

Obtención de Sistemas Basados en Reglas Difusas Precisos y Compactos mediante Algoritmos Genéticos Multiobjetivo

R. Alcalá, J. Alcalá-Fdez, M. J. Gacto y F. Herrera

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Granada, 18071 Granada, España

{alcala, jalcala, herrera}@decsai.ugr.es, mjgacto@ugr.es

Resumen

En este trabajo se plantea el uso de Algoritmos Genéticos Multiobjetivo para la obtención de Sistemas Basados en Reglas Difusas con un buen equilibrio entre interpretabilidad y precisión. Se propone para ello un nuevo método de post-procesamiento que mediante la selección de reglas y el ajuste de las funciones de pertenencia obtenga soluciones centradas en la zona del pareto con el mejor equilibrio, aquella en la que se encuentren soluciones con el menor número de reglas posible pero que todavía presenten una alta precisión. Dicho método se basa en el bien conocido SPEA2, aplicando los operadores genéticos adecuados e incluyendo algunas modificaciones que centran la búsqueda en la zona del pareto deseada.

Palabras Clave: Modelado Difuso Lingüístico, Interpretabilidad, Algoritmos Genéticos Multiobjetivo, Ajuste y Selección de Reglas.

1 INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas que últimamente centra el interés de los investigadores en el área del Modelado Difuso Lingüístico (MDL) [1], es la búsqueda de un buen equilibrio entre precisión e interpretabilidad. Por supuesto, la situación ideal sería poder satisfacer ambos criterios al más alto grado, pero llegar a tal situación es generalmente imposible puesto que son propiedades contradictorias.

Una técnica importante para mejorar la precisión de un Sistema Basado en Reglas Difusas es el *ajuste* de funciones de pertenencia [1, 2], que consiste en refinar una definición previa de la base de datos (BD) una

vez que la base de reglas ha sido obtenida. Aunque las mejoras en precisión son importantes, usualmente se necesita que el modelo inicial tenga un número de reglas elevado para ello. En este caso, algunos trabajos [1, 2] aplican una selección de reglas junto con el ajuste de las funciones de pertenencia, aunque únicamente considerando criterios de precisión.

En este trabajo, nos centramos en dicho problema mediante el uso de Algoritmos Genéticos como herramienta para optimizar los parámetros de las funciones de pertenencia y el tamaño de la base de reglas, codificando todo (reglas y parámetros) en el mismo cromosoma. Puesto que el problema es de naturaleza multiobjetivo, consideraremos Algoritmos Genéticos Multiobjetivo (AGMOs) [3] para obtener un conjunto de soluciones con distintos grados de precisión y número de reglas, usando ambas medidas como objetivos.

Nuestro principal objetivo es diseñar un AGMO apropiado para este problema, ya que los AGMOs estándar pueden presentar algunos problemas, como comentamos a continuación. Normalmente un AGMO se basa en obtener un conjunto de soluciones no dominadas. Sin embargo, en este problema hay soluciones que aún perteneciendo al frente de Pareto no son interesantes. Por ejemplo, no son interesantes soluciones no dominadas con un error muy alto y un número de reglas muy bajo, ya que no presentan un buen equilibrio entre interpretabilidad y precisión. Además, al existir soluciones de este tipo en el frente de Pareto, se favorece la selección de padres con un número de reglas muy distinto para el cruce, generando hijos con baja precisión (los parámetros de ajuste son muy distintos y no tiene sentido el cruce, salvo para obtener nuevas configuraciones de las reglas seleccionadas).

En nuestra propuesta, centraremos la búsqueda en la zona del pareto con soluciones que dentro de un cierto rango de precisión tengan la complejidad (número de reglas) más baja posible, intentando obtener soluciones con un bajo número de reglas pero siempre una

con una alta precisión. Para ello se propone la modificación de uno de los AGMOs más conocidos, SPEA2 [11], el cual mediante la selección de reglas y el ajuste de las funciones de pertenencia nos permitirá centrarnos en la parte del pareto que contiene las soluciones precisas con el menor número de reglas posibles. También se han realizado experimentaciones con NSGA-II [6], mostrando que no es el enfoque más adecuado para este problema.

En la siguiente Sección, se estudia la frontera del pareto para el problema que se ha presentado. El algoritmo SPEA2 se introduce en la Sección 3 junto con la mejora propuesta y los operadores genéticos considerados. La Sección 4 muestra el comportamiento del método propuesto en un problema real. Por último, en la Sección 6, se muestran algunas conclusiones.

2 Frontera de Pareto en el Problema de la Interpretabilidad-Precisión

En esta sección, se estudia qué tipo de soluciones se podrían encontrar en la frontera de Pareto óptima para el problema de optimización del error y del número de reglas mediante el ajuste de parámetros y la selección de reglas. De esta manera podremos obtener una aproximación del Pareto óptimo y determinar hacia qué zona queremos ir.

Como se ha dicho, el ajuste de funciones de pertenencia normalmente necesita que el modelo inicial tenga un número de reglas elevado para llegar a un nivel de precisión adecuado. Para conseguir que este conjunto de reglas inicial sea suficiente se suelen utilizar métodos que aseguren un nivel de cubrimiento generalmente más alto de lo que sería necesario. De esta forma también se podrían obtener reglas que aunque inicialmente son necesarias, una vez aplicado el ajuste sean innecesarias o incluso dificulten un buen ajuste de las demás. Así, podríamos encontrarnos con los siguientes tipos de reglas: *Reglas malas* (erróneas o conflictivas), que dificultan el buen funcionamiento del sistema; *Reglas redundantes o irrelevantes*, que no mejoran significativamente el rendimiento del sistema; *Reglas complementarias* que complementan a otras mejorando levemente el rendimiento del sistema; *Reglas importantes* que son necesarias para que el sistema presente un rendimiento razonable.

Teniendo en cuenta la posible existencia de estos tipos de reglas y distintas configuraciones de reglas y parámetros de ajuste, podemos distinguir las siguientes zonas en el espacio de los objetivos:

- Zona de Reglas Malas, que contiene soluciones con reglas malas. En esta zona no existiría frente de Pareto ya que al quitar este tipo de reglas mejo-

raría la precisión y dichas soluciones serían dominadas por otras.

- Zona de Reglas Redundantes o irrelevantes, formada por soluciones que ya no contienen reglas malas pero que aún mantienen reglas redundantes e irrelevantes. Quitando este tipo de reglas la precisión apenas se vería afectada.
- Zona de Reglas Complementarias, formada por soluciones sin reglas malas ni redundantes. A medida que se quiten este tipo de reglas la precisión bajaría suavemente.
- Zona de Reglas Importantes, formada por soluciones únicamente con las reglas imprescindibles. A medida que se quiten este tipo de reglas la precisión se verá fuertemente afectada.

En la gráfica 1, podemos ver una aproximación del pareto óptimo para el problema de ajuste y selección de reglas difusas con el doble objetivo de simplicidad y precisión. En dicha gráfica se muestran las distintas zonas del espacio de los objetivos junto con la zona del pareto deseada para encontrar soluciones con un buen equilibrio entre interpretabilidad y precisión. Esta zona se corresponde con la zona de reglas complementarias, es decir, deseamos quitar todas las reglas posibles sin afectar seriamente la precisión del modelo finalmente obtenido.

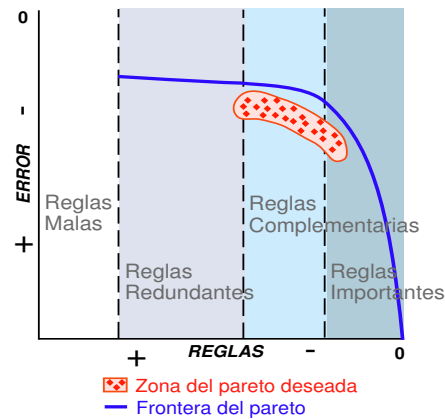


Figura 1: Frontera de Pareto.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto, el AGMO considerado no debe obtener todo el frente de Pareto, puesto que esto dificulta la obtención de soluciones precisas fomentando el cruce de soluciones con distintas configuraciones de reglas, que consiguen el óptimo con parámetros muy distintos en las funciones de pertenencia. En la siguiente sección se presenta una modificación de SPEA2 [11] con el objetivo de dirigir la búsqueda hacia la zona deseada.

3 Algoritmo SPEA2 Orientado a Precisión

En esta sección, en primer lugar presentamos las bases de SPEA2 [11], y a continuación, describimos el esquema de codificación y los operadores utilizados para la implementación del algoritmo. Por último, se proponen los cambios necesarios para orientar la búsqueda hacia la zona deseada.

3.1 SPEA2

El algoritmo SPEA2 [11] (*Strength Pareto Evolutionary Algorithm for multiobjective optimization*) es una de las técnicas más utilizadas en la resolución de problemas multiobjetivo. Éste se diferencia de otros AG-MOs en varios aspectos, entre los cuales hay dos de gran importancia:

- Incorpora una estrategia fina de asignación del fitness que considera, para cada individuo, el número de los individuos que domina y el número de los individuos por los cuales es dominado.
- Utiliza la técnica del *vecino más cercano* para la valoración de la densidad, dirigiendo la búsqueda en forma más eficiente.

Según la descripción de los autores en [11] el bucle principal de SPEA2 consta de los siguientes pasos:

Entrada: N (tamaño de la población),
 $\bar{N}$ (tamaño de la población externa),
 T (maximo número de generaciones).
 Salida: A (conjunto de no dominados).

1. Crear la población inicial P_0 y una población externa vacía $\bar{P}_0 = \emptyset$.
2. Calcular el fitness de los individuos de P_t y $\bar{P}_t$.
3. Copiar los no dominados de $P_t \cup \bar{P}_t$ en $\bar{P}_{t+1}$. Si $|\bar{P}_{t+1}| > \bar{N}$ se aplica el operador de truncamiento. Si $|\bar{P}_{t+1}| < \bar{N}$ se rellena con dominados de $P_t \cup \bar{P}_t$.
4. Si $t \geq T$, se devuelve A y acaba la ejecución.
5. Aplicar torneo binario con reemplazamiento en $\bar{P}_{t+1}$ hasta completar la población de padres.
6. Aplicar cruce y mutación para construir P_{t+1} . Volver al Paso 2 con $t = t + 1$.

3.2 Esquema de codificación y inicialización

Se utiliza un esquema de codificación doble (selección de reglas más ajuste de parámetros):

$$C^p = C_S^p C_T^p$$

- La parte C_S está formada por cadenas de binarias de longitud m (numero inicial de reglas). Cada gen tendrá el valor '1' o '0' indicando si la correspondiente regla es o no seleccionada:

$$C_S^p = (c_{S1}, \dots, c_{Sm}) \mid c_{Si} \in \{0, 1\} .$$

- La parte C_T tiene un esquema de codificación real, siendo m^i el número de etiquetas de cada una de las n variables que componen la BD.

$$C_i = (a_1^i, b_1^i, c_1^i, \dots, a_{m^i}^i, b_{m^i}^i, c_{m^i}^i), \quad i = 1, \dots, n, \\ C_T^p = C_1 C_2 \dots C_n .$$

La población inicial se obtiene de la siguiente forma:

- Para la parte C_T , se incluye la BD inicial como primer individuo. El resto de individuos son generados aleatoriamente dentro de los respectivos intervalos de variación. Dichos intervalos se calculan a partir de la BD inicial. Para cada función de pertenencia $C_i^j = (a^j, b^j, c^j)$, los intervalos de variación se calculan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [I_{a^j}^l, I_{a^j}^r] &= [a^j - (b^j - a^j)/2, a^j + (b^j - a^j)/2] \\ [I_{b^j}^l, I_{b^j}^r] &= [b^j - (b^j - a^j)/2, b^j + (c^j - b^j)/2] \\ [I_{c^j}^l, I_{c^j}^r] &= [c^j - (c^j - b^j)/2, c^j + (c^j - b^j)/2] \end{aligned}$$

- En la parte C_S todos los genes toman el valor 1 en todos los individuos de la población inicial.

3.3 Operadores de cruce y mutación

El operador de cruce depende de la parte del cromosoma donde sea aplicada:

- En la parte C_T , se considera el cruce BLX-0.5 [8].
- En la parte C_S , se utiliza el cruce HUX [7].

Finalmente, se generan 4 descendientes combinando dos hijos de la parte C_S con dos hijos de la parte C_T (los dos mejores reemplazan a los padres). El operador de mutación cambia aleatoriamente el valor de un gen en la parte C_S y en la parte C_T con probabilidad P_m .

3.4 Modificaciones Aplicadas sobre SPEA2

Para conseguir que la búsqueda se centre en la zona del frente de Pareto que nos interesa, maxima precisión con el menor número de reglas posibles, se proponen dos modificaciones con el objetivo de ejercer mayor presión selectiva en aquellas soluciones que tienen una mayor precisión. Los cambios propuestos se describen a continuación:

- Reiniciar la población a la mitad de la ejecución del algoritmo, manteniendo el individuo con mejor precisión como único individuo en la población externa ($\bar{P}_{t+1}$ con tamaño 1) y generando todos los individuos de la población (P_{t+1}) exactamente con las mismas reglas que el mejor individuo y con parámetros aleatorios dentro de los intervalos de variación. Esta operación se realizaría en el paso 4 para después volver al paso 2 con $t = t + 1$. De esta forma se centra la búsqueda únicamente en la zona del pareto que nos interesa (soluciones parecidas en una zona de alta precisión).
- En cada paso del algoritmo (antes y después del restart) se va decrementando el número de soluciones de la población externa ($\bar{P}_{t+1}$) consideradas para aplicar el torneo binario, focalizando la selección en aquellos individuos con mejor precisión. Para ello se ordenan las soluciones de mejor a peor precisión y se reduce progresivamente el número de soluciones consideradas desde el 100% al 50% a medida que van pasando el número de generaciones de cada paso.

También hay que destacar que la forma de crear la parte C_S para las soluciones de la población inicial favorece una extracción progresiva de las reglas que no mejoren con el ajuste de los parámetros, por medio de la mutación en un principio, y después por el cruce.

4 Resultados Experimentales

Para analizar el funcionamiento del método propuesto, hemos escogido un problema real [5], que consiste en estimar los costos de mantenimiento de redes eléctricas de media tensión a partir de 4 variables de entrada. Los métodos estudiados se presentan en la Tabla 1. El método WM [10] es utilizado como método simple para la generación del sistema inicial. Los métodos T y S realizan el ajuste de parámetros y selección de reglas respectivamente. TS es la unión de T y S en un mismo algoritmo. Todos ellos consideran como único objetivo la precisión del modelo. El resto son AGMOs con y sin las modificaciones propuestas (todos realizan selección de reglas y ajuste de parámetros con dos objetivos, precisión y número de reglas).

Las particiones lingüísticas consideradas tendrán *cinco términos lingüísticos* con forma triangular (número con el que los métodos presentan el mejor comportamiento). Se utiliza el *centro de gravedad ponderado por el grado de emparejamiento* como operador de defuzzificación y la *t-norma del mínimo* como operador de implicación y conjunción. Los valores de los parámetros utilizados en todos los experimentos presentados son: 200 de longitud de la población, 61 de

Tabla 1: Métodos analizados.

Ref.	Método	Descripción
[10]	WM	Wang & Mendel
[2]	WM+T	Ajuste de Parámetros
[2]	WM+S	Selección de Reglas
[2]	WM+TS	Ajuste y Selección de Reglas
[11]	SPEA2	Algoritmo SPEA2
—	SPEA2_{ACC}	Modificación de SPEA2 orientada a precisión (<i>accuracy oriented</i>)
[6]	NSGAI	Algoritmo NSGAI
—	NSGAI_{ACC}	Modificación de NSGAI orientada a precisión (<i>accuracy oriented</i>)

longitud de la población externa (para el caso del algoritmo SPEA2 y SPEA2_{ACC}), 50000 evaluaciones y 0.2 como probabilidad de mutación por cromosoma.

4.1 Descripción del Problema

Estimar los costos de mantenimiento de la red eléctrica de media tensión de una ciudad [5] es un problema complejo pero, a la vez, muy interesante. Dado que es muy difícil obtener una medición real, la consideración de modelos resulta tremendamente útil. Estas estimaciones permiten a las compañías eléctricas justificar sus gastos. Además, el modelo debe poder explicar cómo se calcula un valor específico para una determinada ciudad. Nuestro objetivo será el de relacionar el *costo de mantenimiento* con cuatro características: *suma de las longitudes de todas las calles de la ciudad*, *área total de la ciudad*, *área ocupada por edificios*, y *energía suministrada a la ciudad*. Para ello disponemos de estimaciones de costos de mantenimiento basadas en un modelo de una red eléctrica óptima para cada ciudad, en una muestra de 1.059 ciudades.

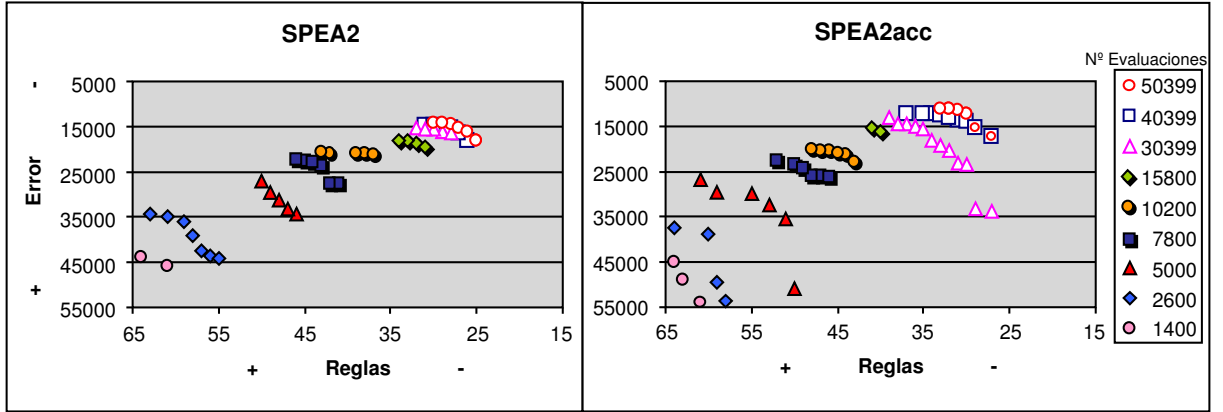
En los distintos experimentos, se trabaja con un modelo de *validación cruzada con 5 particiones* de datos, esto es, 5 particiones aleatorias al 20%, y la combinación de cuatro particiones (80%) como entrenamiento y una partición como test. Así se tienen 5 particiones al 80% y 20% en entrenamiento y test.

4.2 Resultados y Análisis

Para cada partición, todos los modelos evolutivos se ejecutan 6 veces, y se muestran los resultados medios del error para las 30 ejecuciones de cada algoritmo. En el caso de los métodos con enfoque multiobjetivo (los cuatro últimos), las medias han sido obtenidas considerando la solución más precisa de cada pareto obtenido. Los algoritmos propuestos se han comparado con varios métodos guiados por un único ob-

Tabla 2: Resultados obtenidos por los métodos estudiados

Método	#R	ECM _{ent}	σ_{ent}	t-test	ECM _{test}	σ_{test}	t-test
WM	65	57605	2841	+	57934	4733	+
WM+T	65	18602	1211	+	22666	3386	+
WM+S	40.8	41086	1322	+	59942	4931	+
WM+TS	41.9	14987	391	+	18973	3772	+
SPEA2	33	13272	1265	+	17533	3226	+
SPEA2 _{ACC}	34.5	11081	1186	*	14161	2191	*
NSGAI	41.0	14488	965	+	18419	3054	+
NSGAI _{ACC}	48.1	16321	1636	+	20423	3138	+


 Figura 2: Frentes de Pareto de *SPEA2* y *SPEA2_{acc}*.

jetivo y con el conocido NSGAI [6] (con los dos objetivos anteriormente mencionados).

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2, donde $\#R$ representa el número de reglas, ECM_{ent} y ECM_{test} el error medio en entrenamiento y test, σ la desviación típica y $t-test$ los resultados de aplicar un *test t-student* (con 95% de confianza) al mejor resultado medio de la correspondiente columna comparado 1 a 1 con el resto de resultados medios. La interpretación de esta última columna es:

- ★ Indica el resultado con la mejor media.
- + Indica un comportamiento significativamente peor que el mejor.

Analizando los resultados presentados en la Tabla 2 podemos destacar los siguientes hechos:

- El *SPEA2_{ACC}* muestra una importante reducción del error cuadrático medio respecto al error obtenido por los métodos clásicos y NSGAI.

Además mejora los resultados obtenidos por *SPEA2* con sólo 1,5 reglas más.

- Los modelos obtenidos con *SPEA2_{ACC}* presentan muy buen equilibrio entre precisión e interpretabilidad.
- NSGAI y NSGAI_{ACC} tienen un mal funcionamiento debido a que el operador de crowding hace muy difícil que se centre en la zona del pareto deseada.

En las figuras 2 y 3 se puede ver la formación del pareto durante la ejecución de cada algoritmo. En la figura 2 se puede ver como hasta la mitad de la ejecución de *SPEA2_{ACC}* (antes de que se reinicie la población) va explorando para centrarse en una zona del pareto. Después de reiniciar, se vuelve a expandir el pareto para continuar en las siguientes ejecuciones centrandose en la zona del pareto con un menor número de reglas y una buena precisión.

En el resto de métodos, figuras 2 y 3, se ve como el pareto va avanzando sin expandirse demasiado, no per-

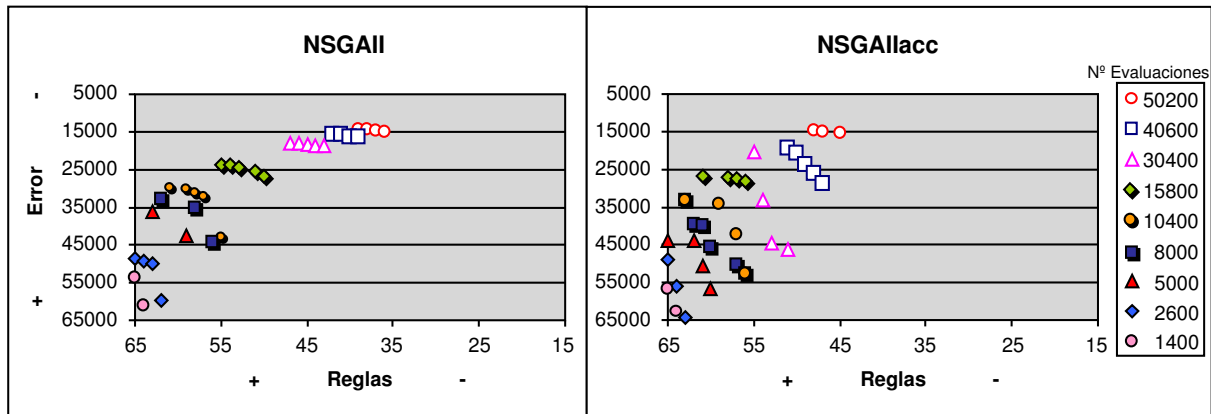


Figura 3: Frentes de Pareto de $NSGAII$ y $NSGAII_{acc}$.

mitiéndole llegar a buenos resultados ni siquiera en el caso de $NSGAII$.

5 Conclusiones

A la vista de los resultados se puede concluir que los modelos obtenidos por el método propuesto presentan un mejor equilibrio entre interpretabilidad y precisión. Al buscar una buena configuración de reglas (quitando sólo reglas de poca importancia) y centrarse en ajustar los parámetros para un conjunto de reglas pequeño, se han llegado a obtener modelos que presentan incluso mayor precisión que los métodos únicamente guiados por medidas de precisión.

Por otro lado, el algoritmo propuesto ($SPEA2_{ACC}$) puede ser útil para problemas que aunque de naturaleza multiobjetivo necesitan como solución no toda la frontera de Pareto sino un área específica del mismo.

Referencias

- [1] J. Casillas, O. Cordón, F. Herrera, L. Magdalena (Eds). Accuracy improvements in linguistic fuzzy modeling. *Springer-Verlag*, 2003.
- [2] J. Casillas, O. Cordón, M.J. del Jesus, F. Herrera. Genetic tuning of fuzzy rule deep structures preserving interpretability and its interaction with fuzzy rule set reduction. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* 13:1, Pág.1329, 2005.
- [3] C.A. Coello Coello, D.A. Van Veldhuizen, G.B. Lamont. Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems. *Kluwer Academic Publishers*, 2002.
- [4] O. Cordón, F. Herrera. A three-stage evolutionary process for learning descriptive and approximate fuzzy logic controller knowledge bases from examples. *Int. J. of Approximate Reasoning* 17:4, Pág.369-407, 1997.
- [5] O. Cordón, F. Herrera, L. Sánchez. Solving electrical distribution problems using hybrid evolutionary data analysis techniques. *Applied Intelligence* 10, Pág.5-24, 1999.
- [6] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation* 6:2, Pág.182-197, 2002.
- [7] L.J. Eshelman. The CHC adaptive search algorithm: How to have safe search when engaging in nontraditional genetic recombination. *Foundations of genetic Algorithms* 1, Pág.265-283, 1991.
- [8] L.J. Eshelman, J.D. Schaffer. Real-coded genetic algorithms and interval-schemata. *Foundations of Genetic Algorithms* 2, Pág.187-202, 1993.
- [9] K. Narukawa, Y. Nojima, H. Ishibuchi. Modification of Evolutionary Multiobjective Optimization Algorithms for Multiobjective Design of Fuzzy Rule-Based Classification Systems. *IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, Pág.809-814, 2005.
- [10] L.X. Wang, J.M. Mendel. Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* 22:6, Pág.1414-1427, 1992.
- [11] E. Zitzler, M. Laumanns, L. Thiele. SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm for multiObjective optimization. *Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems (EUROGEN'01)*, Pág.95-100, 2001.

IMPLICACIONES ENTRE ATRIBUTOS DE UN CONTEXTO L-FUZZY INTERVALO-VALORADO*

Cristina Alcalde

Dpt. Matemática Aplicada
Escuela Universitaria Politécnica
Universidad del País Vasco
Plaza de Europa 1
20018 San Sebastián, España
c.alcalde@ehu.es

Ana Burusco

Dpt. Automática y Computación.
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía
31006 Pamplona, España
burusco@si.unavarra.es

Ramón Fuentes-González

Dpt. Automática y Computación.
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía
31006 Pamplona, España
rfuentes@si.unavarra.es

Resumen

El objetivo de este trabajo es establecer distintos tipos de implicaciones entre atributos de un contexto L-Fuzzy intervalo-valorado que nos servirán para analizar las relaciones existentes entre los atributos del contexto. Para hacerlo, nos basaremos en la definición de regla de asociación.

Ilustraremos el proceso mediante un ejemplo.

Palabras Clave: Implicaciones entre atributos, reglas de asociación, adquisición de conocimiento, contextos L-Fuzzy.

$(\mathcal{J}[L], \leq)$. Dados $A \in \mathcal{J}[L]^X$ y $B \in \mathcal{J}[L]^Y$ dos conjuntos L-fuzzy intervalo-valorados, se definen los *conjuntos derivados* de A y B , denotados respectivamente por $A_1 \in \mathcal{J}[L]^Y$ y $B_2 \in \mathcal{J}[L]^X$, como:

$$A_1(y) = \inf_{x \in X} \{I(A(x), R(x, y))\}$$

$$B_2(x) = \inf_{y \in Y} \{I(B(y), R(x, y))\}$$

Estos operadores son la extensión del *operador derivación* $*$ de R.Wille [8] al caso L-fuzzy intervalo-valorado.

Definición 3. Si M es un punto fijo del operador φ definido por $\varphi(A) = (A_1)_2$, entonces (M, M_1) es un *concepto L-fuzzy intervalo-valorado* del contexto L-fuzzy intervalo-valorado $(\mathcal{J}[L], X, Y, R)$.

El conjunto de los conceptos L-fuzzy intervalo-valorados con la relación de orden $\preceq$ definida por $(A, B) \preceq (C, D) \Leftrightarrow A \leq C$ es un retículo completo.

1. INTRODUCCION. CONTEXTOS L-FUZZY INTERVALO-VALORADOS

Los contextos L-Fuzzy fueron introducidos [4, 6, 3] como una generalización de la teoría de conceptos formales de R.Wille [8].

A partir de esa idea, un contexto L-Fuzzy intervalo-valorado se define como una extensión de un contexto L-Fuzzy donde se permite que los valores que relacionan los objetos y los atributos del mismo sean intervalos [4, 5]:

Definición 1. Un *contexto L-fuzzy intervalo-valorado* es una tupla $(\mathcal{J}[L], X, Y, R)$, con X e Y dos conjuntos finitos (de *objetos* y *atributos*) y R una relación L-fuzzy intervalo-valorada entre X e Y .

Definición 2. Sea I una implicación fuzzy intervalo-valorada definida en el conjunto de intervalos cerrados

2. IMPLICACIONES ENTRE ATRIBUTOS L-FUZZY

Con el fin de establecer implicaciones entre atributos vamos a utilizar una importante herramienta para la extracción de conocimiento como son las *reglas de asociación*.

La idea de regla de asociación fue presentada por primera vez por Agrawal et al. en [1] como una implicación de la forma $B \Rightarrow C$, donde B y C son dos conjuntos de atributos denominados respectivamente *antecedente* y *consecuente*, que se verifica con un cierto soporte y grado de confianza.

El *soporte* de una regla $B \Rightarrow C$ es el porcentaje de veces que la regla predice correctamente, esto es, el porcentaje de veces que se tienen los atributos de B y los de C . Y la *confianza* de una regla es el porcentaje de veces que la regla se cumple cuando se puede aplicar, es decir, el porcentaje de veces que conteniendo los atributos de B también se tienen los de C .

G. Stumme utiliza las reglas de asociación en la teoría de conceptos formales de la siguiente forma, dado un contexto formal (G, M, I) , una implicación $B \Rightarrow C$,

*Este trabajo ha sido financiado con el proyecto TIC 2003-08693 de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia.

donde $B, C \subseteq M$ se verifica con un soporte y una confianza dados por:

$$\text{sop}(B \Rightarrow C) = \text{sop}(B \cup C) = \frac{|(B \cup C)^*|}{|G|}$$

$$\text{conf}(B \Rightarrow C) = \frac{\text{sop}(B \cup C)}{\text{sop}(B)}$$

Utilizando las reglas de asociación y la definición de soporte de un conjunto L-fuzzy, definimos en [2] el soporte y el grado de confianza de una implicación entre atributos como sigue:

Definición 4. Sea (L, X, Y, R) un contexto L-fuzzy y sean $B, C \subseteq L^Y$ dos conjuntos de atributos. El *soporte* de la implicación $B \Rightarrow C$ viene dado por

$$\text{sop}(B \Rightarrow C) = \text{sop}(B \cup C) = \frac{\sum_{x \in X} (B \cup C)_2(x)}{|X|}$$

y representa el porcentaje de objetos que comparten los atributos de B y de C .

El grado de *confianza* de la implicación es

$$\text{conf}(B \Rightarrow C) = \frac{\text{sop}(B \cup C)}{\text{sop}(B)} = \frac{\sum_{x \in X} (B \cup C)_2(x)}{\sum_{x \in X} B_2(x)}$$

y representa el porcentaje de objetos que verifican la implicación, es decir, el porcentaje de objetos que teniendo los atributos de B en un cierto grado tienen también los de C en el mismo grado.

3. IMPLICACIONES ENTRE ATRIBUTOS L-FUZZY INTERVALO-VALORADOS

Podemos extender la definición de soporte y confianza de una implicación entre atributos al caso intervalo-valorado de la siguiente manera:

Definición 5. Sea $(\mathcal{J}[L], X, Y, R)$ un contexto L-fuzzy intervalo-valorado. Dados los conjuntos de atributos $B, C \in \mathcal{J}[L]^Y$, definimos el *soporte* de la implicación $B \Rightarrow C$ como el intervalo

$$\text{sop}(B \Rightarrow C) = [l_{\text{sop}}(B \cup C), u_{\text{sop}}(B \cup C)] = \left[\frac{\sum_{x \in X} l_{(B \cup C)_2}(x)}{|X|}, \frac{\sum_{x \in X} u_{(B \cup C)_2}(x)}{|X|} \right]$$

donde la función de pertenencia del conjunto derivado B_2 viene dada por

$$B_2(x) = [l_{B_2}(x), u_{B_2}(x)]$$

La confianza de la implicación vendrá dada por el intervalo

$$\text{conf}(B \Rightarrow C) = \left[\frac{l_{\text{sop}}(B \cup C)}{u_{\text{sop}}B}, \frac{u_{\text{sop}}(B \cup C)}{l_{\text{sop}}B} \wedge 1 \right] = \left[\frac{\sum_{x \in X} l_{(B \cup C)_2}(x)}{\sum_{x \in X} u_{B_2}(x)}, \frac{\sum_{x \in X} u_{(B \cup C)_2}(x)}{\sum_{x \in X} l_{B_2}(x)} \wedge 1 \right]$$

Ejemplo.

Supongamos que para realizar el estudio de la venta mensual de una serie de productos en los distintos establecimientos de una cadena comercial tenemos recogida la cantidad de cada uno de esos productos vendida mensualmente en cada establecimiento durante los últimos meses, considerando el intervalo entre la venta mínima y la venta máxima registrada de cada producto. Los datos obtenidos se muestran a continuación:

Tabla 1: Venta mensual de los productos P_i en los establecimientos E_j

	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$
$E1$	[1250,1500]	[1200,1250]	[1200,1600]	[550,750]
$E2$	[1100,1500]	[3000,3300]	[2100,2250]	[1350,1575]
$E3$	[2450,2750]	[2500,3000]	[3500,3700]	[750,1000]
$E4$	[2500,2800]	[2750,2950]	[3100,3300]	[150,300]

Tomaremos un contexto L-Fuzzy intervalo-valorado $(\mathcal{J}[L], X, Y, R)$ donde $\mathcal{J}[L]$ es el conjunto de intervalos cerrados con extremos en la cadena $L = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$, el conjunto de objetos X será el conjunto de establecimientos, el conjunto de atributos Y el conjunto de productos y R la relación que resulte de transformar la tabla de datos dividiendo todos los elementos por el mayor de la tabla y realizando los correspondientes redondeos para que los valores pertenezcan a la cadena L .

Tabla 2: Relación L-Fuzzy intervalo-valorada R

R	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$
$E1$	[0.3,0.4]	[0.3,0.3]	[0.3,0.4]	[0.1,0.2]
$E2$	[0.3,0.4]	[0.8,0.9]	[0.6,0.6]	[0.4,0.4]
$E3$	[0.7,0.7]	[0.7,0.8]	[0.9,1]	[0.2,0.3]
$E4$	[0.7,0.8]	[0.7,0.9]	[0.8,0.9]	[0,0.1]

Podemos ahora analizar, por ejemplo, si la venta del producto $P1$ influye en la venta del producto $P2$. Analizaremos para ello la implicación $P1 \Rightarrow P2$.

Tomamos en primer lugar los conjuntos L-Fuzzy intervalo-valorados asociados a los conjuntos de atri-

butos $P1$ y $P1 \cup P2$:

$$P1 = \{P1/[1, 1], P2/[0, 0], P3/[0, 0], P4/[0, 0]\}$$

$$(P1 \cup P2) = \{P1/[1, 1], P2/[1, 1], P3/[0, 0], P4/[0, 0]\}$$

Para calcular sus conjuntos hemos utilizado la R-implicación de Lukasiewicz.

$$(P1)_2 = \{E1/[0.3, 0.4], E2/[0.3, 0.4], E3/[0.7, 0.7], E4/[0.7, 0.8]\}$$

$$(P1 \cup P2)_2 = \{E1/[0.3, 0.3], E2/[0.3, 0.4], E3/[0.7, 0.7], E4/[0.7, 0.8]\}$$

y, por lo tanto, el soporte y el nivel de confianza de la implicación serán

$$\text{sop}(P1 \Rightarrow P2) = \left[\frac{2.0}{4}, \frac{2.2}{4} \right] = [0.5, 0.55]$$

$$\text{conf}(P1 \Rightarrow P2) = \left[\frac{2.0}{2.3}, 1 \right] = [0.87, 1]$$

El soporte de la regla es de aproximadamente un 50 %, lo que nos indica que en la mitad de los establecimientos se venden los dos productos, $P1$ y $P2$, a la vez.

La confianza de la regla es muy alta (entre un 87 y un 100 %), lo que quiere decir que al menos en el 87 % de las ocasiones que se vende el producto $P1$ también se vende el producto $P2$.

Podemos, entonces, deducir que el hecho de que se venda el producto $P1$ implica que con una alta probabilidad también se venderá el producto $P2$.

4. IMPLICACIONES CON NEGACIÓN DE ATRIBUTOS EN UN CONTEXTO L-FUZZY INTERVALO-VALORADO

En el apartado anterior nos hemos servido de las reglas de asociación para establecer implicaciones entre atributos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estas reglas de asociación no funcionan bien cuando se estudia la negación de un atributo (por ejemplo, “Si utilizo el ingrediente azúcar, no utilizo el ingrediente sacarina”).

Vamos a estudiar este tipo de situaciones para poder analizar el caso de implicaciones entre valores altos o bajos de un atributo y valores altos o bajos de otro. Consideraremos en primer lugar el caso de implicaciones en las cuales se analiza la ausencia de uno o varios atributos.

Para hacerlo, a partir del contexto original $(\mathcal{J}[L], X, Y, R)$ construiremos un nuevo contexto, $(\mathcal{J}[L], X, \hat{Y}, \bar{R})$, donde $\hat{Y}$ estará formado por los

valores de Y y las negaciones de los atributos cuyos valores bajos queramos analizar, de forma que $\bar{R}(x_i, \bar{y}_j) = [1 - b, 1 - a]$ si $R(x_i, y_j) = [a, b]$.

A partir de aquí, podemos utilizar la definición de soporte y confianza de una implicación entre dos conjuntos de atributos de un contexto L-Fuzzy intervalo-valorado para estudiar este caso.

Veamos cómo se trataría una implicación de este tipo:

Ejemplo.

Volviendo al ejemplo del apartado anterior, supongamos ahora que queremos analizar si la venta de $P3$ influye en que no se vendan $P1$ o $P4$. Para hacerlo, estudiaremos las implicaciones $P3 \Rightarrow \bar{P1}$ y $P3 \Rightarrow \bar{P4}$. Tal y como hemos comentado, comenzaremos añadiendo dos nuevas columnas a la tabla de la relación del contexto que serán las correspondientes a los atributos $\bar{P1}$ y $\bar{P4}$, obteniendo la siguiente relación extendida:

Tabla 3: Relación L-Fuzzy intervalo-valorada $\bar{R}$ extendida

$\bar{R}$	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$\bar{P1}$	$\bar{P4}$
$E1$	[0.3,0.4]	[0.3,0.3]	[0.3,0.4]	[0.1,0.2]	[0.6,0.7]	[0.8,0.9]
$E2$	[0.3,0.4]	[0.8,0.9]	[0.6,0.6]	[0.4,0.4]	[0.6,0.7]	[0.6,0.6]
$E3$	[0.7,0.7]	[0.7,0.8]	[0.9,1]	[0.2,0.3]	[0.3,0.3]	[0.7,0.8]
$E4$	[0.7,0.8]	[0.7,0.9]	[0.8,0.9]	[0,0.1]	[0.2,0.3]	[0.9,1]

Sean $P3 = \{P1/0, P2/0, P3/1, P4/0, \bar{P1}/0, \bar{P4}/0\}$, $\bar{P1} = \{P1/0, P2/0, P3/0, P4/0, \bar{P1}/1, \bar{P4}/0\}$ y $\bar{P4} = \{P1/0, P2/0, P3/0, P4/0, \bar{P1}/0, \bar{P4}/1\}$. Vamos a estudiar las siguientes implicaciones:

■ Implicación $P3 \Rightarrow \bar{P1}$

$$\text{sop}(P3 \Rightarrow \bar{P1}) = \left[\frac{1.4}{4}, \frac{1.6}{4} \right] = [0.35, 0.4]$$

$$\text{conf}(P3 \Rightarrow \bar{P1}) = \left[\frac{1.4}{2.9}, \frac{1.6}{2.6} \right] = [0.48, 0.61]$$

■ Implicación $P3 \Rightarrow \bar{P4}$

$$\text{sop}(P3 \Rightarrow \bar{P4}) = \left[\frac{2.6}{4}, \frac{2.7}{4} \right] = [0.65, 0.67]$$

$$\text{conf}(P3 \Rightarrow \bar{P4}) = \left[\frac{2.6}{2.9}, 1 \right] = [0.9, 1]$$

De estas dos reglas podemos deducir que el porcentaje de establecimientos donde se vende el producto $P3$ y no se vende el producto $P4$ es más alto (soporte entre el 65 y el 67 %) que donde se vende $P3$ y no $P1$ (entre un 35 y un 40 %); además la confianza de la regla en el segundo caso es también mucho mayor (como mínimo un 90 %). Podríamos concluir que hay una clara relación entre la venta de $P3$ y la no venta de $P4$, y no así en el otro caso.

5. IMPLICACIONES ENTRE ATRIBUTOS ASOCIADAS A ETIQUETAS

Si ahora queremos ir más lejos e intentamos definir implicaciones fuzzy entre los atributos que respondan a preguntas generales del tipo: Si las ventas del producto P1 son altas (medias, bajas, bastante bajas etc...) las de P1 son altas (medias, bajas, bastante bajas etc...), nos damos cuenta de que la forma de operar que proponíamos en lo expuesto anteriormente no nos sirve. Hemos resuelto el problema para el caso de presencias o ausencias de atributos, pero no para valores intermedios cualesquiera.

Para poder estudiar todos los posibles valores de unos ciertos atributos, empezaremos por definir el conjunto Q de etiquetas con el que queremos trabajar y asignar intervalos a esas etiquetas: Por ejemplo, supongamos que nos interesa tomar como etiquetas $Q = \{\text{alto}, \text{medio}, \text{bajo}\}$ y los valores que asociamos a esas etiquetas son: $\text{alto}=[0.8,1]$, $\text{medio}=[0.4,0.6]$ y $\text{bajo}=[0,0.2]$.

Entonces, para cada columna de la relación que corresponde a uno de los atributos y que queremos estudiar, podrán surgir 3 nuevas columnas cuyos valores tendremos que calcular y que tratarán de medir la semejanza entre los correspondientes valores de la relación $R(x, y)$ y los intervalos que hemos tomado para representar las etiquetas.

En definitiva, nuevamente tendremos que ampliar el conjunto de atributos y pasar a un contexto L-Fuzzy $(L, X, \hat{Y}, Q, \hat{R})$.

5.1. GRADO DE SEMEJANZA ENTRE INTERVALOS DE $\mathcal{J}[L]$

Definiremos en primer lugar una función intervalo-valorada que represente mediante un intervalo la diferencia existente entre otros dos.

Definición 6. Llamaremos *disimilitud intervalo-valorada* a toda función Ds definida en el conjunto de intervalos $\mathcal{J}[L]$:

$$Ds: \mathcal{J}[L] \times \mathcal{J}[L] \longrightarrow \mathcal{J}[\mathbb{R}]$$

donde

$$Ds([a, b], [c, d]) = \left[\min_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} d(x, y), \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} d(x, y) \right]$$

siendo d una distancia definida en L .

Esto es, la disimilitud intervalo-valorada entre dos intervalos representa el intervalo en el que puede variar la distancia existente entre un punto cualquiera del primer intervalo y un punto cualquiera del segundo.

Propiedades. Toda disimilitud intervalo-valorada verifica las siguientes propiedades:

1. Es una función simétrica:

$$Ds([a, b], [c, d]) = Ds([c, d], [a, b]) \\ \forall [a, b], [c, d] \in \mathcal{J}[L]$$

2. Es una extensión al conjunto de intervalos de la distancia d definida en L . Esto es,

$$Ds([a, a], [b, b]) = [d(a, b), d(a, b)], \quad \forall a, b \in L$$

Observación. Una disimilitud intervalo-valorada no es una distancia ya que no verifica que

$$Ds([a, b], [c, d]) = [0, 0] \iff [a, b] = [c, d]$$

Efectivamente, si $a \neq b$

$$Ds([a, b], [a, b]) = \left[\min_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b}} d(x, y), \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b}} d(x, y) \right] = \\ = \left[0, \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b}} d(x, y) \right] \neq [0, 0]$$

Definición 7. Si consideramos en $L = [0, 1]$ la distancia usual $d(a, b) = |b - a|$, la disimilitud intervalo-valorada obtenida

$$Ds([a, b], [c, d]) = \left[\min_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} |y - x|, \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d}} |y - x| \right]$$

toma valores en el conjunto de intervalos $\mathcal{J}[L]$ y la llamaremos $\mathcal{J}[L]$ -disimilitud.

Se observa, mediante una sencilla comprobación, que podemos calcular equivalentemente la $\mathcal{J}[L]$ -disimilitud como

$$Ds([a, b], [c, d]) = \\ = [\max\{c - b, a - d, 0\}, \max\{d - a, b - c\}]$$

Tras analizar el modo de calcular la disimilitud entre dos intervalos, pasamos a continuación a definir el grado de semejanza existente entre ellos.

Definición 8. Definimos el *grado de semejanza* entre dos intervalos como el complementario de su $\mathcal{J}[L]$ -disimilitud:

$$Gs([a, b], [c, d]) = \overline{Ds([a, b], [c, d])}$$

5.2. ANÁLISIS DE IMPLICACIONES ENTRE ATRIBUTOS ASOCIADAS A ETIQUETAS

Tal y como indicábamos anteriormente, para estudiar las implicaciones entre valores intermedios de los atributos, comenzaremos por definir el conjunto Q de etiquetas con las que vamos a trabajar y asignaremos valores a dichas etiquetas. Posteriormente extendaremos la relación $R(x, y)$ del contexto que analizamos con tantas nuevas columnas como el número de atributos multiplicado por el número de etiquetas distintas que consideremos. Los valores $\widehat{R}(x, y_q)$ de las columnas añadidas en la nueva relación vendrán dadas por el grado de semejanza entre el valor de $R(x, y)$ y el intervalo asociado a la etiqueta q :

$$\widehat{R}(x, y_q) = \text{Gs}(R(x, y), q)$$

Si queremos analizar por ejemplo si la existencia de una gran cantidad del atributo A implica una cantidad media del atributo B, deberíamos ampliar el contexto con la columna correspondiente al nuevo atributo B_{medio} y estudiaríamos la implicación $A \Rightarrow B_{medio}$.

Ejemplo.

Volvamos al ejemplo con el que hemos estado trabajando al comienzo del capítulo. En la Tabla 1 teníamos recogida la venta mensual de una serie de productos P_i en los establecimientos E_j .

Hemos visto que la implicación $P3 \rightarrow \overline{P1}$ tiene un soporte entre un 35 y un 40 % y una confianza entre un 48 y un 61 %. Sin embargo, vamos a ver que si modificamos un poco la regla, los resultados son mejores. Vamos a estudiar la regla $P3 \rightarrow P1_{medio}$. Comenzaremos asignando el intervalo $[0.4, 0.6]$ a la etiqueta *medio* y extendaremos el conjunto de atributos con un nuevo elemento al que llamaremos $P1_{medio}$. Esto supondrá en la práctica, añadir una nueva columna al contexto calculándose los correspondientes valores con la semejanza dados por:

$$\widehat{R}(E_i, P1_{medio}) = \text{Gs}(R(E_i, P1), medio)$$

Tabla 4: Contexto L-Fuzzy $(L, X, \widehat{Y}, Q, \widehat{R})$

$\widehat{R}$	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$P1_{medio}$
$E1$	[0.3,0.4]	[0.3,0.3]	[0.3,0.4]	[0.1,0.2]	[0.7,1]
$E2$	[0.3,0.4]	[0.8,0.9]	[0.6,0.6]	[0.4,0.4]	[0.7,1]
$E3$	[0.7,0.7]	[0.7,0.8]	[0.9,1]	[0.2,0.3]	[0.7,0.9]
$E4$	[0.7,0.8]	[0.7,0.9]	[0.8,0.9]	[0.0,1]	[0.6,0.9]

Tomemos ahora

$$P3 = \{P1/[0, 0], P2/[0, 0], P3/[1, 1], P4/[0, 0], P1_{medio}/[0, 0]\}$$

$$P1_{medio} = \{P1/[0, 0], P2/[0, 0], P3/[0, 0], P4/[0, 0], P1_{medio}/[1, 1]\}$$

Vamos a estudiar la implicación:

- Implicación $P3 \Rightarrow P1_{medio}$

$$\text{sop}(P3 \Rightarrow P1_{medio}) = \left[\frac{2.2}{4}, \frac{2.8}{4} \right] = [0.55, 0.7]$$

$$\text{conf}(P3 \Rightarrow P1_{medio}) = \left[\frac{2.2}{2.9}, 1 \right] = [0.76, 1]$$

Efectivamente, hemos mejorado los valores de soporte y confianza en esta regla y, por lo tanto, la información obtenida. Podemos deducir que entre un 55 y un 70 % de las ocasiones se vende una gran cantidad del producto $P3$ y una cantidad media del producto $P1$. Además en la mayoría (entre un 76 y un 100 %) de las veces que se vende una gran cantidad del producto $P3$ se vende también una cantidad media del producto $P1$.

De manera análoga, podríamos estudiar si la presencia de una gran cantidad del producto $P3$ implica una cantidad baja o alta del producto $P1$. Ampliaremos para ello la tabla de la relación con dos nuevas columnas, obteniendo la Tabla 5.

Tabla 5: Nuevo contexto L-Fuzzy $(L, X, \widehat{Y}, Q, \widehat{R})$

$\widehat{R}$	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$P1_{bajo}$	$P1_{alto}$
$E1$	[0.3,0.4]	[0.3,0.3]	[0.3,0.4]	[0.1,0.2]	[0.6,0.9]	[0.3,0.6]
$E2$	[0.3,0.4]	[0.8,0.9]	[0.6,0.6]	[0.4,0.4]	[0.6,0.9]	[0.3,0.6]
$E3$	[0.7,0.7]	[0.7,0.8]	[0.9,1]	[0.2,0.3]	[0.3,0.5]	[0.7,0.9]
$E4$	[0.7,0.8]	[0.7,0.9]	[0.8,0.9]	[0.0,1]	[0.2,0.5]	[0.7,1]

Calculamos el soporte y la confianza de las implicaciones como hemos hecho anteriormente obteniendo los valores siguientes:

- Implicación $P3 \Rightarrow P1_{bajo}$

$$\text{sop}(P3 \Rightarrow P1_{bajo}) = \left[\frac{1.1}{4}, \frac{2.0}{4} \right] = [0.27, 0.5]$$

$$\text{conf}(P3 \Rightarrow P1_{bajo}) = \left[\frac{1.1}{2.9}, \frac{2.0}{2.6} \right] = [0.38, 0.77]$$

- Implicación $P3 \Rightarrow P1_{alto}$

$$\text{sop}(P3 \Rightarrow P1_{alto}) = \left[\frac{2.0}{4}, \frac{2.8}{4} \right] = [0.5, 0.7]$$

$$\text{conf}(P3 \Rightarrow P1_{alto}) = \left[\frac{2.0}{2.9}, 1 \right] = [0.69, 1]$$

Como se puede ver, la implicación que mayor soporte y nivel de confianza tiene es $P3 \Rightarrow P1_{medio}$. Sin embargo los valores obtenidos para la implicación $P3 \Rightarrow P1_{alto}$ son menores pero la diferencia es muy pequeña, por lo que podríamos pensar en variar las etiquetas que consideramos con el fin de mejorar los resultados. Así, por ejemplo, podríamos considerar la etiqueta *medio – alto* = [0.6, 0.8] y analizar la implicación $P3 \Rightarrow P1_{medio-alto}$.

$\hat{R}$	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$P1_{medio-alto}$
$E1$	[0.3,0.4]	[0.3,0.3]	[0.3,0.4]	[0.1,0.2]	[0.5,0.8]
$E2$	[0.3,0.4]	[0.8,0.9]	[0.6,0.6]	[0.4,0.4]	[0.5,0.8]
$E3$	[0.7,0.7]	[0.7,0.8]	[0.9,1]	[0.2,0.3]	[0.9,1]
$E4$	[0.7,0.8]	[0.7,0.9]	[0.8,0.9]	[0,0.1]	[0.8,1]

$$\text{sop}(P3 \Rightarrow P1_{medio-alto}) = \left[\frac{2.5}{4}, \frac{2.9}{4} \right] = [0.62, 0.72]$$

$$\text{conf}(P3 \Rightarrow P1_{medio-alto}) = \left[\frac{2.7}{2.9}, 1 \right] = [0.93, 1]$$

De donde podemos deducir que en un porcentaje muy alto de los casos, entre un 62 y un 72 %, se vende una gran cantidad del producto $P3$ y una cantidad entre media y alta del producto $P1$. Además prácticamente en todas las ocasiones en las que se vende una gran cantidad del producto $P3$, la venta del producto $P1$ es entre media y alta.

Proposición 1. *Tanto las implicaciones entre atributos como las implicaciones con negación de atributos son un caso particular de implicaciones entre atributos asociadas a etiquetas.*

Demostración.

Veamos en primer lugar que se obtienen los mismos valores con las implicaciones entre atributos que con las implicaciones asociadas a etiquetas.

Si elegimos la etiqueta *muyalto* = [1, 1], como la $\mathcal{J}[L]$ -disimilitud entre intervalos que estamos considerando verifica

$$\begin{aligned} \text{Ds}([a, b], [1, 1]) &= \\ &= [\text{máx}\{1 - b, a - 1, 0\}, \text{máx}\{1 - a, b - 1\}] = \\ &= [1 - b, 1 - a] = \overline{[a, b]} \end{aligned}$$

tenemos que

$$\text{Gs}([a, b], [1, 1]) = [a, b]$$

y en consecuencia

$$\hat{R}(x, y_{muyalto}) = \text{Gs}(R(x, y), muyalto) = R(x, y)$$

Esto es, obtendríamos los mismos resultados con los dos tipos de implicaciones.

Análogamente, para el caso de las implicaciones con negación de atributos podemos considerar la etiqueta *muybajo* = [0, 0], y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \text{Ds}([a, b], [0, 0]) &= \\ &= [\text{máx}\{0 - b, a - 0, 0\}, \text{máx}\{0 - a, b - 0\}] = [a, b] \end{aligned}$$

se verifica

$$\begin{aligned} \hat{R}(x, y_{muybajo}) &= \text{Gs}(R(x, y), muybajo) = \\ &= \overline{\overline{R(x, y)}} = \bar{R}(x, \bar{y}) \end{aligned}$$

y también en este caso los valores obtenidos con los dos tipos de implicaciones serían iguales. $\square$

5.3. LINEAS FUTURAS

En trabajos futuros, utilizaremos estas implicaciones para reemplazar los valores ausentes de un contexto L-Fuzzy intervalo-valorado.

Referencias

- [1] R.Agrawal, T.Imielinski, A.Swami. Mining association rules between sets of items in large databases. *Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*. Washington, (1993), pp.207-216.
- [2] C.Alcalde, A.Burusco, R.Fuentes-González. Treatment of the incomplete information in L-Fuzzy contexts. *EUSFLAT-LFA 2005*. Barcelona (2005), pp.518-523.
- [3] R.Bělohlávek, Fuzzy Galois connections and fuzzy concept lattices: from binary relations to conceptual structures, in: Novak V., Perfilova I. (eds.): *Discovering the World with Fuzzy Logic*, Physica-Verlag (2000), pp.462-494.
- [4] A.Burusco, R.Fuentes-González. The Study of the L-Fuzzy Concept Lattice. *Mathware and Computing*. 1 No.3 (1994), pp.209-218.
- [5] A.Burusco, R.Fuentes-González. The study of the interval-valued contexts. *Fuzzy Sets and Systems*. 121 No.3 (2001), pp.439-452.
- [6] S.Pollandt, *Fuzzy Begriffe: Formale Begriffsanalyse unscharfer Daten*, Springer, (1997).
- [7] G.Stumme, R.Taouil, Y.Bastide, N.Pasquier, L.Lakhal. Computing iceberg concept lattices with TITANIC. *Data & Knowledge Engineering*. 42 (2002), pp.189-222.
- [8] R.Wille, Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts, in: Rival I.(ed.), *Ordered Sets*, Reidel, Dordrecht-Boston, (1982), pp.445-470.

Aumentar la Interpretabilidad de Bases de Conocimiento Lingüísticas por medio de un Proceso de Simplificación

José M. Alonso
ETSI Telecomunicación
Universidad Politécnica de Madrid
Ciudad Universitaria
28040 Madrid, España
jmam@mat.upm.es

Luis Magdalena
European Centre
for Soft Computing
Edificio Científico-Tecnológico
33600 Mieres
Asturias, España
luis.magdalena@softcomputing.es

Serge Guillaume
Cemagref, Montpellier
BP 5095, 34196 Montpellier
Cedex 5, Francia
serge.guillaume@montpellier.cemagref.fr

Resumen

Este artículo presenta un proceso de simplificación de bases de conocimiento lingüísticas con el objetivo de incrementar su interpretabilidad. Se toma como punto de partida una base de conocimiento compuesta de variables y reglas lingüísticas, y tras un proceso iterativo produce como resultado una nueva base de conocimiento más compacta que la original, con un buen equilibrio entre precisión e interpretabilidad. Se describe en detalle cada una de las fases del proceso, y se comentan los resultados obtenidos en dos problemas de clasificación muy conocidos (Iris y Wine).

Palabras Clave: Simplificación, bases de conocimiento lingüísticas, interpretabilidad, precisión.

1. Introducción

La interpretabilidad de los sistemas borrosos es su principal virtud. La lógica borrosa ofrece una gran expresividad semántica, muy próxima al lenguaje natural empleado por los humanos. Esto reduce el esfuerzo de extracción y representación de conocimiento. Pero además, tanto el conocimiento procedente de expertos, como aquel que se puede extraer de datos experimentales, pueden ser formalizados de acuerdo con un mismo tipo de representación. Esto hace posible que los procesos a realizar sobre la base de conocimiento (análisis, simplificación, mantenimiento, etc.) sean independientes del mecanismo utilizado para extraer dicho conocimiento.

Sin embargo, aunque el formalismo borroso favorece la interpretabilidad, no la garantiza. Para asegurar que

el sistema construido es interpretable, es necesario tener en cuenta ciertas restricciones. En el modelado de sistemas borrosos existen dos objetivos principales, la precisión y la interpretabilidad. Encontrar un buen equilibrio entre ambos es una tarea muy complicada. En los sistemas donde prima la interpretabilidad, se relajan un poco los requisitos de precisión, y viceversa. En todo caso, esto no quiere decir que la precisión no se tenga en cuenta, ya que por muy interpretable que sea, un sistema que no alcance un mínimo de precisión, no servirá para nada.

Para que una base de conocimiento sea interpretable debe tener unas dimensiones reducidas. Sin embargo, los algoritmos que inducen reglas a partir de datos suelen generar un gran número de reglas que cubren todo el espacio de entrada. Además, estas reglas suelen ser completas, utilizan todas las variables. Ambas cosas dificultan la interpretabilidad.

Esto se puede relacionar con el principio de incompatibilidad enunciado por Zadeh en [9]: *a medida que la complejidad de un problema crece, disminuye la posibilidad de analizarlo en términos precisos y relevantes de forma simultánea*. En sistemas complejos, con un gran número de variables, el uso de reglas completas hace muy difícil entender el comportamiento global del sistema. Analizar reglas con una variable de entrada es trivial. Con dos, la tarea es más difícil, aunque las reglas se pueden representar en forma de tabla lo que hace que el análisis sea relativamente sencillo. Sin embargo, con tres o más variables el análisis es bastante complejo. En resumen, según aumenta el número de variables utilizadas en las reglas, la interpretación de éstas resulta más difícil, pero además el incremento de complejidad no es lineal.

En este trabajo se propone un algoritmo de simplificación que reduce el tamaño de la base de conocimiento (para mejorar su interpretabilidad), tanto a nivel de particiones como de reglas, pero sin reducir la precisión inicial por debajo de un umbral máximo.

En la sección 2 se describe el tipo de bases de conocimiento utilizadas. A continuación, en la sección 3 se cuenta cómo evaluar la calidad de la base de conocimiento. En la sección 4 se explican en detalle todas las fases del proceso de simplificación. Después, la sección 5 comenta algunos de los resultados obtenidos en dos problemas de clasificación. Por último, el artículo termina con unas breves conclusiones.

2. Base de conocimiento

Consideramos sistemas borrosos que trabajan con bases de conocimiento lingüísticas construidas siguiendo el enfoque propuesto en [3]. Están formadas por dos elementos: la base de datos (variables lingüísticas) y la base de reglas.

La base de reglas está formada por reglas de tipo Mamdani[6] de la forma **Si condición entonces conclusión**, donde ambas, condición y conclusión, se expresan a través de proposiciones borrosas que utilizan las variables lingüísticas cuya semántica ha sido definida previamente (semántica global), seleccionando la etiqueta asociada a cada variable, con ciertas restricciones. Se pueden utilizar etiquetas elementales o compuestas (que incluyen operadores de disyunción y negación¹). Las etiquetas compuestas con el operador de disyunción se definen como la agregación de los términos elementales que combinan². Y las compuestas con el operador de negación se transforman en una o dos agregaciones como las antes descritas, mediante la ecuación 1.

$$NO(A_i) \Rightarrow \begin{cases} A_1 \cup \dots \cup A_{i-1} \\ A_{i+1} \cup \dots \cup A_N \end{cases} \quad (1)$$

Para garantizar la interpretabilidad a nivel de particiones se utilizan particiones borrosas fuertes [7] que satisfacen las siguientes condiciones (2, 3), donde U es el universo de discurso, N es el número de términos y $\mu_{A_i}(x)$ es el grado de pertenencia de x al conjunto borroso A_i .

$$\forall x \in U, \sum_{i=1}^N \mu_{A_i}(x) = 1 \quad (2)$$

$$\forall A_i \exists x, \mu_{A_i}(x) = 1 \quad (3)$$

El uso de estas particiones asegura entre otras las siguientes propiedades:

¹La definición de estos operadores se detalla en [2].

²La combinación de etiquetas con el operador de disyunción se limita a términos vecinos para asegurar que el conjunto agregado sea conexo, en términos lingüísticos, y convexo.

- Asociar de forma clara un término lingüístico con cada función de pertenencia.
- Trabajar con funciones de pertenencia normales. Aquellas que cumplen la ecuación 3.
- Utilizar funciones de pertenencia que cubran todo el rango de la variable, con un solapamiento entre ellas que garantice que para cualquier punto del rango siempre exista un conjunto borroso tal que su grado de pertenencia al mismo sea mayor que ϵ (grado de cobertura).

$$\forall x \in U, \exists i : 1 \leq i \leq N, \mu_{A_i}(x) > \epsilon, \epsilon \geq 0 \quad (4)$$

- Trabajar con conjuntos borrosos convexos.

3. Interpretabilidad y precisión

La calidad de un sistema de inferencia borroso se puede medir en términos de precisión y/o interpretabilidad. Y lo más difícil es encontrar el equilibrio adecuado entre ambos [1].

Un sistema es más preciso cuanto más se aproxima su comportamiento al del sistema real que modela. Considerando que el proceso de simplificación que se presenta en este artículo se ha probado en problemas de clasificación, hemos utilizado los siguientes índices para medir la precisión:

- **Casos no clasificados:** Porcentaje de ejemplos que no activan al menos una regla con un grado mayor que Δ .
- **Casos de error:** Porcentaje de ejemplos clasificados (aquellos que activan al menos una regla con un grado mayor que Δ) en los cuales los valores observados e inferidos son diferentes.
- **Casos de ambigüedad:** Porcentaje de ejemplos clasificados en los cuales la diferencia entre los valores inferidos para dos o más clases de salida es inferior a un umbral establecido.

La interpretabilidad será mayor cuanto más compacta sea la base de conocimiento. La compacidad se puede valorar en función del número de reglas, premisas, etiquetas por variables, etc.

Todas las operaciones realizadas en el proceso de simplificación están encaminadas a reducir la dimensión de la base de conocimiento, tanto a nivel de particiones como de reglas. Sin embargo, antes de realizar ningún cambio se comprobará que no se supera el umbral de pérdida de precisión estableciendo.

Así mismo, con el fin de preservar la coherencia de la base de conocimiento, se asegurará que la modificación no genere conflictos lingüísticos entre reglas. Como ejemplo podemos citar el caso de dos reglas con diferente conclusión y premisas parcialmente redundantes. Gracias a la semántica global utilizada, estos conflictos se pueden detectar a partir de un análisis lingüístico de la base de reglas, es decir, a un nivel puramente simbólico.

4. Simplificación

El objetivo del proceso de simplificación es compactar la base de conocimiento, eliminando redundancias y fusionando información, para mejorar la interpretabilidad, pero manteniendo la precisión por encima del umbral de pérdida. La compactación será mayor cuanto mayor sea este umbral (por defecto su valor es cero). El proceso global se muestra en la figura 1. Es un proceso iterativo porque la simplificación de la base de datos afecta a la simplificación de la base de reglas y viceversa.

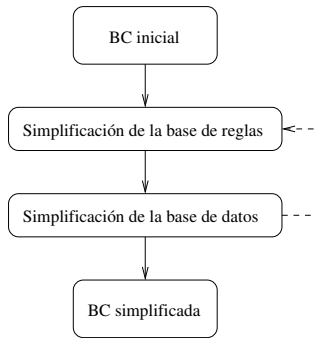


Figura 1: Proceso de simplificación de la BC.

4.1. Simplificar la base de reglas

La simplificación de la base de reglas incluye los cuatro pasos que se ven en la figura 2.

El resultado de los dos primeros es independiente del orden de las reglas. Se empieza por analizar y resolver conflictos entre reglas (eliminar redundancias y corregir contradicciones). Después se procede a buscar reglas con la misma conclusión y estudiar si es posible fusionarlas. Se intentará construir reglas incompletas, con el menor número posible de variables de entrada utilizadas por regla. Dos reglas se pueden agrupar si satisfacen la siguiente condición: tienen la misma conclusión y sus premisas se pueden agrupar, es decir, para cada variable de entrada existe un término lingüístico compuesto, equivalente a la agrupación de las etiquetas usadas en ambas reglas.

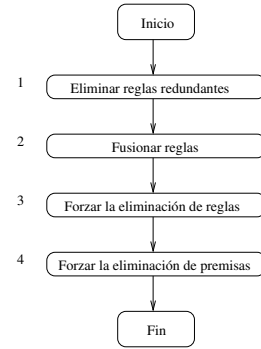


Figura 2: Proceso de simplificación de la base de reglas.

Por el contrario, el resultado de los dos últimos pasos sí depende del orden de las reglas (y del orden de las variables en las reglas) porque el resultado de la inferencia (y de la evaluación de calidad) depende de la agregación de todas las reglas. Por ejemplo, supongamos que permitimos una pérdida máxima de precisión de $X\%$. Si al eliminar las reglas i y j se producen unas pérdidas de x_i y x_j , respectivamente, tales que $x_i + x_j > X$. Entonces, para no superar el umbral de pérdida sólo se puede eliminar una de las reglas, y dependiendo del orden eliminaremos una u otra.

Para evitar estos problemas es necesario realizar una ordenación previa a la simplificación. Como paso previo a *Forzar³ la eliminación de reglas*, éstas se ordenan por orden de importancia. La eliminación comienza por la última regla, la menos importante.

Para determinar la importancia de cada una de las reglas es necesario realizar dos pasos:

- Primero se clasifican los ejemplos en dos grandes grupos: positivos (aquellos cuya conclusión coincide con la de la regla) y negativos (el resto).
- A continuación se realiza una inferencia sobre el conjunto de datos de entrenamiento, acumulando el nivel de activación de la regla para los ejemplos positivos y negativos, respectivamente. La diferencia absoluta entre estos dos valores nos indica el grado de importancia de la regla.

Por la misma razón, antes de *Forzar la eliminación de premisas* es necesario establecer una doble ordenación. Hay que ordenar las reglas por el número de premisas (empezaremos la simplificación por las reglas más complejas, aquellas con mayor número de premisas), y de-

³Forzar la eliminación de un elemento (regla, premisa, o variable) de la base de conocimiento, implica su eliminación de forma deliberada, aunque a priori nada indique que se puede suprimir. Se trata de un proceso de prueba y error. Si con la eliminación se reduce la precisión, el elemento se restituye. De lo contrario queda suprimido.

cidir el orden en que se van a intentar eliminar éstas. Las variables de entrada se clasifican según su grado de utilización en las reglas. Primero se intenta eliminar las premisas que corresponden a las variables menos usadas, con ello se pretende que estas variables sean eliminadas en la simplificación de la base de datos.

4.2. Simplificar la base de datos

La simplificación de la base de datos se realiza en cuatro pasos (ver la figura 3). El resultado de los tres primeros no depende del orden. Al eliminar o fusionar etiquetas se modifican los conjuntos borrosos elementales de la partición de partida para que la resultante siga siendo fuerte. Al eliminar una etiqueta, los conjuntos borrosos adyacentes al eliminado, los inmediatamente anterior y posterior, se expanden. El límite derecho del conjunto borroso anterior, y el izquierdo del posterior se desplazan hasta el centro del otro. Las etiquetas fusionadas son sustituidas por una única etiqueta que las agrupa y pasa a ser considerada como una etiqueta elemental más, y por tanto indivisible. Esta agrupación también implica modificar la partición borrosa.

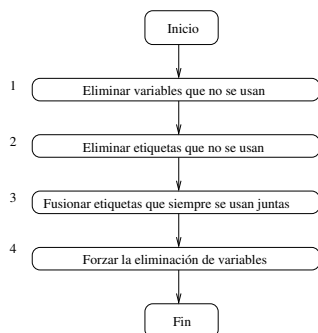


Figura 3: Proceso de simplificación de la base de datos.

Por ejemplo, la figura 4 muestra cómo cambia una partición fuerte con cinco etiquetas (parte alta de la figura) al sufrir dos modificaciones consecutivas: Primero se ha eliminado A_2 (se puede apreciar la expansión de los vecinos en la parte central de la figura), después se han fusionado A_3 y A_4 (el resultado se puede ver en la parte baja de la figura). Es importante resaltar que después de las modificaciones la partición resultante sigue siendo fuerte.

Para evitar la dependencia del orden en el último paso de la simplificación (ver la figura 3), las entradas se clasifican según su grado de utilización en las reglas. Se empieza por *Forzar la eliminación* de las variables más usadas. Intuitivamente puede parecer que una variable muy usada no se podrá eliminar. Sin embargo, damos prioridad a estas variables porque en caso de poder ser eliminadas la mejora de interpretabilidad será mayor.

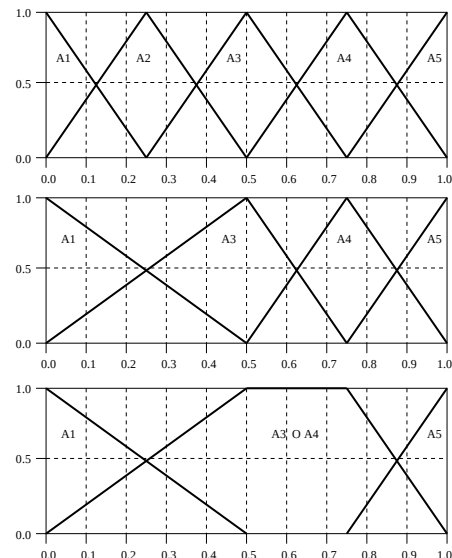


Figura 4: Eliminación y fusión de etiquetas en una partición borrosa fuerte.

5. Resultados

El proceso de simplificación propuesto se ha probado en dos problemas de clasificación muy conocidos⁴:

- IRIS (clasificación de plantas). El conjunto de datos está formado por 150 ejemplos. Corresponden a cuatro variables de entrada (anchura y longitud de sépalo y pétalo), y a una salida, que representa a las tres clases de iris (Setosa, Versicolor, y Virginica).
- WINE (clasificación de vinos). Se trata de 178 ejemplos obtenidos como resultado de un análisis químico de vinos producidos en la misma región de Italia pero derivados de tres cultivos diferentes. El análisis determinó las cantidades de trece elementos constituyentes presentes en los tres tipos de vinos. Por esta razón, se definieron trece variables de entrada, una por cada elemento constituyente, y una salida, correspondiente a las tres clases de vinos.

En ambos problemas se crearon diez pares de datos para entrenamiento (75 %) y prueba (25 %). El procedimiento seguido para cada uno de ellos se resume en los siguientes pasos:

1. Definir las variables de entrada y salida. En las entradas se construyen particiones borrosas fuertes. Se utilizarán particiones con N etiquetas distribuidas regularmente en el rango determinado

⁴Los datos fueron obtenidos del *UCI ML Repository* (<http://www.ics.uci.edu/~mllearn/MLSummary.html>).

Tabla 1: Resultados en IRIS.

