) = A(x_i)$ y $A(x_i)/x_i(x) = 0, \forall x \neq x_i$

2 PRINCIPALES RESULTADOS

2.1 PROPOSICIÓN

Si $p : B(M) \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad clásica, entonces si denotamos $p(\{x\}) = p(x)$, podemos definir una función $P_f : FFS(M) \rightarrow [0, 1]$ por:

$$\begin{aligned} P_f(A) &= \sum_{x \in \text{Supp } A} f(A(x))p(x) = \\ &= \sum_{x \in M} f(A(x))p(x) \end{aligned}$$

donde $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función no decreciente con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

Dem:

Por una parte: $A(x) = 0$, si $x \notin \text{Supp}A$, por tanto $f(A(x)) = 0$, si $x \notin \text{Supp}A$.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} P_f(A) &= \sum_{x \in \text{Supp}A} f(A(x))p(x) \leq \\ &\leq \sum_{x \in \text{Supp}A} p(x) \leq \sum_{x \in M} p(x) = 1 \end{aligned}$$

ya que p es una medida de probabilidad.

2.2 NOTA

If $p(x) = p$; $\forall x \in M$ entonces $P_f(A) = p \sum_{x \in \text{Supp}A} f(A(x)) = p \cdot \text{sc}_f(A)$, donde sc_f es una cardinalidad escalar([1],[9],[10])

2.3 PROPOSICIÓN

La "Propiedad aditiva", es decir: Si $A \mathrel{\mathcal{F}} B = T$ entonces $P_f(A \mathrel{\mathcal{G}} B) = P_f(A) + P_f(B)$, es satisfecha si y sólo si: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $f(0) = 0, f(1) = 1$ cumple:

$$f(s(a, b)) = f(a) + f(b) \quad \text{para todo } (a, b) \in Z(t) \quad (1)$$

Dem: Supongamos primero que P_f satisface la propiedad aditiva. Sea A un conjunto difuso finito y supongamos que $\text{supp}(A) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Puesto que $s(a, 0) = s(0, a) = a$ para todo $a \in [0, 1]$, podemos escribir

$$A = \bigcup_{i=1}^n A(x_i)/x_i$$

Probemos ahora por inducción sobre n , que

$$P_f(A) = \sum_{i=1}^n P_f(A(x_i)/x_i)$$

- Para $n = 2$, puesto que $A(x_1)/x_1 \mathrel{\mathcal{F}} A(x_2)/x_2 = T$, el resultado es consecuencia de la aditividad.
- Supongamos que es cierto para $n-1$ y probemoslo para n . Podemos obviamente escribir

$$A = B \mathrel{\mathcal{G}} A(x_n)/x_n$$

$$\text{donde } B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A(x_i)/x_i$$

pero entonces notemos que

$$(B \mathrel{\mathcal{T}} A(x_n)/x_n)(y) = t(B(y), A(x_n)/x_n(y)) =$$

$$= \begin{cases} t(0, 0) = 0 & \text{si } y \neq x_i, \forall i \leq n \\ t(A(x_i), 0) = 0 & \text{si } y = x_i, \text{ con } i \leq n-1 \\ t(0, A(x_n)) = 0 & \text{si } y = x_n \end{cases}$$

demostrando que $B \mathrel{\mathcal{F}} A(x_n)/x_n = T$. Ahora, aplicando el caso $n = 2$ y la hipótesis de inducción obtenemos

$$\begin{aligned} P_f(A) &= P_f(B \mathrel{\mathcal{G}} A(x_n)/x_n) = \\ &= P_f(B) + P_f(A(x_n)/x_n) = \\ &= P_f\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A(x_i)/x_i\right) + P_f(A(x_n)/x_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n P_f(A(x_i)/x_i). \end{aligned}$$

Pero $P_f(A(x_i)/x_i) = f(A(x_i)p(x_i))$, por tanto $\sum_{i=1}^n P_f(A(x_i)/x_i) = \sum_{i=1}^n f(A(x_i)p(x_i))$

Por otra parte, para cualquier $(a, b) \in Z(t)$ tenemos $t(a, b) = 0$ y consecuentemente $a/x \mathrel{\mathcal{F}} b/x = T$ y entonces por la aditividad obtenemos

$$\begin{aligned} P_f\left(a/x \mathrel{\mathcal{G}} b/x\right) &= \\ &= P_f(a/x) + P_f(b/x) \end{aligned}$$

pero

$$P_f\left(a/x \mathrel{\mathcal{G}} b/x\right) = P_f(s(a, b)/x) = f((s(a, b))p(x))$$

y

$$\begin{aligned} P_f(a/x) + P_f(b/x) &= f(a)p(x) + f(b)p(x) = \\ &= (f(a) + f(b))p(x) \end{aligned}$$

lo cual prueba que $f(s(a, b)) = f(a) + f(b)$ para todo $(a, b) \in Z(t)$.

Recíprocamente, supongamos que tenemos una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfaciendo las condiciones de la proposición y sea $A, B \in FFS(M)$ tal que $A \mathrel{\mathcal{F}} B = T$. Los soportes de tales A y B pueden tener intersección no trivial pero entonces, para cualquier $x \in \text{supp}(A) \cap \text{supp}(B)$ tenemos

$$(A \mathrel{\mathcal{T}} B)(x) = t(A(x), B(x)) = T(x) = 0$$

esto es, $(A(x), B(x)) \in Z(t)$ para todo $x \in \text{supp}(A) \cap \text{supp}(B)$. Ahora, puesto que cualquier t -conorma s se anula sólo cuando los dos argumentos se anulan, tenemos

$$\text{supp}(A \sqcup B) =$$

$$= \text{supp}(A) \cup \text{supp}(B)$$

y entonces

$$P_f(A \sqcup B) =$$

$$= \sum_{x \in \text{supp}(A) \cup \text{supp}(B)} f(s(A(x), B(x)))p(x) =$$

$$= \sum_{x \in \text{supp}(A) - \text{supp}(B)} f(s(A(x), B(x)))p(x) +$$

$$+ \sum_{x \in \text{supp}(B) - \text{supp}(A)} f(s(A(x), B(x)))p(x) +$$

$$+ \sum_{x \in \text{supp}(A) \cap \text{supp}(B)} f(s(A(x), B(x)))p(x) =$$

$$= \sum_{x \in \text{supp}(A) - \text{supp}(B)} f(A(x))p(x) +$$

$$+ \sum_{x \in \text{supp}(B) - \text{supp}(A)} f(B(x))p(x) +$$

$$+ \sum_{x \in \text{supp}(A) \cap \text{supp}(B)} (f(A(x)) + f(B(x)))p(x) =$$

$$= \sum_{x \in \text{supp}(A)} f(A(x))p(x) +$$

$$+ \sum_{x \in \text{supp}(B)} f(B(x))p(x) =$$

$$= P_f(A) + P_f(B).$$

2.4 COROLARIO

Sea t una t -norma con una región cero trivial y s cualquier t -conorma. Si f es una función creciente $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $f(0) = 0, f(1) = 1$, entonces

$$P_f(A) = \sum_{x \in \text{supp}(A)} f(A(x))p(x) \quad \forall A \in FFS(M).$$

satisface la propiedad de aditividad

Dem: Cuando la t -norma t tiene región cero trivial, tenemos

$$(a, b) \in Z(t) \iff \min(a, b) = 0 \implies s(a, b) = \max(a, b)$$

y consecuentemente la condición (1) se satisface siempre.

2.5 PROPOSICIÓN

Sea t una t -norma Arquimediana no estricta con negación asociada N_t , $s = \max$ y $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función creciente con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Entonces P_f satisface la aditividad respecto de $(\max, t)$ si y sólo si, $f(x) = 0$ para todo $x \leq \alpha$ donde α es el punto fijo de N_t .

Dem: Si P_f es aditiva respecto de $(\max, t)$ tenemos:

$$f(\max(a, b)) = f(a) + f(b) \quad \text{para todo } (a, b) \in Z(t)$$

en particular, $(\alpha, \alpha) \in Z(t)$ y entonces $f(\alpha) = 0$ y $f(x) = 0$ para todo $x \leq \alpha$ por la monotonía.

Recíprocamente, para todo $(a, b) \in Z(t)$ siempre tenemos: $\min(a, b) \leq \alpha$, lo cual implica $f(\min(a, b)) = 0$ y así:

$$f(\max(a, b)) = f(\max(a, b)) + f(\min(a, b)) = f(a) + f(b).$$

En consecuencia, la condición (1) se satisface y P_f es aditiva respecto de $(\max, t)$.

2.6 PROPOSICIÓN

Sea t una t -norma Arquimediana no estricta con negación asociada N_t . Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ función estrictamente creciente con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ y sea s la t -conorma Arquimediana no estricta generada por f . Entonces P_f es aditiva respecto de (s, t) si, y sólo si, $N_t \leq N_s$. En particular, cuando (t, s, N) es una terna de Łukasiewicz y f es el generador aditivo de s , P_f es aditiva respecto de (s, t) .

Dem: Supongamos primero que P_f es aditiva respecto de (s, t) y sea $a \in [0, 1]$. Tenemos $(a, N_t(a)) \in Z(t)$, y por la condición (1)

$$f(s(a, N_t(a))) = f(a) + f(N_t(a)) \implies f(a) + f(N_t(a)) \leq 1$$

y consecuentemente,

$$N_t(a) \leq f^{-1}(1 - f(a)) = N_s(a).$$

Recíprocamente, supongamos ahora que $N_t \leq N_s$ y sea $(a, b) \in Z(t)$. Tenemos $b \leq N_t(a) \leq N_s(a)$, esto es $f(a) + f(b) \leq 1$ y por tanto

$$f(s(a, b)) = f(f^{-1}(f(a) + f(b))) = f(a) + f(b).$$

Finalmente, el caso particular en que (t, s, N) es una terna de Luckasiewicz se deduce porque en este caso $N = N_t = N_s$.

2.7 PROPOSICIÓN

Sea t una t-norma, s una t-conorma y $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función creciente con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Entonces, $P_f : FFS(M) \rightarrow [0, 1]$ satisface la propiedad de valoración respecto de (s, t) , es decir:

$$P_f(A \cup_s B) + P_f(A \cap_t B) = P_f(A) + P_f(B)$$

para todo $A, B \in FFS(M)$ (5)

si y sólo si s, t, f satisface la ecuación:

$$f(s(a, b)) + f(t(a, b)) = f(a) + f(b)$$

para todo $a, b \in [0, 1]$. (6)

Dem: Es inmediato, ya que

$$\begin{aligned} P_f(A \cup_s B) + P_f(A \cap_t B) &= \\ &= \sum_{x \in \text{supp}(A)} f(s(A(x), B(x)))p(x) + \\ &+ \sum_{x \in \text{supp}(A)} f(t(A(x), B(x)))p(x) = \\ &= \sum_{x \in \text{supp}(A)} [f(s(A(x), B(x))) + f(t(A(x), B(x)))]p(x) \end{aligned}$$

Entonces si se cumple la propiedad (6), la última expresión es igual a

$$\sum_{x \in \text{supp}(A)} [f(A(x)) + f(B(x))]p(x) = P_f(A) + P_f(B)$$

Por otra parte, si P_f satisface la propiedad (5) y tomamos $A = a/x$; $B = b/x$, tenemos:

$$P_f(a/x \cup_s b/x) + P_f(a/x \cap_t b/x) = P_f(a/x) + P_f(b/x)$$

es decir:

$$f(s(a, b))p(x) + f(t(a, b))p(x) = f(a)p(x) + f(b)p(x)$$

de donde se sigue inmediatamente la propiedad (6)

2.8 NOTA

Claramente, si P_f y el par (s, t) son tales que s, t, f satisface la ecuación (6), entonces tenemos

$$f(t(a, b)) = f(0) = 0 \quad \text{para todo } a, b \in Z(t)$$

y consecuentemente P_f satisface también la condición (1).

2.9 EJEMPLOS

- Cuando $t = \min$ y $s = \max$, la ecuación (6) se satisface para cada f .
- Cuando $f = Id$, las soluciones son dadas por el resultado expuesto en la introducción relativo a las t-normas que satisfacen la ecuación:

$$t(x, y) + s(x, y) = x + y \quad \text{para todo } x, y \in [0, 1]$$

Así, para $f = Id$, P_f satisface la aditividad y la valoración respecto de cualquier suma ordinal de t-normas de Frank y su correspondiente suma ordinal de t-conormas.

- Cuando s es Arquimediana no estricta con generador aditivo f y t es la N_s -dual de s , entonces s, t, f satisface (6) y consecuentemente P_f satisface la aditividad y la valoración respecto de (s, t) .

Referencias

- [1] J. Casanovas, J. Torrens. Scalar cardinalities of finite fuzzy sets for t-norms and t-conorms. Submitted to *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*.
- [2] D. Dubois. A new definition of the fuzzy cardinality of finite sets preserving the classical additivity property. In *Bull. Stud. Ecch. Fuzziness Appl. (BUSEFAL) 5 (1981) 11-12*.
- [3] M. J. Frank. On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes Math.* 19 (1979) 194-226
- [4] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. Triangular norms, *Kluwer Academic Publishers (2000) Dordrecht*.
- [5] G. J. Klir, B. Yuan. Fuzzy sets and fuzzy logic. Theory and applications, *Prentice-Hall (1995) New Jersey*.
- [6] R. Mesiar and M. Navara. T_s -tribes and T_s -measures. *J. Math. Anal. Appl.* 201 (1996). 91-102.

- [7] J.Pycacz and B.D'Hooghe. Bell-Type inequalities in fuzzy probability calculus. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. Vol.9, No 2 (2000) 263-275
- [8] M.Wygralak. Questions of cardinality of finite fuzzy sets. In *Fuzzy Sets and Systems 102* (1999) 185-210
- [9] M.Wygralak. An axiomatic approach to scalar cardinalities of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*. 110(2000). 175-179
- [10] M. Wygralak, Scalar cardinalities of fuzzy sets with triangular norms and conorms, *Proceedings of the EUROFUSE-SIC'99, Budapest (1999)* pp. 322-327
- [11] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control* 8 (1965), 338-353.
- [12] L.A. Zadeh. Probability measures of fuzzy events. *J.Math. Anal.Appl.* 23 (1968). 421-427.

Factorizations of fuzzy preferences characterized through reciprocal order automorphisms

Bonifacio Llamazares Rodríguez

Dpto. de Economía Aplicada (Matemáticas)
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
boni@eco.uva.es

Abstract

In the crisp framework, the factorization of a weak preference relation into a strict preference relation and an indifference relation is unique. However, in fuzzy set theory, the intersection and the union of fuzzy sets can be represented through different ways. Furthermore, some equivalent properties in the crisp case have generalizations in the fuzzy framework that may be not equivalent. For these reasons there exist in the literature several factorizations of a fuzzy weak preference relation. In this paper we obtain and characterize different factorizations of fuzzy weak preference relations by means of reciprocal order automorphisms.

Keywords: fuzzy preferences, factorization, reciprocal order automorphisms, Łukasiewicz t-norm.

union of fuzzy sets, respectively. Consequently, various factorizations of fuzzy weak preference relations have been given and studied in the literature. See, for example, Orlovsky [9], Ovchinnikov [10] and [11], Dutta [6], Banerjee [2], Richardson [14] and Dasgupta and Deb [4], among others.

It is important to emphasize that in the theory of preference modelling some authors also suppose an incomparability relation in the factorization of a weak preference relation. A survey of this development can be found in Fodor and Roubens [7], De Baets and Fodor [5] and Perny and Roubens [13].

In this paper we generalize and characterize some factorizations of the literature by means of ϕ -transforms of Łukasiewicz t-norm, where ϕ is a reciprocal order automorphism. Under the additional assumptions of $P = R \cap (R^{-1})^c$ and $I = R \cap R^{-1}$ (or $P = (R^{-1})^c$) we obtain generalizations of the factorizations given by Orlovsky [9] and Barrett and Pattanaik [3], respectively.

The paper is organized as follows. In Section 2 we introduce notation and basic definitions, while Section 3 contains the main results of the paper.

1 Introduction

It is usual in social choice theory to represent the agents' preferences on a set of alternatives through complete binary relations. These weak preference relations show whether an alternative is at least as good as other or vice versa. Starting from a weak preference relation R , it is possible to obtain a strict preference relation P and an indifference relation I . This factorization is unique, so that $P = R \cap (R^{-1})^c$, which is equivalent to $P = (R^{-1})^c$, and $I = R \cap R^{-1}$. Moreover, these relations are characterized through the following properties: P is asymmetric, I is symmetric, $P \cap I = \emptyset$ and $R = P \cup I$.

In fuzzy set theory, several triangular norms and conorms are used for defining the intersection and the

2 Preliminaries

Let A be a not empty set of alternatives with $|A| \geq 2$. Subsets of A will be called *crisp* subsets of A . A *crisp binary relation* Q on A is a crisp subset of $A \times A$. We will use aQb to denote $(a, b) \in Q$. Given a crisp binary relation Q on A , the relations Q^{-1} and Q^c are defined by

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \{(a, b) \in A \times A \mid (b, a) \in Q\}, \\ Q^c &= \{(a, b) \in A \times A \mid (a, b) \notin Q\}. \end{aligned}$$

A crisp binary relation Q on A is:

1. *reflexive* if aQa for all $a \in A$.
2. *irreflexive* if not aQa for all $a \in A$.

3. *symmetric* if $Q \subseteq Q^{-1}$.
4. *asymmetric* if $Q \cap Q^{-1} = \emptyset$.
5. *complete* if $Q \cup Q^{-1} = A \times A$.

A crisp binary relation R on A is a *crisp weak preference relation* if it is complete. Any crisp weak preference relation can be factorized into a *crisp strict preference relation*, $P = R \cap (R^{-1})^c$, and a *crisp indifference relation*, $I = R \cap R^{-1}$. Since R is complete, we have that $P = R \cap (R^{-1})^c$ is equivalent to $P = (R^{-1})^c$. The crisp relations P and I are characterized through the following properties:

1. P is asymmetric.
2. I is symmetric.
3. $P \cap I = \emptyset$.
4. $R = P \cup I$.

Completeness and asymmetry imply reflexivity and irreflexivity, respectively. Therefore, R is reflexive and P is irreflexive. Moreover, I is also reflexive in consequence of $R = P \cup I$, R reflexive and P irreflexive.

A *fuzzy subset* B of A is defined through its *membership function*, $\mu_B : A \rightarrow [0, 1]$, where $\mu_B(a)$ is the grade of membership of a in B . Given two fuzzy subsets B, C of A , $B \subseteq C$ if $\mu_B(a) \leq \mu_C(a)$ for all $a \in A$.

The intersection and the union of fuzzy sets are defined by means of triangular norms and conorms, respectively. A function $T : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ is a *triangular norm* (*t-norm*) if it is increasing, commutative, associative and satisfies $T(1, x) = x$ for all $x \in [0, 1]$. A function $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ is a *triangular conorm* (*t-conorm*) if it is increasing, commutative, associative and satisfies $S(0, x) = x$ for all $x \in [0, 1]$. It is easy to check that $T(x, 0) = 0$ and $S(x, 1) = 1$ for all $x \in [0, 1]$.

Given a t-norm T , the function

$$T^*(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$$

is a t-conorm and it is called the *dual t-conorm* of T . If T is a t-norm, the intersection and the union of two fuzzy subsets B, C of A are defined as follows:

1. $\mu_{(B \cap C)}(a) = T(\mu_B(a), \mu_C(a))$ for all $a \in A$.
2. $\mu_{(B \cup C)}(a) = T^*(\mu_B(a), \mu_C(a))$ for all $a \in A$.

We next show the *Lukasiewicz t-norm* and *t-conorm*, which will play a key role in this paper:

$$W(x, y) = \max(x + y - 1, 0),$$

$$W^*(x, y) = \min(x + y, 1).$$

A function $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is an *order automorphism* if it is bijective and increasing. Any order automorphism ϕ is strictly increasing, continuous and satisfies $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$. Furthermore, the function ϕ^{-1} is also an order automorphism. An order automorphism ϕ is *reciprocal* if $\phi(1 - x) = 1 - \phi(x)$ for all $x \in [0, 1]$. It is easy to check that ϕ is reciprocal if and only if ϕ^{-1} is reciprocal. On this, see García-Lapresta and Llamazares [8].

Given a t-norm T and an order automorphism ϕ , the ϕ -transform of T is the t-norm T_ϕ defined by $T_\phi(x, y) = \phi^{-1}(T(\phi(x), \phi(y)))$ for all $x, y \in [0, 1]$. Similar definition for t-conorms. For instance, the ϕ -transforms of Lukasiewicz t-norm and t-conorm are given by

$$W_\phi(x, y) = \phi^{-1}(\max(\phi(x) + \phi(y) - 1, 0)),$$

$$(W^*)_\phi(x, y) = \phi^{-1}(\min(\phi(x) + \phi(y), 1)).$$

A t-norm T is *Archimedean* if $T(x, x) < x$ for all $x \in (0, 1)$. A t-norm T has *zero divisors* if there exist $x, y \in (0, 1)$ such that $T(x, y) = 0$.

A *fuzzy binary relation* Q on A is a fuzzy subset of $A \times A$. The value $\mu_Q(a, b)$ will be denoted by $Q(a, b)$. If $Q(a, b) \in \{0, 1\}$ for all $a, b \in A$ then Q is a crisp binary relation.

Given a fuzzy binary relation Q on A , the relations Q^{-1} and Q^c are defined by $Q^{-1}(a, b) = Q(b, a)$ and $Q^c(a, b) = 1 - Q(a, b)$, for all $a, b \in A$.