	3-WM	3-WM-S	5-WM	5-WM-S	7-WM	7-WM-S	3-FDT	3-FDT-S	5-FDT	5-FDT-S	7-FDT	7-FDT-S
Número de reglas	13.7	4	41.6	3.5	59.8	4.9	5	4	15.5	4	15.6	5.5
Número de premisas	54.8	6	166.4	5.3	239.2	8.2	8	6	35	5.7	32.7	9.5
Reglas con 1 premisa	0	2	0	1.9	0	3	2	2	2.9	2.6	5.7	2.5
Reglas con 2 premisas	0	2	0	1.4	0	0.7	3	2	7.3	1.1	4.5	2
Reglas con 3 o más premisas	13.7	0	41.6	0.2	59.8	1.2	0	0	5.3	0.3	5.4	1
Número medio de etiquetas por variable	3	2.5	5	3.25	7	3.68	3	2.5	5	3.017	7	3.47
Casos no casificados	0	0	0.26	0	3.42	0.26	0	0	0	0	0	0.52
Casos de error	3.68	4.21	2.63	3.95	5.79	3.68	4.21	4.21	3.95	3.42	2.89	4.47
Casos de ambigüedad	6.84	3.68	2.1	1.84	8.42	4.47	3.68	3.68	2.1	2.37	6.58	5

Tabla 2: Resultados en WINE.

	3-WM	3-WM-S	5-WM	5-WM-S	7-WM	7-WM-S	3-FDT	3-FDT-S	5-FDT	5-FDT-S	7-FDT	7-FDT-S
Número de reglas	107.8	6.2	132.5	8.7	133	7.4	62.5	6	50.4	12	60.1	13.3
Número de premisas	1401.4	20.7	1722.5	31	1729	21.7	403.8	15.1	172.9	31.2	161.6	31.8
Reglas con 1 premisa	0	0	0	0.2	0	0.5	0.3	0.3	1.2	1.2	2.1	1.2
Reglas con 2 premisas	0	1.6	0	1.3	0	3.5	4.6	2.9	12.9	5	24.5	6.4
Reglas con 3 ó más premisas	107.8	4.6	132.5	7.2	133	3.4	57.6	2.8	36.3	5.8	33.5	5.7
Número medio de etiquetas por variable	3	2.36	5	3.29	7	3.64	3	2.29	5	3.22	7	3.61
Casos no casificados	3.55	0	43.33	0.44	91.77	2	0	0.22	0.66	0.22	0.66	1.33
Casos de error	3.55	2.44	0.66	5.55	0	3.55	3.77	2.44	2.88	3.55	7.11	6.22
Casos de ambigüedad	26.22	11.33	1.77	4	0	2	11.77	7.55	3.33	3.33	0.44	0.88

por los datos. Se estudiarán tres casos ($N=3,5,7$) para construir bases de conocimiento iniciales de distintos tamaños, con el objetivo de analizar el efecto que tiene la dimensión inicial en el proceso de simplificación.

- Inducir reglas. En la literatura borrosa se pueden encontrar muchos algoritmos para inducir reglas [4]. Hemos elegido dos de ellos⁵: *Wang y Mendel* (WM) [8] y *Fuzzy Decision Trees* (FDT) [5]. WM construye reglas completas (utilizan todas las entradas). Por el contrario, FDT construye reglas incompletas. La simplificación se puede realizar en ambos casos, como ya se dijo antes, el proceso sólo depende de la representación del conocimiento, y no de su origen.
- Simplificar.
- Evaluar la calidad de los resultados en términos de precisión (respecto a los datos de prueba) e interpretabilidad. Se han estudiado 6 configuraciones. La notación usada es N-IR-S, donde N co-

responde al número inicial de conjuntos borrosos por variable, IR a las iniciales del algoritmo de inducción de reglas usado, y S sirve para distinguir los resultados antes y después de la simplificación. Las tablas 1 y 2 muestran los resultados en media para los diez pares de datos.

Los resultados obtenidos muestran que el número inicial de etiquetas por variable influye en el proceso de simplificación. Con WM, cuanto mayor sea N , mayor es el número inicial de reglas. Y cuanto mayor sea éste más pesado será el proceso de simplificación, lo que no implica necesariamente que los resultados finales sean peores. Parte de la potencia del proceso radica en la posibilidad de fusionar etiquetas. No obstante, si N es pequeño (igual a 3), la capacidad de fusión queda bastante limitada. En IRIS los mejores resultados se obtienen para $N=5$. Y subir a 7 no sólo no supone una mejora, sino que los resultados empeoran. Intuitivamente esto podría deberse al mayor número de reglas de partida. Por el contrario, con FDT el número inicial de reglas es menor que con WM, pero los resultados no son mejores. En este caso el problema se debe a que las reglas de partida son incompletas, lo que aumenta la

⁵Para obtener una explicación detallada se puede acudir a la bibliografía citada.

probabilidad de que aparezcan conflictos entre reglas. Por ejemplo, puede suceder que al simplificar aparezcan reglas cuyo espacio de entrada queda incluido en el cubierto por otras con conclusión diferente, por lo que habría que deshacer la fusión de reglas para evitar contradicciones. Esto complica bastante el proceso, y reduce la capacidad de compactación.

En IRIS los mejores resultados en relación a interpretabilidad se obtienen para 5-WM-S y 5-FDT-S. Pero, en términos de precisión elegiríamos 5-WM o 5-FDT-S. Por tanto, si queremos un buen equilibrio entre ambas características, la mejor configuración parece ser 5-FDT-S. Por otro lado, en WINE, respecto a la interpretabilidad, los mejores resultados se obtienen para 3-FDT-S. Pero si nos fijamos en la precisión elegiríamos 7-WM-S. Y si queremos un buen equilibrio entre ambas propiedades, la mejor opción es 7-WM-S.

Por último, observar que en cada uno de los problemas 3-WM-S y 3-FDT-S llegan a resultados muy similares. Esto subraya la eficacia del proceso de simplificación.

6. Conclusiones

Se ha descrito en detalle un procedimiento de simplificación aplicado a bases de conocimiento lingüísticas. Los resultados obtenidos en dos problemas de clasificación muy conocidos muestran la potencia de dicho proceso. Permite llegar a bases de conocimiento muy interpretables, y con una precisión bastante buena.

Unas configuraciones serán mejores que otras dependiendo de la naturaleza del problema, del número de ejemplos disponibles, de la dependencia entre variables, etc. Se pueden utilizar otros algoritmos de inducción de reglas, o intentar refinar las particiones de partida. Todo ello puede servir para conseguir bases de conocimiento iniciales con una mayor precisión, lo que ayudará a mejorar los resultados finales.

La simplificación se ocupa de compactar la base de conocimiento inicial, garantizando que no empeore la precisión original por debajo de un umbral establecido. Además posee una capacidad de generalización que permite en algunos casos obtener una precisión final mayor que la inicial. Haciendo posible aumentar simultáneamente precisión e interpretabilidad. Sin embargo, es evidente que los resultados finales dependen de lo buena que sea la base de conocimiento inicial.

En el futuro, se estudiará el diseño de la base de conocimiento inicial, buscando alcanzar el mejor equilibrio posible entre precisión e interpretabilidad en el proceso de modelado global. Además se extenderá la propuesta a problemas de regresión, por ejemplo a problemas de control. Para ello, habrá que revisar el análisis de coherencia de la base de reglas, el significado de los

conflictos y su resolución. Pero también será necesario cambiar la medida de precisión, por ejemplo se podría usar el error cuadrático medio. Por último, se caracterizarán los algoritmos, en cuanto a orden y tiempo de ejecución.

El proceso descrito está implementado en KBCT⁶, un software multiplataforma y plurilingüe que se distribuye como código abierto bajo licencia GPL⁷.

Referencias

- [1] J. Casillas, O. Cordón, F. Herrera, and L. Magdalena. Interpretability improvements to find the balance interpretability-accuracy in fuzzy modeling: an overview. In *Interpretability issues in fuzzy modeling. Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Springer-Verlag, Heidelberg, 128:3–22, 2003.
- [2] S. Guillaume and L. Magdalena. An or and not implementation that improves linguistic rule interpretability. In *IFSA World Congress*, volume 2809 of LNCS, pages 302–313, Beijing, 2005.
- [3] S. Guillaume and L. Magdalena. Expert guided integration of induced knowledge into a fuzzy knowledge base. *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 10(9):773–784, July 2006.
- [4] E. Hüllermeier. Fuzzy methods in machine learning and data mining: Status and prospects. *Fuzzy Sets and Systems*, 156:387–406, 2005.
- [5] H. Ichihashi, T. Shirai, K. Nagasaka, and T. Miyoshi. Neuro-fuzzy ID3: A method of inducing fuzzy decision trees with linear programming for maximizing entropy and an algebraic method for incremental learning. *Fuzzy Sets and Systems*, 81:157–167, 1996.
- [6] E. H. Mamdani. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems. *IEEE Trans. on Computers*, 26:1182–1191, 1977.
- [7] E. H. Ruspini. A new approach to clustering. *Information and Control*, 15(1):22–32, July 1969.
- [8] L.-X. Wang and J. M. Mendel. Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 22 (6):1414–1427, 1992.
- [9] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 3:28–44, 1973.

⁶<http://www.mat.upm.es/projects/advocate/kbct.htm>

⁷<http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html>

ON TWO CLASSIC LAWS WITH FUZZY SETS*

Claudi Alsina

Secció de Matemàtiques i Informàtica,
Dept. d'Estructures a l'Arquitectura.
Univ. Politècnica de Catalunya.
Diagonal 649,
08028, Barcelona, Spain.
e-mail: claudi.alsina@ea.upc.es

Enric Trillas

Dep. Inteligencia Artificial,
Univ. Politècnica de Madrid.
Campus de Montegancedo,
Boadilla del Monte,
28660, Madrid, Spain
e-mail: etrillas@zape.fi.upm.es

Eloy Renedo[†]

Dep. Inteligencia Artificial,
Univ. Politècnica de Madrid.
Campus de Montegancedo,
Boadilla del Monte,
28660, Madrid, Spain
e-mail: erenedo@isys.dia.fi.upm.es

Resumen

This paper's subject is on the laws of logic that do hold or not in Pexider's type theories of fuzzy sets, that is, within structures $([0, 1]^X, T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m, N_1, \dots, N_p)$, with $T_1, \dots, T_n$, $S_1, \dots, S_m$ and $N_1, \dots, N_p$ continuous t-norms, continuous t-conorms, and strong negations, respectively..

Namely, it deals with the ortholattice's law $a + (b + b')' = a$ that results valid in some Pexider's theories, and the orthomodular lattice's law $a + b = (a + b) \cdot (a + c) + (a + b) \cdot a'$, that does not hold in any of such theories.

Keywords: Pexider's theories of fuzzy sets, laws in Pexider's theories.

1 Introduction

1.1

While for all basic law of boolean algebras there is a standard theory of fuzzy sets $([0, 1]^X, T, S, N)$ where the law does hold, there are derived boolean laws for which there is no standard theory verifying them. This is a reason to generalize the standard theories to Pexider's ones, that is, by considering laws of fuzzy sets mixing several connectives (t-norms, t-conorms, strong negations) in their expression (see [3]). For example, the boolean law $a \cdot (a \rightarrow b) = a \cdot b$, with $a \rightarrow b = a' + b$, when represented throughout the fuzzy formula $T(x, J_T(x, y)) = T(x, y)$, with $T \neq \min$, and $J_T(x, y) = \sup\{z \in [0, 1]; T(z, x) \leq y\}$, a T-residuated implication function that generalizes $a \rightarrow b = a' + b$, has no counterpart in any standard theory $([0, 1]^X, T, S, N)$, since it is $T(x, J_T(x, y)) = \min(x, y)$.

[†]This paper is partially supported by CICYT (Spain) under project TIN2005-08943-C02-01

Corresponding author: erenedo@dia.fi.upm.es

That is, that boolean law only holds in the setting of Pexider's theories of the form $([0, 1]^X, T, \min, S, N)$ where it can be written as $\mu \cdot_1 (\mu \rightarrow \sigma) = \mu \cdot_2 \sigma$, with two different conjunctions $\cdot_1(T)$ and $\cdot_2(\min)$, for all fuzzy sets μ, σ in $[0, 1]^X$.

1.2

In what follows we will consider the law $a + (b + b')' = a$, that holds in ortholattices since $b + b' = 1$, and the law $a + b = (a + b) \cdot (a + c) + (a + b) \cdot a'$, that holds in boolean algebras since $(a + b) \cdot (a + c) + (a + b) \cdot a' = (a + b) \cdot ((a + c) + a') = (a + b) \cdot ((a + a') + c) = (a + b) \cdot 1 = a + b$. Notice that they hold thanks to the basic laws of Excluded Middle ($x + x' = 1$), distributivity ($x \cdot (y + x) = x \cdot y + x \cdot z$), commutativity ($x + y = y + x$), and associativity ($x + (y + z) = (x + y) + z$).

2 On the law $a + (b + b')' = a$ with fuzzy sets

The law $a + (b + b')' = a$ was taken by Huntington [1] as a basic one, or postulate, for boolean algebras. To find the theories of fuzzy sets $([0, 1]^X, T, S, N)$ where it holds, the functional equation

$$S(x, N(S(y, N(y)))) = x$$

should be solved, and it is immediate to see that this equation has solution, e.g. $S = W^*$ and $N = 1 - \text{id}$. Nevertheless, there are more solutions of Pexider type, that are obtained by solving the functional equation

$$S_1(x, N_1(S_2(y, N_2(y)))) = x$$

with S_1, S_2 continuous t-conorms, and N_1, N_2 strong negations.

Theorem 2.1 *Given two strong negations N_1, N_2 , and two continuous t-conorms S_1, S_2 , it holds*

$$S_1(a, N_1(S_2(b, N_2(b)))) = a, \quad (1)$$

for all a, b in $[0, 1]$, if and only if N_1 and S_1 are arbitrary, and $S_2 = W_\varphi^*$, $N_\varphi \leq N_2$.

Proof

If (1) holds, with $a = 0$, follows $S_2(b, N_2(b)) = 0$, that happens if and only if $S_2 = W_\varphi^*$, and $N_\varphi \leq N_2$. The converse is straightforward.

□

Corollary 2.2 *The Pexider type theories of fuzzy sets with the law $\mu +_1 (\sigma +_2 \sigma')^2 = \mu$ are those with $+_1 = S_1$ and $\iota_1 = N_1$ arbitrary, $*_2 = S_2 = W_\varphi^*$ and $\iota_2 = N_2 \geq N_\varphi$.*

Corollary 2.3 *The only standard theories of fuzzy sets with the law $\mu + (\sigma + \sigma')' = \mu$ are those given by $+ = S = W_\varphi^*$ and $\iota = N_\varphi \leq N$.*

3 On the law

$a + b = (a + b) \cdot (a + c) + (a + b) \cdot a'$ **with fuzzy sets**

In ortholattices with relative complement (orthomodular lattices), from $a \leq a + b$ it follows

$$a + b = a \cdot (a + b) + a' \cdot (a + b),$$

with the relative complement $(a + b) - a = a' \cdot (a + b)$ of a in $(a + b)$.

Curiously again, in these lattices this law does hold if, instead of $a \cdot (a + b)$ in the right hand term it is placed $t \cdot (a + b)$ with $a \leq t$. That is, $a + b = (a + b) \cdot (a + c) + (a + b) \cdot a'$, a law that was taken by L. Beran [2] as a basic one, or postulate, for orthomodular lattices. Of course, *a fortiori*, this law holds in boolean algebras.

This section is devoted to show that neither the law

$$\mu + \sigma = (\mu + \sigma) \cdot (\mu + \lambda) + (\mu + \sigma) \cdot \mu', \quad (2)$$

nor the law

$$\mu +_1 \sigma = (\mu +_2 \sigma) \cdot_1 (\mu +_3 \lambda) +_4 (\mu +_5 \sigma) \cdot_2 \mu' \quad (3)$$

are verified for fuzzy sets μ, σ, λ in $[0, 1]^X$. Such result follows from the fact that the functional equation

$$S_1(x, y) = S_4(T_1(S_2(x, y), S_3(x, z)), T_2(S_5(x, y), N(x)))$$

has no solutions with $S_1, \dots, S_5$ continuous t-conorms, T_1, T_2 continuous t-norms, and a strong negation N . Even more,

Theorem 3.1 *Let S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 be binary operations in $[0, 1]$ which are non-decreasing in each place, 1 is an absorbent element and 0 is a unit. Let*

T_1, T_2 be two binary operations in $[0, 1]$ which are non-decreasing in each place with 1 as a unit and 0 as null element. Let $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be a function such that $N(0) = 1$ and $N(1) = 0$. Then the general solution of

$$S_1(a, b) = S_2(T_1(S_3(a, b), S_4(a, c)), T_2(S_5(a, b), N(a))) \quad (4)$$

is given by:

- (i) $S_2 = \text{Max}$;
- (ii) $S_1 = S_5 \geq S_3$;
- (iii) $N(x) = 1$ for all x in $[0, 1]$;
- (iv) S_4, T_1, T_2 , arbitrary.

Proof

Assume that (4) holds. The substitution $a = 0$ yields

$$b = S_2(T_1(b, c), b),$$

and with $c = 1$ we deduce $b = S_2(b, b)$ and by the condition assumed on S_2 we deduce $S_2 = \text{Max}$.

Next the substitutions $b = 0$ and $c = 0$ into (4) yields

$$a = \text{Max}(T_1(a, a), T_2(a, N(a))). \quad (5)$$

Moreover $c = 0$ into (4) yields

$$S_1(a, b) = \text{Max}(T_1(S_3(a, b), a), T_2(S_5(a, b), N(a))) \quad (6)$$

The substitution $b = 1$ into (4) yields

$$1 = \text{Max}(S_4(a, c), N(a)). \quad (7)$$

Thus $c = 0$ implies $1 = \text{Max}(a, N(a))$ so for any a in $[0, 1]$ we necessary have $N(a) = 1$, i.e., (iii). Since now we know N completely, (5) and (7) are always satisfied, so we can concentrate now in (6).

$$\begin{aligned} S_5(a, b) &\leq \text{Max}(T_1(S_3(a, b), a), S_5(a, b)) \\ &= S_1(a, b) \leq \text{Max}(\text{Min}(S_3(a, b), a), S_5(a, b)) \\ &= \text{Max}(a, S_5(a, b)) = S_5(a, b) \end{aligned}$$

i.e., $S_1 = S_5$ and by (4) again

$$S_1(a, b) \geq T_1(S_3(a, b), S_4(a, c)) \quad (8)$$

Therefore (8) with $c = 1$ yields $S_1 \geq S_3$ and (ii) follows. Conversely, assume that (i), (ii), (iii) and (iv) hold. Then we have (4) for $a = 1$ and for a in $[0, 1]$, since $S_3 \leq S_1$ imply (8):

$$\begin{aligned} &S_2(T_1(S_3(a, b), S_4(a, c)), T_2(S_5(a, b), N(a))) \\ &= \text{Max}(T_1(S_3(a, b), S_4(a, c)), S_1(a, b)) = S_1(a, b) \end{aligned}$$

□

Corollary 3.2 *If function N in (4) is required to be a strong negation then there are no t -conorm and t -norm satisfying (4).*

Corollary 3.3 *There is no standard theory of fuzzy sets $([0, 1]^X, T, S, N)$, with $T = \cdot, S = +, N = \prime$ verifying the equation (2).*

Corollary 3.4 *There is no Pexider theory of fuzzy sets $([0, 1]^X, T_1, T_2, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, N)$, with $T_i = \cdot, S_j = +, N = \prime$ verifying the equation (3).*

4 Conclusion

It is shown that, in spite that Pexider type theories of fuzzy sets allow to keep some laws of classical logic that do not hold in standard theories of fuzzy sets, also in that theories there are classical laws that are not verified. This is the case of the law studied in section 3 that requires a non-continuous (and, hence, non strong) negation.

Because of that fact, the goal of always having theories of fuzzy sets where a given classical law is verified, should be considered as not yet reached. That is, for such goal, new theories of fuzzy sets are again to be introduced.

Referencias

- [1] E. V. Huntington, New Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic, with special Reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica, *Trans. of Amer. Math. Society*, Vol. 35, No. 1, 274-304, 1933.
- [2] L. Beran, *Orthomodular Lattices*, D. Reidel Pubs., 1985.
- [3] C. Alsina, E. Trillas, On iterative boolean-like laws of fuzzy sets, *Procc. EUSFAT-LFA 2005*, Barcelona, 389-394, 2005.

Condiciones de identificabilidad de modelos basados en reglas difusas de tipo TSK

José Luis Aznarte M.

Depto. Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
JLAznarte@decsai.ugr.es

José Manuel Benítez

Depto. Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
J.M.Benitez@decsai.ugr.es

Resumen

Este trabajo supone un nuevo avance en nuestro empeño por conectar el conocimiento y las técnicas de Computación Flexible y de la Estadística aplicados al modelado y predicción de series temporales. Como un primer paso para afrontar este problema mediante sistemas basados en reglas difusas, se demuestra formalmente la identificabilidad global de estos modelos.

Palabras clave: Modelado de series temporales, identificabilidad de SBRD

1. Introducción

La teoría de Conjuntos Difusos se desarrolló durante la segunda mitad del siglo pasado. Sus bases fueron asentadas en el trabajo inicial de Zadeh [14]. Desde entonces, ha existido un intenso debate entre científicos que la defendían y otros que la consideraban un mero artefacto matemático, generalmente en favor de la Teoría de la Probabilidad. Éstos usualmente reprochaban a la Lógica Difusa una presunta falta de solidez matemática. En [2], se ofrece una excelente revisión de los argumentos de ambas partes implicadas en este debate.

Verdaderamente, en el ámbito del análisis de series temporales, las aplicaciones de conceptos provenientes de la Lógica Difusa se han caracterizado por su candidez en cuanto a sus fundamentos matemáticos y estadísticos. En los últimos años se ha asistido a una explosión de modelos basados en conceptos “difusos” diseñados para la predicción de series temporales. Muchos de ellos tienen una característica en común: la omisión de referencias a las propuestas e ideas del enfoque estadístico para el modelado de series temporales.

Aunque existen indicios de algunas ventajas del enfoque de Computación Flexible respecto al tradicional en cuanto al modelado y predicción de las series temporales,

esto no debe significar en absoluto que éste sea efectivamente reemplazado por aquél. Considerando que la hibridación de conceptos y tecnologías es una de las ideas clave de la Computación Flexible, cabría esperar que cualquier investigador del área, enfrentado a la tarea de predecir valores futuros de una serie temporal, tomara en consideración las aportaciones que a este respecto proporciona el enfoque estadístico.

En este trabajo, demostramos la identificabilidad global de un sistema basado en reglas difusas (SBRD) para el modelado de series temporales. Es un primer paso hacia una nueva forma de afrontar este problema mediante herramientas de Computación Flexible. El objetivo final es el desarrollo de un marco estadístico sólido que permita la incorporación de los beneficios del enfoque tradicional a los de las últimas propuestas.

2. Sistemas basados en reglas difusas. Notación

Comenzaremos por establecer la notación empleada. En adelante, entenderemos por y_t el valor en el instante t de una serie temporal $\{y_t\}$. Notaremos $\tilde{\mathbf{x}}_t \in \mathbb{R}^D$ un vector $D \times 1$ de valores desplazados de y_t y, en ocasiones, variables exógenas. Para facilitar la lectura, se define $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{D+1}$ como $\mathbf{x}_t = [1, \tilde{\mathbf{x}}_t']'$.

El modelo estocástico general se define como

$$y_t = \Psi(\tilde{\mathbf{x}}_t; \psi) + \varepsilon_t, \quad (1)$$

donde $\Psi(\tilde{\mathbf{x}}_t; \psi)$ es una función no lineal de las variables $\tilde{\mathbf{x}}_t$ con vector de parámetros ψ . Como es habitual, $\{\varepsilon_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza ς^2 .

Los sistemas basados en reglas difusas (SBRD) suelen dividirse en dos categorías principales: el modelo de Mamdani [5] y el modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK) [11]. Estos dos tipos difieren en la forma de las reglas difusas que emplean, más exactamente en el consecuente de dichas reglas. Suele considerarse la forma funcional

(usualmente lineal) que adoptan los consecuentes de reglas de tipo TSK como uno de los factores cruciales que determinan su mayor capacidad de aproximación, y por eso suelen preferirse a los de tipo Mamdani para predicción de series temporales. Este trabajo está centrado en SBRD de tipo TSK.

Una regla difusa TSK puede escribirse

$$R^k : \text{IF } x_1 \text{ IS } A_1^k \wedge x_2 \text{ IS } A_2^k \wedge \dots \wedge x_D \text{ IS } A_D^k \\ \text{THEN } y = f^k(\mathbf{x}). \quad (2)$$

La premisa de esta regla toma valores del vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$. A_d^k es un conjunto difuso definido para la regla k sobre la variable de entrada x_d , y $\wedge$ es un operador de conjunción difuso ([4]).

El consecuente $f(\mathbf{x})$ de estas reglas es una función que describe la relación de entrada-salida del sistema en una zona del espacio. Suele ser de forma lineal:

$$f^k(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^{k'} \mathbf{x} = b_0^k + b_1^k x_1 + b_2^k x_2 + \dots + b_D^k x_D. \quad (3)$$

La llamada *intensidad de disparo* de la regla k -ésima se obtiene tomando la conjunción difusa de las funciones de pertenencia del antecedente:

$$\mu^k(\mathbf{x}) = \mu_1^k(x_1) \wedge \mu_2^k(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_D^k(x_D), \quad (4)$$

donde $\mu_d^k(x_d)$ es el grado de pertenencia de x_d al conjunto difuso A_d^k .

El procedimiento de inferencia asociado a tales reglas usa el operador de implicación difuso, $\rightarrow$, para obtener el conjunto difuso que cada regla representa, y el operador de disyunción difuso, $\vee$, para agregar las regiones correspondientes del espacio de salida para las K reglas.

En función de la elección que se haga de los operadores de conjunción, implicación y disyunción, pueden derivarse diferentes clases de SBRD. En nuestro trabajo, centramos la atención sobre SBRD que usan conjunción *multiplicativa*, implicación *multiplicativa* y disyunción *aditiva*. Por tanto, la salida final del sistema viene dada por

$$y^o = \sum_{k=1}^K \tilde{\mu}^k(\mathbf{x}) f^k(\mathbf{x}), \quad (5)$$

$$\text{donde } \tilde{\mu}^k(\mathbf{x}) = \frac{\mu^k(\mathbf{x})}{\sum_{k'=1}^K \mu^{k'}(\mathbf{x})}.$$

La función de pertenencia, μ_d^k , puede elegirse atendiendo a varios criterios. Tradicionalmente, las más comunes han sido funciones triangulares, trapezoidales, sigmoides, gaussianas, etc. Éstas últimas tienen la forma:

$$\mu_d^k(x_d; c_d^k, \sigma_d^k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_d^k}} \exp\left(-\frac{(x_d - c_d^k)^2}{2\sigma_d^k}\right). \quad (6)$$

2.1. SBRD de tipo TSK para el análisis de series temporales

Si se emplea el SBRD para modelar una serie temporal, $\{y_t\}$, tenemos

$$y_t = \sum_{k=1}^K \tilde{\mu}^k(\mathbf{x}_t) f^k(\mathbf{x}_t) + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Nótese que la presencia del término de error ε_t no es común en la literatura “difusa”, siendo más habitual en el ámbito probabilístico para series temporales. Sin embargo, en este contexto debemos considerar el SBRD como un modelo estocástico no lineal, (1), y por tanto, admitir que no podemos explicar con él toda la variabilidad de la serie. El componente no modelable es la serie $\{\varepsilon_t\}$.

El vector de parámetros de este modelo no lineal estocástico es

$$\psi = [\psi'_\mu, \psi'_f]' = [\psi'_{\mu^1}, \dots, \psi'_{\mu^K}, \psi'_{f^1}, \dots, \psi'_{f^K}], \quad (8)$$

donde $\psi_{\mu^k} = [c_1^k, \sigma_1^k, \dots, c_D^k, \sigma_D^k]$ son *parámetros no lineales* y $\psi_{f^k} = \mathbf{b}^k = [b_1^k, \dots, b_D^k]$ son *parámetros lineales*. Podemos reescribir el modelo como

$$y_t = \sum_{k=1}^K \tilde{\mu}(\mathbf{x}_t; \psi_{\mu^k}) f(\mathbf{x}_t; \psi_{f^k}) + \varepsilon_t. \quad (9)$$

Como fue puesto de manifiesto en [1], en el marco de las series temporales, el consecuente de una regla TSK es equivalente a un modelo lineal autoregresivo (AR) de orden D . También, un SBRD puede ser visto como una generalización del modelo STAR [12] o bien como equivalente al modelo NCSTAR [7]. Haremos uso de estos resultados para derivar las condiciones necesarias y suficientes para la identificabilidad de los SBRD.

3. Identificabilidad de SBRD

Si consideramos el uso de un SBRD como un caso de modelado estadístico, podemos verlo como un procedimiento para especificar la distribución de probabilidad de los datos mediante una familia de distribuciones indexadas por parámetros. Este procedimiento incluiría la inferencia estadística, la simulación y la predicción, para lo cual es necesario que el modelo sea identificable. Esta es la razón de la importancia del estudio de la identificabilidad de los SBRD.

Por ejemplo, necesitamos especificar explícitamente las fuentes de unicidad del modelo para garantizar la convergencia de la función de aproximación por mínimos cuadrados. Este asunto ha sido estudiado profundamente en el ámbito de los modelos estadísticos no lineales, incluyendo las redes neuronales de propagación hacia adelante [6] y modelos derivados [9, 8].

Adaptaremos aquí esos resultados a los SBRD, estableciendo bajo qué condiciones se garantiza la identificabilidad. Para ello, primero discutiremos algunos conceptos útiles: minimalidad [10] y reducibilidad.

Definición 1. *Un SBRD es minimal (o no redundante) si su aplicación de entrada-salida no puede ser obtenida mediante otro SBRD con menos reglas.*

Uno de los motivos para la no identificabilidad de SBRD es la presencia de reglas irrelevantes, que pueden ser eliminadas sin afectar a su capacidad de modelado. Obviamente, la condición de minimalidad es válida sólo para modelos irreducibles.

Definición 2. *Un SBRD es reducible si*

- i. *algunos de los consecuentes se hacen cero ($\mathbf{b}^k \rightarrow 0$ para algún k), o si*
- ii. *algunas de las funciones de pertenencia se hacen cero ($\sigma_d^k \rightarrow 0$ para algún par k, d).*

Entonces, podemos definir la propiedad de identificabilidad como

Definición 3. *Un SBRD es identificable si no hay dos conjuntos de parámetros tales que ambos induzcan la misma aplicación de entrada-salida.*

Hay dos propiedades de los SBRD que impiden su identificabilidad:

(P. 1) La *intercambiabilidad* de las reglas. El orden en que las reglas son consideradas es totalmente irrelevante para los cálculos del modelo pero afecta a la búsqueda en el espacio de los parámetros (dando lugar a múltiples máximos locales en la función de verosimilitud).

(P. 2) La presencia de reglas *irrelevantes*, es decir, que haya al menos una regla con consecuente siempre cero ($\mathbf{b}^k = 0$ para algún k) o que la conjunción de las funciones de pertenencia sea cero para al menos una regla ($\sigma_d^k = 0$ para algún par k, d).

Si sabemos que un modelo es irreducible, entonces sabemos que la única manera de cambiar la aplicación de entrada-salida es a través de la propiedad (P. 1). La irreducibilidad puede obtenerse adaptando el método de [8], que aplica una estrategia de construcción “de abajo a arriba” basada en inferencia estadística a través de tests de linealidad con Multiplicadores de Lagrange.

En [3, 10], se demostró que un modelo irreducible es minimal. Esta equivalencia implica que no hay forma, aparte de las condiciones establecidas en la definición 2, de reducir el número de reglas de un SBRD sin cambiar la aplicación de entrada-salida.

Es posible prevenir el problema del intercambio de reglas (P. 1) estableciendo un orden único entre ellas. Esto puede conseguirse definiendo un orden lexicográfico, $\prec$, entre los antecedentes. Primero estableceremos una prelación entre las funciones de pertenencia de cada variable, inducida por el orden de sus parámetros de localización c_d^k (sin preocuparnos por su anchura σ_d^k). Este orden suele además venir dado por su interpretación lingüística. Una vez hecho esto, para comparar (y ordenar) las reglas, aplicamos el orden lexicográfico, que resulta en la siguiente Restricción:

$$\mu(\mathbf{x}_t; \psi_{\mu^k}) \prec \mu(\mathbf{x}_t; \psi_{\mu^{k+1}}), \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{R. 1})$$

Esta restricción define un orden completo para las reglas, lo que nos permite escribir $R_i \prec R_{i+1}$.

Imponiendo (R. 1) prevenimos el intercambio de reglas y por tanto garantizamos que, si no existen reglas irrelevantes, el modelo es minimal e identificable.

Para establecer las condiciones suficientes que resultan en SBRD globalmente identificables, siguiendo a [9], necesitamos las siguientes asunciones.

Asunción 1. *Los parámetros lineales $\mathbf{b}^k$ no se hacen cero para ningún k . Además, $\sigma_d^k > 0 \forall d, \forall k$.*

Asunción 2. *El vector $\mathbf{x}_t$ tiene una distribución invariante con densidad positiva en cualquier punto de una esfera abierta.*

La Asunción 1 previene de los efectos de la propiedad (P. 2) mientras que la Asunción 2 evita problemas relacionados con la multicolinealidad.

Haremos también uso del siguiente

Lema 1. *La familia de funciones de distribución acumulativa gaussianas n -dimensionales es linealmente independiente.*

Demostración. Es trivial considerando la Proposición 2 y el Teorema de [13]. $\square$

Teorema 1. *Bajo la restricción (R. 1) y las Asunciones 1 y 2, el SBRD aditivo TSK es globalmente identificable.*

Demostración. Supongamos la existencia de dos vectores de parámetros, $\psi = [\psi'_\mu, \psi'_f]'$ y $\bar{\psi} = [\bar{\psi}'_\mu, \bar{\psi}'_f]'$, tales que

$$\sum_{i=1}^K \tilde{\mu}(\mathbf{x}_t; \psi_{\mu^i}) f(\mathbf{x}_t; \psi_{f^i}) = \sum_{j=1}^K \tilde{\mu}(\mathbf{x}_t; \bar{\psi}_{\mu^j}) f(\mathbf{x}_t; \bar{\psi}_{f^j}). \quad (10)$$

Para demostrar la identificabilidad global del SBRD necesitamos mostrar que, bajo la restricción (R. 1) y las Asunciones, se verifica (10) si y sólo si $\psi_{\mu^k} = \bar{\psi}_{\mu^k}$ y $\psi_{f^k} = \bar{\psi}_{f^k}$ para $k = 1, \dots, K$. La Asunción 1 excluye claramente la posibilidad de que (10) sea cierta

cuando ambos lados de la expresión son cero, de modo que estudiaremos las otras posibilidades.

Para facilitar la lectura, en adelante notaremos $\mu_i(\mathbf{x}_t) = \tilde{\mu}(\mathbf{x}_t; \psi_{\mu^i})$, $\overline{\mu_j}(\mathbf{x}_t) = \tilde{\mu}(\mathbf{x}_t; \overline{\psi_{\mu^j}})$, $\mathbf{b}_i \mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_t; \psi_{f^i})$ y $\overline{\mathbf{b}_i} \mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_t; \overline{\psi_{f^j}})$. Así, podemos reescribir (10) como:

$$\sum_{i=1}^K \mu_i(\mathbf{x}_t) \mathbf{b}_i \mathbf{x}_t - \sum_{j=1}^K \overline{\mu_j}(\mathbf{x}_t) \overline{\mathbf{b}_j} \mathbf{x}_t = 0. \quad (11)$$

Esta igualdad puede ser cierta bajo dos situaciones diferentes:

i) Si cada $\mu_i(\mathbf{x}_t)$ es distinto de cada $\overline{\mu_j}(\mathbf{x}_t)$, entonces sabemos que $\mathbf{b}_i \mathbf{x}_t = \overline{\mathbf{b}_j} \mathbf{x}_t = 0$, por el Lema 1. Obviamente, esto contradice la Asunción 1.

ii) Si existen i_1, j_1 tales que $\mu_{i_1}(\mathbf{x}_t) = \overline{\mu_{j_1}}(\mathbf{x}_t)$.

Sabemos que $\mu_l(\mathbf{x}_t) \neq \mu_m(\mathbf{x}_t)$ para $l \neq m$ y que $\overline{\mu_l}(\mathbf{x}_t) \neq \overline{\mu_m}(\mathbf{x}_t)$ para $l \neq m$. Por tanto, podemos escribir (11) como

$$(\mathbf{b}_{i_1} - \overline{\mathbf{b}_{j_1}}) \mathbf{x}_t \mu_{i_1}(\mathbf{x}_t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^K \mathbf{b}_i \mathbf{x}_t \mu_i(\mathbf{x}_t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1}}^K \overline{\mathbf{b}_j} \mathbf{x}_t \overline{\mu_j}(\mathbf{x}_t) = 0. \quad (12)$$

Esta expresión es parecida a (11) porque sería cierta en las dos mismas situaciones. Repitiendo inductivamente la misma idea, llegamos a

$$(\mathbf{b}_{i_1} - \overline{\mathbf{b}_{j_1}}) \mathbf{x}_t \mu_{i_1}(\mathbf{x}_t) + \dots + (\mathbf{b}_{i_K} - \overline{\mathbf{b}_{j_K}}) \mathbf{x}_t \mu_{i_K}(\mathbf{x}_t) = 0, \quad (13)$$

que, puesto que todos los $\mu_{i_k}(\mathbf{x}_t)$ son diferentes y por tanto linealmente independientes, obliga a que $\mathbf{b}_{i_k} = \overline{\mathbf{b}_{j_k}}$ para todo k , resultando en $\psi = \overline{\psi}$. Conviene indicar también que, en (13), $i_k = j_k$ para $k = 1, \dots, K$ por la restricción (R. 1).

Existe una demostración alternativa: la equivalencia funcional entre SBRD y los modelos de mezclas gaussianas fue demostrada por [2]. En particular, se probó que los SBRD TSK eran equivalentes a mezclas gaussianas con *equal priors*. Con este resultado, y sabiendo que la Proposición 2 de [13] garantiza la identificabilidad de mezclas gaussianas, la restricción (R. 1) resulta en SBRD identificables. $\square$

4. Conclusiones

Debido a sus buenos resultados, muchos modelos del área de Computación Flexible están siendo aplicados al problema del modelado de series temporales. Sin embargo,

los autores en este área no suelen prestar mucha atención a propiedades estadísticas de los modelos importantes y deseables, como es la identificabilidad.

Dentro de un esfuerzo continuado por acercar el conocimiento que la Estadística posee acerca de las series temporales a los investigadores de Computación Flexible, en este trabajo proporcionamos una prueba formal de la identificabilidad global de los sistemas basados en reglas difusas. Este resultado será completado en el futuro con nuevas aportaciones que permitan establecer formalmente las propiedades de los enfoques de Computación Flexible para el modelado y la predicción de series temporales.

Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia, así como por el Ministerio de Ciencia y Tecnología a través de los proyectos TIC2003-04650 y TIN2004-07236, respectivamente.

Referencias

- [1] J.L. Aznarte M., J.M. Benítez, and J.L. Castro. Equivalence relationships between fuzzy additive systems for time series analysis and smooth transition models. *IFSA 2005 World Conference*, Beijing, China, 2005.
- [2] M-T. Gan, M. Hanmandlu, and A.H. Tan. From a gaussian mixture model to additive fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(3):303–316, 2005.
- [3] J.T.G. Hwang and A.A. Ding. Prediction intervals for artificial neural networks. *Journal of the American Statistical Association*, 92:109–125, 1997.
- [4] G.J. Klir and B. Yuan. Fuzzy sets and fuzzy logic. Prentice-Hall, 1995.
- [5] E.H. Mamdani. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *IEEE Trans. Computers*, 26(12):1182–1191, 1977.
- [6] M.C. Medeiros, T. Teräsvirta, and G. Rech. Building neural network models for time series: A statistical approach. *Journal of Forecasting*, 25(1):49–75, 2006.
- [7] M.C. Medeiros and A. Veiga. A hybrid linear-neural model for time series forecasting. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 11(6):1402–1412, 2000.
- [8] M.C. Medeiros and A. Veiga. A flexible coefficient smooth transition time series model. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 16(1):97–113, January 2005.

- [9] M. Suarez-Fariñas, C.E. Pedreira, and M.C. Medeiros. Local global neural networks: a new approach for nonlinear time series modelling. *Journal of the American Statistical Association*, 2004.
- [10] H.J. Sussman. Uniqueness of the weights for minimal feedforward nets with a given input-output map. *Neural Networks*, 5:589–593, 1992.
- [11] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 15:116–132, 1985.
- [12] T. Teräsvirta. Specification, estimation and evaluation of smooth transition autoregressive models. *J. Am. Stat. Assoc.*, 89:208–218, 1994.
- [13] S.J. Yakowitz and J.D. Spragins. On the identifiability of finite mixtures. *The Annals of Mathematical Statistics*, 38(1):209–214, 1968.
- [14] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 3(8):338–353, 1965.

CONTROLADOR DIFUSO PARA PROBLEMAS DE NAVEGACIÓN EN PRESENCIA DE OBSTÁCULOS FIJOS

M. Brox

A. Gersnoviez

S. Sánchez-Solano

I. Baturone

Instituto de Microelectrónica de Sevilla, CNM-CSIC, Sevilla, España.

maria@imse.cnm.es

andres@imse.cnm.es

santiago@imse.cnm.es

lumi@imse.cnm.es

Resumen

En esta comunicación se describe un sistema de control difuso para aplicaciones de navegación de robots móviles autónomos en presencia de obstáculos fijos. Las herramientas de CAD del entorno Xfuzzy 3, desarrollado en el IMSE, han facilitado el diseño del controlador. En la comunicación se procede a la verificación del controlador diseñado operando en un lazo cerrado con el modelo del robot móvil autónomo eléctrico Romeo 4R, diseñado y construido en la Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla. Las simulaciones realizadas demuestran la eficiencia del controlador desarrollado.

Palabras Clave: Robots móviles, Control difuso, Obstáculos fijos.

reactivas para aprovechar las ventajas y reducir los inconvenientes de ambas opciones.

En esta comunicación se describe un sistema de control que emplea una estrategia de navegación reactiva basada en lógica difusa, que combina reglas de actuación fundamentadas en el conocimiento heurístico del problema con datos numéricos obtenidos del análisis geométrico del mismo. El sistema a controlar es el robot móvil autónomo Romeo 4R, dotado de una serie de sensores que facilitan el cálculo del estado del vehículo, así como la detección de los posibles obstáculos [8]. Los valores de posición, orientación y velocidad se obtienen a partir de los datos proporcionados por un encoder asociado al motor de tracción y por un giróscopo. A su vez, los datos del encoder del motor de dirección permiten obtener los valores de la curvatura del vehículo. Finalmente, un láser permite realizar un barrido angular de 0° a 180°, proporcionando, para cada ángulo, la distancia comprendida entre el robot y el posible obstáculo.

1 INTRODUCCIÓN

En la literatura se han reportado diversas alternativas para resolver el problema de evitación de obstáculos fijos con robots móviles autónomos. Estas soluciones se engloban en tres grandes grupos que corresponden a estrategias de navegación deliberativas, reactivas e híbridas [3]. Las deliberativas se basan en el conocimiento a priori del entorno [7]. Se caracterizan por conseguir una navegación en un tiempo mínimo o con un menor consumo energético aunque, como desventaja, presentan problemas en la adaptación a entornos dinámicos parcialmente conocidos. Las estrategias reactivas consisten en provocar una reacción frente a la información sensorial que se recibe. Entre éstas se encuentran las basadas en el seguimiento del contorno del obstáculo, en campos potenciales [2], en optimización local [6] y en el uso de la lógica difusa [4]. Se caracterizan por su flexibilidad y, como contrapartida, presentan la falta de capacidad de navegar de forma óptima. Finalmente, las estrategias híbridas [5] usan esquemas mixtos que combinan técnicas deliberativas y

Las fases de descripción y verificación se han llevado a cabo con las diferentes herramientas de CAD proporcionadas por el entorno de desarrollo de sistemas difusos Xfuzzy 3 [10]. Las herramientas de descripción de dicho entorno facilitan la especificación del sistema de control mediante una estructura jerárquica que combina bloques difusos con bloques de procesamiento convencional. Por otro lado, las herramientas de verificación permiten ajustar los parámetros del sistema y comprobar su comportamiento mediante simulación.

Esta comunicación está estructurada como a continuación se describe. La sección 2 muestra un estudio teórico del problema de navegación de robots móviles autónomos con evitación de obstáculos. En ella se explica cómo se afronta el problema de detección de obstáculos y cómo modifica el vehículo su trayectoria cuando el obstáculo es detectado. La sección 3 presenta el diseño y la implementación del controlador difuso, usando la metodología del entorno Xfuzzy 3; en ella se muestra cómo las herramientas de CAD del entorno han facilitado su desarrollo. En la sección 4 se procede a la verificación

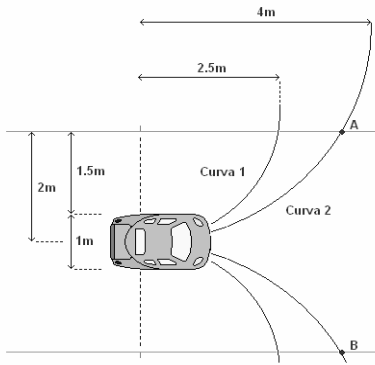


Figura 1. Construcción del pasillo recto

del controlador difuso operando en un lazo cerrado con el modelo del robot Romeo 4R; en ella se muestran los resultados obtenidos tras la simulación realizada con la herramienta *xfsim* del entorno *Xfuzzy 3*. Por último, la sección 5 recoge las conclusiones y las líneas de estudio hacia las que esta investigación se va a encaminar en el futuro.

2 EL PROBLEMA DE NAVEGACIÓN EN PRESENCIA DE OBSTÁCULOS

Supongamos que en un instante dado t_0 el vehículo tiene la configuración $(x_0, y_0, \phi_0, v_0, \gamma_0)$, donde x e y hacen referencia a las coordenadas de posición del vehículo, ϕ a la orientación del mismo con respecto al eje $x = 0$, v a la velocidad y γ a la curvatura. Las relaciones entre las variables implicadas en esta configuración pueden obtenerse utilizando el modelo cinemático de la bicicleta para describir el comportamiento del robot [9]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cdot \sin(\phi) \\ \dot{y} = v \cdot \cos(\phi) \\ \dot{\phi} = \gamma \cdot v \end{cases}$$

En función de la configuración inicial y de la posición final fijada como objetivo, el sistema de control de conducción debe proporcionar los valores de velocidad y curvatura que serán aplicados en un instante posterior $t_0 + \Delta t$. Para alcanzar la configuración final evitando colisiones con los posibles obstáculos se considerarán dos situaciones. Si no existe obstáculo se activará un controlador difuso cuya finalidad será la de hacer navegar al vehículo hasta la configuración final. Sin embargo, si existe algún obstáculo, se activará un segundo controlador difuso cuya finalidad será evitarlo. De esta forma, es necesario contemplar dos problemas: por un lado la navegación sin obstáculos y, por otro, la modificación de la trayectoria del vehículo para evitar los obstáculos que se detecten.

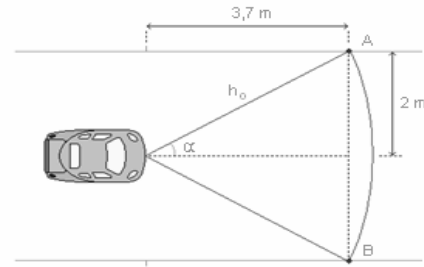


Figura 2. Sector de visión del pasillo

2.1. DETECCIÓN DE OBSTÁCULOS

Distinguiremos dos situaciones en función de que el vehículo esté describiendo una trayectoria recta ($\gamma = 0$) o circular ($\gamma = \gamma_0$).

Si el robot está describiendo una trayectoria recta, se construye un pasillo recto en torno al coche y se va estudiando si está libre de obstáculos. Se considera que el pasillo tiene una anchura de 2m respecto al eje del vehículo. Teniendo en cuenta que Romeo tiene una anchura de 1m, esto significa que la separación entre los laterales del vehículo y la pared del pasillo será de 1,5m. La curvatura máxima que puede tomar Romeo es de $0,4m^{-1}$, lo cual supone que puede describir una trayectoria con un radio mínimo de 2,5m. Esta trayectoria, representada como curva 1 en la Figura 1, podrá llevarse a cabo si el robot ya tenía una curvatura de $0,4m^{-1}$ o no la tenía pero estaba parado. En otro caso, puesto que las transiciones en la curvatura no pueden ser instantáneas, una trayectoria como la representada por la curva 1 no será realista, sino que lo serán trayectorias como la representada por la curva 2, cuyo radio de curvatura es superior a 4m. Si aproximamos la curva 2 de la Figura 1 por su secante se obtiene el sector circular de la Figura 2. Los valores aproximados de los parámetros h_0 y α de la Figura 2 son 4,2m y 30° respectivamente. Por tanto, la amplitud angular del sector circular (2α) es aproximadamente 60° .

En este caso, el obstáculo queda caracterizado por los parámetros h , Φ_R y Φ_L . Se define h como la distancia mínima existente entre el vehículo y el obstáculo. Se define Φ_R como el ángulo comprendido entre el borde derecho del obstáculo y la perpendicular al eje del vehículo. De forma análoga se define Φ_L como el ángulo comprendido entre el borde izquierdo del obstáculo y la perpendicular al eje del vehículo. Consideraremos que el controlador difuso para evitación de obstáculos entrará en juego si el valor de h es menor que el valor de h_0 y Φ_R o Φ_L están comprendidos entre $(\pi/2 + \alpha)$ y $(\pi/2 - \alpha)$. Todo

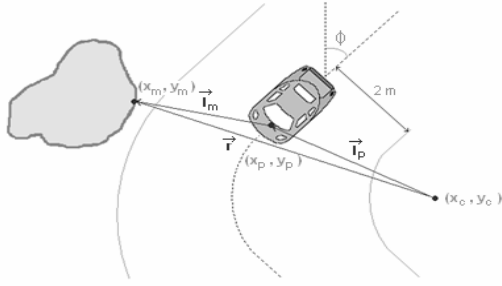


Figura 3. Construcción del pasillo curvo

obstáculo cuyos parámetros característicos estén comprendidos en el sector circular, producirá una modificación en la trayectoria que llevaría el robot si no hubiera obstáculos. Por tanto, los valores de h_0 y α son los valores límites que se han establecido para que el obstáculo provoque un cambio en la trayectoria.

Por otro lado, si el robot está describiendo una trayectoria circular, se construye un pasillo curvo de anchura 2m y se estudia si está libre de obstáculos. Las coordenadas (x_c, y_c) de la Figura 3 hacen referencia al centro de la circunferencia que describe el vehículo en su trayectoria; (x_p, y_p) son las coordenadas de posición del láser del vehículo situado en la parte delantera del mismo; por último, (x_m, y_m) hacen referencia a las coordenadas del punto del obstáculo que se encuentra más próximo al robot. Como se observa en la figura, el vector $\vec{r}$ se puede expresar como suma de los vectores $\vec{l}_p$ y $\vec{l}_m$:

$$\vec{r} = \vec{l}_p + \vec{l}_m = (x_p - x_c, y_p - y_c) + (x_m - x_p, y_m - y_p) = (x_m - x_c, y_m - y_c) \quad (1)$$

La ausencia de obstáculos que hagan preciso modificar la trayectoria que llevaba el robot viene, en este caso, determinada por la siguiente condición:

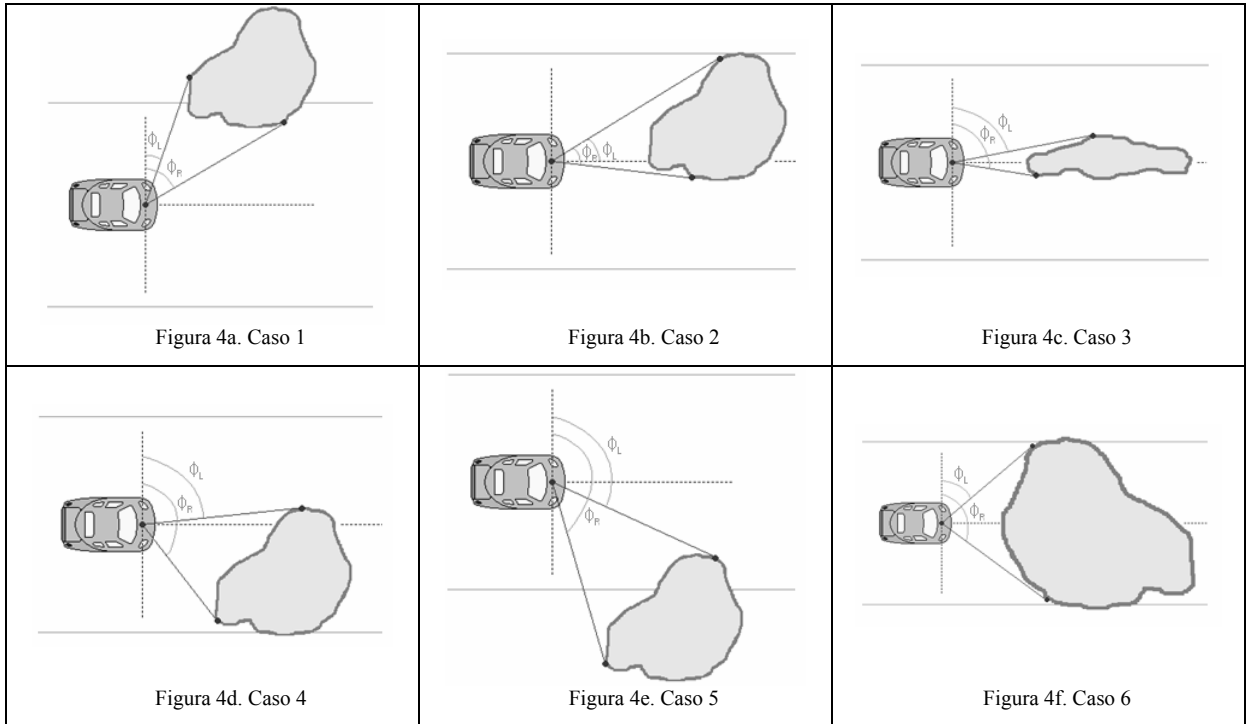
$$(x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2 \geq \left(\frac{1}{|r_0|} + 2\right)^2 \quad \text{ó} \quad (x_m - x_c)^2 + (y_m - y_c)^2 \leq \left(\frac{1}{|r_0|} - 2\right)^2 \quad (2)$$

En los casos en que la ecuación (2) no se verifique, el robot deberá modificar su trayectoria.

2.2. MODIFICACIÓN DE LA TRAYECTORIA DEL VEHÍCULO PARA EVITAR OBSTÁCULOS

Para determinar la magnitud y el signo de la curvatura que debe adoptar el vehículo para esquivar el obstáculo, se han de cuantificar criterios como la cantidad y situación espacial de pasillo que está siendo ocupado por el obstáculo. Dependiendo de que el pasillo sea ocupado en mayor o menor medida por el obstáculo, el vehículo deberá aplicar una curvatura mayor o menor para poder esquivarlo. También es preciso considerar la zona de pasillo que está siendo ocupada para saber qué signo debe tomar la curvatura. Para poder cuantificar todo lo anterior han de evaluarse la magnitud y el signo de los ángulos Φ_R y Φ_L . En la Figura 4 se muestran seis casos en los que se analizan las distintas situaciones en que puede encontrarse el obstáculo y la curvatura a adoptar por el vehículo.

En el primer caso el obstáculo se encuentra poco metido en el pasillo invadiendo la zona izquierda, con lo que con una curvatura no muy elevada y positiva sería suficiente para esquivarlo. Se considera como curvatura positiva



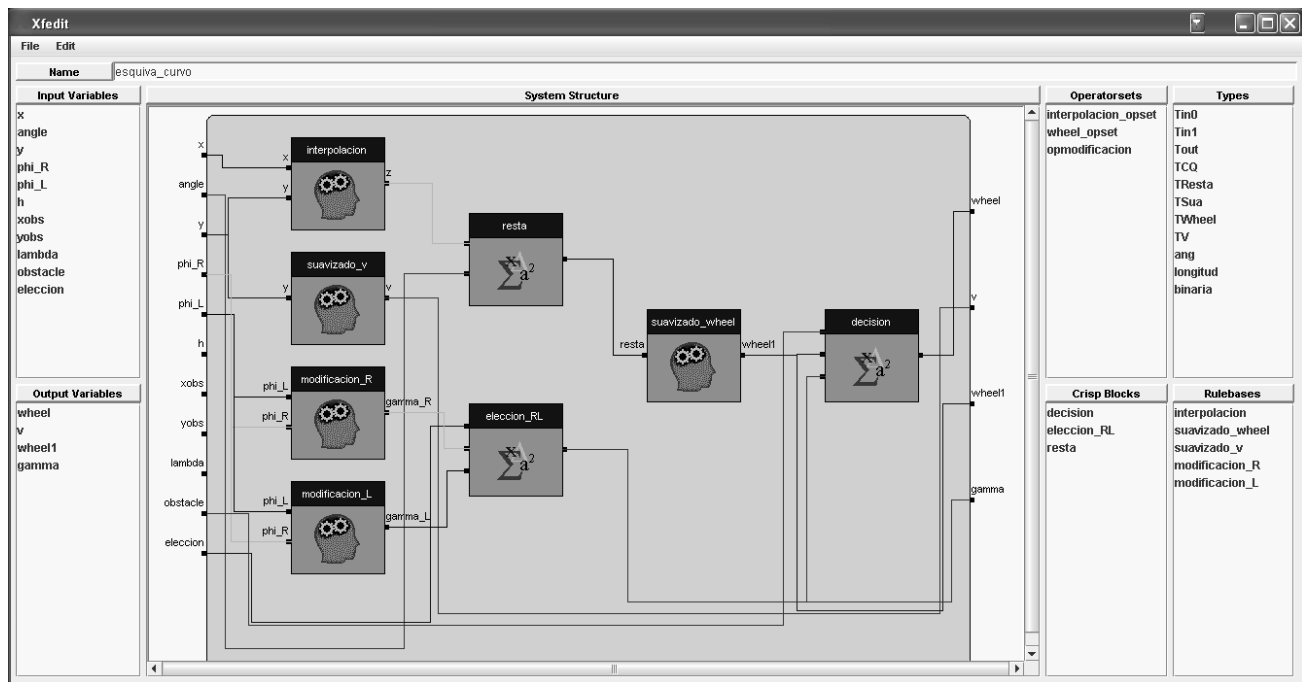


Figura 5. Visualización de la estructura del controlador difuso mediante la ventana principal de *xfedit*

aquella cuyo sentido es el de las agujas del reloj y negativa la que toma el sentido contrario. La Figura 4b representa el caso de un obstáculo bastante metido en el pasillo por la zona izquierda, con lo que se necesita una curvatura elevada y positiva para esquivarlo. El caso mostrado en la Figura 4c representa un obstáculo muy pequeño que se encuentra en medio del pasillo y enfrente del vehículo, con lo que no se necesita una curvatura elevada para esquivarlo. Como el obstáculo se encuentra en medio del pasillo, será (en principio) indiferente el signo que adopte la curvatura. En las Figuras 4d y 4e podemos observar dos situaciones simétricas a las de los casos 1 y 2, con lo cual, la curvatura resultante para evitar el obstáculo será igual en módulo, pero de signo contrario. Por último, en la Figura 4f, se observa un obstáculo muy grande que se encuentra en medio del pasillo y enfrente del vehículo, con lo que se necesita una curvatura elevada para esquivarlo. El signo que debe tomar la curvatura del vehículo se discutirá más adelante.

3 DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

Las ideas anteriores sobre detección y evitación de obstáculos han sido aplicadas en el desarrollo de un sistema de navegación para robots móviles que combina dos controladores difusos: uno para guiar al vehículo desde una configuración dada hasta la configuración objetivo ($x = y = \gamma = \phi = v = 0$), y otro para modificar su trayectoria en presencia de obstáculos. Mientras que para el diseño del primer controlador se han analizado las restricciones geométricas del problema con objeto de optimizar la trayectoria seguida por el vehículo [1], en el

diseño del segundo se emplea un esquema de razonamiento similar al que seguiría un conductor humano. Tanto en un caso como en el otro la lógica difusa permite expresar el comportamiento del sistema de forma lingüística mediante reglas del tipo si - entonces.

El sistema de control diseñado sigue un esquema jerárquico cuya estructura se puede describir editando directamente un archivo “.xfl” o gráficamente con la herramienta *xfedit* del entorno *Xfuzzy 3*, tal y como se muestra en la Figura 5. En la estructura del controlador se observan los bloques “interpolación”, “resta”, “suavizado_wheel” y “suavizado_v” que se encargan del cálculo de la trayectoria del robot hasta la configuración objetivo. Las trayectorias conseguidas con estos bloques son rectas tangentes que unen circunferencias de curvatura máxima trazadas en el punto de inicio y de llegada tal y como muestra la Figura 6.

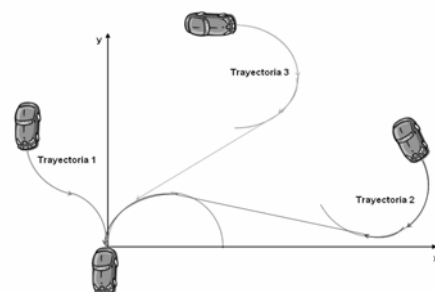


Figura 6. Trayectorias descritas por el vehículo

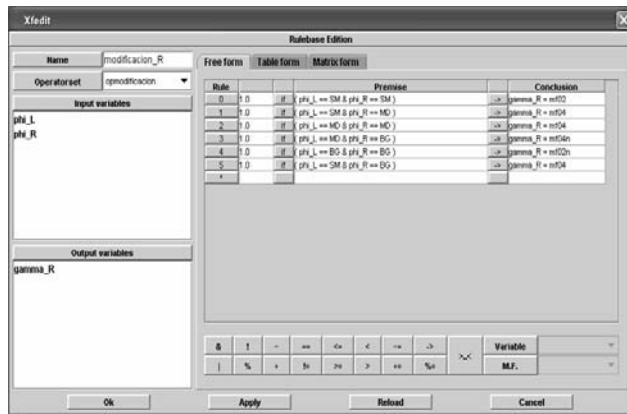


Figura 7. Base de reglas del bloque modificacion_R mediante *xfedit*

Los bloques “modificacion_R” y “modificacion_L” se encargan de modificar la trayectoria del vehículo en el caso de que se detecte la presencia de obstáculos. Como se indicó en la sección 2, la modificación de las trayectorias se hace en base a la cantidad y zona de pasillo ocupado por el obstáculo; para ver esto se estudian los valores de ϕ_R y ϕ_L . Según los valores de estos ángulos, se distinguen los seis casos comentados en la sección 2 y para cada uno de ellos se propone una curvatura diferente; esto se puede formular a partir de reglas del tipo si-entonces. La herramienta *xfedit* permite editar la base de reglas de estos bloques como se observa en la figura 7. La diferencia entre la base de reglas de ambos bloques radica en que para los casos dudosos de la sección 2 en los que sea indiferente el signo de la curvatura para esquivar el obstáculo, “modificacion_R” toma curvatura positiva mientras que “modificacion_L” toma negativa. El conjunto de operadores implicados en un bloque (figura 8b), así como el tipo de las variables se puede definir también a partir de la herramienta *xfedit*, como se observa para el caso del tipo *ang* de las variables ϕ_R y ϕ_L en la figura 8a. Mediante esta herramienta se puede especificar el número de funciones de pertenencia, los rangos de las mismas, así como el tipo (triangulares, trapezoidales, gaussianas, singleton, etc.).

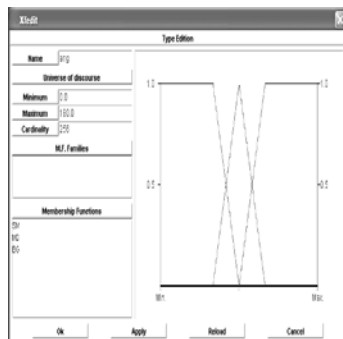


Figura 8a. Especificación de los tipos de variables

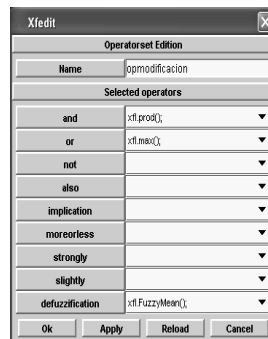


Figura 8b. Definición del conjunto de operadores

En la estructura también aparece “Eleccion_RL” que es un bloque no difuso que se encarga de tomar curvatura positiva o negativa en los casos dudosos dependiendo de con cuál de ellas se consigue una trayectoria mínima. Para ello se estudia cuál es la dirección que llevaba el robot antes de detectar el obstáculo, evaluando el signo de la curvatura proporcionada por “suavizado_wheel”, *wheel1*, y se decide así el signo de curvatura más conveniente. Si su valor es positivo, la variable binaria *eleccion* tomará valor cero, mientras que si es negativo, tomará valor uno. El valor tomado por la variable *eleccion* se guarda y no sufre cambios hasta ver un nuevo obstáculo. Para detectar cuándo se dan los casos dudosos se define una variable llamada *indecision*, siendo su valor uno cuando se encuentra en uno de estos casos y cero en caso contrario.

Finalmente, en la estructura del controlador aparece “decision” que nuevamente es un bloque no difuso que toma como salida la del bloque “suavizado_wheel” o la de “eleccion_RL” según el valor de la variable *obstacle*; esta variable toma valor cero cuando el controlador no detecta ningún obstáculo y toma valor uno cuando la detección es positiva. Para calcular el valor de la variable *obstacle* se utilizan las condiciones de obstáculo de pasillo recto y curvo de la sección 2.

4 VERIFICACIÓN DEL CONTROLADOR

Para estudiar si el comportamiento del controlador difuso es correcto, hemos empleado las herramientas de verificación del entorno *Xfuzzy 3*, principalmente la herramienta de simulación *xfsim*. Es importante verificar el comportamiento de un controlador con herramientas de simulación antes de experimentar con la planta real para así detectar posibles errores. Para realizar las simulaciones se utiliza un modelo de la planta cuyo código está escrito en Java. En el código también se incluye el preprocesado de las señales proporcionadas por los sensores así como el cálculo de variables como *obstacle*, *eleccion* e *indecision*.

Los resultados de algunas de las simulaciones realizadas se pueden visualizar en la Figura 9. Las figuras 9a y 9b corresponden a casos con un único obstáculo. En ellas se observa cómo el robot detecta perfectamente el obstáculo representado por un tramo de línea continua de grosor mayor. Desde el momento en el que el obstáculo es detectado, se ve cómo el vehículo comienza a modificar su trayectoria separándose de la línea discontinua, que representa la seguida por el vehículo cuando no hay obstáculo. Las figuras 9c y 9d corresponden a casos más complejos con dos obstáculos. En ellas se observa cómo el vehículo detecta en primer lugar el obstáculo más cercano modificando su trayectoria para poder evitarlo. Seguidamente cuando ve el siguiente obstáculo vuelve a modificarla para evitar la colisión con el segundo.

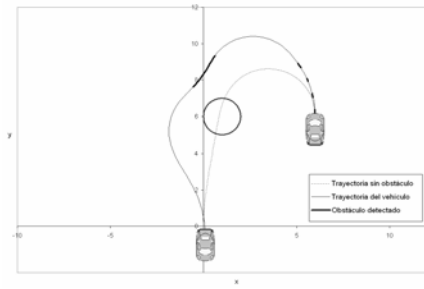


Figura 9a

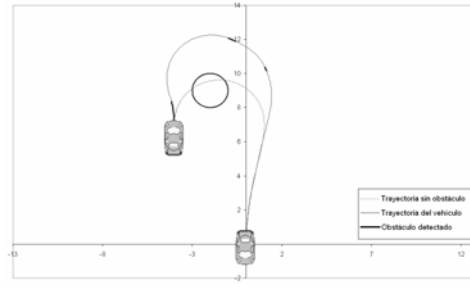


Figura 9b

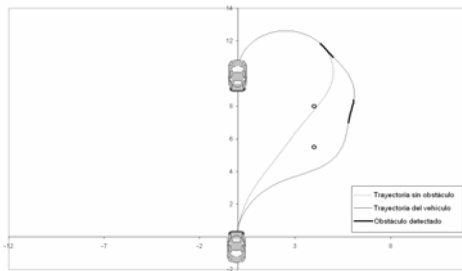


Figura 9c

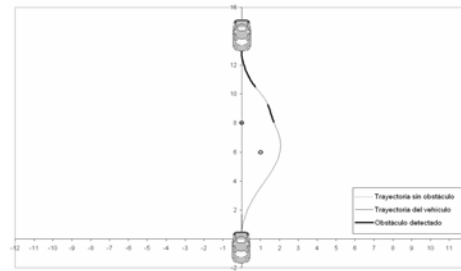


Figura 9d

5 CONCLUSIONES

En esta comunicación se ha presentado una solución al problema de navegación de robots móviles autónomos evitando obstáculos estáticos, basada en la combinación del análisis geométrico del problema con conocimiento heurístico modelado mediante lógica difusa. Para la verificación experimental se ha utilizado el vehículo Romeo 4R, teniendo en cuenta sus restricciones cinemáticas y utilizando varios de los sensores y actuadores de los que está provisto. En el desarrollo del sistema se han utilizado diversas herramientas de CAD del entorno *Xfuzzy 3* para el diseño e implementación del controlador. En particular, se ha hecho amplio uso de la herramienta *xfsim*, que permite simular el controlador operando en lazo cerrado con un modelo del robot. Las líneas de trabajo futuro de esta investigación se centrarán en la implementación del controlador siguiendo una estrategia híbrida Hardware-Software.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos TEC2005-04359/MIC (CICYT), TIC2006-635 (Junta de Andalucía) y DPI2005-02293.

Referencias

[1] I. Baturone, F. J. Moreno Velo, S. Sánchez Solano, A. Ollero. Automatic design of fuzzy controllers for car-like autonomous robots, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 12, No. 4, 2004.

[2] C. I. Connolly, J. B. Burns, R. Weiss. Path planning using Laplace's equation, *IEEE Conference on Robotics and Automation*, Cincinnati, 1990.

[3] R. Fernández Ramos. *Navegación autónoma de robots móviles en entornos parcialmente conocidos*, Tesis Doctoral, Málaga 2001.

[4] D. Fox, W. Burgard, S. Thurn. The dynamic window approach to collision avoidance, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 1997.

[5] K. Kant, S. Zucker. Toward efficient trajectory planning: The path-velocity decomposition, *The International Journal of Robotics Research*, 1986.

[6] T. Kubota, H. Hashimoto. A strategy for collision avoidance among mobile obstacle for a mobile robot, *11th International World Congress*, Tallin, Estonia, 1990.

[7] N. J. Nilsson. *Principles of artificial intelligence*, Palo Alto: Tioga, 1980.

[8] A. Ollero, B. C. Arrue, J. Ferruz, G. Heredia, F. Cuesta, F. López-Pichaco y C. Nogales. Control and perception components for autonomous vehicles guidance. Application to the Romeo Vehicles, *Control Engineering Practice*, Vol. 7, No. 10, pp 1291-1299, October 1999.

[9] A. Ollero. *Robótica, manipuladores y robots móviles*, Ed: Marcombo, 2001.

[10] *Xfuzzy: Herramientas de CAD para Lógica Difusa* (<http://www.imse.cnm.es/Xfuzzy/>)

ALGORITMO ADAPTATIVO CON EL GRADO DE MOVIMIENTO PARA EL DESENTRELAZADO DE VÍDEO

P. Brox¹, I. Baturone¹, S. Sánchez-Solano¹, J. Gutiérrez-Ríos² and F. Fernández-Hernández²

¹ Instituto de Microelectrónica de Sevilla (IMSE-CNM-CSIC)

Avda. Reina Mercedes S/N. Edificio CICA. 41012 Sevilla

e-mail:brox@imse.cnm.es

² Dpto. Tecnología Fotónica. Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid

Campus de Montegancedo S/N. 28660 Boadilla del Monte (Madrid)

e-mail:jgr@fi.upm.es

Resumen

En esta comunicación se presenta un algoritmo adaptativo con el movimiento para el desentrelazado de vídeo. Se basa en un sistema de inferencia difuso, que realiza una interpolación entre dos técnicas lineales en función del grado de movimiento. Se ha realizado un estudio de diferentes sistemas difusos con distinto número de funciones de pertenencia, analizándose el grado de complejidad de los mismos frente a su eficacia desentrelazando varias secuencias de vídeo.

Palabras Clave: Desentrelazado de vídeo, Movimiento adaptativo, Sistemas de inferencia difusos, Técnicas de aprendizaje supervisado.