Given a t-norm T , a fuzzy binary relation Q on A is:

1. *reflexive* if $Q(a, a) = 1$,
2. *irreflexive* if $Q(a, a) = 0$,
3. *symmetric* if $Q(a, b) = Q(b, a)$,
4. *asymmetric* if $T(Q(a, b), Q(b, a)) = 0$,
5. *complete* if $T^*(Q(a, b), Q(b, a)) = 1$,

for all $a, b \in A$.

In fuzzy set theory completeness and asymmetry do not imply reflexivity and irreflexivity, respectively. Therefore, a fuzzy binary relation R on A is a *fuzzy weak preference relation* if it is reflexive and complete. Given a fuzzy weak preference relation R we say that (P, I) is a *factorization of R* if the fuzzy binary relations P and I satisfy the following properties:

1. P is irreflexive and asymmetric.
2. I is reflexive and symmetric.

$$3. P \cap I = \emptyset.$$

$$4. R = P \cup I.$$

It is important to point out that in the fuzzy framework, starting from the previous properties we do not obtain P and I univocally determined. Moreover, $P = R \cap (R^{-1})^c$ is not equivalent to $P = (R^{-1})^c$.

To conclude this section we are going to show some of the most usual factorizations of the literature.

1. The following factorization was given by Orlovsky [9] and afterwards characterized by Richardson [14]:

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \max(R(a, b) - R(b, a), 0), \\ I(a, b) &= \min(R(a, b), R(b, a)). \end{aligned}$$

2. Ovchinnikov [10] gave this factorization and later it was characterized by Dutta [6]:

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \begin{cases} R(a, b), & \text{if } R(a, b) > R(b, a), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ I(a, b) &= \min(R(a, b), R(b, a)). \end{aligned}$$

3. This one was given by Dutta [6] and also by Roubens and Vincke [15] (with incomparability relations). Afterwards it was characterized by Banerjee [2]:

$$\begin{aligned} P(a, b) &= 1 - R(b, a), \\ I(a, b) &= \min(R(a, b), R(b, a)). \end{aligned}$$

4. Barrett and Pattanaik [3] gave the following factorization with incomparability relations:

$$\begin{aligned} P(a, b) &= 1 - R(b, a), \\ I(a, b) &= R(a, b) + R(b, a) - 1. \end{aligned}$$

We would like to emphasize that in the last factorization we have

$$R(a, b) + R(b, a) = 1 \Rightarrow \begin{cases} I(a, b) = 0, \\ P(a, b) = R(a, b). \end{cases}$$

In this case, $R(a, b)$ represents the intensity with which a is preferred to b . This one is the interpretation that some authors have used for the modelization of individual's preferences. On this, see García-Lapresta and Llamazares [8]. Therefore, the factorization given by Barrett and Pattanaik [3] generalizes this framework.

3 The results

This section is devoted to characterizing some factorizations of a fuzzy weak preference relation by means of reciprocal order automorphisms. Firstly, we characterize this class of order automorphisms. Next we justify the use of continuous Archimedean t-norms with zero divisors. When we consider reciprocal order automorphisms and we include the requirements $P = R \cap (R^{-1})^c$ and $I = R \cap R^{-1}$ (or $P = (R^{-1})^c$), then we obtain generalizations of the factorizations given by Orlovsky [9] and Barrett and Pattanaik [3], respectively.

First of all, we characterize reciprocal order automorphisms by the following property: The dual t-conorm of the ϕ -transform of Lukasiewicz t-norm, $(W_\phi)^*$, coincides with the ϕ -transform of the dual t-conorm of Lukasiewicz t-norm, $(W^*)_\phi$.

Theorem 1. *Let ϕ be an order automorphism. Then the following statements are equivalent:*

1. ϕ is reciprocal.
2. $(W_\phi)^* = (W^*)_\phi$.

PROOF

(1) $\Rightarrow$ (2): If ϕ is reciprocal, then for all $x, y \in [0, 1]$ we have

$$\begin{aligned} (W_\phi)^*(x, y) &= 1 - W_\phi(1 - x, 1 - y) \\ &= 1 - \phi^{-1}(W(\phi(1 - x), \phi(1 - y))) \\ &= \phi^{-1}(1 - W(1 - \phi(x), 1 - \phi(y))) \\ &= \phi^{-1}(W^*(\phi(x), \phi(y))) \\ &= (W^*)_\phi(x, y). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): This is proven by contradiction. Suppose, it were otherwise. Then there exists $x \in (0, 1)$ such that $\phi(1 - x) + \phi(x) \neq 1$. We distinguish two cases:

- (i) If $\phi(1 - x) + \phi(x) < 1$, then

$$\begin{aligned} (W_\phi)^*(x, 1 - x) &= 1 - \phi^{-1}(W(\phi(1 - x), \phi(x))) \\ &= 1 - \phi^{-1}(0) = 1. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} (W^*)_\phi(x, 1 - x) &= \\ &= \phi^{-1}(1 - W(1 - \phi(x), 1 - \phi(1 - x))) \\ &= \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(1 - x)) < 1, \end{aligned}$$

which contradicts the hypothesis.

- (ii) If $\phi(1 - x) + \phi(x) > 1$, then

$$\begin{aligned} (W_\phi)^*(x, 1 - x) &= \\ &= 1 - \phi^{-1}(W(\phi(1 - x), \phi(x))) \\ &= 1 - \phi^{-1}(\phi(1 - x) + \phi(x) - 1) < 1. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}(W^*)_\phi(x, 1-x) &= \\ &= \phi^{-1}(1 - W(1 - \phi(x), 1 - \phi(1-x))) \\ &= \phi^{-1}(1) = 1,\end{aligned}$$

which contradicts the hypothesis. ■

Now we are going to show the conditions that a fuzzy weak preference relation and its factorizations have to hold.

Remark 1. If R is a fuzzy weak preference relation and (P, I) is a factorization of R , then for all $a, b \in A$ the following holds:

1. $R(a, a) = 1$ and $T^*(R(a, b), R(b, a)) = 1$.
2. $P(a, a) = 0$ and $T(P(a, b), P(b, a)) = 0$.
3. $I(a, a) = 1$ and $I(a, b) = I(b, a)$.
4. $T(P(a, b), I(a, b)) = 0$.
5. $R(a, b) = T^*(P(a, b), I(a, b))$.

The factorization of fuzzy preferences with incompatibility relations has been studied by Van de Walle, De Baets and Kerre [16]. The following results and their proofs are similar to the provided by them in that framework.

Theorem 2. Let R be a fuzzy weak preference relation and (P, I) a factorization of R . If T is a t-norm without zero divisors, then R , P and I are crisp binary relations on A .

Theorem 3. Let R be a fuzzy weak preference relation and (P, I) a factorization of R . If T is a continuous non-Archimedean t-norm with zero divisors, then there exists $\theta \in (0, 1)$ such that $R(a, b) \in \{0, 1\}$ or $R(a, b) > 1 - \theta$, for all $a, b \in A$.

Therefore, if the t-norm has not zero divisors, then R , P and I are crisp binary relations. On the other hand, if the t-norm is continuous, non-Archimedean and it has zero divisors, then there exists a threshold, θ , such that R take the value 0 or it is bounded from below by $1 - \theta$. Therefore, if we consider continuous t-norms, it seems natural the use of Archimedean t-norms with zero divisors. These t-norms have been characterized by Ovchinnikov and Roubens [12] by means of ϕ -transforms of Lukasiewicz t-norm.

Theorem 4. T is a continuous Archimedean t-norm with zero divisors if and only if there exists an order automorphism ϕ such that $T = W_\phi$.

Theorem 4 allows us to obtain some conditions that a factorization of a fuzzy weak preference relation holds for continuous Archimedean t-norms with zero divisors.

Corollary 1. Let R be a fuzzy weak preference relation and (P, I) a factorization of R . If T is a continuous Archimedean t-norm with zero divisors, then there exists an order automorphism ϕ such that for all $a, b \in A$ the following statements hold:

1. $\phi(1 - R(a, b)) + \phi(1 - R(b, a)) \leq 1$.
2. $\phi(P(a, b)) + \phi(P(b, a)) \leq 1$.
3. $\phi(P(a, b)) + \phi(I(a, b)) \leq 1$.
4. $\phi(1 - R(a, b)) = \max(\phi(1 - P(a, b)) + \phi(1 - I(a, b)) - 1, 0)$.

PROOF

It is sufficient to take into account that $T = W_\phi$ and that the conditions $R \cup R^{-1} = A \times A$, $P \cap P^{-1} = \emptyset$, $P \cap I = \emptyset$ and $R = P \cup I$ are satisfied. ■

Now we focus our analysis in reciprocal order automorphisms. This fact allows us to determine P depending on R and I .

Theorem 5. Let R be a fuzzy weak preference relation and (P, I) a factorization of R . If ϕ is a reciprocal order automorphism and $T = W_\phi$ then for all $a, b \in A$

$$\begin{aligned}P(a, b) &= \phi^{-1}(\phi(R(a, b)) - \phi(I(a, b))), \\ I(a, b) &\leq \min(R(a, b), R(b, a)), \\ I(a, b) &\geq \phi^{-1}\left(\frac{\phi(R(a, b)) + \phi(R(b, a)) - 1}{2}\right).\end{aligned}$$

PROOF

Given $a, b \in A$, by 3 and 4 of Corollary 1 and the reciprocity of ϕ , we have

$$\begin{aligned}1 - \phi(R(a, b)) &= \max(1 - \phi(P(a, b)) - \phi(I(a, b)), 0) \\ &= 1 - \phi(P(a, b)) - \phi(I(a, b)),\end{aligned}$$

$$\text{hence, } P(a, b) = \phi^{-1}(\phi(R(a, b)) - \phi(I(a, b))).$$

Because $\phi(R(a, b)) = \phi(P(a, b)) + \phi(I(a, b))$, then $\phi(I(a, b)) \leq \phi(R(a, b))$, or equivalently

$$I(a, b) \leq R(a, b).$$

Analogously, from $\phi(R(b, a)) = \phi(P(b, a)) + \phi(I(b, a))$, we have

$$I(a, b) = I(b, a) \leq R(b, a).$$

Therefore, $I(a, b) \leq \min(R(a, b), R(b, a))$.

On the other hand, since $\phi(P(a, b)) + \phi(P(b, a)) \leq 1$, we have

$$\phi(R(a, b)) + \phi(R(b, a)) - 2\phi(I(a, b)) \leq 1,$$

or equivalently,

$$\phi(I(a, b)) \geq \frac{\phi(R(a, b)) + \phi(R(b, a)) - 1}{2}. \quad \blacksquare$$

Since the factorization obtained in Theorem 5 is not unique, we can impose additional conditions. So, in the following theorems we also consider the conditions $P = R \cap (R^{-1})^c$, $P = (R^{-1})^c$ and $I = R \cap R^{-1}$, which are satisfied in the crisp framework.

Theorem 6. Let R be a fuzzy weak preference relation and (P, I) a factorization of R . If ϕ is a reciprocal order automorphism, $T = W_\phi$ and $P = R \cap (R^{-1})^c$ then for all $a, b \in A$

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \max(\phi^{-1}(\phi(R(a, b)) - \phi(R(b, a))), 0), \\ I(a, b) &= \min(R(a, b), R(b, a)). \end{aligned}$$

PROOF

If $P = R \cap (R^{-1})^c$, then for all $a, b \in A$ the following holds

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \\ &= T(R(a, b), 1 - R(b, a)) \\ &= \phi^{-1}(\max(\phi(R(a, b)) + \phi(1 - R(b, a)) - 1, 0)) \\ &= \phi^{-1}(\max(\phi(R(a, b)) - \phi(R(b, a)), 0)) \\ &= \max(\phi^{-1}(\phi(R(a, b)) - \phi(R(b, a))), 0), \end{aligned}$$

and by Theorem 5 we have

$$\begin{aligned} \phi(I(a, b)) &= \\ &= \phi(R(a, b)) - \phi(P(a, b)) \\ &= \phi(R(a, b)) - \max(\phi(R(a, b)) - \phi(R(b, a)), 0) \\ &= \phi(R(a, b)) + \min(\phi(R(b, a)) - \phi(R(a, b)), 0) \\ &= \min(\phi(R(b, a)), \phi(R(a, b))). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remark 2. If ϕ is the identity automorphism in Theorem 6, then we obtain the factorization given by Orlowsky [9]. So, this factorization is characterized by $P = R \cap (R^{-1})^c$ and by being (P, I) a factorization of R for Łukasiewicz t -norm.

When ϕ is a reciprocal order automorphism, $T = W_\phi$ and (P, I) is a factorization of R , Alsina [1] has proven that the conditions $P = R \cap (R^{-1})^c$ and $I = R \cap R^{-1}$ are incompatible. However, under the same suppositions, the conditions $P = (R^{-1})^c$ and $I = R \cap R^{-1}$ are equivalent.

Theorem 7. Let R be a fuzzy weak preference relation and (P, I) a factorization of R . If ϕ is a reciprocal order automorphism and $T = W_\phi$, then $P = (R^{-1})^c$ is equivalent to $I = R \cap R^{-1}$ and

$$\begin{aligned} P(a, b) &= 1 - R(b, a), \\ I(a, b) &= \phi^{-1}(\phi(R(a, b)) + \phi(R(b, a)) - 1), \end{aligned}$$

for all $a, b \in A$.

PROOF

If $I = R \cap R^{-1}$, then for all $a, b \in A$ the following holds

$$\begin{aligned} I(a, b) &= T(R(a, b), R(b, a)) \\ &= \phi^{-1}(\max(\phi(R(a, b)) + \phi(R(b, a)) - 1, 0)) \\ &= \phi^{-1}(\phi(R(a, b)) + \phi(R(b, a)) - 1), \end{aligned}$$

and by Theorem 5 we have

$$\begin{aligned} \phi(P(a, b)) &= \phi(R(a, b)) - \phi(I(a, b)) \\ &= 1 - \phi(R(b, a)) \\ &= \phi(1 - R(b, a)). \end{aligned}$$

Therefore, $P = (R^{-1})^c$.

Reciprocally, if $P = (R^{-1})^c$, then for all $a, b \in A$ the following holds

$$P(a, b) = 1 - R(b, a),$$

and again by Theorem 5 we have

$$\begin{aligned} \phi(I(a, b)) &= \phi(R(a, b)) - \phi(P(a, b)) \\ &= \phi(R(a, b)) + \phi(R(b, a)) - 1. \end{aligned}$$

Therefore, $I = R \cap R^{-1}$. $\blacksquare$

Remark 3. The factorization given in Theorem 7 can also be obtained when we replace $I = R \cap R^{-1}$ by other conditions which are satisfied in the crisp framework, such as $I = (P \cup P^{-1})^c$ or $R \cap P^{-1} = \emptyset$ and $R \cup P^{-1} = A \times A$.

Remark 4. If ϕ is the identity automorphism in Theorem 7, then we obtain the factorization given by Barrett and Pattanaik [3]. So, this factorization is characterized by $I = R \cap R^{-1}$ and by being (P, I) a factorization of R for Łukasiewicz t -norm.

Remark 5. It is possible to make a geometric interpretation of the factorizations obtained in Theorems 6 and 7. Given a and b two different elements of A and R a fuzzy weak preference relation, by Theorem 5 we have

$$\begin{aligned} I(a, b) &\leq \min(R(a, b), R(b, a)), \\ I(a, b) &\geq \phi^{-1} \left(\frac{\phi(R(a, b)) + \phi(R(b, a)) - 1}{2} \right). \end{aligned}$$

Since $P(a, b) = \phi^{-1}(\phi(R(a, b)) - \phi(I(a, b)))$, when $I(a, b)$ ranges between the previous numbers we obtain the possible values for $P(a, b)$ and $P(b, a)$. So, the points $(P(a, b), P(b, a))$ are in a curve with endpoints $X_1 = (x_{11}, x_{12})$ and $X_2 = (x_{21}, x_{22})$, where

$$\begin{aligned} x_{11} &= \phi^{-1}\left(\frac{\phi(R(a, b)) - \phi(R(b, a)) + 1}{2}\right), \\ x_{12} &= \phi^{-1}\left(\frac{\phi(R(b, a)) - \phi(R(a, b)) + 1}{2}\right), \\ x_{21} &= \max(\phi^{-1}(\phi(R(a, b)) - \phi(R(b, a))), 0), \\ x_{22} &= \max(\phi^{-1}(\phi(R(b, a)) - \phi(R(a, b))), 0). \end{aligned}$$

It is easy to check that the point X_1 is in the straight line $P(a, b) + P(b, a) = 1$. Moreover, the point X_2 corresponds to the factorization given in Theorem 6. If we represent $Y = (R(a, b), R(b, a))$ in the same plane that $P(a, b)$ and $P(b, a)$, the point of the previous curve that it is simetric to Y with respect to the straight line $P(a, b) + P(b, a) = 1$ is $Z = (1 - R(b, a), 1 - R(a, b))$, which corresponds to the factorization given in Theorem 7 (see Figure 1).

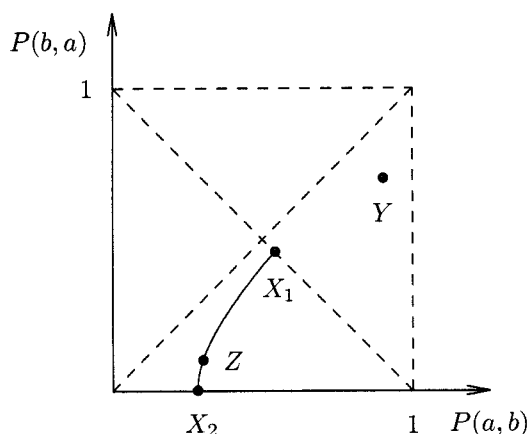


Figure 1

Acknowledgements

This work is partially financed by the Junta de Castilla y León (Consejera de Educación y Cultura, Proyecto VA057/02) and the Ministerio de Ciencia y Tecnología (Proyecto BEC2001-2253).

References

- [1] C. Alsina. On a family of connectives for fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 16, pp. 231–235, 1985.
- [2] A. Banerjee. Fuzzy preferences and Arrow-type problems in social choice. *Social Choice and Welfare* 11, pp. 121–130, 1994.
- [3] C.R. Barrett, P.K. Pattanaik. Fuzzy sets, preference and choice: Some conceptual issues. *Bulletin of Economic Research* 41, pp. 229–253, 1989.
- [4] M. Dasgupta, R. Deb. Factoring fuzzy transitivity. *Fuzzy Sets and Systems* 118, pp. 489–502, 2001.
- [5] B. De Baets, J. Fodor. Twenty years of fuzzy preference structures (1978–1997). *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali* 20, pp. 45–66, 1997.
- [6] B. Dutta. Fuzzy preferences and social choice. *Mathematical Social Sciences* 13, pp. 215–229, 1987.
- [7] J. Fodor, M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [8] J.L. García-Lapresta, B. Llamazares. Aggregation of fuzzy preferences: Some rules of the mean. *Social Choice and Welfare* 17, pp. 673–690, 2000.
- [9] S. Orlovsky. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems* 1, pp. 155–167, 1978.
- [10] S. Ovchinnikov. Structure of fuzzy binary relations. *Fuzzy Sets and Systems* 6, pp. 169–195, 1981.
- [11] S. Ovchinnikov. Social choice and Łukasiewicz logic. *Fuzzy Sets and Systems* 43, pp. 275–289, 1991.
- [12] S. Ovchinnikov, M. Roubens. On strict preference relations. *Fuzzy Sets and Systems* 43, pp. 319–326, 1991.
- [13] P. Perny, M. Roubens. Fuzzy preference modeling. In R. Słowiński (Ed.), *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 3–30, 1998.
- [14] G. Richardson. The structure of fuzzy preferences: Social choice implications. *Social Choice and Welfare* 15, pp. 359–369, 1998.
- [15] M. Roubens, P. Vincke. Fuzzy preferences in an optimization perspective. In J. Kacprzyk, A. Orlovski (Eds.), *Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, pp. 77–90, 1987.
- [16] B. Van de Walle, B. De Baets, E. Kerre. A plea for the use of Łukasiewicz triplets in the definition of fuzzy preference structures. (I). General

argumentation. *Fuzzy Sets and Systems* 97, pp.
349–359, 1998.

Sesión

B4

Gestión del conocimiento

Knowledge management

QFD EN EL SECTOR SERVICIOS: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA LÓGICA BORROSA

Angel M. Gento
E.T.S. Ing. Ind. (UVA)
gento@eis.uva.es

M^a Dolores Miñambres
Servicio Prevención (UVA)
marmi@uva.es

Alfonso Redondo1
E.T.S. Ing. Ind. (UVA)
redondo@eis.uva.es

M^a Elena Pérez
E.T.S. Ing. Ind. (UVA)
elena@eis.uva.es

Resumen

La calidad en el sector servicios es muy importante pues es más difícil de medir y de garantizar de forma homogénea que para un producto. La relación entre calidad de servicio y gestión de riesgos es muy alta. En los últimos tiempos la gestión de riesgos ha estado centrada en las industrias y en el problema de promover puestos de trabajo, maquinaria y equipos en general más seguros. Ya es la hora de abordar a las compañías de servicios.

Para facilitar el análisis proponemos utilizar la Función de Despliegue de la Calidad (QFD). Para ello, es necesaria la definición de lo que se conoce como "casa de la calidad".

Este trabajo está centrado en una parte de la gestión de riesgos de una universidad: autoprotección ante emergencias en un centro universitario. Definiremos la matriz inicial de la casa de la calidad y el proceso para obtener esta información: los qué, los cómo, las relaciones, correlaciones, etc. Posteriormente plantearemos la utilización de la lógica borrosa como herramienta para facilitar el análisis de todas aquellas relaciones subjetivas o difícilmente cuantificables.

Palabras Clave: QFD, etiquetas lingüísticas, autoprotección, emergencias.

1 INTRODUCCIÓN

En primer lugar centraremos el problema a analizar y la importancia del mismo, analizando brevemente que elementos se consideran necesarios en un programa de Gestión de Riesgos y cuales son algunas de las causas más importantes en la ocurrencia de los mismos.

A continuación describiremos la herramienta propuesta para analizar este problema: Función de despliegue de la calidad (QFD), que aunque fue desarrollada para el

análisis de productos en Japón, y posteriormente exportada a USA y Europa, cada vez se está utilizando más para considerar las necesidades de los clientes en los servicios. Y no hemos de olvidar que las economías más desarrolladas están evolucionando hacia economías de servicios.

Antes de pasar al problema tratado, haremos una breve mención a la teoría de los conjuntos borrosos y de cómo mediante ella podemos considerar la incertidumbre y modelar aspectos subjetivos no tenidos en cuenta de otro modo más que de forma discreta, ampliando y enriqueciendo los datos suministrados por los diferentes agentes que forman parte del sistema.

Por último aplicaremos todo lo anterior al problema de estudio: autoprotección en las emergencias de un centro universitario. Plantearemos la tabla inicial del QFD y su modificación con las consideraciones de los clientes (los usuarios del servicio) para posteriormente plantearnos la introducción de la lógica borrosa en la misma.

Finalizaremos con las conclusiones más importantes y algunas de las futuras líneas de desarrollo que pretendemos abordar a la vista de las mismas.

2. GESTIÓN DE RIESGOS

La gestión de riesgos se puede definir como la reducción y control de los efectos adversos de los riesgos a los que cualquier organización se encuentra expuesta. Los riesgos incluyen todos los aspectos de pérdidas accidentales que pueden llevar a cualquier empresa a la reducción de sus activos. Esos activos son personal, material, maquinaria, procedimientos, productos y dinero.

Los principios de la reducción de riesgos están soportados por un programa de Gestión de Riesgos (HSE: Health, Safety and Environment), cuyo propósito básico es proteger los activos de las organizaciones de pérdidas causadas por pérdidas accidentales [10]. Los elementos claves del ciclo de control de un programa de Gestión de Riesgos [6] son:

1. Formulación de una política dirigida a conseguir la preservación y desarrollo de recursos físicos y humanos y la reducción de pérdidas financieras y responsabilidades.
2. Diseño de estructuras organizacionales para poner en práctica de forma efectiva la política de Gestión de Riesgos.
3. Planificación y formalización de las acciones a ser tenidas en cuenta con respecto al total de peligros y riesgos que se pueden esperar.
4. Mediada de resultados frente a los estándares predeterminados.
5. Aprendizaje a partir de experiencias mediante revisiones y auditorías independientes.

Aunque estos principios están aceptados por todos, no existen modelos razonables de como organizar el trabajo.

Otras disciplinas similares son la gestión de la calidad total y la gestión medioambiental, basadas en consideraciones similares pero trabajando con diferentes procesos operacionales y objetivos. Los sistemas de gestión de calidad están diseñados para detectar y corregir desviaciones de los estándares de calidad establecidos [2, 7]. En la gestión de riesgos, podemos definir los peligros como desviaciones de la situación ideal o estándar.

Algunos posibles peligros para la salud pueden clasificarse como:

1. Físicos: ruido, vibración, temperatura y humedad extremas.
2. Agentes biológicos: virus, toxinas.
3. Peligros químicos: gases, humos, líquidos cuya composición química puede crear problemas de salud.
4. Carga de trabajo física: posturas de trabajo, carga psicológica, movimientos, manejos manuales.
5. Carga de trabajo mental: carga de trabajo perceptiva y cognitiva.
6. Stress.

La mayoría de los accidentes suceden porque las personas cometen fallos de forma activa, que se denominan "actos inseguros". En términos de seguridad de sistemas, los actos inseguros y las condiciones inseguras son prácticas y condiciones por debajo del estándar respectivamente. Algunas prácticas por debajo del estándar se refieren a deficiencias en las comunicaciones e informaciones entre áreas funcionales de la empresa: equipos y materiales inadecuados o peligrosos, malos diseño de distribución en planta e interfaces.

En las últimas décadas los mayores cambios en este ámbito se han producido en suministrar equipos, maquinarias y puestos de trabajo más seguros. De este modo, en la Unión Europea todos los equipos y maquinarias deben cumplir los requerimientos contenidos en la "Directiva de Máquinas" de 1989 antes de ponerse

en el mercado y todos los existentes deben cumplir con la "Directiva de Equipos de Trabajo" desde el 1 de enero de 1997.

Por otro lado, la Directiva 89/391/CEE del Consejo 12-6-89 es relativa a la aplicación de medidas para promover la mejora de la seguridad y la salud de los trabajadores en el trabajo y ha sido transpuesta en España a la ley 31/95 de Prevención de Riesgos Laborales, de obligatorio cumplimiento por todas las empresas en la actualidad.

3 QFD¹ (FUNCIÓN DE DESPLIEGE DE LA CALIDAD)

La Función de Despliegue de la Calidad (QFD) fue desarrollada en el astillero de Mitsubishi en Kobe en 1972 como una herramienta para mejorar el ciclo de desarrollo y fabricación de nuevos productos de forma que se cumplieran en gran medida los requerimientos de los clientes. El primer uso del QFD en la industria del automóvil fue también en Japón en 1977 en Toyota. En Estados Unidos el primer interés de forma generalizada no sucedió hasta 1983 con Ford Motor Company y General Motors en 1984 aprendieron sus beneficios [9], aunque no fue usada hasta 1987 en Ford Motor Company [4].

QFD lleva a cabo esos objetivos a través de una herramienta básica de diseño denominada "casa de la calidad" (HOQ²) como se muestra en la figura 1. La casa está formada por tres partes principales: los atributos de los consumidores (sección horizontal); las características de ingeniería (sección vertical); y el centro de la casa.

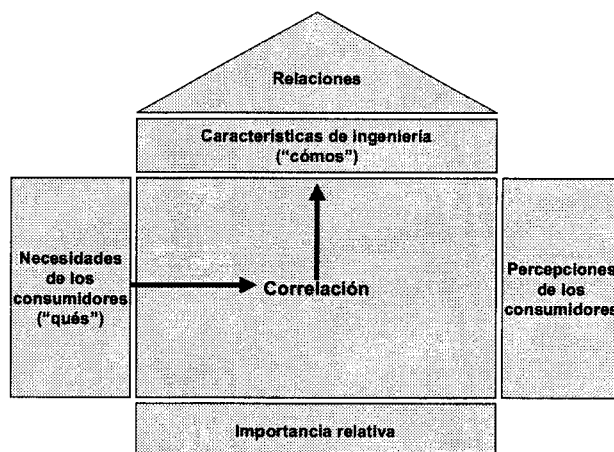


Figura 1. "Casa de la calidad".

La sección de atributos de los consumidores muestra la "voz de los consumidores/clientes". Al lado izquierdo de esta zona se encuentran los atributos deseados por los consumidores (también denominados "los qué") e

¹ Quality Function Deployment.

² House of quality

indican las necesidades de los clientes. A la derecha están las percepciones de los consumidores. Esta sección indica la importancia relativa de los diferentes atributos de los consumidores y también la evaluación de los clientes de las posibles alternativas.

La sección de características de ingeniería incide en los aspectos técnicos del diseño de un producto y se le conoce también como “los cómo”. La base de la casa indica la importancia relativa de las diferentes características de ingeniería y también indica las medidas de efectividad de cada una de ellas. El tejado de la casa indica la relación positiva y/o negativa entre las diferentes características técnicas. Esta parte de la casa se usa para equilibrar los beneficios de ingeniería y ayuda a generar nuevas alternativas al señalar zonas de mejora para productos existentes [5].

El centro de la casa describe la correlación existente entre las características de ingeniería y los atributos de los clientes. La fortaleza y la dirección (positiva o negativa) de cada relación se representan por un símbolo, creando una matriz de símbolos indicando como cada característica de ingeniería satisface cada atributo del cliente.

La casa de la calidad puede expandirse más lejos que a los elementos básicos almacenando información adicional o eliminando elementos dependiendo de la aplicación, el tiempo disponible y el grado de análisis. En definitiva, la información gráfica mostrada en la casa de la calidad puede ser convertida en un formato matemático para suministrar una base numérica para la toma de decisiones en la selección de un nuevo concepto o diseño (Figura 2).

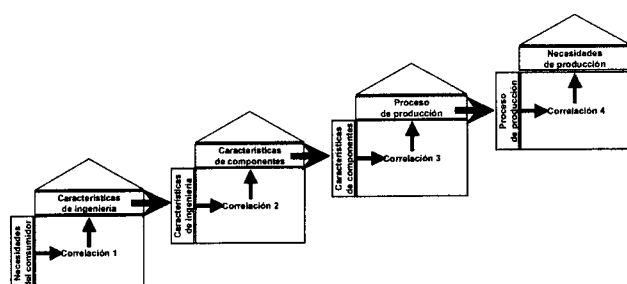


Figura 2. Proceso de “casas de calidad” para satisfacer las necesidades de los consumidores.

El proceso del QFD propaga la información almacenada en la casa de la calidad inicial. Esta información se une a la siguiente casa de la calidad convirtiendo las características de ingeniería de la casa inicial en las necesidades de los consumidores para la nueva casa de la calidad. Este proceso provoca la conexión de los valores originales de necesidades de los consumidores a todos los niveles de desarrollo del producto. Además es muy beneficioso pues mantiene la voz de los consumidores a lo largo de todo el proceso de desarrollo, permitiendo

establecer relaciones entre múltiples grupos y facilitado la incorporación de más detalles al mismo [3].

4 TEORÍA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

La teoría de los conjuntos borrosos se ha desarrollado para intentar resolver problemas en los que la descripción de las actividades y las observaciones son imprecisas, vagas o inciertas. El término “borroso” se refiere a la situación en que no existen límites bien definidos para el conjunto de actividades o de observaciones.

Para tratar estos problemas Zadeh propuso la teoría de los conjuntos borrosos en 1965. La idea principal es bastante simple y natural: no se pueden establecer límites exactos a una clase de objetos definida de forma vaga, y propone representar la pertenencia o no de un elemento a una determinada clase por alguna medida con diferentes grados en una escala. Esta escala se denomina grado de pertenencia y también se puede entender como el grado de certidumbre que tenemos acerca de la pertenencia del elemento considerado a un determinado conjunto borroso. Los grados de pertenencia de un elemento a un determinado conjunto pueden depender del contexto en que se esté tratando un problema dado [8].

4.1. ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS

La conversión de las etiquetas lingüísticas a números borrosos triangulares y/o trapezoidales puede realizarse de muchas formas. Una de las más utilizadas a lo largo de la literatura [1] es la mostrada en la figura 3.

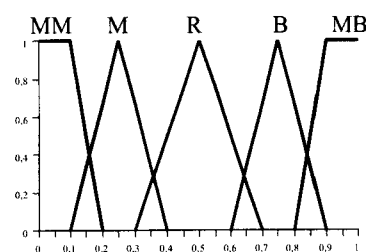


Figura 3. Etiquetas lingüísticas

5 NUESTRA PROPUESTA

Un programa de Salud, Seguridad y Entorno³ es muy amplio y la sensación de seguridad puede incluir diversos aspectos. Este estudio inicial está centrado en la

³ Hemos preferido utilizar la denominación anglosajona: Health, Safety and Environment (HSE), pues da una mejor idea de la complejidad del estudio frente a la denominación española: Salud y Prevención de Riesgos Laborales o simplemente Prevención de Riesgos Laborales.

autoprotección contra emergencias en un edificio de la Universidad de Valladolid.

La visión convencional del método utilizado por el QFD plantea un mercado, clientes, un producto, una empresa y la competencia. En este trabajo utilizamos un nuevo enfoque diferente a la situación descrita dando la vuelta al sistema.

Mientras que en el enfoque tradicional el escenario es de puertas para afuera de la empresa, buscando la interacción de la empresa con la sociedad exterior de manera que aportando al producto que vende a la sociedad una calidad limitada, el cliente lo valore de forma máxima y por tanto, le reporte a la empresa el mayor beneficio, el enfoque de este trabajo es de puertas para adentro de la empresa.

El escenario que se plantea en el de interacción de la empresa con la sociedad interna que en ella se constituye, de manera que se va a buscar un máximo beneficio para la empresa a través de que el cliente interno (el trabajador) maximice su satisfacción gracias a un aporte finito en el producto/servicio, en este caso será sensación de seguridad del empleado dentro de su empresa teniendo en cuenta que se puede aplicar igualmente a otros conceptos de satisfacción en ámbitos ergonómicos, psicosociales, etc..

En este caso la matriz inicial tendrá como objetivo relacionar los deseos del empleado (cliente) con las características de calidad del servicio (sensación de seguridad laboral frente a las emergencias).

Los datos de la matriz inicial se han estimado en base a lo siguiente:

- Sensación de seguridad: actualmente no existe alarma social y los ocupantes de los centros en general van tranquilos. Esto es un punto fundamental ya que bajo ningún concepto se puede permitir que exista el menor indicio de alarma social por las pérdidas que originaría. En puntuales ocasiones alguien se plantea algo pero sin prestar excesiva importancia. Por ello la sensación de seguridad ha de medirse en términos relativos, apreciando cada detalle y en ningún caso permitir el menor atisbo de alarma.
- Cumplimiento de la legislación: se ha estimado en función del grado en que se hayan implantado los Planes de Emergencia ya que hay datos no disponibles o difícilmente conseguibles como por ejemplo las salidas emergencia candadas, medios de extinción no adecuados y/o no en perfecto estado de uso, cumplimiento de la CPI 96 de edificios anteriores a la misma, etc.
- Mantener y poner a salvo a todo personal no perteneciente a la plantilla: es una estimación en función de la capacidad de aviso a todo ocupante del edificio y de los recovecos o lugares con mayor

dificultad de desalojo, barreras arquitectónicas para desalojar personas con insuficiencias físicas (permanentes o circunstanciales, ejemplo heridos, embarazadas, etc)

- Facilitar la intervención a los medios externos / autoridades: consistirá en aspectos como los contactos hechos previamente a la emergencia con dichos medios / autoridades, por ejemplo, la entrega del plan de emergencia, la facilidad para avisarlos, la accesibilidad del edificio para que entren vehículos de bomberos, etc.
- Mantener y poner a salvo el patrimonio: consistirá en cuestiones tales como la extinción automática, sectorizaciones contra incendios, etc.

Sin olvidarnos de los competidores (CX y CY): empresas de similares características que ofrecen el mismo servicio a sus clientes (es decir empleados). En este caso se ha utilizado la encuesta nacional de Seguridad y Salud de las Universidades Españolas.

En base a estos aspectos, la matriz inicial podemos valorarla tal y como se presenta en la tabla 1.

Tabla 1. Matriz inicial.

aspectos	Tasa impor.	Situa. actual	CX	CY	Plan	Tasa mejor	Impor. 'ventas'	Peso abs	Peso Solici.
a	5	4	4	4	2	0.5	1.5	2.5	24.4
b	3	1	2	1	4	0.25	1.2	0.75	7.3
c	5	3	4	2	5	0.6	1.5	3	29.2
d	3	2	3	2	3	0.67	1	2.01	16.6
e	2	1	2	1	1	1	1	2	19.5
							$\Sigma=$	10.26	

A la vista de los pesos obtenidos podemos apreciar que el punto más importante va a ser Mantener / poner a salvo todo ocupante del edificio que no pertenezca a la plantilla, seguido muy de cerca por Sensación de seguridad. Después, un poquito más alejados, vendrían Mantener / poner a salvo el patrimonio y Facilitar la intervención a medios / autoridades ajenos a la empresa. En último lugar de prioridad y con gran diferencia estaría Cumplir legislación. Esto no se ha de interpretar como que no sea importante cumplir la legislación, sino que hay que trascenderla, al fin y al cabo la ley está para intentar asegurar los otros puntos mencionados.

5.1. IDENTIFICACIÓN Y JERARQUIZACIÓN DE LOS CLIENTES

El cliente es interno: el empleado. Lo deseable es tener empleados responsables, que además de preocuparse por sí mismos, se preocupan por la empresa de cara a que esta sea responsable socialmente y no incurra en pérdidas (ni de imagen, ni de patrimonio, ni económicas que le puedan llevar a la quiebra).

Otros posibles empleados son los que sólo se preocupan por sí mismos. Y un último tipo de empleados son los que únicamente se preocupan por su comodidad inmediata, siendo reticentes a colaborar, estos empleados tendrán que ser influidos de manera que se les lleve al segundo grupo como mínimo, siendo deseable la pertenencia de todos al primer grupo.

Actualmente no se dispone de un % desglosado de cada tipo de empleados, habría que tener en cuenta en las acciones a hacer (los cómo) llevar a todos los empleados al primer grupo y mantenerlos ahí.

La mayor expectativa del cliente deseado (empleado responsable) y sus cómo es la sensación de seguridad que podemos concretar en los siguientes puntos:

1. información: oral, escrita, transparente y de fácil acceso,
2. documentación de la información: gráfica, breve y sencilla,
3. medios físicos: extintores, extinción automática, detectores, alarmas, salidas de emergencia, facilidad de la salida (señalización, sin obstáculos/barreras),
4. demostración de funcionamiento: simulacros, confianza en los medios aplicados tanto físicos como organizativos,
5. formación: concisa, interactiva, breve a la par que intensa y práctica,
6. cumplir la legislación: conocimiento (información), planes de Emergencia, edificación (CPI 96), instalaciones (contra incendios, eléctrica, emergencias), especiales (almacenes con alta carga de fuego, laboratorios, productos de especial peligrosidad)
7. mantener a salvo a los ocupantes:
 - a. evitar emergencias: información, medios de seguridad, cumplimiento de normas de conducta sin excepción,
 - b. solucionar las emergencias rápida y efectivamente: instalaciones con medidas de seguridad, formación,
 - c. evacuar a todo el mundo: salidas adecuadas, información, formación, organización efectiva y comprometida,
8. facilitar la intervención:
 - a. información: facilidad de llamar a los medios (teléfonos). que hacer, a quien avisar y cuando hacer / avisar,
 - b. edificación e instalaciones adecuadas para que entren bomberos, ambulancias
9. mantener y poner a salvo el patrimonio:
 - a. información: patrimonio crítico, conductas a seguir para prevenir emergencias o daños mayores en caso de que se produzcan,
 - b. instalaciones de seguridad para patrimonio crítico,
 - c. construcción: sectores de seguridad.

Llegado a este punto se apreció que la primera matriz inicial planteada no resultaba ser operativa porque no se podían obtener los cómo o en su caso resultaban ser inespecíficos. Así que basándose en el principio de que el QFD es un método iterativo, se planteó una nueva matriz inicial (ver Tabla 4) con las siguientes expectativas:

- a) Información
- b) Instalaciones de protección
- c) Vías de evacuación
- d) Demostración de funcionamiento
- e) Formación
- f) Otras características del edificio (sectores, entradas bomberos,...)
- g) Instalaciones especiales

Tabla 2. Jerarquía de expectativas del cliente interno (Nueva matriz inicial)⁴.

	Tasa Impor.	Situ. Act.	CX	CY	Plan	Tasa mejora	Impor ventas	Peso Abs.	Peso Solici.
a	5	3	4	2	5	1.67	1.5	12.5	34.38
b	5	2	3	1	4	2	1.5	6	16.5
c	5	3	4	2	4	1.33	1.5	6	16.5
d	4	1	2	1	4	4	1.2	4.8	13.2
e	3	1	2	2	4	4	1	4	11
f	2	1	2	2	2	2	1	2	5.5
g	1	1	2	1	1	1	1	1	2.75
									36.3

Para ello nos hemos basado en la experiencia del Servicio de Prevención y en la información obtenida en las diversas acciones formativas impartidas a los empleados. Las preguntas fueron orales, no se conserva el testimonio escrito por considerar que en esta fase de implantación de emergencias podría causar más rechazo siendo una acción que fomentaría las conductas de empleados de tercer tipo antes mencionados.

En función de estos resultados y de los nueve puntos anteriormente expuestos, podemos plantear la "casa de la calidad" inicial en base a los siguientes "cómo":

- A instrucciones escritas de actuación en caso de incendio: pueden ser tanto de evitar, como de sofocar como de evitar propagación
- B instrucciones escritas para amenaza de bomba
- C instrucciones escritas en caso de accidente
- D instrucciones escritas en caso de evacuación
- E sesiones formativas / informativas
- F salidas de emergencia
- G extintores accesibles
- H BIEs accesibles
- I detección de incendios
- J extinción automática
- K simulacros
- L Planes de Emergencia
- M cumplimiento de CPI 96

⁴ Consideramos como CX y CY, los competidores en el ámbito universitario con una mejor valoración en los diferentes apartados considerados en la Comisión de Seguridad y Salud de la Universidades Españolas (CSSUE).

- N cumplimiento de legislación específica
- O organización en caso de emergencia
- P cumplir el mantenimiento de las vías de evacuación (despejadas, sin obstáculos, sin candar, etc)

De este modo, y en base a las encuestas a los trabajadores y a las experiencias acumuladas desde el Servicio de Prevención, podemos desplegar la "casa de la calidad" inicial.

Llegados a este punto teníamos la posibilidad de seguir desarrollando el resto de fases del QFD, pero nos ha parecido más interesante proponer la introducción de la lógica borrosa para la ampliación de la información existente a lo largo del proceso.