1 INTRODUCCIÓN

Los principales formatos de transmisión de señales de televisión (NTCS, PAL, SECAM) utilizan una señal de vídeo entrelazada, donde sólo se transmiten alternativamente las líneas pares e impares de cada fotograma. De este modo, el ancho de banda de la transmisión se reduce a la mitad de una forma muy efectiva ya que, debido a las características del sistema de visión humano, el parpadeo provocado por la eliminación de líneas es prácticamente inapreciable [3]. No obstante, el auge de dispositivos que requieren un barrido progresivo de la señal de vídeo (televisores de alta definición, DVDs, proyectores, etc.) ha fomentado el desarrollo de algoritmos de desentrelazado que realizan algún tipo de interpolación espacio-temporal para calcular las líneas no transmitidas.

Entre los algoritmos de desentrelazado pueden distinguirse globalmente aquellos que utilizan un vector re-

presentativo del movimiento de la imagen para interpolar las líneas ausentes y los que no lo hacen [4]. Los primeros realizan una interpolación más precisa a costa de un elevado coste computacional requerido para calcular dicho vector. Los diferentes algoritmos pueden clasificarse atendiendo a si interpolan siempre los mismos píxeles (técnicas lineales) [6] [11], o si la interpolación se adapta a las características de la imagen (técnicas no-lineales) [1] [5]. Entre los algoritmos adaptativos se distinguen a su vez dos grupos: aquellos que tratan de adaptar la interpolación a la presencia de bordes en la imagen [5]; y aquellos otros que evalúan la cantidad de movimiento en la imagen adaptando la interpolación a ésta [1].

Cuando se emplean técnicas de movimiento adaptativo es fundamental realizar una buena estimación del grado de movimiento. Básicamente los detectores de movimiento evalúan la diferencia de valores de luminancia entre píxeles de campos consecutivos. No obstante, esta medida no siempre es fiable debido a la presencia de bordes o detalles con grandes contrastes de valores de luminancia en la dirección vertical de la imagen, y a que la señal puede contener ruido. Para aumentar la robustez de los detectores de movimiento algunos autores proponen conectar varios en cascada, de modo que solo si todos ellos detectan movimiento la señal se active [3]. También se han propuesto distintos algoritmos basados en lógica difusa para realizar un desentrelazado adaptativo con el grado de movimiento obteniendo mejoras significativas. Esto se debe a la capacidad de las técnicas difusas para realizar interpolaciones en zonas donde la información es imprecisa y, por tanto, la decisión no es trivial [10]. La técnica propuesta en [10] obtiene buenos resultados pero emplea una base de reglas compleja que requiere un coste computacional considerable.

En esta comunicación se propone un nuevo algoritmo adaptativo para el desentrelazado de vídeo que emplea un sistema de inferencia difuso para determinar, en función del movimiento, la interpolación entre los

píxeles de las líneas transmitidas. El algoritmo es descrito en detalle en la sección 2. Su validez es analizada en la sección 3 desentrelazando varias secuencias de imágenes. Finalmente, las conclusiones del trabajo son resumidas en la sección 4.

2 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

El algoritmo de desentrelazado adaptativo en función del movimiento que presentamos se basa en la siguiente heurística: si el píxel a calcular corresponde a un área donde no existe movimiento, el resultado mejor se obtiene realizando una interpolación entre píxeles del campo anterior (interpolación temporal). Si por el contrario el píxel corresponde a un área donde el grado de movimiento es elevado, lo más adecuado es realizar una interpolación entre distintos píxeles del campo actual (interpolación espacial). Entre las técnicas lineales temporales y espaciales se han elegido las más básicas: la técnica de inserción del píxel del campo anterior como temporal (I_T) y la media aritmética de los píxeles de las líneas superior e inferior como espacial (I_S). El grado de movimiento es evaluado procesando la señal que se obtiene al realizar la convolución bi-dimensional de la diferencia de luminancia en valor absoluto de dos campos que contienen líneas de la misma paridad. Matemáticamente puede expresarse como:

$$mov(x, y, t) = \sum_{i=1}^3 (\sum_{j=1}^3 H_{ij} C_{ij}) \quad (1)$$

donde H_{ij} , C_{ij} , vienen dadas por las siguientes matrices:

$$C = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$H^{xyt} = \begin{pmatrix} H^{x-1y-1t-1} & H^{x-1yt} & H^{x-1y+1t-1} \\ H^{xy-1t-1} & H^{xyt} & H^{xy+1t-1} \\ H^{x+1y-1t-1} & H^{x+1yt} & H^{x+1y+1t-1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

siendo H^{xyt} la diferencia en valor absoluto de la luminancia de los píxeles que pertenecen a dos campos que contienen líneas de la misma paridad:

$$H^{xyt} = H(x, y, t) = \frac{|I(x, y, t-1) - I(x, y, t+1)|}{2} \quad (4)$$

La notación (x,y,t) significa que el píxel tiene una ubicación espacial determinada por las coordenadas (x,y)

y corresponde a un campo determinado (t) de la secuencia de video. Atendiendo al tamaño de las matrices H y C , se observa que se emplea una ventana de convolución bi-dimensional de tamaño 3x3. La idea de utilizar técnicas de convolución para evaluar el movimiento fue introducida en [7]. La principal ventaja de éstas es que permiten tener en cuenta la contribución de los vecinos espacio-temporales al estimar el movimiento en el píxel actual. De este modo, puede minimizarse la influencia de los eventuales errores en la detección de movimiento debido a la presencia de ruido, bordes o detalles con contrastes de luminancia elevados. Además es posible asignar un peso ponderando cada uno de los píxeles vecinos mediante los coeficientes de la matriz C , tal y como indica la expresión (2). Se ha realizado un estudio para evaluar distintas posibilidades de la ventana de convolución analizando distintas dimensiones y valores de los coeficientes que la componen [2]. Como conclusión se ha seleccionado la indicada en la expresión (2).

Las técnicas de movimiento adaptativo fueron originalmente introducidas en [1]. El grado de movimiento se evaluaba comparando el valor de la señal correspondiente a la diferencia de luminancia entre campos consecutivos con un valor umbral constante. El objetivo del trabajo descrito en esta comunicación ha sido emplear una técnica de movimiento adaptativo que emplea un sistema difuso para realizar la transición entre las dos técnicas de interpolación (I_S , I_T) de manera más suave. De este modo, en las zonas donde el grado de movimiento es medio y por tanto, la decisión no es trivial, se realiza una interpolación no-lineal entre I_S e I_T .

2.1 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO

El conocimiento heurístico empleado por las técnicas de movimiento adaptativo es modelado mediante un sistema de inferencia difuso. En primer lugar, se ha empleado un sistema con solo dos reglas, donde los conceptos SMALL y LARGE se representan mediante los conjuntos difusos de la Figura 1(a). No obstante, podemos aprovechar la capacidad de interpolación de la lógica difusa considerando la posibilidad de ampliar el número de conjuntos difusos. De este modo, sería posible contemplar un nuevo conjunto difuso (representado con la etiqueta MEDIUM en la Figura 1(b)). La base de reglas se amplía considerando una nueva regla que, en el caso de activarse, implementa una combinación lineal de las técnicas I_S y I_T .

Este razonamiento puede extenderse aumentando el número de conjuntos difusos considerados a los cuatro (SMALL, SMALL-MEDIUM, MEDIUM-LARGE, LARGE) o cinco (SMALL, SMALL-MEDIUM, ME-

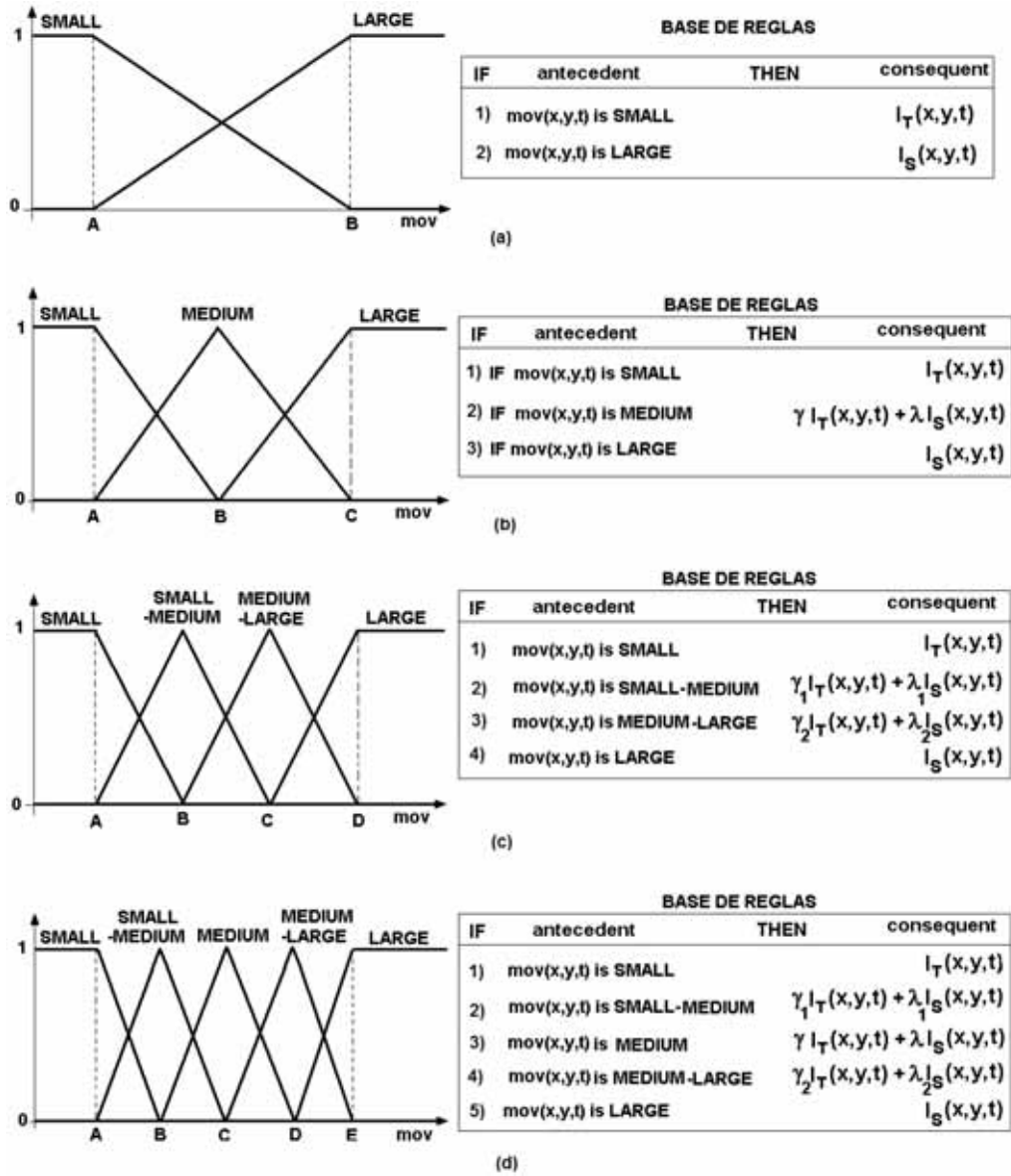


Figura 1: Funciones de pertenencia utilizadas por los distintos sistemas de inferencia

DIUM, MEDIUM-LARGE, LARGE) representados en las Figura 1(c) y 1(d) respectivamente. El número de reglas de la base de reglas aumenta del mismo modo. El problema de esta técnica es que "a priori" no existe ninguna indicación para fijar las constantes de los consecuentes de las bases de reglas con más de dos reglas, ni tampoco para determinar las constastes (A, B, C, D, E) que definen los conjuntos difusos asociados a las distintas etiquetas lingüísticas. Para fijar estos valores podemos entrenar los sistemas difusos empleando técnicas de aprendizaje supervisado. El apartado siguiente describe en detalle dicho proceso.

2.2 PROCESO DE APRENDIZAJE SUPERVISADO

Los sistemas han sido implementados en el entorno de desarrollo de sistemas difusos Xfuzzy [8]. Este entorno facilita el diseño de sistemas de inferencia basados en lógica difusa al incluir distintas herramientas de CAD que cubren las etapas de descripción, identificación, simplificación, verificación, ajuste automático y síntesis.

La etapa de ajuste constituye habitualmente una de las tareas más complejas del diseño de sistemas difusos. La herramienta que se encarga de implementar esta etapa en Xfuzzy se denomina *xfi* [9]. Esta herramienta permite aplicar algoritmos de aprendizaje

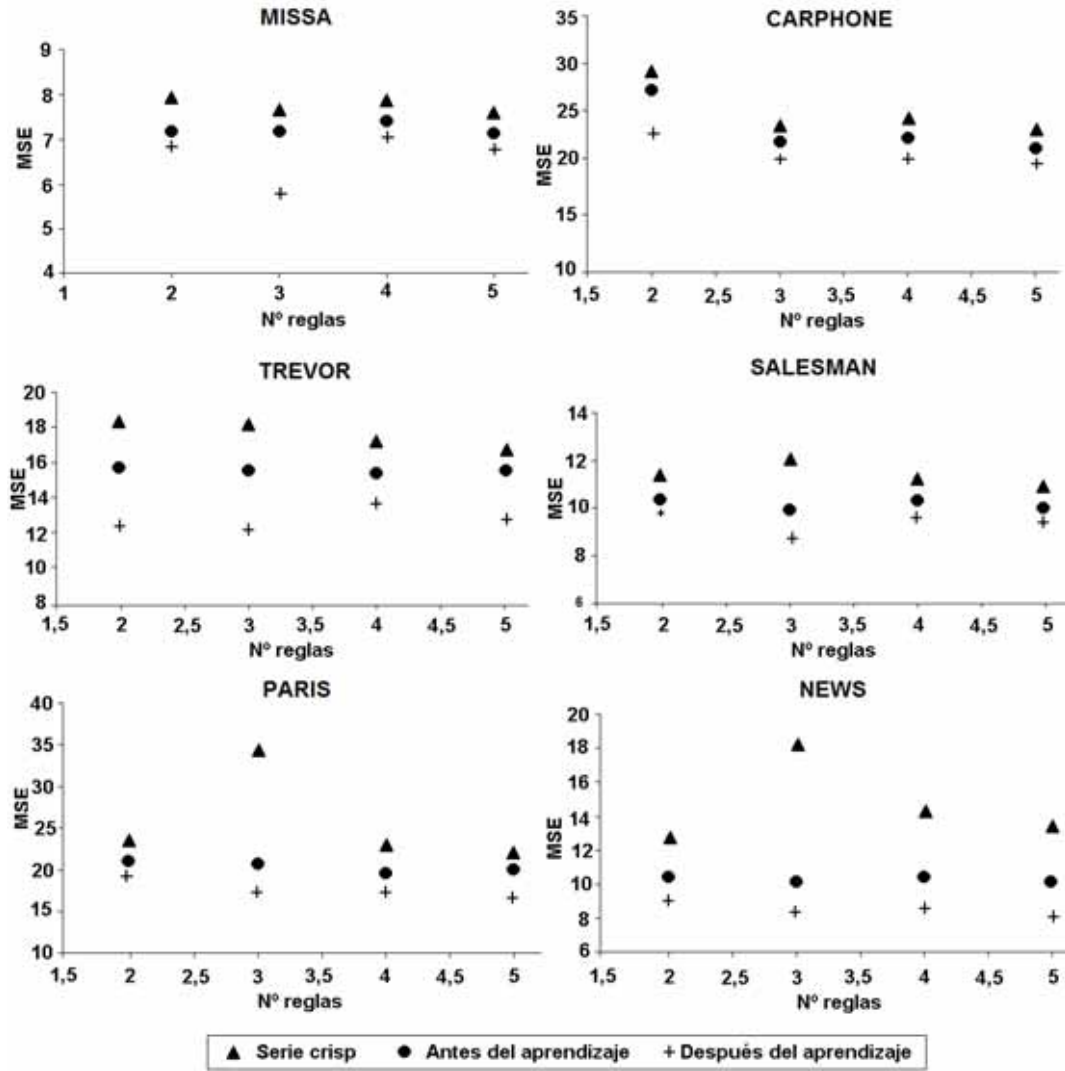


Figura 2: Valores de MSE obtenidos por los distintos sistemas de inferencia difusos al desentrelazar las secuencias de video

supervisado donde el comportamiento deseado del sistema es descrito mediante un conjunto de patrones de entrenamiento. Los sistemas han sido entrenados utilizando como patrones de entrenamiento un conjunto de fotogramas de vídeo progresivo. De este modo, el algoritmo de aprendizaje supervisado seleccionado (Marquardt-Levenberg en nuestro caso) intenta minimizar una función de error que evalúa la diferencia entre el comportamiento actual y el deseado (determinado por los patrones de entrada/salida). La herramienta *xfl* permite aplicar el proceso de ajuste a los distintos parámetros de los sistemas de inferencia difusos implementados. La utilidad de esta etapa del proceso de diseño se ha verificado desentrelazando varias secuencias de vídeo, y se explica en detalle en la sección 3.

3 RESULTADOS DE SIMULACIÓN

El algoritmo propuesto ha sido probado simulando distintas secuencias de vídeo estándares ampliamente utilizadas por la comunidad científica y accesibles a través de la página web: <http://decsai.ugr.es>. Las secuencias utilizadas se encuentran originalmente en un formato de vídeo progresivo por lo han sido desentrelazadas artificialmente, es decir, eliminado líneas de cada uno de los fotogramas que las componen. Los datos del fichero de entrenamiento se obtiene seleccionando un conjunto de imágenes progresivas de cada una de las secuencias.

La Figura 2 muestra el error cuadrático medio (MSE) obtenido al desentrelazar seis secuencias de vídeo. Este valor corresponde al valor medio de las imágenes desentrelazadas (aproximadamente se han simulado unas

Tabla 1: Valor medio de PSNR (en dBs) obtenido al desentrelazar distintas secuencia con diferentes algoritmos.

Secuencia	Missa	Salesman	Carphone	Paris	Trevor	News
Formato	CIF	CIF	QCIF	CIF	CIF	QCIF
RL	36.44	29.75	28.25	23.61	31.05	25.18
I_S	40.47	33.53	32.61	26.67	35.04	29.25
I_T	38.36	36.17	30.34	29.86	34.36	33.13
VT-2fields	40.25	36.54	34.08	30.73	36.61	35.46
VT-3fields	40.52	36.95	34.54	31.37	37.16	35.67
Técnica [10]	40.01	37.62	32.27	33.12	35.38	34.73
Propuesta 2 reglas	40.18	38.29	34.78	35.28	36.69	37.51
Propuesta 3 reglas	40.51	38.44	34.83	35.78	37.49	38.68
Propuesta 4 reglas	39.65	38.23	34.94	35.55	36.77	38.65
Propuesta 5 reglas	39.67	38.21	34.94	35.93	37.16	39.15

50 imágenes de cada secuencia). Las gráficas de la Figura 2 muestran los resultados obtenidos al implementar un algoritmo donde los conceptos, SMALL, SMALL-MEDIUM, MEDIUM, MEDIUM-LARGE y LARGE están definidos mediante valores umbrales, es decir, determinados por un valor numérico constante. También se muestran los resultados obtenidos mediante la implementación de los sistemas difusos con distinto número de reglas (con y sin aprendizaje). Comparando las tres series de resultados puede deducirse que los algoritmos que implementan los sistemas difusos obtiene los errores más pequeños, reduciéndose aún más estos valores si las funciones de pertenencia y los consecuentes se modifican mediante el proceso de aprendizaje. Finalmente, analizando el número de reglas empleadas y el valor de MSE obtenido se deduce que si se utilizan tres reglas se obtienen mejores resultados que con dos. No obstante, las mejoras introducidas con cuatro y cinco funciones de pertenencia no son significativas con respecto a la propuesta que utiliza tres. Es más, en determinados casos incluso dan lugar a errores ligeramente superiores.

El algoritmo propuesto también ha sido comparado con otras técnicas de desentrelazado. La Tabla 1 muestra el valor medio en PSNR obtenido al desentrelazar distintas secuencias de vídeo aplicando una serie de algoritmos. Concretamente se han analizado las técnicas lineales más simples: duplicación o repetición del píxel de la línea anterior (RL) y el valor medio de las líneas superior e inferior (I_S) como técnicas espaciales y la inserción del píxel del campo anterior (I_T) como temporal. También se han considerado en el estudio técnicas lineales espacio-temporales actualmente utilizadas en chips comerciales [5], [10]. Finalmente, hemos considerado una técnica de movimiento adaptativo que también emplea un sistema difuso para realizar la interpolación [9]. Analizando los resultados mostrados en la Tabla 1 se observa que los resultados más altos de

PSNR y por tanto, los errores más bajos corresponden al algoritmo propuesto (se indican los valores obtenidos con las distintas funciones de pertenencia tras realizarse el proceso de aprendizaje). Esto también puede ser corroborado analizando las imágenes desentrelazadas de la Figura 3.

Finalmente, se ha realizado un análisis del coste computacional involucrado en la implementación de cada uno de los algoritmos. Para ello todos los algoritmos han sido ejecutados en la misma plataforma (un PC con procesador Pentium IV y sistema operativo MSWindow XP) determinándose el tiempo empleado por cada uno de ellos en procesar una misma secuencia. Los resultados se muestran en la Tabla 2. Puede comprobarse cómo las técnicas lineales son la más rápidas aunque los resultados obtenidos por ellas se ven ampliamente mejorados por nuestra propuesta.

4 CONCLUSIONES

En esta comunicación se ha presentado un sistema difuso que en función del grado de movimiento implementa distintas combinaciones entre dos técnicas lineales. Está basado en las técnicas clásicas de movimiento adaptativo pero utiliza deficiones difusas en lugar de crisp para determinar el grado de movimiento. Se han implementado distintos sistemas difusos con distinto grado de complejidad analizando la eficacia de cada uno de ellos para realizar la interpolación. Los parámetros que definen el sistema de inferencia difuso han sido determinados mediante un proceso de ajuste automático implementando un proceso de aprendizaje supervisado. En función de los resultados obtenidos se deduce que un sistema que evalúa el grado de movimiento con tres funciones de pertenencia es eficiente tanto por los resultados que consigue como por su coste computacional.

Tabla 2: Tiempo de ejecución para desentrelazar una de las secuencias.

Algoritmo	RL	I_S	I_T	VT 2fields	VT 3fields	Técnica [10]	Propuesta 2-3-4-5 reglas
Tiempo(s)	2.03	2.05	3.28	10.62	14.65	143.03	29.23-30.95-31.76-32.65



Figura 3: Imágenes desentrelazadas obtenidas aplicando: (a) RL, (b) I_S , (c) I_T , (d) VT2fields, (e) VT3fields, (f) técnica [10], (g) propuesta de 2 y (h) 3 reglas

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos TEC2005-04359/MIC del Ministerio español de Educación y Ciencia, y TIC2006-635 de la Junta de Andalucía. El primer autor forma parte del programa de formación para estudiantes de doctorado F.P.U., del Ministerio español de Educación y Ciencia.

Referencias

[1] A. M. Bock. Motion adaptive standards conversion between formats of similar field rates. *Signal*

Processing: Image Communication, Vol. 6, no. 3, Pág.275-280, 1994.

- [2] P. Brox, I. Baturone, S. Sánchez-Solano. A Fuzzy Motion Adaptive Algorithm for Interlaced-to-Progressive Conversion. *It will be published in Proc. of the Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'2006)*, 2006.
- [3] G. De Haan. Video Processing. University Press, Eindhoven, 2004.
- [4] G. De Haan and E. B. Bellers. De-interlacing: An overview. *Proc. of the IEEE*, Vol. 86, Pág.1839-1857, 1998.
- [5] T. Doyle and M. Looymans. Progressive scan conversion using edge information. *Signal Processing of HDTV*. Ed. Elsevier Science Publishers, Vol. II, Pág.711-721, 1990.
- [6] Genesis Microchip, Inc., Preliminary data sheet of Genesis gmVLD8, 8 bit digital video line doubler, versión 1, 1996.
- [7] J. Gutiérrez-Ríos, F. Fernández-Hernández, J. C. Crespo and G. Triviño. Motion adaptive fuzzy video de-interlacing method based on convolution techniques. *Proc. of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, 2004.
- [8] F. J. Moreno-Velo, I. Baturone, S. Sánchez-Solano and A. Barriga. Rapid design of complex fuzzy systems with XFUZZY. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, Págs.342-347, 2003.
- [9] F. J. Moreno-Velo, I. Baturone, R. Senhadji y S. Sánchez-Solano. Tuning complex fuzzy systems by supervised learning algorithms. *Proc. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, Págs. 226-231, 2003.
- [10] D. Van de Ville, B. Rogge, W. Philips and I. Lemahieu. De-interlacing using fuzzy-based motion detection. *Proc. 3rd Int. Conf. on Knowledge-Based Intelligent Information Engineering Systems*, Pág.263-267, 1999.
- [11] M. Weston. Interpolating lines of video signals. US-patent 4, Pág.789-893, 1998.

Relación entre las Funciones de Disimilaridad Restringida y las Funciones de Equivalencia Restringida

H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola y V. Mohedano

Dep. Automática y Computación

Universidad Pública de Navarra

Campus Arrosadía s/n

31006 Pamplona, Spain

{bustince, edurne.barrenechea, miguel.pagola,vmohedano}@unavarra.es

Resumen

En este trabajo presentamos la noción de función de disimilaridad restringida. Esta definición surge del concepto de disimilaridad y de la definición de función de equivalencia restringida (ver [6]). Caracterizamos dichas funciones a partir de automorfismos. También, construimos medidas de distancia de Liu y medidas de proximidad de Fan et al. agregando, de forma especial, las funciones de disimilaridad restringida. Por último, mostramos la relación existente entre todas las definiciones que presentamos en este trabajo.

Palabras Clave: Disimilaridad restringida, Distancia, Equivalencia restringida, Operadores de agregación, Proximidad.

1 INTRODUCCIÓN

Actualmente las medidas de disimilaridad están siendo muy utilizadas en diferentes campos de la inteligencia artificial. Por ejemplo, en visión artificial la disimilaridad entre dos imágenes es muy útil para comparar algoritmos dedicados a la reducción del ruido, codificación, restauración de imágenes [8], y para la clasificación y segmentación no supervisada.

El objetivo de este trabajo es construir medidas de distancia de Liu [17] y medidas de proximidad de Fan et al. [12, 13] agregando funciones de disimilaridad restringida para utilizarlas posteriormente en procesamiento de imagen. Por este motivo, primero definimos y caracterizamos estas funciones a partir de automorfismos, y a continuación, estudiamos la relación existente entre las funciones de disimilaridad restringida y las funciones de equivalencia restringida (ver [6]).

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 repasamos los conceptos de la teoría fuzzy que utilizaremos en el resto del trabajo. En la sección 3, presentamos la definición de función de disimilaridad restringida y un teorema de caracterización. A continuación, construimos medidas de distancia de Liu, agregando las funciones de disimilaridad restringida. Posteriormente, estudiamos las condiciones bajo las cuales podemos obtener medidas de distancia de Liu a partir de medidas de proximidad de Fan et al.. Finalizamos con las conclusiones y líneas futuras de investigación.

2 PRELIMINARES

2.1 NEGACIONES FUZZY

Sea $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. c es una *negación fuzzy*, iff

1. $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$,
2. $c(x) \leq c(y)$, si $x \geq y$ (monotonía).

Una negación fuzzy es *estricta*, iff

3. $c(x)$ es *continua*,
4. $c(x) < c(y)$, para $x > y$ para todo $x, y \in [0, 1]$.

Una negación fuzzy estricta es *involutiva*, iff

5. $c(c(x)) = x$, para todo $x \in [0, 1]$.

A las negaciones fuzzy que son estrictas e involutivas se les llama *negaciones fuertes*. Nótese que no hace falta demandar la condición de decrecimiento estricto, ya que de 1, 2 y 5 se deduce que c es continua y estricta.

Sabemos que un automorfismo viene dado por la siguiente definición:

Definición 1 Una función continua, estrictamente creciente $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ con condiciones de contorno $\varphi(a) = a, \varphi(b) = b$ se llama *automorfismo del intervalo* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

En este trabajo utilizamos automorfismos definidos en el intervalo unidad.

En 1979 Trillas demostró el siguiente teorema ([25]):

Teorema 1 *Una función $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una negación fuerte si y sólo si existe un automorfismo φ del intervalo unidad tal que $c(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$.*

Denotaremos con $\mathcal{F}(X)$ al conjunto de todos los conjuntos fuzzy definidos en el referencial finito y no vacío X ($\text{Cardinal}(X) = n$). Dado un conjunto fuzzy $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\} \in \mathcal{F}(X)$, llamaremos complementario de este conjunto y lo denotaremos con A_c a la siguiente expresión:

$$A_c = \{(x, c(\mu_A(x))) | x \in X\}$$

siendo c una negación fuzzy.

2.2 OPERADORES DE AGREGACIÓN

El concepto de operador de agregación ha sido ampliamente estudiado en los últimos años en la Teoría de Conjuntos Fuzzy (ver [1, 7, 9, 11, 18, 19, 28]). En este trabajo vamos a utilizar operadores de agregación M que cumplen las condiciones demandadas en la siguiente definición.

Definición 2 *Un operador de agregación es una función:*

$$M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

(para algún $n \geq 2$), que satisface al menos las cuatro condiciones siguientes:

A1. $M(x_1, \dots, x_n) = 0$ si y sólo si $x_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

A2. $M(x_1, \dots, x_n) = 1$ si y sólo si $x_i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

A3. Para cualquier par $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ de n -tuplas tal que $x_i, y_i \in [0, 1]$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, si $x_i \leq y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$M(x_1, \dots, x_n) \leq M(y_1, \dots, y_n);$$

esto es, M es monotonamente creciente en todos sus argumentos.

Este axioma lo denotaremos con A3S cuando le exijamos al operador ser estrictamente creciente, es decir, M es estrictamente creciente si y sólo si $x_i < y_i$ implica

$$M(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) < M(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n),$$

$i = 1, \dots, n$.

A4. M es una función simétrica en todos sus argumentos, es decir,

$$M(x_1, \dots, x_n) = M(x_{p(1)}, \dots, x_{p(n)})$$

para cualquier permutación de p en $\{1, \dots, n\}$.

La Definición 2 surge de la axiomatización dada por Klir y Folger (ver [16]). La justificación de A1 – A4 puede encontrarse en [5, 6, 24]. En [24] están desarrollados diferentes métodos de construcción de estos operadores.

En teoría de operadores de agregación (ver [7, 11, 14]) a la siguiente propiedad:

$$c(M(x_1, \dots, x_n)) = M(c(x_1), \dots, c(x_n)) \quad (1)$$

se le llama propiedad de *autodualidad respecto a la involución c* . Un estudio muy detallado de las condiciones bajo las cuales, los operadores de agregación que cumplen A1 – A4 satisfacen también la propiedad (1) se encuentra realizado en [24].

2.3 FUNCIONES DE EQUIVALENCIA RESTRINGIDA

En esta subsección presentamos el concepto de función de equivalencia restringida [6]. Este concepto está muy ligado al de función de proximidad de Liu. Por este motivo comenzamos la subsección recordando algunas definiciones previas.

En 1992 Liu [17] presentó una definición axiomática de medida de similaridad para conjuntos fuzzy $A, B \in \mathcal{F}(X)$ de la siguiente forma:

Definición 3 *Una función real $SM : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una medida de similaridad en $\mathcal{F}(X)$ si SM satisface las siguientes propiedades:*

(SM1) $SM(A, B) = SM(B, A)$, para todo $A, B \in \mathcal{F}(X)$;

(SM2) $SM(A, A_c) = 0$, para todo conjunto A crisp;

(SM3) $SM(C, C) = \sup_{A, B \in \mathcal{F}(X)} SM(A, B)$, para todo $C \in \mathcal{F}(X)$;

(SM4) Para todo $A, B, C, D \in \mathcal{F}(X)$, si $A \leq B \leq C \leq D$, entonces $SM(A, D) \leq SM(B, C)$.

Es fácil probar que (SM4) es equivalente a la siguiente condición:

para todo $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$, si $A \leq B \leq C$, entonces $SM(A, B) \geq SM(A, C)$ y $SM(B, C) \geq SM(A, C)$.

Debemos mencionar que existen medidas de similaridad en la literatura fuzzy, como por ejemplo las de Pappis y Karacapilidis [21] o las de Wang, De Baets y Kerre [27], que no satisfacen a la vez las cuatro condiciones demandadas por Liu.

En 1999, Fan et al. definen una medida de proximidad en [12] de la siguiente forma:

Definición 4 Una medida de similaridad en el sentido de Liu es una media de proximidad, si

$$SM(A, B) = SM(A_c, B_c),$$

para todo $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

La definiciones 3 y 4, la definición de *equivalencia* dada por Fodor y Roubens (ver [14]) y las condiciones habitualmente exigidas a las medidas que se utilizan para comparar imágenes, dieron lugar a la siguiente definición presentada en [6]:

Definición 5 Una función $REF : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una función de equivalencia restringida, si satisface las siguientes condiciones:

- 1) $REF(x, y) = REF(y, x)$ para todo $x, y \in [0, 1]$;
- 2) $REF(x, y) = 1$ si y sólo si $x = y$;
- 3) $REF(x, y) = 0$ si y sólo si $x = 1$ e $y = 0$ o $x = 0$ e $y = 1$;
- 4) $REF(x, y) = REF(c(x), c(y))$ para todo $x, y \in [0, 1]$, siendo c una negación fuerte;
- 5) Para todo $x, y, z \in [0, 1]$, si $x \leq y \leq z$, entonces $REF(x, y) \geq REF(x, z)$ y $REF(y, z) \geq REF(x, z)$.

Ejemplo 1 $REF(x, y) = 1 - |x - y|$ satisface las condiciones 1)-5) con $c(x) = 1 - x$ para todo $x \in [0, 1]$.

Consideramos necesario realizar las siguientes puntualizaciones sobre los items de la definición 5:

1.- En el item 2) exigimos la condición necesaria y suficiente. En este sentido, en la definición de función de equivalencia dada por Fodor y Roubens [14] exigen sólomente $REF(x, x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Debemos indicar que en la definición de relación de equivalencia fuzzy E dada por Trillas [26] y ampliamente estudiada por Jacas y Recasens, (por ejemplo, un resumen de los trabajos de estos autores puede encontrarse en [2]), también imponen la condición $E(x, x) = 1$ para todo x perteneciente al universo de discurso X .

2.- En ciertas aplicaciones de la teoría de conjuntos fuzzy, por ejemplo en procesamiento de imagen, es fundamental el item 4). Dicha condición no es demandada por Fodor y Roubens.

3.- El tratamiento funcional del concepto de REF lo hace diferente del concepto de relación de equivalencia fuzzy. Nosotros no demandamos la condición de la *-transitividad, cosa que sí se pide a relaciones de equivalencia fuzzy. En la definición de función de equivalencia dada por Fodor y Roubens, tampoco se demanda la *-transitividad.

Las tres consideraciones anteriores ponen de manifiesto que el concepto de REF es diferente al de función de equivalencia de Fodor y Roubens y al de relación de equivalencia fuzzy de Trillas, Jacas y Recasens.

En [6] se encuentra demostrado el Teorema 2, la Proposición 1 y el siguiente resultado: *Cada función de equivalencia restringida es una función de equivalencia en el sentido de Fodor y Roubens*, (el recíproco no es cierto). Es precisamente este resultado el que nos ha sugerido el nombre de las funciones presentadas en la definición 5, (para más información [6]). En dicho trabajo también se encuentra presentado el concepto de función de equivalencia restringida asociada a la función $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$.

Teorema 2 Una función continua $REF : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $REF(1, x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$ es una función de equivalencia restringida asociada a la función $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, tal que I es continua y satisface $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$

si y sólo si

existe un automorfismo φ del intervalo unidad tal que

$$\begin{cases} REF(x, y) = \varphi^{-1}(1 - |\varphi(x) - \varphi(y)|) \\ y \\ c(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)). \end{cases}$$

Proposición 1 Sea $M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ tal que satisfice A1, A2 y A3. Sea $REF : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ una función de equivalencia restringida. En estas condiciones

$$SM : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1], \text{ dada por } SM(A, B) = M_{i=1}^n REF(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))$$

satisface los siguientes items:

- i) $SM(A, B) = SM(B, A)$, para todo $A, B \in \mathcal{F}(X)$;
- ii) $SM(A, A_c) = 0$ si y sólo si A es crisp;
- iii) $SM(A, B) = 1$ si y sólo si $A = B$;
- iv) Si $A \leq B \leq C$, entonces $SM(A, B) \geq SM(A, C)$ y $SM(C, B) \geq SM(C, A)$;
- v) $SM(A_c, B_c) = SM(A, B)$.

Proposición 2 En las condiciones de la Proposición 1, SM es una medida de similaridad de Liu y una medida de proximidad de Fan.

Demostración. Sólo debemos tener en cuenta la Definición 3 y la Definición 4. ■

3 FUNCIONES DE DISIMILARIDAD RESTRINGIDA

Sea X un conjunto finito no vacío. Una *disimilaridad* (ver [4, 10, 22]) es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface $d(x, x) = 0$, no-negatividad $d(x, y) \geq 0$ y simetría $d(x, y) = d(y, x)$. Teniendo en cuenta esta definición, el trabajo de Bouchon-Meunier et al. [3] y los trabajos de Liu [17] y Fan et al. [12, 13] sobre medidas de distancia y medidas de proximidad respectivamente, presentamos la siguiente definición:

Definición 6 Una función $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es una *función de disimilaridad restringida* si satisface las siguientes condiciones:

- 1) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in [0, 1]$;
- 2) $d(x, y) = 1$ si y sólo si $x = 0$ e $y = 1$ o $x = 1$ e $y = 0$;
- 3) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
- 4) Para todo $x, y, z \in [0, 1]$, si $x \leq y \leq z$, entonces $d(x, y) \leq d(x, z)$ y $d(y, z) \leq d(x, z)$.

Es fácil probar que 4) es equivalente a la siguiente condición: para todo $x, y, z, t \in [0, 1]$, if $x \leq y \leq z \leq t$, entonces $d(y, z) \leq d(x, t)$.

Debemos señalar que las funciones d no se pueden obtener mediante las transformaciones presentadas por Tomas, Alsina and Rubio-Martinez en [23]. Una de las razones es que d satisface la propiedad reflexiva (ítem 3) definición 6) y por tanto no es una pseudométrica.

Proposición 3 Si φ_1, φ_2 son dos automorfismos en el intervalo unidad, entonces

$$d(x, y) = \varphi_1^{-1}(|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|)$$

es una función de disimilaridad restringida.

Demostración. 1) $d(x, y) = d(y, x)$ evidente.

2) Si $d(x, y) = 1 = \varphi_1^{-1}(|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|)$, entonces $|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)| = 1$, pueden ocurrir dos cosas:

- a) Si $\varphi_2(x) - \varphi_2(y) = 1$, entonces $x = 1$ e $y = 0$ o
- b) Si $\varphi_2(y) - \varphi_2(x) = 1$, entonces $y = 1$ e $x = 0$.

Recíprocamente, si $x = 1$ e $y = 0$, entonces $d(x, y) = \varphi_1^{-1}(|\varphi_2(1) - \varphi_2(0)|) = \varphi_1^{-1}(1) = 1$. De manera análoga para $x = 0$ e $y = 1$.

3) Si $d(x, y) = 0$, entonces $\varphi_1^{-1}(|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|) = 0$ por tanto $|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)| = 0$, entonces $\varphi_2(x) - \varphi_2(y) = \varphi_2(y) - \varphi_2(x) = 0$. Por tanto $x = y$.

Si $x = y$, entonces $\varphi_2(x) = \varphi_2(y)$ por tanto $d(x, y) =$

$$\varphi_1^{-1}(0) = 0.$$

4) Si $x \leq y \leq z$, entonces $\varphi_2(x) \leq \varphi_2(y) \leq \varphi_2(z)$ por tanto $\varphi_2(y) - \varphi_2(x) \leq \varphi_2(z) - \varphi_2(x)$ y $\varphi_2(z) - \varphi_2(y) \leq \varphi_2(z) - \varphi_2(x)$, entonces $d(x, y) \leq d(x, z)$ y $d(y, z) \leq d(x, z)$. ■

Ejemplo 2 Tomemos los automorfismos $\varphi_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$ y $\varphi_2(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$, en estas condiciones por la Proposición 3 tenemos: $d(x, y) = |x - y|^2$.

Proposición 4 En las condicioness de la Proposición 3:

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \text{ para todo } x \in [0, 1]$$

si y sólo si

$$d(1, x) = \varphi_1^{-1}(1 - \varphi_1(x)).$$

Demostración. (Suficiencia) Si $d(1, x) = \varphi_1^{-1}(1 - \varphi_1(x)) = \varphi_1^{-1}(|\varphi_2(1) - \varphi_2(y)|) = \varphi_1^{-1}(|1 - \varphi_2(y)|) = \varphi_1^{-1}(1 - \varphi_2(y))$, por tanto $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. (Necesidad) Si $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces $d(1, x) = \varphi_1^{-1}(|\varphi_1(1) - \varphi_1(y)|) = \varphi_1^{-1}(1 - \varphi_1(x))$. ■

Nótese que por el Teorema 1 en las condiciones de la Proposición 4 tenemos que $d(1, x) = \varphi_1^{-1}(1 - \varphi_1(x))$ es una negación fuerte.

Teorema 3 Sea c_1 una negación fuerte. Si REF es una función de equivalencia restringida, definimos

$$d(x, y) = c_1 \left(REF(x, y) \right), \text{ para todo } x, y \in [0, 1].$$

Entonces d es una función de disimilaridad restringida.

Demostración. Similar a la realizada en la Proposición 3.

Corolario 1 En las condiciones del Teorema 3 ,

$$d(x, y) = d(c(x), c(y)), \text{ para todo } x, y \in [0, 1]$$

se cumple.

Demostración. Directa. ■

Teorema 4 Una función continua $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $d(1, x) = c(x)$ para todo $x \in [0, 1]$ y $d(x, y) = d(c(x), c(y))$ para $x, y \in [0, 1]$ es una función de disimilaridad restringida asociada a la función $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, donde I es continua y satisface $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$

si y sólo si

existe un automorfismo φ en el intervalo unidad tal que

$$\begin{cases} d(x, y) = \varphi^{-1}(|\varphi(x) - \varphi(y)|) \\ y \\ c(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)). \end{cases}$$

Demostración. Basta tener en cuenta el Teorema 2 y el Teorema 3. ■

Ejemplo 3 Sea el automorfismo $\varphi(x) = x^{\frac{1}{2}}$, en estas condiciones por el Teorema 4 tenemos:

$$\begin{cases} d(x, y) = |x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}|^2 \\ y \\ c(x) = (1 - x^{\frac{1}{2}})^2. \end{cases}$$

3.1 AGREGACIONES DE FUNCIONES DE DISIMILARIDAD RESTRINGIDA

En [17] Liu da la siguiente definición:

Definición 7 Una función $D : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ es una medida de distancia en $\mathcal{F}(X)$ si D satisface las siguientes propiedades:

- (D1) $D(A, B) = D(B, A)$ para todo $A, B \in \mathcal{F}(X)$;
- (D2) $D(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$;
- (D3) $D(A, B) = 1$ si y sólo si A y B son conjuntos no fuzzy complementarios;
- (D4) Si $A \leq A' \leq B' \leq B$, entonces $D(A, B) \geq D(A', B')$.

Proposición 5 Sea $M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ tal que cumple A1, A2 y A3. Sea $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ una función de disimilaridad restringida. En estas condiciones

$$D(A, B) = M_{i=1}^n d(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))$$

para todo $A, B \in \mathcal{F}(X)$ es una medida de distancia en el sentido de Liu.

3.2 RELACIÓN ENTRE LAS MEDIDAS DE PROXIMIDAD DE FAN ET AL. Y LAS MEDIDAS DE DISTANCIA DE LIU

Teorema 5 Sea $M : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ tal que satisface A1, A2, A3 y la propiedad de autodualidad respecto a la negación fuerte c . Sea $REF : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ una función de equivalencia restringida y sea $d : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ una función de disimilaridad restringida. Bajo estas condiciones, las medidas de proximidad de Fan et al. generadas a partir de la Proposition 1 y las medidas de distancia de Liu generadas a partir de la Proposition 5, verifican la siguiente igualdad:

$$D(A, B) = c(SM(A, B)) \text{ para todo } A, B \in \mathcal{F}(X).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} D(A, B) &= M_{i=1}^n d(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)) \\ &= M_{i=1}^n c(REF(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))) \\ &= c(M_{i=1}^n REF(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))) \\ &= c(SM(A, B)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo hemos presentado la definición de función de disimilaridad restringida. También hemos caracterizado estas funciones a partir de automorfismos. Además, hemos construido medidas de igualdad de Liu y medidas de proximidad de Fan et al. a partir de nuestras funciones REF y d .

En un futuro próximo queremos utilizar proximidades de Fan et al. y distancias de Liu generadas a partir de nuestras funciones, para la construcción de medidas que nos permitan comparar imágenes.

También, queremos obtener un algoritmo para la umbralización de imágenes, utilizando nuestras funciones REF y d en la construcción de conjuntos fuzzy asociados a una imagen. A partir de los algoritmos más utilizados en teoría fuzzy para la segmentación de imágenes (ver [15]), nuestro algoritmo quedaría estructurado de la siguiente forma:

(a) Asignar L conjuntos fuzzy Q_t a una imagen Q . Cada conjunto está asociado a un nivel de intensidad t , ($t = 0, 1, \dots, L - 1$), de la escala L de grises utilizada. La función de pertenencia de cada elemento debe expresar la relación existente entre la intensidad q del pixel tratado y su pertenencia al objeto o al fondo. Utilizaremos las funciones de disimilaridad restringida para construir la función de pertenencia de cada conjunto fuzzy Q_t .

(b) Calcular la medida de proximidad de Fan et al. entre cada Q_t y con el conjunto 1 (todos los elementos del conjunto tienen pertenencia 1). En este paso, utilizaremos las medidas de proximidad de Fan construidas a partir de funciones de equivalencia restringida.

(c) Tomar como *mejor umbral* el valor de t asociado al conjunto Q_t de mayor proximidad con el conjunto 1.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto *MTM2005-08982-C04-04* del Plan de Promoción General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia.

Referencias

- [1] G. Beliakov, Definition of General Aggregation Operators through Similarity Relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 114, 437-453, 2000.
- [2] D. Boixader, J. Jacas and J. Recasens Fuzzy equivalence relations: Advanced material, in: D. Dubois and H. prade (Eds), *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Kluwer Academic publishers, 1, United States of America 2000.

- [3] B. Bouchon-Meunier, M. Rifqi, S. Bothorel, Towards general measures of comparison of objects, *Fuzzy Sets and Systems*, 84, 143-153, 1996.
- [4] F. Brucker, Sub-dominant theory in numerical taxonomy, *Discrete Applied Mathematics*, 154, 1085-1099, 2006.
- [5] H. Bustince, V. Mohedano, E. Barrenechea and M. Pagola, Definition and Construction of Fuzzy DI-subsethood Measures. *Information Sciences*. En prensa, Disponible en línea 10 agosto de 2005.
- [6] H. Bustince, E. Barrenechea and M. Pagola, Restricted Equivalence Functions. *Fuzzy Sets and Systems*. En prensa, Disponible en línea 18 abril 2006.
- [7] T. Calvo, A. kolesárová, M. Komorníková, R. Mesiar Aggregation Operators: Basic Concepts, issues and properties, in: T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar (Eds), *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Springer-Verlag, 97, New York 2002.
- [8] D. Coquin, Ph Bolon, Y. Chehadeh, 3D distance operators-Application to image comparison (in French), *Proc. 15th GRETSI Symposium*, 761-764, 1995.
- [9] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma and L. Martínez, A Note on the Reciprocity in the Aggregation of Fuzzy Preference Relations Using OWA Operators. *Fuzzy Sets and Systems* 137, 71-83, 2003.
- [10] J. Diatta, Description-meet compatible multi-way dissimilarities, *Discrete Applied Mathematics*, 154, 493-507, 2006.
- [11] D. Dubois and H. Prade, A Review of Fuzzy Set Aggregation Connectives. *Inform. Sci.* 36, 85-121, 1985.
- [12] J. Fan and W. Xie, Some Notes on Similarity Measure and Proximity Measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 101, 403-412, 1999.
- [13] J. Fan, X. Xie and J. Pei, Subsethood Measures: New Definitions. *Fuzzy Sets and Systems*, 106, 201-209, 1999.
- [14] J. Fodor and M. Roubens, Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, in: *Theory and Decision Library*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [15] M.G. Forero, Fuzzy thresholding and histogram analysis, *Fuzzy Filters for Image Processing*, Springer, M. Nachtgael, D. Van der Weken, D. Van de Ville, E.E. Kerre Editors, 129-152, 2003.
- [16] G. J. Klir and T. A. Folger, *Fuzzy Sets Uncertainty and Information* Prentice-Hall International, 1988.
- [17] X. Liu, Entropy, Distance Measure and Similarity Measure of Fuzzy Sets and their Relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 52, 305-318, 1992.
- [18] G. Mayor and J. Torrens, On a Class of Binary Operations: Non-strict Archimedean Aggregation Functions. *Proc. of the 18th ISMVL, Palma de Mallorca*, 54-59, 1988.
- [19] J. Montero, Rational Aggregation Rules. *Fuzzy Sets and Systems* 62, 267-276, 1994.
- [20] S. V. Ovchinnikov, M. Roubens, On Strict Preference Relations, *Fuzzy Sets and*, 43, 319-326, 1991.
- [21] C. P. Pappis, N. I. Karacapilidis, A Comparative Assessment of Measures of Similarity of Fuzzy Values. *Fuzzy Sets and Systems*, 56, 171-174, 1993.
- [22] S. Quang Le, T. Bao Ho, An association-based dissimilarity measure for categorical data, *Pattern Recognition Letters*, 26, 2549-2557, 2005.
- [23] M. Santos Tomás, Claudi Alsina, Jaime Rubio-Martinez, Pseudometrics from three-positive semidefinite similarities. *Fuzzy Sets and Systems*. Available online 3 April 2006. In Press.
- [24] F. Soria, Axiomatization of V. Young's Fuzzy Subsethood Measures. Construction From Aggregation and Implication Operators. Other indices, Ph. D. Thesis, Universidad Pública de Navarra, 2004.
- [25] E. Trillas, Sobre Funciones de Negación en la Teoría de Conjuntos Difusos. *Stochastica*, III-1, 47-59, 1979 (in Spanish). Reprinted (English version) in: *Advances of Fuzzy Logic*, Eds. S. Barro et al-Universidad de Santiago de Compostela, 31-43, 1998.
- [26] E. Trillas, Assaig sobre les relacions d'indistingibilitat. Actes del primer congrés Català de Lògica matemàtica, Barcelona 51-59, 1982.
- [27] X. Wang, B. De Baets, E. Kerre, A comparative Study of Similarity Measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 73, 259-268, 1995.
- [28] R. R. Yager, Families of OWA Operators *Fuzzy Sets and Systems* 59, 125-148, 1993.

NÚMEROS BORROSOS ASOCIADOS A UN NÚMERO BORROSO DISCRETO

Jaume Casasnovas Casasnovas

Dep. Matemáticas y Ciencias de la Computación
Universidad de las Islas Baleares
Ctra. Valldemosa km. 7.5
Palma de Mallorca, 070071
jaume.casasnovas@uib.es

Juan Vicente Riera Clapés

Dep. Matemáticas y Ciencias de la Computación
Universidad de las Islas Baleares
Ctra. Valldemosa km. 7.5
Palma de Mallorca, 070071
jvriera@educacio.caib.es

Resumen

En este trabajo se asocia a un número borroso discreto un conjunto de números borrosos mediante los cuales a partir de un proceso de discretización de los mismos es posible realizar sumas cerradas de números borrosos discretos.

Palabras Clave: Número borroso, Número borroso discreto, Aritmética borrosa, Conjuntos borrosos.

1 INTRODUCCIÓN

De manera paralela a cómo un número borroso puede ser considerado un subconjunto borroso de $\mathbb{R}$ que satisface ciertas condiciones [6], un número borroso discreto puede ser considerado un subconjunto borroso de $\mathbb{R}$ con soporte discreto o como un subconjunto borroso de dicho soporte.

Por otra parte, para los números borrosos es usual definir la suma, al igual que otras operaciones, aplicando el principio de extensión [6] o, equivalentemente, operando los conjuntos de nivel (intervalos) [6]. Sin embargo, en el caso de conjuntos borrosos definidos sobre un soporte discreto la aplicación del principio de extensión en algunas ocasiones proporciona un conjunto borroso que no satisface las condiciones de número borroso discreto dadas en [7].

Para evitar este inconveniente Wang[2] propone una definición de suma y producto en el conjunto de números borrosos discretos, alternativa al principio de extensión utilizando r-conjuntos de nivel [6], demostrando que tal operación (suma) es cerrada en dicho conjunto. Por otro lado podemos encontrar en [5], otra definición alternativa a la de número borroso discreto dada por Voxman[7], en el que se presentan operaciones algebraicas y una estructura de espacio métrico a partir de un orden modular sobre el conjunto de los números discretos.

En este trabajo se utiliza una técnica distinta que ya fue iniciada en [1], según la cual se asocia a cada número borroso discreto un conjunto de números borrosos, que

coinciden sobre el soporte discreto. Así, si para cada pareja de números borrosos discretos consideramos sus correspondientes asociados, los sumamos y seguidamente discretizamos dicha suma, se obtiene un conjunto de posibles sumas de los números borrosos discretos iniciales, que dependerán de la asociación considerada, entre las cuales se demostró en [1] que figura la obtenida por Wang. El citado proceso de asociación y discretización es estudiado en las secciones 3 y 4.

2 PRELIMINARES

2.1 DEFINICIÓN [6]

Un subconjunto borroso de la recta real $\mathbb{R}$ con función de pertenencia $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ es un número borroso si su soporte es un intervalo $[a,b]$ y existen números reales s, t con $a \leq s \leq t \leq b$ satisfaciendo:

1. $\tilde{u}(x) = 1$ con $s \leq x \leq t$
2. $\tilde{u}(x) \leq \tilde{u}(y)$ con $a \leq x \leq y \leq s$
3. $\tilde{u}(x) \geq \tilde{u}(y)$ para $t \leq x \leq y \leq b$
4. $\tilde{u}(x)$ es semicontinua superiormente

Denotaremos por FN al conjunto de los números borrosos

2.2 DEFINICIÓN [7]

Un subconjunto borroso de la recta real $\mathbb{R}$ con función de pertenencia $u : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ es un número borroso discreto si tiene soporte finito, es decir, existen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, tales que $\text{supp } u = \{x_1, \dots, x_n\}$ y existen números naturales s, t con $1 \leq s \leq t \leq n$ verificando:

1. $u(x_i) = 1$ para cada número natural i con $s \leq i \leq t$
2. $u(x_i) \leq u(x_j)$ para cada número natural i, j con $1 \leq i \leq j \leq s$
3. $u(x_i) \geq u(x_j)$ para cada número natural i, j con $t \leq i \leq j \leq n$

Al conjunto de los números borrosos discretos lo denotaremos por DFN

2.3 NOTA

- Un número borroso discreto no es un número borroso pero satisface las condiciones 1. 2. 3. de número borroso definido en [2.1] sobre su soporte.
- Los r -cortes o r -niveles de un número borroso $\tilde{u}$, con función de pertenencia $\tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ son subconjuntos de los números reales definidos por $[\tilde{u}]^r = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } \tilde{u}(x) \geq r\}$, con $r \in [0,1]$ [6]
- Los r -cortes o r -niveles de un número borroso son intervalos cerrados de $\mathbb{R}$, si $r \in (0,1]$ [6]

2.4 SUMA DE NÚMEROS BORROSOS

Existen tradicionalmente dos métodos equivalentes para definir la suma. El primero de ellos es a través del principio de extensión de Zadeh [6] y el segundo utilizando los r -cortes o r -conjuntos de nivel de un número borroso [6]. En el primero de ellos, dados $\tilde{u}, \tilde{v} \in FN$, el número borroso $\tilde{u} \oplus \tilde{v}$ se define para todo $z \in \mathbb{R}$ por

$$(\tilde{u} \oplus \tilde{v})(z) = \sup_{z=x+y} \min(\tilde{u}(x), \tilde{v}(y))$$

En el segundo caso, se define, $\tilde{u} \oplus \tilde{v}$, a través de los r -cortes, $[\tilde{u} \oplus \tilde{v}]^r = [\tilde{u}]^r + [\tilde{v}]^r$ para cada $r \in (0,1]$. Entonces el soporte de la suma borrosa como vemos en [6], se expresa por $\text{supp}(\tilde{u} \oplus \tilde{v}) = \bigcup_{r \in [0,1]} [\tilde{u} \oplus \tilde{v}]^r$ y el valor

del nuevo número se define como

$$(\tilde{u} \oplus \tilde{v})(z) = \max \left\{ r \in [0,1] \text{ tales que } z \in [\tilde{u} \oplus \tilde{v}]^r \right\}.$$

2.5 SUMA DE NÚMEROS BORROSOS DISCRETOS

Sean $u, v \in DFN$. Considerados como subconjuntos borrosos de la recta real es posible aplicar el principio de extensión. Como vemos en el siguiente ejemplo, es posible que $u \oplus v \notin DFN$

Sean $u = \{0.3/1, 1/2, 0.5/3\}$ y $v = \{0.4/4, 1/6, 0.8/8\}$ dos números borrosos discretos.

Entonces

$$u \oplus v = \{0.3/5, 0.4/6, 0.4/7, 1/8, 0.5/9, 0.8/10, 0.5/11\} \notin DFN,$$

ya que la convexidad no se cumple en $0.8/10$.

2.6 MÉTODO DE WANG PARA LA SUMA DE NÚMEROS DISCRETOS BORROSOS

Usando los r -conjuntos de nivel de un número borroso, Wang [2] obtiene una representación de los números borrosos discretos. Para esta representación, para cada

$u, v \in DFN$, define un único número borroso discreto, $u \oplus_w v$, tal que para cada $r \in [0,1]$, tiene por conjuntos de nivel $[u \oplus_w v]^r =$

$$\{x \in \text{supp}(u) + \text{supp}(v) : \min([u]^r + [v]^r) \leq x \leq \max([u]^r + [v]^r)\}$$

donde $\min([u]^r + [v]^r) = \min\{x : x \in [u]^r + [v]^r\}$ y

$$\max([u]^r + [v]^r) = \max\{x : x \in [u]^r + [v]^r\}$$

A partir de estos conjuntos, Wang [2] define una operación cerrada (suma) en el conjunto de los números borrosos discretos, DFN . Además, demuestra que para cada $u, v \in DFN$ si $u \oplus v \in DFN$ entonces $u \oplus_w v = u \oplus v$.

3 ASOCIACIÓN DE NÚMEROS BORROSOS A UN NÚMERO BORROSO DISCRETO

3.1 ASOCIACIÓN

Para cada $u \in DFN$ con soporte, $\text{supp}(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ y $u(x_i) = 1$ para cada número natural i tal que $s \leq i \leq t$, consideramos el conjunto de números borrosos $FN(u)$ tales que si $\tilde{u} \in FN(u)$ entonces $\tilde{u}$ satisface las siguientes propiedades:

1. $\text{supp}(\tilde{u}) = [x_1, x_n]$
2. Si $x_i \in \text{supp}(u)$ entonces $\tilde{u}(x_i) = u(x_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$
3. Para todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$ con $1 \leq i \leq i+1 \leq s$ se verifica $u(x_i) \leq \tilde{u}(x) \leq u(x_{i+1})$.
4. Para todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$ con $t \leq i \leq i+1 \leq n$ se verifica $u(x_i) \geq \tilde{u}(x) \geq u(x_{i+1})$.

3.2 EJEMPLOS

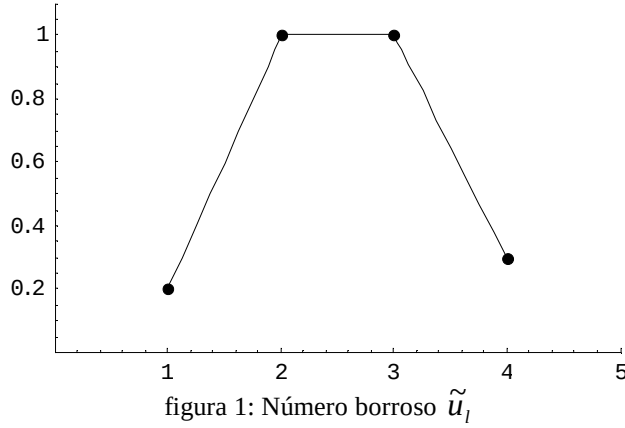
- Para cada $u \in DFN$ con soporte $\text{supp}(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ y con $x_1 < \dots < x_s < \dots < x_t, \dots < x_n$, y $u(x_p) = 1$ para cada número natural p , $s \leq p \leq t$. Sea $\tilde{u}_i$ el número borroso definido de la siguiente forma:

$$\tilde{u}_i(x) = \begin{cases} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_{i+1}) + u(x_{i+1}) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \text{ con } x_{i+1} \leq x_s \\ 1 & \text{si } x \in [x_s, x_t] \\ \frac{u(x_i) - u(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} (x - x_i) + u(x_i) & \text{si } x \in [x_t, x_{i+1}], \text{ con } x_i \geq x_t \end{cases}$$

Es fácil probar que $\tilde{u}_i \in FN(u)$.

En particular, si u es el número borroso discreto definido por $u = \{0.2/1, 1/2, 1/3, 0.3/4\}$, entonces

$$\tilde{u}_l(x) = \begin{cases} \frac{8x-6}{10} & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ \frac{31-7x}{10} & \text{si } x \in [3, 4] \end{cases}$$



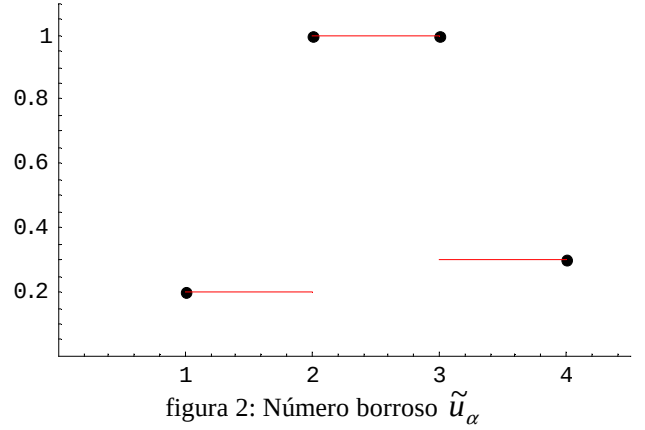
- Para cada $u \in DFN$ con soporte $\text{supp}(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ y con $x_1 < \dots < x_s < \dots < x_t, \dots < x_n$, y $u(x_p) = 1$ para cada número natural p , $s \leq p \leq t$. Sea $\tilde{u}_\alpha$ el número borroso definido para cada $i = 1, \dots, n-1$

$$\tilde{u}_\alpha(x) = \begin{cases} u(x_i) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}), \text{ con } x_{i+1} \leq x_s \\ 1 & \text{si } x \in [x_s, x_t] \\ u(x_{i+1}) & \text{si } x \in (x_i, x_{i+1}], \text{ con } x_i \geq x_t \end{cases}$$

Es fácil probar que $\tilde{u}_\alpha \in FN(u)$.

En particular, si u es el número borroso discreto $u = \{0.2/1, 1/2, 1/3, 0.3/4\}$

$$\tilde{u}_\alpha(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{si } x \in [1, 2) \\ 1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 0.3 & \text{si } x \in (3, 4] \end{cases}$$



3.3 PROPIEDADES DE FN(u)

Para cada par $\tilde{u}, \tilde{v} \in FN(u)$ de números borrosos, se verifican las siguientes propiedades:

- $\tilde{u} \oplus \tilde{v} \notin FN(u)$, ya que $\tilde{u} \oplus \tilde{v}$ y u no tienen el mismo soporte.
- Los números borrosos $MAX(\tilde{u}, \tilde{v})$ y $MIN(\tilde{u}, \tilde{v})$ definidos respectivamente por
$$MAX(\tilde{u}, \tilde{v})(z) = \sup_{z=\max(x,y)} (\min(\tilde{u}(x), \tilde{v}(y)))$$

$$MIN(\tilde{u}, \tilde{v})(z) = \sup_{z=\min(x,y)} (\min(\tilde{u}(x), \tilde{v}(y)))$$

pertenecen al conjunto $FN(u)$.

- En el conjunto de los números borrosos FN podemos definir una relación de equivalencia de la siguiente manera:
Dados $\tilde{u}, \tilde{v} \in FN$ dos números borrosos, diremos que están relacionados y lo denotaremos por $\tilde{u} \sim \tilde{v}$, si y sólo si $\tilde{u}, \tilde{v} \in FN(u)$ para un número borroso discreto $u \in DFN$.

Demostración:

Sólo probaremos que el número borroso $MAX(\tilde{u}, \tilde{v})$ con $\tilde{u}, \tilde{v} \in FN(u)$ pertenece al conjunto $FN(u)$.

Sabemos (Klir [6]) que para cada pareja de números borrosos $\tilde{u}, \tilde{v} \in FN$, $MAX(\tilde{u}, \tilde{v})$ es un número borroso. Por ello, sólo probaremos las propiedades 1, 2 de [3.1], ya que las propiedades 3 y 4 se obtienen de manera inmediata por ser $MAX(\tilde{u}, \tilde{v})$ un número borroso.

$$1. \quad \text{supp}(MAX(\tilde{u}, \tilde{v})) = [x_1, x_n]$$

$$z \in \text{supp}(MAX(\tilde{u}, \tilde{v})) \Leftrightarrow MAX(\tilde{u}, \tilde{v})(z) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sup_{z=\max(x,y)} (\min(\tilde{u}(x), \tilde{v}(y))) > 0 \Leftrightarrow \text{existen } x, y \text{ con } z=\max(x, y)$$

$$\text{tal que } \min(\tilde{u}(x), \tilde{v}(y)) > 0 \Leftrightarrow \text{existen } x, y \text{ con } z=\max(x, y)$$

$$\text{tales que } \tilde{u}(x) > 0 \text{ y } \tilde{v}(y) > 0 \Leftrightarrow \text{existen } x, y \text{ con}$$

$$z = \max(x, y) \in \text{supp}(\tilde{u}) = \text{supp}(\tilde{v}) = [x_1, x_n]$$

2. Si $x_i \in \text{supp}(u)$ entonces $\text{MAX}(\tilde{u}, \tilde{v})(x_i) = u(x_i)$
para cada $i = 1, \dots, n$

Es fácil probar que $\text{MAX}(\tilde{u}, \tilde{v})(x_i) = u(x_i)$ ya que
 $\text{MAX}(\tilde{u}, \tilde{v})(x_i) = \sup_{x_i = \max(x, y)} (\min(\tilde{u}(x), \tilde{v}(y)))$ y por la
construcción de los números borrosos $\tilde{u}, \tilde{v}$ el supremo se
alcanza si $x=y$ y $\tilde{u}(x) = \tilde{v}(x) = u(x)$.

3.4 ORDENACIÓN EN FN(u)

Para cada $u \in DFN$ con soporte
 $\text{supp}(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ y con
 $x_1 < \dots < x_s < \dots < x_t, \dots < x_n$, y $u(x_p) = 1$ para cada
número natural p , $s \leq p \leq t$, hemos definido en [3.1] el
conjunto $FN(u)$. A partir del orden estándar de los
números reales podemos inducir un orden parcial en
 $FN(u)$ de la siguiente manera:

$\tilde{u}, \tilde{v} \in FN(u)$ entonces $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ si y sólo si $\tilde{u}(x) \leq \tilde{v}(x)$
para todo $x \in \text{supp}(\tilde{u}) = \text{supp}(\tilde{v})$

3.4.1 Proposición:

Sea $\tilde{u}_\alpha \in FN(u)$ el número borroso definido en [3.2].
Entonces $\tilde{u}_\alpha \leq \tilde{v}$ para todo número borroso $\tilde{v} \in FN(u)$.

Demostración:

Si existe un número borroso $\tilde{v} \in FN(u)$ tal que $\tilde{u}_\alpha \not\leq \tilde{v}$
entonces podemos encontrar un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, con
 $x_i, x_{i+1} \in \text{supp}(u)$, y un punto x de su interior tal que
 $\tilde{v}(x) < \tilde{u}_\alpha(x)$. Pero por construcción de $\tilde{u}_\alpha$, sabemos que
 $\tilde{u}_\alpha(x) = u(x_i)$ para todo $x \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces
 $\tilde{v}(x) < u(x_i)$. Este resultado es una contradicción ya que
 $\tilde{v} \in FN(u)$ y $\tilde{v}(x) \in [u(x_i), u(x_{i+1})]$ para todo
 $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

3.4.2 Nota:

Hemos considerado en la demostración anterior que
 $x_{i+1} < x_s$. Si $x_{i+1} > x_t$ la demostración sería análoga.

3.5 ORDENACIÓN DE LAS ASOCIACIONES

Sea $\mathbf{A}$ el conjunto de todas las asociaciones, es decir
funciones $A: DFN \rightarrow FN$ tales que $A(u) \in FN(u)$ para
todo $u \in DFN$. En este conjunto es fácil definir un orden
parcial de la siguiente manera:

Si $A, B \in \mathbf{A}$ entonces $A \leq B$ si y sólo si $A(u) \leq B(u)$
para todo $u \in DFN$.

En particular, si $A \in \mathbf{A}$ es tal que, para todo

$u \in DFN$, $A(u) = \tilde{u}_\alpha$, definido en [3.2], entonces a la
función A la denotaremos por A_α .

3.5.1 Proposición

Sea $A \in \mathbf{A}$ una asociación. Entonces $A_\alpha \leq A$, esto es,
para todo $u \in DFN$ $A_\alpha(u) = \tilde{u}_\alpha \leq A(u)$.

Demostración:

Es inmediata porque $FN(u)$ es un conjunto parcialmente
ordenado y por la proposición [3.4.1]

4 SUMAS DEFINIDAS A TRAVES DE ASOCIACIONES

4.1 DEFINICIÓN:

Sea u un número borroso discreto con soporte
 $\text{supp}(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ y $u(x_p) = 1$ para cada
número natural p , $s \leq p \leq t$. Sea v otro número borroso
discreto con soporte $\text{supp}(v) = \{y_1, \dots, y_m, \dots, y_k, \dots, y_r\}$ y
 $v(y_p) = 1$ para cada número natural p , $m \leq p \leq k$.

Sea $A: DFN \rightarrow FN$ una asociación. Consideremos el
conjunto borroso $u \oplus_A v$, definido de la siguiente manera:

- $\text{supp}(u \oplus_A v) = \left\{ \begin{array}{l} z \in \mathbb{R} \text{ tales que } z = x + y, \\ x \in \text{supp}(u), y \in \text{supp}(v) \end{array} \right\}$
- $(u \oplus_A v)(z) = (A(u) \oplus A(v))(z) \quad \forall z \in \text{supp}(u \oplus_A v)$

donde $A(u) \oplus A(v)$ representa la suma recordada en [2.4]
de los números borrosos $A(u)$, $A(v)$.