5.2. CONSIDERACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

La utilización de la teoría de los conjuntos borrosos en una matriz como la mostrada en la tabla 2 parece bastante intuitiva, si tenemos en cuenta que todas las relaciones se encuentran valoradas en términos subjetivos.

Nuestra propuesta consiste en sustituir las valoraciones subjetivas realizadas con un único número por etiquetas lingüísticas, y sustituir estas por números borrosos triangulares o trapezoidales cuando sea necesario trabajar con ellas. Esto nos permitirá disponer de una mayor cantidad de información durante el proceso de análisis de los resultados, al no haber discretizado los datos disponibles hasta el último momento

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha aplicado la primera de las fases de la teoría del QFD empleando como datos los de la Comisión de Seguridad y Salud de la Universidades Españolas (CSSUE) y la experiencia acumulada por el Servicio de Prevención de una Universidad.

Podemos extraer varias conclusiones del esfuerzo realizado para la realización de este trabajo:

1. Además de las ventajas, inconvenientes y limitaciones del QFD se ha de tener en cuenta que los datos en los que está basado este trabajo han sido obtenidos aprovechando circunstancias y experiencia de profesionales dedicados a la prevención, pero no han sido obtenidos con estudios específicos que hayan utilizado sistemática específica y paralela a la aplicada en los estudios de mercado.
2. Por otro lado, dado lo delicado del tema, se puede ver que si se hicieran encuestas de manera directa al público existiría un alto riesgo de cambiar su percepción sobre el mismo posiblemente levantado

suspicias e incluso pudiendo motivar inseguridad y por tanto fuente de alarma social por lo que podrían hacerse para contrastar resultados pero a un grupo reducido de personas.

3. La utilización de la lógica borrosa a través de las etiquetas lingüísticas amplía la riqueza de los datos a lo largo del proceso de análisis, mientras que la complejidad en los cálculos se ve aumentada pero no excesivamente.

Como ampliaciones del trabajo estamos realizando diferentes líneas:

1. Analizar las diferentes fases del QFD para este problema: definición del producto (fase II), definición de los componentes (fase III) y definición del proceso de producción (fase IV) utilizando etiquetas lingüísticas para la definición de todas las relaciones subjetivas.
2. Analizar otros problemas importantes desde el punto de vista de satisfacción de los clientes, que no se encuentran regulados (o lo están en un grado muy pequeño) en las diferentes normativas existentes, pero que son ampliamente valorados por los trabajadores: algunos aspectos ergonómicos y psicosociales.

Referencias

- [1] Chen, S.J. y Ch.L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making - Methods and Applications*. Springer-Verlag. Berlin, 1992.
- [2] Curry, A. y Herbert, D. "Continuous improvement in public services - a way forward" *Managing Service Quality*, 8 (5), 339-349, 1998.
- [3] Delano, G., Parnell, G.S., Smith, C. y Vance, M. "Quality function deployment and decision analysis. A R&D case study", *Int.l J. of Op. & Pro. Mgmt*, 20 (5), 591-609, 2000.
- [4] Ginn, D.M., Jones, D.V., Rahnejat H. y Zairi, M. "The QFD/FMEA interface", *Eur. J. of Innovation Management*, 1(1), 7-20, 1998.
- [5] Hauser, J. y Clausing, D. "The house of quality", *Harvard Business Review*, May-June, 1988.
- [6] Health and Safety Executive. *Successful Health and Safety Management*. Health and Safety Executive, London, 1993.
- [7] Juran, J.M. y Gryna, F.M. *Quality Planning and Analysis*. McGraw-Hill. New York, 1993.
- [8] Kaufmann, A. y J. Gil Aluja. *Introducción de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos a la Gestión de las Empresas*. Milladoiro. Santiago de Comp., 1986.
- [9] Zairi, M. *Quality Function Deployment: a Modern Competitive Tool*. TQM Practioner Series, EFQM & Technical Communications (Publishing) Ltd, 1993.
- [10] Zimolong, B. "Occupational risk management", en Salvendy, G. (ed.), *Handbook of Human Factors and Ergonomics*, John Wiley & Sons, New York, 1997.

SISTEMA DE INFORMACIÓN DE GESTIÓN PRESUPUESTARIA DE LA DISTRIBUCIÓN BASADO EN UN ALGORITMO GENÉTICO BORROSO

López-González, Enrique

Mendaña Cuervo, Cristina

Universidad de León. Departamento de Dirección y Economía de la Empresa

Campus de Vegazana, s/n. E-24071 León

E-mail: dde{elg, cmc}.unileon.es

Resumen

En este trabajo se presenta una aplicación de heurística bio-inspirada, concretamente un Algoritmo Genético en el diseño de un sistema de información para la toma de decisiones presupuestarias vinculadas a la problemática de la distribución, ante situaciones caracterizadas por la incertidumbre y no linealidad.

Palabras Clave: Aplicaciones soft-computing, gestión presupuestaria, distribución, diseño de sistemas de información, algoritmos genéticos

1 INTRODUCCIÓN

La distribución supone la planificación, implementación y control físico de los flujos de materiales y bienes finales desde los puntos de origen hasta los puntos de utilización, con objeto de satisfacer las necesidades de los consumidores a cambio de un beneficio.

En última instancia las empresas tienen que establecer unos objetivos de distribución para orientar su presupuestación. Así, una vez determinados el conjunto de objetivos para cada servicio, la empresa se encuentra preparada para diseñar un sistema que minimice los costes implicados [10]. Cada posible sistema de distribución supone un coste total de distribución expresado por la siguiente ecuación:

$$D = T + FW + VW + S \quad (1)$$

donde D es el coste total de la distribución del sistema propuesto, T es el coste total de transporte del sistema propuesto, FW es el coste total de almacenamiento del sistema propuesto, VW es el coste variable total de almacenamiento (incluidas las existencias) del sistema propuesto y S es el coste total de ventas perdidas debido al retraso medio en la entrega, de conformidad con el sistema propuesto.

La elección de un sistema de distribución exige el examen de los costes asociados a los diferentes sistemas propuestos y la selección de aquel que minimice el coste total de distribución. Alternativamente, si S es difícil de medir, la empresa debe tratar de minimizar el coste de distribución

expresado por $T + FW + VW$, alcanzando el nivel objetivo de servicio al cliente.

La mayor dificultad se encuentra en la minimización de T , siendo una de las preguntas clave que la empresa debe resolver dentro de este contexto, la siguiente: ¿Cómo deben enviarse los productos a los clientes?, esto es, se trata de establecer los mecanismos que permitan satisfacer, durante el periodo de estudio, demandas geográficamente distintas de los lugares o "fuentes" donde los productos están disponibles. Dados los diferentes medios posibles de transporte, el presupuesto de distribución debe determinar, por tanto, en qué proporciones contribuirá cada "fuente" a satisfacer las diferentes demandas; la afectación de los medios de transporte disponibles a cada una de estas transferencias; y la presupuestación correspondiente.

Con dicho estudio se podrán definir las líneas clave de la organización de los transportes desde las fábricas. Dentro de las decisiones de un presupuesto a corto plazo que se encuadran en este ámbito sobresalen la afectación de las disponibilidades en función de la demanda y los circuitos de entrega y cuya complejidad combinatoria adicional a las condiciones de incertidumbre y no linealidad que pueden caracterizar este problema, teniendo en cuenta estudios anteriores al respecto [11, 12] la conveniencia de aplicar una heurística bio-inspirada, y más concretamente, un algoritmo genético.

2 PRESUPUESTO A CORTO PLAZO: LÍNEAS CLAVE

2.1. AFECTACIÓN DE LAS DISPONIBILIDADES EN FUNCIÓN DE LA DEMANDA

Se trata de un problema clásico de investigación operativa, que consiste en buscar el coste mínimo de la distribución cuando se aprovisionan puntos de destino en una proporción variable, a partir de diferentes "fuentes" [1], tal como se muestra en la Figura 1.

La existencia de varios puntos origen de transporte y múltiples puntos de destino implica la necesidad no sólo de encontrar las mejores rutas entre ellos, sino también dar una solución al problema de la asignación de destinos a cada punto de origen.

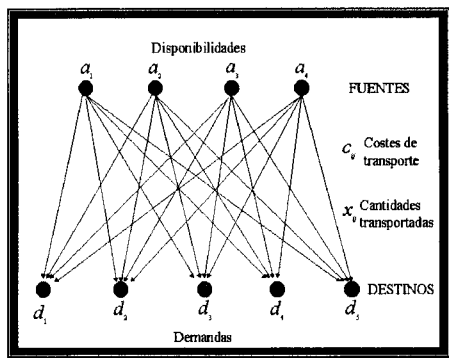


Figura 1

El problema tiene una complicación adicional si se tiene en consideración la posibilidad de restricciones en los puntos de origen, por ejemplo en cuanto a la cantidad de demanda que puede cubrir cada uno de ellos. Generalmente, este tipo de problemas se trata a través del método de programación lineal, conocido como método del transporte. Cada "fuente" i (depósito de materias primas, fábrica o depósito regional), dispone de un stock a_i ; cada destino j (almacén, depósito regional o cliente) pide una cantidad d_j , de forma que el objetivo es el envío de cantidades x_{ij} de cada "fuente" i a cada destino j para satisfacer las demandas sin exceder las capacidades de las "fuentes" y de forma que la suma de los costes de transporte $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ sea mínima. Este esquema puede com-

plicarse sensiblemente introduciendo costes de transporte decrecientes respecto a la carga transportada y, si es preciso, un nivel intermedio de irradiación [6].

Una forma muy generalizada de reconocer un problema de transporte es por su estructura o naturaleza "de-hacia", de un origen hacia un destino, de una "fuente" hacia un usuario.

Al enfrentar este tipo de problemas, la intuición dice que debe haber alguna forma de obtener una solución. Se conocen las "fuentes", las capacidades, las demandas y los costes de cada ruta; debe existir, pues, una combinación óptima que minimice el coste: la dificultad estriba en el gran número de combinaciones posibles. Este problema puede formularse utilizando programación lineal y aplicando para su solución el Método Simplex; sin embargo, para estos problemas existe una estrategia general, como se indica en el diagrama de flujo de la Figura 2 [3].

El esquema general consiste en construir la matriz de transporte y establecer una solución inicial factible —óptima o no—, cuya comprobación se efectúa mediante una prueba, para lo cual existen varias técnicas como, por ejemplo, el método de la Esquina Noroeste [4] o el método de la aproximación de Vogel. Si la solución no es óptima, se revisa repitiendo la prueba. De este modo, tras

cada iteración, la solución alcanzada se aproxima más a la óptima [8].

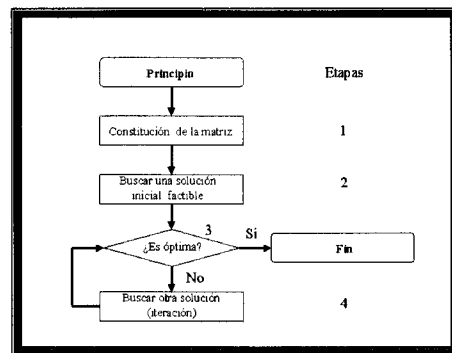


Figura 2

Entre los métodos que permiten pasar de una solución a otra se encuentra el Stepping-Stone [5], con el que se asegura que al cabo de un número finito de iteraciones se alcanza el mínimo.

Otro grupo de métodos que permiten obtener una buena solución rápidamente son los heurísticos, que también pueden ser utilizados para generar la primera solución factible del problema, y entre los que cabe destacar el método de Houthakker y el método de Hammer-Balas

2.2. ORGANIZACIÓN DE LOS CIRCUITOS DE ENTREGA

Además de establecer las cantidades transportadas desde cada fábrica a cada depósito o cliente, el presupuesto de distribución ha de determinar los circuitos que los vehículos han de realizar, constituyendo, frecuentemente, la fase final de las operaciones de distribución y, a veces, la fase inicial del aprovisionamiento [2]. Se recurre a ellos, en particular, para la entrega de mercancías distribuidas en pequeñas cantidades a numerosos clientes.

La organización de los circuitos de entrega consiste en determinar, por una parte, la composición del parque de vehículos necesario y, por otra, las reglas de su utilización cotidiana. Para poder proceder correctamente a la presupuestación, es preciso, ante todo, disponer de informaciones que pueden agruparse en cuatro categorías diferentes:

- Estructura de la demanda y sus fluctuaciones. Se trata de determinar la demanda por unidad de tiempo que debe distribuirse a cada zona, así como el número de clientes a los que hay que servir.
- Grafo de las distancias y de los tiempos recorridos, considerando la posibilidad de que se pueden modificar los valores, por ejemplo, según las estaciones del año (puertos de montaña, niebla, etc.), en grandes aglomeraciones urbanas (condiciones de circulación), etc., por lo que resulta imposible establecer un grafo con valores precisos de los tiempos de recorrido.

- c) Cuantía de los costes de entrega. Así, puede incurrirse en costes fijos, independientes de los kilómetros recorridos, variables proporcionales, progresivos, regresivos u otros. Su cuantificación precisa resulta, en general imposible, por lo que la utilización de números borrosos para tal fin supone una mejor representación de la información disponible.
- d) Métodos de organización de circuitos. Aunque los problemas de organización de circuitos de entrega son frecuentes, la utilización de métodos científicos se encuentra todavía lejos de conocer el desarrollo que justificaría su importancia. Esto es consecuencia, en gran medida, de su naturaleza que hace compleja la construcción de un modelo matemático único para representar los fenómenos de que se trata.

3 PRESUPUESTO DE DISTRIBUCIÓN CON UN ALGORITMO GENÉTICO

3.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Con el presupuesto de distribución se pretende suministrar las cantidades demandadas por los clientes desde las fábricas o los almacenes a un coste mínimo. La información necesaria para establecerlo se refiere a las siguientes variables:

- Número de clientes y sus demandas. La empresa ha de satisfacer las necesidades de sus clientes, siendo las mismas información de tipo previsional. Por ello, se sugiere utilizar números borrosos trapezoidales para representarlas. Así, para n clientes se tiene que:

$$\tilde{C} = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n\}$$

- Número de fábricas y sus producciones. Cada fábrica, tiene un presupuesto de producción establecido para el periodo en estudio. Por ello, se conoce de manera precisa cuál va a ser la cantidad elaborada de cada producto en el período presupuestario.

$$\tilde{F} = \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_m\}$$

- Capacidad del vehículo de cada fábrica. Se supone que cada fábrica dispone de un vehículo para realizar el transporte de sus mercancías a los clientes. El número de viajes que el mismo realice dependerá de su capacidad.

$$\tilde{V} = \{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_m\}$$

- Coste de transporte del vehículo vacío por unidad de distancia. En algunos casos el vehículo deberá realizar recorridos encontrándose vacío. Esto se deberá a que se tiene que rellenar de nuevo para abastecer a otro cliente, una vez agotado su contenido. Además, en el último viaje el vehículo volverá a su fábrica sin llevar nada. Debido a ello, se ha de conocer cual es el coste de transporte del vehículo vacío por unidad de distancia. Así, por ejemplo, si la distancia se mide en kiló-

metros, el coste de transporte será por cada uno de ellos que recorra el vehículo.

$$cv = \{cv_1, cv_2, \dots, cv_m\}$$

- Aumento del coste de transporte por unidad de distancia y por cada unidad de mercancías. Al distribuir cada uno de los productos a los clientes en función de sus necesidades, se aumentan los costes de transporte de los vehículos vacíos. Este aumento se ha de expresar en las unidades de medida de la distancia. Además, la información relativa al mismo no suele ser del todo precisa, por lo que la utilización de los números borrosos trapezoidales permitirá un mejor acercamiento a su representación.

$$\tilde{cv} = \{\tilde{cv}_1, \tilde{cv}_2, \dots, \tilde{cv}_m\}$$

- Distancia entre fábricas y clientes. La distribución se efectúa desde las fábricas a los clientes, siendo necesario conocer la distancia que los separa.

$$D = \begin{bmatrix} D_{11}, D_{12}, \dots, D_{1n} \\ D_{21}, D_{22}, \dots, D_{2n} \\ \vdots \\ D_{m1}, D_{m2}, \dots, D_{mn} \end{bmatrix}$$

- Distancia entre destinos. Si se supone que las mercancías transportadas desde un origen a varios destinos constituyen una ruta, se han de tener en cuenta las distancias que separan dichos destinos, pues determinarán el coste de transporte de la misma. De este modo, se considera que una vez se ha partido de una fábrica se recorren todos los clientes que se abastecen de ella.

$$D' = \begin{bmatrix} -, D'_{12}, \dots, D'_{1n} \\ D'_{21}, -, \dots, D'_{2n} \\ \vdots \\ D'_{m1}, D'_{m2}, \dots, - \end{bmatrix}$$

El planteamiento anteriormente realizado se aleja de las hipótesis de partida de los métodos tradicionalmente utilizados para la elaboración del presupuesto de distribución. Por este motivo, en el presente apartado se plantea la necesidad de recurrir a alguna herramienta diferente, sugiriendo la utilidad un Algoritmo Genético que optimice las rutas de distribución de la empresa en condiciones de imprecisión respecto a la información disponible.

3.1.1. Generación de las soluciones

Las soluciones del problema serán un conjunto de rutas de distribución, compuestas por las cantidades a transportar desde cada origen a cada destino, y el orden en el que estos últimos se van a abastecer. Para codificar cada una de ellas de manera que resulte manejable por el algoritmo, se sugiere utilizar dos matrices de $(n \times m)$ elementos, siendo n el número de fábricas y m el número de clientes.

La primera de ellas contendrá las cantidades que se envían desde cada origen a cada destino. Mientras, la segunda, recogerá el orden en el que se recorren los clientes que abastece cada fábrica. De este modo, se consigue abarcar todas las posibles combinaciones de presupuesto de distribución que se puedan presentar.

3.2.2. Evaluación de las soluciones

Con el fin de seleccionar las mejores soluciones, se evalúa cada una en función de los costes que se incurrirían si se lleva a la práctica dicha solución. De este modo, aquellas que tienen menor coste serán las más interesantes para la empresa.

En concreto, para una fábrica, primero se determina el coste de transportar el vehículo de la misma lleno de mercancías al primer destino. Allí, se descarga la cantidad asignada a ese cliente, siguiendo el vehículo en dirección al segundo destino o volviendo al origen si quedara vacío. Una vez que se han recorrido todos los clientes que la solución determina que abastece dicha fábrica, el vehículo regresará vacío al origen, completándose el circuito. La suma de todos los costes de estos transportes y recorridos será una parte del coste de la solución. Su importe total se obtendrá añadiéndole los costes de la distribución del resto de las fábricas que la solución plantea.

Las soluciones más adecuadas tendrán un menor coste, por ello, la adecuación se puede obtener como la inversa del coste de cada solución.

3.3.3. Proceso de selección

Los individuos que se van a convertir en los padres de la siguiente generación han de ser elegidos por su menor coste de transporte. Para ello, al calcular la adecuación como la inversa del coste de puede utilizar un ranking de selección con ruleta que utilice ésta como indicador de las posibilidades que tiene cada cadena de pasar el proceso de selección.

3.3.4. Operadores de cruce y mutación

Para generar mejores soluciones de las que se disponen en cada generación, se deben cruzar las soluciones buenas que hayan sido seleccionadas en el paso anterior. Al tratarse de cadenas complejas, se ha de practicar un cruce que mantenga la factibilidad en los "hijos". Por ello se realiza un cruce en la matriz representativa de las cantidades a distribuir. Para combinar la información de la matriz de cada solución se ha optado por un cruce especial que trabaja con las matrices de los "padres", obteniendo unos "hijos" con características de ambos.

A partir de los padres se generan los hijos mediante una matriz que contiene el valor medio en enteros de cada celda de las matrices "padres" en aquellos casos en los que coinciden en clientes. De esta forma, los descendientes de las matrices no representarán soluciones factibles al problema, ya que posiblemente los clientes no quedarán

satisfechos y/o las fuentes quedarán descompensadas en cuanto a las cantidades ofertadas por cada una de ellas. Por este motivo, será preciso someter a las soluciones resultantes del cruce a un proceso que permita tratar los individuos no factibles convirtiéndolos en factibles.

Por otro lado, el cruce en las cantidades transportadas trae consigo modificaciones en los circuitos realizados, debido a las consideraciones efectuadas anteriormente, por lo que no se ha considerado necesario realizar un cruce en la matriz representativa de los circuitos, con el objetivo de no alejar en exceso las soluciones resultantes de este operador de los individuos originales seleccionados como padres.

Asimismo, en el algoritmo desarrollado incluye el operador de mutación en las cantidades a distribuir desde cada fuente a cada cliente. Para mutar las matrices y que sigan siendo soluciones factibles se sugiere emplear el siguiente método:

En primer término se selecciona una fábrica de la solución que va a sufrir la mutación (fábrica 1) y un cliente (cliente 1) de la misma que reciba alguna cantidad de mercancías. A continuación se selecciona aleatoriamente otra fábrica (fábrica 2) que tenga un cliente (cliente 2) con una cantidad mayor a la del cliente 1, con la finalidad de poder mutar sus cantidades entre sí, de forma que al cliente 1 en la fábrica 1 y al cliente 2 en la fábrica 2 se les quita la cantidad generada aleatoriamente y, a su vez, al cliente 1 en la fábrica 2 y al cliente 2 en la fábrica 1 se les añade la cantidad.

Por otro lado, al mutar las matrices de las cantidades, las rutas que recorren los vehículos de cada fábrica en la distribución deben ser reasignadas, de forma que las rutas sufren asimismo una mutación como consecuencia de la operativa anterior. Con ello, se consigue modificar la matriz, manteniendo su viabilidad como solución del problema. Con los pasos anteriormente descritos se consigue mutar la matriz de cantidades sin que deje de ser una solución factible al problema.

3.3.5. Condición de parada

Se propone que el algoritmo ejecute un número de generaciones a elección del usuario hasta mostrar la mejor solución alcanzada. Además, con el fin de no perder buenas soluciones se ha introducido el elitismo [7], tratando evita que se pierda la mejor solución de una generación hasta que no sea superada por otra superior en adecuación al problema.

Con las características descritas anteriormente, el Algoritmo Genético desarrollado, permite llevar a cabo un proceso de elaboración del presupuesto de distribución en ambientes inciertos y cuando existe no linealidad en el comportamiento de las variables implicadas.

4. EJEMPLO DE EXPERIMENTACIÓN PRÁCTICA

Con objeto de contrastar el modelo planteado para la elaboración del presupuesto de distribución a continuación se muestra un ejemplo de aplicación práctica, con los valores asociados a cada una de las variables recogidas en la Tabla 1.

Tabla 1: Datos del presupuesto de distribución

Fábrica	Presupuesto producción	Capacidad vehículo	Coste transporte km. Vacío	Aumento transporte por unidad y Km.
A	1000	500	30	(2; 4; 4; 5)
B	2000	700	20	(4; 5; 5; 6)
C	3000	100	40	(1; 2; 2; 3)
D	1000	200	10	(3; 3; 3; 3)

Por otro lado, la empresa abastece a ocho distribuidores diferentes ubicados en distintas localidades, para los cuales se ha estimado la demanda para el período siguiente, siendo representada por los números borrosos trapezoidales de la Tabla 2.

Tabla 2: Demandas previstas

Cientes	Demandas (NBT):
1	(450; 500; 500; 600)
2	(1450; 1500; 1500; 1650)
3	(600; 800; 800; 950)
4	(1500; 1600; 1600; 1650)
5	(600; 600; 600; 600)
6	(450; 500; 500; 550)
7	(950; 100; 100; 1050)
8	(450; 500; 500; 600)

Para realizar una distribución lo más económica posible, la empresa conoce además las distancias en kilómetros que separan sus cuatro instalaciones de los clientes, recogidos en la Tabla 3 y las que separan los clientes entre sí mostrados en la Tabla 4.

Tabla 3: Distancias entre fábricas

	Fábrica A	Fábrica B	Fábrica C	Fábrica D
1	50	30	60	10
2	30	35	40	20
3	35	60	10	40
4	25	40	30	55
5	50	30	60	10
6	40	45	15	30
7	35	30	20	50
8	70	50	20	30

Tabla 4: Distancias entre clientes

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	25	35	40	10	20	50	40
2	40	-	25	45	30	60	70	20
3	25	35	-	30	50	40	30	20
4	40	45	25	-	40	35	55	25
5	40	35	55	10	-	15	50	20
6	20	35	45	50	15	-	35	10
7	40	25	65	40	15	25	-	45
8	10	75	65	55	30	60	70	-

De acuerdo con la información anterior, la empresa desea elaborar su presupuesto de distribución económico, para lo cual es necesario resolver tres cuestiones:

- ¿qué fábricas abastecerán a los diferentes clientes?,
- ¿en qué cantidad? y
- ¿cuál será la ruta que sigan los vehículos en la distribución de las mercancías?

La resolución del problema del ejemplo, utilizando el Algoritmo Genético desarrollado con los valores de los parámetros empleados en la resolución fueron los recogidos en la Figura 4, presenta los resultados tanto para los lotes a distribuir desde cada fábrica a cada cliente, como para los circuitos a realizar en ese proceso de distribución, recogidos en las figuras 4 y 5.

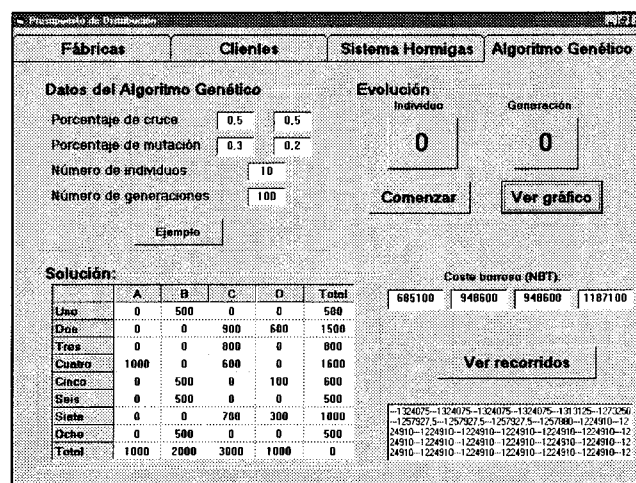


Figura 4

Como se puede observar en la Figura 4, para este presupuesto de distribución, el coste que se estima incurrir en el período analizado es:

$$\text{Coste borroso de transporte (NBT)} = \\ = (739.690, 1.031.595, 1.031.595, 1.277.145)$$

Fábrica A
 Orden: 4 4
 Volumen: 500 500

Fábrica B
 Orden: 6 1 5 1 1 8
 Volumen: 500 200 500 200 100 500

Fábrica C
 Orden: 2 7 3 4 4 7
 Volumen: 900 100 800 200 400 600

Fábrica D
 Orden: 6 2 7 7 2 2 2
 Volumen: 100 100 200 100 100 200 200

Figura 5

Finalmente, como contraste de la efectividad del modelo planteado, en la Figura 6 se muestra la evolución que experimentó el coste esperado en cada generación, pudiendo observarse la tendencia decreciente que el mismo experimenta a medida que se suceden las generaciones.

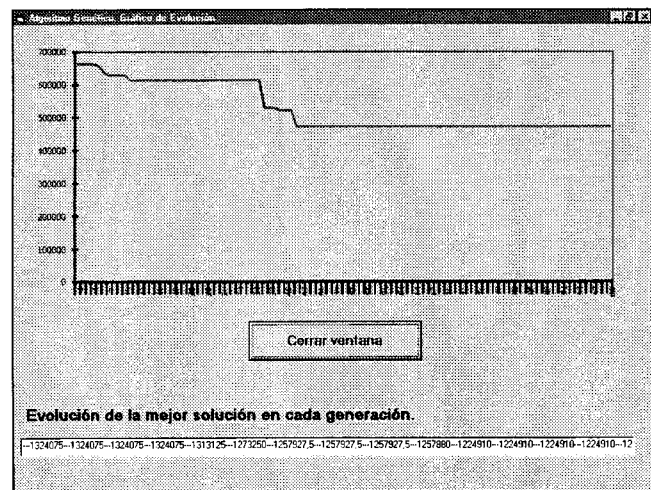


Figura 6

Referencias

- [1] Anderson, D.; Sweeney, S. y Williams, T. *Introducción a los modelos cuantitativos para administración*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1993.
- [2] Arbones, E. *Logística Empresarial*, Marcombo, Barcelona, 1990.
- [3] Camm, J. y Evans, R. *Management Science: Modeling Analysis and Interpretation*. International Thomson Publishing, Cincinnati, 1995.
- [4] Charnes, A. y Cooper, W.W. *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, John Wiley, Nueva York, 1964.
- [5] Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963.
- [6] Eppen, G. y Gould, F. *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*, Prentice-Hall, México, 1987.
- [7] Goldberg, D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison Wesley, Boston, 1989.
- [8] Hillier, F. y Lieberman, G. *Introduction to Operations Research*, Holden-Day, San Francisco, 1980.
- [9] Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Hispano Europea, Barcelona, 1987.
- [10] Kotler, P. *Marketing Management: Analysis, Planning, Implementation and Control*, Prentice-Hall, London, 1991.
- [11] López González, E. y Rodríguez Fernández, M.A. Genetic Optimisation of a Fuzzy Distribution Model, *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management*, Vol. 30, nº 7/8, pp. 681-696, 2000.
- [12] Rodríguez Fernández, M. La Gestión Presupuestaria ante incertidumbre y no linealidad: Aplicación de los Algoritmos Genéticos y la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, *Tesis Doctoral*, Servicio de Publicaciones y Medios Audiovisuales, Universidad de León, 1998.

CONSTRUCCIÓN DE UN SISTEMA EXPERTO BORROSO PARA LA ORIENTACIÓN PROFESIONAL

M^a Belén Vaquerizo García
Universidad de Burgos
belvagar@ubu.es

Cristina Mendaña Cuervo
Universidad de León
ddecmc@unileon.es

Enrique López González
Universidad de León
ddeelg@unileon.es

Resumen

La elección de una profesión que se adecue a las expectativas de una persona implica clarificar y considerar sus intereses y cualidades, diferenciando entre vocación y profesión.

Debido a las dificultades que entraña esta decisión y al elevado número de variables que la afectan, en el presente trabajo se trata de diseñar un sistema experto que sirva de ayuda en este proceso de decisión. Asimismo, y dado que las variables relevantes para afrontar esta decisión son en muchos casos difícilmente expresables en términos numéricos, en la implementación del sistema se ha optado por su consideración como variables lingüísticas, lo que facilita asimismo la utilización del modelo para los usuarios finales.

Palabras Clave: Profesión, Vocación, Orientación Profesional, Sistemas Expertos

1 INTRODUCCIÓN

La diferencia entre vocación y profesión [2] permite comprender con mayor precisión en qué consisten las acciones que corresponden a la Orientación Profesional [1], y conocer en qué medida se manifiestan los intereses vocacionales, las aptitudes, actitudes y valores de la persona.

Al referirse a la vocación se hace referencia a la persona en sí misma, a sus inquietudes, gustos, objetivos y metas; por tanto, es algo subjetivo e interno que se elige mediante el conocimiento personal. Sin embargo, la profesión hace referencia a algo externo, es acción, y en definitiva representa lo que permitirá satisfacer a la persona su vocación.

La elección de la profesión precisa de una evaluación de elementos como áreas vocacionales [4], familia de profesiones, perfiles de carreras, características específicas de las universidades –recursos que ofrece, prestigio, etc.–, condiciones familiares, etc.

Por tanto se trata de una decisión afectada por múltiples variables, no siempre contempladas en una elección personal. Por este motivo, en el presente trabajo se ha diseñado un sistema experto borroso, con carácter eminentemente práctico, que trata de ofrecer una atención personalizada y diligente al usuario, siguiendo una estrategia decisional encaminada a la determinación de la Orientación Profesional de cualquier persona, que le ayude a diferenciar entre vocación y profesión y a tener un mejor conocimiento de sí mismo, mediante la evaluación de comportamientos, aptitudes y actitudes diferenciadas (intereses y rasgos de personalidad) que le habilitan al perfil profesional que desea, con el objetivo de ayudar a tomar una decisión acertada.

Para ello, en el siguiente apartado se realiza una breve referencia a la Orientación Profesional desde la perspectiva de las distintas opciones genéricas a las que puede acceder una persona.

En el tercer apartado se realiza la descripción del modelo implementado, analizando las distintas variables incorporadas, y se describe el desarrollo del sistema y su implementación.

En el cuarto apartado se explica el funcionamiento de la aplicación con un ejemplo práctico que puede facilitar la comprensión del modelo implementado.

Para finalizar en el quinto apartado se recogen las conclusiones del trabajo realizado, con una breve referencia a las líneas de actuación futuras que han surgido como consecuencia de este desarrollo.

2 LA ORIENTACIÓN PROFESIONAL

Durante la formación de la persona, un aspecto que le afecta es la difícil tarea de elegir una profesión [7], ya que esta decisión suele marcar el estilo de vida futuro y, por ello, puede ser deseable tratar de proporcionarle un espacio y una metodología para desarrollar las habilidades necesarias para decidir sobre su vida profesional [8], [9].

De hecho, los Perfiles Profesionales surgen como la forma de desarrollar las diferentes capacidades aptitudinales necesarias en el trabajador para llevar a cabo su profesión, las condiciones ambientales del puesto de trabajo, los riesgos profesionales, las equivalencias para la certificación de la profesión y las salidas al mercado de trabajo.

En este sentido, en el modelo implementado se trata de definir un conjunto de acciones encaminadas a apoyar a cualquier persona sobre su Orientación Profesional. En concreto, puede ser de especial interés para aquellas personas que se encuentren básicamente en dos situaciones: estudiantes que están terminando sus estudios y deben tomar la decisión sobre el tipo de trabajo, y trabajadores que no están satisfechos con su desempeño profesional o bien que han descubierto que su profesión actual no les aporta las satisfacciones esperadas.

En definitiva, se trata de ofrecer ayuda para definir una posible Orientación Profesional [3], evaluando las capacidades iniciales de la persona como pronóstico de éxito al elegir una profesión. Para ello, partiendo de un análisis sobre sus datos personales, académicos y laborales, se trata de mostrar un "Asesoramiento", habiendo previamente evaluado sus capacidades iniciales como pronóstico de éxito en las distintas áreas profesionales a las que puede acceder la persona, y que en sentido genérico pueden ser las siguientes:

- Trabajar en la Administración o Empresa Pública (aconsejándole opositar).
- Dedicarse a la docencia.
- Trabajar en la Empresa Privada.
- Crear su propia Empresa, y en este caso en particular, se requerirá un estudio más exhaustivo sobre la personalidad del individuo, características psicológicas y sociológicas, a fin de determinar su posible espíritu emprendedor.

3 SISTEMA EXPERTO BORROSO PARA LA ORIENTACIÓN PROFESIONAL

En este apartado se trata de describir el modelo implementado, cuyos objetivos han sido expuestos con anterioridad. Para ello se expone de forma resumida el trabajo realizado con las diferentes variables así como el desarrollo del modelo y la implementación del mismo.

Dado que las opiniones emitidas por el usuario final del modelo de decisión acerca de las variables relevantes para el mismo son más fácilmente evaluadas mediante valoraciones borrosas [5] [12], el desarrollo ha sido efectuado bajo la hipótesis de información vaga o incierta.

Asimismo, y con la finalidad de dotar al sistema de generalidad, se ha intentado abarcar el mayor número de variables posibles con incidencia en la variable de salida, a fin de que se pueda analizar como un modelo completo. En concreto, se ha incorporado un total de 17 variables borrosas, de forma que para cada una de ellas se determinan sus posibles estados –referidos mediante etiquetas lingüísticas– y los dominios de cada uno de los subconjuntos borrosos representativos de tales estados. Un ejemplo de la representación de alguna de estas variables se muestra en la Figura 1.

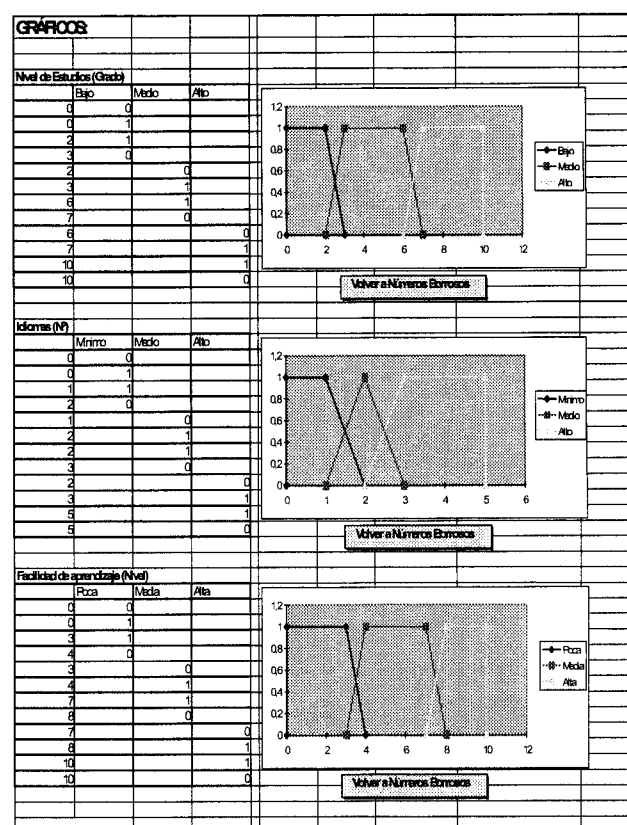


Figura 1: Ejemplo de representación de la borrosidad de las variables utilizadas en el Modelo.

Posteriormente, se determina el grado de verdad de cada una de las etiquetas lingüísticas de cada variable, permitiendo establecer las reglas borrosas de producción existentes entre ellas. La definición de estas reglas de producción se muestra en la Figura 2.

Para manejar e interpretar esta gran cantidad de información, la aplicación trabaja sobre una base de datos de Microsoft Access y presenta al usuario una interfaz gráfi-

ca fácilmente entendible con ayudas explicativas por cada campo a informar. El funcionamiento está basado en diferentes tipos consultas, haciendo que la generación de código sea mínima, lo que facilita la reutilización directa de esta aplicación así como su ampliación en otras posteriores, con sólo transportar las consultas deseadas. Asimismo, esta forma de proceder permite que pueda ser directamente convertida a posteriores versiones.

Años Trabajando: Bajo				
Cursos Prácticos				
Prácticas en Empresas		Bajo	Medio	Alto
	Bajo	Bajo	Bajo	Medio
	Medio	Bajo	Medio	Medio
	Alto	Medio	Medio	Medio
Años Trabajando: Medio				
Cursos Prácticos				
Prácticas en Empresas		Bajo	Medio	Alto
	Bajo	Bajo	Medio	Medio
	Medio	Medio	Medio	Medio
	Alto	Medio	Medio	Alto
Años Trabajando: Alto				
Cursos Prácticos				
Prácticas en Empresas		Bajo	Medio	Alto
	Bajo	Medio	Medio	Medio
	Medio	Medio	Alto	Alto
	Alto	Alto	Alto	Alto

Figura 2: Ejemplo de construcción de reglas de producción

Por tanto, se consigue facilitar el entendimiento y posterior mantenimiento de la aplicación por cualquier usuario, no exigiéndole grandes conocimientos informáticos ni técnicos del programa, lo que le dota de la generalidad necesaria para ser utilizado por cualquier usuario final.

Asimismo, esta implementación aporta al modelo las ventajas de robustez, reutilización, completitud, corrección y facilidad de comprensión, de mantenimiento, de adaptabilidad a cambios –fácilmente modificable–, de manejo, y de integración en otras aplicaciones.

3.1 DESARROLLO DEL SISTEMA

El desarrollo del modelo precisa en primer término de un estudio de las diferentes variables consideradas. Para ello, las variables a considerar del individuo se ha agrupado en:

- **Variables de Entrada.** Representan aquellas variables que recogen datos: Académicos –nivel de estudios y formación que posee el individuo–, Laborales –experiencia profesional–, y Personales –características personales del individuo–.

- Variables Intermedias y
- Variables de Salida.

Las combinaciones posibles entre las variables de entrada para obtener las variables intermedias se realiza mediante unas reglas de producción diseñadas al efecto [6], que darán valor a todas las combinaciones posibles. Esto permite determinar los valores para los términos lingüísticos de las variables intermedias. De forma análoga se actúa para las posibles relaciones entre las variables intermedias, obteniendo así en sucesivos niveles nuevas variables que el experto haya definido.

Estas reglas de producción se crean mediante la ejecución de una consulta cuya misión es combinar todos los posibles valores que pueden tomar las variables de entrada.

En cuanto a la variable final “Orientación Profesional”, es el resultado de los datos anteriormente validados, y trata de aconsejar al individuo sobre las diferentes salidas consideradas, que en concreto son las 4 posibles salidas [11] que se han implementado para la variable final, a saber:

- **Montar su propia empresa:** Esta será la salida del sistema si el individuo tiene un gran espíritu emprendedor (activo, dinámico, etc.), es joven, no tiene necesidad inmediata de ganar dinero, etc. No obstante, somos conscientes de que en este caso, además, se deberían analizar aspectos sociológicos y psicológicos de la persona.
- **Opositar:** Esta salida se mostrará si el individuo tiene cualidades en el estudio derivadas de una formación académica alta, es joven, tiene preferencia en trabajos de la Administración con horarios fijos, no tiene una necesidad inmediata de dinero y no tiene preferencia en trabajos especializados.
- **Orientarse por la docencia:** En general, esta es una profesión vocacional, por lo que esta salida se dará si el individuo tiene como características ser joven, tener una formación académica alta y experiencia previa en ese sector, no tener un espíritu emprendedor ni preferencias por trabajos especializados, ni necesidades inmediatas de ganar dinero, disponer de tiempo para estudiar, etc.
- **Trabajar en una empresa privada:** Esta salida se producirá en aquellos casos en los que el individuo demuestre necesidad inmediata de ganar dinero, no es muy joven, disponibilidad de tiempo, no es necesario que tenga una formación académica muy alta, tiene preferencia por realizar trabajos cualificados, no tiene problemas de movilidad, no tiene espíritu emprendedor.

En el desarrollo del modelo se han considerado las salidas anteriores. No obstante, de acuerdo con las consideraciones efectuadas con anterioridad sería posible incorporar nuevas variables de salida, en función de los objetivos que se persigan.

4 FUNCIONAMIENTO DE LA APLICACIÓN

En cuanto al empleo del modelo desarrollado, en el presente apartado se trata de describir el funcionamiento del mismo, mediante un ejemplo de aplicación práctica que permita mostrar el desarrollo efectuado.

De forma somera, los puntos básicos seguidos para la implementación del modelo se pueden concretar en los siguientes: - Definición de Modelos, - Definición de Etiquetas de Estado de Variables de Modelos, - Definición de Variables de Modelos, - Definición de Estados de Variables de Modelos, - Definición de Relaciones de dependencia entre variables de modelo y - Definición de las Reglas de los Modelos.