4.2 NOTA

- Es fácil probar que $u \oplus_A v \in DFN$.
- Si $A(u) = \tilde{u}_l$ y $A(v) = \tilde{v}_l$ definido en [3.2]
entonces $u \oplus_A v$ lo denotaremos por $u \oplus_l v$
- Si $A(u) = \tilde{u}_\alpha$ y $A(v) = \tilde{v}_\alpha$ definido en [3.2]
entonces $u \oplus_A v$ lo denotaremos por $u \oplus_\alpha v$

4.3 EJEMPLOS:

- Sean los números borrosos discretos
 $u = \{0.4/15, 1/19, 1/25, 0.5/30\}$ y
 $v = \{0.2/1, 1/2, 1/3, 0.3/4\}$. Consideremos la
asociación de los números borrosos siguiente:

$A(u) = \tilde{u}_l \in FN(u)$, $A(v) = \tilde{v}_l \in FN(v)$ donde $\tilde{u}_l$
y $\tilde{v}_l$ están definidos en [3.2]. Entonces tenemos que

$$\tilde{u}_l = \begin{cases} \frac{3x-37}{20} & \text{si } x \in [15,19] \\ 1 & \text{si } x \in [19,25] \\ \frac{35-x}{10} & \text{si } x \in [25,30] \end{cases}$$

$$\tilde{v}_l = \begin{cases} \frac{8x-6}{10} & \text{si } x \in [1,2] \\ 1 & \text{si } x \in [2,3] \\ \frac{31-7x}{10} & \text{si } x \in [3,4] \end{cases}$$

Aplicando el principio de extensión obtenemos el siguiente número borroso:

$$(\tilde{u}_l \oplus \tilde{v}_l)(x) = \begin{cases} \frac{8x-126}{10} & \text{si } x \in [16,16.25] \\ \frac{24x-314}{190} & \text{si } x \in [16.25,21] \\ 1 & \text{si } x \in [21,28] \\ \frac{276-7x}{80} & \text{si } x \in [28, \frac{236}{7}] \\ \frac{241-7x}{10} & \text{si } x \in [\frac{236}{7}, 34] \end{cases}$$

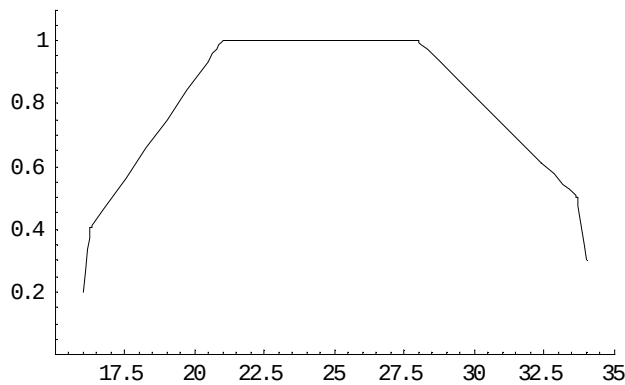


figura 3: Número borroso $(\tilde{u}_l \oplus \tilde{v}_l)$

Y, aplicando la discretización definida en [4.1], obtenemos el siguiente número borroso discreto

$$u \oplus_l v = \{0.2/16, \frac{45}{95}/17, \frac{59}{95}/18, \frac{71}{95}/19, \frac{83}{95}/20, 1/21, 1/22, 1/23, 1/26, 1/27, 1/28, \frac{73}{80}/29, \frac{59}{80}/31, \frac{13}{20}/32, \frac{9}{16}/33, 0.3/34\}$$

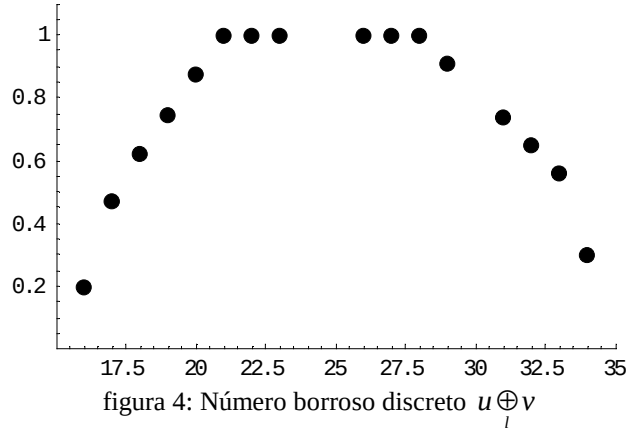


figura 4: Número borroso discreto $u \oplus_l v$

Del siguiente teorema puede encontrarse la demostración en [1].

4.4 TEOREMA:

Sean $u, v \in DFN$ dos números borrosos discretos con soporte, $\text{supp}(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ y $\text{supp}(v) = \{y_1, \dots, y_m, \dots, y_k, \dots, y_r\}$ respectivamente.

Entonces $u \oplus_w v$ definida en [2.6] y $u \oplus_\alpha v$ definida en [4.2] son el mismo número borroso discreto.

4.5 PROPOSICIÓN:

Sean $A, B \in \mathbf{A}$ dos asociaciones tales que $A \leq B$ a partir del orden parcial definido en [3.5]. Sean u, v dos números borrosos discretos con soporte $\text{supp}(u) = \{x_1, \dots, x_s, \dots, x_t, \dots, x_n\}$ y $u(x_p) = 1$ para cada número natural p , $s \leq p \leq t$, y con soporte $\text{supp}(v) = \{y_1, \dots, y_m, \dots, y_k, \dots, y_r\}$ y $v(y_p) = 1$ para cada número natural p , $m \leq p \leq k$ respectivamente.

Entonces $u \oplus_A v \leq u \oplus_B v$

Demostración:

Sabemos que,

- $A \leq B$ (ver [3.5]) si y sólo si $A(u) \leq B(u)$ para todo $u \in DFN$
- $A(u) \leq B(u)$ para todo $u \in DFN$ si y sólo si $A(u)(x) \leq B(u)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- $A(u)(x), B(u)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ son números reales del intervalo $[0,1]$ y este intervalo está ordenado.
- Para todo $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq y$, $z \leq t$ entonces $\min(x, z) \leq \min(y, t)$

e) Los números borrosos discretos $u \oplus_A v$, $u \oplus_B v$ tienen el mismo soporte (ver [4.1])

A partir de los apartados a), b), c) obtenemos

$$A(u)(x) \leq B(u)(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$A(v)(y) \leq B(v)(y) \text{ para todo } y \in \mathbb{R}$$

Entonces aplicando el apartado d)

$$\min(A(u)(x), A(v)(y)) \leq \min(B(u)(x), B(v)(y))$$

Y ahora aplicando la definición de suma borrosa recordada en la sección [2.4] obtenemos

$$\sup_{z=x+y} (\min(A(u)(x), A(v)(y))) \leq \sup_{z=x+y} (\min(B(u)(x), B(v)(y)))$$

$$\text{para todo } z \in \mathbb{R} \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

Y esta expresión es equivalente a

$$(A(u) \oplus A(v))(z) \leq (B(u) \oplus B(v))(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{R}$$

En particular para todo $z \in \mathbb{R}$ tal que $z = x + y$, $x \in \text{supp}(u)$, $y \in \text{supp}(v)$ (ver [4.1])

$$(A(u) \oplus A(v))(z) = (u \oplus_A v)(z)$$

$$(B(u) \oplus B(v))(z) = (u \oplus_B v)(z)$$

Y por tanto obtenemos

$$(u \oplus_A v)(z) \leq (u \oplus_B v)(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{R}, \text{ es decir,}$$

$$u \oplus_A v \leq u \oplus_B v$$

4.8 PROPOSICIÓN:

Para cada par de números borrosos discretos u, v en las condiciones de la proposición anterior y para cada asociación $A \in \mathbf{A}$ se verifica que $u \oplus_\alpha v \leq u \oplus_A v$.

Demostración:

Es inmediata a partir de [3.5.1] ya que $A_\alpha \leq A$ para toda asociación $A \in \mathbf{A}$ y aplicando la proposición anterior se tendría que $u \oplus_{A_\alpha} v \leq u \oplus_A v$, para cualquier par $u, v \in DFN$.

5. CONCLUSIONES Y FUTURO TRABAJO

A través de las asociaciones de números borrosos discretos obtenemos un conjunto de posibles sumas de los mismos que son cerradas dentro del conjunto DFN .

A partir de esto, nos proponemos estudiar si existen condiciones que deben verificar dos números borrosos discretos para que podamos asegurar que su suma u otra operación a partir del principio de extensión de Zadeh o por conjuntos de nivel sea cerrada dentro del conjunto DFN así como los criterios razonables para elegir una asociación en cada caso práctico.

Agradecimientos

Los autores aprecian los comentarios de los revisores, pues han contribuido a la mejora del artículo.

Referencias

[1] J.Casasnovas, J.V.Riera: "On the addition of discrete fuzzy numbers," *WSEAS Transactions on mathematics*, Issue 5, Volume 5, May 2006, pp.549-554.

[2] Guixiang Wang, Cong Wu, Chunhui Zhao, "Representation and Operations of discrete fuzzy numbers" *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*(2005)28:1003–1010.

[3] Hanss, Michael "On the implementation of fuzzy arithmetical operations for engineering problems", Proc. 18th International Conf. of the North Amer. Fuzzy Informatt. Process. Soc - NAFIPS 2000, Atlanta, Ga, USA, 2000, pp.201-205

[4] Hanss, Michael "The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters" *Fuzzy Sets and Systems* 130 (2002), pp. 277–289.

[5] Ji-Quing Qui, Jin-Fang Han, Peng Shi "On sequencing of discrete fuzzy numbers," Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics", Guangzhou, 18-21 (2005)

[6] Klir, George J., Yuan Bo "Fuzzy sets and fuzzy logic (Theory and applications)", Prentice Hall

[7] Voxman, W., "Canonical representations of discrete fuzzy numbers", *Fuzzy Sets and Systems* 54 (2001), pp. 457–466.

[8] Zadeh, L.A. and Chang, S.S.L, *On fuzzy mapping and control*, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* 2, pp. 30–34 (1972).

PROTOTIPO DE ARQUITECTURA PARA LA COMPOSICIÓN MUSICAL CON ALGORITMOS GENÉTICOS Y LÓGICA DIFUSA.

Emerson Castañeda Sanabria
Doctorado Departamento SIP
Facultad de Informática, UCM
emecas@ieee.org

Luis Garmendia Salvador
DISIA
Facultad de Informática, UCM
lgarmend@fdi.ucm.es

Resumen

Se propone un modelo de arquitectura genérica para la composición musical apoyada en técnicas de inteligencia artificial. La arquitectura propuesta da origen a un framework incremental para la construcción de aplicaciones donde la implementación concreta se centra en un prototipo que emplea lógica difusa, algoritmos genéticos y un componente de generación de datos.

Palabras Clave: Fuzzy, Algoritmos Genéticos, GA, LF, Generación de datos, IA, Framework.

1 INTRODUCCION

1.1 COMPOSICIÓN MUSICAL ASISTIDA POR ORDENADOR (CAO)

La variedad de trabajos que relacionan la inteligencia artificial con la música es bastante extensa. Dentro de estos podemos encontrar un subconjunto en los que se aborda de una forma parcial o total la composición musical asistida por ordenador.

En una primera instancia se plantean las categorías para la clasificación de los sistemas de música por ordenador de la siguiente manera según [8][LOPEZ02][12][ROADS85]: (i) sistemas para la composición, (ii) sistemas para la interpretación y (iii) sistemas para la improvisación, (iv) la teoría de la música, y (v) el proceso de sonido digital. Tales categorías son necesarias para realizar una clasificación más exhaustiva de los trabajos relacionados con la CAO, detallando los conceptos implicados en cada una de las categorías.

1.2. ACERCAMIENTOS BASADOS EN LÓGICA DIFUSA Y ALGORITMOS GENÉTICOS

Uno de los trabajos relacionados es el de Richard E. Overill [11][OVERIL93] que hace aportaciones dentro del campo del análisis de música para la búsqueda de

motivos musicales particulares y sus variantes dentro de partituras. Overil afirma que esta tarea tediosa y consumidora de tiempo puede ser efectuada por ordenador usando varios modelos, para los que habrá que especificar que variantes deben ser incluidas en la búsqueda, y donde los tipos y la cantidad de las variantes a considerar tendrán un efecto crítico en el tiempo empleado por el ordenador. A partir de aquí propone tener en cuenta las relaciones de recurrencia y las expresiones analíticas de forma cerrada a partir de dos modelos de reconocimiento de patrones difusos (fuzzy pattern matching) donde cada modelo asume la existencia de una operación exacta atómica de comprobación de configuraciones. Permitiendo que las fórmulas obtenidas sean evaluadas y tabuladas en función de sus parámetros independientes.

Otro trabajo que también emplea las técnicas difusas para la realización de una tarea de apoyo al tratamiento de la música incluida la composición musical, es el reconocimiento de partituras musicales, empleando para ello un modelo difuso. El trabajo propuesto por Florence Rossant e Isabelle Bloch [13][ROSSAN04] propone una herramienta alternativa al software comercial *SmarScore* que según sus pruebas ofreció unos mejores resultados. Las principales aportaciones del trabajo se resumen en tres aspectos. Primero, el modelado difuso permite expresar restricciones que son más o menos estrictas, algo que es esencial en este campo de aplicación, dado que la mayor parte de las reglas musicales son comunes pero no de uso obligatorio (por ejemplo los agrupamientos comunes de las notas), o se aplican de una forma aproximada (la posición relativa de los símbolos). Como segundo aspecto, los modelos difusos permiten asociar diferentes tipos de restricciones, en este caso particular las reglas gráficas y sintácticas. Y en tercer lugar, el método propuesto procesa interacciones entre símbolos distantes, no sólo interacción local entre símbolos sucesivos.

En [15][VIDYAM92] se presenta un acercamiento de la entropía para la armonía musical con técnicas difusas. Ellos emplean una función de entropía para caracterizar la complejidad del objeto sonoro resultante cuando una combinación de notas se toca conjuntamente. Establece así las bases subjetivas para que a partir de esta medida de complejidad sea posible realizar una percepción

individualista de trivialidad, armonía y disonancia. Junto con este acercamiento proveen a un framework para caracterizar la orientación musical de un grupo cultural particular.

Lo más significativo del trabajo es que la medida de entropía se basa en los atributos físicos del objeto sonoro, al no realizarlo de manera absoluta ayuda en la obtención de un orden relativo de armoniosidad para varias combinaciones de notas. Los autores anotan que sin embargo está puede constituir una diferencia de opinión de la estimación hacia lo que es armonioso, pero que el orden relativo obtenido al usar la medida de entropía difusa equivalente al concepto de orden generalmente aceptado.

Un ultimo trabajo a reiterar entre los ya mencionados que también emplean las técnicas difusa es [7][LOPEZ01] y se destaca aquí por el empleo de técnicas difusas en el paso *Reuse* del método CBR de solución de problemas usado en el sistema *SaxEx*. Donde el haber modelado los valores lingüísticos de los parámetros expresivos por medio de conjuntos difusos, permitió aplicar un operador difuso de combinación para estos valores a las notas recuperadas en el paso *Reuse*. Este es un caso más de los trabajos en donde se hace uso híbrido de diferentes técnicas, para esta ocasión particular la técnica CBR y las técnicas difusas.

Dentro del escenario de la computación evolutiva existe una herramienta ampliamente difundida, se trata de los algoritmos genéticos. Aquí se traen a colación algunos trabajos sobre composición musical en los han sido empleados los algoritmos genéticos con diferentes enfoques. Entre estos se pueden mencionar [9][MCINTY94] [5][HORAYE95] donde se han usado en la armonización de melodías, en [6][HORGOL91] son empleados para la composición autónoma, en el desarrollo de un sistema interactivo para la interpretación de improvisaciones de jazz en [1][BILES94], para la extracción de patrones en piezas musicales monofónicas en [4][GRILO03], y en [3][GARAY04] son usados para la composición de fugas mediante la generación automática de contrapunto.

En [10][MIRAND01] se ejemplifica el trabajo del compositor Gary Lee Nelson¹ en el que se usan los algoritmos genéticos para evolucionar patrones rítmicos. En este caso, se emplea una cadena binaria para representar una serie espacial de pulsos iguales que se articulan si el bit esta encendido. La prueba de aptitud esta basada sobre una prueba de adición; si el número de bits que están encendidos es mayor a cierto umbral,

entonces la cadena cumple la prueba de aptitud. Para valores altos de umbral se obtienen ritmos con mucha densidad. Inversamente, un valor bajo umbral tiende a producir texturas delgadas dirigidas aun completo silencio. Miranda también describe *Vox Populi*², un programa para la composición con algoritmos genéticos, donde los algoritmos genéticos son empleados para evolucionar conjuntos de acordes de acuerdo a un criterio específico de *fitness* especificado por el usuario en términos de melodía, armonía y características del rango de voz.

Otro de los trabajos a destacar, que también se detalla en la sección de referencias correspondiente a la técnica de autómatas celulares, es [2][BILOTT02]. Una de las principales aportaciones de este trabajo, es la forma de representar el material musical que se produce a partir de la interpretación de la configuración del autómata celular como una serie (cromosoma como lo llaman los autores) para realizar una búsqueda mediante un algoritmo genético que encuentran las mejores composiciones musicales. El procedimiento seguido es el siguiente:

- A. Se inicia a partir de material del autómata celular representado en forma de serie.
- B. Se generan varios individuos (secuencias de sonidos) asociados con estos cromosomas
- C. Se seleccionan las secuencias del cromosoma más adecuadas para evaluar las capacidades de los individuos (para este caso la secuencia de sonidos más consonante)
- D. Se hacen evolucionar estos cromosomas pasando de una generación a otra, casualmente modificando sus características y usando combinación de reglas basadas en la geminación sexual.
- E. Se continua el proceso por muchas generaciones.

2. ARQUITECTURA BASADA EN TÉCNICAS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL PARA LA CAO

2.1. Clasificación de las técnicas

Aquí se identifican las diferentes técnicas de IA que hacen parte del estudio (Tabla 1) y a su vez cada una de las categorías de aplicaciones dentro de la CAO (Tabla 2) asociables a las diferentes técnicas de IA analizadas y que son derivadas del análisis de los diferentes trabajos en la materia.

¹ cit. Gary Lee Nelson. Sonomorphs: An application of genetic algorithms to the growth and development of musical organisms. In Proceedings of the Fourth Biennial Art and Technology Symposium, pp 155-169. 1995.

² Programa desarrollado por Jonatas Manzolli y Artemis Moroni. Ganador en The Dream Centenary Computer Graphics Prix 99 en Auzi, Japon.

Tabla 1. Lista de las técnicas de IA involucradas

ID	Nombre
1	Aprendizaje Automático (Machine Learning)
2	Ingeniería del conocimiento (Knowledge Engineering)
3	Lógica difusa (Fuzzy Logic)
4	Redes neuronales artificiales (Artificial Neural Networks)
5	Sistemas reactivos (Reactive Systems)
6	Sistemas Multiagente (Multi-Agent Systems)
7	Razonamiento basado en casos (Case-Based Reasoning)
8	Sistemas expertos (Expert Systems)
9	Redes Bayesianas (Bayesian Networks)
10	Vida artificial (Artificial Life)
11	Computación evolutiva (Evolutionary Computation)
12	Autómatas Celulares (Cellular automaton)

Tabla 2. Categorías de aplicación de las técnicas

ID	Categoría
A	Generación de secuencias monofónicas
B	Generación de secuencias polifónicas
C	Armonización de secuencias
D	Descubrimiento de reglas o patrones
E	Búsqueda de motivos musicales y sus variantes
F	Reconocimiento de partituras musicales
G	Medida de entropía
H	Codificar conocimiento, intuiciones, y gusto estético del usuario
I	Simular la conducta de un grupo musical
J	Realizar transformaciones de expresividad musical
K	Generación de contrapunto
L	Generación de datos genéricos
M	Identificar el estilo musical
N	Extracción de conocimiento musical
O	Análisis musical

Cruzando la información de la Tabla 1 que identifica las técnicas empleadas, la Tabla 2 que lista las diferentes categorías de aplicaciones para las técnicas de IA y teniendo en cuenta los datos necesarios para las distintas aplicaciones de cada uno de los procesos, llegamos a establecer la relación de las técnicas de IA con la principal o principales categorías de aplicación dentro de la CAO (Tabla 3). Cabe anotar, que aunque potencialmente algunas de las técnicas analizadas pueda tener algún tipo de aplicación adicional a las que inicialmente se identifican aquí, la clasificación presentada obedece a la orientación arquitectónica que se pretende dar y esta basada en los trabajos analizados anteriormente donde se demostró cierto nivel de viabilidad para la aplicación.

Tabla 3. Aplicaciones de las técnicas de IA para la CAO

ID Téc.	ID Categorías					ID Téc.	ID Categorías				
1	D	E	M			7	J				
2	H					8	M	B	C		
3	D	E	F	G	J	9	O				
4	H					10	L	A			
5	A					11	C	D	L		
6	A	B	C	I		12	L				

2.2. Visión General de la Arquitectura

En primera instancia se construye un modelo genérico y modular de cada una de las técnicas identificando claramente sus entradas, salidas y componentes involucrados para cada aplicación específica, esto marco la pauta para la propuesta de la arquitectura y le dio la propiedad de ser completamente modular para asegurar así que las implementaciones llevadas a cabo a partir de la misma se comporten de la esta manera, modulares e integradas solo por los componentes según la aplicación específica. A continuación se muestran los modelos genéricos de las técnicas Computación evolutiva y Logica difusa (Figuras 1 y 2).

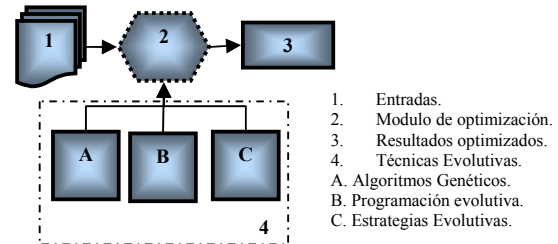


Figura 1. Modelo genérico de la Computación Evolutiva

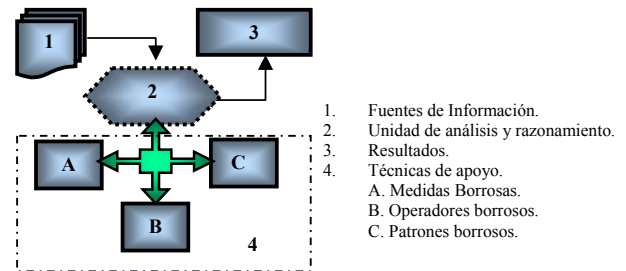


Figura 2. Modelo genérico de la Lógica Difusa.

De la integración de los modelos genéricos para cada técnica se origina el modelo de arquitectura para la CAO presentado en la Figura 3, siendo este el objetivo general del presente trabajo y punto de partida para la construcción del framework y la implementación de un prototipo genético difuso para la CAO.

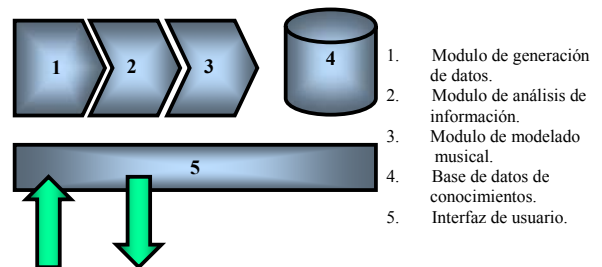


Figura 3. Vista modular de la arquitectura propuesta

2.3. Detalle de los módulos de la arquitectura

Tras identificar con un nivel más minucioso los datos involucrados en el empleo de cada una de las técnicas para las diferentes categorías de aplicación propuestas, es posible proponer una clasificación adicional que permite tipificar sus potenciales de aplicación de tal manera que se pueda hacer referencia a las técnicas desde el punto de vista del proceso o los procesos para los que puede contribuir de una forma más eficiente, es decir los objetivos para los que una técnica puede resultar más productiva. Dicha clasificación se detalla a continuación.

Tabla 4. Tipo principal de las técnicas para la CAO.

ID técnica	Tipo			
	Principal	I	II	III
1	IV		*	*
2	II		*	
3	IV		*	*
4	II		*	
5	III			*
6	V	*	*	*
7	III			*
8	III			*
9	II		*	
10	IV	*	*	
11	V	*	*	*
12	I	*		

TIPO I - Para la generación de datos: Técnicas a partir de las cuales se pueden obtener los datos genéricos que serán empleados dentro de los procesos de la CAO, se pueden referenciar como técnicas productoras de datos. Donde tales datos interpretados de una manera adecuada se pueden procesar para elevarlos a la categoría de información musical.

Vale aclarar también que las técnicas productoras de datos, no solo pueden ser técnicas correspondientes a las técnicas aquí estudiadas sino que se pueden emplear gran variedad de fuentes de datos tanto de origen natural como artificial, y tales datos pueden ser los insumos para las categorías siguientes.

Entre las otras fuentes de datos comúnmente empleadas para aplicaciones musicales podemos encontrar: los fractales, los sistemas dinámicos, los movimientos corporales, y el comportamiento en general de prácticamente cualquier tipo de sistema. La calidad de los datos originales condicionará los resultados obtenidos en los pasos posteriores dentro de la CAO.

TIPO II - Para el análisis de información: También se puede hacer referencia a estas, como técnicas de apoyo dado que están involucradas principalmente de en los procesos internos o tareas de apoyo que se llevan a cabo en la CAO.

Para esclarecer mejor al tipo de tareas a las que se hace referencia, entre las tareas de apoyo se pueden catalogar: la búsqueda de patrones, reglas, y motivos musicales, el reconocimiento del estivo musical, las mediciones realizadas sobre los datos musicales y la extracción de algún tipo de conocimiento musical.

Estas técnicas trabajan sobre la información musical, como su nombre lo dice, para apoyar los procesos de análisis que se lleva a cabo sobre tal información.

TIPO III - Para el modelado musical: Se pueden considerar como las principales técnicas para la CAO, sin restar importancia a las técnicas tipo I y tipo II que también desempeñan un papel importante. Las técnicas de este tipo son las encargadas de intervenir en los procesos para la consecución de unos resultados musicales en un estado optimización superior o terminado.

Ejemplos de las tareas más representativas de este tipo son: la generación de secuencias monofónicas y polifónicas, la armonización de secuencias, la generación de contrapunto y la realización de transformaciones de la expresividad musical.

TIPO IV – Mixtas: Son las técnicas que pueden englobarse dentro de más de una de las categorías anteriores y su aplicación es posible desde distintos enfoques. Es decir, aquí se enmarcan las técnicas que puede tener propiedades tanto tipo I (para la generación de datos), como tipo II (de apoyo), y/ o tipo III (para el modelado musical). Un ejemplo sería la técnica Vida Artificial que según la clasificación tiene connotaciones tanto tipo I como tipo III.

TIPO V - Para la composición autónoma: Son las de tipo integral para las cuales es suficiente el empleo de una única técnica para conseguir resultados musicales terminados. Estas técnicas permiten la generación de datos, la realización de tareas de apoyo y la realización de modelado conjuntamente.

La clasificación anterior contribuye a la concepción y representación de la arquitectura propuesta basándose en las prestaciones ofrecidas por cada técnica, para de esta manera definir los bloques lógicos que conforman la arquitectura, por lo tanto el siguiente paso consiste en la asignación de una categoría principal de aplicación a cada una de las técnicas en cuestión tal como se muestra en la Tabla 4.

A continuación se presentan los principales componentes dentro de los módulos identificados en el paso anterior. Los componentes se identifican con el tipo de aplicación y la técnica empleada en las Figuras 4, 5 y 6.

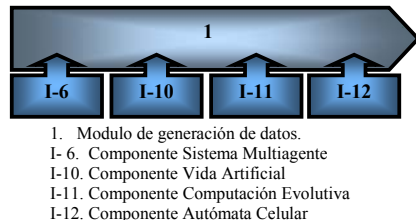


Figura 4. Detalle del módulo de generación de datos

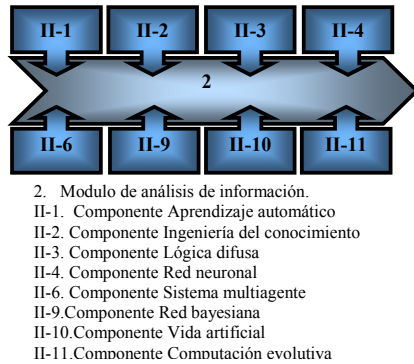


Figura 5. Detalle del módulo de análisis de información

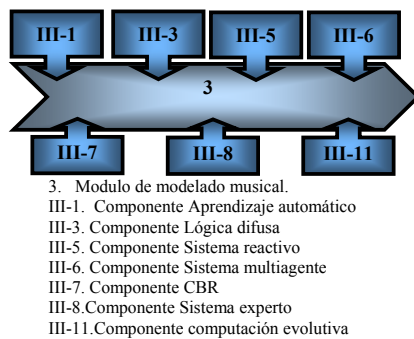


Figura 6. Detalle del módulo de modelado musical

3. EL FRAMEWORK

El objetivo relacionado con la construcción del framework como un derivado de la arquitectura para el desarrollo de aplicaciones de CAO con técnicas de IA se está llevando a cabo de forma incremental, implementando, según las necesidades cada uno de los componentes requeridos para los distintos prototipos, la construcción de los componentes específicos, dada que la gran cantidad de técnicas incorporadas en la arquitectura, ocasiona que la implementación del framework completo represente el llevar a cabo varios sub-proyectos con objetivos claramente condicionados de acuerdo a los componentes de las distintas técnicas a emplear, sub-proyectos en segunda instancia orientados a establecer la “sinergia” entre las combinaciones de unas técnicas u otras.

Para el caso concreto en cuestión, consistente en la propuesta de un prototipo que emplee las técnicas

algoritmos genéticos y lógica difusa, junto a un componente de generación de datos genérico, los aspectos involucrados se detallan en la siguiente sección.

4. PROPUESTA DEL PROTOTIPO GENETICO DIFUSO

4.1. El componente de Algoritmos genéticos

Como se pudo apreciar según las secciones anteriores la técnica de computación evolutiva, de la que hacen parte los algoritmos genéticos, está clasificada como una técnica de tipo V, es decir una técnica para la composición autónoma, dado que sirve tanto para la generación de datos, como para el análisis y el modelado música.

Ya en lo referente a los algoritmos genéticos en concreto, se pueden considerar también como una técnica para la composición autónoma, que puede ser empleados tanto con fines de generación de datos, análisis musical, o modelado musical.

4.2. El componente de Lógica Difusa

Debido a que aquí la lógica difusa puede jugar varios papeles según la arquitectura propuesta, y los papeles están concentrados en las tareas asociadas con el análisis y el modelado musical (componentes identificados como II-3 y III-3 en las figuras 5 y 6 respectivamente), su empleo puede llevarse a cabo desde más de una perspectiva dentro de los procesos de la CAO, por lo cual en el contexto de este trabajo, la actuación del componente se verá ligada a dos escenarios, el primero corresponde a su inclusión dentro del componente de algoritmos genéticos afectando directamente su programación, y el segundo a su actuación previa (sobre las entradas) o posterior (sobre los resultados de salida) alrededor de la información del algoritmo genético.

4.3. Algoritmos Genéticos Difusos para la CAO

Existen dos posibilidades para *fuzzificar* el componente de algoritmos genéticos de la arquitectura CAO con el fin de verificar los resultados obtenidos y compararlos para determinar su mejor desempeño o no de la fusión de las técnicas fusionadas.

La primera es donde los AG pueden ser modificados para que sus funciones fitness, así como sus operadores genéticos se basen en lógica Fuzzy. De esta manera el proceso de optimización estaría concebido en un entorno difuso, lo que induciría a cierto beneficio en la forma de programación del mismo y además tendría un efecto en la supervivencia de los individuos con un determinado rango de aceptación en los resultados de su evaluación que

cumplan el umbral, afirmación que en este caso se pretende comprobar tras finalizar todos los experimentos.

La segunda posibilidad se centra en el manejo de unas reglas difusas directamente en los procesos composicionales, reglas que serán aplicadas en forma previa o posterior a la optimización, es decir, mantener el componente genético intacto y afectar, las entradas iniciales a optimizar, o bien los resultados obtenidos luego de la optimización, mediante la aplicación de las reglas difusas.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Este trabajo ofrece una arquitectura para la Composición musical Asistida por Ordenador (CAO), compuesta por módulos de generación de datos, de análisis de la información, modelado musical y armonización. Se ofrece una propuesta para un framework de desarrollo de aplicaciones derivado de la arquitectura descrita. Finalmente se propone un prototipo usando Algoritmos Genéticos y lógica Fuzzy para la generación de datos, análisis y modelado musical.

El prototipo propuesto se encuentra actualmente en fase de desarrollo, hasta ahora se han desarrollado los componentes individuales de lógica difusa y algoritmos genéticos abordando tareas concretas de manera individual con cada componente, para el componente de algoritmos genéticos entre estas tareas se encuentran la generación de datos genéricos para la composición y la búsqueda de patrones y reglas, para el componente de lógica difusa se ha experimentado con la búsqueda de motivos musicales y sus variantes junto a la búsqueda de patrones y reglas.

Tras llevar a cabo la depuración completa de los dos componentes en forma individual se procederá a la integración de los mismos por medio del Prototipo Genético Difuso, para de esta manera probar la sinergia entre los componentes según el modelo de arquitectura propuesta para la CAO y empleando el framework incremental.

Agradecimientos

Agradecemos el soporte del proyecto de Innovación educativa PIE 2003/7 de la UCM, el proyecto MCyT MTM2005-08982-C04-01 y el proyecto CAM Ref. 910149.

Referencias

- [1] [BILES94] J. A. Biles. GenJam: A genetic algorithm for generating jazz solos. ICMC'94 Proceeding, The International Computer Music Association. 1994.
- [2] [BILOTT02] E. Bilotta, P. Pantano. Synthetic harmonies: an approach to musical semiosis by means

- of cellular automata. Leonardo Vol. 35, Nro. 2, pp 153-159, 2002.
- [3] [GARAY04] A. Garay. Fugue Composition with Counterpoint Melody Generation Using Genetic Algorithms. Presentado en: Second Internacional Symposium Computer Music Modeling and Retrieval, Esbjerg, Dinamarca mayo 2004 en LNCS 3310, Uffe Kock (Ed) pp. 96-106, 2004.
- [4] [GRILO03] C. Grilo, A. Cardoso. Musical Pattern Extraction Using Genetic Algorithms. . Presentado en: Internacional Symposium Computer Music Modeling and Retrieval, Montpellier, France mayo 2003, en LNCS 2771, Uffe Kock (Ed) pp 114-123, 2003.
- [5] [HORAYE95] A. Horner, L. Ayers. Harmonisation of musical progression with genetic algorithms. ICMC'95 Proceedings, San Francisco: International Computer Music Association, pp 483-484. 1995
- [6] [HORGOL91] A. Horner, D. E. Goldberg. Genetic algorithms and Computer Assisted Music Composition. ICMC'91 Proceedings, San Francisco: International Computer Music Association, pp 479-482, 1991.
- [7] [LOPEZ01] R. Lopez de Mantaras, J. L. Arcos. The Synthesis of Expressive Music: A Challenging CBR Application. ICCBR 2001, LNAI 2080, pp. 16-26.
- [8] [LOPEZ02] R. Lopez de Mantaras, J. L. Arcos. AI and Music From Composition to Expressive Performance. AI Magazine. Volume 23 , Issue 3, 2002. pp: 43 - 57.
- [9] [MCINTY94] R. A. McIntyre. Composition with genetic algorithms. Technical report, University of Michigan. 1995.
- [10] [MIRAND01] E. Miranda. Composing Music with Computers. Focal Press – Music Technology Series. 2001.
- [11] [OVERIL93] R. E. Overill. On the combinatorial complexity of fuzzy pattern matching in music analysis. Computers and the Humanities Volume 27, Number 2, pp 105-110, 1993.
- [12] [ROADS85] C. Roads. Research in music and artificial intelligence. ACM Computing Surveys (CSUR), Volume 17, Issue 2 (June 1985). pp 163-190.
- [13] [ROSSAN04] Florence Rossanta, Isabelle Bloch. A fuzzy model for optical recognition of musical scores. Fuzzy Sets and Systems Volume 141, Issue 2, pp 165–201, 2004.
- [14] [SHTOV05] S. D. Shtovba. Ant Algorithms: Theory and Applications. Programming and Computer Software, Vol. 31, No. 4, 2005, pp. 167–178. Translated from Programmirovaniye, Vol. 31, No. 4, 2005.
- [15] [VIDYAM92] G. Vidyamurthy, M. N. Murty. Musical harmony — A fuzzy entropic characterization. Fuzzy Sets and Systems Volume 48, Issue 2, pp 195-200, 1992.

UN AGENTE COMPRADOR BASADO EN COMPARACIONES PARA SU USO EN COMERCIO ELECTRÓNICO

J.J. Castro-Schez, C. Gonzalez-Morcillo, L. Rodriguez

Escuela Superior de Informática
Universidad de Castilla-La Mancha
Paseo de la Universidad, 4
13071 Ciudad Real

{JoseJesus.Castro,Carlos.Gonzalez,Luis.Rodriguez}@uclm.es

J. Moreno-Garcia

E.U.I.T. Industrial
Universidad de Castilla-La Mancha,
45071 Toledo
Juan.Moreno@uclm.es

Resumen

El comercio electrónico (e-comercio) es una filosofía de negocio que utiliza las plataformas telemáticas de Internet como lugar virtual para comerciar, comunicar, tratar y negociar bienes y servicios. En la última década, el e-comercio fue concebido como una interacción con un catálogo situado en Internet; sin embargo, la idea va más allá y, en la actualidad, se están haciendo investigaciones que persiguen la automatización de las tareas y trabajos que implica el comercio. Una línea muy prometedora en esta investigación es la que se propone desde la comunidad de IA con los sistemas de agentes inteligentes.

Palabras Clave: e-comercio, negociación automática, agente comprador.

dos ganan o pierden simultáneamente; el último rasgo es la *posibilidad de acuerdo*, la mayor parte de las veces, se desconoce si existe un posible acuerdo favorable para ambas partes.

Toda negociación requiere de, al menos, dos negociadores que se “enfrenten cara a cara” en un mismo lugar y a una misma hora, lo cual tiene una serie de problemas, como por ejemplo que origina continuos viajes y pérdidas de tiempo y dinero en dietas. Para minimizar estos problemas, se propone el desarrollo de software para la realización de negociaciones que aproveche las nuevas tecnologías, especialmente Internet. Estos sistemas tienen importantes ventajas [7]:

- Mejoran la comunicación entre los participantes, ya que éstos pueden negociar desde lugares diferentes e, incluso, en momentos distintos.
- Facilitan la negociación ya que pueden tener utilidades de ayuda.
- Agilizan y dan flexibilidad al proceso.
- Reducen los tiempos de negociación y los costes.
- Permiten expandir el negocio globalmente.

1 INTRODUCCIÓN

Gran cantidad de actividades comerciales implica la realización de negociaciones. La *negociación* es una forma de alcanzar unos objetivos cuando éstos dependen de varios sujetos con posiciones enfrentadas y requieren una interacción entre dichos sujetos; es un procedimiento para conseguir unos objetivos y satisfacer unos intereses [4]. Una situación de negociación tiene tres rasgos característicos: *interdependencia*, las decisiones que un individuo debe tomar no dependen sólo de él, sino que están influenciadas por las decisiones de otros individuos; *conflicto de intereses*, podemos encontrar situaciones puramente competitivas en las que las partes tienen intereses estrictamente opuestos, puramente cooperativas en las que existen intereses idénticos para los participantes y las mixtas que intentan satisfacer las necesidades de ambas partes y las

De acuerdo con la cardinalidad y la naturaleza de la interacción, los modelos de sistemas de negociación automática se pueden clasificar en tres:

- *Muchos a uno*; muchos participantes negocian con uno solo; entre los primeros existe competencia por ser el que consiga cerrar el negocio.
- *Uno a uno*; los participantes son dos y negocian directamente entre ellos.
- *Muchos a muchos*; muchos participantes negociando con otros tantos; es el escenario más complejo.

Estos sistemas de apoyo a la negociación están siendo empleados para facilitar el desarrollo del comercio electrónico, una de las innovaciones más significativas y trascendentales de finales del siglo XX, que agrupa una gran variedad de actividades comerciales en línea a través de Internet, para productos y servicios; entre empresas: B2B (*Business to Business*); entre empresas y consumidores y viceversa: B2C (*Business to Consumer*) y C2B (*Consumer to Business*); y entre consumidores: C2C (*Consumer to Consumer*).

Principalmente, los objetivos de estos sistemas semi-automáticos son, desde la perspectiva del vendedor, diseñar y desarrollar la mejor oferta posible; y desde el punto de vista del comprador, buscar el mayor número de ofertas, estudiar las ofertas recibidas y recomendar el mejor trato posible. En definitiva, su misión es la de asesoramiento a su usuario, que siempre deberá actuar en cada paso del proceso de negociación.

Para liberar al usuario de este trabajo se comienzan a investigar sistemas con autonomía basados en agentes inteligentes. Surge el concepto de comercio electrónico mediado por agentes [5][6]. Los agentes son propuestos para modelizar y simular el comportamiento de un agente comprador y vendedor en el comercio electrónico.

En este trabajo se propone el diseño de un agente que simula el comportamiento de un comprador humano en un proceso de negociación. En la siguiente sección se presentará el entorno en el que va a ser empleado, su comportamiento general y algunos fundamentos teóricos necesarios para comprender el diseño del agente propuesto. En la sección 3 se describirá dicho agente. Para finalizar se realizarán algunas conclusiones obtenidas durante el estudio.

2 COMPORTAMIENTO DEL AGENTE COMPRADOR

Desde el lado del comprador, lo que se intenta es desarrollar agentes que realicen el trabajo de un comprador durante una actividad comercial. En este sentido, surgen investigaciones que proponen modelos de comportamiento de compradores en el comercio B2C, por ejemplo el modelo CBB (*Consumer Behaviour Buying*) [5]. Según el cual, los agentes pueden ser empleados para llevar a cabo cuatro fases, que son: identificar las necesidades, identificar el producto idóneo, buscar posibles suministradores y negociar su compra. Este modelo presenta una quinta y sexta etapa que son la compra y entrega del producto y una posible séptima fase que es la evaluación del mismo.

El agente que se propone en este artículo modela la fase de negociación de un comprador y pretende ser

útil en la automatización de la negociación competitiva entre muchos vendedores y un comprador, sobre varios aspectos del servicio o producto, en contextos B2C (aunque también podría ser empleado en contextos B2B).

En el ambiente presentado en el último párrafo, el agente comprador encargado de negociar deberá realizar los siguientes trabajos:

1. Adquirir de los vendedores las ofertas.
2. Establecer como se distinguen unas de otras.
3. Estudiar las más beneficiosas para su dueño.
4. Establecer la *Zona de Posible Acuerdo* para cada variable.
5. Intentar sacar provecho de la competencia existente en el mercado para mejorar su beneficio.

Para establecer la Zona de Posible Acuerdo, el comprador usará la mejor alternativa que se tenga de entre todas las recibidas, la denominada BATNA (*Best Alternative To a Negotiated Agreement*) [4][9], junto al valor que él no está dispuesto a rebasar si se quiere llegar a un acuerdo.

Para la realización de estos trabajos, se propone hacer uso de la idea subyacente en la técnica de la *Tabla de Repertorio Difuso* (TRD) [2] en la implementación del agente comprador. Esta técnica es una propuesta de mejora de la técnica de la rejilla de repertorio, que emplea la lógica difusa como formalismo de representación del conocimiento.

La técnica de la rejilla de repertorio fue propuesta por *George Kelly* [8] para su uso en el campo de la psicología. Puede ser considerada como un método de análisis dimensional ya que se basa en la realización de medidas de similitud sobre distintos elementos ($E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$) empleando para ello los rasgos que definen cada una de ellas ($C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$). La información se almacena en una matriz M en la que las columnas son los elementos (E) y las filas los rasgos que definen esos elementos (C) y que sirven para medir la semejanza entre elementos. Cada intersección de esa matriz $M[j, i]$ contiene una valoración x_{ji} , que muestra como se aplica un constructor c_j sobre un elemento e_i .

El funcionamiento de la técnica de la rejilla de repertorio se puede describir brevemente como la repetición de los cuatro siguientes pasos hasta que no existan elementos similares:

1. Agrupar y seleccionar tres elementos similares,

2. Introducir un atributo que distinga uno de los elementos de los otros dos,
3. Valorar todos los elementos según este nuevo atributo,
4. Calcular la similaridad entre los elementos.

2.1 TABLA DE REPERTORIO DIFUSA

En un problema de clasificación bien definido, el conjunto de clases posible (E) estará lo suficientemente bien determinado como para prestar atención al proceso de su extracción. Otro tema es el conjunto de variables y los valores que estas pueden tomar, que son usados para clasificar. En este contexto, la técnica de la TRD [2] se ha mostrado útil para la adquisición de esos atributos o variables (V), así como de sus posibles valores, es decir su dominio de definición (DDV). Se obtienen: $V = \{V_1, V_2, V_3, \dots\}$ y $DDV = \{DDV_1, DDV_2, DDV_3, \dots\}$ donde DDV_i es el *Dominio de Definición de la Variable i* y está formado por el conjunto de valores que puede tomar V_i .

Cada clase del sistema de clasificación estará definida en el dominio dado por las variables V_i de V . Estas variables o atributos podrán ser de distinta naturaleza:

- Boleanos: se pueden valorar como “Sí” o “No”.
- Graduados: se valoran dentro de una escala.
- Numéricos: los que se suelen expresar por medio de valores numéricos.
- Nominales: aquellos que pueden tomar valores lingüísticos, expresados en lenguaje natural.

La TRD permite trabajar con variables de cualquiera de los tipos antes mencionados, para ello emplea como formalismo de representación, la función trapezoidal de la lógica difusa. La principal ventaja de este formalismo radica en el hecho de que permite la representación de información tanto precisa como imprecisa, teniendo así en cuenta esta dualidad presente en la mente humana. La incertidumbre aparece cuando se valora un atributo numérico con un intervalo, se desconoce la valoración exacta de un atributo o se emplean varios valores. La función trapezoidal tiene cuatro parámetros (a, b, c, d), el parámetro a será el extremo inferior y d el superior y delimitan la incertidumbre, el intervalo $[b, c]$ establecen los valores intermedios y delimitan la certeza. Los parámetros empleados para representar cada uno de los tipos de atributos antes mencionados pueden ser consultados en [1].

El funcionamiento de la TRD es similar al de la rejilla de repertorio, basándose en el análisis de la información actual, buscando elementos similares que

permitan la adquisición de nuevas variables discriminantes que rompan tal similaridad. Para ello realiza un análisis dimensional que hace uso de una medida que calcula la proximidad entre dos elementos en función de los valores que toma cada uno de ellos para cada uno de los atributos que los definen. La proximidad entre dos elementos según una variable i , vendrá dada por la separabilidad espacial entre los valores que tomen esos elementos en dicha variable. Supongamos que el primer elemento toma el valor A y el segundo el valor B , la separabilidad se define como el espacio difuso que queda entre dichos valores (Fig. 1).

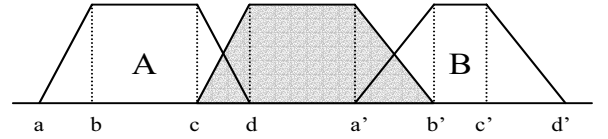


Figura 1: Separabilidad entre los valores difusos A y B.

La medida de separabilidad entre dos valores difusos A y B de parámetros (a, b, c, d) y (a', b', c', d') se define formalmente en [2], y se justifica su uso frente a otras posibilidades principalmente por razones de interpretabilidad.

La distancia entre dos elementos e_x y e_y se define como la suma de la separabilidad entre esos dos elementos según cada uno de los atributos que los definen y se calcula como:

$$D(e_x, e_y) = \frac{\sum_{i=1}^u d_N(e_x, e_y, i)}{z} \quad (1)$$

donde u es el número de atributos totales, z el número de atributos para los que los elementos e_x y e_y están definidos y d_N es la separabilidad normalizada que es definida como:

$$d_N(e_x, e_y, i) = \frac{d(e_x, e_y, i)}{d(\max(i), \min(i), i)} \quad (2)$$

siendo $d(e_x, e_y, i)$ la medida de separabilidad entre los conceptos e_x y e_y según el atributo i y $\max(i)$ y $\min(i)$ el mayor y menor valor que puede tomar la variable i .

Se dice que dos elementos son distinguidos por una variable V_i si y solo si $d(e_x, e_y, i) \geq dd$, siendo dd un parámetro llamado distancia de distinción que toma sus valores en el intervalo $[0, 1]$. Este valor es prefijado de antemano y depende del tipo de la variable a la que se aplica.

La TRD, además de utilizar una matriz para almacenar información como hace la rejilla de repertorio, utiliza una estructura auxiliar denominada *matriz de distinciones*. La matriz de distinciones tiene dimensión $n \times n$, donde n es la cantidad de elementos. Cada intersección (x, y) de la matriz almacena conocimiento sobre aquellos atributos que distinguen entre los elementos e_x y e_y con un grado superior al valor dd de la variable. La fuerza con la que cada variable V_i distinga entre los elementos e_x y e_y es calculada como $strength(x, y, i) = d_N(e_x, e_y, i)$.

El funcionamiento de la técnica de la TRD puede ser descrito de la siguiente manera:

Algoritmo simplificado de la TRD

REPEAT

1. Agrupar los elementos similares teniendo en cuenta las distinciones presentes en la matriz de distinciones.
2. Seleccionar tres elementos similares.
3. Mostrar al experto estos tres elementos y pedir un rasgo o atributo que haga uno de los elementos distintos de los otros dos.
4. Valorar todos los elementos según el atributo recién introducido.
5. Si existen distinciones entre los elementos según ese nuevo atributo introducir tal distinción en la matriz de distinciones.

UNTIL no existan elementos similares.

2.2 TRD PARA AYUDAR A DECIDIR

La TRD también ha sido adaptada para su uso en problemas de decisión [3], empleándose como mecanismo para adquirir los atributos que distinguen cada una de las decisiones posibles y los valores que esos atributos pueden tomar, así como la determinación del mejor y peor valor posible para cada uno de los atributos. Con la información adquirida y almacenada en las matrices de datos y distinciones se recomienda la decisión más adecuada según la información suministrada por la persona que tiene que tomar la decisión.

Los atributos, en este tipo de problemas, vienen definidos por cuatro propiedades:

- Su dominio de definición.
- Su valor ideal; será el valor deseado por la persona que tiene que tomar la decisión.
- El peor valor posible; será el último punto que el decisor está dispuesto a considerar para ese atributo.

- Su prioridad o importancia a la hora de decidir.

El funcionamiento de la TRD cuando es aplicado a problemas de decisión es similar al de problemas de clasificación la única diferencia radica en el hecho de que ahora cada vez que se introduce una nueva variable hay que extraer más información sobre ella, habrá que determinar su valor ideal y su peor valor y además como salida tendrá que recomendar la decisión más adecuada y justificar tal recomendación.

Para ayudar en la decisión, se ha propuesto calcular, para cada posible decisión O_i , la siguiente medida de bondad:

$$G_o(O_i) = O_i^+ - O_i^-, \quad (3)$$

donde

$$O_i^+ = \sum_{\forall x \in R_{fi}^+} Strength(i, j, x) \times Priority(x) \quad (4)$$

$$O_i^- = \sum_{\forall x \in R_{fi}^-} Strength(i, j, x) \times Priority(x) \quad (5)$$

Siendo $Priority(x)$ la función que devuelve la prioridad o importancia del atributo o variable V_x ; $Strength(i, j, x)$ es la función que devuelve la forma en la que el atributo x distingue el elemento i de otro elemento j . Estas distinciones deben ser importantes, es decir deben aparecer en la matriz de distinciones. R_{fi}^+ y R_{fi}^- son los atributos relevantes (negativos y positivos respectivamente) que distinguen a la opción i del resto de decisiones posibles. Los atributos negativos de un elemento para una comparación serán aquellos cuyo valor esté más próximo al peor valor, por el contrario los positivos serán aquellos más cercanos al valor ideal. Esta información se obtiene a partir de la información contenida en la TRD, la matriz de distinciones y el perfil del decisor (valores ideales y peor) [3].

La decisión recomendada será aquella que tenga el mayor valor de “bondad”. Para justificar esta decisión, se mostrará todos los atributos que pertenecen al conjunto de constructores positivos que distinguen la decisión recomendada del resto. Una descripción detallada del método empleado se da en [3].

3 PROPUESTA DE AGENTE COMPRADOR

En el campo de la negociación automática, y concretamente en la automatización de un agente comprador,

lo que se necesita es un agente comprador inteligente que reciba ofertas de diversas fuentes o posibles suministradores, analice las ofertas recibidas, adquiera de ellos los atributos que distinguen sus ofertas del resto y en función de esa información tome una decisión sobre cual es la mejor opción. Para ello debe conocer en todo momento cual es la mejor o más beneficiosa alternativa.

Con el objetivo de obtener un mejor trato, el agente se va a aprovechar de la competencia existente en el mercado entre los posibles vendedores. Para ello analizará las ofertas recibidas, y propondrá confrontaciones entre vendedores que oferten productos igual de beneficiosos. Con ello propiciará la introducción de nuevas ofertas o modificación de los valores que toman las ofertas ya realizadas de manera que cada producto sea distinguido del resto.

Al finalizar la etapa de negociación, se debe seleccionar la opción más beneficiosa para el comprador, así como dar una justificación del porqué esa oferta es la óptima.

Para automatizar este trabajo, se propone hacer uso de una estructura similar a la TRD en la que ahora, y a diferencia de la propuesta en [2], la adquisición de conocimiento se hace de manera distribuida o colaborativa entre todos los vendedores, supervisada por el comprador. Más concretamente, lo que se pretende resolver es un problema de decisión, en el que hay que determinar cual es la mejor oferta de entre un conjunto dado de posibles ofertas y dar una justificación del porqué. El agente trabajará como un sistema de apoyo a la decisión, que adquiera el conocimiento suficiente de diversas fuentes para tomar una decisión y que tenga capacidad para justificar tal decisión. El agente de este artículo estará basado en la TRD como herramienta de apoyo a la decisión [3].

La estrategia que el agente comprador sigue puede ser descrita como sigue:

REPETIR

1. Seleccionar las ofertas igualmente beneficiosas,
2. Pedir a cada suministrador de ellas una nueva variable que haga que su oferta sea más interesante para el comprador que algunas de las otras,
3. Cada vez que un suministrador presenta una nueva variable,
 - (a) Recibir de cada suministrador la variable y el valor que toma,
 - (b) Pedir a los otros suministradores que valoren sus productos para la nueva variable.
 - (c) Determinar el tipo del nuevo atributo y los valores óptimo y peor,

- (d) Determinar la importancia o prioridad de esa nueva variable.
4. Cada vez que un suministrador modifica el valor de una variable ya existente,
 - (a) Recibir del suministrador el nuevo valor,
 - (b) Pedir a los otros suministradores si quieren valorar de nuevo sus ofertas en esa variable.
5. Calcular la similaridad entre ofertas con el objetivo de detectar las más beneficiosas.

HASTA que exista una oferta que se distinga de las demás, sea muy similar al trato ideal del comprador y cumpla las restricciones iniciales del comprador o el comprador pare la interacción.

Los valores ideal y peor posible son valores concretos y cada valoración que se realice para un atributo debería estar entre esos dos valores para tener opción en la negociación. En el caso de que se estuviese negociando con un número elevado de ofertas y suministradores e interesara reducir este número se podría eliminar del proceso de negociación aquellas ofertas que estuviesen valoradas fuera de ese rango.

Otras modificaciones interesantes son:

- Los parámetros dd_i ahora no son prefijados de antemano sino que dependerán de la marcha del proceso de negociación. El parámetro distancia de distinción de la variable V_i , dd_i , se calcula como la media de las distancias entre cualquier par de ofertas e_x, e_y activas en el proceso de negociación según los valores que toman para esa variable. Esto es:

$$dd_i = \frac{\sum_{x=1}^{|E|} \sum_{y=x+1}^{|E|} d_n(e_x, e_y, i)}{\sum_{z=1}^{|E|-1} z} \quad (6)$$

donde $|E|$ es el número de ofertas entre las que decidir. El parámetro dd_i toma sus valores en el intervalo $[0, 1]$.

- Puesto que la búsqueda de elementos similares se va a hacer ahora en función de los valores de bondad de las ofertas en juego (Sección 2.2), el agrupamiento se tendrá que realizar en función de dichos valores.

La distancia entre dos grupos de ofertas A_i y A_j se calcula de la siguiente manera:

Algoritmo de agrupamiento de ofertas

1. Formar un subgrupo por oferta e introducirlo en el conjunto G .
 2. Calcular la separación entre cada par de subgrupos de G .
 3. Unir los subgrupos de G que presenten la menor distancia y verifiquen que:
 - La separabilidad es menor o igual que un límite d_s .
 - Existen al menos dos ofertas x e y que pertenecen a diferentes subgrupos cuya entrada (x,y) de la matriz de distinciones es igual a “Nulo” (es decir, no hay aun ningún atributo que los distinga).
 4. Si se ha realizado una unión, introducir el nuevo conjunto en G e ir al paso 2.
 5. Seleccionar aquellas ofertas del subgrupo más beneficioso que verifiquen que cualquier par de ofertas tienen una entrada igual a “Nulo” en la matriz de distinciones. Devolver ese conjunto.
 6. De otra manera, devolver “Parar”.
 7. Fin del algoritmo.
-

$$D_g(A_i, A_j) = \frac{\sum_{\forall (e_x, e_y) \in A_i \times A_j} |G_{o_n}(e_x) - G_{o_n}(e_y)|}{n} \quad (7)$$

donde n es el número de elementos del conjunto $A_i \times A_j$ y $G_{o_n}(e_x)$ es la función que devuelve el valor de bondad normalizado de la oferta e_x .

El valor del parámetro d_s se determinará en cada paso del algoritmo de agrupamiento de la siguiente manera:

$$d_s = \frac{\sum_{\forall (A_i, A_j) \in G} D_g(A_i, A_j)}{|G|} \quad (8)$$

donde $|G|$ es el número de grupos existentes en el paso.

4 CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto una alternativa para la automatización de la fase de negociación de un comprador, delimitando el contexto en el que se recomienda su uso. Para su diseño se ha empleado la idea de agente inteligente [6], que actúa con autonomía e independencia de su instructor, y la técnica de la tabla de repertorio difusa [2], para la adquisición e identificación de las variables relevantes de cada oferta [2]. El comprador compara y selecciona las ofertas similares e intenta mejorarlas gracias a la competencia entre los vendedores.

Además el agente diseñado implementa un sistema de

apoyo a la decisión que permite obtener cual es la oferta óptima y dar una justificación [3].

Como trabajo futuro, se pretende estudiar un protocolo de negociación que gobierne la interacción entre los vendedores para evitar conflictos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado con fondos del Ministerio de Ciencia y Tecnología, proyecto “DIMO-CLUST” TIC2003-08807-C02-02 y de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha, proyecto PAC-06-0141.

Referencias

- [1] J. J. Castro-Schez, N. R. Jennings, X. Luo, and N. Shadbolt. Acquiring domain knowledge for negotiating agents: a case of study. *Int. J. of Human-Computer Studies* 61(1):3–31, 2004.
- [2] J.J. Castro-Schez, J.L. Castro y J.M. Zurita. Fuzzy Repertory Table, a method for acquiring knowledge about input variables to machine learning algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(1):123–139, 2004.
- [3] J.J. Castro-Schez, L. Jimenez, J. Moreno, and L. Rodriguez, Using fuzzy repertory table-based technique for supporting decision. *Decision and Support Systems*, 39(3):293–307, 2005.
- [4] J. Gómez-Pomar Rodríguez. Teoría y técnicas de Negociación. Ed. Ariel S.A., 1991.
- [5] R.H. Guttman, A.G. Moukas y P. Maes. Agent-mediated Electronic Commerce: A Survey. *Knowledge Engineering Review*, 13(2):147–159, 1998.
- [6] M. He, N.R. Jennings y H. Leung. On Agent-Mediated Electronic Commerce. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 15(6):1345–1363, 2003.
- [7] A.R. Lomuscio, M. Wooldridge y N.R. Jennings. A classification scheme for negotiation in electronic commerce. *Int. Journal of Group Decision and Negotiation*, 12(1):31–56, 2003.
- [8] G. Kelly. *The Psychology of Constructs*. Ed. Norton, New York, 1955.
- [9] F. Ponti. Los caminos de la Negociación: Personas, estrategias y técnicas. Ed. Granica, 2002.
- [10] M. Wooldridge y N.R. Jennings. Intelligent agents: theory and practice. *Knowledge Engineering Review*, 2(10):115–152, 1995.

MEDIDAS DE INCOMPATIBILIDAD ENTRE CONJUNTOS BORROSOS*

Elena Castiñeira

Dept. Matemática Aplicada
F. Informática

Universidad Politécnica de Madrid
28660 Boadilla del Monte
ecastineira@fi.upm.es

Susana Cubillo

Dept. Matemática Aplicada
F. Informática

Universidad Politécnica de Madrid
28660 Boadilla del Monte
scubillo@fi.upm.es

Pedro Luis Fernández

Dept. Matemática Aplicada
F. Informática

Universidad Politécnica de Madrid
28660 Boadilla del Monte
pedrol.fernandez@gmail.com

Resumen

En la teoría de conjuntos clásicos, los conceptos de contradicción e incompatibilidad coinciden. Sin embargo, no ocurre lo mismo en el caso de los conjuntos borrosos: en general, que dos conjuntos sean contradictorios no es equivalente a que sean incompatibles, aunque dichos conceptos no están exentos de relación. El principal objetivo de este trabajo es abordar el estudio de la incompatibilidad como concepto medible, introduciendo así un modelo axiomático que permita medir cuán incompatibles son dos conjuntos borrosos. Por otra parte, se retoma el concepto de contradicción y se extiende el modelo con nuevas medidas de contradicción que serán de gran utilidad para la construcción de medidas de incompatibilidad.

Keywords: Negaciones, negaciones fuertes, N -contradicción, T -incompatibilidad, medidas de T -incompatibilidad.

1 Introducción

En teoría de conjuntos, los conceptos de incompatibilidad y contradicción son ampliamente conocidos y utilizados. Se dice que dos conjuntos son incompatibles cuando su intersección es el vacío, mientras que son contradictorios cuando uno de ellos está contenido en la negación del otro. Como en los conjuntos clásicos la unión y la intersección poseen las propiedades de un álgebra de Boole, estos dos conceptos coinciden. En efecto, $A = A \cap X = A \cap (B \cup B^C) = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$, por lo que: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A = A \cap B^C \Leftrightarrow A \subset B^C$

Cuando se considera la extensión a los conjuntos borrosos, se obtienen definiciones similares. Dada una

t -norma T , dos conjuntos $\mu \in [0, 1]^X$ y $\sigma \in [0, 1]^X$ son T -incompatibles (ver [9]) si para todo $x \in X$ es $T(\mu(x), \sigma(x)) = 0$, y son N -contradictorios (para una negación fuerte N) si para todo $x \in X$, $\mu(x) \leq N(\sigma(x))$. Sin embargo, en este caso, los dos conceptos no son equivalentes. Por ejemplo, en el universo de discurso $X = [0, 1]$, los conjuntos borrosos μ y σ definidos para todo $x \in [0, 1]$ por $\mu(x) = x$ y $\sigma(x) = \frac{1-x}{2}$, dado que $\text{Min}(x, \frac{1-x}{2}) > 0$ para todo $x \in (0, 1)$, y que tomando la negación estándar $N_{id}(x) = 1 - x$, es $\sigma(x) = \frac{1-x}{2} \leq 1 - x = N_{id}(\mu(x))$, se tiene que μ y σ no son Min -incompatibles pero sí son N_{id} -contradictorios.

El estudio de la contradicción en lógica borrosa, que fue iniciado en [8] y [9], fue abordado con más profundidad en [3]; además, en [2] se propusieron formas de medir el grado en que esta contradicción se produce, desarrollándose en [4] una axiomática para las medidas de contradicción en lógica borrosa. En este trabajo nos proponemos iniciar un estudio de la T -incompatibilidad en la misma línea que el realizado en el caso de la contradicción, y relacionar ambos conceptos, en la medida de lo posible.

El artículo se organiza como sigue. En la sección 2, recordamos algunas definiciones y propiedades sencillas sobre la contradicción en conjuntos borrosos, algunas ya establecidas en artículos anteriores (ver [3], [2]), mientras que otras se introducen por primera vez en este trabajo, de forma que permiten una mayor precisión en los conceptos tratados. Seguidamente, en la sección 3, se inicia un estudio similar para la T -incompatibilidad, a partir de la determinación de las regiones en que esta propiedad se verifica, y definiendo las medidas de T -incompatibilidad. Por último, en la sección 4, se verán algunas relaciones entre contradicción y T -incompatibilidad.

* Este trabajo está parcialmente subvencionado por la CICYT, dentro del Proyecto TIN 2005-08943-C02-01

2 Sobre la contradicción

De aquí en adelante denotaremos por X un conjunto no vacío que representará el universo de discurso.

Definición 2.1 ([5],[7]) Una función decreciente $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $N(0) = 1$, $N(1) = 0$, y para todo $x \in [0, 1]$ es $N(N(x)) \geq x$, se dice que es una negación ordinaria, o simplemente negación; si además verifica que para todo $x \in [0, 1]$ es $N(N(x)) = x$, diremos que es una negación fuerte.

En [7] se demuestra que N es una negación fuerte, si y sólo si existe un isomorfismo de orden $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$. En este caso, denotaremos N como N_φ .

Definición 2.2 [9] Sea $\mu \in [0, 1]^X$ y sea $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una negación. Diremos que μ es *N-autocontradictorio* si y sólo si $\mu(x) \leq N(\mu(x))$ para todo $x \in X$.

Es sencillo comprobar que, dada una negación fuerte N , cualquier $\mu \in [0, 1]^X$ es *N-autocontradictorio* si y sólo si para todo $x \in X$ es $\mu(x) \leq n$, donde n es el punto fijo de N .

En inferencia borrosa, no solamente interesa evitar que un resultado sea autocontradictorio, sino también que no sea contradictorio con las información dada, ni con ninguna de la informaciones obtenidas. Por ello, se hace necesario trabajar con la contradicción entre dos o varios conjuntos.

Definición 2.3 [9] Sean $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ y sea $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una negación. Diremos que μ es *N-contradictorio* con σ si y sólo si para todo $x \in X$ $\mu(x) \leq N(\sigma(x))$.

Inmediatamente se obtiene que si N es una negación ordinaria, y $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$, entonces μ es *N-contradictorio* con σ si y sólo si σ es *N-contradictorio* con μ . En ese caso diremos que μ y σ son *N-contradictorios*.

Ya en anteriores artículos se destaca la necesidad de medir de alguna forma en qué grado se da la contradicción, ya que, por ejemplo, un conjunto *N-autocontradictorio* puede ser que con una pequeña variación en el valor de pertenencia de alguno de sus elementos, deje de serlo, o puede ser que se necesite una variación de mayor grado para que se produzca este hecho. Por eso, se necesitan definir funciones que de algún modo midan este grado de *N-autocontradicción*. También en los artículos mencionados, se tantean las condiciones que deben cumplir dichas medidas. Teniendo en cuenta todo ello, se proponen las siguientes definiciones, que dan lugar algunos resultados directos.

Definición 2.4 Sea $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una negación. Una función $C_N : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ diremos que es una *medida de N-autocontradicción* si verifica las siguientes condiciones:

- (i) $C_N(\mu_\emptyset) = 1$
- (ii) $C_N(\mu) = 0$, si existe $x \in X$ con $\mu(x) \geq N(\mu(x))$
- (iii) Antimonotonía: Dado $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ con $\mu \leq \sigma$, se tiene que $C_N(\mu) \geq C_N(\sigma)$

Lema 2.5 Sea $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una negación fuerte con punto fijo $n \in [0, 1]$. Una función $C_N : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ es una *medida de N-autocontradicción* si y sólo si se verifican (i) y (iii) de la anterior definición 2.4, y además:

- (ii') $C_N(\mu) = 0$, si existe $x \in X$ con $\mu(x) = n$.

Ejemplo 2.6 En [2] y [4] se introduce la familia de funciones $C_N : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ definida para negación fuerte N por

$$C_N(\mu) = N \left(\text{Min} \left(1, \frac{\text{Sup}_{x \in X} \mu(x)}{n} \right) \right),$$

siendo n el punto fijo de N . Se comprueba que cada C_N verifica los axiomas (i) y (iii) de la definición anterior. Además resulta trivial que también verifica (ii'), por tanto, C_N es una medida de *N-autocontradicción*.

Definición 2.7 Sean $X \neq \emptyset$ y $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una negación. Una función $C_N : [0, 1]^X \times [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ diremos que es una *medida de N-contradicción* si verifica las siguientes condiciones:

- (i) $C_N(\mu_\emptyset, \mu_\emptyset) = 1$
- (ii) $C_N(\mu, \sigma) = 0$, si existe $x \in X$ con $\mu(x) \geq N(\sigma(x))$ (ó $\sigma(x) \geq N(\mu(x))$).
- (iii) Simetría: $C_N(\mu, \sigma) = C_N(\sigma, \mu)$, para todo $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$
- (iv) Antimonotonía: Dado $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ con $\mu \leq \sigma$, se tiene que $C_N(\mu, \nu) \geq C_N(\sigma, \nu)$, para todo $\nu \in [0, 1]^X$

Ejemplo 2.8 Sea N_φ una negación fuerte y sea φ el automorfismo que la determina, consideremos la función $C_{N_\varphi} : [0, 1]^X \times [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$C_{N_\varphi}(\mu, \sigma) = \text{Max} \left(0, 1 - \text{Sup}_{x \in X} (\varphi(\mu(x)) + \varphi(\sigma(x))) \right)$$

En [4] se comprobó que C_{N_φ} verifica los axiomas (i), (iii) y (iv), además si existiese un $x_0 \in X$ tal que $\mu(x_0) \geq N_\varphi(\sigma(x_0)) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(\sigma(x_0)))$ entonces $\varphi(\mu(x_0)) + \varphi(\sigma(x_0)) \geq 1$ y así $C_{N_\varphi}(\mu, \sigma) = 0$; por tanto, C_{N_φ} es una medida de *N_φ-contradicción*.

3 Regiones y medidas de Incompatibilidad

En este apartado se comienza recordando la definición de T -incompatibilidad, para pasar a estudiar las regiones de incompatibilidad en $[0, 1]^2$ dependiendo de la t -norma. Todo ello va a permitir definir axiomáticamente las medidas de incompatibilidad, de forma similar a la realizada con la contradicción.

Definición 3.1 Dada $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ t -norma, diremos que dos conjuntos $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ son T -incompatibles si $T(\mu(x), \sigma(x)) = 0$ para todo $x \in X$.

Definición 3.2 Sea $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una t -norma, llamaremos región de T -incompatibilidad al conjunto

$$R_I^T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : T(x, y) = 0\}$$

La región de T -compatibilidad, R_C^T , será la complementaria a ésta en el cuadrado unidad.

Es evidente que $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ son T -incompatibles si y sólo si para todo $x \in X$ se tiene $(\mu(x), \sigma(x)) \in R_I^T$.

Lema 3.3 Sean T_1, T_2 dos t -normas con $T_1 \leq T_2$, se cumple entonces que si dos conjuntos $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ son T_2 -incompatibles entonces son T_1 -incompatibles. O lo que es lo mismo, $R_I^{T_2} \subseteq R_I^{T_1}$.

Ejemplo 3.4 Determinemos las regiones de T -incompatibilidad para algunas t -normas usuales.

(a) Si $T(x, y) = \text{Min}(x, y)$ es la t -norma del mínimo, entonces (Fig. 1)

$$R_I^{\text{Min}} = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$$

y, por tanto, $R_C^{\text{Min}} = (0, 1] \times (0, 1]$

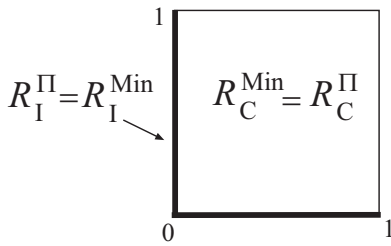


Figura 1: Regiones de T -incompatibilidad para $T = \text{Min}$ y $T = \Pi$.

(b) Si $T(x, y) = \Pi(x, y) = xy$ es la t -norma del producto, entonces $R_I^\Pi = R_I^{\text{Min}}$ y $R_C^\Pi = R_C^{\text{Min}}$.

(c) Si $T(x, y) = W(x, y) = \text{Max}(0, x + y - 1)$ es la t -norma de Łukasiewicz entonces (Fig. 2)

$$R_I^W = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\}$$

$$R_C^W = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y > 1\}$$

(d) Si consideramos la menor de todas las t -normas, $T(x, y) = Z(x, y) = \begin{cases} \text{Min}(x, y) & \text{si } \text{Max}(x, y) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ entonces (Fig. 2)

$$R_I^Z = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$R_C^Z = ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [0, 1])$$

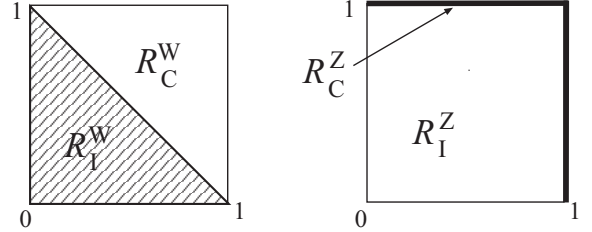


Figura 2: Regiones de T -incompatibilidad para $T = W$ y para $T = Z$.

Observamos que, debido a que $Z \leq W \leq \Pi \leq \text{Min}$, se verifica

$$R_I^Z \supseteq R_I^W \supseteq R_I^\Pi \supseteq R_I^{\text{Min}}$$

$$R_C^Z \subseteq R_C^W \subseteq R_C^\Pi \subseteq R_C^{\text{Min}}$$

Sin embargo, en la práctica, no es suficiente con señalar que dos conjuntos borrosos son T -incompatibles, o no lo son. En efecto, si el conjunto de los pares $X_{\mu\sigma} = \{(\mu(x), \sigma(x)) : x \in X\}$ está próximo a la región de compatibilidad, pequeñas variaciones en los valores que toman μ ó σ pueden producir conjuntos muy similares a los iniciales pero que ya no son T -incompatibles; en cambio, si $X_{\mu\sigma}$ está muy alejado de la región de T -compatibilidad, pequeñas perturbaciones de los valores de μ ó σ no producen un cambio en el carácter de compatibilidad de los conjuntos obtenidos. Por tanto, parece razonable considerar que, en el primer caso, los conjuntos tienen un grado de incompatibilidad menor que en el segundo. Este planteamiento motiva la necesidad de medir de alguna forma el grado de T -incompatibilidad de dos conjuntos. Para ello tratamos de encontrar funciones $I_T : [0, 1]^X \times [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ que verifiquen ciertas condiciones que estén de acuerdo con nuestra intuición.