Las variables de entrada, debido a sus características antes definidas, deben ser informadas todas ellas de forma obligatoria. En la Figura 3 se muestra el formulario tipo utilizado, en el que se puede observar asimismo el sistema de ayuda implementado para facilitar la comprensión de los valores posibles de las diferentes variables.

Sistema inteligente para Orientación Profesional

Nivel de Estudios: 6,5

Idiomas: 2

Facilidad de aprendizaje: 3,5

Años trabajando: 4

Prácticas en Empresa: 22

Cursos: 45

Necesidad de dinero: 6

Predilección por un horario fijo: 2

Edad: 26

Cargas Familiares: 2,5

Valore su nivel de estudios de 0 a 10. Guíese por la aproximación:

0: Sin Estudios	2: Estudios Primarios
4: Estudios Secundarios	6: Bachillerato
8: Carrera Técnica	10: Carrera Superior y Doctorado

Ej: Si tiene una titulación de carrera media, y está finalizando los estudios de una carrera superior, puede introducir 8,7

Figura 3: Formulario para la captura de datos

En concreto, cada variable tiene tres posibles estados etiquetados, de los cuales sólo estará en uno. Mediante el valor numérico dado a esa variable el modelo le asociará a uno de esos 3 estados.

El usuario dispone de una ayuda interactiva que le ayuda a valorar cada campo, por la que según se va situando en los diferentes campos a rellenar, se le informa sobre el significado de cada campo, sus valores y rangos posibles, permitiendo conocer la definición de estados de esa variable (números borrosos, que en principio quedan ocultos al usuario). En función de dicha información, el usuario valora cada campo conociendo la veracidad de la información introducida.

Finalmente, el sistema mostrará la variable final, es decir, el resultado de su posible Orientación Profesional, a través de una pantalla similar a la que muestra la Figura 4.

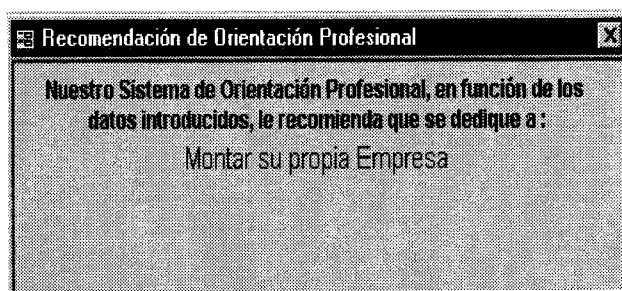


Figura 4: Ejemplo de una posible salida del Sistema

Sin embargo, debido a la borrosidad se pueden obtener dos resultados diferentes, como muestra la Figura 5. En este caso sería preciso analizar nuevas variables, o realizar de nuevo el proceso ajustando los valores de las variables de forma más precisa.

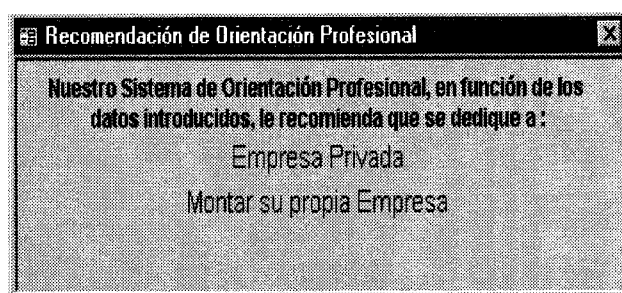


Figura 5: Ejemplo de una salida consecuencia de la borrosidad

Otra funcionalidad añadida es la posibilidad de acceder a dos consultas interesantes que se habrán generado y que darán la Fuzzificación y posterior Defuzzificación de la variable de salida del modelo que se haya ejecutado:

- Fuzzificación: Consulta "PASO_5 Fuzzificación".
- Defuzzificación: Consulta "PASO_6 Defuzzificación".

A efectos ilustrativos, la defuzzificación[10] de la variable de salida se recoge en la Figura 6.

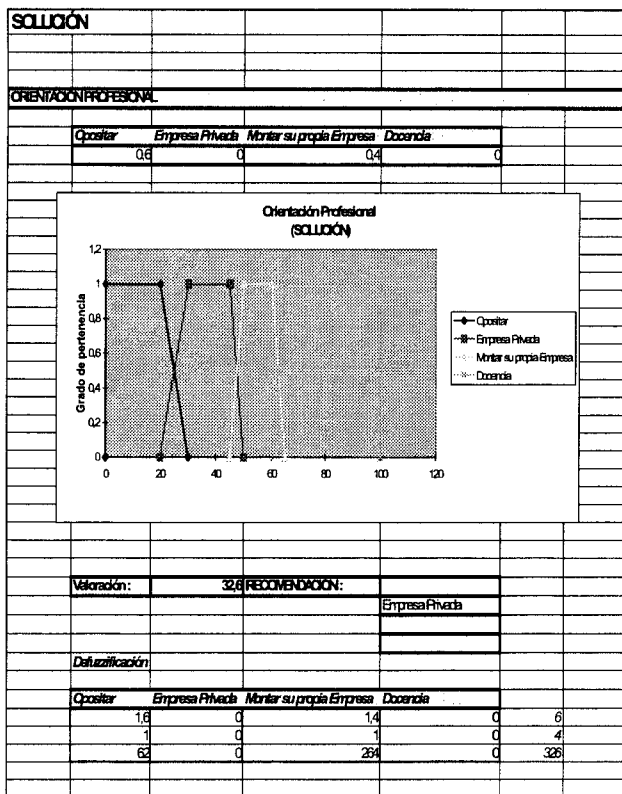


Figura 6: Defuzzificación de la variable de salida

5. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

En la actualidad no se dispone de ningún modelo con el que un individuo pueda autoevaluarse para analizar su posible Orientación Profesional, de ahí que con el desarrollo de este trabajo se haya conseguido aportar, mediante la construcción de un Sistema Experto Borroso, un instrumento para realizar dicho análisis, con una implementación de fácil manejo para cualquier usuario no familiarizado con la informática y que permite ser directamente modificable o reutilizable en posibles líneas futuras.

El desarrollo de este sistema experto borroso supone, por tanto, el principio de la informatización en el campo de la orientación personal en el ámbito profesional.

El desarrollo del trabajo presentado nos ha permitido asimismo comprobar que el mismo podría ser fácilmente ampliado y aplicado en otras situaciones y circunstancias, con independencia de las posibles mejoras a incorporar en modelo presentado. En concreto, el modelo podría servir para aspectos como los siguientes:

- Ofrecer al profesional una orientación personalizada, sistemática y coherente con su perfil, que le permita su máximo desarrollo personal y profesional, una

orientación eficaz de su carrera profesional y realizar las acciones formativas más adecuadas.

- Ofrecer a las empresas un sistema ágil de información de sus trabajadores sobre su nivel de cualificación, potencialidad y desarrollo de su carrera profesional, y gestionar toda la información relevante sobre la evolución de las profesiones y el contenido de los puestos de trabajo.
- Acercar la realidad del mundo laboral al ámbito educativo, facilitando a los estudiantes un instrumento que les permita orientar su formación en función de su vocación y la profesión que mejor permita satisfacer dicha vocación.
- Mostrar la existencia de muchos perfiles profesionales lo que implica características personales, de estudios y preparación muy diferentes.
- Proporcionar a cada participante su propio consejo orientador.
- Ofrecer un servicio de información actualizada sobre opciones académicas y salidas profesionales.
- Concienciar a la sociedad en general sobre la importancia de la Orientación Profesional como clave del futuro de nuestra juventud, mostrando la preocupación y las actividades de los agentes económicos y sociales tendentes a lograr una mejor preparación para la vida activa durante todo el periodo de escolarización.

Por tanto, al individuo se le permitirá:

- Un mejor conocimiento de sí mismo: Identificar sus aptitudes, valores, intereses y rasgos de personalidad, clarificar y tener conciencia de que se conforme su perfil con el fin profesional.
- Un mejor conocimiento del medio ambiente: Analizando características diferenciadoras de cada profesión en base a que el individuo pueda preparar su perfil profesional desde antes de decidirse a estudiar una determinada Carrera Universitaria u otros estudios de Formación. Se deberían: conocer las características y variables de agrupamiento de las distintas profesiones, comparar las diferentes áreas de conocimiento y las profesiones que las conforman, identificar y evaluar los requisitos de ingreso, curso y culminación de las profesiones de su interés, diferenciar las oportunidades que ofrecen los diversos ambientes ocupacionales e investigar el mercado laboral actual.
- Toma de decisiones: Diseñando una estrategia decisional se le puede ayudar a elaborar su perfil profesional, integrando los elementos del conocimiento de sí mismo y del ambiente, y justificando así las opciones de elección con base en las variables consideradas en el punto anterior.

Referencias

- [1] R. Bohoslavsky. *Orientación Vocacional*, Editorial Oikos-Tau, España, 1982
- [2] J. Cueli. *Vocación y Afectos*, Editorial Limusa. México, 1979
- [3] J. Hayes y B. Hopson. *La Orientación Vocacional en la Enseñanza Media*, Editorial Oikos-Tau, España, 1982
- [4] Holland. *Elección Vocacional*, Editorial Trillas. México, 1978
- [5] E. López González. *La Construcción de Sistemas Inteligentes (Control Borroso) en Hoja Electrónica de Cálculo para la Toma de Decisiones de Gestión en Ambiente de Incertidumbre*, Curso Mestrado em Contabilidade e Auditoria, Universidade do Minho. Braga, Portugal
- [6] E. López González. *Diseño de Sistemas Inteligentes de Gestión Empresarial. Material Docente para la asignatura SIGE*, Dpto. de Dirección y Economía de la Empresa, 2000
- [7] Oliver. *Elección de Carrera*, Nueva edición. Editorial Limusa. México, 1989
- [8] B. Rimada Rimada. *Manual de Orientación Profesional Universitaria, Libro del alumno*, Editorial Trillas, 1993
- [9] B. Rimada. *Manual de Orientación Profesional Universitaria, Guía del Docente*, Editorial Trillas, 1994
- [10] M. Sugeno y T. Yasukawa. A Fuzzy Logic-Based Approach to Linguistic Modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 1, págs. 7-31.
- [11] P. Tolbert. *Técnicas del Asesoramiento Profesional*, Editorial Oikos-Tao. España, 1986
- [12] L.A. Zadeh. Fuzzy Logic=Computing with Words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 4, págs. 103-11, 1996

UN ENFOQUE SEMI-SUPERVISADO PARA EL FILTRADO PERSONALIZADO DE INFORMACION BASADO EN RED NEURONAL SOFTMAX

Rocío Alaiz-Rodríguez

Dpto. de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Universidad de León
dierar@unileon.es

Jesús Cid-Sueiro

Dpto. de Tecnologías de las Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid
jcid@tsc.uc3m.es

Resumen

La obtención de suficientes ejemplos etiquetados para realizar el entrenamiento en tareas como la de filtrado de información es a menudo costoso. Sin embargo, es posible conseguir fácilmente multitud de documentos sin etiquetas que en principio carecen de valor para un proceso de aprendizaje supervisado a menos que se etiqueten. En este artículo se describe: (a) Cómo un filtro de información basado en una red neuronal entrenada por minimización de una función de coste SSB puede sacar provecho de los datos no etiquetados por medio de un proceso de minimización de entropía y (b) cómo reducir el número necesario de datos etiquetados empleando la técnica de aprendizaje activo que pide en fases sucesivas el etiquetado de aquellos documentos más informativos.

Palabras Clave: Redes neuronales, Filtrado de información, Clasificadores Bayesianos.

1 INTRODUCCIÓN

El creciente interés en el desarrollo de sistemas de filtrado de información [2] [8],[5] ha sido motivado esencialmente por la disponibilidad de cantidades ingentes de información en formato electrónico. A pesar del volumen de información disponible, ni el tiempo ni las capacidades individuales de los usuarios son suficientes para procesarla resultando muy deseables hoy en día sistemas personalizados de filtrado de información. Se han propuesto diferentes enfoques para el filtrado de documentos entre los que se incluyen los K-vecinos más próximos [5], árboles de decisión [7], clasificadores probabilísticos Bayesianos [7] [8], redes neuronales [5], redes Bayesianas [2].

Investigaciones anteriores muestran que resulta difícil para los usuarios establecer de forma precisa su necesidad de información. Sin embargo, fácilmente pueden identificar aquellos documentos que satisfacen sus intereses. Esto sugiere que la opción más ventajosa sea recurrir a una aproximación de aprendizaje supervisado en la que se modele el perfil de necesidad de información con documentos etiquetados por el usuario. Cada documento será etiquetado como *relevante* cuando responda a las necesidades de información del usuario o *no-relevante*, en caso contrario. Aunque el rendimiento del filtro de información se incrementa con el número de documentos etiquetados disponibles en la fase de entrenamiento, esta tarea es un proceso manual, siendo por lo tanto, muy costoso tanto en tiempo como en recursos. Por el contrario, la obtención de datos no-etiquetados resulta generalmente un proceso apenas costoso.

En [8] se aprovechan los datos no etiquetados combinando el algoritmo EM (Expectation-Maximization) con un clasificador Naive Bayes para asignar etiquetas a aquellos documentos que carecen de ella, mientras que en [1], con una estrategia de *co-entrenamiento*, se entrenan dos clasificadores cada uno con representaciones diferentes de los mismos documentos, para posteriormente etiquetar documentos para el otro clasificador.

En este trabajo se utiliza una red neuronal *softmax* como filtro de información proponiendo un método de entrenamiento semi-supervisado que permite incorporar documentos no-etiquetados en el entrenamiento. Resulta especialmente útil en aquellos casos en que los ejemplos etiquetados disponibles sean escasos.

Aún cuando el usuario dispusiera de recursos suficientes para realizar un proceso de etiquetado exhaustivo existe un riesgo implícito, debido a la aleatoriedad del proceso, de etiquetar documentos redundantes que no aporten información en la fase de entrenamiento. Proponemos la realización de un aprendizaje activo

para solicitar el etiquetado de los documentos más informativos de entre los documentos no-etiquetados disponibles.

Un sistema de aprendizaje activo óptimo solicitaría el etiquetado de aquellos documentos para los que una vez conocida su etiqueta e incorporados al entrenamiento del filtro, reducirán en mayor medida el error en el proceso de filtrado.

El sistema de aprendizaje activo propuesto se fundamenta en la medida del grado de desacuerdo de las decisiones emitidas por los miembros de un comité de sistemas de filtrado de documentos. [4] [8]

Los resultados experimentales muestran una reducción en un factor superior a 15 en el número de datos etiquetados necesarios en la fase de entrenamiento para conseguir filtros de información del mismo rendimiento.

Este trabajo está organizado como sigue: En la sección 2 se describe la arquitectura de la red neuronal utilizada y el entrenamiento de la misma. La sección 3 explica la técnica utilizada para incorporar datos no-etiquetados en el entrenamiento de la red neuronal en forma de entrenamiento semi-supervisado. La técnica propuesta de aprendizaje activo se describe en la sección 4. Finalmente, la sección 5 muestra los resultados experimentales obtenidos en la colección de artículos de la agencia Reuters, *Reuters-21578*.

2 ARQUITECTURA DEL PERCEPTRÓN SOFTMAX

Considérese el conjunto de datos $\mathcal{S} = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{d}_k), \mathbf{k} = 1, \dots, \mathbf{K}\}$ donde $\mathbf{x}_k$ es un vector de observación y $\mathbf{d}_k \in \mathcal{U}_L = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_L\}$ es un elemento del conjunto de salidas posibles. La salida $\mathbf{u}_i$ es un vector unitario L -dimensional, donde cada componente es igual a cero excepto la i -ésima componente, que toma el valor uno.

Las decisiones blandas, y_i , proporcionadas por esta red cuya arquitectura se muestra en la Figura 1 vienen dadas por $y_i = \sum_{j=1}^{M_i} y_{ij}$ donde

$$y_{ij} = \frac{\exp(w_{ij}^T x)}{\sum_{k=1}^L \sum_{l=1}^{M_k} \exp(w_{kl}^T x)} \quad (1)$$

siendo L el número de clases, M_i el número de salidas de la softmax utilizadas para calcular y_i y $w_{j,k}$ los vectores de pesos. Nos referiremos a esta red como *Perceptron Softmax Generalizado* (GSP-Generalized Softmax Perceptron).

El entrenamiento del clasificador se basa en la minimización de una estimación empírica de $E\{C(\mathbf{y}, \mathbf{d})\}$. La función de coste $C(\mathbf{y}, \mathbf{d})$ utilizada en este trabajo es una función de coste SSB (*Strict Sense Bayesian*)

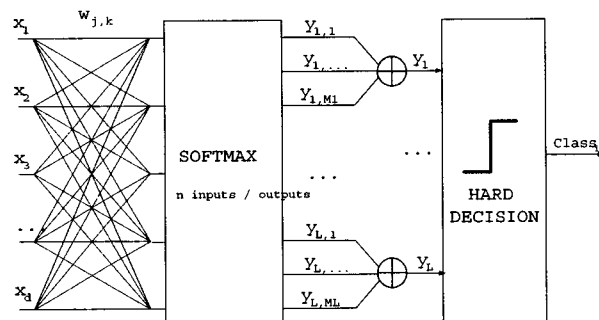


Figura 1: Perceptrón Softmax Generalizado

[3] siendo mínima cuando las salidas blandas del clasificador son estimaciones de probabilidades a posteriori de pertenencia a una clase, esto es, $y_i^k = P\{\mathbf{d}^k = \mathbf{u}_i | \mathbf{x}^k\}$.

En [3], se muestra que cualquier función de coste SSB puede ser expresada como

$$C(\mathbf{y}, \mathbf{d}) = H(\mathbf{y}) + (\mathbf{d} - \mathbf{y})^T \nabla_y H(\mathbf{y}) \quad (2)$$

donde $H(\mathbf{y})$ es una entropía generalizada y ∇ es el operador gradiente.

En este trabajo se usa la entropía de Shannon

$$H(\mathbf{y}) = - \sum_{i=1}^L y_i \log y_i \quad (3)$$

siendo la función de coste correspondiente a la entropía dada por (3), la *entropía cruzada o relativa* (4)

$$C(\mathbf{y}, \mathbf{d}) = - \sum_{i=1}^L d_i \log y_i \quad (4)$$

El aprendizaje supervisado se basa en la minimización empírica de esta función de coste en el conjunto de datos de entrenamiento etiquetados.

3 PRINCIPIO DE MINIMIZACIÓN DE ENTROPÍA HM

Considérese el conjunto de datos observados $\mathcal{S}_O$ constituido por datos etiquetados y datos no-etiquetados, $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_L \cup \mathcal{S}_U$ siendo $\mathcal{S}_L = \{\mathbf{x}^k, \mathbf{d}^k\}$ y $\mathcal{S}_U = \{\mathbf{x}^k\}$ los conjuntos de datos etiquetados y datos no-etiquetados, respectivamente.

Puede conseguirse una mejora del rendimiento mediante la utilización de datos no-etiquetados para minimizar el término de entropía generalizada en Eq.(2)

puesto que dicho término es independiente de la etiqueta asignada al vector de entrada.

Se usarán, pues, los datos etiquetados para la minimización de la función de coste y los datos no etiquetados permitirán minimizar la entropía asociada a dicha función de coste.

El aprendizaje se basa en la minimización del riesgo empírico (5) donde K es el número total de datos disponibles (etiquetados y no-etiquetados) y K_l el número de datos etiquetados del conjunto de entrenamiento.

$$R(\mathbf{w}, S) = \frac{1}{K} \sum_{\mathbf{x}^k \in S_O} H(\mathbf{y}^k) + \frac{1}{K_l} \sum_{\mathbf{x}^k \in S_L} (\mathbf{d}^k - \mathbf{y}^k)^T \nabla_{\mathbf{y}} H(\mathbf{y}^k) \quad (5)$$

4 APRENDIZAJE ACTIVO EN EL PROCESO DE FILTRADO

La técnica de aprendizaje activo solicita el etiquetado por parte del usuario de los documentos más informativos para la inducción del filtro de información. Esto permite reducir el número de documentos etiquetados necesarios para conseguir un determinado rendimiento en el filtro con respecto a la realización de un proceso de etiquetado aleatorio.

El proceso de selección propuesto se fundamenta en la creación de un comité constituido por varios clasificadores que han sido entrenados con el principio de minimización de entropía (HM) descrito en la sección anterior, sobre conjuntos disjuntos de datos no-etiquetados. El desacuerdo en las clasificaciones realizadas por cada uno de los miembros del comité sobre el conjunto de datos no-etiquetados disponibles determina el proceso de selección de documentos. Finalmente, aquellos documentos para los que existe más desacuerdo entre los miembros del comité son seleccionados para el etiquetado. Una vez etiquetados, son incluidos en el conjunto de datos de entrenamiento, y posteriormente podrá constituirse un nuevo comité para la petición de un nuevo conjunto de etiquetas.

Puesto que las salidas blandas y_i de una red neuronal entrenada por minimización de una función de coste SSB son estimaciones de probabilidades a posteriori de pertenencia a una clase, el desacuerdo entre las salidas del filtro se cuantifica con la divergencia Kullback Leibler (KL) con respecto al valor medio [8]. Es un promedio de la divergencia KL, $D(\cdot||\cdot)$, entre cada distribución P_k , y la media de todas las distribuciones P_{avg} , siendo N el número de miembros de comité.

$$Métrica\ desacuerdo = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D(P_k||P_{avg}) \quad (6)$$

La divergencia $D(\cdot||\cdot)$ entre dos distribuciones P_1 y P_2 viene dada por la siguiente expresión

$$D(P_1||P_2) = \sum_{i=1}^L P_1(\mathbf{d} = \mathbf{u}_i|\mathbf{x}) \log \frac{P_1(\mathbf{d} = \mathbf{u}_i|\mathbf{x})}{P_2(\mathbf{d} = \mathbf{u}_i|\mathbf{x})} \quad (7)$$

siendo L el número de clases consideradas por el clasificador.