Definición 3.5 Si T es una t -norma, diremos que $I_T : [0, 1]^X \times [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ es una *medida de T -incompatibilidad* si se verifican las siguientes condiciones:

- (i) $I_T(\mu_\emptyset, \mu_\emptyset) = 1$
- (ii) $I_T(\mu, \sigma) = 0$, si existe $x \in X$ tal que $T(\mu(x), \sigma(x)) > 0$
- (iii) Simetría: $I_T(\mu, \sigma) = I_T(\sigma, \mu)$, para todo $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$

- (iv) Antimonotonía: Dado $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ con $\mu \leq \sigma$, se tiene que $I_T(\mu, \nu) \geq I_T(\sigma, \nu)$, para todo $\nu \in [0, 1]^X$

La visión geométrica, proporcionada por las regiones de las figuras del ejemplo anterior, sugiere rápidamente definir medidas de T -incompatibilidad basándonos en distancias.

Proposición 3.6 Sea T una t -norma y d una distancia en $\mathbb{R}^2$ tales que $d((0, 0), R_C^T) > 0$, entonces la función I_T^d definida para cada $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ como

$$I_T^d(\mu, \sigma) = \frac{d(X_{\mu\sigma}, R_C^T)}{d((0, 0), R_C^T)}$$

es una medida de T -incompatibilidad, y diremos que está generada por d .

Ejemplo 3.7 Eligiendo $T = W$, se puede comprobar que la medida de W -incompatibilidad generada por la distancia euclídea d es (Fig. 4):

$$I_W^d(\mu, \sigma) = \left(\frac{\text{Max} \left(0, 1 - \sup_{x \in X} (\mu(x) + \sigma(x)) \right)}{2} \right)^{1/2}$$

Ejemplo 3.8 Para la t -norma $T = Z$, la medida de Z -incompatibilidad generada por la distancia euclídea (Fig. 3) es:

$$\begin{aligned} I_Z^d(\mu, \sigma) &= 1 - \text{Max} \left(\sup_{x \in X} \mu(x), \sup_{x \in X} \sigma(x) \right) \\ &= \text{Min} \left(1 - \sup_{x \in X} \mu(x), 1 - \sup_{x \in X} \sigma(x) \right) \end{aligned}$$

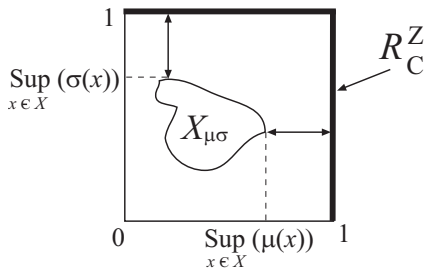


Figura 3: Medida de Z -incompatibilidad generada por la distancia euclídea.

4 Incompatibilidad y Contradicción

Una vez introducida en la sección anterior la T -incompatibilidad y algunas de sus propiedades, este

apartado se dedica a estudiar su relación con la N -contradicción. Ya vimos en la Introducción, que en los conjuntos clásicos los conceptos de incompatibilidad y contradicción coinciden; las siguientes líneas son un intento de estudiar qué ocurre en los conjuntos borrosos.

Comencemos recordando qué es la negación asociada a un t -norma (para más detalles, consultar [6]).

Definición 4.1 Sea $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una t -norma continua; su negación asociada, $N_T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, viene definida para cada $x \in [0, 1]$ por

$$N_T(x) = \text{Sup}\{z \in [0, 1] : T(x, z) = 0\}$$

Un primer resultado relaciona la N -contradicción con la T -incompatibilidad.

Proposición 4.2 Sea T una t -norma continua, N_T su negación asociada, y sean $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$. Se verifica:

$$\mu, \sigma \text{ } T\text{-incompatibles} \iff \mu \text{ } N_T\text{-contradictorio con } \sigma$$

Demostración: μ, σ son T -incompatibles

$$\begin{aligned} \iff T(\mu(x), \sigma(x)) &= 0 \quad \forall x \in X \\ \iff \mu(x) &\leq \text{Sup}\{z : T(\sigma(x), z) = 0\} \quad \forall x \in X \\ \iff \mu(x) &\leq N_T(\sigma(x)) \quad \forall x \in X \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esta proposición 4.2 permite obtener familias de medidas de T -incompatibilidad de la siguiente forma.

Teorema 4.3 Sea T una t -norma continua, y N_T su negación asociada. Sea C_{N_T} una medida de N_T -contradicción. La función $I_T : [0, 1]^X \times [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ definida para cada $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ por

$$I_T(\mu, \sigma) = C_{N_T}(\mu, \sigma)$$

es una medida de T -incompatibilidad.

Recordemos que la función $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es un operador de agregación si es creciente en las dos variables, $A(0, 0) = 0$ y $A(1, 1) = 1$ (véase [1]). Los siguientes resultados muestran la relación existente entre el carácter N -contradictorio de dos conjuntos $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$, y la N -autocontradicción del resultado de su agregación mediante un operador.

Proposición 4.4 Sea N una negación ordinaria, y sea $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un operador de agregación que cumple:

- (A1) Es conmutativo
- (A2) $A \circ (N \times N) \leq N \circ A$

Entonces, si $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ son N -contradictorios, se cumple que $A \circ (\mu \times \sigma)$ es N -autocontradictorio.

Demostración: Supongamos que $\mu \leq N(\sigma)$. Como N es ordinaria sabemos que también $\sigma \leq N(\mu)$. Por las propiedades A1, A2 y ser A no decreciente, tenemos que para todo $x \in X$:

$$\begin{aligned} A(\mu(x), \sigma(x)) &\leq A(N(\sigma(x)), N(\mu(x))) \\ &= A(N(\mu(x)), N(\sigma(x))) \\ &\leq N(A(\mu(x), \sigma(x))) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente resultado proporciona operadores de agregación verificando A2 para cualquier negación ordinaria.

Lema 4.5 Sea $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un operador de agregación tal que para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$: $A(x, y) \leq \text{Min}(x, y)$. Entonces A cumple la propiedad A2 para cualquier negación ordinaria N .

Demostración: Sea N una negación ordinaria y sean $x, y \in [0, 1]$, se verifica:

$$\begin{aligned} A(N(x), N(y)) &\leq \text{Min}(N(x), N(y)) \\ &= N(\text{Max}(x, y)) \\ &\leq N(A(x, y)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 4.6 Sean $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una t-norma y N una negación ordinaria. Se cumple que si $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ son N -contradictorios, entonces $T \circ (\mu \times \sigma)$ es N -autocontradictorio.

Proposición 4.7 Sea N una negación ordinaria, y sea $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un operador de agregación que cumple:

- (A1) Es conmutativo
- (A2') $N \circ A \leq A \circ (N \times N)$
- (A3) Si $x_1, x'_1, x_2, x'_2 \in [0, 1]$ con $x_1 < x'_1$ y $x_2 < x'_2$, entonces

$$A(x_1, x_2) < A(x'_1, x'_2)$$

Si $A \circ (\mu \times \sigma)$ es N -autocontradictorio, entonces $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ son N -contradictorios.

Demostración: Por hipótesis, para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} A(\mu(x), \sigma(x)) &\leq N(A(\mu(x), \sigma(x))) \\ &\leq A(N(\mu(x)), N(\sigma(x))) \quad (1) \end{aligned}$$

Por reducción al absurdo, supongamos que existe un $x_0 \in X$ tal que $\mu(x_0) > N(\sigma(x_0))$.

Por ser N ordinaria tenemos también $\sigma(x_0) > N(\mu(x_0))$. Además, por A1 y A3 tenemos que

$$\begin{aligned} A(\mu(x_0), \sigma(x_0)) &> A(N(\sigma(x_0)), N(\mu(x_0))) \\ &= A(N(\mu(x_0)), N(\sigma(x_0))) \end{aligned}$$

Lo que contradice (1) $\blacksquare$

El siguiente lema proporciona operadores de agregación cumpliendo la condición A2'.

Lema 4.8 Sea $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un operador de agregación tal que para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$: $A(x, y) \geq \text{Max}(x, y)$. Entonces A cumple la propiedad A2'.

Demostración: Sea N una negación ordinaria y sean $x, y \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} A(N(x), N(y)) &\geq \text{Max}(N(x), N(y)) \\ &= N(\text{Min}(x, y)) \\ &\geq N(A(x, y)) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 4.9 Sea $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una t-conorma que cumple A3 y N una negación ordinaria. Se cumple que si $S \circ (\mu \times \sigma)$ es N -autocontradictorio, entonces $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ son N -contradictorios.

Atendiendo a las proposiciones anteriores, se obtiene finalmente el siguiente resultado.

Teorema 4.10 Sean N una negación y $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un operador de agregación cumpliendo A1, A3, y

$$N \circ A = A \circ (N \times N)$$

Entonces son equivalentes:

- (i) $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ son N -contradictorios
- (ii) $A \circ (\mu \times \sigma)$ es N -autocontradictorio

Demostración: Basta aplicar las proposiciones anteriores. $\blacksquare$

El siguiente resultado garantiza que existen negaciones fuertes y operadores de agregación en las condiciones del teorema anterior.

Proposición 4.11 Sea N una negación fuerte. Entonces, existe un operador de agregación A , verificando A1, A3 y

$$N \circ A = A \circ (N \times N)$$

Demostración: Al ser N una negación fuerte, sabemos que existe un automorfismo de orden φ en $[0, 1]$ tal que $N = \varphi^{-1} \circ (1 - \varphi)$. Definimos el operador, que diremos asociado a N , A_N para cada $x_1, x_2 \in [0, 1]$, de la forma:

$$A_N(x_1, x_2) = \varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} \right)$$

Se comprueba que dicho operador cumple las condiciones requeridas. $\blacksquare$

Las proposición 4.7 y 4.11 facilitan el siguiente resultado que proporciona mecanismos para obtener medidas de T -incompatibilidad a través de medidas de N -autocontradicción.

Teorema 4.12 Sea $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una t-norma continua con N_T su negación asociada. Sea C_{N_T} una medida de N_T -autocontradicción. Se verifica:

(i) Si N_T es una negación ordinaria, entonces la función $I_T : [0, 1]^X \times [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ definida para cada $\mu, \sigma \in [0, 1]^X$ por

$$I_T(\mu, \sigma) = C_{N_T}(\text{Max}(\mu, \sigma))$$

es una medida de T -incompatibilidad.

(ii) Si N_T es una negación fuerte, entonces la función $I_T : [0, 1]^X \times [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$I_T(\mu, \sigma) = C_{N_T}(A_{N_T}(\mu, \sigma)),$$

donde A_{N_T} es el operador asociado a N_T , es una medida de T -incompatibilidad.

Finalmente, veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.13 Dada la t-norma de Lukasiewicz, W , su negación asociada resulta ser $N_W(x) = 1 - x$, que es la negación fuerte usual, cuyo automorfismo generador es $\varphi(x) = x$, entonces $A(x, y) = \frac{x+y}{2}$.

Aplicando el teorema anterior a la medida de N -autocontradicción C_N del ejemplo 2.6 obtenemos la medida de W -incompatibilidad (Fig. 4)

$$I_W(\mu, \sigma) = \text{Max} \left(0, 1 - \sup_{x \in X} (\mu(x) + \sigma(x)) \right)$$

Obsérvese que $I_W^d(\mu, \sigma) = \frac{I_W(\mu, \sigma)^{1/2}}{\sqrt{2}}$ donde I_W^d es la medida de W -incompatibilidad generada por la distancia euclídea presentado en el ejemplo 3.7.

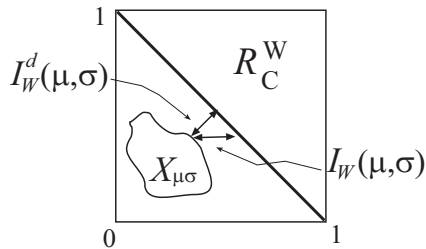


Figura 4: Medidas de W -incompatibilidad I_W e I_W^d .

5 Conclusiones

Este trabajo se ha dedicado primeramente, y como un paso previo para nuestro objetivo, a la contradicción entre conjuntos borrosos, repasando algunos conceptos necesarios e introduciendo axiomáticamente las medidas de N -autocontradicción y de N -contradicción, dependientes de una negación dada N . En segundo lugar, recordando el concepto de T -incompatibilidad de

dos conjuntos, y siguiendo la misma línea que en el caso de la contradicción, se han definido las medidas de T -incompatibilidad para una t-norma cualquiera; algunas de estas medidas se han obtenido al considerar geoméricamente las regiones de T -incompatibilidad y T -compatibilidad. Finalmente, se ha estudiado la relación entre incompatibilidad y contradicción, lo que ha permitido la construcción de medidas de incompatibilidad a partir de medidas de contradicción.

Referencias

- [1] T. Calvo, A. Kolesarová, M. Komorníková and R. Mesiar. "Aggregation operators: properties, Classes and Construction Methods" in *Aggregation operators: New trends and applications*. Eds. T. Calvo, R. Mesiar and G. Mayor, Physica-Verlag (Heilderberg, New York), 1-104, 2002.
- [2] E. Castiñeira, S. Cubillo and S. Bellido. "Degrees of Contradiction in Fuzzy Sets Theory", *Proceedings IPMU*, Annecy (France), 171-176, 2002.
- [3] E. Castiñeira, S. Cubillo and S. Bellido. "Contradicción entre dos conjuntos", *Actas ESTYLF*, León (Spain), 379-383 (in Spanish), 2002.
- [4] S. Cubillo and E. Castiñeira. "Measuring contradiction in fuzzy logic". *International Journal of General Systems*, **34**, No. 1, 39-59, February 2005.
- [5] F. Esteva, X. Domingo. "Sobre funciones de negación en $[0,1]$ ", *Stochastica*, **IV (2)**, 141-165, 1980.
- [6] H.T. Nguyen and E.A. Walker. *A first course in Fuzzy Logic*, CRC, Boca-Raton (Florida), 1997.
- [7] E. Trillas. "Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos", *Stochastica III/1*, 47-60 (in Spanish), 1979. Reprinted (English version) (1998) in *Advances of Fuzzy Logic* (eds. S. Barro et al-Universidad de Santiago de Compostela), 31-43, 1998.
- [8] E. Trillas, C. Alsina, J. Jacas. On Contradiction in Fuzzy Logic, *Soft Computing* **3 (4)**, 197-199, 1999.
- [9] E. Trillas, S. Cubillo. "On non-contradictory Input/Output couples in Zadeh's CRI", *Proceedings of NAFIPS 1999*, 28-32, New York, 1999.

PARALELIZACIÓN DE LA HEURÍSTICA FANS USANDO BÚSQUEDA MÚLTIPLE

Carlos Cruz Corona Grupo de Modelos de Decisión y Optimización Universidad de Granada carloscruz@decsai.ugr.es	David Pelta Grupo de Modelos de Decisión y Optimización Universidad de Granada dpelta@decsai.ugr.es	Alejandro Sancho Royo Grupo de Modelos de Decisión y Optimización Universidad de Granada alejandrosanchoroyo@gmail.com	José Luis Verdegay Grupo de Modelos de Decisión y Optimización Universidad de Granada verdegay@decsai.ugr.es

Resumen

En este trabajo presentamos varias estrategias paralelas del tipo de búsqueda múltiple y se aplican a FANS, una conocida heurística basada en técnicas de la Soft Computing. Los procedimientos se codificaron en C++ bajo PVM en un esquema de tiempo compartido y se prueban ante el problema de la p-mediana.

Palabras Clave: metaheurísticas, optimización, paralelismo, Soft Computing.

1 INTRODUCCIÓN

En la literatura aparecen varias propuestas que intentan la paralelización de metaheurísticas [1, 4, 11] con muy buenos resultados. En particular, se han incrementado los trabajos relacionados con los métodos de búsqueda múltiple.

De ellos, se destaca últimamente el diseño de implementaciones asíncronas cooperativas multinivel [3]. En estas se ha observado que la cooperación debida al intercambio de información no solo mejora el factor de aceleración sino que modifica los patrones de búsqueda de los programas obteniendo un alto rendimiento [2].

En este trabajo presentamos varias estrategias cooperativas paralelas multinivel que van desde un mecanismo simple a otras que hacen uso de la memoria para mejorar el proceso de búsqueda y cuyos mecanismos de cooperación se han modelados con técnicas de Soft Computing.

2 FANS, HEURÍSTICA DIFUSA

FANS (*Fuzzy Adaptive Neighborhood Search*) [7], se define como un método de búsqueda por entornos, adaptable y difuso. Es de búsqueda por entornos porque

realiza transiciones desde una solución de referencia a otra de su entorno, produciendo “trayectorias” o caminos. Es adaptable porque su comportamiento varía en función del estado de la búsqueda. Y es difuso porque las soluciones son evaluadas, además de la función objetivo, mediante una valoración difusa que representa algún concepto subjetivo.

FANS está basado en cuatro componentes principales [7, 5]:

- un Operador de Modificación, para construir soluciones.
- una Valoración Difusa, para cualificarlas.
- un Administrador de Operación, para adaptar el comportamiento o características del operador.
- un Administrador de Vecindario, para generar y seleccionar una nueva solución.

$$Fans(NS, Oper, OS, \mu(), Pars, (cond, accion)) \quad (1)$$

donde NS es el *Administrador de Vecindario*, $Oper$ es el operador utilizado para construir soluciones, OS es el *Administrador de Operación* y $\mu()$ es una valoración difusa o subjetiva.

Además, $Pars$ representa un conjunto de parámetros y el par $(cond, accion)$ es una regla de tipo *IF cond THEN accion* que se utiliza para detectar y actuar en consecuencia cuando la búsqueda se ha estancado.

En el esquema de *FANS*, el cual se muestra en la Fig. 1 se puede observar que cada iteración comienza con una llamada al administrador de vecindario NS con los siguientes parámetros: la solución actual S_{cur} , la valoración difusa $\mu()$ y el operador de modificación $Oper$. Como resultado de la ejecución de NS pueden

```

Procedimiento FANS:
Begin
  /*  $\mathcal{O}$  : el operador de modificacion */
  /*  $\mu()$  : la valoracion difusa */
  /*  $S_{cur}, S_{new}$  : soluciones */
  /* NS: el administrador de vecindario */
  /* OS: el administrador de operacion */
  Inicializar Variables();
  While ( not-fin ) Do
    /* ejecutar el administrador de vecindario NS */
     $S_{new} = NS(\mathcal{O}, \mu(), S_{\sqcap \nabla})$ ;
    If ( $S_{new}$  es "buena" en terminos de  $\mu()$ ) Then
       $S_{cur} := S_{new}$ ;
      adaptar-Valoracion-Difusa( $\mu(), S_{cur}$ );
    Else
      /* No fue posible encontrar una solucion buena con */
      /* el operador actual */
      /* Sera modificado */
       $\mathcal{O} := OS\text{-}ModificarOperador(\mathcal{O})$ ;
    Fi
    If (HayEstancamiento?()) Then
      Escape();
    Fi
  Od
End.

```

Figura 1: Esquema de *FANS*

ocurrir 2 cosas: se pudo encontrar una solución vecina aceptable S_{new} (en términos de $\mu()$), o no se pudo.

En el primer caso, S_{new} pasa a ser la solución actual y los parámetros de $\mu()$ son adaptados. Por ejemplo, si $\mu()$ representa la similaridad respecto a la solución actual, entonces la valoración difusa debe ser adaptada para reflejar este cambio en la solución de referencia. Si *NS* no pudo retornar una solución aceptable, es decir, en el vecindario inducido por el operador no se pudo encontrar una solución suficientemente buena, entonces se aplica el nuevo mecanismo de escape: se ejecuta el administrador de operación *OS* el cual retornara una versión modificada del operador *Oper*. La próxima vez que *NS* se ejecute, dispondrá de un operador modificado para buscar soluciones, y por lo tanto es posible que el resultado sea diferente.

La condición *HayEstancamiento?()* será verdadera cuando (por ejemplo) se hayan realizado *Tope* llamadas a *OS* sin haber obtenido mejoras en la solución actual. Es decir, se probaron varios operadores y no se obtuvieron mejoras. En este caso, se ejecutará el procedimiento *Escape()*, se evaluará el costo de la nueva solución y se adaptará la valoración difusa $\mu()$. Posteriormente, se reinicia la búsqueda.

El criterio de parada del algoritmo se basa en la verificación de una condición externa. Por ejemplo, el algoritmo finaliza cuando el número de evaluaciones de la función de costo alcanza cierto límite o cuando se realizaron un número predeterminado de evaluaciones.

El comportamiento global de *FANS* depende de la definición de sus componentes y de la interacción entre ellos. A través de la utilización de diferentes defini-

ciones y parámetros para la valoración difusa se consigue que el algoritmo se comporte de diferentes maneras, lo que da lugar, en consecuencia, a variaciones en los resultados que se puedan obtener.

Por ejemplo puede tener un Comportamiento tipo Caminos Aleatorios. Para obtenerlo, todo lo que se necesita es considerar cualquier solución del vecindario como aceptable. Por lo tanto, utilizando una valoración difusa con $\mu(f(s), f(\hat{s})) = 1, \forall \hat{s} \in \mathcal{N}(f)$, cualquier solución del vecindario operacional tendrá la opción de ser seleccionada. De esta manera, *FANS* se comportará como un método que produce caminos aleatorios.

Para lograr un Comportamiento tipo Hill Climbing es necesario utilizar una valoración difusa tal que $\mu(s, \hat{s}) = 1$ if $f(\hat{s}) < f(s)$ y asignar $\lambda = 1$. De esta manera, únicamente serán consideradas como aceptables aquellas soluciones que mejoren el costo actual. El método de Hill Climbing termina cuando se alcanza un óptimo local. En el contexto de *FANS*, la obtención de un método multiarranque es directo.

FANS también puede plantearse como una heurística en sí misma capaz de mostrar una variedad de comportamientos muy amplia. Este potencial queda claro si consideramos que la valoración difusa representa el criterio de un decisor buscando soluciones para un problema.

En este trabajo, la valoración difusa se basa en el costo de la solución actual o de referencia y representa la noción de aceptabilidad, o sea, se tendrá un conjunto difuso de soluciones aceptables. De esta manera, aquellas soluciones vecinas que mejoren el costo de referencia son consideradas como aceptables con grado 1. Aquellas soluciones con un costo peor que cierto umbral tendrán grado 0 de aceptabilidad. Por tanto, las soluciones aceptables tendrán grados de pertenencia que varían entre $[0,1]$.

FANS se mueve entre soluciones que satisfacen la idea de aceptabilidad con al menos cierto grado λ , y variaciones en este parámetro posibilitan al algoritmo lograr el comportamiento de diferentes esquemas clásicos de búsqueda local. Así, por ejemplo, para un ajuste de $\lambda = 1$, *FANS* se comportará como un esquema ávido o "hill climber", donde las soluciones que mejoren el costo serán consideradas como aceptables con un alto grado. Por otro lado, para un ajuste de $\lambda = 0$, *FANS* producirá caminos aleatorios. Diferentes valores de ajuste para *FANS* permitirán entonces tener agentes con diferentes comportamientos, con los cuales se pueden construir fácilmente diferentes esquemas de búsqueda.

FANS se ha aplicado con éxito a diferentes problemas

de optimización, entre los cuales se encuentran el problema de la mochila simple y la mochila con múltiples restricciones, la minimización de funciones reales de complicada definición estándar para optimización y el problema de predicción de estructura de proteínas [6, 8, 9].

3 ESTRATEGIAS DE PARALELIZACIÓN

La idea de este trabajo puede resumirse imaginando un comité de expertos encargado de resolver algún problema concreto, y dirigido por un coordinador que conoce los aspectos generales relativos al problema en cuestión y las capacidades y características de cada uno de los miembros del equipo. Además, este coordinador sabe cuándo puede considerarse aceptable una solución obtenida.

Cada miembro del comité es un experto en resolver el problema mediante un tratamiento específico, que puede ser compartido por más de uno. En este contexto, cada uno de los expertos del comité trabaja de forma independiente; pero todos al mismo tiempo ejecutando algoritmos de optimización. O sea, ellos poseen el conocimiento necesario para resolver un problema de optimización específico y a los cuales se les envía desde el coordinador directivas de ajuste de su comportamiento.

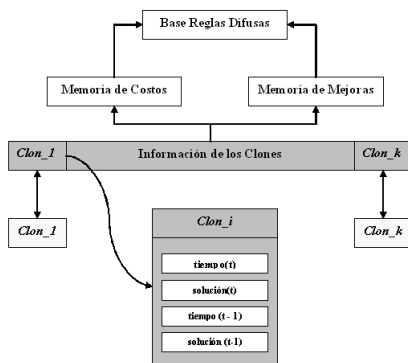


Figura 2: Esquema de la Estrategia

La idea del comité se diseña como una estrategia cooperativa multinivel, organizada jerárquicamente en dos niveles, bajo un esquema de coordinación de planificación centralizada (Ver Figura 2), en la que en el nivel superior actúa un agente coordinador, y en el segundo nivel actúan agentes resolvedores sin comunicación entre ellos y cuya función básica es ejecutar el algoritmo FANS para solucionar la instancia del problema en cuestión.

La comunicación entre el coordinador y los agentes

resolvedores se realiza a través de mensajes de intercambio donde los agentes envían la información sobre su desempeño y reciben órdenes de adaptación; el coordinador recibe y almacena comportamientos y recupera medidas de desempeño que usa para adaptar su Base de Reglas interna. Los agentes se encuentran en ejecución resolviendo el problema, enviando los resultados y esperando las directivas del coordinador.

El coordinador almacena los costos $f(s^t)$ producidos por cada algoritmo y un historial de las tasas de mejoras definido por la siguiente ecuación:

$$\Delta_f = \frac{(f(s^t) - f(s^{t-1}))}{(time^t - time^{t-1})} \quad (2)$$

de forma tal que, ante un nuevo informe, calcula la “calidad” de la solución reportada, en términos del historial almacenado y donde $time^t - time^{t-1}$ representa el tiempo transcurrido entre dos informes consecutivos.

Entonces, los valores Δ_f y $f(s^t)$ y son guardados en arreglos ordenados separados a longitud fija o “memorias” M_{Δ_f}, M_f .

El coordinador comprueba qué agente proporciona nueva información y decide si su comportamiento necesita ser adaptado. En este caso, usa su Base de Reglas para obtener un nuevo comportamiento que será enviado al agente. O sea, en la Base de Reglas a través de reglas basadas en técnicas de Soft Computing se modelan las diferentes estrategias de cooperación que se presentan a continuación:

1. Indep, Búsqueda Independiente:

Esta regla construye un esquema no cooperativo, donde los agentes resolvedores funcionan de forma independiente, sin intercambio de información.

2. Regla SM, Sin Memoria:

IF la solución del *agente_i* es **peor**
que la mejor vista hasta el momento
THEN enviarle al *agente_i* la mejor solución.

Bajo esta regla cooperativa si el *agente_i* reporta una solución *peor* respecto a la mejor de todas las que ya se han visto entonces se le indica que se “mueva” en el espacio de búsqueda asignándole como solución de reinicio esa mejor solución. Entiéndase como *peor* que el costo de la solución obtenida por el *agente_i* sea mayor o menor a la mejor de todas las ya vistas, según se maximice o minimice en el problema. Esta es una reglas “crisp” y no se hace uso de la memoria, al no tener en cuenta el historial del comportamiento de los agentes.

3. Regla MR1, con Memoria e independiente de los agentes:

IF la calidad de la solución del *agente_i* es **mala**
AND razón de mejora del *agente_i* es **mala**
THEN enviarle al *agente_i* la mejor solución.

La etiqueta difusa *mala* se define por la siguiente función de pertenencia:

$$\varphi(x, \alpha, \beta) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \rightarrow x \succ \beta \\ \frac{(\beta-x)}{(\beta-\alpha)} & \rightarrow \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \rightarrow x \prec \alpha \end{array} \right\} \quad (3)$$

Donde x es el rango percentil de la variable que se trate, ya sea el costo de la solución, $f(s^t)$, o la tasa de mejora, Δ_f , de entre los valores almacenados en la memoria. Los otros parámetros fueron fijados empíricamente a los siguientes valores: $\alpha = 10$ y $\beta = 20$.

O sea, si el *agente_i* reporta soluciones “malas” respecto a las anteriores y si su tasa de mejora entre dos reportes consecutivos es de las peores, lo que se hará es “moverlo” en el espacio de búsqueda asignándole la mejor solución vista por el Coordinador hasta ese momento.

De esta forma si denominamos por μ_{costo} y μ_{tasa} a los valores obtenidos en la función de pertenencia para $x = f(s^t)$ y $x = \Delta_f$, el antecedente de las reglas se calcula como:

$$\min(\mu_{costo}, \mu_{tasa}) \quad (4)$$

y el consecuente se produce si este valor anterior es mayor que un cierto umbral fijado empíricamente en 0.7. Esta regla es independiente del tipo de agentes resolutores que use la estrategia.

4. Regla RR1, retrasa el uso de la regla MR1:

IF tiempo de ejecución
del *agente_i* $\leq \frac{1}{3}$ tiempo total de ejecución
THEN usar la Regla SM.
ELSE IF tiempo de ejecución
del *agente_i* $> \frac{1}{3}$ tiempo total de ejecución
THEN usar la Regla MR1.

Esta regla se define para permitir a los agentes resolutores que se estabilicen en su búsqueda evitando de este modo convergencias prematuras hacia las zonas de los mejores valores encontrados al inicio y por tanto permitiendo una mayor diversificación en la estrategia durante esta fase. Por tanto, lo que se hace es demorar el uso de la Regla

MR1 un tiempo determinado, en este caso un tercio del tiempo total de ejecución asignado, y mientras se usará la Regla SM.

5. RR1*, retrasa el uso de la regla MR1 con un esquema Indep:

IF tiempo de ejecución
del *agente_i* $\leq \frac{1}{3}$ tiempo total de ejecución
THEN usar esquema Indep.
ELSE IF tiempo de ejecución
del *agente_i* $> \frac{1}{3}$ tiempo total de ejecución
THEN usar la Regla MR1.

Esta regla es parecida a la anterior, solo que en vez de usar la regla SM en combinación con la regla MR1, se usa el esquema independiente, Indep, al inicio de la búsqueda.

4 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

El objetivo de los experimentos es evaluar el rendimiento de la estrategia en términos de la calidad de la solución cuando esta se aplica a la instancias RL1400[10] del problema de la p-mediana.

Todos los experimentos se realizaron en un cluster de ordenadores bajo el paquete de software PVM (Parallel Virtual Machine). La configuración del cluster de computadores usado es la siguiente: 8 ordenadores AMD Athlon duales, con 2 GHz, 256 k en la memoria caché, y 2 GBytes de RAM, con el Sistema Operativo Linux Fedora Core release 3.

El tiempo de cálculo asignado para la búsqueda, t_{max} , es igual a 240 segundos [3]. Se hacen 10 repeticiones para cada regla y mediana. El rendimiento de la estrategia se mide en términos de la calidad de la solución y se calcula por el error con respecto a la mejor solución conocida.

$$Error = 100 * \frac{MejorCosto - CostoObtenido}{MejorCosto} \quad (5)$$

La Tabla 1 muestra los mejores resultados obtenidos para diferentes medianas (p) y la Tabla 2 presenta el número de casos con $error \leq 1,5$, donde los valores entre paréntesis en la fila Total indican el número de medianas diferentes que cumplen este criterio. La columna Indep muestra el esquema independiente y las demás las diferentes estrategias cooperativas.

El primer análisis se enfoca en comparar la columna Indep vs. la columna SM, o sea entre una estrategia independiente vs. la estrategia cooperativa. Podemos

Tabla 1: Valores mínimos					
p	Indep	SM	MR1	RR1	RR1*
10	0,38	0,00	0,00	0,00	0,00
20	2,13	0,23	0,03	0,08	0,07
30	5,19	0,54	0,33	0,45	0,75
40	6,57	0,71	0,55	0,30	0,41
50	7,78	0,84	0,70	0,69	0,51
60	4,18	1,90	0,68	1,16	0,98
70	1,74	1,49	1,18	1,46	1,04
80	1,14	1,87	1,08	1,97	1,05
90	1,10	1,55	1,04	0,80	1,31
100	1,46	1,84	0,97	1,78	1,02

Tabla 2: Número de casos con $error \leq 1,5$						
p	Indep	SM	MR1	RR1	RR1*	Total
10	9	9	10	8	10	46
20	0	7	8	8	9	32
30	0	8	7	7	10	32
40	0	4	8	6	3	21
50	0	2	2	2	4	10
60	0	0	4	1	8	13
70	0	1	4	1	2	8
80	4	0	4	0	7	15
90	1	0	1	1	2	5
100	1	0	1	0	2	4
Total	15(4)	31(6)	49(10)	34(8)	57(10)	-

observar que el uso del esquema cooperativo mas simple, SM, permite una reducción significativa del error respecto al independiente, Indep. Esto se mantiene para casi todas las medianas, excepto las de 80-100. Además la Tabla 2 muestra que la estrategia SM logra un mayor número de casos. Con estos resultados son una indicación de que la estrategia cooperativa SM es mas robusta que la independiente, Indep.

El segundo análisis se orienta a comparar los resultados obtenidos entre dos estrategias cooperativas SM vs. MR1, o sea entre una estrategia cooperativa que no usa la memoria y una que hace uso de ella. Se ve que con la estrategia MR1 se alcanza un mejor comportamiento tanto porque obtiene menores valores de error como por el número de casos. Se puede concluir que el uso de la memoria contribuye a encontrar soluciones de mas calidad y a reforzar la robustez del esquema.

En un tercer análisis se compara la estrategia MR1 vs. RR1 y vs. RR1*, o sea entre la estrategia que siempre hace uso de la memoria vs. una estrategia que combina no usar la memoria al inicio de la búsqueda y usarla mas tarde, y vs. una estrategia que combina esta vez no usar cooperación al inicio de la búsqueda y usar cooperación con memoria mas tarde, como formas de evitar las convergencias prematuras que pueden producirse. Se ve que los mejores resultados se obtienen bajo RR1* ya sea en la calidad de las soluciones como en una mayor robustez. No es así bajo RR1 que no logra superar los resultados obtenidos por la estrategia MR1. Todo esto indica que con RR1* se alcanza un mayor equilibrio global entre la diversificación necesaria al inicio de la búsqueda y una mayor explotación

en los finales.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Ciencia y Tecnología bajo los Proyectos TIC-2002-04242-C03-02 y SINTA-CC-TIN 2004-01411.

Referencias

- [1] E. Alba, editor. *Parallel Metaheuristics: A New Class of Algorithms*. Wiley Publisher, 2005.
- [2] T. Crainic and M. Gendreau. Cooperative parallel tabu search for capacitated network design. *Journal of Heuristics*, 8:601–627, 2002.
- [3] T. Crainic, M. Gendreau, P. Hansen, and N. Mladenovic. Cooperative parallel variable neighborhood search for the p-median. *Journal of Heuristics*, 10:293–314, 2004.
- [4] V. Cung, S. Martins, C. Ribeiro, and C. Roucairol. *Essays and Surveys in Metaheuristics*, chapter Strategies for the Parallel Implementation of Metaheuristics, pages 263–308. Kluwer Academic Publisher, 2001.
- [5] D. Pelta, A. Blanco, and J. Verdegay. Introducing fans: a fuzzy adaptive neighborhood search. In *Eighth International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, IPMU 2000*, volume 3, pages 1349–1355, 2000.
- [6] D. Pelta, A. Blanco, and J. Verdegay. A fuzzy valuation-based local search framework for combinatorial problems. *Journal of Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2(1):177–193, 2002.
- [7] D. Pelta, A. Blanco, and J. Verdegay. *Fuzzy Sets based Heuristics for Optimization*, chapter Fuzzy Adaptive Neighborhood Search: Examples of Application. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Physica-Verlag, 2003.
- [8] D. Pelta and N. Krasnogor. Measuring protein structure similarities by means of the universal similarity metric. *Bioinformatics*, 7(20):1015 – 1021, 2004.
- [9] D. Pelta, N. Krasnogor, C. Bousono-Calzon, J. Burke, and J. Verdegay. Applying a fuzzy sets-based heuristic for the protein structure prediction problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 152(1):103–123, 2005.

- [10] G. Reinelt. Tsp-lib: A traveling salesman problem library. *ORSA Journal on Computing*, 3:376–384, 1991.
- [11] P. P. S. Duni Ekisoglu and M. Resende. *Models for Parallel and Distributed Computation - Theory, Algorithmic Techniques and Applications*, chapter Parallel metaheuristics for combinatorial optimization. Kluwer Academic, 2002.

ÍNDICES DE CORRELACIÓN ENTRE SEÑALES BASADOS EN CUANTIFICACIÓN BORROSA

Félix Díaz Hermida,
Departamento de Informática
Universidad de Oviedo
diazfelix@uniovi.es

Purificación Cariñena y Alberto J. Bugarín
Departamento de Electrónica y Computación
Universidad de Santiago de Compostela
{puri, alberto}@dec.usc.es

Resumen

En este trabajo presentamos dos modelos de cuantificador de similaridad y su utilización en el campo de la representación de conocimiento temporal para evaluar el índice de correlación borrosa entre dos señales. Además, proponemos un mecanismo para su evaluación eficiente.

Palabras Clave: cuantificadores borrosos, índices de correlación, medidas de similaridad, reglas temporales borrosas.

1 INTRODUCCIÓN

El paradigma de las Reglas Temporales Borrosas (RTB) [1] permite describir el comportamiento de sistemas dinámicos complejos (aquellos cuyo estado evoluciona con el tiempo) de una manera mucho más directa y rica en expresividad que la que permite cualquier regla borrosa convencional. Ello ha permitido su utilización exitosa en control inteligente (por ejemplo, en robótica para la implementación de comportamientos como la evitación de obstáculos móviles, seguimiento de contornos o detección de marcas en el entorno) o en la monitorización inteligente en el ámbito de la medicina y en otros campos.

De forma general, en una RTB se expresa conocimiento sobre la ocurrencia de eventos temporales, evaluando su grado de cumplimiento en una determinada referencia o ventana temporal. Dichos eventos se describen en las Propositiones Temporales Borrosas (PTB) que componen las reglas, y pueden referirse a los valores que toman diversas señales (“la temperatura *más alta* de la última media hora”), a relaciones entre ellos (“la presión medida por el sensor 1 fue *poco mayor que* la del sensor 2”) o incluso a operadores que actúan so-

bre dichas señales (“el *promedio* de las temperaturas recientes ha sido elevado”, “el *último* valor bajo de presión”). Por otro lado, también el marco temporal de ocurrencia puede definirse mediante una referencia absoluta (“a las 15:00”), mediante una referencia relativa al momento actual (“*hace media hora*”) o de forma relativa a la ocurrencia de otros eventos (“*poco antes del inicio de un episodio de fiebre*”).

La riqueza expresiva de las PTB viene dada en origen porque tratan sobre un histórico de señales que evolucionan con el transcurso del tiempo (y no sobre valores instantáneos de las mismas), lo que permite realizar procesos de descripción y razonamiento de mayor complejidad. El modelo de RTB no es un modelo cerrado y permite incorporar nuevos operadores que den lugar a nuevos tipos de PTB útiles para la descripción de algún evento de relevancia. En este punto incide precisamente este trabajo: la propuesta de modelos (basados en cuantificación borrosa) para los nuevos operadores borrosos de correlación entre señales, que permiten medir el grado de correlación existente entre ellas en el marco definido por una ventana temporal. El objetivo es incorporar al modelo expresiones como “*en la última media hora los valores anormalmente altos de presión y los valores de temperaturas altas han estado asociados*” o “*en la década de los 90 la correlación entre los valores altos en el mercado de acciones y los tipos de interés bajo ha sido alta*”, donde los operadores de correlación indicados ligan conjuntos borrosos (señales filtradas, marcos temporales, episodios de ocurrencia de otros eventos,...). Para la definición de estos índices borrosos de correlación aplicaremos la metodología de Mecanismos de Borrosificación de Cuantificadores (MBC) [4], que ya ha demostrado su validez en la obtención de modelos coherentes para los operadores borrosos de cuantificación. Partiendo de definiciones habituales de índices utilizadas en muy diversos ámbitos de aplicación (como la recuperación de información o la estadística), plantearemos su generalización por medio

de cuantificadores semi-borrosos. A partir de ahí, simplemente aplicando un MBC de comportamiento teórico adecuado, dispondremos de un modelo borroso que generaliza los operadores nítidos iniciales.

2 CUANTIFICADORES BORROSOS

Las Propositiones Cuantificadas Borrosas (PCB) incluyen algún cuantificador borroso sobre una serie de conjuntos o propiedades borrosas. Su evaluación consiste en determinar su grado de verificación para un universo dado.

Siguiendo el marco propuesto en [4], un cuantificador borroso n-ario $\tilde{Q}$ sobre un conjunto $E \neq \emptyset$ es una aplicación $\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow [0, 1]$ que a cada $X_1, \dots, X_n \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$ le asigna un resultado gradual $\tilde{Q}(X_1, \dots, X_n) \in [0, 1]$ ($\tilde{\mathcal{P}}(E)$ es el conjunto de partes borrosas de E).

Como paso previo a la definición de cuantificadores borrosos se definen los *cuantificadores semi-borrosos*, que se pueden entender como una generalización de los cuantificadores lingüísticos en el sentido de Zadeh [6]. Formalmente, un cuantificador semi-borroso n-ario sobre un conjunto $E \neq \emptyset$ es una función $Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow [0, 1]$ que asigna un resultado gradual $Q(Y_1, \dots, Y_n) \in [0, 1]$ a cada par de conjuntos nítidos $(Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{P}(E)^n$.

Por ejemplo, el cuantificador semi-borroso asociado a la expresión “*casi todos*” puede definirse como:

$$\text{casi\_todos}(Y_1, Y_2) = \begin{cases} S_{0.6, 0.8} \left(\frac{|Y_1 \cap Y_2|}{|Y_1|} \right) & Y_1 \neq \emptyset \\ 1 & Y_1 = \emptyset \end{cases}$$

donde $S_{0.6, 0.8}(x) \rightarrow [0, 1]$ es la función S de Zadeh mostrada en la figura 1.

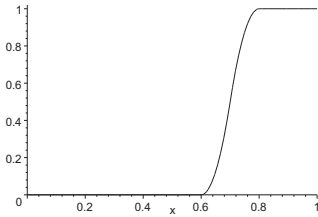


Figura 1: Función S de Zadeh de parámetros 0.6, 0.8.

Aunque los cuantificadores semi-borrosos son más intuitivos y fáciles de definir que los borrosos, no resuelven por sí mismos el problema de evaluar las PCBs. Para ello, es necesario definir un MBC [4] que los convierta en cuantificadores borrosos, es decir, una función de la forma:

$$\mathcal{F} : (Q : \mathcal{P}(E)^n \rightarrow [0, 1]) \rightarrow (\tilde{Q} : \tilde{\mathcal{P}}(E)^n \rightarrow [0, 1])$$

En este trabajo utilizaremos el MBC¹ definido en [3]:

$$\mathcal{F}^I(Q)(X_1, \dots, X_n) = \int_0^1 \dots \int_0^1 Q((X_1)_{\geq \alpha_1}, \dots, (X_n)_{\geq \alpha_n}) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \quad (1)$$

donde $(X_i)_{\geq \alpha_i}$ representa el alfa-corte α_i del conjunto borroso $X_i \in \tilde{\mathcal{P}}(E)$; esto es, $(X_i)_{\geq \alpha_i} = \{e \in E : \mu_{X_i}(e) \geq \alpha_i\}$.

A continuación describimos brevemente algunas de las propiedades más relevantes que verifica este modelo y que están directamente relacionadas con comportamientos deseables para los índices de correlación. La propiedad de *generalización correcta* establece que los resultados que se obtienen cuando se aplica el MBC $\mathcal{F}^I$ a conjuntos nítidos coinciden con los de aplicar, directamente, el cuantificador semi-borroso. Las propiedades de *negación externa*, *interna* y *dualidad* aseguran un comportamiento adecuado con respecto a las relaciones de negación (e.g.; se obtiene el mismo resultado al evaluar las expresiones “*algún individuo alto no es rubio*” y “*es falso que todos los individuos altos sean rubios*”). Las propiedades de *monotonía en los argumentos* y *monotonía en los cuantificadores* aseguran que el MBC preserve las relaciones de monotonía que se cumplen en el caso semi-borroso. Por último, el modelo también cumple las propiedades de continuidad en los argumentos y continuidad en los cuantificadores en el caso finito. Se puede consultar [3] para un análisis teórico detallado de las propiedades de este modelo.

2.1 CUANTIFICACIÓN EN REGLAS TEMPORALES BORROSAS

Uno de los pasos fundamentales en el proceso de razonamiento en RTB es la obtención del grado de cumplimiento de las PTB que las componen, considerando la historia de valores de las señales, las relaciones entre ellos (generalmente expresadas mediante operadores temporales o espaciales), y la referencia temporal que enmarca la ocurrencia del evento de interés (ventana temporal).

El concepto de señal en este contexto debe entenderse en un sentido amplio. Además del significado habitual de señal en procesos de monitorización o control (*presión(t)*, *temperatura(t)*,...) podemos tener otros tipos de señales, como *presiones_altas(t)* o *temperaturas_bajas(t)*, interpretadas como el grado de pertenencia a los conjuntos borrosos *alta/baja* de los valores de *presión/temperatura* en el punto temporal t . El proceso de obtención de estas señales a partir del histórico

¹Este modelo no es un MBC en sentido estricto, pues la integral puede no estar definida para algunos cuantificadores no finitos [3].

de valores de *presión* y *temperatura* se denomina filtrado lingüístico (en el ejemplo, $presiones\_altas(t) = \mu_{alta}(presion(t))$). Para reflejar que estas señales toman valores en el intervalo $[0,1]$ las llamaremos señales borrosas.

El uso de cuantificadores proporcionales en las RTB permite modelar el concepto de persistencia de los eventos en una ventana temporal. Ejemplos de PTB que incluyen cuantificadores proporcionales son:

PTB1: “Alrededor del ochenta por ciento o más de los valores de temperatura fueron altos en el último mes”.

PTB2: “Valores medios o altos de temperatura estuvieron asociados a valores peligrosamente altos de presión en alrededor del ochenta por ciento o más de los puntos temporales en los últimos dos minutos”.

Mientras que el cuantificador universal (*todos*) requiere el cumplimiento completo de la ocurrencia del evento a lo largo de la ventana temporal, y el cuantificador existencial (*en o existe*) requiere la ocurrencia del evento en un punto determinado de la ventana temporal, los cuantificadores proporcionales permiten modelar la ocurrencia parcial del evento. El modelado de cuantificadores proporcionales puede realizarse aplicando cualquier MBC de comportamiento teórico adecuado al cuantificador semi-borroso que se utiliza para describir la expresión cuantificada. Por ejemplo, podríamos calcular el grado de cumplimiento de la PTB1 aplicando el MBC definido en (1) al siguiente cuantificador semi-borroso proporcional:

$$Q(T, S) = \begin{cases} S_{0.6,0.8} \left(\frac{|S \cap T|}{|T|} \right) & T \neq \emptyset \\ 1 & T = \emptyset \end{cases}$$

donde T representa una referencia temporal nítida, S es un conjunto nítido de valores altos de *temperatura*, y $S_{0.6,0.8}(x)$ es una función S de Zadeh que modela la expresión “alrededor del 80% o más”. De este modo, el grado de cumplimiento de PTB1 puede expresarse como $\tilde{Q}(\tilde{T}, \tilde{S}) = \mathcal{F}^I(Q)(T, S)$, e interpretarse como la evaluación del cuantificador borroso $\tilde{Q}$ obtenido tras la aplicación del MBC $\mathcal{F}^I$ al cuantificador semi-borroso Q .

De forma similar, para obtener el grado de cumplimiento de la PTB2 se aplicaría la expresión (1) al siguiente cuantificador semi-borroso proporcional:

$$Q(T, S_1, S_2) = \begin{cases} S_{0.6,0.8} \left(\frac{|S_1 \cap S_2 \cap T|}{|S_1 \cap T|} \right) & S_1 \cap T \neq \emptyset \\ 1 & S_1 \cap T = \emptyset \end{cases}$$

donde S_1 representa la señal nítida *temperatura media o alta* y S_2 representa la señal nítida *presión peligrosamente alta*, T representa la ventana temporal “en los últimos dos minutos” y la función $S_{0.6,0.8}$ modela la expresión “alrededor del ochenta por ciento o más”. Nuevamente el grado de cumplimiento de PTB2 puede expresarse como $\tilde{Q}(\tilde{T}, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2) = \mathcal{F}^I(Q)(T, S_1, S_2)$, e interpretarse como la evaluación del cuantificador borroso $\tilde{Q}$ obtenido tras la aplicación del MBC $\mathcal{F}^I$ al cuantificador semi-borroso Q .

El ejemplo previo nos permite resaltar otro aspecto importante en la evaluación de expresiones temporales. En sistemas en tiempo real, la ventana temporal generalmente está relacionada con el punto temporal actual; es decir, la ventana temporal avanza con la llegada de nueva información al sistema. En la figura 2 se muestra un ejemplo para dos señales borrosas *temperatura* y *presión*. A medida que el tiempo avanza, también lo hace la ventana temporal, y nuevos puntos temporales deben ser considerados. Podemos pensar en un sistema de control en el que los valores de presión y temperatura están continuamente monitorizados y, por cada iteración del control, nuevos valores de señal llegan al sistema haciendo necesario recalcular las condiciones expresadas por las PTB. Este funcionamiento nos permitirá introducir mecanismos para el cálculo eficiente de los índices de correlación.

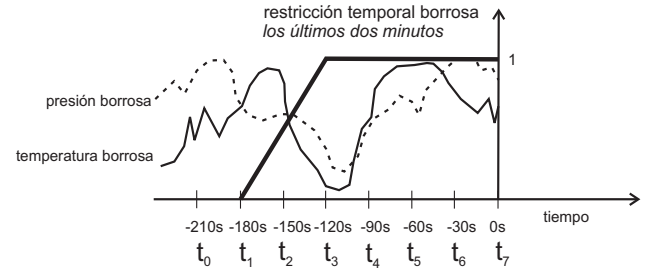


Figura 2: Señales borrosas “presión peligrosamente alta” (trazo discontinuo) y “temperatura media o alta” (trazo continuo) y ventana temporal “los últimos dos minutos”.

3 ÍNDICES DE CORRELACIÓN BORROSOS EN PROPOSICIONES TEMPORALES BORROSAS

Aunque el uso de cuantificadores borrosos mostrado anteriormente resulta de gran interés [2], existen expresiones que no encajan en la semántica mostrada y que podrían ser útiles en ciertas aplicaciones. Así, el grado de verificación de expresiones como:

“En enero, los días lluviosos y los días moderadamente fríos casi siempre coincidieron”.

“En la década de los 90 los valores altos en el mercado de acciones y los tipos de interés bajo estuvieron fuertemente correlacionados”

puede obtenerse evaluando la correlación existente dentro de la ventana temporal entre las correspondientes señales (“días lluviosos” y “días moderadamente fríos”, “valores altos en el mercado de acciones” y “tipos de interés bajo”).

Partiendo de las definiciones de índices nítidos se trata de extenderlos mediante un MBC para obtener índices de correlación borrosos. Dos índices muy habituales son:

$$\begin{aligned} i_{Jaccard}(S_1, S_2) &= \frac{|S_1 \cap S_2|}{|S_1 \cup S_2|} \\ i_{es}(S_1, S_2) &= \frac{|S_1 \cap S_2| + |\overline{S_1} \cap \overline{S_2}|}{|E|} \end{aligned}$$

El rango de valores que producen está en $[0,1]$, por lo que es posible definir de forma directa un cuantificador semi-borroso de correlación basado en cada una de ellas. Por ejemplo,

$$\mathcal{F}^I(i_{Jaccard})(S_1, S_2) = \int_0^1 \int_0^1 i_{Jaccard}((S_1)_{\geq \alpha_1}, (S_2)_{\geq \alpha_2}) d\alpha_1 d\alpha_2$$

En [5] se exponen algunas propiedades que permiten analizar este tipo de índices. Se comprueba fácilmente la conmutatividad de $\mathcal{F}^I(i_{Jaccard})$. $\mathcal{F}^I(i_{Jaccard})(S, \overline{S}) = 0$ para S nítida; es decir, la correlación entre un conjunto y su complementario es 0. Y también, si $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3$ entonces $\mathcal{F}^I(i_{Jaccard})(S_1, S_2) \geq \mathcal{F}^I(i_{Jaccard})(S_1, S_3)$ y $\mathcal{F}^I(i_{Jaccard})(S_2, S_3) \geq \mathcal{F}^I(i_{Jaccard})(S_1, S_3)$. Como contrapartida, $\mathcal{F}^I(i_{Jaccard})(S, S)$ puede ser menor que 1 como consecuencia de la interpretación probabilística de los conjuntos borrosos subyacente al modelo $\mathcal{F}^I$. Idénticos resultados se obtienen para $\mathcal{F}^I(i_{es})$.

Las definiciones anteriores se extienden fácilmente al ámbito temporal:

- Cuantificador semi-borroso de similitud básico:

$$Q(T, S_1, S_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{|S_1 \cap S_2 \cap T|}{|(S_1 \cup S_2) \cap T|}\right) & (S_1 \cup S_2) \cap T \neq \emptyset \\ 1 & (S_1 \cup S_2) \cap T = \emptyset \end{cases} \quad (2)$$

- Cuantificador semi-borroso temporal de equiparación simple:

$$Q(T, S_1, S_2) = \begin{cases} fn\left(\frac{|S_1 \cap S_2 \cap T| + |\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap T|}{|T|}\right) & T \neq \emptyset \\ 1 & T = \emptyset \end{cases}$$

donde T es una restricción temporal nítida, S_1 y S_2 son señales nítidas y $fn : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es un número borroso.

A partir de estos cuantificadores semi-borrosos podemos obtener las correspondientes definiciones de correlación borrosa utilizando el MBC definido por la expresión (1) :

$$\mathcal{F}^I(Q)(T, S_1, S_2) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Q(T)_{\geq \alpha_1}, (S_1)_{\geq \alpha_2}, (S_2)_{\geq \alpha_3} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (3)$$

La expresión (3) puede aproximarse mediante integración numérica, dividiendo el intervalo de integración $(0, 1]^3$ en el conjunto de subintervalos:

$$(i \times h, i \times (h+1)] \times (j \times h, j \times (h+1)] \times (k \times h, k \times (h+1)]$$

donde h es el tamaño del paso de integración, y $0 \leq i, j, k < 1/h$. Sea $n = 1/h$ el número de subintervalos en el intervalo $(0, 1]$; la expresión (3) puede aproximarse por:

$$\mathcal{F}^I(Q)(T, S_1, S_2) \approx \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} Q(T)_{\geq (i+\frac{1}{2}) \times h}, (S_1)_{\geq (j+\frac{1}{2}) \times h}, (S_2)_{\geq (k+\frac{1}{2}) \times h} h^3$$

donde hemos aproximado la integral en cada subintervalo por su resultado en el punto medio del mismo.

4 EVALUACIÓN EFICIENTE DE EXPRESIONES DE CORRELACIÓN TEMPORAL

Asumiendo que la ventana temporal en la que se evalúa la expresión de correlación es relativa al instante actual, es decir, “avanza” cada vez que un nuevo punto temporal es procesado por el sistema (por ejemplo, “en los últimos dos minutos”), es posible establecer un algoritmo para la evaluación eficiente de la expresión (4).

Consideremos la expresión “la correlación entre las presiones peligrosamente altas y las temperaturas altas fue muy alta durante los últimos dos minutos”, asumiendo los valores de las señales y de la ventana temporal mostrados en la figura 2.

Supondremos que los valores de la restricción temporal borrosa y las señales borrosas están almacenados

en vectores circulares y que la ventana temporal viene definida, como en el ejemplo, por un número borroso convexo. Aunque nos centraremos en el cuantificador temporal semi-borroso definido en la expresión (2), ideas similares pueden usarse para desarrollar algoritmos para otras expresiones.

Dado que el cuantificador temporal semi-borroso en (2) sólo depende de las cardinalidades $|T \cap S_1 \cap S_2|$ y $|T \cap (S_1 \cup S_2)|$ (siendo T , S_1 y S_2 conjuntos nítidos) es posible construir una tabla que almacene este par de cardinalidades para cada paso de integración; es decir, para cada conjunto de niveles de α -corte ($\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$) utilizados para aproximar la integral obtenemos $(c[i][j][k][1], c[i][j][k][2])$. Esta tabla se puede calcular en tiempo $O(M \times n^2)$, donde M es el tamaño del soporte de la ventana temporal y n el número de intervalos utilizado para aproximar la integral. Una vez construida la tabla, la evaluación de la expresión (4) se realiza de forma trivial (véase el algoritmo 1).

Algoritmo 1

```
eval = 0;
for (i=0; i<n; i++)
  for (j=0; j<n; j++)
    for (k=0; k<n; k++)
      eval=eval+Q(c[i][j][k][1],c[i][j][k][2])×h3;
    end for
  end for
end for
return eval;
```

Tabla 1: Algoritmo para evaluar la expresión aproximada de $\mathcal{F}^T(Q)(T, S_1, S_2)$.

Volviendo al ejemplo, inicialmente el soporte de la ventana temporal está formado por los puntos $\{t_2, \dots, t_7\}$ (ver figura 2). El α -corte temporal $\alpha_i = 1$ contiene los puntos $\{t_3, \dots, t_7\}$. Para este valor de i , los componentes de la tabla para las combinaciones (j, k) se calculan a partir de los valores de las señales en estos puntos. Para la señal de temperatura, tenemos los valores $\{0.10, 0.55, 0.95, 0.75, 0.75\}$, y para la presión, $\{0.35, 0.50, 0.70, 1, 0.85\}$, con lo que por ejemplo, para $\alpha_j = \alpha_k = 0.2$ el par almacenado en la tabla de cardinalidades para los índices correspondientes es (4,5). Lo mismo habrá de repetirse para todas las combinaciones (i, j, k) , para luego evaluar el cuantificador semi-borroso Q en cada par de cardinalidades, y sumar sobre todas las combinaciones.

Pero dado que la ventana temporal está relacionada con el punto temporal actual, ésta avanza una única unidad cuando un nuevo punto temporal llega al sistema (ver figura 3). El conjunto finito de α -cortes de la ventana temporal avanza también una única unidad: el punto “más antiguo” (t_a) en cada α -corte

es eliminado, y un nuevo punto (t_n) es añadido como consecuencia del avance del tiempo. Así, el soporte del α -corte $\alpha_i = 1$ de la referencia temporal pasa a ser $\{t_4, \dots, t_8\}$, siendo $t_a = t_3$ y $t_n = t_8$. El grado de verificación de la proposición debe recalcularse: mostraremos cómo puede realizarse este cálculo de manera eficiente.

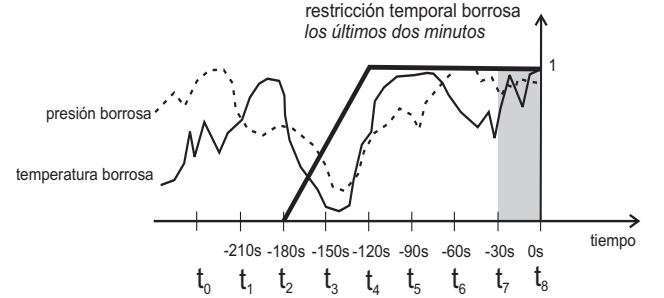


Figura 3: Señales borrosas “presión peligrosamente alta” (trazo discontinuo) y “temperatura media o alta” (trazo continuo) y ventana temporal “los últimos dos minutos”. La ventana temporal se ha desplazado una unidad de tiempo.

La modificación de las cardinalidades en la tabla sólo puede producirse por la eliminación del punto t_a y/o por la introducción del nuevo t_n . Los puntos intermedios del α -corte permanecen sin cambios. Comprobando los valores de las señales en el punto temporal que es eliminado del α -corte temporal y en el punto temporal que se añade, la tabla de cardinalidades puede actualizarse en tiempo $O(n^3)$, por lo que la expresión temporal puede recalcularse también en $O(n^3)$. El algoritmo para la evaluación eficiente de la expresión (4) se muestra en la tabla 2.

Analizaremos en detalle el primer caso del algoritmo (los demás casos se estudiarían de forma análoga):

Si $t_a \in (S_1)_{\geq (j+\frac{1}{2}) \times h}$ y $t_a \notin (S_2)_{\geq (k+\frac{1}{2}) \times h}$ (es decir, $S_1(t_a) \geq (j + \frac{1}{2}) \times h$ pero $S_2(t_a) < (k + \frac{1}{2}) \times h$) entonces

$$t_a \in (S_1)_{\geq (j+\frac{1}{2}) \times h} \cup (S_2)_{\geq (k+\frac{1}{2}) \times h}$$

pero

$$t_a \notin (S_1)_{\geq (j+\frac{1}{2}) \times h} \cap (S_2)_{\geq (k+\frac{1}{2}) \times h}$$

Como el punto t_a no pertenece ya a $T_{\geq (i+\frac{1}{2}) \times h}$ la primera cardinalidad relativa a los α -cortes (i, j, k) permanecerá sin cambios, mientras que la segunda se modifica de la siguiente manera:

$$c[i][j][k][2] = c[i][j][k][2] - 1$$

Algoritmo 2

```

eval=0;
for (i=0; i<n; i++)
  for (j=0; j<n; j++)
    for (k=0; k<n; k++)
      if (S1(ta) ≥ (j+½)×h and S2(ta) < (k+½)×h)
        c[i][j][k][2]=c[i][j][k][2]-1;
      end if
      if (S1(ta) < (j+½)×h and S2(ta) ≥ (k+½)×h)
        c[i][j][k][2]=c[i][j][k][2]-1;
      end if
      if (S1(ta) ≥ (j+½)×h and S2(ta) ≥ (k+½)×h)
        c[i][j][k][1]=c[i][j][k][1]-1;
        c[i][j][k][2]=c[i][j][k][2]-1;
      end if
      if (S1(tn) ≥ (j+½)×h and S2(tn) < (k+½)×h)
        c[i][j][k][2]=c[i][j][k][2]+1;
      end if
      if (S1(tn) < (j+½)×h and S2(tn) ≥ (k+½)×h)
        c[i][j][k][2]=c[i][j][k][2]+1;
      end if
      if (S1(tn) ≥ (j+½)×h and S2(tn) ≥ (k+½)×h)
        c[i][j][k][1]=c[i][j][k][1]+1;
        c[i][j][k][2]=c[i][j][k][2]+1;
      end if
      eval=eval+Q(c[i][j][k][1],c[i][j][k][2])×h3;
    end for
  end for
end for
return eval;

```

Tabla 2: Algoritmo para el cálculo eficiente de $\mathcal{F}^I(Q)(T, S_1, S_2)$: la tabla de cardinalidades se actualiza cuando el tiempo avanza una unidad.

Para el ejemplo, con $\alpha_i=1$, y $\alpha_j = \alpha_k=0.2$, al eliminar t_3 pasamos del par (4,5) al par (4,5-1)=(4,4) en la tabla de cardinalidades.

El proceso para actualizar la tabla debido a la inclusión del nuevo punto t_n es similar a la expresada anteriormente, salvo que la llegada de un nuevo punto puede incrementar (en lugar de decrementar) las cardinalidades según pertenezca o no a los α -cortes de las señales.

Nótese que el algoritmo propuesto permite recalcular la expresión cuantificada en tiempo $O(n^3)$ donde n es el número de alfa-cortes utilizados para aproximar la integral. La complejidad del algoritmo sin optimizar es $O(M \times n^2)$ donde M es el número de puntos de la ventana temporal considerada. Al contrario de la aproximación propuesta, el algoritmo no optimizado es inviable para aplicaciones prácticas que pueden trabajar sobre ventanas temporales de cientos o miles de

puntos.²

5 CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos dos índices de correlación basados en cuantificadores semi-borrosos y cómo éstos pueden utilizarse en el campo de la representación de conocimiento temporal para evaluar correlación borrosa entre señales. También describimos algoritmos eficientes para su implementación. Como continuación del trabajo, se realizará un estudio detallado de las propiedades de los operadores y en paralelo su aplicación a las definiciones nítidas de otros operadores de interés en otros ámbitos (por ejemplo, operadores de disimilaridad, asociación, ...).

Agradecimientos

Los autores agradecen a la DXID de la Xunta de Galicia la financiación recibida a través del proyecto PGIDIT04SIN206003PR.

Referencias

- [1] P. Cariñena. *Un modelo de Reglas Temporales Borrosas para el razonamiento sobre sistemas dinámicos*. Tesis doctoral, Universidade de Santiago de Compostela, 2003.
- [2] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín y S. Barro. Definition and classification of semi-fuzzy quantifiers for the evaluation of fuzzy quantified sentences. *International Journal of Approximate Reasoning*, 34(1):49–88, 2003.
- [3] F. Díaz-Hermida, A. Bugarín, P. Cariñena y S. Barro. Voting model based evaluation of fuzzy quantified sentences: a general framework. *Fuzzy Sets and Systems*, 146:97–120, 2004.
- [4] I. Glöckner y A. Knoll. A formal theory of fuzzy natural language quantification and its role in granular computing. En W. Pedrycz (Ed.), *Granular computing: An emerging paradigm*, vol. 70 de *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, pp. 215–256. Physica-Verlag, 2001.
- [5] Wen-June Wang. New similarity measures on fuzzy sets and on elements. *Fuzzy Sets and Systems*, 85:305–309, 1997.
- [6] L.A. Zadeh. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Comp. and Machs. with Appls.*, 8:149–184, 1983.

²Considérese la diferencia entre $O(n^3)$ para $n = 5$ alfa-cortes y $O(M \times n^2)$ para una ventana temporal de $M = 500$ puntos.

REAL, RATIONAL AND FINITE-CHAIN SEMANTICS FOR FUZZY LOGICS

Francesc Esteva, Lluís Godo, Carles Noguera

IIIA - CSIC

08193 Bellaterra, Spain

{esteva,godo,cnoguera}@iiia.csic.es

Abstract

In the seminal paper of Zadeh about Fuzzy Logic [16], he defined fuzzy sets with membership functions over the real unit interval but in applications membership functions are commonly defined either over rational numbers in $[0, 1]$ or over finite scales. Within the setting of residuated t-norm based fuzzy logics, we analyze real, rational and finite-chain semantics for these logics. The analysis clarifies some differences between these semantics regarding embeddability properties and ordinal sum decomposition of the underlying algebraic structures.

Keywords: t-norm based logics, MTL-algebras, BL-algebras, Wajsberg hoops

1 INTRODUCTION

Membership functions for fuzzy sets were originally defined by Zadeh in [16] as functions taking values in the real unit interval. Therefore, $[0, 1]$ is the most used set of truth-values for fuzzy logics. Nevertheless, in the algebraic approach to fuzzy logic in narrow sense, in particular in the class of t-norm based fuzzy logics, many classes of algebras have appeared as the algebraic counterpart of these logics. These classes contain as prominent examples algebras over the real unit interval $[0, 1]$, but also algebras over other chains of truth-values widely used in fuzzy logic applications, such as the rational unit interval or finite chains. In this paper, from the general results on the structure and embeddability properties of these algebras, we present some first results on the relations between the real, the rational and the finite-chain semantics.

The paper is structured as follows. After this introduction we give in a preliminary section the necessary results on the generalization of the monoidal operations over $[0, 1]$ to other chains, stressing two relevant

properties: divisibility (which is related to continuity) and residuation (which is related to left-continuity). This leads to the study of two classes of algebras: BL and MTL-algebras. For these classes of algebras we will study their members defined over the real and the rational unit interval (Sections 3) and over finite chains (Section 4). We end up with some concluding remarks.

2 PRELIMINARIES ON RESIDUATED MONOIDAL OPERATIONS

First of all we want to clarify the differences between R-implication functions, as defined by Trillas and Valverde in [15], and residua of t-norms as defined in the framework of residuated lattices and in t-norm based logics (see the definition of BL in [7] or the definition of MTL in [5]). The R-implication function R_* corresponding to a t-norm $*$ was defined as,

$$R_*(x, y) = \sup\{z \in [0, 1] \mid x * z \leq y\}$$

while the residuum of the t-norm $*$ is defined, if it exists, as the operation $\Rightarrow_*$ such that $(*, \Rightarrow_*)$ forms an adjoint pair, i.e. such that they satisfy the adjointness condition:

$$x \Rightarrow_* y \geq z \text{ if and only if } x * z \leq y$$

which is equivalent to the following definition of the residuum,

$$x \Rightarrow_* y = \max\{z \mid x * z \leq y\}$$

Notice that R_* is defined for each t-norm $*$, while the residuum $\Rightarrow_*$ is not. In fact the residuum $\Rightarrow_*$ exists if, and only if, $*$ is left-continuous, and in such a case $\Rightarrow_* = R_*$. The class of residua of (left-continuous) t-norms is therefore the suitable subclass of R-implications to deal with Modus Ponens in the sense of [7].

Basic properties of a t-norm and its residuum are:

- *left-continuity*: A t-norm $*$ has residuum $\Rightarrow_*$ if, and only if, it is left-continuous.
- *order and residuum*: $x \leq y$ if, and only if, $x \Rightarrow_* y = 1$.
- *Pre-linearity*: $\max((x \Rightarrow_* y), (y \Rightarrow_* x)) = 1$
- *Definability of max*: $\max(x, y) = \min((x \Rightarrow_* y) \Rightarrow_* y, (y \Rightarrow_* x) \Rightarrow_* x)$

This leads to the general definition of MTL-algebras (the algebraic counterpart of the Monoidal T-norm based Logic defined in [5]) as algebraic structures $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, *, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ such that:

- $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ is a bounded distributive lattice,
- $\langle A, *, 1 \rangle$ is a commutative monoid with neutral element 1,
- $*$ and $\Rightarrow$ form an adjoint pair ($\Rightarrow$ is the residuum of $*$), and
- for all $x, y \in A$, $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$ (pre-linearity condition).

If the order defined by the lattice operations is total, we say that $\mathbf{A}$ is an MTL-chain. Chains play a basic role in the study of MTL-algebras since every MTL-algebra is representable as subdirect product of MTL-chains, and thus equalities valid for every chain are valid for every algebra. In fact, all MTL-chains over $[0, 1]$ are those defined by left-continuous t-norms and their residua.

Furthermore, the following result characterizes continuous t-norms.

Divisibility: A t-norm is continuous if, and only if, it is divisible, i.e. if $x \leq y$, there exists z such that $x * z = y$.

Divisibility equation: A left-continuous t-norm is continuous if, and only if, its corresponding MTL-chain satisfies the divisibility equation, i.e. for all $x, y \in [0, 1]$, $x * (x \Rightarrow y) = \min(x, y)$.

This leads to the definition of BL-algebras (the algebraic counterpart of the Basic fuzzy Logic defined in [7]) as residuated lattices satisfying pre-linearity and divisibility or, equivalently, MTL-algebras satisfying divisibility. It is also true that every BL-algebra is representable as subdirect product of BL-chains. In fact, all BL-chains over $[0, 1]$ are those defined by continuous t-norms and their residua.

Therefore it seems natural to generalize left-continuous t-norms over $[0, 1]$ to monoidal operations $*$ over an arbitrary chain A endowing it with a structure of (pre-linear) residuated lattice, and continuous t-norms to (pre-linear) residuated chains further satisfying divisibility. These are the so-called MTL and BL-chains respectively.

3 MTL AND BL-CHAINS OVER THE REAL AND RATIONAL UNIT INTERVALS

3.1 STRUCTURE OF BL-CHAINS

To study the structure of BL-chains we have at disposal two main decomposition theorems for BL-chains. The first one is based on the well-known decomposition of a continuous t-norm as ordinal sum of isomorphic copies of the three basic continuous t-norms, minimum, product and Łukasiewicz t-norms [11, 14]. Based on results by Hájek in [8], this was generalized in [3] by proving that every BL-chain is an ordinal sum of chains of the three basic types (Product, Gödel and MV-chains), or a subalgebra of such an ordinal sum lacking some idempotent elements. The second decomposition theorem [1] proves that every BL-chain can be represented as an ordinal sum (in a slightly different sense, see Definition 2) of Wajsberg hoops.

Definition 1. A structure $\mathbf{H} = (H, *, \Rightarrow, 1)$ is a hoop if $*$ is a commutative operation on H with the neutral element 1 (i.e. $x * y = y * x$ and $1 * x = x$ for all x, y) and further $\Rightarrow$ is a binary operation satisfying

- (i) $x \Rightarrow x = 1$,
- (ii) $x * (x \Rightarrow y) = y * (y \Rightarrow x)$,
- (iii) $(x * y) \Rightarrow z = x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$

for all x, y, z . Moreover, a partial order is defined as: $x \leq y$ iff $x \Rightarrow y = 1$.

A hoop is a **Wajsberg hoop** if it further satisfies:

$$(W) \quad (x \Rightarrow y) \Rightarrow y = (y \Rightarrow x) \Rightarrow x$$

A hoop is a **cancellative** if it further satisfies:

$$(C) \quad x \Rightarrow x * y = y$$

Definition 2. Given a linearly ordered index set I and a family of hoops $\{H_i \mid i \in I\}$, the ordinal sum of this family is the hoop whose universe is $A = \bigcup_{i \in I} (H_i \setminus \{1_i\}) \cup \{1\}$ where 1 is a new element, whose monoidal operation $*$ is defined as,

$$x * y = \begin{cases} x *_i y, & \text{if } x, y \in H_i - \{1_i\} \\ \min(x, y), & \text{otherwise} \end{cases}$$

and whose residuum is defined by

$$x \Rightarrow_* y = \begin{cases} 1, & \text{if } y = 1 \\ 1, & \text{if } x, y \in H'_i, x \leq_i y \\ 1, & \text{if } x \in H'_i, y \in H'_j, i < j \\ y, & \text{if } x = 1 \\ y, & \text{if } x \in H'_i, y \in H'_j, i > j \\ x \Rightarrow_i y, & \text{if } x, y \in H'_i, x >_i y \end{cases}$$

where $H'_i = H_i \setminus \{1_i\}$.

In a linearly ordered Wajsberg hoop $\mathbf{H}$ the following conditions hold [1]:

- 1) If $0 \neq x * y = x * z$, then $y = z$ (weak cancellation)
- 2) if $\mathbf{H}$ has a minimum element, then it is an MV-chain, otherwise it is a cancellative hoop.

If a linearly ordered hoop A contains an idempotent element, a , then A is decomposable as ordinal sum of the hoops obtained restricting the operations to $A_a^+ = [a, 1^A]$ and to $A_a^- = \{x \in A \mid x < a\} \cup \{1^A\}$. Hence, if A is indecomposable and $a \in A$ is idempotent, then a has to be a bound of A . Actually, all Wajsberg hoops are indecomposable.

Theorem 3 ([1]). *Any BL-chain is an ordinal sum of linearly ordered Wajsberg hoops, with a first component and this component being bounded.*

3.2 BL-CHAINS OVER THE REAL AND RATIONAL UNIT INTERVALS

An interesting point is the different kinds of Wajsberg hoops appearing in the decompositions of BL-chains over the real and over the rational unit intervals. In the real case the only Wajsberg hoops that appear (up to isomorphism) are:

- **L**, defined by the Łukasiewicz t-norm and its residuum,
- **C**, defined by product t-norm and its residuum over $(0, 1]$,
- **2**, isomorphic to the two-element Boolean algebra.

As an example take a t-norm which is an ordinal sum (in the sense of basic BL-chains) of a Łukasiewicz, a Product and a Gödel components, denoted $L \oplus \Pi \oplus G$. This t-norm can be decomposed as ordinal sum of Wajsberg hoops as $\mathbf{L} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{C} \oplus (\bigoplus \mathbf{2})$ where the $\bigoplus$ refers to a sum of continuously many **2** components.

However, there is not a complete description of the Wajsberg hoop components of BL-chains over the rational unit interval. To understand the basic difference between the two cases we need the following definition.

Definition 4. *Let $\mathbf{H} = (H, *, \Rightarrow, 1)$ be a linearly ordered hoop and let $\sim$ be the following relation:*

$$a \sim b \text{ if, and only if, for some } n \in \mathbb{N}, \text{ either } a^n \leq b \leq a \text{ or } b^n \leq a \leq b$$

where x^n is a shorthand for $x * \dots * x$. Then, $\sim$ is an equivalence relation and the corresponding classes are called Archimedean components. The component containing the element $a \in H$ will be denoted by $[a]_\sim$. The class $[1]_\sim = \{1\}$ will be called the trivial Archimedean component.

$\mathbf{H}$ is called Archimedean when it has exactly two Archimedean components, $\{1\}$ and $H \setminus \{1\}$.

Indeed, the basic difference is the fact that the continuity of the real line implies that each Wajsberg hoop $\mathbf{H}$ of a BL-chain over $[0, 1]$ is Archimedean, which is not necessarily the case of Wajsberg hoops of BL-chains over the rational unit interval. In fact, the property of having only Archimedean Wajsberg components can be shown more generally for BL-chains over complete and densely ordered lattices.

Lemma 5. *In a complete Wajsberg hoop, if a monotone sequence $\bar{a} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, has a limit α , then $x * \alpha = \bigwedge_n (x * a_n)$ if $\bar{a}$ is a non-increasing sequence and $x * \alpha = \bigvee_n (x * a_n)$ if $\bar{a}$ is a non-decreasing sequence.*

Proof: If α belongs to the sequence, the result is obvious. If the sequence is increasing then the result is also true because $*$ is infinitely distributive with respect to $\vee$. Suppose that the sequence is decreasing, α does not belong to the sequence and the conclusion is not true, i.e. $x * \alpha < \bigwedge_n (x * a_n) = d > 0$ (obviously it is impossible to be greater). By divisibility there must exist an element β such that both $x * \beta = d$ and by weak cancellation this implies that $\alpha < \beta < a_n$ for all a_n belonging to the sequence which is impossible. $\square$

Proposition 6. *Let $\mathbf{C}$ be a complete and densely ordered BL-chain and let $\mathbf{H}$ be a component of the decomposition of $\mathbf{C}$ as ordinal sum of Wajsberg hoops. Then $\mathbf{H}$ is Archimedean.*

Proof: First recall that a linearly ordered Wajsberg hoop does not contain idempotent elements different from the bounds (remember that a hoop always has an upper bound but not always has a lower bound). Suppose $\mathbf{H}$ has a non-trivial Archimedean component $X \neq H - \{1\}$. If $\inf X = \alpha \in H$ and this is not the infimum of H , then by Lemma 5 it is clear that α has to be an idempotent element and this is contradictory with our assumption. On the other hand if $\inf X = \inf H$ then by assumption there must exist an element $b, 1 \neq b \in H$ such that $[1]_\sim > [b]_\sim > X$ and thus $\inf[b]_\sim \in H$ and it is different from the infimum of H . Thus $\inf[b]_\sim$ must be idempotent which leads to a contradiction. $\square$

This result is in agreement with the fact that the only Wajsberg hoops which are components of a decomposi-

tion of a BL-chain over the real unit interval are among **L**, **C** and **2**. Notice that all of them are Archimedean.

We move now to the case of the BL-chains over the rational unit interval. In that case the order of the chain is not complete and thus Proposition 6 does not apply. The following examples show that there exist BL-chains over $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ with non-Archimedean Wajsberg components.

In the following, given a real interval $[a, b]$, we will denote the corresponding rational interval $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ by $[a, b]_{\mathbb{Q}}$, analogously for open or semi-open intervals.

Example 1. Take the product hoop $\mathbf{H}\Pi$ defined over $(0, 1]_{\mathbb{Q}}$, i.e. $\mathbf{H}\Pi = ((0, 1]_{\mathbb{Q}}, \cdot, \Rightarrow_{\Pi}, 1)$ where $\cdot$ denotes the standard product and $\Rightarrow_{\Pi}$ its residuum. Let $\alpha \in (0, 1)$ be an irrational and let $\mathbf{H}\Pi'$ be the isomorphic copy of $\mathbf{H}\Pi$ over the rational interval $H = (\alpha, 1]_{\mathbb{Q}}$ (denote by $\times$ the transformed monoidal operation). Take an strictly decreasing involution $n : [0, 1]_{\mathbb{Q}} \rightarrow [0, 1]_{\mathbb{Q}}$ such that $n((\alpha, 1]_{\mathbb{Q}}) = [0, \alpha)_{\mathbb{Q}}$ and define over $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ the following operation:

$$x * y = \begin{cases} x \times y, & \text{if } x, y \in H \\ n(x \Rightarrow_{\times} n(y)), & \text{if } x \in H, \text{ and } y \notin H \\ n(y \Rightarrow_{\times} n(x)), & \text{if } x \notin H, \text{ and } y \in H \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $\Rightarrow_{\times}$ refers to the residuum of $\times$ in $(\alpha, 1]_{\mathbb{Q}}$. This construction corresponds to the disconnected rotation (in the sense of Jenei in [9]) of a cancellative hoop and thus the resulting structure $\mathbf{A} = ([0, 1]_{\mathbb{Q}}, *, \Rightarrow, 0, 1)$ is an MV-chain (a modified version of Chang's MV-algebra). Hence, it has only one Wajsberg hoop component ($\mathbf{A}$ itself) but one can check that it has three Archimedean components: $\{1\}$, $(\alpha, 1)_{\mathbb{Q}}$ and $[0, \alpha)_{\mathbb{Q}}$.

Example 2. Let $\mathbf{Z}$ be the ordered Abelian group of integers and let $\mathbf{Q}^+$ be the multiplicative ordered Abelian group of positive rationals. Consider the ordered Abelian group $\mathbf{Z} \times_{\text{lex}} \mathbf{Q}^+$ obtained by endowing the direct product group with the lexicographical order. The negative cone of $\mathbf{Z} \times_{\text{lex}} \mathbf{Q}^+$, the set $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^+ \mid (x, y) \leq_{\text{lex}} (0, 1)\}$, with the operations

$$(x, a) * (y, b) = (x + y, a \cdot b), \text{ and } (x, a) \Rightarrow (y, b) = (\max(y - x, 0), \min(b/a, 1))$$

is a (cancellative) Wajsberg hoop having three Archimedean components: $\{(0, 1)\}$, $\{(0, a) \mid a \in (0, 1)_{\mathbb{Q}}\}$ and $\{(-x, a) \mid x \in \mathbb{N}^+, a \in \mathbb{Q}^+\}$. Take an irrational number $\alpha \in (0, 1)$ and take the isomorphic copy of the three Archimedean components into the three intervals $\{1\}$, $(\alpha, 1)_{\mathbb{Q}}$ and $(0, \alpha)_{\mathbb{Q}}$. This can be done because each non-trivial component is an open interval which is countable and densely ordered. The resulting structure, call it $\mathbf{H}$, is a cancellative Wajsberg hoop over $(0, 1]_{\mathbb{Q}}$ that has three Archimedean components. Finally, the hoop $\mathbf{2} \oplus \mathbf{H}$ obtained by adding

a bottom element 0 to $\mathbf{H}$ is also a BL-chain (in fact a Product chain) over the rational interval $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ with a non-Archimedean Wajsberg component.

Hence, not any BL-chain over the rationals is the restriction of a BL-chain over the reals (since those can only have Archimedean Wajsberg components). Moreover, by Hölder's theorem, any BL-chain over the rationals whose Wajsberg components are all Archimedean is the restriction of a BL-chain over the reals. But this does not imply that all Archimedean cancellative (resp. bounded) Wajsberg hoops over $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ are isomorphic as it happens when defined over the real $[0, 1]$. Next there are two examples.

Example 3. Let $\mathbf{H}$ be the cancellative hoop defined by the negative cone of the additive group of rationals $\mathbb{Q}$ and let $\mathbf{H}^+$ be the cancellative hoop defined by the negative cone of the multiplicative group of the positive rationals $\mathbb{Q}^+$. Of course, these cancellative hoops are the restrictions of the negative cones of the additive group of reals and the multiplicative group of positive reals respectively. But while these (real) groups are isomorphic this is not the case for the groups and their negative cones over the rationals. An easy computation shows that in $\mathbf{H}$, for all (negative) rational r and all natural n there is a (negative) rational s such that $s + \dots + s = r$. However, the corresponding property in $\mathbf{H}^+$ does not hold: for instance, for $r = \frac{1}{2}$ and $n = 2$, there is no (positive) rational s such that $s \cdot s = \frac{1}{2}$.

Example 4. It is known, from a result of [6], that any irrational number α of $[0, 1]$ generates a subalgebra $\langle \alpha \rangle$ of the standard MV-chain $\mathbf{L} [0, 1]_{\mathbf{L}}$ whose univers is countable and densely ordered. Thus such a subalgebra $\langle \alpha \rangle$ is isomorphic to a MV-chain over the rationals. Moreover if $\alpha, \beta \in [0, 1]$ are irrational and their generated subalgebras $\langle \alpha \rangle$ and $\langle \beta \rangle$ are isomorphic, then either $\alpha = \beta$ or $\alpha = 1 - \beta$.

These two examples prove that there are infinitely many non-isomorphic Archimedean Wajsberg hoops (cancellative or bounded) over the rationals.

3.3 MTL-CHAINS OVER THE REAL AND RATIONAL UNIT INTERVALS

As regards to MTL-chains, the situation is completely different from that of BL-chains. On the one hand, a general result describing their structure is not known yet, not even for those defined over the real unit interval. On the other hand, as a positive result, MTL-chains enjoy the following powerful embedding property, which is not true for BL-chains.

Theorem 7. Every countable MTL-chain is embeddable into an MTL-chain defined over the real unit interval.

The proof of this theorem is given by Jenei and Montagna by means of a constructive method in [10].

As a consequence we obtain the following corollary.

Corollary 8. *Every MTL-chain defined over the rational unit interval is the restriction of an MTL-chain defined over the real unit interval.*

The extension $\circ$ of the monoidal operation $*$ from the rationals to the reals, is defined in the only possible way that preserves the left-continuity: for every $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$\alpha \circ \beta := \sup\{x * y : x \leq \alpha, y \leq \beta, x, y \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}\}.$$

However, this method of completion does not preserve many other properties such as continuity (i.e. divisibility) or cancellation. As an example consider the chain in Example 1. The completion of this chain to the real interval introduces a new element separating the two non-trivial Archimedean components, say α . Then for every $x > \alpha$, $x \circ \alpha = \alpha$ but $\alpha \circ \alpha = 0$, and thus the cancellation and the divisibility properties do not hold anymore in the completed chain for $\circ$.

4 ABOUT FINITE MTL AND BL-CHAINS

Now we focus on finite chains. As in the general case, the structure of finite BL-chains is completely known. Indeed, since there are no finite product chains (except for the trivial one and **2**), all finite BL-chains are ordinal sums of finite MV and Gödel chains. Taking into account that finite MV-chains are isomorphic to the Łukasiewicz n -valued chains $\mathbf{L}_n$, and the obvious structure of finite Gödel chains $\mathbf{G}_n$, we obtain:

Proposition 9. *Each finite BL-chain is isomorphic to an ordinal sum of a finite subfamily of $\{\mathbf{L}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{G}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

This result is equivalent to the representation theorem for the so-called finite smooth t-norms given in [12, 13].

Since for every $n \geq 1$, $\mathbf{L}_n$ (resp. $\mathbf{G}_n$) is a subalgebra of the MV-chain (resp. the Gödel chain) over the rational unit interval defined by the Łukasiewicz t-norm (resp. the minimum t-norm), and this is also a subalgebra of $\mathbf{L}$ (resp. $\mathbf{G}$, i.e. the chain over the reals defined by the minimum t-norm), every finite BL-chain is embeddable both in a rational chain and in a real chain.

As regards to MTL-chains, the structure is completely open since every finite chain $(C, \leq, 0, 1)$ with a monotonic monoidal operation $*$ defines a MTL chain $(C, *, \Rightarrow, 0, 1)$ since the residuum of $*$ always exists. Theorem 7 guarantees that, in particular, all finite

MTL-chains are embeddable into an MTL-chain over the real unit interval by means of the constructive method of Jenei and Montagna. However, although this method does not provide in general an embedding of these chains into an MTL-chain over the rational interval $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$, it follows from the results in [4] that such an embedding always exists.

As mentioned before, remind that Jenei and Montagna's embedding does not preserve many properties, for instance, when applied to a finite BL-chain which is not a Gödel chain, one does not obtain a BL-chain on $[0, 1]$ (see for example the completion of $\mathbf{L}_n$ in [2]).

5 CONCLUSIONS

As a summary, we have seen that over the rational unit interval there are as many MTL-chains as restrictions of MTL-chains over the reals, while there is a very large set of BL-chains that are not isomorphic to restrictions of BL-chains over the unit real interval (recall that by restriction the number of Archimedean components remains invariant). It remains as an open problem the description of the Wajsberg hoops over $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ in order to obtain a full characterization of BL-chains over the rational unit interval.

Regarding finite BL-chains, we have fully described their structure and embeddability properties into the rational and the real unit interval. However, for finite MTL-chains we only know that they are embeddable into MTL-chains over the reals and over the rationals but their structure is an open problems.

Acknowledgements

The authors acknowledge partial support of the Spanish project MÚLOG TIN2004-07933-C03-01. The authors also indebted to one referee for his/her comments that have helped a lot to improve the paper.

References

- [1] P. AGLIANÓ AND F. MONTAGNA. Varieties of BL-algebras I: general properties, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 181 (2003) 105–129.
- [2] A. CIABATTONI, F. ESTEVA AND L. GODO. T-norm based logics with n -contraction, *Neural Network World* 5 (2002) 441–452.
- [3] R. CIGNOLI, F. ESTEVA, L. GODO AND A. TORRENS. Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms and their residua, *Soft Computing* 4 (2000) 106–112.

- [4] F. ESTEVA, J. GISPERT, L. GODO AND F. MONTAGNA. On the standard and Rational Completeness of some axiomatic extensions of Monoidal t-norm Based Logic. *Studia Logica* 71 (2002) 199–226.
- [5] F. ESTEVA AND L. GODO. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* 124 (2001) 271–288.
- [6] H. GAITÁN. Subdirectly Irreducible MV-Algebras. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 53(128) (2003), 631-639.
- [7] P. HÁJEK. *Metamathematics of fuzzy logic*, vol.4 in Trends in Logic, Kluwer, Dordrecht, 1998.
- [8] P. HÁJEK. Basic fuzzy logic and BL-algebras, *Soft Computing* 2 (1998), 124–128.
- [9] S. JENEI. Structure of left-continuous triangular norms with strong induced negations, (I) Rotation construction, *J. Appl. Non-Classical Logics* 10 (2000) 83–92.
- [10] S. JENEI AND F. MONTAGNA. A proof of standard completeness for Esteva and Godo’s logic MTL, *Studia Logica* 70 (2002) 183–192.
- [11] C. M. LING. Representation of associative functions, *Publ. Math. Debrecen* 12 (1965) 189–212.
- [12] G. MAYOR AND J. TORRENS. On a class of operators for expert systems, *International Journal of Intelligent Systems* 8 (1993) 771–778.
- [13] G. MAYOR AND J. TORRENS. Triangular norms in discrete settings. In E.P. Klement and R. Mesiar, Editors, *Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, Elsevier, pp. 193-236, 2005.
- [14] P. S. MOSTERT AND A. L. SHIELDS. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary, *Annals of Math.* 65 (1957) 117–143.
- [15] E. TRILLAS AND L. VALVERDE. On some functionally expressible implications for fuzzy set theory, *Proc. of the 3rd International Seminar on Fuzzy Set Theory 1981*, Linz, 173–190.
- [16] L. A. ZADEH. Fuzzy sets, *Information Control* 8 (1965) 338–353.

UN PRIMER ESTUDIO SOBRE EL USO DE LOS SISTEMAS DE CLASIFICACIÓN BASADOS EN REGLAS DIFUSAS EN PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN CON CLASES NO BALANCEADAS

Alberto Fernández Hilario

Departamento de C.C.I.A.
E.T.S. de Ingeniería
en Informática
Universidad de Granada
E-mail: alfh@ugr.es

Salvador García

Departamento de C.C.I.A.
E.T.S. de Ingeniería
en Informática
Universidad de Granada
E-mail: salvagl@decsai.ugr.es

Francisco Herrera

Departamento de C.C.I.A.
E.T.S. de Ingeniería
en Informática
Universidad de Granada
E-mail: herrera@decsai.ugr.es

María José del Jesus

Departamento de Informática
Escuela Politécnica Superior
Universidad de Jaén
E-mail: mjjesus@ujaen.es

Resumen

En este trabajo realizamos un estudio preliminar del uso de los sistemas de clasificación basados en reglas difusas en problemas de clasificación con clases no balanceadas. Queremos evaluar los mecanismos de preprocesamiento de instancias junto con la granularidad de las particiones.

Utilizaremos modelos simples de bases de reglas obtenidos con el método de Chi y coautores que extienden el conocido método de Wang y Mendel a problemas de clasificación.

Los resultados obtenidos indican que el paso previo de selección de instancias y/o sobremuestreo es necesario. También comprobamos que los sistemas de clasificación basados en reglas difusas poseen un rendimiento similar al clasificador 1-NN. Por último, observamos que se produce un alto sobreaprendizaje cuando se utilizan 7 etiquetas por variable. Analizaremos este hecho y discutiremos algunas propuestas al respecto.

Palabras Clave: Sistemas de Clasificación Basados en Reglas Difusas, Selección de Instancias, Sobremuestreo, Conjunto de Datos No Balanceados.

1. INTRODUCCIÓN.

El diseño de un sistema de clasificación, desde el punto de vista del aprendizaje supervisado, consiste en el establecimiento de una regla de decisión que permita determinar la clase de un nuevo ejemplo dentro de un conjunto de clases conocido. Cuando este proceso de extracción del conocimiento utiliza como herramienta

de representación las reglas difusas, el sistema de clasificación obtenido se denomina sistema de clasificación basado en reglas difusas (SCBRD) [4].

En el ámbito de los problemas de clasificación nos encontramos con frecuencia con la presencia de clases con un porcentaje de patrones muy diferente entre ellas, clases con un alto porcentaje de patrones y clases con un bajo porcentaje de patrones. Estos problemas reciben el nombre de “problemas de clasificación con clases no balanceadas” y recientemente están siendo objetivo de estudio en el ámbito del aprendizaje automático [3].

Los sistemas de aprendizaje pueden tener dificultades para aprender el concepto relativo a la clase minoritaria; así, en la literatura especializada se suelen utilizar técnicas de preprocesamiento para ajustar las bases de datos a un formato más balanceado. [2].

Estudiando la literatura especializada, hemos encontrado solo unos pocos trabajos [10, 11, 12] que estudian el uso de clasificadores difusos para este problema, aunque desde el punto de vista de los sistemas difusos aproximativos y no de los descriptivos, que son los utilizados en este trabajo.

En este trabajo nos hemos marcado como objetivo analizar el comportamiento de los SCBRDs aplicados a bases de datos con clases no balanceadas. Queremos evaluar los mecanismos de preprocesamiento de instancias que se suelen utilizar en el ámbito de estos problemas en cooperación con los SCBRDs, y estudiar la importancia de la granularidad de las particiones difusas en estos problemas.

La organización del trabajo es como sigue. En la Sección 2 introducimos los componentes de un SCBRD y el algoritmo de aprendizaje inductivo utilizado. La Sección 3 presenta la manera de evaluar los sistemas de clasificación en dominios con conjuntos de datos no balanceados. En la Sección 4 introducimos las técnicas de preprocesamiento que utilizamos en ese trabajo. En la Sección 5 se muestra el estudio experimental realizado

con tres conjuntos de datos distintos. Finalmente, en la Sección 6 presentamos algunas conclusiones sobre el estudio realizado.

2. SISTEMAS DE CLASIFICACIÓN BASADOS EN REGLAS DIFUSAS

Un SCBRD está compuesto por una Base de Conocimiento (BC) y un Método de Razonamiento Difuso (MRD) que, utilizando la información de la BC, determina una clase para cualquier patrón de datos admisible que llegue al sistema.

La potencia del razonamiento aproximado reside en la posibilidad de obtención de un resultado (una clasificación) incluso cuando no tengamos compatibilidad exacta (con grado 1) entre el ejemplo y el antecedente de las reglas.

2.1. Base de Conocimiento

La BC está formada por dos componentes:

- La *Base de Datos* (BD), que contiene la definición de los conjuntos difusos asociados a los términos lingüísticos utilizados en la Base de Reglas.
- La *Base de Reglas* (BR), formada por un conjunto de reglas de clasificación

$$R = \{R_1, \dots, R_L\} \quad (1)$$

de uno de los tipos siguientes utilizados en la literatura especializada para SCBRDs [5]:

- a) Reglas difusas con una clase en el consecuente

$$R_k : \quad \text{Si } X_1 \text{ es } A_1^k \text{ y } \dots \text{ y } X_N \text{ es } A_N^k \\ \text{entonces } Y \text{ es } C_j \quad (2)$$

Donde $X_1, \dots, X_N$ son las variables asociadas a los diferentes atributos del sistema de clasificación, $A_1^k, \dots, A_N^k$ son las etiquetas lingüísticas utilizadas para discretizar los dominios continuos de las variables, e Y es la variable que indica la clase C_j a la cual pertenece el patrón.

- b) Reglas difusas con una clase y un grado de certeza asociado a la clasificación para esa clase en el consecuente

$$R_k : \quad \text{Si } X_1 \text{ es } A_1^k \text{ y } \dots \text{ y } X_N \text{ es } A_N^k \\ \text{entonces } Y \text{ es } C_j \text{ con grado } r_k \quad (3)$$

Donde r_k es el grado de certeza asociado a la clasificación de la clase C_j para los ejemplos pertenecientes al subespacio difuso delimitado por el antecedente de la regla.

- c) Reglas difusas con grados de certeza asociados a cada una de las clases en el consecuente.

$$R_k : \quad \text{Si } X_1 \text{ es } A_1^k \text{ y } \dots \text{ y } X_N \text{ es } A_N^k \\ \text{entonces } (r_1^k, \dots, r_M^k) \quad (4)$$

Donde r_j^k es el grado de certeza de la regla R_k para predecir la clase C_j para un ejemplo perteneciente a la región difusa representada por el antecedente de la regla.

En nuestro caso vamos a utilizar reglas difusas del tipo (b) para el estudio realizado.

2.2. Método de Razonamiento Difuso.

El MRD es un procedimiento de inferencia que utiliza la información de la BC para predecir una clase ante un ejemplo no clasificado. Tradicionalmente en la literatura especializada [5] se ha utilizado el MRD del máximo, también denominado MRD clásico o de la regla ganadora, que considera la clase indicada por una sola regla teniendo en cuenta el grado de asociación del consecuente de la regla sobre el ejemplo. Otros MRDs combinan la información aportada por todas las reglas que representan el conocimiento de la zona a la que pertenece el ejemplo se estudian en [5]. En este trabajo utilizaremos, además del MRD clásico, el MRD de combinación aditiva de los grados de asociación de los consecuentes de las reglas para cada clase.

A continuación presentamos el modelo general de razonamiento difuso que combina la información proporcionada por las reglas difusas compatibles con el ejemplo.

En el proceso de clasificación del ejemplo $e = (e_1, \dots, e_N)$, los pasos del modelo general de un MRD son los siguientes:

1. Calcular el grado de emparejamiento del ejemplo con el antecedente de las reglas.
2. Calcular el grado de asociación del ejemplo a la clase consecuente de cada regla mediante una función de agregación entre el grado de emparejamiento y el grado de certeza de la regla con la clase asociada.
3. Determinar el grado de asociación del ejemplo con las distintas clases.
4. Clasificación. Para ello aplicaremos una función de decisión F sobre el grado de asociación del

ejemplo con las clases que determinará, en base al criterio del máximo, la etiqueta de clase v a la que corresponda el mayor valor.

En el punto (3) es donde se distinguen los dos métodos usados en este estudio, esto es, utilizar la función del máximo para seleccionar la regla con mayor grado de asociación para cada clase, y utilizar el funcional suma sobre los grados de asociación de las reglas asociadas a cada clase.

2.3. Algoritmo de Wang y Mendel aplicado a problemas de clasificación.

Para nuestra experimentación hemos utilizado la extensión del Algoritmo de Wang y Mendel [13] a problemas de clasificación [4].

Este método de diseño de SCBRDs establece las relaciones entre las variables del problema y establece una correspondencia entre el espacio de características y el de clases en un proceso que sigue esta serie de pasos:

1. *Establecimiento de las particiones lingüísticas.* Una vez determinado el dominio de variación de cada característica X_i , se calculan las particiones difusas.

2. *Generación de una regla difusa para cada ejemplo* $e^h = (e_1^h, \dots, e_N^h, C_h)$. Para ello es necesario:

- 2.1 Calcular los grados de pertenencia del ejemplo e^h a las distintas regiones difusas.
- 2.2 Asignar el ejemplo e^h a la región difusa con mayor grado de pertenencia.
- 2.3 Generar una regla para el ejemplo, cuyo antecedente está determinado por la región difusa seleccionada y con la etiqueta de clase del ejemplo en el consecuente.
- 2.4 Calcular el grado de certeza. Para ello se determinará el cociente S_j/S , siendo S_j la suma del grado de pertenencia de los ejemplos de entrenamiento de la clase C_j a la región difusa determinada por el antecedente de la regla, y S la suma del grado de pertenencia a la misma región de todos los ejemplos independientemente de la clase a la que pertenezcan.

3. EVALUACIÓN DE CLASIFICADORES EN DOMINIOS NO BALANCEADOS.

Existen estudios en la literatura [14] que muestran que la tasa de error de la clasificación de las reglas de la

clase minoritaria es 2 ó 3 veces mayor que la de las reglas que identifican a los ejemplos de la clase mayoritaria y que los ejemplos de la clase minoritaria son menos probables a ser predecidos que los ejemplos de la clase mayoritaria.

La forma más correcta de evaluar el rendimiento de los clasificadores está basada en el análisis de la matriz de confusión. En la tabla 1 se ilustra una matriz de confusión para un problema de dos clases, con los valores para la clases positiva y negativa. Desde esta matriz es posible extraer un número de métricas ampliamente usadas para medir el rendimiento de los sistemas de aprendizaje, como la Tasa de Error, definida como $Err = \frac{FP+FN}{VP+FN+FP+VN}$ y Tasa de Acierto, definido como $Acierto = \frac{VP+VN}{VP+FN+FP+VN} = 1 - Err$.

Cuadro 1: Matriz de confusión para un problema de dos clases

	Predic. Positiva	Predic. Negativa
Clase Pos.	Verd. Positivo (VP)	Falso Negat. (FN)
Clase Neg.	Falso Positivo (FP)	Verd. Negat. (VN)

Frente al uso de la tasa de error (o acierto), se consideran más correctas otro tipo de métricas en el ámbito de los problemas no balanceados. Concretamente, a partir de la Tabla 1 es posible crear cuatro medidas de rendimiento que miden directamente la calidad de clasificación para las clases positivas y negativas independientemente:

Tasa de falsos negativos $FN_{tasa} = \frac{FN}{VP+FN}$ o porcentaje de los casos positivos mal clasificados.

Tasa de falsos positivos $FP_{tasa} = \frac{FP}{FP+VN}$ o porcentaje de los casos negativos.

Tasa de verdaderos negativos $VN_{tasa} = \frac{VN}{FP+VN}$ o porcentaje de los casos negativos correctamente clasificados.

Tasa verdaderos positivos $VP_{tasa} = \frac{VP}{VP+FN}$ o porcentaje de casos positivos correctamente clasificados.

Estas cuatro medidas de rendimiento tienen la ventaja de ser independientes de los costes por clase y de probabilidades previas. La meta de un clasificador es minimizar las tasas de falsos positivos y falsos negativos o, de forma similar, maximizar las tasas de verdaderos positivos y negativos.

La medida utilizada en este trabajo es la media geométrica [1], que se define como $g = \sqrt{a^+ \cdot a^-}$, donde a^+ denota el acierto en los ejemplos positivos (VP_{tasa}), y a^- es el acierto en los ejemplos negativos (VN_{tasa}). Esta medida trata de maximizar el acierto de cada una de las dos clases mientras mantiene estos aciertos balanceados, se podría decir que es una medida de evaluación que junta dos objetivos.

Cuadro 2: Información relevante para cada una de las bases de datos utilizadas

Conj. de Datos	#Ejemplos	#Atributos	Clase (min., may.)	%Clase(min.,may.)
Ecoli	336	7	(iMU, Remaind.)	(10'42,89'58)
Haberman	306	3	(Die, Survive)	(26'47,73'53)
Pima	768	8	(1,0)	(34'77,66'23)

4. PREPROCESAMIENTO DE DATOS.

En este trabajo evaluamos diversos métodos de selección de instancias y técnicas de sobremuestreo para ajustar la distribución de clases en los datos de entrenamiento. En concreto hemos escogido los siguientes métodos que han sido estudiados en [2]:

- **“One-side selection”** (OSS) [7] es un método de selección de instancias resultado de la aplicación de enlaces de Tomek [9] seguido de la aplicación de CNN (Condensed Nearest Neighbor). Los enlaces de Tomek se usan como un método de selección de instancias y elimina ruido y ejemplos fronterizos de la clase mayoritaria. CNN pretende eliminar los ejemplos de la clase mayoritaria que están distantes de la frontera de decisión.
- **“Neighborhood Cleaning Rule”** (NCL) [8] usa el método de Wilson ENN (Edited Nearest Neighbor Rule) [15] para eliminar ejemplos de la clase mayoritaria. ENN elimina cualquier ejemplo cuya etiqueta de clase difiera de la clase de al menos dos de sus tres vecinos más cercanos. Para un problema de dos clases, el algoritmo NCL puede describirse de la siguiente forma: para cada ejemplo e_i en el conjunto de entrenamiento, se buscan sus tres vecinos más cercanos. Si e_i pertenece a la clase mayoritaria y la clasificación dada por sus tres vecinos más cercanos contradice la clase original de e_i , entonces e_i es eliminado. Si e_i pertenece a la clase minoritaria y sus tres vecinos más cercanos son de la clase mayoritaria, entonces dichos vecinos se eliminan.
- **“Random over-sampling”** (sobremuestreo aleatorio). Es un método no heurístico que intenta ajustar la distribución de clases a través de la replicación aleatoria de ejemplos en la clase minoritaria.
- **“Random under-sampling”** (selección de instancias aleatoria). Es también un método no heurístico que pretende ajustar la distribución de clases a través de la eliminación aleatoria de ejemplos de la clase mayoritaria.

Algunos autores opinan que el “random over-sampling” puede incrementar las posibilidades de caer en el sobreajuste, dado que realiza copias exactas de ejemplos de la clase minoritaria. Por otro lado, el mayor defecto del “random under-sampling” es que este método puede descartar datos potencialmente útiles que pueden ser importantes para el proceso de inducción.

5. ESTUDIO EXPERIMENTAL.

Hemos seleccionado tres bases de datos del UCI que poseen diferentes grados de “no balanceo”. La tabla 2 resume los datos empleados en este estudio. Para cada conjunto de datos, muestra el número de ejemplos (#ejemplos), número de atributos (#atributos), nombre de cada clase (minoritaria y mayoritaria) junto con la distribución de clases. Los atributos son discretos.

Para realizar un estudio comparativo vamos a utilizar un modelo de validación cruzada de orden 10 (10-fcv), consistente en realizar 10 particiones distintas para conjuntos de entrenamiento y prueba, con un 90 y un 10 % de los ejemplos del conjunto de datos para cada uno respectivamente.

Utilizamos los siguientes parámetros:

- Número de etiquetas: 5 y 7 etiquetas.
- Grado de emparejamiento: T-norma mínimo.
- Forma de combinación del grado de emparejamiento y el grado de certeza: operador mínimo
- Tipo de Inferencia: Método clásico o de la regla ganadora (WMRG) y combinación aditiva o de la suma (WMCA).

En la tabla 3 se muestran los porcentajes de ejemplos para cada clase tras realizar el rebalanceo.

Cuadro 3: Porcentaje de clases de cada clase tras rebalanceo en promedio.

Rebalanceo	% Positivas	% Negativas
NCL	36.12	63.88
OSS	41.40	58.60
RandomOS	50.00	50.00
RandomUS	50.00	50.00

Cuadro 4: Resultados estadísticos para la base de datos Ecoli.

Clasificador	Método de Rebalanceo	a_e^-	a_e^+	MG_E	a_p^-	a_p^+	MG_P
1-NN	Ninguno	<i>94.13</i>	50.77	69.13	<i>94.05</i>	50.0	68.58
1-NN	NCL	91.84	88.25	90.03	90.73	76.67	83.4
1-NN	OSS	89.44	72.4	80.47	90.05	78.33	83.99
1-NN	RandomOS	<i>94.13</i>	100.0	97.02	<i>94.05</i>	50.0	68.58
1-NN	RandomUS	83.46	92.71	87.97	82.42	<i>90.0</i>	<i>86.13</i>
WMRG5	Ninguno	98.34	65.34	80.16	96.01	51.67	70.43
WMRG5	NCL	91.21	95.24	93.21	88.7	83.33	85.97
WMRG5	OSS	85.71	91.41	88.52	84.72	84.17	84.44
WMRG5	RandomOS	88.78	99.69	<i>94.08</i>	86.72	<i>90.0</i>	88.34
WMRG5	RandomUS	76.12	100.0	87.24	74.8	<i>90.0</i>	82.05
WMRG7	Ninguno	<i>97.42</i>	78.37	87.37	<i>91.04</i>	59.17	73.39
WMRG7	NCL	93.39	94.61	94.0	86.06	76.67	81.23
WMRG7	OSS	74.2	79.07	76.6	70.41	66.67	68.51
WMRG7	RandomOS	92.1	97.77	<i>94.89</i>	84.41	84.17	<i>84.29</i>
WMRG7	RandomUS	65.08	99.36	80.41	63.85	<i>87.5</i>	74.75
WMCA5	Ninguno	<i>97.34</i>	64.13	79.01	<i>95.02</i>	53.33	71.19
WMCA5	NCL	94.35	83.83	88.94	92.35	76.67	84.15
WMCA5	OSS	87.45	83.84	85.63	86.72	85.0	85.86
WMCA5	RandomOS	91.36	98.08	<i>94.66</i>	89.04	86.67	<i>87.85</i>
WMCA5	RandomUS	75.34	100.0	86.8	73.8	93.33	82.99
WMCA7	Ninguno	<i>97.01</i>	85.68	91.17	<i>90.71</i>	64.17	76.29
WMCA7	NCL	92.73	94.92	93.82	86.05	84.17	<i>85.1</i>
WMCA7	OSS	74.57	79.71	77.09	70.08	63.33	66.62
WMCA7	RandomOS	93.06	95.54	<i>94.29</i>	85.73	84.17	84.95
WMCA7	RandomUS	64.82	100.0	80.51	63.18	<i>87.5</i>	74.35

Cuadro 5: Resultados estadísticos para la base de datos Haberman.

Clasificador	Método de Rebalanceo	a_e^-	a_e^+	MG_E	a_p^-	a_p^+	MG_P
1-NN	NCL	60.74	71.73	66.01	57.75	<i>57.92</i>	<i>57.83</i>
1-NN	Ninguno	<i>80.2</i>	35.67	53.48	<i>79.03</i>	33.33	51.33
1-NN	OSS	64.3	49.93	56.66	63.95	44.58	53.4
1-NN	RandomOS	<i>80.2</i>	88.34	84.17	77.71	33.33	50.89
1-NN	RandomUS	60.25	55.41	57.78	55.55	56.94	56.24
WMRG5	Ninguno	<i>97.73</i>	27.16	51.52	94.66	9.86	30.55
WMRG5	NCL	76.64	58.71	67.08	73.28	44.44	57.07
WMRG5	OSS	82.52	47.34	62.5	80.49	38.33	55.55
WMRG5	RandomOS	71.51	65.84	<i>68.62</i>	64.39	<i>50.69</i>	<i>57.13</i>
WMRG5	RandomUS	68.54	<i>66.39</i>	67.45	64.07	<i>50.69</i>	56.99
WMRG7	Ninguno	99.41	35.39	59.32	<i>90.2</i>	21.11	43.64
WMRG7	NCL	68.74	<i>75.17</i>	71.88	63.2	45.69	<i>53.74</i>
WMRG7	OSS	75.9	53.65	63.82	70.73	38.33	52.07
WMRG7	RandomOS	74.76	72.29	<i>73.52</i>	68.06	40.83	52.72
WMRG7	RandomUS	68.29	72.15	70.19	56.15	<i>49.44</i>	52.69
WMCA5	Ninguno	<i>98.02</i>	20.03	44.31	<i>94.64</i>	9.86	30.55
WMCA5	NCL	73.92	67.21	<i>70.49</i>	68.02	51.81	59.36
WMCA5	OSS	81.08	49.94	63.63	79.17	37.22	54.29
WMCA5	RandomOS	73.33	66.53	69.85	67.59	54.31	60.58
WMCA5	RandomUS	64.0	<i>75.45</i>	69.49	59.58	65.56	62.5
WMCA7	Ninguno	<i>98.42</i>	34.71	58.45	<i>90.63</i>	21.11	43.74
WMCA7	NCL	70.77	76.81	<i>73.73</i>	63.62	44.44	53.17
WMCA7	OSS	80.2	50.91	63.9	75.65	38.33	53.85
WMCA7	RandomOS	78.61	69.14	<i>73.72</i>	67.09	43.19	53.83
WMCA7	RandomUS	64.05	<i>77.91</i>	70.64	55.67	<i>58.19</i>	<i>56.92</i>

Cuadro 6: Resultados estadísticos para la base de datos Pima.

Clasificador	Método de Rebalanceo	a_e^-	a_e^+	MG_E	a_p^-	a_p^+	MG_P
1-NN	Ninguno	81.88	59.97	70.07	78.85	52.08	64.08
1-NN	NCL	67.55	87.89	77.05	64.88	78.59	71.41
1-NN	OSS	70.24	74.78	72.47	68.66	64.79	66.7
1-NN	RandomOS	81.88	81.44	81.66	78.85	52.08	64.08
1-NN	RandomUS	71.59	70.24	70.91	68.87	64.81	66.81
WMRG5	Ninguno	97.16	63.67	78.65	87.25	40.9	59.73
WMRG5	NCL	78.55	83.89	81.18	72.07	64.1	67.97
WMRG5	OSS	80.26	66.17	72.88	74.26	50.23	61.07
WMRG5	RandomOS	89.29	80.23	84.64	78.06	53.23	64.46
WMRG5	RandomUS	83.32	80.52	81.91	73.67	56.6	64.57
WMRG7	Ninguno	98.69	83.1	90.56	78.86	35.27	52.74
WMRG7	NCL	76.07	91.55	83.45	62.5	55.85	59.08
WMRG7	OSS	72.35	63.96	68.02	61.5	38.29	48.53
WMRG7	RandomOS	96.39	88.14	92.17	72.68	42.74	55.73
WMRG7	RandomUS	82.88	90.39	86.55	65.69	48.73	56.58
WMCA5	Ninguno	95.08	55.56	72.68	87.24	38.62	58.04
WMCA5	NCL	75.43	83.44	79.33	69.27	68.96	69.11
WMCA5	OSS	78.93	66.29	72.34	75.25	50.17	61.45
WMCA5	RandomOS	89.38	70.54	79.4	81.05	52.09	64.98
WMCA5	RandomUS	79.09	78.69	78.89	71.07	63.35	67.1
WMCA7	Ninguno	98.87	38.48	61.68	96.45	34.85	57.98
WMCA7	NCL	95.22	59.15	75.05	93.06	54.17	71.0
WMCA7	OSS	91.7	55.1	71.08	90.89	49.27	66.92
WMCA7	RandomOS	95.02	63.71	77.8	92.18	59.5	74.06
WMCA7	RandomUS	80.14	78.0	79.07	78.47	70.95	74.61

Las tablas 4, 5 y 6 muestran los resultados globales (en entrenamiento y prueba) para cada una de las tres bases de datos utilizadas en el estudio experimental, mostrando el comportamiento del clasificador 1-NN junto con los SCBRDs. Se pueden observar, por columnas:

- el método utilizado (clasificador), para el método de Wang y Mendel (WM) se indica el MRD utilizado y el número de etiquetas empleado (5-7)
- el método de rebalanceo empleado, donde “ninguno” expresa que se mantiene la base de datos original para el entrenamiento
- el porcentaje de aciertos por clase (a^- y a^+) donde el subíndice indica si se refiere a entrenamiento (e) o prueba (p). También se muestra la media geométrica (MG) para entrenamiento y prueba.

Los parámetros han sido escogidos de acuerdo al tipo de experimentación realizada. El número de etiquetas es suficientemente alto como para asegurarnos que se cubra de un modo adecuado todo el espacio de ejemplos sin caer en un excesivo sobreaprendizaje. Por otro lado el grado de emparejamiento es el clásico usado para reglas difusas, esto es, la t-norma mínimo. Sobre la forma de combinación del grado de emparejamiento y el grado de certeza usamos el operador mínimo puesto

que el operador producto no proporciona en general mejores resultados. Por último los tipos de inferencia usados son el clásico tomado como base y el de combinación aditiva para comprobar si puede mejorar el rendimiento del primero.

A continuación mostramos un breve análisis de los resultados. Dividimos nuestro estudio en dos partes, por un lado el uso del preprocesamiento para los problemas no balanceados y por otro la granularidad aplicada a las particiones lingüísticas de los clasificadores difusos.

- Nuestros resultados muestran que el preprocesamiento es necesario para mejorar el comportamiento de los métodos empleados, tanto en 1-NN, como para los basados en reglas difusas.

Concretamente se observa que los métodos de “sobremuestreo” proporcionan muy buenos resultados en la práctica. Además, el “sobremuestreo aleatorio” (random oversampling) considerado frecuentemente como un método poco propicio, proporciona resultados altamente competitivos. En cualquier caso este “sobremuestreo” puede introducir un coste de computación adicional si el conjunto de datos es relativamente grande pero no balanceado, además de mantener dentro del conjunto de entrenamiento datos que podrían contener ruido, lo cual no es deseable.

- Sobre el SCBRD, se muestra claramente en las tablas de resultados que el mejor mecanismo de inferencia es aquél que utiliza cooperación entre las reglas, esto es, el uso del MRD de combinación aditiva supera claramente al clásico que usa la mejor regla.

Además se muestra empíricamente que un exceso de etiquetas conlleva al sobreaprendizaje de datos, los resultados en entrenamiento son significativamente mejores que los de test cuando se utilizan 7 etiquetas por variable. Hay que tener en cuenta además que estamos usando bases de datos relativamente pequeñas y con pocos atributos, con lo que se acentúa más este comportamiento no deseado.

6. CONCLUSIONES.

En este trabajo analizamos el comportamiento de los SCBRDs junto con la aplicación de métodos de preprocesamiento de selección de instancias y “sobremuestreo” para tratar con el problema del aprendizaje de conjuntos de datos no balanceados.

Como ya hemos comentado, encontramos un sobreaprendizaje acentuado cuando utilizamos 7 etiquetas, pero por otra parte con 5 etiquetas no obtenemos porcentajes de clasificación altos. Es claro que clases con muy poco ejemplos pueden necesitar etiquetas con un soporte pequeño que permita recoger la información asociada a la clase pero sin incluir ejemplos de la otra clase, por tanto parece interesante la integración de etiquetas en diferente nivel de granularidad para recoger toda la información existente en la base de datos.

Siguiendo esta idea que comentamos, nos planteamos como trabajo futuro el uso de los algoritmos de aprendizaje de reglas difusas jerarquizadas [6], algoritmos que han mostrado un buen comportamiento en la combinación de particiones difusas de diferente granularidad en una jerarquía de etiquetas para problemas de regresión.

Como hemos comentado, este es un primer trabajo preliminar en el tema, e igualmente es necesario ampliar el estudio con nuevas bases de datos y analizar con más profundidad el equilibrio entre los métodos de preprocesamiento y los SCBRDs.

Referencias

- [1] R. Barandela, J.S. Sánchez, V. García, E. Rangel. Strategies for learning in class imbalance problems. *Pattern Recognition*, 36:3 849-851, 2003.
- [2] G.E.A.P.A. Batista, R.C. Prati, M.C. Monard. A study of the behavior of several methods for balancing machine learning training data. *SIGKDD Explorations* 6:1 20-29, 2004.
- [3] N.V. Chawla, N. Japkowicz, A. Kolcz. Editorial: special issue on learning from imbalanced data sets. *SIGKDD Explorations*, 6:1 1-6, 2004.
- [4] Z. Chi, H. Yan, and T. Pham. Fuzzy algorithms with applications to image processing and pattern recognition. *World Scientific*, 1996.
- [5] O. Cordón, M.J. del Jesus, and F. Herrera. A proposal on reasoning methods in fuzzy rule-based classification systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 20(1):21-45, 1999.
- [6] O. Cordón, F. Herrera, I. Zwir. Linguistic Modeling by Hierarchical Systems of Linguistic Rules. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10:1 2-20, 2002.
- [7] M. Kubat, and S. Matwin. Addressing the Course of Imbalanced Training Sets: One-sided Selection. *In ICML* pp. 179-186, 1997.
- [8] J. Laurikkala. Improving Identification of Difficult Small Classes by Balancing Class Distribution. *T.R. A-2001-2*, University of Tampere, 2001.
- [9] I. Tomek. Two Modifications of CNN. *IEEE Transactions on Systems Man and Communications*, SMC-6, 769-772, 1976.
- [10] S. Visa, and A. Ralescu. Learning Imbalanced and Overlapping Classes using Fuzzy Sets *Workshop on Learning from Imbalanced Datasets II, ICML*, Washington DC., 2003
- [11] S. Visa, and A. Ralescu. Fuzzy Classifiers for Imbalanced, Complex Classes of Varying Size. *In IPMU*, Perugia (Italy), 393-400, 2004.
- [12] S. Visa, and A. Ralescu. The Effect of Imbalanced Data Class Distribution on Fuzzy Classifiers - Experimental Study. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 749-754, 2005
- [13] L.X. Wang and J.M. Mendel. Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 25(2):353-361, 1992.
- [14] G. M. Weiss, and H. Hirsh. A quantitative study of small disjuncts. *In Proceedings of the Seventeenth National Conference on Artificial Intelligence*, pages 665-670, AAAI Press, 2000.
- [15] D.L. Wilson. Asymptotic Properties of Nearest Neighbor Rules Using Edited Data. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Communications* 2, 3, 408-421, 1972.

APORTACION AL PROCESO DE DESCUBRIMIENTO DE CONOCIMIENTO UTILIZANDO TECNICAS DE MORFOLOGÍA MATEMATICA

Frago, N.

Universidad Publica de Navarra, Dpto. Automática
y Computación, 31006 Pamplona, España

noe.frago@unavarra.es

Fuentes-González, R.

Universidad Publica de Navarra, Dpto. Automática
y Computación, 31006 Pamplona, España

rfuentes@unavarra.es

Resumen

Se estudia el efecto de filtrado morfológico (apertura, cierre y top-hat) y su interpretación sobre subconjuntos borrosos de tablas, cuyas filas son registros y cuyas columnas son campos. Los filtros se implementan como relaciones binarias estructurantes. Se justifica que con estos operadores, se puede obtener información útil a partir de la tabla de registros, y finalmente se analizan diversas características de los operadores definidos, ilustrando los resultados con un ejemplo.

Palabras Clave: Descubrimiento de conocimiento en Bases de Datos, Morfología Matemática, Análisis de Datos.

1 Introducción

En el campo del procesamiento de imágenes, el término Morfología Matemática [1-5] hace referencia a una metodología específica para el análisis de imágenes, tanto imágenes binarias como con diferentes tonos de gris o color. Este análisis permite la obtención de información relevante, subyacente en dichas imágenes digitalizadas. Como se justificó en [6], la aplicación de las técnicas de la Morfología Matemática, en el contexto de análisis de datos, posibilita la selección de registros de una tabla U , a partir de un subconjunto borroso A de U y de una relación R (borrosa o nítida) en U . La novedad de estas técnicas reside en que los criterios de selección, se realizan fundamentalmente teniendo en cuenta características de vecindad entre elementos, vecindad que se determina mediante la mencionada relación binaria R . Los efectos de filtrado son aquí el resultado de la composición de los operadores básicos erosión y dilatación, que se construyen a su vez utilizando normas e implicaciones borrosas. En este trabajo, por una parte, se extienden resultados anteriores obtenidos en [6], y por otra, se justifica la teoría mediante su aplicación a un ejemplo real que proporciona una base de datos estructurada con 15.000 registros.

2 Antecedentes: operador erosión y operador dilatación

La erosión y la dilatación son en la Morfología Matemática las operaciones básicas, a partir de las cuales se definen la mayoría de los filtros utilizados en el procesamiento de imágenes, por ello comenzaremos aquí con las definiciones de estas operaciones, adecuándolas a los objetivos de nuestro trabajo.

Sea U un referencial, conjunto finito cuyos elementos son registros en una base de datos. Sea $([0,1], \leq)$ la cadena completa $[0,1] \subseteq \mathfrak{R}$ con la relación de orden usual $\leq$. Consideramos en $[0,1]$ las siguientes operaciones:

Una t -norma, $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$
 $(a,b) \mapsto aTb$

tal que $aTsupM = sup(aTM)$ para todo $M \subseteq \mathfrak{R}$

La implicación borrosa, $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$
 $(a,b) \mapsto I(a,b)$

obtenida por residuación de la t -norma:

$$I(a,b) = sup\{w / aTw \leq b\}.$$

Con estos elementos y fijada una relación borrosa R en U :

$$R: U \times U \rightarrow [0,1], \\ (x,y) \mapsto R(x,y)$$

llamada *relación estructurante*, y un subconjunto borroso A de U , en [6] los autores proponen la siguiente definición de los operadores erosión y dilatación.

Definición 1.- Si $A: U \rightarrow [0,1]$ es un subconjunto borroso de registros, la *erosión* y la *dilatación morfológicas* de A asociadas a la relación R son respectivamente los subconjuntos borrosos $E_R(A)$ y $D_R(A)$ definidos por

$$E_R(A)(x) = inf\{ I(R^{op}(x,y), A(y)) / y \in U \} \quad \forall x \in U$$

$$D_R(A)(x) = sup\{ R(x,y)TA(y) / y \in U \} \quad \forall x \in U, \quad (1)$$

siendo R^{op} la relación opuesta de R tal que,

$$R^{op}(x,y) = R(y,x) \quad \forall (x,y) \in U \times U.$$

Estos operadores nos permiten manipular los registros de una tabla U , a partir de un subconjunto A y una relación R (borrosos o no), obteniendo los subconjuntos $E_R(A)$ y $D_R(A)$. El grado de pertenencia de un registro de U a cada uno de estos conjuntos se ha determinado, no por las características de dicho elemento, sino en función de las relaciones de sus respectivas R -vecindades con el conjunto A , relaciones que están determinadas por el operador utilizado.

Un caso particular interesante se obtiene, al considerar los operadores morfológicos asociados a la implicación de Lukasiewicz en $[0,1]$. Concretamente, considerando en $[0,1]$ la t -norma determinada por la expresión:

$$aTb = max(0, a + b - 1) \quad \forall (a,b) \in [0,1] \times [0,1],$$

cuya implicación asociada es la de Lukasiewicz:

$$I(a,b) = min(1, 1 - a + b) \quad \forall (a,b) \in [0,1] \times [0,1],$$

obtenemos que las expresiones (1) para los operadores erosión y dilatación son ahora:

$$E_R(A) = min\{ min(1, 1 - R(y,x) + A(y)) / y \in U \} \quad \forall x \in U$$

$$D_R(A)(x) = max\{ max(0, R(x,y) + A(y) - 1) / y \in U \} \quad \forall x \in U,$$

El interés de este caso reside en que, al estar además relacionadas la t -norma y la implicación de Lukasiewicz por medio de la negación de Zadeh como sigue:

$I - (aT(I - b)) = I(a, b) \quad \forall (a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$,
se induce también una relación entre los operadores erosión y dilatación morfológicos:

$$E_R(A')' = D_R^{op}(A) \quad \forall A \in [0, 1]^U, \quad (2)$$

donde B' representa el subconjunto borroso tal que

$$B'(x) = I - B(x) \quad \forall x \in U$$

Aunque el elemento estructurante, utilizado para calcular erosiones y dilataciones morfológicas puede ser cualquier relación borrosa $R \in [0, 1]^{U \times U}$, hacemos notar que aparece otro caso distinguido, cuando se utilizan como elementos estructurantes únicamente relaciones nítidas R , (es decir tales que $R(U \times U) \subseteq \{0, 1\}$). En este caso las expresiones para la erosión y dilatación morfológicas no dependen de la t-norma y de la implicación consideradas, ya que las expresiones (1) se reducen ahora a:

$$\begin{aligned} E_R(A)(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } (R_x^{op} = \emptyset) \text{ ó } (A(z) = 1 \text{ para todo } z \in R_x^{op}) \\ \inf \{A(z) \mid R(z, x) = 1\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ D_R(A)(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } R_x = \emptyset \text{ ó } A(z) = 0 \quad \forall z \in R_x \\ \sup \{A(z) \mid R(x, z) = 1\} & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (1')$$

Observar que $E_R(A)(x) = 0$ si y solo si existe $z \in R_x^{op}$ tal que $A(z) = 0$, y que $D_R(A)(x) = 0$ si y solo si $R_x = \emptyset$ ó $A(z) = 0$ para todo $z \in R_x$.

En estas condiciones, si para un $x \in U$ se verifica que $E_R(A)(x) = \alpha$ entonces la R^{op} -vecindad de x esta incluida en el α -corte de A , $R_x^{op} \subseteq A_\alpha$. En el caso de la dilatación, si para un $x \in U$ se verifica que $D_R(A)(x) = \alpha$ entonces, para todo z perteneciente a la R -vecindad de x se verifica que $A(z) \leq \alpha$.

En estos casos se demuestra que si $\leq$, $\wedge$ y $\vee$ representan las extensiones puntuales habituales a $[0, 1]^U$ de la relación de orden y de las operaciones mínimo y máximo en $[0, 1]$, los operadores erosión y dilatación morfológicas cumplen las siguientes propiedades.

Teorema 1.- Sean A y B subconjuntos borrosos de registros, y sea R una relación binaria nítida entre registros. Entonces los operadores erosión y dilatación morfológicas verifican:

- 1) $E_R(A')' = D_R^{op}(A) \quad \forall A \in [0, 1]^U$
 - 2) Si $A \leq B$, entonces:
 $E_R(A) \leq E_R(B)$ y $D_R(A) \leq D_R(B)$
 - 3) $E_R(A \wedge B) = E_R(A) \wedge E_R(B) \quad \forall (A, B) \in [0, 1]^U \times [0, 1]^U$
 - 4) $D_R(A \vee B) = D_R(A) \vee D_R(B) \quad \forall (A, B) \in [0, 1]^U \times [0, 1]^U$
- Si la relación R es reflexiva, entonces $E_R(A) \subseteq A \subseteq D_R(A)$, lo que justifica los nombres de erosión y dilatación.

3 Filtros Morfológicos: apertura y cierre morfológicos

La composición de los operadores anteriores, nos permite construir nuevos operadores (filtros morfológicos) sobre subconjuntos de registros [6], en particular los filtros más simples son la apertura y el cierre, con estos filtros, al igual que en el contexto del procesamiento de imágenes, se pueden construir nuevos filtros por unión e intersección de aquellos (en paralelo) o por composición (en serie) de

los mismos. Definimos a continuación los operadores apertura y cierre.

Definición 2.- Sea A un subconjunto de registros, y R una relación borrosa entre registros. Se define la apertura morfológica y el cierre morfológico de A asociados a la relación estructurante R respectivamente por:

$$@_R(A) = D_R(E_R(A)), \quad C_R(A) = E_R^{op}(D_R^{op}(A)) \quad \forall A \in [0, 1]^U \quad (2)$$

La forma en que se construyen los operadores apertura y cierre determinan su función de filtro, la erosión ("eliminar") y la dilatación ("añadir") caracteriza los nuevos subconjuntos obtenidos $@_R(A)$ y $C_R(A)$.

Si la relación R es reflexiva entonces,

$$E_R(A) \subseteq @_R(A) \subseteq A \subseteq C_R(A) \subseteq D_R(A).$$

Las definiciones anteriores proporcionan nuevos operadores apertura $@$ y cierre C en $[0, 1]^U$.

Si I es la implicación residuada de la t-norma T y si E_R , D_R son los operadores morfológicos dados por (1), estos nuevos operadores apertura $@_R$ y cierre C_R , verifican el siguiente teorema.

Teorema 2.- Sean A y B un subconjunto de registros, y R una relación estructurante entre registros, entonces los operadores apertura y cierre verifican:

- 1) Si $A \leq B$, entonces: $@_R(A) \leq @_R(B)$ y $C_R(A) \leq C_R(B)$
 - 2) $@_R(A) \leq A \leq C_R(A) \quad \forall A \in [0, 1]^U$
 - 3) $@_R(@_R(A)) = @_R(A)$, $C_R(C_R(A)) = C_R(A) \quad \forall A \in [0, 1]^U$.
- Además, en el caso en que T sea la t-norma $a \ T \ b = \max(0, a + b - 1) \quad \forall (a, b)$ o si la relación estructurante R es nítida, entonces:

- 4) $(@_R(A))' = C_R(A') \quad \forall A \in [0, 1]^U$.

Al igual que en el contexto del tratamiento de imágenes, podemos considerar nuevos operadores asociados como los gradientes, utilizados en el procesamiento de imágenes para la obtención de contornos, como es el Top-Hat.

Definición 3.- Sea A un subconjunto borroso de registros, y R una relación borrosa entre registros. Se define el top-hat apertura TH_a (respectivamente cierre TH_c) de A asociado a R por:

$$TH_a(A) = A \wedge (@_R(A))' \quad \text{y} \quad TH_c(A) = C_R(A) \wedge A' \quad (2)$$

Obtenemos así los operadores top-hat apertura TH_a y top-hat cierre TH_c en $[0, 1]^U$.

4 Extracción de información de una base de datos utilizando filtros morfológicos

En este trabajo, a partir de las definiciones (1), se aborda una nueva metodología para el proceso de extracción de conocimiento a partir de la información que está almacenada en una tabla estructurada U de datos. Utilizaremos en esta metodología los operadores erosión, dilatación, apertura y cierre morfológico definidos en (1) y (2) como herramientas. Estos operadores actuarán sobre un subconjunto borroso A de la tabla U .

En lo que sigue, la relación estructurante R escogida para erosionar o dilatar el subconjunto borroso A , será una relación nítida y en consecuencia, las expresiones para los operadores básicos erosión y dilatación serán las que aparecen en (1') y sus correspondientes operadores asociados apertura y cierre.

4.1 EFECTO DE LOS OPERADORES MORFOLÓGICOS EN UN CASO CONCRETO

Utilizaremos el universo U de los registros de una tabla de acceso público que se puede encontrar en la dirección www.isc.uic.edu/~mlearn/MLSummary.html, que está relacionada con censos de EE.UU. Dicha tabla tiene 15.000 registros y en ella se recogen datos relativos a personas, y son datos que aparecen recogidos en los 14 campos de la Tabla 1.

Tabla 1

Ca1	Edad	Ca8	parentesco
Ca2	Tipo de empleo	Ca9	Etnia
Ca3	Sueldo	Ca10	Sexo
Ca4	Estudios	Ca11	Ganancia
Ca5	Años de estudio	Ca12	Pérdida
Ca6	Estado civil	Ca13	Horas de trabajo a la semana
Ca7	Empleo	Ca14	País de nacimiento

En primer lugar, construimos un subconjunto borroso A de U , es decir, una función de grado de pertenencia $A: U \rightarrow [0,1]$. Para ello, consideramos la función obtenida por el cociente $SalAnuHts(x) = \frac{Ca3(x)}{Ca13(x)}$, que llamamos salario anual por hora de trabajo semanal. Como $Ca3(x)$ es el salario anual y $Ca13(x)$ el número de horas de trabajo a la semana, el cociente puede interpretarse como una medida de la “bondad” del pago del trabajo. A continuación, utilizando este cociente y el valor $SalAnuHtsMe$, (salario anual por hora de trabajo semanal medio), definido por

$$SalAnuHtsMe = \left(\sum_{i=1}^{15000} SalAnuHts(x_i) \right) / 15000 = 5757.$$

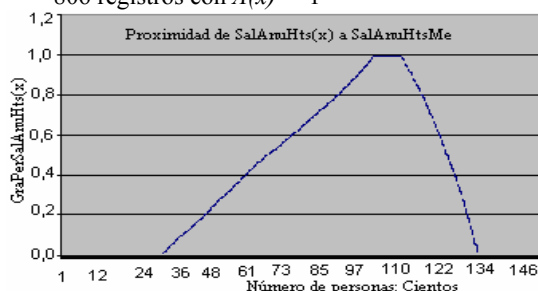
Construimos con esos valores el subconjunto borroso A :

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } SalAnuHts(x) < 2600 \\ \frac{SalAnuHts(x) - 2600}{5757 - 2600} & \text{si } 2600 \leq SalAnuHts(x) \leq 5500 \\ 1 & \text{si } 5500 < SalAnuHts(x) < 6014 \\ \frac{8904 - SalAnuHts(x)}{8914 - 5757} & \text{si } 6014 < SalAnuHts(x) \leq 8914 \\ 0 & \text{si } 8914 < SalAnuHts(x) \end{cases}$$

Se puede considerar, que $A(x)$ nos da una medida de la proximidad por exceso o por defecto del $SalAnuHts(x)$ respecto del $SalAnuHtsMe$.

Con esta función de pertenencia para A , se obtiene:

- 9977 registros con $A(x) > 0$
- 7900 registros con $A(x) \geq 0,25$
- 5668 registros con $A(x) \geq 0,5$
- 3152 registros con $A(x) \geq 0,75$
- 806 registros con $A(x) = 1$



Gráfica 1: Función de pertenencia de A

En la Tabla 2 (ver Anexo) se recogen algunos datos sobre los conjuntos U , A , $E_R(A)$, etc., que hemos tomado como referencias en este análisis.

Los valores de la tabla 2 (véase anexo) son medias o porcentajes cuyo cálculo se realiza mediante:

$$Media(P, Q) = \frac{\sum_{x \in Sop(Q)} P(x)}{Card(Sop(Q))},$$

donde P se sustituye por A , $Ca1$, $Ca5$, $Ca13$ y donde Q se sustituye por U , A , $E_R(A)$,... La expresión $Sop(Q)$ representa el soporte de Q .

De forma similar se calculan los porcentajes.

Para obtener conocimiento de U a partir de A , utilizaremos como relación estructurante la relación binaria ordinaria (nítida) $R \subseteq U \times U$ definida por:

$$R(x, z) = 1 \Leftrightarrow (x.Ca1 = z.Ca1 \text{ AND } |x.Ca5 - z.Ca5| \leq 1 \text{ AND } x.Ca9 = z.Ca9 \text{ AND } x.Ca10 = z.Ca10).$$

Esta relación es reflexiva y simétrica, es decir, una relación de semejanza (o una tolerancia).

O lo que es lo mismo: “dos personas x y z están relacionadas si y sólo si x y z tienen la misma edad y sexo, son de la misma etnia y su diferencia de años de estudios es menor o igual a 1”. En este caso diremos que las personas x e y son semejantes.

4.2 EROSIÓN

La erosión del subconjunto borroso A mediante la semejanza R mencionados en el apartado anterior, proporciona un nuevo subconjunto borroso $E_R(A)$. Justificaremos que este último nos aporta, algún conocimiento sobre el colectivo U que no era evidente antes del proceso.

4.2.1 ANÁLISIS DE LA EROSIÓN DE A

Una persona $x \in U$ verifica que su grado de pertenencia a $E_R(A)$ es α , $(E_R(A))(x) = \alpha$, si y sólo si para todas las personas z semejantes a x se verifica que $A(z) \geq \alpha$. Es decir, la erosión ha seleccionado aquellas personas tales que sus semejantes tienen un $SalAnuHts$ más próximo al $SalAnuHtsMe$ que x . Por tanto, el subconjunto nítido $\{x \in U \mid E_R(A)(x) = \alpha\}$ está formado por las personas con un $SalAnuHts$ más alejado del $SalAnuHtsMe$ que sus semejantes.

Con los datos del Ejemplo 1, se obtiene que únicamente 658 registros de U tienen grado de pertenencia a $E_R(A)$ mayor que 0. En la Tabla 2 y las Gráfica 2-5 (ver Anexo) se recogen algunos datos del análisis de este subconjunto, y pueden observarse algunas de las diferencias más sobresalientes de $E_R(A)$ respecto de A : diferente composición étnica, porcentajes distintos entre mujeres y hombres, distintas medias de edad y años de estudio. Sin embargo, se aprecian pocas diferencias en la distribución respecto al grado de pertenencia entre los subconjuntos A y $E_R(A)$.

4.3 DILATACIÓN

De forma análoga a la erosión, la implementación de la expresión que aparece en (1') para la dilatación morfológica también proporciona conocimiento sobre el colectivo U :

4.3.1 ANÁLISIS DE LA DILATACIÓN DE A

En nuestro ejemplo, Si $D_R(A)(x) = \alpha$, significa que todas las personas semejantes x , tienen un *SalAnuHts* con un grado pertenencia al *SalAnuHtsMe* menor o igual que α .

Es decir, $\{x \in U \mid D_R(A)(x) = \alpha\}$ son las personas con un nivel retributivo más alto entre sus semejantes.

Se puede observar en la Tabla 2 y en las Gráficas 2-5, que existen pocas diferencias entre los subconjuntos A y $D_R(A)$ respecto a los parámetros estudiados.

Con los datos del Ejemplo 1, para el subconjunto borroso A y la relación nítida R mencionados, se obtiene que el soporte de la dilatación morfológica $D_R(A)$, (los elementos tales que $D_R(A)$ es mayor que 0), tiene 14751 registros (número muy próximo a los 15000 del referencial U), lo que justificaría las escasas diferencias obtenidas en las medias y porcentajes de la Tabla 2.

4.4 APERTURA

Analizamos ahora el conocimiento que aporta el operador apertura. Para ello y con el propósito de realizar una implementación eficiente del algoritmo correspondiente a la apertura en el caso que nos ocupa, hacemos notar lo siguiente:

Sea R una relación binaria ordinaria.

Si la relación es reflexiva, entonces:

$$@_R(A)(x) = \max \{ E_R(A)(z) \mid R(x, z) = 1 \},$$

(U finito, y or tanto, el supremo coincide con el máximo)

En particular se verifica:

$@_R(A)(x) = 1 \Leftrightarrow \exists z$ semejante a x tal que $A(y) = 1 \forall y$ semejante a z .

$$@_R(A)(x) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in R_x \text{ tal que } A(y) = 1 \forall y \in R_x^{op},$$

$$@_R(A)(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall z \in R_x \text{ se verifica que } \alpha \geq \min \{ A(y) \mid y \in R_z^{op} \},$$

$$@_R(A)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall z \in R_x \exists y \in R_z^{op} \text{ tal que } A(y) = 0.$$

Siendo $R_z^{op} = \{y \in U \mid R(z, y) = 1\}$ y $R_x = \{y \in U \mid R(x, y) = 1\}$

4.4.1 ANÁLISIS DE LA APERTURA DE A

Una persona x de U tiene un grado de pertenencia α al subconjunto $@_R(A)$, si para toda persona z semejante a x , se verifica que existen personas semejantes a z , con un *SalAnuHts* más alejado del *SalAnuHtsMe* que x . Debemos recordar aquí que la relación R , que estamos utilizando, no es transitiva.

Se puede observar en la Tabla 2 y en las Gráfica 2-5 algunas de las diferencias más sobresalientes de $@_R(A)$ respecto de A . Puede observarse: diferente composición étnica, porcentajes distintos entre varones y hembras, distintas medias de edad y años de estudio, mientras se

aprecian pocas diferencias en la distribución respecto al grado de pertenencia entre los subconjuntos A y $E_R(A)$

Con los datos del Ejemplo 1 se obtiene ahora que 766 registros de U tienen grado de pertenencia a $@_R(A)$ mayor que 0.

4.5 CIERRE

Para cualquier $x \in U$, el grado de pertenencia de x a la dilatación del subconjunto borroso A , con la relación binaria R , se ha definido como: $C_R(A) = E_R(D_R(A))$.

Si la relación es reflexiva, entonces:

$$C_R(A)(x) = \min \{ \max \{ A(y) \mid R(z, y) = 1 \} \mid R(z, x) = 1 \}$$

$$C_R(A)(x) = 0 \Leftrightarrow \text{existe } z \in R_x^{op}, \text{ tal que } A(y) = 0 \forall y \in R_z$$

$$C_R(A)(x) = 1 \Leftrightarrow \forall z \in R_x^{op} \text{ existe } y \in R_z, \text{ tal que } A(y) = 1$$

$$C_R(A)(x) = \alpha \Leftrightarrow \forall z \in R_x^{op} \text{ existe } y \in R_z, \text{ tal que } A(y) \geq \alpha$$

4.5.1 ANÁLISIS DEL CIERRE DE A

Sabemos que una persona x de U tiene un grado de pertenencia α al subconjunto $C_R(A)$, si y sólo si para toda persona z semejante a x , se verifica que existe una persona u semejante a z , tal que $A(y) \geq \alpha$.

Al igual que con la dilatación las diferencias del cierre respecto el subconjunto A para los parámetros analizados son escasas.

Con los datos del Ejemplo 1 se verifica en este caso que, para la función de pertenencia del subconjunto borroso erosión de A con R , $C_R(A)$, 14739 registros tienen grado de pertenencia a $@_R(A)$ mayor que 0

4.6 GRADIENTES: TOP-HAT

Las definiciones de los operadores gradiente $TH_a(A)$ y $TH_c(A)$ aparecen como diferencias entre el borroso A y su apertura $@_R(A)$ o entre el cierre $C_R(A)$ y A . Son por tanto, operadores que proporcionan “fronteras” asociadas a la relación estructurante R . Pueden utilizarse para matizar el conocimiento aportado por la apertura y el cierre. Veremos algunos resultados al aplicar estos operadores, (combinados con un factor “umbral”) en el caso que nos ocupa.