Para el caso particular con $L = 2$ (Dos clases: relevante y no-relevante), la expresión simplificada de divergencia se corresponde con

$$D(P_1||P_2) = P_1(\mathbf{u}_1|\mathbf{x}) \log \frac{P_1(\mathbf{u}_1|\mathbf{x})}{P_2(\mathbf{u}_1|\mathbf{x})} + P_1(\mathbf{u}_2|\mathbf{x}) \log \frac{P_1(\mathbf{u}_2|\mathbf{x})}{P_2(\mathbf{u}_2|\mathbf{x})} \quad (8)$$

donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ son la clase *relevante* / y *no-relevante*, respectivamente, y $P_k(\mathbf{u}_1|\mathbf{x})$ es una representación abreviada de $P_k(\mathbf{d} = \mathbf{u}_1|\mathbf{x})$.

Los documentos sobre los que existe mayor desacuerdo son seleccionados para el etiquetado y junto con los datos etiquetados disponibles previamente, se construye un sistema de filtrado de información que puede ser iterativamente ajustado siempre que exista interacción con el usuario.

Igualmente, puede combinarse la utilización del aprendizaje activo junto con el empleo de datos no etiquetados (Aprendizaje activo + Entrenamiento semi-supervisado con HM). Para ello, se seleccionan como documentos no-etiquetados empleados en el proceso de entrenamiento semi-supervisado, aquellos sobre los que existe menos desacuerdo en las decisiones de los miembros del comité.

5 RESULTADOS EXPERIMENTALES

5.1 Colección de datos Reuters

En nuestros experimentos hemos utilizado la colección Reuters 21578¹. Este corpus está constituido por 21578 artículos de noticias sobre temas financieros (*acquisitions, crude, grain, earnings, interest*) originalmente publicadas por la agencia Reuters en el año 1987. Cada artículo ha sido clasificado de forma manual en una o varias de las 135 categorías predefinidas. Utilizando la división *ModApte* y centrando el estudio para las 10 categorías más numerosas se dispone de

¹La colección de test Reuters-21578 está disponible en <http://www.research.att.com/~lewis/reuters21578.html>

un total de 6013 documentos en el conjunto de entrenamiento y 2586 en el de test.

5.2 Preprocesado de los documentos

La colección se indexó utilizando el motor de recuperación SMART² para realizar:

- Extracción de palabras
- Eliminación de palabras sin contenido semántico (*stop words*)³
- Lematización o tratamiento de sufijos (*stemming*)
- Asignación de pesos $tf.idf$ para cada i -ésimo término según $x_{i,D} = tf_{i,D} \log \frac{N}{df_i}$ donde $tf_{i,D}$ es la frecuencia del término i en el documento D , df_i es el número de documentos en los que aparece el i -ésimo término y N el número total de documentos de la colección de entrenamiento.

5.3 Métricas de evaluación

Para evaluar el rendimiento de un sistema de filtrado de información no suele ser suficiente con conocer la tasa de errores o aciertos del mismo pues esta medida aislada podría inducirnos a conclusiones erróneas. Este podría ser el caso de un sistema de filtrado al le llegasen 100 documentos de los cuales sólo 5 de ellos fueran relevantes. Un sistema trivial que simplemente rechazara todos los documentos conseguiría una tasa de error de tan sólo el 5% y sin embargo, dista mucho de ser un sistema de filtrado óptimo. Otras métricas más adecuadas son el par **precisión-recall** [2][8]. La precisión se define como la proporción de documentos realmente relevantes del total de documentos seleccionados por el sistema como relevantes. El recall (recuperación) es la proporción de todos aquellos documentos relevantes que han sido seleccionados (filtrados) por el sistema. Estas dos métricas carecen de sentido de forma aislada siendo necesario evaluar siempre la relación precisión-recall.

Generalmente, un filtro de información presenta un equilibrio entre precisión y recall variable con el umbral de decisión impuesto al clasificador: Si se desea una alta precisión será a costa de sacrificar el recall y viceversa. Cuando el ajuste del clasificador es tal que precisión y recall toman el mismo valor, este punto de operación recibe el nombre de **Break-even** [8].

²El sistema SMART puede obtenerse por ftp anónimo en: <ftp://cs.cornell.edu/pub/smart>

³Se empleó la lista de 571 palabras comunes en lengua inglesa proporcionada por SMART

Otra de las medidas de rendimiento utilizada es el criterio $g = \sqrt{A_r \cdot A_{nr}}$ [6] definido como la media geométrica de las exactitudes en la clase *relevante/no-relevante*, siendo A_r y A_{nr} la proporción de datos relevantes/no-relevantes correctamente asignados a sus respectivas clases.

5.4 Valor de los datos no-etiquetados

Se ha evaluado la contribución del uso de datos no-etiquetados en el proceso de inducción del filtro, en particular para aquellos casos en los que se dispone de pocos datos etiquetados y sin embargo, hay fácilmente disponibles una gran cantidad de datos sin etiqueta.

Categoría	12 Documentos etiquetados	HM -12 etiquetados y 600 no etiquetados	612 Documentos etiquetados
earn	0.95	0.95	0.97
acquisitions	0.88	0.90	0.96
money-fx	0.88	0.93	0.95
grain	0.93	0.96	0.99
crude	0.94	0.96	0.98
trade	0.92	0.93	0.96
interest	0.91	0.93	0.96
wheat	0.96	0.95	0.98
ship	0.90	0.92	0.98
corn	0.94	0.93	0.98

Tabla 1: Comparativa entre entrenamiento supervisado y semi-supervisado

En la Tabla.1 se muestra el rendimiento de los filtros de información a través de la métrica Break-even precisión-recall para los 10 perfiles de necesidad de información con más documentos. Puede compararse el rendimiento de los mismos para los siguientes casos: a) Se dispone sólo de 12 documentos etiquetados, b) se utilizan 12 documentos etiquetados y 600 sin etiqueta y c) se emplean los 612 documentos con etiqueta.

En la mayor parte de los casos se obtiene una mejora del rendimiento con el uso combinado de datos etiquetados y no etiquetados. Sólo para los casos "wheat" y "corn", no se logra mejorar el clasificador.

La relación precisión-recall del filtro de información Money-fx puede observarse en la Figura.2. Umbrales de decisión bajos garantizan alto recall pero a costa de muy baja precisión. Un aumento del umbral de decisión aumenta la precisión pero disminuye a la vez el recall, como puede observarse en las curvas de relación precisión-recall. El uso de datos no etiquetados en la fase de entrenamiento mejora el rendimiento del clasi-

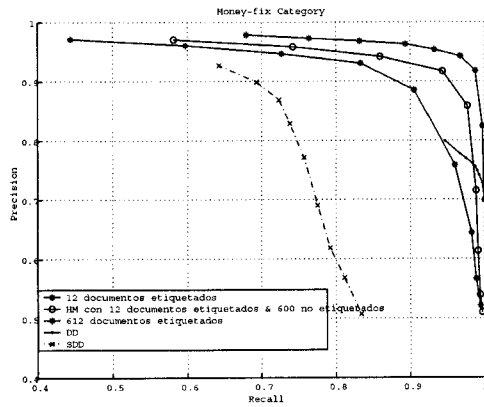


Figura 2: Curvas Precisión-Recall para el filtro de perfil de usuario *Money-fix* de la colección Reuters

ficador. Se compara la técnica de minimización de entropía HM con técnicas de imputación de etiquetas como DD (Decision Directed) y SDD (Stochastic Decision Directed). La técnica de imputación DD asigna etiquetas a los datos no etiquetados de acuerdo con las decisiones del clasificador y la asignación de etiquetas con respecto a las probabilidades y_i se corresponde con la técnica SDD. El uso de estas técnicas en este problema de clasificación textual ofrece resultados inferiores al de la técnica de minimización de entropía HM e incluso puede empeorar el rendimiento del sistema con respecto a la situación en que se prescinde de los datos no-etiquetados.

5.5 Etiquetado activo de los documentos más informativos

La selección de documentos para el proceso de etiquetado se fundamenta en la medida de desacuerdo de las decisiones tomadas por los diferentes filtros de un comité acerca de cada documento.

En la política de votación se ha optado por considerar el grado de seguridad de las clasificaciones realizadas por cada miembro del comité ($y_i = P(\mathbf{d} = \mathbf{u}_i | \mathbf{x})$) a diferencia de trabajos como [4] donde cada miembro de un comité de tamaño K emite una votación con peso $\frac{1}{K}$. En la Figura 3 se observa la tasa de error cometida por el comité para documentos con desacuerdo en las decisiones creciente. A medida que aumenta el desacuerdo, la tasa de error se incrementa pero este error es menor cuando se pondera el grado de confianza de la decisión (Voto ponderado) que cuando sólo se considera la decisión final (Voto no ponderado).

Las Figuras 4, 5 muestran la evaluación de los filtros "Grain" e "Trade", respectivamente, a través del criterio de rendimiento g . Se observa que el rendimiento del filtro aumenta a medida que aumenta el número

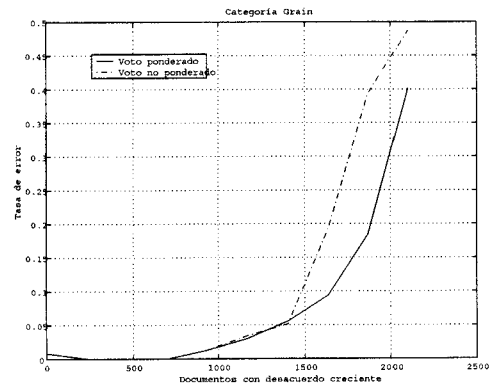


Figura 3: Tasa de error en la clasificación por parte del comité de los datos no-etiquetados. Comparativa entre estrategia de voto no ponderado y voto ponderado por el grado de confianza de la decisión

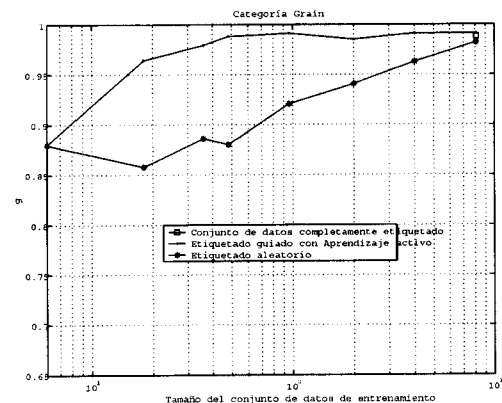


Figura 4: Medida de rendimiento g vs. tamaño del conjunto de datos de entrenamiento

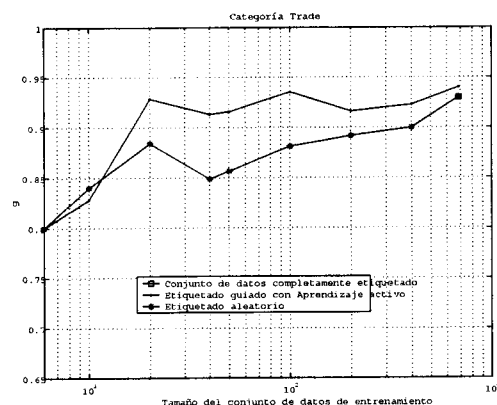


Figura 5: Medida de rendimiento g vs. tamaño del conjunto de datos de entrenamiento

de documentos etiquetados disponibles en el entrenamiento. Sin embargo, el etiquetado de los documentos seleccionados por el comité como más informativos consigue aumentos más significativos que la realización

de un etiquetado aleatorio. Este etiquetado guiado permite reducir el número de documentos de entrenamiento para conseguir un mismo rendimiento en el sistema de filtrado. Así, para el perfil de necesidad de información "Grain" se consigue un rendimiento $g = 0.95$ con 300 documentos etiquetados aleatoriamente por el usuario mientras que un aprendizaje activo permitiría obtener el mismo rendimiento etiquetando apenas 20 documentos seleccionados con la técnica de aprendizaje activo propuesta.

5.6 Uso combinado del aprendizaje activo y el principio de minimización de entropía HM

La utilización combinada de la técnica de aprendizaje activo y un entrenamiento semi-supervisado haciendo uso de los datos no etiquetados se muestra en la Figura 6. La incorporación de datos no etiquetados en el proceso de entrenamiento mejora el rendimiento del clasificador siendo menos significativo a medida que el número de datos etiquetados disponibles aumenta.

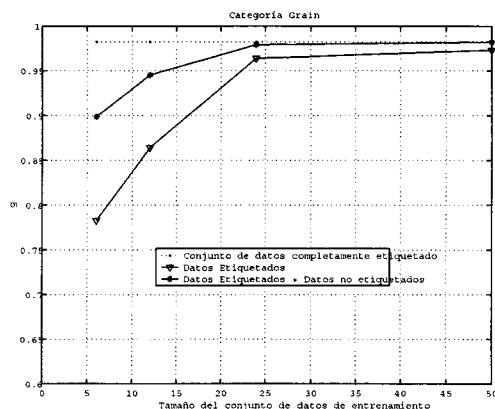


Figura 6: Medida de rendimiento g vs. el número de datos etiquetados en el conjunto de entrenamiento

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto la utilización de una técnica de entrenamiento semi-supervisado para un sistema de filtrado de información basado en una red neuronal utilizando el principio de minimización de entropía HM. Esto nos permite aprovechar el gran número de documentos no-etiquetados disponibles a muy bajo coste y de esta manera poder incrementar el rendimiento del filtro de información. Resulta especialmente útil cuando se disponen de pocos documentos etiquetados manualmente o cuando el proceso de etiquetado resulta excesivamente costoso por el hecho de ser una tarea manual. Además, esta técnica supera los resultados obtenidos con otras posibles soluciones

de imputación de etiquetas.

Otra aproximación propuesta que permitiría reducir el número de documentos etiquetados es la realización de un aprendizaje activo solicitando al usuario el etiquetado de aquellos documentos más informativos evitando de esta forma el etiquetado de documentos redundantes o sin aporte de información. En los experimentos realizados, esta técnica permite reducir en un factor superior a 15 el número de documentos que es necesario etiquetar para alcanzar el mismo rendimiento.

Finalmente, estas dos técnicas pueden usarse de forma combinada logrando altos rendimientos con clasificadores entrenados con muy pocos documentos etiquetados. Sin embargo, la aportación que puede suponer el uso de documentos no-etiquetados se reduce a medida que se incrementa el tamaño del conjunto de datos de entrenamiento.

El problema de filtrado de información se complica con el gran abanico de tipos de usuarios posibles, pudiendo ser desde un "usuario de alta precisión" cuando no quiere que se le moleste con información a menos que exista una alta probabilidad de que ésta sea relevante o hasta un "usuario de alto recall" que quiere ver todo aquello que pueda ser relevante. Nos planteamos, pues, el diseño de filtros de información optimizados durante el entrenamiento para diferentes exigencias de precisión/recall.

Referencias

- [1] A. Blum and T. Mitchell. "Combining Labeled and Unlabeled Data with Co-Training". *Proceedings of the 11th Annual Conference on Computational Learning Theory*, 1998.
- [2] J. Callan. "Learning While Filtering Documents". *Proceedings of the 21st International ACM-SIGIR*, pp. 224-231, Melbourne, Australia, 1998.
- [3] J.Cid-Sueiro, A.R. Figueiras-Vidal, "On the Structure of Strict Sense Bayesian Cost Functions and its Applications", *IEEE Trans. Neural Networks*, May 2001.
- [4] I.Dagan, S.P. Engelson. "Committee-based sampling for training probabilistic classifiers". *Proceedings of the Twelfth ICML*, pp. 150-157, 1995.
- [5] D. Hull, J. Pedersen, and H. Schutze. "Method combination for document filtering". *Proceedings of the 19th International ACM SIGIR*, 279-288, August 1996.
- [6] M. Kubat and S. Matwin. "Addressing the curse of imbalanced training sets: One-sided selection". *Proceedings of the 14th ICML*, 179-186. Morgan Kaufmann, 1997.

- [7] Y. Li, A. Jain, "Classification of Text Documents",
The Computer Journal, Vol. 41, No. 8, 1998.
- [8] A. McCallum and K. Nigam." Employing EM in
pool-based active learning for text classification",
In Proceedings of the 15th ICML, pp 350-358,1998.

DESARROLLO DE UN MODELO INTEGRAL DE GESTIÓN DEL CONOCIMIENTO DESDE UN ENFOQUE DE PROCESOS. ESTUDIO DE UN CASO

T. Peña Pérez
Universidad de Burgos
E. Politécnica Superior
C/ Francisco Vitoria s/n
teresapp@ubu.es

M. A. Manzanedo Campo
Universidad de Burgos
E. Politécnica Superior
C/ Francisco Vitoria s/n
mmanz@ubu.es

L. Sáiz Bárcena
Universidad de Burgos
E. Politécnica Superior
C/ Francisco de Vitoria s/n
lsaiz@ubu.es

A. Lara Palma
Universidad de Burgos
E. Politécnica Superior
C/ Francisco de Vitoria s/n
amlara@ubu.es

Resumen

El conocimiento se ha convertido en el recurso estratégico de primer orden en el nuevo entorno empresarial. El objetivo es diseñar un Modelo Global e Integral de Gestión del Conocimiento con el que se pueda llegar a identificar las actuaciones necesarias que permitan la Adquisición, Transferencia y Actualización del Conocimiento, para su uso entre aquellos miembros de la organización que lo necesiten en el desempeño de sus funciones, para mejorar globalmente, añadiendo valor, flexibilidad y competitividad al negocio.

Palabras Clave: Gestión del conocimiento, aprendizaje, tecnologías de la información.

1- INTRODUCCIÓN

La nueva era del conocimiento, en la que estamos inmersos, se caracteriza por tres aspectos propios y diferenciales, la globalización de los mercados, el desarrollo tecnológico y el volumen de información disponible y la rapidez de su intercambio. El acelerado desarrollo tecnológico que se está produciendo en los últimos años es el que ha propiciado el paso de la sociedad industrial a la sociedad del conocimiento.

Las nuevas formas de competir, nada tienen que ver con las de épocas anteriores, si se admite que el propósito de cualquier empresa es su supervivencia indefinida, para ello es necesario que sea capaz de alcanzar y mantener una ventaja competitiva. El conocimiento se presenta como la variable determinante del éxito de las empresas. En este contexto se ha venido desarrollando la denominada sociedad del conocimiento, en la que se acentúa la importancia del conocimiento de las personas

de la organización como medio y factor diferenciador de la competitividad de las mismas.

El nuevo recurso crucial de las empresas reside en los conocimientos de sus propios profesionales, puesto que el éxito ya no se mide por los valores tradicionales de volumen de trabajo, entrada de capital o adquisición de propiedades. En consecuencia, la única ventaja competitiva sostenible será la creación de conocimiento organizativo y su buena gestión.

En este trabajo, se parte del conocimiento como factor de éxito para mejorar productos y procesos, entendido como un activo intangible dotado de una serie de características, rasgos y propiedades muy específicas, para pasar posteriormente a la gestión del mismo, que permite utilizarlo para añadir y generar valor.

Para esta gestión, se elabora un modelo integral de Gestión del Conocimiento, a partir del desarrollo de una metodología propia, cuya implantación se ha desarrollado en un grupo multinacional líder en el diseño y producción de una gran variedad de componentes para la industria del automóvil.

Una vez seleccionada la empresa idónea, se recoge la información de las necesidades de Conocimiento Clave, a través de un cuestionario que se cumplimenta mediante una entrevista. Para el tratamiento de los datos se utiliza una Base de Datos Relacional, y se lleva a cabo una Categorización de los conocimientos identificados por los expertos. La metodología empleada para llevar a cabo el análisis descriptivo, es la Matriz del Conocimiento, mientras que el contraste se realiza a través de la técnica estadística del Análisis Factorial de Correspondencias Simple (AFC). De aquí se pueden concluir unas Propuestas para los procesos de Adquisición, Transferencia y Actualización del conocimiento, que permite el desarrollo del modelo definitivo de Gestión del Conocimiento desde el enfoque de Procesos.

2- UN ACERCAMIENTO A LOS ORIGENES DEL CONOCIMIENTO

El conocimiento es información en un contexto determinado que, junto con la experiencia, los modelos mentales de los individuos y las variables que forman parte del "saber hacer" de las personas, permiten generar aprendizaje, identificar y resolver problemas, desarrollar procesos y procedimientos y, en último termino, crear valor añadido.

Aunque la mayoría de los autores diferencian entre datos, información y conocimiento (Wiig, 1993; Van der Spek, Spijkerver, 1997; Stewart, 1998), otros hacen un análisis más exhaustivo considerando otras categorías, entre los que se encuentran Beckman (1998), Tobin (1996), Davenport y Prusak (1998), Sena y Shani (1999) o Liebowitz, (2000). En definitiva, la distinción entre estos términos se puede entender como un proceso progresivo, que comienza con tres categorías de datos, información y conocimiento.

Para salvar la complejidad que encubre el término conocimiento y alcanzar un mejor y más amplio entendimiento, se va a analizar la denominada jerarquía del conocimiento; propuesta por Beckman (1998), porque se basa en entender las distinciones entre las transformaciones de las formas de conocimiento:

Entradas: Son los inputs o entradas provenientes del conocimiento humano y de los modelos, sensores psíquicos, señales e imágenes. Todos estos inputs son detectados y recogidos por los "sensores" organizacionales. Hay una gran variedad de entradas, ya que el lenguaje puede llegar a adoptar formas a través del habla humano, de las señales de audio, de dibujos o de manuscritos. Es un paso previo al proceso de los datos que luego estarán contenidos en manuales, bases de datos y sistemas expertos.

Datos: Es el conjunto de entradas que han sido capturadas y convertidas en símbolos con forma de texto, hechos, imágenes interpretadas, códigos que serán procesados posteriormente. Estos caracteres dan lugar a una colección de nombres y las imágenes que han sido interpretadas tienen una representación simbólica.

Información: Son los datos en un contexto y con un significado, es decir tienen una forma y poseen un contenido útil para una tarea concreta, después de que han sido formalizados, clasificados, procesados y formateados.

Conocimiento: Son aplicaciones de partes de la información, principios y experiencias, activamente guiadas hacia la ejecución y gestión de las tareas, la toma de decisiones, o la resolución de problemas. Hay tres

tipos generales de conocimiento: casos, reglas y modelos; distinguiéndose en este último causales, estadísticos y procedimentales.

Competencia profesional y técnica: Se identifica con las capacidades, habilidades y saber hacer individual. Son aplicaciones de conocimiento a través de una apropiada y efectiva investigación que permite obtener una correcta rentabilidad bajo la restricción de unos recursos asignados. Los expertos explican, justifican, analizan los resultados y los procesos, lo que les lleva a aprender de la experiencia y desarrollar nuevas investigaciones, teorías y enfoques, y pueden enseñar su conocimiento, experiencia y habilidades a los demás.

Competencia de la organización: En el nivel más alto del conocimiento se sitúan las capacidades y competencias organizativas que sirven para desarrollar procesos, producir productos, o prestar servicios; pero, para ello, se requiere la integración, coordinación y cooperación de muchos individuos y equipos de trabajo. Por esta razón implica la habilidad de aprender, innovar y crear nuevos productos y servicios, y mejorar en los procesos, además facilita la creación e incremento de los repositorios de conocimiento como una integración entre los sistemas de expertos de la organización.

Así pues, según esta jerarquía, las entradas se transforman en datos, éstos en información, la cual, a su vez, pasa a alcanzar el nivel de conocimiento, que permite el desarrollo de las competencias individuales, y, por último, éstas conforman las competencias organizativas.

En síntesis, se puede entender la gestión del conocimiento como el conjunto de políticas y procesos que tienen como objetivo la adquisición, transferencia y actualización del conocimiento clave de la organización, a través de la detección y resolución de problemas y del aprendizaje individual, grupal y organizativo, para obtener el logro de ventajas competitivas.

3- PROPUESTA DE UN MODELO PARA LA GESTIÓN DEL CONOCIMIENTO

La Gestión del Conocimiento en las organizaciones se encuentra en un estado embrionario. Existen modelos teóricos, pero presentan grandes dificultades de aplicación en la práctica; en muchos casos las aplicaciones más avanzadas se reducen a la utilización de algunas herramientas.

Sin embargo, las empresas detectan y manifiestan la necesidad de contar con un sistema de gestión del conocimiento adaptado a su realidad empresarial. Por ello, se parte de la premisa que para conseguir una ventaja competitiva se requiere la Adquisición,

Transferencia y Actualización del conocimiento, lo cual hace necesario llevar a cabo actuaciones en la estrategia y en la dirección de recursos humanos, para implicar activamente a las personas, apoyado por los facilitadores tecnológicos.

En consecuencia, el modelo propuesto consta de tres componentes básicos: la Organización, los Procesos y la Tecnología, que reúnen, a su vez, un conjunto de variables claves y estratégicas que permiten su desarrollo¹.

3.1. ORGANIZACIÓN: ESTRATEGIA

La gestión del conocimiento es un proyecto estratégico, que debe formar parte de los objetivos de la organización, estableciendo unas directrices claras para su desarrollo y aplicación; la estrategia debe focalizarse en las personas, ya que las formas de trabajar cambian y la competencia se incrementa.

El conocimiento como ventaja competitiva, se refiere a la capacidad de las personas de conseguir valor añadido a través del mismo, por lo que la prioridad estratégica basada en el desarrollo y mantenimiento de las capacidades de las personas, y la habilidad de la empresa para movilizar y explotar esas capacidades y activos intangibles, se ha convertido en el factor decisivo.

Desde este planteamiento surgen las dos dimensiones que se deben desarrollar y potenciar dentro de la organización; la primera, es la dimensión colectiva, formada por la cultura empresarial, el clima organizativo, y los estilos de dirección, principalmente; y, la segunda, la dimensión individual que requiere el desarrollo de los conocimientos, las competencias y las habilidades (Hay Group, 2000).

Así es como se ha pasado de las organizaciones funcionales y jerárquicas a organizaciones estructuradas en torno a procesos de creación de valor y enfoque al cliente, en las que las personas ponen toda su capacidad en obtener resultados económicos y conseguir la satisfacción del cliente.

En relación al aspecto estratégico de la gestión del conocimiento, existen un conjunto de variables clave, cuya correcta o incorrecta implantación marcarán parte del éxito o del fracaso de la empresa en términos de conocimiento. Tales variables son: cultura, clima,

liderazgo, estilo organizativo, misión, visión, valores, propósito, objetivos, principios, políticas.

Por lo tanto, la eficiente implantación del sistema de Gestión del Conocimiento depende de la estrategia de la empresa, por lo que se debe fomentar una cultura y un clima favorable para poder compartir, localizar y crear el conocimiento clave; todo ello relacionado con un estilo organizativo y de liderazgo adecuados.

Además, las organizaciones se encuentran en constante aprendizaje, por eso necesitan tener definidas una misión, visión y valores que faciliten una estrategia clara, conocida y compartida; por esta razón se requiere un propósito, unos objetivos, unos principios y unas políticas que propicien la compartición e interacción sinérgica entre sus miembros.

En definitiva, las organizaciones que poseen un sólido compromiso por parte de sus miembros aprenden más rápidamente de los cambios del entorno, sobreviven y tienen más éxito.

3.2. ORGANIZACIÓN: PERSONAS

El conocimiento por sí solo no favorece la innovación, ni la creación de ventajas sostenibles; en última instancia las personas son el elemento clave en la gestión del conocimiento, el agente que permite la creación, el uso, el desarrollo y la compartición del mismo. Ante esta restricción, no se puede obviar las actitudes o los comportamientos de las personas, sus emociones y motivos

Los recursos humanos junto con la estrategia son los dos componentes clave de la organización en este sistema de gestión del conocimiento, se identifican un conjunto de variables, que facilitan y favorecen la implantación del sistema desde el componente de personas, se detallan a continuación.

En primer lugar, las variables claves seleccionadas son el aprendizaje y la resolución de problemas. Debido a que parte del conocimiento se genera por la detección y resolución de problemas, hasta alcanzar una solución, lo que implica aprendizaje, que, a su vez, incrementa el nivel de conocimientos de la organización; se debe considerar que la principal fuente a partir de la cual surgen los problemas es la innovación.

Esto implica la definición e implantación de unas adecuadas políticas de recursos humanos, como son, planificación estratégica de recursos humanos, descripción y valoración de puestos, reclutamiento y selección, evaluación del desempeño, análisis y mejora del clima laboral, cultura corporativa, retribución, formación, planificación de carreras, gestión de sistemas

¹ La elección de estos tres componentes imprime el carácter integrador, y toma como referencia las ideas y orientaciones aportadas por Marquardt (1996), cuando considera que un modelo de gestión del conocimiento reúne los aspectos de aprendizaje, la organización, las personas y la tecnología.

de información, gestión de desvinculaciones, auditoría de recursos humanos.

El rendimiento de las personas y de las organizaciones depende de la claridad y el acuerdo en las políticas de recursos humanos, entendiendo que al alcanzar su plenitud cuando se integran entre sí. Es difícil que las personas cambien si no perciben que el cambio las va a beneficiar y ayudar a conseguir sus propios objetivos y hacer realidad sus valores, por eso se requiere un adecuado clima laboral relacionado con el rendimiento a través de la motivación, la formación, la comunicación y el reconocimiento.

3.3. PROCESOS

El modelo representa tres situaciones de partida en las que se pueden encontrar las áreas de la organización en términos de conocimiento, Carencias, Carencias Parciales, Sin Carencias, en función de las cuales se requerirá la actuación de uno o varios procesos: Adquisición, Transferencia/Disposición y Actualización, que darán lugar a un conjunto de propuestas.

En primer lugar, en las "Áreas con Carencias de Conocimiento", no se dispone de los conocimientos esenciales para el desempeño de las funciones y el desarrollo de los procesos organizativos, ni la organización, ni sus miembros poseen los conocimientos claves. El objetivo es Adquirir el conocimiento necesario, para detectar e identificar las carencias y el nivel al que se necesita en la organización, tanto con ello se analiza el modo de conseguirlo, de forma externa o interna, el coste de adquisición y la urgencia del mismo.

En segundo lugar, en las "Áreas con Carencias Parciales" el conocimiento clave está únicamente a disposición de las personas que lo poseen, pero no ha sido explicitado y, por lo tanto, la organización no dispone del mismo. El objetivo es Transferir y Disponer de este conocimiento que, actualmente, poseen los expertos. Es necesario identificar a los expertos, determinar en consecuencia, los potenciales usos del conocimiento para generar más conocimiento y valor añadido, buscar el medio de explicitar² el mismo a través de un formato normalizado y sencillo, y ponerlo a disposición de cuantas personas lo necesiten para su uso.

En tercer lugar, por "Áreas Sin Carencias" se entiende que tanto las personas como la organización cuentan con los conocimientos esenciales necesarios, por lo que el

objetivo es mantenerlos actualizados. Para ello se requiere un doble sistema, que permita, por un lado, la eliminación de los conocimientos obsoletos y, por otro, la detección de nuevas necesidades, esto es, actualizar y mantener vivo y dinámico el sistema.

En consecuencia, el sistema se retroalimenta, del proceso de Actualización se alcanza el de Adquisición, para la obtención de nuevo conocimiento que, a su vez, debe ser Transferido para su potencial uso.

3.4. TECNOLOGIA

La gestión del conocimiento requiere sistemas adecuados de captación, agregación y difusión del conocimiento y la inteligencia de los profesionales de la empresa, mientras que la tecnología apoya proporcionando un soporte de rápida accesibilidad e introduciendo en la empresa una dinámica de la actualización de dicho conocimiento en tiempo real.

Para el desarrollo del conjunto de facilitadores en la gestión del conocimiento, se va a seguir el modelo de arquitectura tecnológica de Ibermática (2000) basado en un conjunto de herramientas que se dividen en tres grupos: el primero, formado por las herramientas de modelización; el segundo, por las de almacenamiento y gestión; y, el tercero, por las de difusión y compartición del conocimiento.

Las herramientas de modelización facilitan el análisis, la representación y la transferencia del conocimiento, permitiendo identificar los elementos clave para la creación de ventajas competitivas sostenibles: Modelización del conocimiento, Herramientas de workflow, Herramientas de razonamiento basado en casos (CBR).

Las herramientas de almacenamiento y gestión del conocimiento, son facilitadores para el stock, selección, recuperación y tratamiento de información que intervienen en los flujos de conocimiento: Bases de datos, Herramientas de recuperación de información, Agentes inteligentes, Gestión documental avanzada.

Las herramientas de difusión y compartición del conocimiento, para la compartición del mismo mediante los equipos de trabajo o consultas guiadas de navegación: Herramientas de trabajo en grupo, E-business, Servidores de negocio, Sistemas de gestión de recursos humanos, Help Desk.

Todos estos facilitadores tecnológicos, basados en herramientas de modelización, almacenamiento, gestión, difusión y compartición del conocimiento, permiten que grandes cantidades de conocimiento puedan estar

² En estas áreas con carencias parciales de conocimiento la organización se encuentra con conocimientos indispensables disponibles en las cabezas de sus miembros, por lo que se requiere el paso de este conocimiento tácito a un conocimiento explícito que pueda estar a disposición y que su uso sea fuente generadora de más conocimiento.

disponibles en los momentos precisos entre los miembros de la organización, que sin la ayuda de tales herramientas sería inviable (Joyanes, 2001)

4- INVESTIGACIÓN EMPÍRICA EN GESTIÓN DEL CONOCIMIENTO

El trabajo empírico comienza con la elección de una empresa multinacional del sector de automoción, por ser una industria altamente competitiva y detectarse la necesidad de implantación de un sistema de Gestión del Conocimiento. Para la obtención de los datos, se ha optado por un cuestionario, cumplimentado mediante entrevistas, juntamente con grabaciones de las declaraciones efectuadas por los entrevistados.

El análisis de los datos se ha efectuado a través de dos instrumentos; en primer lugar, con una base de datos relacional, como metodología de diseño que permite útiles aplicaciones en las empresas, y está compuesta por estructuras que almacenan información y elementos para manejar e interpretar la misma. La elección de esta herramienta se debió a que la información se encontraba en bloque, y era necesario, para su análisis e interpretación, separarla manteniendo su integridad. En segundo lugar, la técnica estadística del Análisis Factorial de Correspondencias Simple (AFC), sirve para comparar los perfiles en línea y en columna de una tabla de contingencia, interpretar el mapa factorial resultante, sacar conclusiones y contrastar las proposiciones.

El número de áreas estudiadas fueron once y los expertos treinta, de los cuales, siete son miembros del Consejo de Dirección, y el resto, directivos de primer nivel. Tras la realización de las entrevistas se obtuvieron 277 conocimientos claves; a este número se llega después de una pequeña depuración, que consistió en la omisión de determinados datos incompletos y de escasa relevancia.

Los conocimientos son categorizados en 11 grupos, que se corresponden con tres Direcciones Corporativas³. En la Dirección Corporativa "A" se incluyen las Categorías de Nuevos Negocios, Compras y Comercial/Marketing; en la Dirección Corporativa "B" se integran las Categorías de Gestión de Proyectos, Mejores Prácticas Industriales, Protección del Diseño y la Tecnología, y Finanzas; por último en la Dirección Corporativa "C" se ubican las

categorías de Recursos Humanos, Calidad, Organización y Sistemas de Información.

Tras la agrupación de los conocimientos, se elabora una tabla de contingencia de la situación en la que se encuentran los conocimientos, que recoge las necesidades, de los procesos de Adquisición, Transferencia y Actualización del modelo propuesto.

La metodología a seguir para el tratamiento y análisis de la información obtenida se basa en el desarrollo de una matriz, elaborada a partir del Modelo de Gestión del Conocimiento, que representa las diferentes combinaciones resultantes de los niveles y grados de importancia atribuidos a los conocimientos por los expertos de la empresa.

Así, respecto a los niveles en los que se puede encontrar el conocimiento, se consideran cuatro posibilidades, Ausente, Parcial, Suficiente y Experto. El proceso de Adquisición se corresponde con los conocimientos Ausentes, el de Transferencia del conocimiento tácito a explícito, con los conocimientos que se encuentran en una situación Parcial y el proceso de Actualización con los conocimientos que se sitúan en un grado Suficiente y Experto; la necesidad de actualización de los conocimientos da lugar a la retroalimentación del sistema.

Con relación a los grados de importancia para los cuatro niveles citados, se diferencian las siguientes situaciones, aquellos conocimientos Indispensables para la organización, otros posicionados en una situación intermedia y, por tanto, considerados Muy Importantes, y los conocimientos con un grado de Importantes.

5- CONCLUSIONES

A modo de resumen, se dedica este apartado al componente de Procesos, a partir del cual ha sido desarrollada una metodología que ha permitido la identificación del conocimiento clave necesario para la realización de la actividad de la empresa, la documentación del mismo para su permanencia y disponibilidad efectiva por las personas que lo necesiten, y la validación de las necesidades actuales y futuras, detectando y anticipando nuevos conocimientos y eliminando, a su vez, los obsoletos.

Una vez identificada la situación del conocimiento clave y la detección del proceso recomendado, la compañía debe centrar su atención en lanzar unas líneas de acción, a través de las cuales los responsables de las áreas propician un plan de mejora, que permita, llevar a cabo, los tres tipos de propuestas del Modelo de Gestión del Conocimiento desde un Enfoque de Procesos estudiado en esta investigación. Las acciones a realizar se sintetizan a continuación:

³ Para salvaguardar el anonimato de la empresa se identifican las Direcciones Corporativas como "A"; "B"; "C". Estas áreas son una agrupación "ad hoc" basada en el organigrama de la empresa, en términos exclusivos de conocimiento.

▪ *Adquirir el conocimiento en aquellas Áreas con Conocimientos Ausentes: por medio de la Propuesta para la Creación, Generación y Captura del Conocimiento.* Que propone la existencia de un conjunto de recursos tanto internos para generar el conocimiento, como externos para adquirirlo, junto con las acciones de captura, que son comprar, alquilar y desarrollar el conocimiento. Entre dichos recursos pueden mencionarse diferentes publicaciones externas o internas, la formación disponible en el mercado y la desarrollada por la organización, los sistemas de evaluación, la propia estrategia de negocio, los organismos especializados, así como, la experiencia y conocimiento de clientes, proveedores, competidores y personas de la empresa. La organización deberá analizar en cada caso concreto qué tipo de medidas de captura resulta más interesante y cuáles son los recursos que permiten obtener esos conocimientos clave ausentes, que posteriormente deberán ser transferidos a la organización y actualizados para poder seguir generando valor añadido.

▪ *Transferirlo en las Áreas con Conocimientos Parciales: a través de la Propuesta para la Organización, Compartición, Formalización y Aprovechamiento del Conocimiento.* Los diferentes recursos y soportes permiten poner el conocimiento a disposición de los miembros de la organización, resaltando que el propio proceso de compartir es el que provoca que se genere más conocimiento y se incremente el valor añadido de la organización. Algunos de los recursos internos que facilitan la transferencia y uso del conocimiento, son carpetas públicas, internet, intranet, el desarrollo de software, los foros y convenciones, la creación de "Comunidades de Practicantes"-grupos o equipos de interés en términos de conocimiento, sin límites jerárquicos o geográficos-, y el retorno de experiencias o "Mejores Prácticas".

▪ *Actualizarlo en las Áreas con Conocimientos Suficientes y Expertos: según la propuesta para la Detección, Anticipación, Eliminación y Refinamiento del Conocimiento.* La implantación de las tecnologías que facilitan la transferencia, difusión y compartición del conocimiento deben considerar el ciclo de vida del conocimiento, que consiste en conservar y/o eliminar los conocimientos clave que forman parte de los sistemas. Así, la figura del "Gestor del Conocimiento" resulta relevante, pues su responsabilidad principal es permanecer vigilante, validando las necesidades de conocimiento, permitiendo la eliminación de aquellos inservibles, y detectando la necesidad de nuevos conocimientos. Ello dará lugar a una correcta política de conservación del conocimiento y/o eliminación de aquel irrelevante para la organización.

Terminamos apuntando que la implantación de la Gestión del Conocimiento en las organizaciones debe hacerse

paulatinamente, comenzando con proyectos piloto que acoten claramente el área de conocimiento a gestionar, para pasar a definir los procesos y procedimientos correspondientes a desarrollar. Para que el sistema tenga éxito es imprescindible contar con expertos entrenados y adecuadamente motivados, así como con una gran implicación por parte de los directivos de la organización.

BIBLIOGRAFÍA

Beckman, T. (1998): "Designing innovative business systems through reengineering", *Tutorial at the 4th World Congress on Expert Systems*, Mexico City.

Davenport, T., Prusak, L. (1998): *Working knowledge: how organizations manage what they know*, Harvard Business School Press, Boston MA.

Haygroup (2000): *Factbook recursos humanos*, Aranzadi & Thomson, Navarra.

Ibermática. Tecnología y Conocimiento (2000): "Las TIC elemento facilitador en la gestión del conocimiento", *Documentos de reflexión estratégica y tecnológica*, Grupo Ibermática, número 91, pp.1-11.

Joyanes, L. (2001): "La gestión del conocimiento: el nuevo paradigma organizativo y empresarial. Tendencias y Portales", *Sociedad y Utopía*, número 18, pp. 81-114.

Liebowitz, J. (2000): *Building organizational intelligence: a knowledge management Primer*, Boca Raton, CRC Press, Florida, London.

Liebowitz, J., Suen, Ch. Y. (2000): "Developing knowledge management metrics for measuring intellectual capital", *Journal of Intellectual Capital*, Vol. 1, No. 1, pp. 54-67.

Marquardt, M. J. (1996): *Building the learning organization, a systems approach to quantum improvement and global success*, McGraw-Hill, United States of America.

Sena J., Shani, A. B. (1999): "Intellectual capital and knowledge ceration: towards and alternative framework", in Liebowitz, J. *Knowledge Management*, CRC Press, Florida, USA (Washington D. C.), pp. 86-93.

Stewart, T. A. (1998): La nueva riqueza de las organizaciones: el capital intelectual, Granica, Barcelona.

Tobin, D. (1996): *Transformational learning: Renewing your company through knowledge and skills*, John Wiley & Sons, New York.

Van der Spek, R., Spijkervet, A. (1997): "Knowledge management: dealing intelligently with knowledge", in *Knowledge Management and its integrative elements*, Liebowitz & Wilcox, eds. CRC Press LLC, Boca Raton, pp. 31-59.

Wiig, K. M. (1993): *Knowledge management foundations: thinking about thinking- how people and organizations create, represent and use de knowledge*, Schema Press, Arlington, Texas.