4.6.1 TOP-HAT APERTURA

Por la definición 3:

$$TH_a(A)(x) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \min(A(x), 1 - @_R(A)(x))$$

Es decir, una persona $x \in U$ tiene un grado de pertenencia α al subconjunto $TH_a(A)$ si y sólo si x tiene un grado de pertenencia al subconjunto A igual o mayor que α y además, cada una de las personas z semejantes a ese x , tienen al menos otra persona semejante cuyo grado de pertenencia a A es menor o igual que $1 - \alpha$.

4.6.2 EFECTOS DEL TOP-HAT APERTURA

Una persona x , pertenece al subconjunto borroso $TH_a(A)$ con un cierto grado de pertenencia (umbral), por ejemplo 0.75, si y sólo si $A(x) \geq 0.75$ y además si consideramos todas las personas de su misma edad, etnia y sexo cuya

diferencia de años de estudio sea menor o igual a 2, existe entre ellas al menos una persona con un grado de pertenencia al subconjunto A menor o igual que $0,25 = 1-0,75$.

Sea $[TH_a(A)_{0,75}]$ el 0,75-corte de $TH_a(A)$, es decir el subconjunto nítido de personas tales que $TH_a(A)(x) \geq 0,75$.

Si observamos la Tabla 2, se puede ver que a pesar de la gran diferencia que existe entre los valores **MediaGraPerA** para U , A , $D_R(A)$ y $[TH_a(A)_{0,75}]$, el resto de los parámetros estudiados tienen escasas variaciones.

Con los datos del Ejemplo 1 se obtiene que 9952 registros de U , tienen grado de pertenencia a $TH_a(A, R)$ mayor que 0.

4.6.3 TOP-HAT CIERRE

Por la definición 3:

Un elemento x pertenece a $TH_c(A)$ con un grado de pertenencia α ($TH_c(A)(x) = \alpha$) si y sólo si $A(x) \leq 1-\alpha$, y además, para toda z semejante a x , existe un u semejante a z , tal que $A(u) \geq C_R(A)(x) \geq \alpha$.

4.6.4 EFECTOS DEL TOP-HAT CIERRE

Una persona x pertenece al subconjunto borroso $TH_c(A)$ con un grado de pertenencia 0.75 ($TH_c(A)(x) = 0.75$) si y sólo si $A(x) \leq 0,25$ y además si consideramos todas las personas de su misma edad, etnia y sexo, cuya diferencia de años de estudio sea menor o igual a 2, existen personas con un grado de pertenencia al subconjunto A mayor o igual que 0.75.

Con los datos del Ejemplo 1 se obtiene que 13993 registros de U tienen grado de pertenencia a $TH_c(A)$ mayor que 0.

5 Conclusiones

En este trabajo se han aplicado métodos de la Morfología Matemática Borrosa al proceso de filtrado de Datos, considerando como referencial una tabla de datos U , tomando un subconjunto $A \in [0,1]^U$, y utilizando una relación borrosa $R \in [0,1]^{U \times U}$ como elemento estructurante para los elementos de U .

Dado un referencial U , un subconjunto borroso A de U y una relación borrosa $R \in [0,1]^{U \times U}$; el posible cambio del grado de pertenencia $A(x)$ de un elemento x de U por

$E_R(A)(x)$, o $C_R(A)(x)$, etc., en el proceso de filtrado, se realiza en función de la verificación o no por parte de los elementos de su R -vecindad (o R^{op} -vecindad), de unas condiciones preestablecidas por la operación seleccionada para el filtrado.

Puede considerarse, que los elementos seleccionados, en U , son patrones de grupos de ítems, con unas características preestablecidas por la relación y operación utilizadas, así como por el subconjunto borroso A con el que estamos trabajando.

Como se ha comprobado con el ejemplo de este trabajo, el análisis y comparación de estos conjuntos de registros seleccionados nos puede aportar conocimiento, entendiendo como tal la obtención de nueva información desconocida previamente. Por ello nos parece interesante seguir investigando sobre el papel que pueden desempeñar el uso de distintos filtros morfológicos en el descubrimiento de conocimientos en las Bases de Datos.

6 Bibliografía

- [1] D. Matheron. Elements pour une théories des milieux poreus, Masson, Paris 1967.
- [2] D. Sinha, E. R. Dougherty, Fuzzification of set inclusion: theory and applications, Fuzzy sets and systems 55 (1993), 15-42.
- [3] H. Heimans, L. Vincent. Graph Morphology in Image Analysis, in E.R. Dougherty (Ed.) Mathematical Morphology in Image Processing, 171-204, Marcel Dekker, Inc. 1993.
- [4] I. Bloch and H. Maître, Fuzzy Mathematical Morphologies: a comparative study, Télécom Paris 94D001.
- [5] J. Serra. Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press Vol. I(1990)-II(1992)
- [6] R. Fuentes, P. Burillo, N. Frago. Técnicas de Morfología Matemática en el tratamiento de Sistemas Relacionales Difusos. Actas del Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. León, Septiembre de 2002.

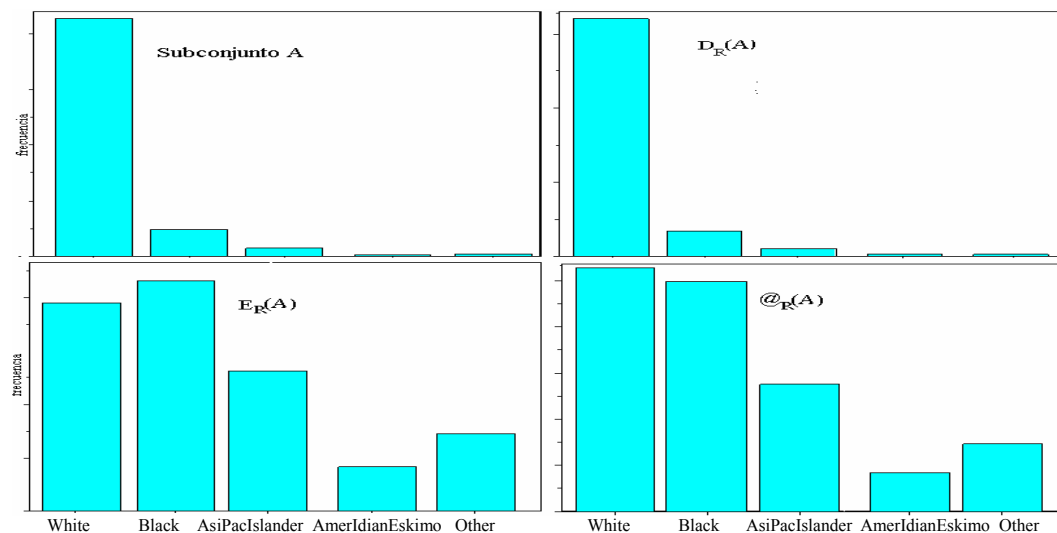
Agradecimientos

Financiado parcialmente por el proyecto de investigación TIC2003-08693 del Centro de Investigación Científica y Tecnológica

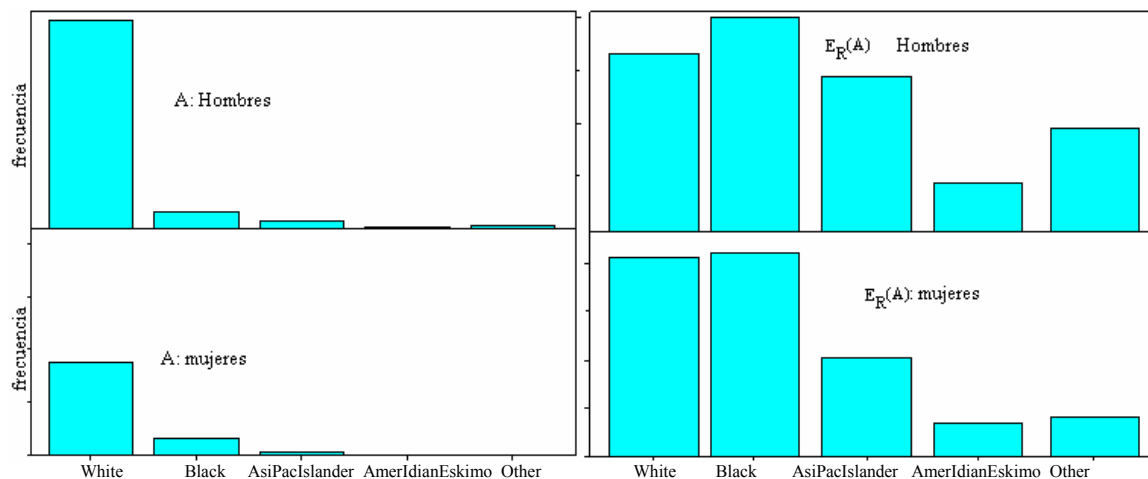
Anexo

Tabla 2

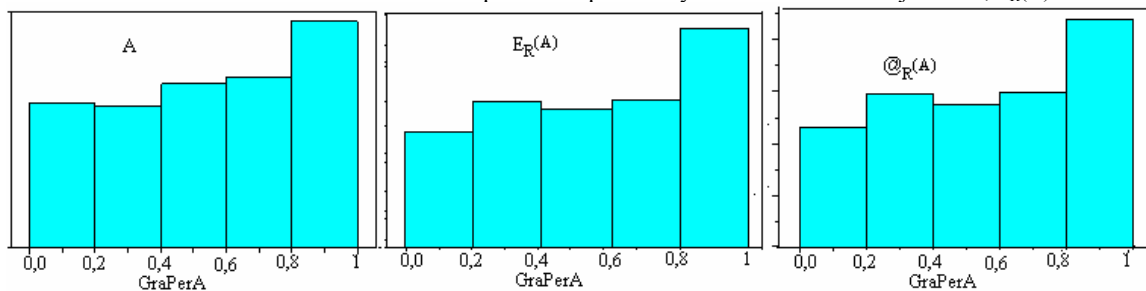
	U	A	$E_R(A)$	$D_R(A)$	$@_R(A)$	$[TH_a(A)_{0,75}]$	$[TH_c(A)_{0,75}]$
Media GraPerA	0.39	0.55	0.57	0.37	0.57	0.9	0.037
Media de edad	38.52	39	44,53	38,33	43,59	37	37.39
Media años-estudio	10.09	10	8.65	10.11	8.60	10	10.18
Media H-T-S	40.46	41.16	39.59	40.58	39.59	40	40.62
Porcentaje de mujeres	33%	32,8%	45.14%	32.70%	45,56%	33.71%	30.68%
Porcentaje de blancos	85.75%	85,92%	29.64%	86.81%	34.92%	88.43%	91.75%



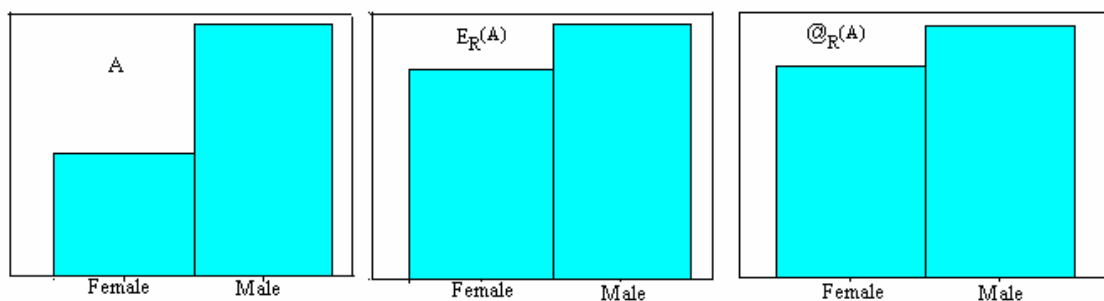
Gráfica 2: Distribución de la población por etnias en los subconjuntos A, $D_R(A)$, $E_R(A)$ y $@_R(A)$



Gráfica 3: Distribución de la población por sexo y etnias en los subconjuntos A, $E_R(A)$



Gráfica 4: Distribución de la población de los subconjuntos A, $D_R(A)$, $E_R(A)$ y $@_R(A)$ por GraPerA.



Gráfica 5: Distribución de la población de los subconjuntos A, $D_R(A)$, $E_R(A)$ y $@_R(A)$ por sexo.

ANALISIS DE LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA BORROSO EN TIEMPO DISCRETO CON LMIS

Matías García Rivera, Antonio Barreiro Blas

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Vigo,
Campus Universitario As Lagoas-Marcosende 9, 36200, Vigo, Spain
mgrivera@uvigo.es, abarreiro@uvigo.es

Resumen

En este artículo se presenta una técnica de análisis de estabilidad para sistemas de control borroso. Esta técnica es aplicable a sistemas en tiempo discreto y se desarrolla a partir del segundo método de Lyapunov. La condición de estabilidad obtenida puede reescribirse como un problema de factibilidad de un conjunto de LMIs. Los resultados son aplicados a un ejemplo.

Palabras Clave: Control fuzzy, Estabilidad de Lyapunov, Linear matrix inequalities.

1 Introducción

Los sistemas controlados por computadora aparecen en la década de los 50 [1]. En esos años el potencial de las computadoras digitales en el control de sistemas era muy limitado. Estas primeras aplicaciones de las computadoras en el control de sistemas se limitaban al modo supervisor, bien como una guía para el operador o bien como control del punto de trabajo. Por lo tanto, todavía equipos de control analógicos eran necesarios.

Durante la década de los 90, el desarrollo del microprocesador ha tenido un gran impacto en la forma en que las computadoras han sido aplicadas al control de plantas de producción completas. De esta manera cobra especial interés las aplicaciones de control en tiempo discreto, donde los sensores de forma periódica muestrean la salida del sistema, con la cual se genera una actuación para los actuadores de la planta.

La estabilidad de un sistema dinámico es un requerimiento básico para su utilización práctica. La inestabilidad significa que alguna variable del sistema se incrementa más allá de todos los límites y no puede ser

influenciada desde el exterior. Desde un punto de vista de sistemas de control, esto quiere decir que alguna salida del sistema tiende a infinito sin que la entrada pueda hacer nada. Además, el objetivo de un controlador es tanto mantener constante la variable controlada frente a perturbaciones externas (ruido, errores de los componentes, ...), como seguir los cambios prescritos en dicha variable lo más rápido y fielmente posible, y sólo puede lograrse si el lazo de control es estable.

La teoría de Lyapunov permite abordar la estabilidad de un sistema en tiempo continuo o tiempo discreto. La teoría de estabilidad de Lyapunov basada en la estabilidad interna o asintótica del vector de estados, es ampliamente utilizada en el estudio de sistemas no lineales y en sistemas variantes en el tiempo. Las desigualdades matriciales lineales o LMIs pueden expresar el problema de estabilidad definido por Lyapunov.

En la sección 2 se detallará brevemente la teoría de estabilidad de Lyapunov, para después en la sección 3 aplicarla a un sistema no lineal borroso. La sección 4 propone una condición equivalente de estabilidad pero expresada en forma de LMI. Un ejemplo ilustra los resultados obtenidos con esta técnica de análisis en la sección 5.

2 Preliminares

El concepto de estabilidad de Lyapunov juega un papel importante en el análisis de la estabilidad de los sistemas de control descritos mediante ecuaciones en el espacio de estado, tanto en ecuaciones diferenciales como en diferencias ordinarias. La estabilidad de Lyapunov está relacionada con el comportamiento de las trayectorias de un sistema cuando su estado inicial se encuentra cerca de un equilibrio. Dentro del organigrama general de las diversas teorías de estabilidad, la de Lyapunov se engloba en aquella zona que trata con las variables de estado del sistema, y por tanto, tiene que ver con la representación interna de los sis-

temas. En [12, 3, 10, 8, 5, 11] se encuentran estudios completos sobre esta teoría.

Volviendo al caso de funciones cuadráticas para sistemas en tiempo discreto, es decir, con planta $f(\mathbf{x}_k)$ y controlador no lineal $H(\mathbf{x}_k)$, mediante el segundo método de Lyapunov supuesta una función cuadrática $V(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k' \mathbf{P} \mathbf{x}_k$ con $\mathbf{P}$ real, simétrica y definida positiva, $V(\mathbf{x}_k)$ será una función de Lyapunov para el sistema considerado si $V(\mathbf{x}_k) > 0$, que ya lo cumple, y si $V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) < 0$, desarrollando

$$\begin{aligned}
& V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) \\
&= \mathbf{x}_{k+1}' \mathbf{P} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k' \mathbf{P} \mathbf{x}_k \\
&= [\Phi \mathbf{x}_k + \Gamma K H(\mathbf{x}_k)]' \mathbf{P} [\Phi \mathbf{x}_k + \Gamma K H(\mathbf{x}_k)] - \mathbf{x}_k' \mathbf{P} \mathbf{x}_k \\
&= \mathbf{x}_k' \Phi' \mathbf{P} \Phi \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k' \Phi' \mathbf{P} \Gamma K H(\mathbf{x}_k) + \Gamma' K H(\mathbf{x}_k) \mathbf{P} \Phi \mathbf{x}_k \\
&\quad + \Gamma' K H(\mathbf{x}_k) \mathbf{P} \Gamma K H(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k' \mathbf{P} \mathbf{x}_k \\
&= \mathbf{x}_k' \Phi' \mathbf{P} \Phi \mathbf{x}_k + 2\Gamma' \mathbf{P} \Phi \mathbf{x}_k K H(\mathbf{x}_k) + \\
&\quad \Gamma' \mathbf{P} \Gamma K^2 H^2(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_k' \mathbf{P} \mathbf{x}_k < 0, \quad \forall \mathbf{x}_k \neq 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Una desigualdad lineal matricial, también conocida como LMI (*linear matrix inequality*), es una expresión de la forma [2, 6, 7, 9]

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2)$$

donde

- $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ es la variable desconocida.
- $F_0, \dots, F_m$ son un conjunto de matrices reales simétricas conocidas, es decir, $F_i = F_i' \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ para un $n \in \mathbf{Z}_+$.
- la desigualdad > 0 indica que la expresión $F(x)$ es definida positiva, por lo tanto, $u' F(x) u > 0$ para todo $u \in \mathbf{R}^n$ y $u \neq 0$.

Muchos problemas de identificación de sistemas y análisis y diseño de controladores, pueden ser formulados o reformulados como LMIs. Esto sólo tiene sentido práctico si una LMI puede ser resuelta eficientemente.

El sistema sobre el que se ha desarrollado y probado este método de análisis, ha sido el modelo linealizado de un servomotor. La dinámica del servomotor se rige por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

donde x_1 y x_2 son respectivamente la posición y la velocidad del servomotor. Las funciones de pertenencia de los antecedentes y de los consecuentes del controlador de lógica borrosa son las indicadas en la figura 1,

y la base de reglas se representa en estructura tabular en la tabla 1. Se verifica que el origen es un punto de equilibrio, y que la característica no lineal del controlador, $H(\mathbf{x})$, se anula en el origen.

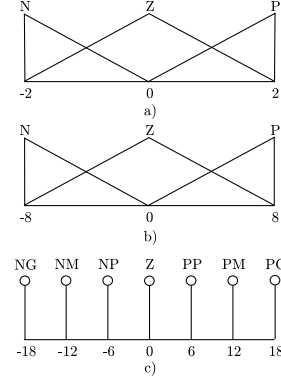


Figura 1: Funciones de pertenencia para el servomotor: a) x_1 ; b) x_2 ; c) u .

3 Estabilidad Borrosa

Como ya se ha visto en la sección anterior, el segundo método de Lyapunov proporciona para sistemas en tiempo discreto con un controlador no lineal, la condición de estabilidad dada por (1). Por lo tanto, el sistema es estable si existe una matriz $\mathbf{P}$ simétrica definida positiva que cumpla

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x}_k' (\Phi' \mathbf{P} \Phi - \mathbf{P}) \mathbf{x}_k + 2\Gamma' \mathbf{P} \Phi \mathbf{x}_k K H(\mathbf{x}_k) + \\
& \Gamma' \mathbf{P} \Gamma K^2 H^2(\mathbf{x}_k) < 0, \quad \forall \mathbf{x}_k \neq 0 \quad (4)
\end{aligned}$$

Esta expresión para el sistema nominal sólo depende de la matriz $\mathbf{P}$, puesto que el resto de los términos, Φ , Γ , $H(\mathbf{x}_k)$ y K , se encuentran perfectamente definidos.

Dada la dificultad que supone encontrar una $\mathbf{P}$ válida en la superficie de control $H(\mathbf{x}_k)$ para cualquier $\mathbf{x}_k \neq 0$, debido ello a la naturaleza no lineal del controlador de lógica borrosa, simplificaremos el problema buscando dicha matriz en algún volumen que contenga a la superficie de controlador. Los resultados serán más conservadores, es decir, la no existencia de una $\mathbf{P}$ no implica la inestabilidad del sistema, a cambio

$x_1 \backslash x_2$	N	Z	P
N	NP (u_{-1-1})	PM (u_{-10})	PG (u_{-11})
Z	NM (u_{0-1})	Z (u_{00})	PM (u_{01})
P	NG (u_{1-1})	NM (u_{10})	PP (u_{11})

Tabla 1: Base de reglas para el servomotor.

de simplificar la búsqueda de la matriz en el nuevo volumen.

Tal como se demostró en [4], la superficie del controlador de lógica borrosa correspondiente a una celda se encuentra dentro de un tetraedro, cuyos vértices son los puntos de la superficie del controlador evaluados en los cuatro vértices de la celda. Si encontramos una $\mathbf{P}$ válida en el volumen del tetraedro, también será válida en la superficie del controlador correspondiente a esa celda. Según veremos más adelante, para demostrar que una $\mathbf{P}$ es válida en el volumen de un tetraedro, bastará con demostrar que la matriz sea válida en los vértices y aristas de dicho tetraedro.

El espacio de entrada del controlador está dividido en celdas, y en cada una de dichas celdas la superficie del controlador está dentro de un tetraedro. Si la matriz $\mathbf{P}$ es válida en cada uno de estos tetraedros, entonces también será válida en toda la superficie de control. Por tanto, será necesario para garantizar la estabilidad del controlador, demostrar que dicha $\mathbf{P}$ es válida en los vértices y aristas de todos los tetraedros.

La ecuación de Lyapunov para un sistema en tiempo discreto y control borroso dada por (4), para un sistema de orden 2 como es el caso del servomotor, puede reescribirse como la forma cuadrática siguiente

$$L(\mathbf{x}_k, P) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_k & H(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi' P \Phi - P & \Phi' P \Gamma K \\ \Gamma' P \Phi K & \Gamma' P \Gamma K^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ H(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \mathbf{x}_k \neq 0 \quad (5)$$

Es interesante realizar algunas consideraciones sobre esta forma cuadrática. Si existe una $\mathbf{P}$ que cumpla la expresión anterior, la superficie $L(\mathbf{x}_k, P) = 0$ es un cono centrado en el origen, puesto que existen puntos donde la función $L(\mathbf{x}_k, P)$ es positiva y también donde es negativa. Observando (5) se deduce que el eje dado por $H(\mathbf{x}_k)$ es siempre positivo, puesto que para $\mathbf{x}_k = 0$ al ser $\mathbf{P}$ definida positiva, entonces $\Gamma' P \Gamma K^2 > 0$ para cualquier Γ y K . Si $L(\mathbf{x}_k, P)$ es de Lyapunov, entonces al menos en los vértices y en las aristas esta función será negativa.

Por ser la superficie dada por $L(\mathbf{x}_k, P) = 0$ un cono centrado en el origen, se pueden dar dos casos: el interior del cono es negativo y no engloba al eje dado por $H(\mathbf{x}_k)$, o el interior del cono es positivo y engloba al eje dado por $H(\mathbf{x}_k)$. Ambas posibilidades pueden verse en las figuras 2 y 3. $L(\mathbf{x}_k, P)$ se puede diagonalizar mediante una transformación ortogonal por ser una forma cuadrática. Si además se aplica un cambio de escala, se puede convertir el sistema de coordenadas original $(x_1, x_2, H(x_1, x_2))$, en otro transformado tal que $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ y $L(\mathbf{z}, P) = \pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2$, que cuando uno de los coeficientes posee signo distinto a

los demás, es un cono cuyo eje es la variable que posee dicho signo distinto.

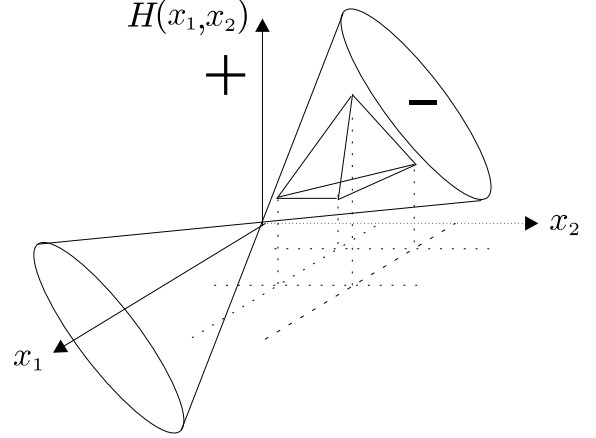


Figura 2: Cono de interior negativo.

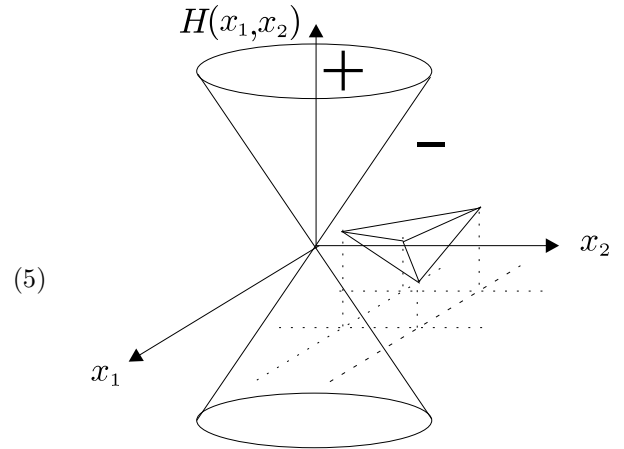


Figura 3: Cono de interior positivo.

Si dos coeficientes del sistema transformado son positivos y uno negativo, el interior del cono transformado es negativo como también lo es el interior del cono del sistema original. En este caso, si la función de Lyapunov evaluada en los vértices del tetraedro es negativa, como el interior del cono es un volumen convexo, todo el tetraedro y la superficie borrosa que encierra también están dentro del cono, y por tanto son negativos. No obstante, este cono de interior negativo debería contener a los tetraedros de todas las celdas, y las celdas se encuentran en todos los cuadrantes, por lo que la única forma válida sería un cono degenerado que abarcara a todo el espacio. Dado que el eje dado por $H(\mathbf{x}_k)$ siempre va a ser positivo, los conos de interior negativo no pueden ser válidos.

Si dos coeficientes del sistema transformado son negativos y uno positivo, el interior del cono transformado

es positivo, como también lo es el interior del cono del sistema original. Si la condición de Lyapunov se cumple en los cuatro vértices de un tetraedro, entonces la función de Lyapunov en ellos es negativa y estos puntos se encuentran en el exterior negativo del cono. Como el exterior del cono no es convexo, el cumplimiento de Lyapunov en los vértices no garantiza que también se cumpla en todo el tetraedro. Será necesaria alguna condición adicional para garantizar que el volumen del tetraedro es siempre negativo.

Sean v_i los vértices de los tetraedros que envuelven la superficie borrosa, donde $i = 0, \dots, n_v - 1$, n_v es el número de vértices y v_0 el vértice situado en el origen. Definimos $L_{v_i}(P)$ como la ecuación de Lyapunov dada por (5) evaluada en el vértice v_i , es decir, $L_{v_i}(P) = L(v_i, P)$. La ecuación de Lyapunov evaluada en los vértices no nulos de los tetraedros correspondientes a todas las celdas debe ser negativa. Por lo tanto,

$$L_{v_i}(P) < 0, \quad i = 1, \dots, n_v - 1 \quad (6)$$

Si existe una P que haga cumplir (5) en los vértices y además en las aristas, tal como muestra la figura 3, entonces sí podemos garantizar que el volumen del tetraedro es siempre negativo. Esto es así porque si en el interior de una cara algún punto fuese negativo, geoméricamente significaría que la cara corta al cono, y además dada la configuración del problema también debería cortar a la arista. Entonces la arista tendría algún punto positivo, lo cual no es posible pues que partimos de que es siempre negativa. De forma similar, si algún punto del volumen fuese negativo, significaría que el cono cortaría el tetraedro por alguna cara.

Sea a_{jk} la arista del tetraedro definida por los vértices $v_j = [\mathbf{x}_{v_j}, H(\mathbf{x}_{v_j})]'$ y $v_k = [\mathbf{x}_{v_k}, H(\mathbf{x}_{v_k})]'$. Esta arista puede expresarse como

$$\begin{aligned} a_{jk}(\alpha) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{v_j} \\ H(\mathbf{x}_{v_j}) \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{v_k} \\ H(\mathbf{x}_{v_k}) \end{bmatrix} (1 - \alpha) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{a_{jk}}(\alpha) \\ H_{a_{jk}}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{x}_{a_{jk}}(\alpha) = \mathbf{x}_{v_j} \alpha + \mathbf{x}_{v_k} (1 - \alpha), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7)$$

$$H_{a_{jk}}(\alpha) = H(\mathbf{x}_{v_j}) \alpha + H(\mathbf{x}_{v_k}) (1 - \alpha), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (8)$$

Definamos $L_{a_{jk}}(P)$ como la ecuación de Lyapunov dada por (5) evaluada en la arista a_{jk} :

$$L_{a_{jk}}(P) = L([\mathbf{x}_{a_{jk}}(\alpha), H_{a_{jk}}(\alpha)]', P), \quad 0 < \alpha < 1$$

La condición de estabilidad de Lyapunov para un control borroso en el caso válido de un cono de interior positivo, es la existencia de una matriz simétrica

definida positiva P tal que, la ecuación de Lyapunov evaluada en los vértices y en las aristas de los tetraedros correspondientes a todas las celdas es negativa, es decir,

$$\begin{aligned} L_{v_i}(P) &< 0, \quad i = 1, \dots, n_v - 1 \\ L_{a_{jk}}(P) &< 0, \quad j = 1, \dots, n_v - 1 \\ &\quad k = j + 1, \dots, n_v - 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Como se observa en (9), la condición de estabilidad no incluye aquellas aristas en las que uno de los vértices es v_0 , es decir, el vértice en el origen. Esto es así, puesto que si se cumple la condición de Lyapunov en el vértice no nulo, la recta que une dicho vértice con el origen, jamás cortará al cono centrado en el origen, y por lo tanto, dicha recta siempre tendrá el signo del vértice. Matemáticamente, si $v_k = ([0, 0]', 0)$ entonces las expresiones (7) y (8) se convierten en $\mathbf{x}_{a_{j0}}(\alpha) = \alpha \mathbf{v}_j$ y $H_{a_{j0}}(\alpha) = \alpha H_j$, donde $0 < \alpha < 1$. La ecuación (4) evaluada en la arista a_{j0} es negativa, como se demuestra a continuación

$$\begin{aligned} L_{a_{j0}}(P) &= \alpha^2 \left(v_j' (\Phi' P \Phi - P) v_j + 2 \Gamma' P \Phi v_j K H(v_j) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma' P \Gamma K^2 H^2(v_j) \right) < 0, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

En la figura 4 pueden verse los vértices y aristas en las que habría que comprobar la condición de Lyapunov dada por (9), para un controlador con cuatro funciones de pertenencia en cada variable de entrada. Ni en el vértice dado por punto de equilibrio, ni en las aristas donde un vértice es el punto de equilibrio, es necesario realizar la comprobación.

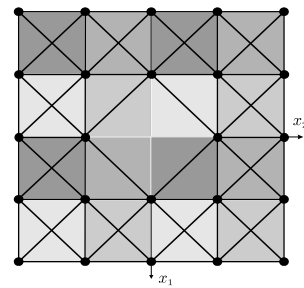


Figura 4: Vértices y aristas donde comprobar condición de Lyapunov.

4 Resolución mediante LMIs

Desarrollando convenientemente la expresión (9) en los vértices y en las aristas, la búsqueda de una P válida puede convertirse en un problema de factibilidad de un sistema de LMIs. Si el conjunto de LMIs que representa al sistema de control borroso es factible, entonces

el controlador será estable y además su solución será la matriz $\mathbf{P}$ buscada.

En un primer paso, la búsqueda de una matriz $\mathbf{P}$ válida en los vértices se transforma en la resolución de un sistema de LMIs. Dados los vértices de los tetraedros a considerar para el estudio de la estabilidad, $v_i = [\mathbf{x}_{v_i}, H(\mathbf{x}_{v_i})]'$, $i = 1, \dots, n_v - 1$, calcular una $\mathbf{P}$ válida en estos vértices es resolver el conjunto de desigualdades dadas por:

$$L_{v_i}(P) = (\mathbf{x}_{v_i}, H(\mathbf{x}_{v_i}), P) < 0, \quad i = 1, \dots, n_v - 1$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_{v_i} & H(\mathbf{x}_{v_i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'P\Phi - P & \Phi'P\Gamma K \\ \Gamma'P\Phi K & \Gamma'P\Gamma K^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{v_i} \\ H(\mathbf{x}_{v_i}) \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, n_v - 1 \quad (10)$$

Desarrollando según las variables p_{22} y p_{12} de la matriz $\mathbf{P}$, se obtienen las desigualdades lineales siguientes

$$A_{v_i}p_{22} + B_{v_i}p_{12} < C_{v_i}, \quad i = 1, \dots, n_v - 1 \quad (11)$$

donde A_{v_i} , B_{v_i} y C_{v_i} son números reales que dependen de Φ , Γ y K . Como se vio en la expresión (??), resolver un conjunto de desigualdades lineales es equivalente a resolver un conjunto de LMIs.

Como último paso se busca una $\mathbf{P}$ válida en los vértices y aristas de los tetraedros. Para ello, se añadirán a las restricciones en forma de LMI dadas por (11) para la búsqueda de una $\mathbf{P}$ válida en los vértices, otras nuevas para que también cumpla Lyapunov en las aristas.

Sustituyendo (7) y (8) en (5), la ecuación de Lyapunov evaluada en la arista a_{jk} es

$$\begin{aligned} L_{a_{jk}}(\alpha) &= L(a_{jk}(\alpha)) = L\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{a_{jk}}(\alpha) \\ H_{a_{jk}}(\alpha) \end{bmatrix}\right) = \\ &= \left(\mathbf{x}'_{v_j}(\Phi'P\Phi - P)\mathbf{x}_{v_j} - 2\mathbf{x}'_{v_j}(\Phi'P\Phi - P)\mathbf{x}_{v_k} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}'_{v_k}(\Phi'P\Phi - P)\mathbf{x}_{v_k} \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma'P\Phi K(\mathbf{x}_{v_j} - \mathbf{x}_{v_k})(H(\mathbf{x}_{v_j}) - H(\mathbf{x}_{v_k})) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma'P\Gamma K^2(H(\mathbf{x}_{v_j}) - H(\mathbf{x}_{v_k}))^2\right)\alpha^2 + \\ &\quad \left(2\mathbf{x}'_{v_j}(\Phi'P\Phi - P)\mathbf{x}_{v_k} - 2\mathbf{x}'_{v_k}(\Phi'P\Phi - P)\mathbf{x}_{v_k} \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma'P\Phi K(\mathbf{x}_{v_j}H(\mathbf{x}_{v_k}) + \mathbf{x}_{v_k}H(\mathbf{x}_{v_j}) \right. \\ &\quad \left. - 2\mathbf{x}_{v_k}H(\mathbf{x}_{v_k})) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma'P\Gamma K^2(2H(\mathbf{x}_{v_j})H(\mathbf{x}_{v_k}) - 2H(\mathbf{x}_{v_k})^2)\right)\alpha + \\ &\quad \mathbf{x}'_{v_k}(\Phi'P\Phi - P)\mathbf{x}_{v_k} + 2\Gamma'P\Phi K\mathbf{x}_{v_k}H(\mathbf{x}_{v_k}) \\ &\quad \left. + \Gamma'P\Gamma K^2H(\mathbf{x}_{v_k})^2\right) = \\ A_{a_{jk}}(p_{22}, p_{12})\alpha^2 + B_{a_{jk}}(p_{22}, p_{12})\alpha + C_{a_{jk}}(p_{22}, p_{12}) &< 0, \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

donde $A_{a_{jk}}$, $B_{a_{jk}}$ y $C_{a_{jk}}$ son funciones lineales en las variables p_{22} y p_{12} , cuyos coeficientes son números reales que dependen de Φ , Γ y K .

Por lo tanto, la expresión (12) que evalúa la condición de Lyapunov a lo largo de una arista, es una ecuación de segundo grado en la variable α . Para que en una arista se cumpla Lyapunov, es decir, $L_{a_{jk}}(\alpha) < 0, 0 \leq \alpha \leq 1$, partiendo de que sí se verifica en los extremos, $L_{a_{jk}}(0) < 0$ y $L_{a_{jk}}(1) < 0$, se debe cumplir alguna de las siguientes condiciones:

1. $L_{a_{jk}}$ es una parábola convexa o una recta, $A_{a_{jk}} \geq 0$.
2. $L_{a_{jk}}$ es una parábola cóncava, $A_{a_{jk}} < 0$, cuyo máximo se produce para $\alpha < 0$, es decir, $\frac{-B_{a_{jk}}}{2A_{a_{jk}}} < 0$.
3. $L_{a_{jk}}$ es una parábola cóncava, $A_{a_{jk}} < 0$, cuyo máximo se produce para $\alpha > 0$, es decir $\frac{-B_{a_{jk}}}{2A_{a_{jk}}} > 0$.
4. $L_{a_{jk}}$ es una parábola cóncava, $A_{a_{jk}} < 0$, cuyo máximo se produce en el intervalo $0 < \alpha < 1$, es decir, $0 \leq \frac{-B_{a_{jk}}}{2A_{a_{jk}}} \leq 1$, y además es negativo, $\frac{-B_{a_{jk}}^2}{4A_{a_{jk}}} + C_{a_{jk}} < 0$.

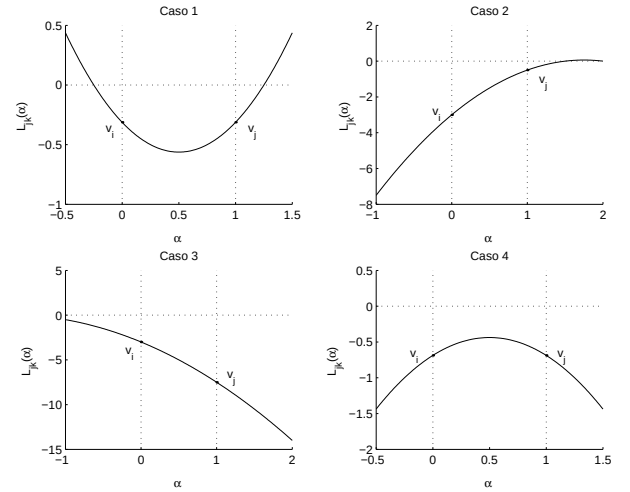


Figura 5: Condiciones para que Lyapunov se cumpla en una arista.

Basta que se cumpla una de las anteriores cuatro condiciones, para que si $L_{a_{ij}}(\alpha)$ es negativa para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, entonces también lo sea en todo el intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$. Estas cuatro posibilidades pueden verse en la figura 5. El caso que se debe descartar es cuando la función de Lyapunov evaluada en la arista es en algún punto positiva, es decir, cuando $L_{a_{jk}}(\alpha)$ es una parábola cóncava y su máximo se encuentra en $0 \leq \frac{-B_{a_{jk}}}{2A_{a_{jk}}} \leq 1$ y además es positivo.

Las condiciones que definen la forma de $L_{a_{jk}}(\alpha)$ son desigualdades lineales en p_{22} y p_{12} , salvo la de la condición de máximo negativo en el punto 4. Esta condición es una desigualdad no lineal, que sin embargo se puede convertir en una LMI mediante las transformaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{-B_{a_{jk}}^2}{4A_{a_{jk}}} + C_{a_{jk}} &< 0 \\ -B_{a_{jk}}^2 + 4A_{a_{jk}}C_{a_{jk}} &> 0 \end{aligned}$$

y puesto que en el caso 4, $A_{a_{jk}} < 0$, se puede escribir como la LMI siguiente

$$\begin{bmatrix} 2A_{a_{jk}} & B_{a_{jk}} \\ B_{a_{jk}} & 2C_{a_{jk}} \end{bmatrix} < 0$$

En definitiva, la verificación de la estabilidad de un control borroso se transforma en la búsqueda de una matriz $\mathbf{P}$, que haga cumplir la condición de Lyapunov en todos los vértices no nulos, y además, en todas las aristas cumpliendo alguna de estas condiciones:

1.

$$A_{a_{jk}} \geq 0 \quad (13)$$

2.

$$\begin{aligned} A_{a_{jk}} &< 0 \\ B_{a_{jk}} &< 0 \end{aligned} \quad (14)$$

3.

$$\begin{aligned} A_{a_{jk}} &< 0 \\ B_{a_{jk}} &> -2A_{a_{jk}} \end{aligned} \quad (15)$$

4.

$$\begin{aligned} A_{a_{jk}} &< 0 \\ B_{a_{jk}} &> 0 \\ B_{a_{jk}} &< -2A_{a_{jk}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} 2A_{a_{jk}} & B_{a_{jk}} \\ B_{a_{jk}} & 2C_{a_{jk}} \end{bmatrix} < 0$$

Por lo tanto, el número máximo de sistemas de LMIs a resolver viene dado en función del número de aristas y será de 4^{n_a} , siendo n_a el número de aristas del controlador. Cada sistema de LMIs estará formado por $n_v - 1$ desigualdades lineales que definen el cumplimiento de Lyapunov en los vértices, más un número variable de LMIs dependiendo de las condiciones en las aristas que se estén considerando.

5 Ejemplo de aplicación

Una vez presentado el método para el análisis de la estabilidad de sistemas en tiempo discreto con control borroso, a continuación se aplican estas ideas al servomotor definido por (3).

Dadas las características de simetría del controlador borroso y la planta, la condición de estabilidad dada por (9), se analizará en los cinco vértices y en las seis aristas que muestra la figura 6. Se necesita por lo tanto, en el peor de los casos, la resolución de $4^6 = 4096$ sistemas de LMIs. Cuando uno de esos sistemas LMI sea factible, el sistema es estable y no es necesario resolver otro más. No obstante, este número será menor en la práctica puesto que de las cuatro condiciones posibles para cada arista, algunas pueden no ser válidas.

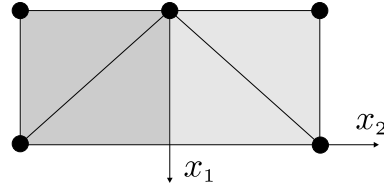


Figura 6: Vértices y aristas donde comprobar Lyapunov para el servomotor.

Se puede simplificar a 864 el número de sistemas LMI a resolver, considerando que en algunas aristas alguna condición no es válida nunca, como se muestra a continuación:

		condiciones				
		1	2	3	4	
aristas	1 :	Sí	Sí	Sí	Sí	4
	2 :	No	Sí	Sí	Sí	3
	3 :	Sí	Sí	Sí	Sí	4
	4 :	No	Sí	Sí	Sí	3
	5 :	No	No	Sí	Sí	2
	6 :	No	Sí	Sí	Sí	3

$$4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 864$$

Una matriz válida obtenida es

$$P_{ini} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2761 \\ 0.2761 & 0.1111 \end{bmatrix}$$

Para el sistema nominal se puede encontrar una $\mathbf{P}$ de Lyapunov que cumpla la condición dada por la expresión (9), hasta un tiempo de muestreo máximo de $h_{max} = 2.9021$ s. Para este período de muestreo la única combinación de condiciones válidas en las aristas es

arista:	1	2	3	4	5	6
condición:	4	3	4	3	3	2

y la única P encontrada es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1.0092 \\ -1.0092 & 1.0897 \end{bmatrix}$$

Obviamente, cuanto mayor es el período de muestreo peor es la respuesta temporal del sistema, por lo que no interesa forzar tiempos de muestreo muy altos pues se perdería calidad en el control.

Referencias

- [1] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NY, third edition, 1997.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [3] C.A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback systems: input-output properties*. Academic Press, New York, 1975.
- [4] A. Espada. *Estabilidad y robustez de sistemas no lineales de control. Análisis y diseño de controladores borrosos*. Tesis doctoral, Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática, Univesidad de Vigo, Abril 1996.
- [5] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Explicit construction of quadratic lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and popov theorems and their application to robust stability. part ii: discrete-time theory. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 4:249-265,1994.
- [6] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4):373-395, 1984.
- [7] Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Control Programming*, volume 13 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [8] J-J.E. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [9] J. V. Tiel. *Convex Analysis: An Introductory Text*. John Wiley and Sons, Chichester, 1984.
- [10] M. Vidyasagar. New directions of research in nonlinear system theory. *Proc. IEEE*, vol 77, pags 1060-1090, 1986.
- [11] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [12] J.L. Willems. *Stability theory of dynamical systems. studies in dynamical systems*. Thomas Nelson and Sons Ltd., 1970.

EXTRACCIÓN DE BASES DE REGLAS SIMPLES Y LINGÜÍSTICAMENTE INTERPRETABLES

Andrés A. Gersnoviez¹

Iluminada Baturone¹

Francisco J. Moreno-Velo²

¹ Instituto de Microelectrónica de Sevilla, (IMSE-CNM) y Dept. Electrónica y Electromagnetismo, Univ. de Sevilla (España).

e-mail: {andres, lumi}@imse.cnm.es

² Dept. Ing. Electrónica, de Lenguajes Informáticos y Automática, Univ. de Huelva (España).

e-mail: velo@diesia.uhu.es

Resumen

Este artículo presenta una técnica basada en la lógica difusa para extraer bases de reglas a partir de datos numéricos. Permite obtener bases de reglas interpretables lingüísticamente a la vez que simples en cuanto a número de reglas, sencillez en las partes antecedentes y consecuentes y facilidad de implementación hardware/software. Los pasos más significativos de esta técnica son los siguientes: (1) extracción de la base de reglas empleando particiones granulares de las variables del problema, (2) ajuste de las funciones de pertenencia para las variables de salida y posterior simplificación, (3) simplificación tabular de la base de reglas y (4) simplificación de las funciones de pertenencia para las variables de entrada. La técnica puede aplicarse de forma automática mediante las herramientas de CAD integradas en el entorno Xfuzzy 3. Se incluye un ejemplo de aplicación en robótica móvil para ilustrar las ventajas de la técnica propuesta.

Palabras Clave: Extracción de conocimiento, simplificación, interpretabilidad lingüística.

1. INTRODUCCIÓN

Las técnicas dedicadas al análisis y extracción de información a partir de datos numéricos son cada vez más necesarias. Dentro de estas técnicas, cobran gran interés las de lógica difusa, debido a su capacidad de extraer conocimiento lingüístico de fácil comprensión por personas no expertas. Existen dos tipos de estrategias a la hora de extraer información de una base de datos numérica: una es mediante métodos de agrupamiento o

clustering y otra mediante métodos basados en particiones granulares (tipo *grid*) de las variables del problema.

Los métodos de clustering organizan los datos numéricos en clusters y usan éstos para crear las reglas. Cada cluster se transforma en una regla mediante su proyección en cada dimensión de las variables de entrada [9]-[5]. Por tanto, toda la descripción de la base de reglas se obtiene simultáneamente. La extracción de información mediante clustering tiene la ventaja de conseguir un número bajo de reglas, pero como contrapartida, sus reglas no tienen apenas significado lingüístico. Diversas aproximaciones han sido propuestas en la literatura para incrementar el significado lingüístico de estas bases de reglas. Una de ellas es el uso de modificadores lingüísticos, que permiten reducir tanto el número de funciones de pertenencia (muchas de ellas pueden ser obtenidas como modificaciones de otras) como el de las reglas (algunas de ellas pueden combinarse en otra más genérica) [9]. Otros autores se centran en simplificar las funciones de pertenencia obtenidas para conseguir un sistema difuso más transparente e interpretable [8].

Por otro lado, los métodos tipo grid generan una partición de los espacios de las entradas y las salidas antes de crear la base de reglas [7]. Las reglas se obtienen seleccionando las etiquetas más adecuadas para las entradas y las salidas respecto a la base de datos numérica. Estos métodos consiguen reglas con mucho más significado lingüístico, pero con el coste de obtener un número de reglas mucho mayor. Para evitar este número elevado de reglas, algunas soluciones reportadas en la literatura han sido seleccionar las reglas más significativas [1]-[11] o aplicar algoritmos de minimización inspirados en el diseño Booleano [10].

Otra diferencia significativa entre ambos métodos es que los de clustering suelen emplear funciones de pertenencia gaussianas, lo cual dificulta sobremanera su síntesis en hardware dedicado o software empuerado, no siendo así para los métodos tipo grid, que pueden utilizar funciones trapezoidales y triangulares mucho más fáciles de implementar.

La técnica que se presenta en este artículo trata de obtener bases de reglas con las ventajas de las dos técnicas anteriormente comentadas, es decir, que sean fácilmente interpretables de forma lingüística a la vez que simples, en el sentido de que el número de reglas sea bajo, las partes antecedentes y consecuentes de las reglas sean sencillas y de que su implementación sea eficiente en un hardware o software con pocos recursos. Para ello se emplean técnicas tipo grid como primer paso para extraer bases de reglas interpretables y se les aplican métodos de simplificación que permiten reducir no sólo el número de reglas sino también el de las funciones de pertenencia que se contemplan en las distintas variables.

El artículo se estructura de la siguiente manera. La sección 2 resume métodos de simplificación de bases de reglas difusas y explica los métodos que se emplean en la técnica propuesta: simplificación tabular de la base de reglas y simplificación de las funciones de pertenencia de antecedentes y consecuentes. La sección 3 describe brevemente cómo se puede realizar automáticamente la técnica propuesta mediante las herramientas de CAD del entorno Xfuzzy 3. En la sección 4 se muestra un ejemplo de aplicación en robótica móvil. Por último, las conclusiones se incluyen en la sección 5.

2. TÉCNICA PROPUESTA

En la técnica que proponemos el primer paso es extraer una base de reglas lingüísticamente interpretable empleando particiones granulares de las variables del problema. A continuación se simplifican las funciones de pertenencia para las variables de salida para proceder a una simplificación tabular de la base de reglas (tanto más sencilla cuanto menor sea el número de funciones de pertenencia de los consecuentes). Por último, se simplifican las funciones de pertenencia para las variables de entrada. Los métodos de simplificación tabular y de funciones de pertenencia se describen a continuación.

2.1. SIMPLIFICACIÓN TABULAR

El método de simplificación que empleamos en nuestra técnica es una expansión del algoritmo de Quine-McCluskey del diseño Booleano [3]. Este método ya ha servido de inspiración a algunos autores para obtener implementaciones hardware eficientes [10]. En nuestro caso, hemos expandido este método para obtener bases de reglas más simples (por lo tanto, también más fáciles de implementar en hardware) y con más contenido lingüístico. Para ilustrar nuestra propuesta consideremos la base de reglas tipo grid de dos entradas ilustrada en la Figura 1.

Lo primero a tener en cuenta es que los consecuentes de una base de reglas difusa no son bi-valuados, sino que toman varios valores (N, NS, Z, PS y P en nuestro

x1 \ x2	(1) MP	(2) P	(3) M	(4) G	(5) MG
(1) MP	Z	Z	Z	Z	Z
(2) P	PS	PS	Z	NS	NS
(3) M	Z	Z	Z	Z	Z
(4) G	N	N	Z	P	P
(5) MG	N	N	Z	P	P

Figura 1: Ilustración de la simplificación tabular.

ejemplo). Por tanto, la simplificación tabular se aplica a cada función de pertenencia de los consecuentes que aparezcan en la base de reglas (aunque, para el caso de r funciones, pueden hacerse $r-1$ simplificaciones usando la condición “en otro caso” para la r -ésima función). Por eso interesa haber simplificado con anterioridad el número de funciones de pertenencia de los consecuentes. Para cada función de pertenencia de consecuentes, los pasos a seguir son los siguientes:

Paso 1: Se listan en una columna todos los antecedentes de las reglas con esa función de pertenencia en su consecuente. Los antecedentes tampoco son bi-valuados, sino que están relacionados normalmente con varios conjuntos difusos (MP, P, M, G y MG, en nuestro ejemplo). En lugar de trabajar con códigos binarios, asignamos números naturales ordenados a los conjuntos difusos de cada variable de entrada (por ejemplo, 1 a MP, 2 a P, 3 a M, 4 a G y 5 a MG). Los antecedentes que sumen el mismo valor se agrupan y se listan en orden creciente de sumas. Esto se muestra en la Figura 2 para nuestro ejemplo. En la columna situada más a la izquierda (primera lista), las 13 reglas (en forma tabular) asociadas con el consecuente Z están ordenadas en 7 grupos (aquellos cuyos antecedentes suman 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8).

Paso 2: Se realiza una búsqueda exhaustiva entre los grupos vecinos para combinar los mintérminos adyacentes: aquellos cuya suma difiere en la unidad y comparten las mismas funciones de pertenencia para cada variable de entrada excepto una que es consecutiva. Los implicantes obtenidos engloban $u+1$ funciones de pertenencia, siendo u el número de entradas. Esto se muestra en la segunda lista de la Figura 2. Se repite el proceso para cada lista, combinando implicantes con $u+1$ funciones para obtener implicantes con $u+2$ y así sucesivamente hasta que no puedan combinarse más implicantes. El resultado final es una lista de implicantes primos (quinta lista de la Figura 2, que se corresponden con los grupos sombreados en la Figura 1).

Paso 3: Se selecciona un número mínimo de implicantes primos que cubran todos los mintérminos de la función a

x_1	x_2		x_1	x_2		x_1	x_2		x_1	x_2		x_1	x_2	
1	1	✓	1	1,2	✓	1	1,2,3	✓	1	1,2,3,4	✓	1	1,2,3,4,5	
1	2	✓	1	2,3	✓	1	2,3,4	✓	1	2,3,4,5	✓	3	1,2,3,4,5	
1	3	✓	1	3,4	✓	1	3,4,5	✓	3	1,2,3,4	✓	1,2,3,4,5	3	
3	1	✓	1,2	3	✓	1,2,3	3	✓	1,2,3,4	3	✓			
1	4	✓	1	4,5	✓	2,3,4	3	✓	2,3,4,5	3	✓			
2	3	✓	2,3	3	✓	3	2,3,4	✓	3	2,3,4,5	✓			
3	2	✓	3	2,3	✓	3	3,4,5	✓						
1	5	✓	3	3,4	✓	3,4,5	3	✓						
3	3	✓	3,4	3	✓									
3	4	✓	3	4,5	✓									
4	3	✓	4,5	3	✓									
3	5	✓												
5	3	✓												

Figura 2: Tabla de minimización que ilustra la simplificación tabular.

simplificar, es decir, se busca la regla más simple asociada con un consecuente. Para ello se sigue el siguiente procedimiento: (1) inicializar a cero el conjunto de mintérminos cubiertos y seleccionar la lista situada más a la derecha (la lista de implicantes primos) de la tabla de minimización. (2) De la lista seleccionada, elegir los implicantes que cubran el mayor número de mintérminos no cubiertos para formar la regla más simple, borrarla de la lista, y pasar a (3). Si no se encuentran implicantes, entonces pasar a (4). (3) Eliminar aquellos implicantes (que están aún seleccionados para formar la regla más simple) que están cubiertos por el nuevo implicante que se ha incluido. Entonces pasar a (2). (4) Seleccionar de la tabla de minimización la lista inmediatamente anterior a la última analizada y pasar a (2). El procedimiento finaliza cuando todos los mintérminos asociados con el consecuente están cubiertos. En el ejemplo de las Figuras 1 y 2, se puede ver cómo los 3 implicantes primos de la última lista cubren todos los mintérminos.

Paso 4: Se usan modificadores lingüísticos para expresar la regla resultante de una forma simple y expresiva. En particular, usamos los modificadores lingüísticos ‘mayor o igual’ y ‘menor o igual’. Por ejemplo, para un implicante $x_1(1)$, $x_2(2,3,4)$, la parte del antecedente se expresaría como sigue:

$$\text{Si } (x_1 \text{ es MP y } (x_2 \text{ es mayor o igual que P o menor o igual que G})) \quad (3)$$

Si todas las funciones de pertenencia de una variable están cubiertas por el implicante primo que aparece en la regla, esa variable se elimina de la parte del antecedente porque su valor no importa. Por ejemplo, para un implicante $x_1(1)$, $x_2(1,2,3,4,5)$, la parte del antecedente se expresaría como sigue:

$$\text{Si } (x_1 \text{ es MP}) \quad (4)$$

Si todas las funciones de pertenencia de una variable están cubiertas por el implicante primo excepto una, se usa el modificador lingüístico ‘distinto de’. Por ejemplo, para el implicante $x_1(1)$, $x_2(1,2,4,5)$, la parte del antecedente se expresaría como:

$$\text{Si } (x_1 \text{ es MP y } x_2 \text{ es distinto de M}) \quad (5)$$

Si el límite más bajo (más alto) de una agrupación es la primera (última) función de pertenencia, dicha condición puede ser eliminada de la parte antecedente. Por ejemplo, para el implicante $x_1(4,5)$, $x_2(1,2)$, la parte del antecedente asociado se expresa como:

$$\text{Si } (x_1 \text{ es mayor o igual que G y } x_2 \text{ es menor o igual que P}) \quad (6)$$

Por tanto, las 25 reglas (en forma tabular) mostradas en la Figura 1, quedan simplificadas en las siguientes 5 reglas:

$$\begin{aligned} &\text{Si } (x_1 \text{ es MP o } x_1 \text{ es M o } x_2 \text{ es M}), \\ &\text{entonces } y = Z; \\ &\text{Si } (x_1 \text{ es P y } x_2 \text{ es menor o igual que P}), \\ &\text{entonces } y = \text{PS}; \\ &\text{Si } (x_1 \text{ es P y } x_2 \text{ es mayor o igual que G}), \\ &\text{entonces } y = \text{NS}; \\ &\text{Si } (x_1 \text{ es mayor o igual que G y } x_2 \text{ es menor o igual que P}), \text{ entonces } y = \text{N}; \\ &\text{Si } (x_1 \text{ es mayor o igual que G y } x_2 \text{ es mayor o igual que G}), \text{ entonces } y = \text{P}; \end{aligned} \quad (7)$$

2.2. SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES DE PERTENENCIA

Los métodos más ampliamente usados para simplificar funciones de pertenencia son los de clustering, unión por similitud y purga.

Los métodos de clustering buscan un número reducido de clusters (prototipos de funciones de pertenencia) en los

que agrupar varias funciones originales. Los clusters se encuentran en el espacio de los parámetros que definen las funciones de pertenencia. El número óptimo de clusters puede ser encontrado automáticamente aplicando índices de validez, como son el Índice de Separación de Dunn, el Índice de Davies-Bouldin y los Índices Generalizados de Dunn [2].

Los procesos de unión por similitud buscan el par de funciones más similares y las reemplaza por una función única si el grado de similitud está por encima de un valor umbral. El proceso termina cuando no pueden unirse más funciones. Mientras el umbral sea más bajo, mayor será el número de funciones unidas [8].

En nuestra técnica aplicamos métodos de clustering o similitud para simplificar las funciones de pertenencia de los consecuentes, puesto que, al aplicar métodos de ajuste sobre ellas, lo normal es que queden varias muy similares. Este paso es previo a la simplificación tabular.

El mecanismo de simplificación por purga busca aquellas funciones de pertenencia que no están siendo usadas en la base de reglas y las elimina. En nuestra técnica aplicamos este mecanismo tras realizar la simplificación tabular para simplificar las funciones de pertenencia de los antecedentes. En el ejemplo de la Figura 1, este mecanismo reduce las funciones de pertenencia de la variable x_1 a 4 (MP, P, M, G) y las de x_2 a 3 (P, M, G).

3. AUTOMATIZACIÓN DE LA TÉCNICA

La técnica propuesta puede realizarse automáticamente mediante las herramientas de CAD del entorno Xfuzzy 3, desarrollado en el Instituto de Microelectrónica de Sevilla [4]. La extracción de la base de reglas tipo grid puede realizarse con la herramienta *xfdm* [6] y el ajuste de las funciones de pertenencia de los consecuentes aplicando técnicas de aprendizaje supervisado puede llevarse a cabo mediante la herramienta *xfsl* [4]. Para aplicar el método de simplificación tabular y los métodos de simplificación de funciones de pertenencia se ha desarrollado la herramienta *xfsp*. Dicha herramienta permite aplicar métodos de simplificación por purga, clustering y unión por similitud para las funciones de pertenencia (de antecedentes o consecuentes) (Figura 3) y métodos de compresión-expansión y podado, además de simplificación tabular, para las bases de reglas.

4. EJEMPLO PRÁCTICO

Aunque la técnica se ha probado con bases de datos para aprendizaje automático disponibles en el repositorio UCI [12], nuestro interés actual se centra en utilizar esta técnica para diseñar sistemas de control empotrados en

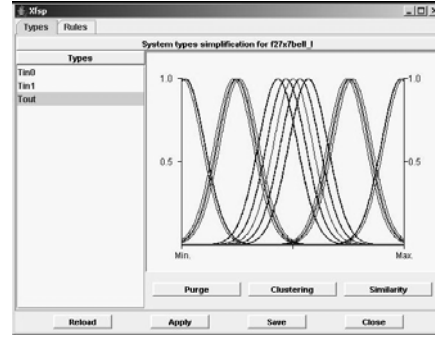


Figura 3: Ventana principal de *xfsp* para simplificar funciones de pertenencia.

robótica móvil. Por eso el ejemplo que incluimos está relacionado con el problema de navegación evitando obstáculos de un robot autónomo de tipo “coche”. Para la detección del obstáculo, el robot posee un láser en su parte delantera que hace barridos de 0 a 180°. Dentro de los numerosos bloques destinados a las distintas tareas de control del robot, uno de ellos estudia si el obstáculo en cuestión es evitable, con lo cual se procede a los cambios pertinentes en la trayectoria para evitarlo, mientras que si es inevitable, el robot debe parar.

Utilizando conocimiento heurístico, lo normal es que aplicáramos sólo dos reglas difusas: “Si el obstáculo está muy cerca, detente” y “Si el obstáculo está muy lejos, sigue adelante”. Pero estas reglas son demasiado simples para una navegación eficiente.

Otra opción es estudiar cinemáticamente el problema, estando centrado en el eje trasero del coche el origen de coordenadas referidas al vehículo, y añadiendo restricciones debidas a los círculos de curvatura máxima que pueden llevarse a cabo en una dirección u otra. La ecuación más simplificada a la que se ha llegado para describir el comportamiento de un obstáculo inevitable es:

$$h^2 + 2h[d|\sin(\phi_m)| + R_{\min}|\cos(\phi_m)|] < 4(R_{\min} + 1) - d^2 \quad (7)$$

Donde h es la distancia desde el punto más cercano del obstáculo al láser y ϕ_m es el ángulo que marca el láser para dicho punto. $R_{\min}$ es el radio mínimo perteneciente a la circunferencia de curvatura máxima del robot, mientras que d es la distancia entre el láser y el eje trasero del coche (Figura 4).

Con el análisis cinemático no tenemos apenas información lingüística sobre lo que tendría que hacer el robot, es decir, la ecuación (7) no explica lingüísticamente lo que debe hacer el robot. Nuestro objetivo ha sido traducir esa ecuación a una base de reglas simple y lingüísticamente interpretable. Para ello hemos generado

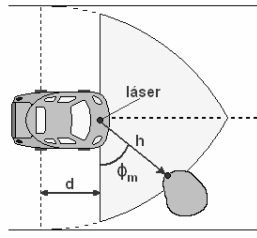


Figura 4: Zona de obstáculo inevitable.

un fichero con los datos numéricos que representan el análisis cinemático. Aplicando nuestra técnica, hemos empleado la herramienta *xfdm* incluida en Xfuzzy 3 para extraer una base de reglas tipo grid. En concreto, hemos elegido el método de Wang y Mendel, con 20 funciones de pertenencia para cada entrada, con lo que se genera un sistema con 400 reglas. Las funciones de pertenencia cubren las entradas como se muestra en la Figura 5, siendo el rango de valores para h entre 0 y 3m, mientras que para ϕ_m es de 0 a 180°. El comportamiento del sistema se puede visualizar mediante la herramienta *xfplot* de Xfuzzy 3 tal y como puede apreciarse en la Figura 6, donde la zona más oscura corresponde a los obstáculos inevitables (y, por tanto, la orden de control es parar el coche) y la más clara a los obstáculos evitables. En este problema, los consecuentes de las reglas sólo toman dos valores ‘parar’ ($v = \text{cero}$) o ‘seguir adelante’ ($v = \text{uno}$), por lo que no es necesario aplicar ajuste ni simplificación de consecuentes.

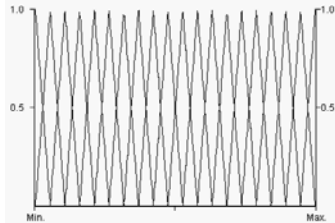


Figura 5: Entradas del sistema difuso.

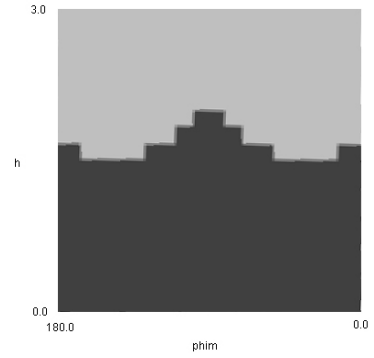


Figura 6: Salida del sistema difuso con 400 reglas.

El siguiente paso es aplicar sobre dicho sistema el método de simplificación tabular con la ayuda de *xfsp*. El resultado da lugar a un sistema de dos reglas expresadas de forma comprimida: una regla para los puntos de obstáculo inevitable ($v = \text{cero}$), y otra para los puntos de obstáculo evitable ($v = \text{uno}$). Aprovechando que el problema está formado por una base de reglas completa y, además, es bi-valuado, podemos quedarnos con la regla correspondiente a los puntos de obstáculo inevitable y su negada. Hecho esto, si expandimos la base de reglas obtenemos como resultado lo expuesto en la Tabla 1. Se puede apreciar cómo de un problema de 400 reglas se pasa a otro de 7, mucho más simple.

Lo siguiente es aplicar el método de purga sobre las funciones de pertenencia de las entradas. Las entradas h y

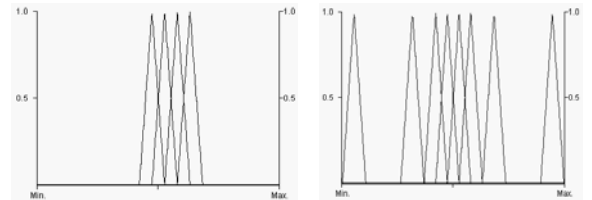


Figura 7: Entradas h y ϕ_m tras la simplificación.

Tabla 1: Reglas obtenidas tras la simplificación del sistema difuso

Si	h es menor o igual que aprox143cm	$v = \text{cero}$
Si	ϕ_m es menor o igual que aprox9grad y h es menor o igual que aprox158cm	$v = \text{cero}$
Si	ϕ_m es mayor o igual que aprox170grad y h es menor o igual que aprox158cm	$v = \text{cero}$
Si	ϕ_m es mayor o igual que aprox57grad y es menor o igual que aprox123grad y h es menor o igual que aprox158cm	$v = \text{cero}$
Si	ϕ_m es mayor o igual que aprox76grad y es menor o igual que aprox104grad y h es menor o igual que aprox174cm	$v = \text{cero}$
Si	ϕ_m es mayor o igual que aprox85grad y es menor o igual que aprox95grad y h es menor o igual que aprox189cm	$v = \text{cero}$
Si no		$v = \text{uno}$

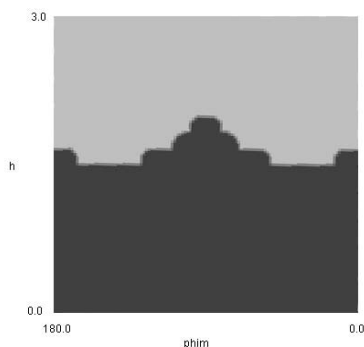


Figura 8: Salida del sistema difuso simplificado

ϕ_m pasan de tener 20 funciones de pertenencia cada una, a tener 5 y 8 respectivamente, tal y como puede verse en la Figura 7. El comportamiento del sistema final simplificado se puede apreciar en la Figura 8, dando lugar a un resultado más suave que el original.

Analizando las reglas de la Tabla 1 y comparando con lo observado en la Figura 8, podemos comprobar la interpretación lingüística de la base de reglas obtenida:

- Si el obstáculo está cerca, párate.
- Si el obstáculo está un poco más lejos, pero está muy a la izquierda, o muy a la derecha o en gran parte de la zona central frente al robot, párate.
- Si el obstáculo está bastante más lejos pero bastante centrado frente al robot, párate.
- Si el obstáculo está mucho más lejos pero situado justo frente al robot, entonces párate.
- En otro caso, sigue adelante.

Utilizando una técnica de clustering para extraer la base de reglas (por ejemplo el algoritmo Incremental Clustering [6]) y simplificando las funciones de pertenencia, el número de reglas final, así como el número de funciones de pertenencia totales y el comportamiento del sistema, son similares a los obtenidos por la técnica propuesta, salvo que con el clustering se pierde toda interpretabilidad lingüística y el sistema obtenido es más costoso de implementar.

5. CONCLUSIONES

Partiendo de una base de reglas tipo grid, gracias a la gran eficacia del método de simplificación tabular y los métodos de simplificación de funciones de pertenencia, se obtienen sistemas con un número de reglas y un número de funciones de pertenencia equiparables a los que se obtienen con métodos de clustering, pero manteniendo las ventajas en cuanto a interpretabilidad lingüística de las bases de reglas tipo grid. Si se emplean funciones de pertenencia triangulares o trapezoidales el sistema resultante es, además, muy eficiente para ser implementado en hardware dedicado o software

empotrado.

Referencias

- [1] D. Nauck, "Data Analysis with Neuro-Fuzzy Methods", PhD. Dissertation, Univ. of Magdeburg, Faculty of Computer Science, Alemania, 2000.
- [2] E. H. Ruspini, P. P. Bonissone, W. Pedrycz, Eds., "Handbook of Fuzzy Computation", Institute of Physics Pub., 1998
- [3] E. J. McCluskey Jr., "Introduction to the Theory of Switching Circuits", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1965.
- [4] F. J. Moreno-Velo, I. Baturone, F. J. Barrio S. Sánchez-Solano, A. Barriga, "A Design Methodology for Complex Fuzzy Systems", Proc. 3rd European Symp. on Intelligent Technologies, Hybrid Systems and their implementation on Smart Adaptive Systems, EUNITE'2003, Oulu, Julio 2003.
- [5] F. Klawonn, R. Kruse, "Constructing a Fuzzy Controller from Data", *Fuzzy Sets and Systems*, 85, pp. 177-193, 1997.
- [6] I. Baturone, F. J. Moreno-Velo, A. Gersnoviez, "Identifying fuzzy systems from numerical data with Xfuzzy", Proc. 4th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, EUS-FLAT'2005, pp. 1257-1262, Barcelona, Sept. 2005.
- [7] L. Wang, J. M. Mendel, "Generation Rules by Learning from Examples". *Proc. Int Symp. on Intelligent Control*, pp. 263-268, 1991.
- [8] M. Setnes, R. Babuska, U. Kaymak, H. R. van Nauta Lemke, "Similarity measures in fuzzy rule base simplification", *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, part B*, vol. 28, no. 3, pp. 376-386, Junio 1998.
- [9] M. Sugeno, T. Yakusawa, "A Fuzzy-Logic-Based Approach to Qualitative Modeling", *IEEE Trans. On Fuzzy Systems*, Vol. 1, N° 1, pp.7-31, Feb. 1993.
- [10] R. Rovatti, R. Guerreri, G. Baccarani, "An enhanced two-level Boolean synthesis methodology for fuzzy rules minimization", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 3, no 3, pp. 288-299, Aug. 1995.
- [11] R. Senhadji, S. Sánchez-Solano, A. Barriga, I. Baturone, F. J. Moreno-Velo, "NORFREA: An Algorithm for non-redundant fuzzy rule extraction", *Proc. IEEE SMC'2002*, vol. 1, pp. 604-608, Tunisia, Oct. 2002.
- [12] UCI Repository of Machine Learning Databases, <http://www.ics.uci.edu/pub/machine-learning-databases>.

ON THE SOLUTION OF FUZZY SHORTEST PATH PROBLEMS

Fábio Hernandez

Dpto Ciência da Computação
Univ. Estadual do Centro-Oeste
Guarapuava-Brazil
hernandes@unicentro.br

Maria Teresa Lamata

DECSAI - E.T.S.Ing. Informática
Universidad de Granada
Granada-Spain
mtl@decsai.ugr.es

José Luis Verdegay

DECSAI - E.T.S.Ing. Informática
Universidad de Granada
Granada-Spain
verdegay@decsai.ugr.es

Abstract

The shortest path problem, in graphs with uncertainty in its parameters, is one of the most studied topics in fuzzy mathematical programming, as it has a wide range of applications in different areas. However, due to its high computational complexity, existing algorithms present peculiarities and problems that need to be addressed. In this paper, we propose an iterative algorithm with a generic order relation, i.e. decision-makers can choose, or propose, the order relation that best suits their problem. This algorithm is based on the Ford-Moore-Bellman algorithm for classical graphs, it can be applied in graphs with negative parameters and it can detect whether there are negative circuits. It has been implemented using certain order relations, where one can find a set of fuzzy path solutions while others find only the shortest path.

Keywords: Fuzzy graph, shortest path problems, fuzzy mathematical programming, fuzzy numbers.

1 INTRODUCTION

The problem of finding the shortest path from a specified source node to the other nodes is a fundamental matter that appears in many applications: routing, transportation, communications and recently supply chain management. Let $G=(V,E)$ be a graph, where V is the set of vertices and E is the set of edges. A *path* between two nodes is a sequence of edges connecting both nodes. The *length* (cost) of a path is the sum of the weights of the edges on the path.

Since there can be more than one path between two vertices, it arises the problem of finding the path with the minimum cost between two specified vertices. This is the so called *shortest path problem*. In classical graph theory, the weight of each edge is a crisp number. However, as it

is well known most applications for this problem have parameters that are not naturally precise (i.e. costs, capacities, demands, time, etc.) and in such cases, fuzzy numbers [6, 14] can be applied.

The shortest path problem, involving addition and comparison between fuzzy numbers, particularly triangular fuzzy numbers, is very different from the problem involving precise real numbers. In the fuzzy shortest path problem, the final costs are fuzzy numbers. What is difficult is to find a smaller path than all the other existing paths. It is therefore often hard to find a fuzzy cost which is strictly smaller than the other costs.

In the literature there are many papers on this topic. Among them that one by Dubois and Prade [5] considers extensions of the classic Floyd and Ford-Moore-Bellman (FMB) algorithms. Nevertheless, it has been verified that both algorithms can return lengths without an associated path [21], and these problems were outlined by Klein [11] with the fuzzy dominance set. Lin and Chern [12] define the *vital arcs*, as being those whose removal of the path results in an increase of cost. Another algorithm for this problem was presented by Okada and Gen [17,18]. They propose a generalization of Dijkstra's algorithm in which the weights of the arcs are given as intervals. Okada and Soper [19] characterized the solution not as the shortest path, but as a fuzzy set solution, where each element is a nondominated path or Pareto Optimal path with fuzzy edge weights. However, this algorithm does not provide decision-makers with any guidelines for choosing the best of these paths according to their points of view (optimistic/pessimistic). Blue et al. [3] presented an algorithm which finds a cut value to limit the number of analyzed paths, and then applied a modified version of the k-shortest path (crisp) algorithm proposed by Eppstein [7]. Following the idea of finding a fuzzy set solution, Okada [16] introduced the concept of the degree of possibility of an arc being on the shortest path. One of the most recent articles is that by Nayeem and Pal [15] who presented an algorithm, based on the acceptance index introduced by Sengupta and Pal [20], which gives a single fuzzy shortest path or a guideline for choosing the best fuzzy shortest path according to the decision-maker's viewpoint. However, this only happens when the means

are the same but the widths are different from the obtained paths.

In these articles, it is clear that they present peculiarities and/or problems that warrant attention, for example: they can find costs without an existing path; they can determine a fuzzy solution set, but do not provide decision-makers with any guidelines for choosing the best path; they can only be applied in graphs with fuzzy non-negative parameters. There are certain real problems where negative parameters appear that need to be analyzed (see [1]) and these algorithms can not be applied.

Because of this here we propose an iterative algorithm for the shortest path problem in graphs with fuzzy parameters. This algorithm is based on the FMB algorithm [2], and it is presented with a generic order relation, in such a way that decision-makers can choose, or propose, the order relation that best suits their problems.

The proposed algorithm has some important advantages, such as: it can be applied in graphs with negative parameters and can detect whether there are negative circuits; it can be implemented by using a variety of order relations in such a way that, first, when decision-makers only look for a path, the algorithm can find it, but, second, if the decision-makers are looking for a diversity of such paths, also the algorithm, depending on the order relation selected, could find it. Moreover, the algorithm is the theoretical base of a decision support systems (DSS) oriented to solve this kind of problems.

The paper is organized as follows: In Section 2, we define some basic notions on fuzzy numbers. The mathematical formulation is presented in Section 3. In Section 4, we present the proposed algorithm. Section 5 outlines an illustrative example and comments. Finally, some conclusions are pointed out.

2. CONCEPTS AND PRELIMINAIRES

For the sake of introducing the denotation to be used in the remain of this paper, in the following we introduce some well-known basic definition of fuzzy indexes.

2.1 FUZZY NUMBERS

Definition 1. A *triangular fuzzy number* is represented by a triplet $\tilde{a} = (m, \alpha, \beta)$, with the *membership function*, $\mu_{\tilde{a}}(x)$, defined for the expression:

$$\mu_{\tilde{a}} = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq m - \alpha \\ \frac{x - (m - \alpha)}{\alpha}, & \text{if } m - \alpha < x < m \\ 1, & \text{if } x = m \\ \frac{(m + \beta) - x}{\beta}, & \text{if } m < x < m + \beta \\ 0, & \text{if } x \geq m + \beta \end{cases} \quad (1)$$

where m is the centre, α the left spread, and β the right spread.

The membership degrees between the values $m - \alpha$ and m will be represented by $f_{\tilde{a}}^L(x)$ and those between m and $m + \beta$ by $f_{\tilde{a}}^R(x)$.

Definition 2. Let $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ be two triangular fuzzy numbers, $\tilde{a} = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$ and $\tilde{b} = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$. Then the *fuzzy sum* of these two numbers is given by:

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (m_1, \alpha_1, \beta_1) \oplus (m_2, \alpha_2, \beta_2) = (m_1 + m_2, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) \quad (2)$$

2.2. ORDER RELATIONS

A variety of methods for ordering and ranking fuzzy numbers have been proposed in the literature (e.g. see [4,20]). However, as we mentioned above, in this work we shall consider an algorithm with a generic order relation, i.e. decision-makers will be able to choose an order relation from literature or to propose one for his/her problem.

The order relation of the algorithm is defined as:

Definition 3. Let $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ be two triangular fuzzy numbers, then $\tilde{a}$ is *preferred* to $\tilde{b}$ ($\tilde{a} \prec \tilde{b}$) iff $f(\tilde{a}) < f(\tilde{b})$.

The function $f(*)$ can be applied using any comparison criterion for fuzzy numbers.

Definition 4. Let $S = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n\}$ be a set of fuzzy numbers and the comparison function f an application of S in $\mathbb{R}$. For any $\tilde{a}_i, \tilde{a}_j \in S$, one verifies:

- $\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j$ if $f(\tilde{a}_i) < f(\tilde{a}_j)$;
- $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j$ if $f(\tilde{a}_i) > f(\tilde{a}_j)$.

In particular, here the following order relations are considered: Yager's centre of gravity method [22,23,24], Liou and Wang's index [13], García and Lamata's index [8], Okada and Soper's order relation [19] and Nayeem and Pal's order relation [15].

Definition 5. The Yager's first defuzzification index is the centre of gravity method and it is defined as:

$$f(\tilde{a}) = \frac{\int_0^1 \alpha \tilde{a}_\alpha d\alpha}{\int_0^1 \alpha d\alpha} \quad (3)$$

Definition 6. Let $\tilde{a} = (m, \alpha, \beta)$ be the fuzzy number defined by means of the continuous functions $f_{\tilde{a}}^L(x)$ and $f_{\tilde{a}}^R(x)$ in $[0,1]$, with its respective inverse functions $f_{\tilde{a}}^{L^{-1}}(x)$ and $f_{\tilde{a}}^{R^{-1}}(x)$. Then the area generated for $f_{\tilde{a}}^L(x)$ in $[-\infty, m]$ is given by:

$$S_L(\tilde{a}) = (m - \alpha) + \int_{m-\alpha}^m f_{\tilde{a}}^L(x) dx = \int_0^1 f_{\tilde{a}}^{L^{-1}}(y) dy \quad (4)$$

and the area generated for $f_{\tilde{a}}^R(x)$ in $[-\infty, m+\beta]$ is given by:

$$S_D(\tilde{a}) = m + \int_m^{m+\beta} f_{\tilde{a}}^R(x) dx = \int_0^1 f_{\tilde{a}}^{R^{-1}}(y) dy \quad (5)$$

Then, Liou and Wang defined the ordinance index as:

$$LW_i^\lambda(\tilde{a}_i) = \lambda S_D(\tilde{a}_i) + (1-\lambda) S_I(\tilde{a}_i) \quad (6)$$

where $\lambda \in [0,1]$ is a value that reflects the decision-maker's optimism.

Consequently, applying the order relation suggested by the Liou and Wang's index, if $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ are two triangular fuzzy numbers, then $\tilde{a}$ is preferred to $\tilde{b}$ ($\tilde{a} \prec \tilde{b}$) iff $LW^\lambda(\tilde{a}) < LW^\lambda(\tilde{b})$.

As Liou and Wang's index is not capable of differentiating certain fuzzy numbers, García and Lamata [8] proposed an alternative solution. The proposed index improves the discrimination between fuzzy numbers, retaining the optimism index (λ) and including a new one $\delta \in [0,1]$. This is called the *modality index* and represents the proximity of the choice of the decision-maker in relation to the modal one. In other words, δ gives us the weighting of the central value and $(1-\delta)$ the weighting of the extreme values.

Definition 7. If $\tilde{a} = (m, \alpha, \beta)$ is a fuzzy number, then the area until the height of the number is:

$$S_H(\tilde{a}) = m \quad (7)$$

and the index associated to a fuzzy number $\tilde{a}$, is:

$$I(\tilde{a}) = (1-\delta)[\lambda S_D(\tilde{a}) + (1-\lambda) S_I(\tilde{a})] + \delta S_H(\tilde{a}) \quad (8)$$

where $S_D(\tilde{a})$, $S_I(\tilde{a})$ and $S_H(\tilde{a})$ are, respectively, the area of the left spread, of the right spread, and the area until the height of the fuzzy number. The δ value is a decision-maker's degree of modality $\delta \in [0,1]$ and λ the optimism degree, $\lambda \in [0,1]$. Hence according to this index if $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ are two triangular fuzzy numbers, then $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ iff $I(\tilde{a}) < I(\tilde{b})$.

The order relation between fuzzy numbers, proposed by Okada and Soper [19], is based on "fuzzy min" proposed by Dubois and Prade [5]. This relation leads to the concept of nondominated path or Pareto Optimal path.

Definition 8. Let $\tilde{a} = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$ and $\tilde{b} = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$ be two fuzzy numbers, $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ ($\tilde{a}$ dominates $\tilde{b}$) $\Leftrightarrow m_1 \leq m_2, \alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2$ and $\tilde{a} \neq \tilde{b}$.

Definition 9. Let $\tilde{a} = (m, \alpha, \beta)$ be a triangular fuzzy number and ε a selected number from the interval $[0,1]$. The set $\{x \in \mathcal{R} / \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \varepsilon\}$, which is a closed interval and will be denoted as $[(m-\alpha)_\varepsilon, (m+\beta)_\varepsilon]$, is called the ε -cut of the triangular fuzzy number $\tilde{a}$ for $\varepsilon > 0$. The 0-cut is defined as $[(m-\alpha), (m+\beta)]$.

Definition 10. Let $\tilde{a} = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$ and $\tilde{b} = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$ two triangular fuzzy numbers and $\varepsilon \in [0,1]$, then $\tilde{a}$ dominates $\tilde{b}$ with degree ε ($\tilde{a} \prec_\varepsilon \tilde{b}$) iff $m_1 \leq m_2, (m_1 - \alpha_1)_\varepsilon \leq (m_2 - \alpha_2)_\varepsilon, (m_1 + \beta_1)_\varepsilon \leq (m_2 + \beta_2)_\varepsilon$ and $\tilde{a} \neq \tilde{b}$.

Nayeem and Pal [15] extended the acceptability index to triangular fuzzy numbers (an index originally proposed by Sengupta and Pal [20] for interval numbers), and they then used this index to compare the costs of the paths.

Definition 11. If $\tilde{a} = (m_1, \alpha_1, \beta_1)$ and $\tilde{b} = (m_2, \alpha_2, \beta_2)$ are two fuzzy numbers, then the *acceptability index* (A-index) is:

$$A(\tilde{a} \prec \tilde{b}) = \frac{m_2 - m_1}{\beta_1 + \alpha_2} \quad (9)$$

Using the A-index, the following ranking orders may be defined:

Definition 12. If $A(\tilde{a} \prec \tilde{b}) \geq 1$ then $\tilde{a}$ dominates $\tilde{b}$ ($\tilde{a} \prec \tilde{b}$) in the case of minimization, and vice versa in the case of maximization.

Definition 13. If $0 < A(\tilde{a} \prec \tilde{b}) < 1$ then $\tilde{a}$ partially dominates $\tilde{b}$ (denoted by $\tilde{a} \prec_p \tilde{b}$) in the case of minimization and $\tilde{b}$ is said to partially dominate $\tilde{a}$ in the case of maximization.

Using the acceptability index, the algorithm considered by Nayeem and Pal can present more than one shortest path, but this is only possible if the modal values of the numbers are equal.

3. MATHEMATICAL FORMULATION

Let $G=(V,E)$ be a directed network, where V is the set of vertices and E is the set of edges (arcs). Each arc is denoted by an ordered pair (i,j) , $i, j \in V$. One supposes there is only one directed arc (i,j) from i to j . Let s and t be the source and destination nodes, respectively. A path $p_{ij} = \{i = i_1, (i_1, i_2), i_2, \dots, i_{k-1}, (i_{k-1}, i_k), i_k = j\}$ is a sequence of alternating nodes and arcs. It is also assumed for every node $i \in V - \{s\}$ the existence of at least one path p_{si} in $G(V,E)$. Then [16] the fuzzy shortest path problem can be formulated as the following linear programming problem

$$\min \tilde{f}(x) = \sum_{(i,j) \in E} \tilde{c}_{ij} x_{ij} \quad (10)$$

$$s.t.: \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = 1 \\ 0, & \text{if } i \neq 1, t \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ -1, & \text{if } i = t \end{cases} \quad (11)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \text{ for } (i, j) \in E \quad (12)$$

where $\tilde{c}_{ij}$ is the fuzzy number giving the cost of the arc (i,j) , and the symbol $\oplus$ in the objective function (10) stands for the addition $\oplus$ between fuzzy numbers.

It is patent that the meaning of “min” in the objective function (10) is ambiguous and have been undefined yet. Consequently an optimal solution to this problem in the normal sense cannot be obtained because such a problem is “ill-posed” in the sense of being a fuzzy one.

4. THE ALGORITHM

The proposed algorithm, as previously stated, is an adaptation of the FMB algorithm [2] for classic graphs. It is an iterative algorithm, possessing as stop criterion either a number of iterations or the non-alteration of the costs of the paths found between the previous iteration and the current one. Since it is possible for certain implemented order relations to have more than one path between two nodes, each path is labeled.

This algorithm performs the following Steps: Step 0 is for initializations; in Step 1, all the paths between 1 and i are determined and the considered order relation is applied to eliminate the dominated paths; in Step 2, the stop criterion is verified. If the stop criterion is satisfied, the shortest paths are constructed in Step 3, otherwise it is necessary to return to Step 1.

4.1 ALGORITHM

The notations used are as follows:

it : iterations' counter;

$(m + \beta)^i$: right spread $(m + \beta)$ of cost of node i ;

$\tilde{c}_{ji}$: cost of edge (j,i) ;

$\tilde{c}_{(i,k)}^{it}$: length of path between node 1 and i with label k in the iteration it ;

M : a big number (substitutes ∞)

Γ_i^{-1} : set of predecessor nodes of i ;

$f(\tilde{c}_{(i,k)}^{it})$: order relation applied in the length of path with label k , between nodes 1 and i , in the iteration it .

Algorithm

STEP 0: Initialization

1. $\tilde{c}_{(1,1)}^0 = (0, 0, 0)$;
2. $\tilde{c}_{(j,1)}^0 = (M + 2, 1, 1)$, $j = 2, 3, \dots, r$
where: r is a number of nodes;
$$M = \sum_{i=1}^E \left| (m + \beta)^i \right|$$
; and
 E : number of edges;
3. $it \leftarrow 1$.

STEP 1: Determination of the paths and verifications of the order relation

1. $\tilde{c}_{(1,1)}^{it} = (0, 0, 0)$;
2. $\forall j \in \Gamma_i^{-1}, i = 1, 2, 3, \dots, r$ do:
$$\tilde{c}_{(i,k1)}^{it} = \tilde{c}_{(j,k2)}^{it-1} \oplus \tilde{c}_{ji}$$
3. Label scan and dominance check
Between all the labels of the node i do:
➤ If $f(\tilde{c}_{(i,k1)}^{it}) > f(\tilde{c}_{(i,k2)}^{it}) \Rightarrow$ delete the $k1$ th label;
➤ If $f(\tilde{c}_{(i,k1)}^{it}) < f(\tilde{c}_{(i,k2)}^{it}) \Rightarrow$ delete the $k2$ th label.
4. Verification of negative circuit
➤ If there is at least one path between nodes 1 and i such that:
$$f(\tilde{c}_{(i,k)}^{it}) < 0 \Rightarrow \text{Step 4};$$

➤ Otherwise $\Rightarrow$ Step 2.

STEP 2: Stop criterion

1. If $(\tilde{c}_{(i,k1)}^{it} = \tilde{c}_{(i,k1)}^{it-1}, \forall i \in N)$ or $(it = r)$ (N : set of nodes)
➤ If $it=r$ and $\tilde{c}_{(i,k1)}^{it} \neq \tilde{c}_{(i,k1)}^{it-1} \Rightarrow$ Step 4 (negative circuit);
➤ Otherwise $\Rightarrow$ Step 3.
2. Otherwise: $it \leftarrow it + 1 \Rightarrow$ return to Step 1.

STEP 3: Shortest paths composition

- Find the shortest paths from 1 to i ($i = 2, 3, \dots, r$).

STEP 4: END.

4.2 ALGORITHM INFORMATION

As Goldberg and Luna [9] stated, the FMB algorithm analyses all the nodes in each iteration and not only one per iteration. The stop criterion is associated with the non-modification of all the paths and their respective lengths in iteration related to the previous one or a number of iterations (in the maximum: number of nodes). As the considered algorithm is an adaptation of the FMB algorithm, the structure is maintained.

Since the FMB algorithm, in the case of non existence of a negative circuit, converges in a maximum of $r-1$ iterations, where r is the nodes' numbers, then this algorithm also will converge in a maximum of $r-1$ iterations, since the analysis of convergence of the two algorithms is the same.

Considering that the Okada and Soper order relation is most expensive, we will apply the calculus of the proposed algorithm complexity on it: in step 1 we have a maximum of rV_{max} additions to calculate the cost for each path, where V_{max} is the maximum number of labels of all nodes. In step 2, we have in the maximum rV_{max}^2 comparisons of dominances. Then, for each iteration, we have a complexity of $O(rV_{max}^2)$. Given that the proposed algorithm executes in maximum $r-1$ iterations, it has a complexity of $O((r-1)(rV_{max}^2)) = O(r^2V_{max}^2)$.

5. COMPUTATIONAL RESULTS

The algorithm was implemented in Matlab 7.0 and, for the sake of illustration, we executed it on a small network using the following order relations: Yager's centre of gravity method, Liou and Wang's index ($\lambda=0; 0.5$ and 1), García and Lamata's index (for several pairs of values), Okada and Soper ($\varepsilon=0$ and 0.5) and Nayeem and Pal. The example in the Figure 1 presents an acyclic network that possesses an edge with a negative cost.

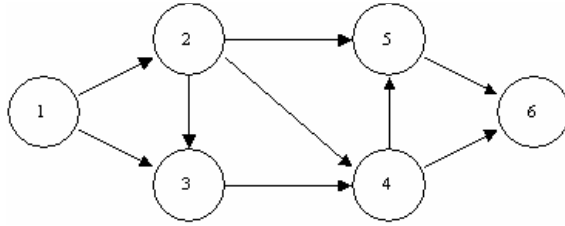


Fig. 1: Acyclic Network

according to the following values

Table 1. Cost of the Acyclic Network

Source Node	Destination Node	Edge Cost
1	2	(2 1 1)
1	3	(7 2 2)
2	3	(4 3 5)
2	4	(11 1 1)
2	5	(6 1 1)
3	4	(9 1 1)
4	5	(-8 1 1)
4	6	(13 2 1)
5	6	(9 1 1)

Table 2 (where L-W denotes the Liou and Wang index, G-L the one by García and Lamata, and O-S the Okada and Soper order relation) shows the results.

Table 2. Results of Acyclic Network

Destination Node	Edge Cost	Order Relations
1→2	(2 1 1)	All
1→3	(7 2 2)	O-S ($\varepsilon=0, 0.5$), L-W($\lambda=1$), G-L($\lambda=1, \delta=0$ and $\lambda=1, \delta=0.5$)
1→2→3	(6 4 6)	All, except: L-W ($\lambda=1$), G-L ($\lambda=1, \delta=0$)
1→2→4	(13 2 2)	All
1→2→3→4	(15 5 7)	O-S ($\varepsilon=0$)
1→2→4→5	(5 3 3)	All
1→2→3→4→5	(7 6 8)	O-S ($\varepsilon=0$)
1→2→4→5→6	(14 4 4)	All
1→2→3→4→5→6	(16 7 9)	O-S ($\varepsilon=0$)

Analyzing the results of Table 2 we verify that the majority of the order relations present the same results, therefore, we will emphasize the relations that had presented differences.

Initially we verify that the Okada's and Soper's relation, for ε equal to zero presents a considerable number of nondominated paths, which does not occur when it is applied for ε equal 0.5, therefore, exists a partial dominance in paths between the nodes 1 and 4, 5 and 6. This variety in the set solution already was expected, since the lengths of the paths are near.

Already the relation to the indexes of García and Lamata and Liou and Wang, we verify, as said for García and Lamata, that the index of Liou and Wang is a particularity of the one of García and Lamata for δ equal to zero. Also we verify the index of García and Lamata $\lambda=1$ and $\delta=0.5$ have presented two paths between the nodes 1 and 3, it has occurred because we are only working with the left spread and the lengths of the paths (1→3, 1→2→3) have presented the same index.

In Hernandez and Yamakami [10], this network was executed in the Okada and Soper's algorithm and it was verified, for example, that between the nodes 1 and 5 there were three nondominated paths, which is not true. This fact happened because of the existence of an arc with negative cost and that makes the Okada and Soper's algorithm to present flaws.

6. CONCLUSIONS

In problems of graphs involving uncertainties, the shortest path problem is one of the most studied topics since it has a wide range of applications in different areas and therefore deserves special attention. Here we have considered a generic algorithm for this problem that can be implemented using the order relation chosen by the decision-maker, and can work with crisp numbers, using defuzzification indexes, or with fuzzy numbers.

Depending on the order relation used by the decision-maker, this algorithm can return a set of shortest paths or a single one as solution. It is worth emphasising that unlike algorithms considered in literature, this can be executed on a network with negative parameters and can detect the existence of negative circuits. In addition to these advantages, the computational structure of the algorithm is easy to implement, and its computational complexity $(O(r^2 V_{\max}^2))$ is better than, for example, Okada and Soper algorithm $(O(r^3 V_{\max}^2))$.

Acknowledgements

Research carried out under projects CAPES (1249/05), TIN2005-02418, TIN2005-08404-C04-01 and TIC-00129-JA (MINAS).

References

- [1] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, J.B. Orlin. Network Flows. *Prentice Hall*, 1993.
- [2] R.E. Bellman. On a routing problem. *Quarterly J. Applied Mathematics* 16 (1958) 87-90.
- [3] M. Blue, B. Bush, J. Puckett. Unified approach to fuzzy graph problems. *Fuzzy Sets and Systems* 125 (2002) 355-368.
- [4] M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila. A procedure for ranking fuzzy numbers using fuzzy relations. *Fuzzy Sets and Systems* 26 (1988) 49-62.
- [5] D. Dubois, H. Prade. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. *Academic Press*, New York, 1980.
- [6] D. Dubois, H. Prade. Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory. *Information Sciences* 30 (1983) 183-224.
- [7] D. Eppstein. Finding the k-shortest paths. *Proc. IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, vol. I., 1994, pp. 154-165.
- [8] M. S. García, M. T. Lamata. The fuzzy sets in maintenance process. *Proceeding of 4th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*, 2005, pp. 118-123.
- [9] M. C. Goldbarg, H. P. L. Luna. Otimização Combinatória e Programação Linear (in portuguese). *Campus Press*, 2000.
- [10] F. Hernandez, A. Yamakami. Um algoritmo para o problema de caminho mínimo em grafos com custos nos arcos fuzzy (in Portuguese). *Proceedings of XV Brazilian Automation Conference*, 2004.
- [11] C.M. Klein. Fuzzy shortest paths. *Fuzzy Sets and Systems* 39 (1991) 27-41.
- [12] K. Lin, M. Chern. The fuzzy shortest path problem and its most vital arcs. *Fuzzy Sets and Systems* 58 (1993) 343-353.
- [13] T-S. Liou, M-J. Wang. Ranking fuzzy numbers with integral value. *Fuzzy Sets and Systems* 50 (1992) 247-255.
- [14] J.A. Moreno, J.M. Moreno, J.L. Verdegay, Fuzzy location problems on networks. *Fuzzy Sets and Systems* 142 (2004) 393-405.
- [15] S.M.A. Nayeem, M. Pal. Shortest path problem on a network with imprecise edge weight. *Fuzzy Optimization and Decision Making* 4 (2005) 293-312.
- [16] S. Okada. Fuzzy shortest path problems incorporating interactivity among paths. *Fuzzy Sets and Systems* 142 (3) (2004) 335-357.
- [17] S. Okada, M. Gen. Order relation between intervals and its application to shortest path problem. *Proc. 15th Annual Conference on Computers Industrial Engineering* 25 (1993) 147-150.
- [18] S. Okada, M. Gen. Fuzzy shortest path problem. *Proc. 16th Annual Conference on Computers Industrial Engineering* 27 (1994) 465-468.
- [19] S. Okada, T. Soper. A shortest path problem on a network with fuzzy arc lengths. *Fuzzy Sets and Systems* 109 (2000) 129-140.
- [20] A. Sengupta, T.K. Pal. On comparing interval numbers. *European Journal of Operational Research* 127 (2000) 28-43.
- [21] M.T. Takahashi. Contribuições ao estudos de grafos fuzzy: teoria e aplicações (in Portuguese). *Phd Thesis, State University of Campinas*, Brazil, 2004.
- [22] R.R. Yager. Ranking fuzzy subsets over the unit interval. *Proc CDC* (1978) 1435-1437.
- [23] R.R. Yager. On choosing between fuzzy subsets. *Kybernetes* 9 (1980) 151-154.
- [24] R.R. Yager, A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Information Sciences* 24 (1981) 143-161.

APRENDIZAJE EVOLUTIVO COOPERATIVO DE REGLAS Y OPERADORES PARA SISTEMAS DIFUSOS LINGÜÍSTICOS

F. Herrera

Dpto. Ciencias de la
Computación e I.A.
Universidad de Granada
18071-Granada
herrera@decsai.ugr.es

F. A. Márquez

Depto. Ingeniería Electrónica
Sistemas Informáticos y A.
Universidad de Huelva
21071-Huelva
alfredo.marquez@diesia.uhu.es

A. Peregrín

Depto. Ingeniería Electrónica,
Sistemas Informáticos y A.
Universidad de Huelva
21071-Huelva
peregrin@diesia.uhu.es

Resumen

Este trabajo¹ presenta un modelo evolutivo que aprende de forma simultánea la Base de Reglas y los parámetros de los operadores difusos parametrizados de conjunción y defuzzificación, con el propósito de obtener un mayor nivel de cooperación entre la Base de Conocimiento y los operadores difusos. Con objeto de mostrar las mejoras en cuanto a precisión que se obtienen con este modelo, se comprueban sus resultados empíricamente en una aplicación.

Palabras Clave: Modelado Difuso, Métodos de Defuzzificación Adaptativos, Sistema de Inferencia Adaptativo, Aprendizaje Cooperativo de Reglas.

1 INTRODUCCIÓN

Interpretabilidad y precisión son dos requerimientos generalmente contradictorios en el diseño de Modelos Difusos (MD). La interpretabilidad es la capacidad de expresar el comportamiento del sistema real de una forma entendible. La precisión es la capacidad de representar fielmente el comportamiento del sistema real. En el diseño de MD existe una línea de trabajo que trata de buscar un balance entre precisión e interpretabilidad, lo que ha producido creciente interés en su estudio [3, 4].

Dos son las tareas fundamentales en el diseño de sistemas difusos lingüísticos para una aplicación concreta: la obtención de la Base de Conocimiento (BC), y la selección de los operadores del Sistema de Inferencia y la Interfaz de Defuzzificación. Estos últimos, en el marco del equilibrio entre precisión e interpretabilidad, han alcanzado recientemente mayor importancia. El uso de

operadores parametrizados tanto en el sistema de inferencia [1] como en la interfaz de defuzzificación [10], o en ambos de modo simultáneo [14] ha demostrado ofrecer mejoras importantes en la precisión para cada aplicación.

Los Algoritmos Genéticos (AGs) han demostrado ser una herramienta valiosa en éste ámbito, tanto para el ajuste evolutivo de los citados parámetros como para el de la BC. En este trabajo se propone el aprendizaje de los operadores parametrizados junto con el aprendizaje de la Base de Reglas (BR) en un mismo modelo evolutivo.

Para la BR se ha escogido la metodología COR [5], que consiste en un método de aprendizaje guiado por ejemplos, y que a diferencia de la mayoría de ellos, no trata de obtener el mejor consecuente para cada regla considerada aisladamente, sino el conjunto de ellas que mejor cooperan. El modelo evolutivo completo, reglas y operadores, utiliza un sólo cromosoma.

Este trabajo se ha organizado de la siguiente forma: En la Sección 2 se introducen los operadores difusos adaptativos, para introducir en la Sección 3 la propuesta del modelo evolutivo cooperativo. La Sección 4 contiene el estudio experimental desarrollado, que incluye el estudio estadístico, y finalmente una Sección con las conclusiones.

2 OPERADORES DIFUSOS ADAPTATIVOS

En esta sección se describe la notación utilizada para los Sistemas Basados en Reglas Difusas (SBRDs), así como en la primera subsección el operador de conjunción y en la segunda el método de defuzzificación adaptativos utilizados.

2.1. OPERADOR DE CONJUNCIÓN ADAPTATIVO

Los SBRDs para modelado utilizan reglas SI - ENTONCES de a forma siguiente:

¹ Soportado por el MEC bajo el Proyecto TIN2005-08386-C05-01.

$R_i : \text{Si } X_{i1} \text{ es } A_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } X_{in} \text{ es } A_{in} \text{ entonces } Y \text{ es } B_i$

con $i = 1$ hasta N reglas, siendo X_{i1} hasta X_{in} las entradas e Y la salida, y con A_{i1} hasta A_{in} y B_i los antecedentes y consecuentes respectivamente.

La expresión de la Regla Composicional de Inferencia en el modelado difuso con fuzzificación puntual es mostrada en la expresión (1), donde $\mu_{B'}$ es la función de pertenencia del consecuente inferido, I es el operador de implicación, C el operador de conjunción, μ_{A_i} al tratarse de fuzzificación puntual son los puntos de corte de las entradas discretas $(x_1, \dots, x_n)$ del sistema con las funciones de pertenencia de los antecedentes de las reglas, y μ_B el consecuente de la regla.

$$\mu_{B'}(y) = I(C(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)), \mu_B(y)), \quad (1)$$

Por tanto, el sistema de inferencia emplea dos operadores: el de conjunción, $C(\cdot)$ para calcular el grado de emparejamiento, y el de implicación, $I(\cdot)$ para calcular a continuación el consecuente inferido.

En [1 y 13] se estudiaron las diferentes formas de parametrización del Sistema de Inferencia observándose menor influencia en el uso de operadores de implicación adaptativos frente al de los de conjunción. Por este motivo, en este trabajo se utiliza la parametrización del Sistema de Inferencia exclusivamente mediante el operador de conjunción.

Las T-normas son una familia de operadores generalmente usados en el diseño de MD, modelando tanto el operador de conjunción como el de implicación [12] y ofreciendo buen comportamiento [9]. En este trabajo utilizaremos la t-norma parametrizada de Dubois (2) por ser computacionalmente eficiente, y ofrecer un comportamiento entre la del mínimo y la del producto algebraico, las cuales son las que mejores resultados ofrecen [7]. Otras t-normas parametrizadas pueden encontrarse en [16].

$$\text{Dubois} \quad T_{\text{Dubois}}(x, y, \alpha) = \frac{x \cdot y}{\text{Max}(x, y, \alpha)} \quad (2)$$

$(0 \leq \alpha \leq 1)$

El operador de conjunción adaptativo modula la influencia del grado de emparejamiento atenuándolo o acentuándolo. Esta modificación es no lineal debido a la expresión de la t-norma parametrizada.

Dos modelos de conjunción adaptativa podrían considerarse dependiendo de si se utiliza un sólo parámetro α , o distintos parámetros α_i para cada regla. Un sólo parámetro permite ajustar globalmente el comportamiento del conectivo mientras que los parámetros individuales ajustan dicho comportamiento para cada regla de la BC. El modelo de un sólo parámetro ofrece peores resultados [1], por lo que en este trabajo se

utiliza el modelo con un parámetro para cada regla. La t-norma de Dubois actúa como la del mínimo cuando $\alpha = 0$, mientras que cuando $\alpha = 1$ lo hace como la del producto. Cuando $0 < \alpha < 1$ continua comportándose como el mínimo salvo cuando todos los *cruces* con los antecedentes se encuentran por debajo de α , tomando valores entre el mínimo y el producto, y provocando un efecto similar al conocido mecanismo de concentración [15], que consiste en alterar el significado lingüístico de la estructura de la regla modificando el significado de la etiqueta. Por tanto, la t-norma parametrizada de Dubois conecta con el mínimo en aquellos casos en los que los cruces con los antecedentes son más significativos, mientras que los demás los lleva a cabo con un valor comprendido entre el mínimo y el producto.

2.2. MÉTODO DE DEFUZZIFICACIÓN ADAPTATIVO

La expresión formal (3) se emplea generalmente para generar métodos de defuzzificación adaptativos,

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N f(h_i) \cdot V_i}{\sum_{i=1}^N f(h_i)}, \quad (3)$$

donde h_i es el grado de emparejamiento, $f(h_i)$ es un término funcional del grado de emparejamiento y V_i es el máximo valor (MV_i) o el centro de gravedad (CG_i). Se trata de la expresión de un método de defuzzificación que actúa en Modo B, es decir, primero defuzzifica la aportación individual de la inferencia obtenida con cada regla y posteriormente se computa una suma ponderada.

El término funcional puede utilizar un solo parámetro β , o bien un parámetro por cada regla de la BC, β_i , que es la opción utilizada en este trabajo por obtener mejores resultados [10]. Por otro lado, el término funcional puede ser de tipo producto o potencia, como se muestra en las expresiones (4) y (5).

$$f(h_i) = h_i \cdot \beta_i, \quad f(h_i) = h_i^{\beta_i}. \quad (4), (5)$$

La combinación de estos dos funcionales con el MV o el CG genera cuatro métodos de defuzzificación.

El empleo del funcional de tipo potencia mediante un parámetro para cada regla es equivalente a una de las técnicas empleadas para realizar la modificación lingüística de la estructura de la regla [15]. Por otro lado, el funcional de tipo producto tiene un efecto equivalente al empleo de reglas con pesos [6]. El siguiente ejemplo presenta un conjunto de reglas con pesos, donde éstos son denominados por w_i :

*Si X_{11} es A_{11} y... y X_{1n} es A_{1n} entonces Y es B_1 con w_1
Si X_{21} es A_{21} y... y X_{2n} es A_{2n} entonces Y es B_2 con w_2*

Si X_{n1} es A_{n1} y... y X_{nm} es A_{nm} entonces Y es B_n con w_n

En este trabajo se ha seleccionado el funcional de tipo producto, con un parámetro para cada regla, y utilizando CG, cuya expresión se muestra en (6).

$$y_0 = \frac{\sum_i^N h_i \cdot \beta_i \cdot CG_i}{\sum_i^N h_i \cdot \beta_i}, \quad (6)$$

Este método de defuzzificación es equivalente al conocido WCOA cuando los parámetros se igualan a la unidad.

3. MODELO EVOLUTIVO COOPERATIVO DE APRENDIZAJE

Como se ha citado con anterioridad, la metodología COR (reglas que cooperan) [5] es un método *ad hoc* guiado por ejemplos, que proporciona conjuntos de reglas particularmente precisas dado que no selecciona la mejor regla individual en cada caso sino que prefiere aquellas que en conjunto, ofrezcan una BC con un mejor comportamiento global.

Este método maneja un conjunto de etiquetas de consecuentes, uno para cada regla, obteniendo la BR como un problema de optimización combinatoria.

En este trabajo utilizamos también el conocido método de Wang y Mendel (WM) [17], como un método de aprendizaje con el que comprar el método cooperativo presentado, al que se le ajustan posteriormente los parámetros de la conjunción y la defuzzificación.

El modelo presentado trata de mejorar la precisión del modelo difuso, utilizando la cooperación entre la BR y los operadores difusos.

Para ello, se ha utilizado un modelo evolutivo basado en un Algoritmo Genético (AG) de tipo CHC [11] cuyo cromosoma tiene un esquema de codificación triple ($CS_{COR}+CS_C+CS_{DW}$), donde CS_{COR} codifica los consecuentes de la metodología COR, CS_C los parámetros α_i de la conjunción, y CS_{DW} los parámetros β_i de la defuzzificación.

La parte del cromosoma CS_{COR} tiene N genes, cada uno de los cuales representa una etiqueta candidata para los consecuentes de las reglas, siendo los valores posibles que puede tomar entre EP_3 y EG_3 , representado en la implementación con valores enteros.

El algoritmo propuesto realiza una búsqueda aproximada sobre las reglas candidatas con el objetivo de seleccionar el conjunto de consecuentes con mejor cooperación junto con el resto del cromosoma.

La zona del cromosoma dedicada a los parámetros de los operadores, y tiene dos partes:

- Parte de la conjunción, CS_C , con N parámetros α_i (genes) para cada R_i de la BR. Cada gen toma valores en el intervalo [0,1], es decir, entre el mínimo y el producto algebraico.
- Parte de la defuzzificación, CS_{DW} , utilizando N parámetros β_i para cada R_i de la BR. Cada gen toma cualquier valor en el intervalo [0,10].

El AG de tipo CHC [11] es considerado como un modelo evolutivo con un buen balance entre diversidad y convergencia en problemas con grandes espacios de búsqueda.

En cada generación, el algoritmo CHC utiliza una población de padres de tamaño M para generar una población intermedia de M individuos, los cuales son aleatoriamente emparejados y utilizados para generar M' descendientes. Se mantiene entonces una competición por la supervivencia, donde los mejores M cromosomas desde las poblaciones de padres y descendientes son seleccionados para constituir la nueva generación.

En la fase de recombinación no se aplica ningún proceso de mutación. En su lugar, cuando la población converge o el proceso de búsqueda deja de progresar adecuadamente (el umbral de cruce llega a 0 y no se generan nuevos descendientes), la población se reinicia. El cromosoma que representa la mejor solución hasta ese momento se utiliza como patrón para generar la nueva población en un cromosoma, mientras que el resto es aleatorio.

Aunque el algoritmo CHC fue concebido para cromosomas con codificación binaria, existen versiones para su uso con cromosomas con codificación real como la empleada en la parte correspondiente a los parámetros de este trabajo, la cual utiliza el BLX- α como operador de cruce ($\alpha=0.5$). El cálculo de la distancia de Hamming se realiza convirtiendo los genes reales en una representación en cadenas y hallando la distancia de Hamming teniendo en cuenta si difiere o no cada uno de los caracteres. Sólo aquellas cadenas con una distancia mayor del umbral son combinados. El umbral se inicializa a L/4 siendo L la longitud de la cadena o cromosoma. Cuando ningún descendiente es insertado en la nueva población, el umbral se reduce a 1.

El tamaño de la población es de 50 individuos aleatoriamente inicializados todos salvo uno, con la siguiente configuración:

- Parte de la BR, CS_{COR} , con las N reglas obtenidas mediante el método WM.
- Parte de parámetros de los operadores:
 - Conjunción, CS_C , con los N genes inicializados a 0 para que la t-norma de Dubois sea equivalente a la t-norma del mínimo inicialmente.

- Defuzzificación, CS_{Dw} , con los N genes que representan los pesos de las reglas inicializados a 1, con objeto de partir equivaliendo al ampliamente conocido WECO. A.

La representación y los operadores de cruce elegidos son los siguientes, dependiendo de la parte del cromosoma:

- Parte de la BR, (CS_{COR}): Representado con un vector de enteros. El cruce empleado es estándar en dos puntos.
- Parte de parámetros de los operadores, (CS_C y CS_{Dw}): Representado con un vector de números reales. El cruce utilizado es el descrito anteriormente, BLX- α .

El modelo evolutivo utiliza dos umbrales distintos, uno para la parte del cromosoma con representación entera y otro para la parte con representación real. Ambos se inicializan a $L/4$, siendo L la longitud del vector entero, o la de la cadena en el caso del real. Cuando no se insertan descendientes en la nueva población, los umbrales se reducen en una unidad.

La función objetivo es el clásico Error Cuadrático Medio (ECM), (7).

$$ECM(S)_B = \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^P (y_k - S(x_k))^2}{P} \quad (7)$$

donde S es el modelo difuso cuyo Sistema de Inferencia utiliza la t-norma de Dubois como conjunción y la t-norma del mínimo como operador de implicación, y el método de defuzzificación WECO adaptativo con pesos. Esta medida utiliza un conjunto de datos para evaluación constituido por P pares de datos numéricos $Z_k = (x_k, y_k)$, $k=1, \dots, P$, siendo x_k los valores de las variables de entrada y y_k los correspondientes a las variables de salida.

4. ESTUDIO EXPERIMENTAL

En esta Sección se analiza la cooperación entre los diferentes elementos, desarrollando para ello un estudio experimental con una aplicación donde comparamos la precisión de los resultados de los distintos modelos difusos. Para ello, se ha desarrollado un estudio estadístico que incluye el test de ANOVA, Levene y Tamhane [2] con objeto de mostrar la significancia en las mejoras de precisión obtenidas con el modelo cooperativo propuesto. A continuación se describe la aplicación utilizada, y los resultados obtenidos.

4.1. DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN

La aplicación utilizada para estudiar el comportamiento práctico del modelo propuesto corresponde a una de las

utilizadas en [8], la cual consiste en un problema de distribución del sistema eléctrico español: el cálculo de costes óptimos teóricos de la línea de media tensión en núcleos urbanos.

Se dispuso de un conjunto de datos de 1059 ciudades que constan de cuatro variables de entrada y una de salida. El dominio de las variables de entrada y salida fue dividido en cinco etiquetas {MP, P, M, G, MG}.

Utilizamos tres tipos de BRs con 65 reglas lingüísticas obtenidas con el método de WM [17], el método COR [5] y el modelo cooperativo presentado. Se obtuvieron desde un conjunto de datos de entrenamiento con el 80% de los datos disponibles, es decir, 847 de las 1059 ciudades, tomados de modo aleatorio. Se ha utilizado validación cruzada de orden 5, es decir, 5 BRs asociadas con 5 conjuntos de entrenamiento. La evaluación de los modelos se realizó con el 20% restante del conjunto inicial, es decir, las 212 ciudades restantes.

4.3 METODOLOGÍA DE COMPARACIÓN

Se han construido varios modelos combinando la BR de WM con los operadores parametrizados, y por otro lado el modelo cooperativo presentado, asimismo también con diferentes tipos de parametrizaciones (conjunción o defuzzificación, o ambas), para comparar su precisión. Dichos modelos son los mostrados en la Tabla 1.

	Abrev.	WM BR	COR BR	Conjunc. Adaptat.	Defuzz. Adaptat.
Modelos de Referencia					
	WM	•			
	COR		•		
Modelos Adaptativos Evolutivos basados en BR de WM					
	WM+D _w	•			•
	WM+C	•		•	
	WM+C+D _w	•		•	•
Modelos Cooperativos Evolutivos propuestos					
	D _w – COR				•
	C – COR			•	
	C – D _w - COR			•	•

Tabla 1. Modelos Difusos del Estudio Experimental

Cada modelo evolutivo se ha ejecutado 30 veces, resultado de la combinación de 6 semillas para el generador de números aleatorios, y sobre 5 conjuntos diferentes de datos, con validación cruzada de orden 5.

Los distintos modelos se han comparado utilizando el ECM (7) que se introdujo en la Sección 3. El ECM considerado es la media aritmética de los 30 resultados. La Tabla 2 muestra las iteraciones realizadas por el modelo evolutivo CHC para cada modelo difuso.

Modelo	Iteraciones
WM+D _w	40.000
WM+C	40.000
WM+C+D _w	60.000
D _w - COR	200.000
C - COR	200.000
C - D _w - COR	300.000

Tabla 2. Evaluaciones realizadas por el algoritmo CHC

4.4 RESULTADOS EXPERIMENTALES Y ANÁLISIS

En esta sección se muestran los resultados y análisis de la experimentación realizada. En primer lugar los correspondientes al ECM de los modelos difusos probados, y en segundo lugar los resultados resumidos del análisis estadístico.

4.4.1 RESULTADOS GENERALES

La Tabla 3 muestra el ECM de los diferentes modelos difusos.

Modelo	ECM _{entrenamiento}	ECM _{prueba}
WM	56135,75	56359,42
COR	50710,82	54584,76
WM+D _w	31443,27	34879,16
WM+C	34371,65	36845,51
WM+C+D _w	23291,91	25016,47
D _w - COR	27077,00	29640,10
C - COR	27239,07	29605,33
C - D _w - COR	17832,85	19855,88

Tabla 3. ECM obtenido con los diferentes modelos.

Analizando la Tabla 3, podemos observar:

- A) En cuanto al modelo con operadores parametrizados, es decir, las tres filas correspondientes a WM+(elemento/s parametrizado/s):
- La parametrización de los operadores es una herramienta para mejorar la precisión del modelo, tal y como se observó en [1 y 10].
 - Los resultados obtenidos con la conjunción y la defuzzificación parametrizadas, mejoran la precisión de los modelos que sólo tienen parametrizada la conjunción o la defuzzificación. Por tanto, existe cooperación entre los parámetros de la conjunción y la defuzzificación para mejorar la precisión.
 - El aprendizaje evolutivo de la conjunción y la defuzzificación a la vez, mejora la precisión obtenida por el método COR sin operadores adaptativos. Por tanto, los operadores adaptativos

son una buena herramienta para el diseño de MDs lingüísticos.

- B) En cuanto al modelo de aprendizaje cooperativo evolutivo, cuyos resultados en la Tabla 3 son los correspondientes a las filas D_w - COR, C - COR y C - D_w - COR:

- Muestran los mejores resultados del estudio experimental.
- Comparando el ECM obtenido con COR y el del modelo cooperativo completo, la cooperación entre las reglas difusas y los operadores adaptativos es clara.

- C) Globalmente:

- Los mejores resultados se corresponden con los modelos que tienen mayor grado de libertad, es decir, los que utilizan parámetros tanto en la conjunción como en la defuzzificación.

4.4.2 ESTUDIO ESTADÍSTICO

Para comparar los resultados obtenidos con los diferentes modelos, hemos realizado también un análisis estadístico. En primer lugar se realizó el análisis ANOVA de un factor [2] para cada modelo, siendo el factor los modelos utilizados en los test de los conjuntos de datos. Por extensión, no se han incluido las tablas en este trabajo. Dado que se encontraron diferencias significativas para todos los modelos con respecto a los valores medios asociados, se realizó el test de Tamhane [2] con un coeficiente de confianza del 95%, debido a que la hipótesis de igualdad de varianzas ha sido rechazada en los análisis de todos los modelos.

La Tabla 4 resume los resultados obtenidos en el test de Tamhane. Los signos (+) significa que el modelo de la fila seleccionada mejora al modelo de la columna seleccionada, mientras que los signos (-) significan lo contrario. El signo (≈) significa que son similares. Las tablas deben leerse empezando por la fila, por ejemplo: *el modelo D_w - COR (fila 6) mejora al modelo COR (columna 2)*.

Observando la Tabla 4 podemos concluir que:

- Los modelos cooperativos presentan una mejora significativa en cuanto a precisión.
- El modelo cooperativo propuesto (C - D_w - COR), empleando conjunción y defuzzificación, presenta los mejores resultados, mejorando en todos los casos la precisión de los otros modelos.

	WM	COR	WM+D _w	WM+C	WM+C+D _w	D _w -COR	C-COR	C-D _w -COR
WM		≈	-	≈	-	-	-	-
COR	≈		-	-	-	-	-	-
WM+D _w	+	+		≈	-	-	-	-
WM+C	≈	+	≈		-	-	-	-
WM+C+D _w	+	+	+	+		+	+	-
D _w -COR	+	+	+	+	-		≈	-
C-COR	+	+	+	+	-	≈		-
C-D _w -COR	+	+	+	+	+	+	+	

Tabla 4. Resumen del test estadístico de Tamhane

5. CONCLUSIONES

En este trabajo proponemos un modelo evolutivo cooperativo con el que se consigue aprender un conjunto de reglas que cooperan entre sí junto con los parámetros que ajustan el comportamiento del operador de conjunción y del método de defuzzificación adaptativos.

Los resultados obtenidos muestra la sinergia positiva entre el aprendizaje de reglas y la coadaptación de los parámetros del sistema de inferencia y el método de defuzzificación.

Referencias

- [1] J. Alcalá-Fdez, F. Herrera, F. Márquez, A. Peregrín. Increasing Fuzzy Rules Cooperation Based On Evolutionary Adaptive Inference Systems. *International Journal of Intelligent Systems*, In press, 2006.
- [2] T. W. Anderson. An introduction to multivariate statistical analysis. *John Wiley and Sons*, 1984.
- [3] J. Casillas, O. Cordon, F. Herrera, L. Magdalena. (Eds.) Interpretability issues in fuzzy modelling, *Springer-Verlag*, 2003.
- [4] J. Casillas, O. Cordon, F. Herrera, L. Magdalena (Eds.) Accuracy improvements in linguistic fuzzy modeling, *Springer-Verlag*, 2003
- [5] J. Casillas, O. Cordon, F. Herrera. COR: A methodology to improve ad hoc data-driven linguistic rule learning methods by inducing cooperation among rules. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics —Part B: Cybernetics*, Vol. 32, no. 4, Pág. 526–537, 2002.
- [6] J.S. Cho, D.J. Park. Novel fuzzy logic control based on weighting of partially inconsistent rules using neural network. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, Vol. 8, Pág. 99-100, 2000.
- [7] O. Cordon, F. Herrera, A. Peregrín. Applicability of the Fuzzy Operators in the Design of Fuzzy Logic Controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 86, Pág. 15-41, 1997.
- [8] O. Cordon, F. Herrera, A. Peregrín. Characterisation of Implication Operators in Fuzzy Rule Based Systems from Basic Properties. *Proc. of the 9th Congr. sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Pág. 163-166, 1999.
- [9] O. Cordon, F. Herrera, A. Peregrín. Searching for Basic Properties Obtaining Robust Implication Operators in Fuzzy Control. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 111, Pág. 237-251, 2000.
- [10] O. Cordon, F. Herrera, F. Márquez, A. Peregrín. A Study on the Evolutionary Adaptive Defuzzification Methods in Fuzzy Modelling. *International Journal of Hybrid Intelligent Systems*, Vol.1,nº1, Pág. 36-48, 2004.
- [11] L.J. Eshelman. The CHC Adaptive search algorithm: How to have safe search when engaging in Nontraditional genetic recombination. *Foundations of Genetic Algorithms-1*, Rawlins,G.J.E.(Eds), Pág.265-283, 1991.
- [12] M. Gupta, J. Qi. Theory of T-norms and Fuzzy Inference Methods. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 40, Pág. 431-450, 1991.
- [13] F. Herrera, F. Márquez, A. Peregrín. Genetic Adaptation of Rule Connectives and Conjunction Operators in Fuzzy Rule Based System: An Experimental Comparative. *Third International Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology Study*. Pág. 100-104, 2003.
- [14] F. Herrera, F. Márquez, A. Peregrín. Cooperación de Reglas Difusas basada en la Adaptación Evolutiva de los Operadores de Conjunción y los Defuzzificadores. *Coms. del XII Congr. Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*. Pág. 231-236, 2004.
- [15] B.D. Liu, C.Y. Chen C-Y., J.Y. Tsao. Design of adaptative fuzzy logic controller based on linguistic-hedge concepts and genetic algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 31, nº 1, Pág. 32-53, 2001.
- [16] M. Mizumoto. Pictorial Representations of Fuzzy Connectives, Part I: Cases of T-norms, T-conorms and Averaging Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 31, Pág. 217-242, 1989.
- [17] L.X. Wang, J.M. Mendel. Generating fuzzy rules by learning from examples. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 22, nº 6, Pág. 1414-1427, 1992.

APLICACIONES BORROSAS MAXIMALES Y EXTENSIONALIDAD

J. Jacas

Secció Matemàtiques i Informàtica
ETSAB
Diagonal 649
08028 Barcelona
joan.jacas@upc.edu

J. Recasens

Secció Matemàtiques i Informàtica
ETSAV
C. Pere Serra 1-15
08190 Sant Cugat del Vallès
j.recasens@upc.edu

Resumen

Se analiza la maximalidad de las aplicaciones borrosas R de X en Y . En particular, se demuestra que las aplicaciones borrosas perfectas (i.e. tales que para cada $x \in X$ existe exactamente una $y \in Y$ con $R(x, y) = 1$) son maximales y que para cada $x \in X$, $R(x, \bullet)$ es un punto borroso maximal de Y .

Toda aplicación borrosa está contenida en una maximal no necesariamente perfecta.

Se establece un vínculo entre la definición actual de aplicación borrosa, basada en el concepto de operador de T -indistinguibilidad, y sus primeras versiones (cf. [6]).

Se estudia la relación entre extensionalidad y la condición de Lipschitz, y su uso en las aplicaciones borrosas.

Palabras Clave: Aplicación borrosa, Punto borroso, Extensionalidad, Condición de Lipschitz, Operador de indistinguibilidad.

1 Introducción

Las aplicaciones borrosas son una generalización natural (fuzzificación) del concepto de aplicación en el caso en que los objetos no están definidos de forma precisa y no son distinguibles de forma categórica entre sí. Si la vaguedad en los conjuntos dominio (X) e imagen (Y) de la aplicación f está modelizada por sendos operadores de indistinguibilidad E y F , no podremos asegurar que la imagen del objeto $x \in X$ es $y = f(x)$, sino que las imágenes de objetos indistinguibles con x deben ser indistinguibles con y , lo que se puede expresar mediante una relación borrosa $R(x, y)$. Es decir, la aplicación borrosa no puede prescindir de la granular-

idad que los operadores de indistinguibilidad generan en X e Y .

La definición de aplicación borrosa básicamente contempla la extensionalidad de la relación R e impone que los conjuntos borrosos $R(x, \bullet)$ sean puntos borrosos de Y (ver Definición 4.1).

La extensionalidad es posiblemente la propiedad más interesante que puede satisfacer un subconjunto borroso con respecto a una relación borrosa. Por citar sólo los tres casos más importantes, los subconjuntos borrosos extensionales respecto a un operador de T -indistinguibilidad son sus conjuntos observables [4], los extensionales respecto a preórdenes borrosos son filtros e ideales borrosos y las aplicaciones borrosas son extensionales respecto a los operadores de T -indistinguibilidad definidos en los conjuntos dominio e imagen. La extensionalidad puede traducirse a una condición de Lipschitz y merece la pena destacar que las aplicaciones lipschitzianas aparecen en todos los ámbitos de la Lógica y el Razonamiento Borrosos.

En la Sección 3 la extensionalidad de los modificadores lingüísticos se estudiará siguiendo básicamente las ideas de [12]. Parte de los resultados de esta sección se usarán en el estudio de aplicaciones borrosas de $[0,1]$ en $[0,1]$.

La Sección 4 estudia las aplicaciones borrosas desde el punto de vista de la extensionalidad. Es interesante el estudio de las aplicaciones borrosas maximales, porque presentan granularidad máxima y por tanto una cota superior a la incertidumbre. Se demuestra la existencia de aplicaciones borrosas maximales y que toda aplicación borrosa está contenida en una maximal. Si para cada $x \in X$ existe un único $y \in Y$ con $R(x, y) = 1$, se dice que la aplicación borrosa R es perfecta. Una aplicación perfecta R define de forma natural una aplicación extensional $f : X \rightarrow Y$. Se estudia la relación entre R y f . También se demuestra que dada una aplicación borrosa perfecta R de X a Y , los subconjuntos borrosos $R(x, \bullet)$ son puntos borrosos maximales

de Y . Un resultado interesante es que si los elementos del dominio son completamente distinguibles, es decir, cuando E es la igualdad clásica, se recupera la definición primitiva de aplicación borrosa que en este trabajo llamamos clásica.

2 Preliminares

Definición 2.1 [16] *Dada una t -norma T , un operador de T -indistinguibilidad en un universo X es una relación borrosa E en X que satisface para todo $x, y, z \in X$*

1. $E(x, x) = 1$ (Reflexividad)
2. $E(x, y) = E(y, x)$ (Simetría)
3. $T(E(x, y), E(y, z)) \leq E(x, z)$ (T -transitividad).

Si

$$E(x, y) = 1 \text{ implica } x = y.$$

se dice que E es separador o que separa puntos.

Dado un operador de T -indistinguibilidad E en un conjunto X , se puede definir una relación de equivalencia (crisp) $\sim$ en X : $x \sim y$ si, y sólo si, $E(x, y) = 1$. La relación $\bar{E}$ en $X/\sim$ definida por $E(\bar{x}, \bar{y}) = E(x, y)$ es un operador de T -indistinguibilidad separador.

Proposición 2.2 *Sea E un operador de T -indistinguibilidad en X . Para todo número natural k , la relación borrosa E^k definida para todo $x, y \in X$ mediante*

$$T(\overbrace{E(x, y) \dots E(x, y)}^{k \text{ veces}})$$

es un operador de T -indistinguibilidad.

Definición 2.3 [13] *Dada una t -norma continua por la izquierda T , su residuación es la aplicación $\vec{T}$ definida para todo $x, y \in [0, 1]$ mediante*

$$\vec{T}(x|y) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid T(x, \alpha) \leq y\}.$$

Definición 2.4 *Dada una t -norma continua por la izquierda T , su biresiducción u operador de T -indistinguibilidad natural [4] es la aplicación $\vec{\vec{T}}$ definida para todo $x, y \in [0, 1]$ por*

$$\vec{\vec{T}}(x, y) = T(\vec{T}(x|y), \vec{T}(y|x)).$$

Ejemplo 2.5

- Si T es una t -norma arquimediana continua con generador aditivo t , entonces $\vec{\vec{T}}(x, y) = t^{-1}(|t(x) - t(y)|)$.

- Si T es la t -norma de Lukasiewicz, entonces $\vec{\vec{T}}(x, y) = 1 - |x - y|$.

- Si T es la t -norma Producto, entonces $\vec{\vec{T}}(x, y) = \text{Min}\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$.

- Si T es la t -norma Mínimo, entonces $\vec{\vec{T}}(x, y) = \begin{cases} \text{Min}(x, y) & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Proposición 2.6 [15] *Dado un subconjunto borroso μ de X , la relación E_μ en X definida para todo $x, y \in X$ mediante*

$$E_\mu(x, y) = \vec{\vec{T}}(\mu(x), \mu(y))$$

es un operador de T -indistinguibilidad en X .

Corolario 2.7 *Si la t -norma T es arquimediana y t un generador aditivo, entonces*

$$E_\mu(x, y) = t^{-1}(|t(\mu(x)) - t(\mu(y))|)$$

Definición 2.8 *Un subconjunto borroso μ de X es extensional respecto al operador de T -indistinguibilidad E en X si, y sólo si,*

$$\mu(x) \geq T(E(x, y), \mu(y)) \quad \forall x, y \in X.$$

H_E es el conjunto de los subconjuntos borrosos extensionales de E , también llamados los generadores de E .

Proposición 2.9 *Sea E un operador de T -indistinguibilidad en X y $A \subset H_E$. Entonces*

- $\bigvee(A) \in H_E$
- $\bigwedge(A) \in H_E$

Lema 2.10 *Un subconjunto borroso μ de X es extensional respecto al operador de T -indistinguibilidad E en X si, y sólo si,*

$$E \leq E_\mu.$$

Definición 2.11 *Una negación fuerte es una aplicación biyectiva y decreciente $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi \circ \varphi$ es la identidad.*

Teorema 2.12 [14] *Una aplicación $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una negación fuerte si, y sólo si, existe una aplicación estrictamente decreciente $t : [0, 1] \rightarrow R$ con $t(1) = 0$ tal que para todo $x \in [0, 1]$ $\varphi(x) = t^{-1}(t(0) - t(x))$.*

3 Modificadores lingüísticos extensionales

Al traducir la definición contenida en [9] de aplicación α -lipschitziana entre S -métricas a su dual, se obtiene la siguiente definición.

Definición 3.1 Sean E, F dos operadores de T -indistinguibilidad en X e Y respectivamente y $\alpha \in]0, 1]$. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es α -(E, F)-lipschitziana si, y sólo si, para todo $x, y \in X$

$$F(f(x), f(y)) \geq \alpha \cdot E(x, y). \quad (1)$$

Si $\alpha = 1$, diremos simplemente que f es una aplicación (E, F)-lipschitziana.

Proposición 3.2 Sean E, F, G tres operadores de T -indistinguibilidad en X, Y, Z respectivamente, $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ aplicaciones α -(E, F)-lipschitziana y β -(F, G)-lipschitziana respectivamente. Entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es una aplicación $(\alpha \cdot \beta)$ -(E, G)-lipschitziana.

Proposición 3.3 Sea μ un subconjunto borroso de X y E un operador de T -indistinguibilidad en X . μ es un generador de E si, y sólo si, $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ es una aplicación ($E_\mu, \overset{\leftrightarrow}{T}$)-lipschitziana.

Las aplicaciones lipschitzianas han sido usadas extensamente en áreas tales como Razonamiento Aproximado [2], álgebras vagas [8], lógica [11] entre otras. También se las ha llamado aplicaciones extensionales.

Definición 3.4 Un modificador lingüístico m es un subconjunto borroso del intervalo unidad ($m : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$).

Teorema 3.5 [11] Sea $\overset{\leftrightarrow}{T}$ el operador de indistinguibilidad natural respecto a la t -norma arquimediana continua de generador aditivo t y $k \in N$. Un modificador lingüístico m es extensional respecto a $\overset{\leftrightarrow k}{T}$ si, y sólo si, $t \circ m \circ t^{-1} : [0, t(0)] \rightarrow [0, t(0)]$ es una función k -lipschitziana.

Corolario 3.6 Si T es la t -norma de Lukasiewicz, entonces $m \in H_{\overset{\leftrightarrow}{T}}$ si, y sólo si, m es una función lipschitziana.

Demostración

$t(x) = 1 - x$ y $t \circ m \circ t^{-1}(x) = 1 - m(1 - x)$ que es una función lipschitziana si, y sólo si, lo es m .

Corolario 3.7 Si T es la t -norma Producto, entonces $m \in H_{\overset{\leftrightarrow}{T}}$ si, y sólo si, $\frac{m(x)}{x}$ es una función no-decreciente y $x \cdot m(x)$ una función no-decreciente ($x > 0$).

Corolario 3.8 Si m es una función diferenciable, entonces $m \in H_{\overset{\leftrightarrow}{T}}$ con T la t -norma Producto si, y sólo si, $\frac{m(x)}{x} \geq |m'(x)|$.

Ejemplo 3.9 $m_\alpha(x) = x^\alpha$ con $0 \leq \alpha \leq 1$ son modificadores borrosos extensionales respecto a $\overset{\leftrightarrow}{T}$ donde T es la t -norma Producto.

En particular el modificador débil $m(x) = \sqrt{x}$ (bastante) es extensional respecto a $\overset{\leftrightarrow}{T}$ donde T es la t -norma Producto.

Para modificadores de la forma $m(x) = x^n$ $n \in N$ a partir del Teorema 3.5 se obtiene

Ejemplo 3.10 Los modificadores fuertes $m(x) = x^n$ $n \in N$ son extensionales respecto a $\overset{\leftrightarrow n}{T}$ donde T es la t -norma Producto.

En particular, el modificador fuerte $m(x) = x^2$ (muy) es extensional respecto a $\overset{\leftrightarrow 2}{T}$ donde T es la t -norma Producto.

Parece interesante saber si la composición de dos modificadores lingüísticos extensionales es también un modificador lingüístico extensional. La respuesta es afirmativa para $k = 1$ como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3.11 Sean m, n dos modificadores lingüísticos extensionales respecto a $\overset{\leftrightarrow k}{T}$ y $\overset{\leftrightarrow l}{T}$ respectivamente. Entonces $n \circ m$ es un modificador lingüístico extensional respecto a $\overset{\leftrightarrow k \cdot l}{T}$.

Demostración

Proposición 3.2.

Proposición 3.12 Sea T una t -norma arquimediana continua con generador aditivo t , φ la negación fuerte generada por t y $m \in H_{\overset{\leftrightarrow k}{T}}$. Entonces $\varphi \circ m \in H_{\overset{\leftrightarrow k}{T}}$.

Demostración

$$\begin{aligned} t \circ \varphi \circ m \circ t^{-1} &= t \circ t^{-1}(t(0) - t \circ m) \circ t^{-1} \\ &= t(0) - t \circ m \circ t^{-1} \end{aligned}$$

que es una función k -lipschitziana si $t \circ m \circ t^{-1}$ también lo es.

Hemos visto que dados dos modificadores lingüísticos extensionales respecto a $\overset{\leftrightarrow k}{T}$, su reunión, intersección (y composición si $k = 1$) también son modificadores extensionales. Además, si T es una t -norma arquimediana no estricta, la negación de un modificador

lingüístico extensional respecto a $\overset{\leftrightarrow k}{T}$ también es extensional.

Para la t-norma Mínimo se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.13 *Un modificador lingüístico m es extensional respecto a la t-norma Mínimo Min , si, y sólo si, $Min(x, y, m(y)) \leq m(x) \forall x \in [0, 1]$.*

Demostración

$$m \in H_{\overset{\leftrightarrow k}{Min}} \text{ sii } Min(E_{Min}(x, y), m(y)) \leq m(x)$$

para todo $x, y \in [0, 1]$.

Por el Ejemplo 2.5, esto es equivalente a $Min(x, y, m(y)) \leq m(x) \forall x \in [0, 1]$ con $x \neq y$.

4 Aplicaciones borrosas

Para simplificar la exposición en este apartado supondremos que todos los operadores de T -indistinguibilidad son separadores.

Definición 4.1 *Sean E y F dos operadores de T -indistinguibilidad en X e Y respectivamente. Un subconjunto borroso $R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ de $X \times Y$ es una aplicación borrosa en $X \times Y$ (o de X a Y) si, y sólo si, para todo $x, x' \in X$ y para todo $y, y' \in Y$*

1. $T(E(x, x'), F(y, y'), R(x, y)) \leq R(x', y')$
2. $T(R(x, y), R(x, y')) \leq F(y, y')$.

Definición 4.2 *Una aplicación borrosa R en $X \times Y$ es perfecta si, y sólo si, para todo $x \in X$ existe una única $y_x \in Y$ con $R(x, y_x) = 1$.*

Una aplicación borrosa perfecta define una aplicación (crisp) (E, F) -lipschitziana $f_R : X \rightarrow Y : f(x) = y_x$.

Proposición 4.3 *La aplicación $f_R : X \rightarrow Y$ definida por la aplicación borrosa perfecta R es una aplicación (E, F) -lipschitziana (i.e.: $E(x, x') \leq F(f_R(x), f_R(x'))$).*

Demostración

$$\begin{aligned} E(x, x') &= T(E(x, x'), R(x, y_x), R(x', y_{x'})) \\ &\leq T(R(x', y_x), R(x', y_{x'})) \leq F(y_x, y_{x'}). \end{aligned}$$

Recíprocamente

Proposición 4.4

Una aplicación (E, F) -lipschitziana $f : X \rightarrow Y$ define una aplicación borrosa perfecta R_f sobre $X \times Y$ mediante $R_f(x, y) = F(f(x), y)$.

Así pues, una aplicación borrosa perfecta R genera una aplicación (E, F) -lipschitziana f_R que a su vez genera una aplicación borrosa perfecta R_{f_R} . La relación entre R y R_{f_R} se establecerá en el Corolario 4.16.

La Propiedad (1) de la Definición 4.1 expresa que R (como subconjunto borroso de $X \times Y$) es extensional respecto a la T -indistinguibilidad $E \times F$ en $X \times Y$ definida por $(E \times F)((x, y), (x', y')) = T(E(x, x'), F(y, y'))$. Se puede separar en dos:

- (1.1) $T(E(x, x'), R(x, y)) \leq R(x', y)$
- (1.2) $T(F(y, y'), R(x, y)) \leq R(x, y')$

(1.1) dice que fijada $y_0 \in Y$ el subconjunto borroso $R(\bullet, y_0)$ de X es extensional respecto a E mientras que (1.2) establece que fijada $x_0 \in X$, el subconjunto borroso $R(x_0, \bullet)$ de Y es extensional respecto a F .

Si X e Y son el intervalo unidad y los operadores de T -indistinguibilidad son potencias del operador natural con T una t-norma continua, entonces (1.1) y (1.2) se convierten en condiciones de Lipschitz.

Proposición 4.5 *Sea T una t-norma arquimediana continua con generador aditivo t y R una aplicación borrosa en $[0, 1] \times [0, 1]$, el primer intervalo provisto del operador de T -indistinguibilidad $\overset{\leftrightarrow k}{T}$ y el segundo con $\overset{\leftrightarrow l}{T}$.*

- a) *Para todo $y_0 \in Y$ $t \circ R(\bullet, y_0) \circ t^{-1}$ es una función k -lipschitziana.*
- b) *Para todo $x_0 \in X$ $t \circ R(x_0, \bullet) \circ t^{-1}$ es una función l -lipschitziana.*

Demostración

Teorema 3.5

Recordemos la definición de punto borroso.

Definición 4.6 *Sea E un operador de T -indistinguibilidad en X . Un subconjunto borroso μ de X es extensional respecto a E es un punto borroso si, y sólo si, para todo $x, y \in X$*

$$T(\mu(x), \mu(y)) \leq E(x, y)$$

La Propiedad (2) de la Definición 4.1 indica que los subconjuntos borrosos $R(x_0, \bullet)$ de Y son puntos borrosos.

Proposición 4.7 *Sea T una t-norma arquimediana continua con generador aditivo t y R una aplicación borrosa en $X \times [0, 1]$, el intervalo unidad provisto del*

operador de T -indistinguibilidad $\overset{\leftarrow k}{T}$. Entonces, para todo $x_0 \in X$ fijado,

$$t \circ R(x_0, y) + t \circ R(x_0, y') \geq k \cdot |t(y) - t(y')|.$$

para todo $y, y' \in Y$ si T es estricta y para todo $y, y' \in Y$ con $|t(y) - t(y')| \leq \frac{t(0)}{k}$ si T es no estricta.

Demostración

La Propiedad (2) de la Definición 4.1 se puede escribir como

$$t^{[-1]}(t(R(x_0, y)) + t(R(x_0, y'))) \leq t^{[-1]}(k \cdot |t(y) - t(y')|)$$

Si $k \cdot |t(y) - t(y')| \leq t(0)$, entonces

$$t(R(x_0, y)) + t(R(x_0, y')) \geq k \cdot |t(y) - t(y')|$$

Sea P_X el conjunto de puntos borrosos de X . Este conjunto tiene elementos maximales μ en el sentido de que si ν pertenece a P_X y $\nu \geq \mu$, entonces $\nu = \mu$. Además para todo punto borroso μ de X existe un punto borroso maximal ν con $\mu \leq \nu$. Los puntos maximales de P_X han sido caracterizados como los puntos fijos de la siguiente aplicación Λ_E :

Definición 4.8 [1] Sea E un operador de T -indistinguibilidad en un conjunto X . La aplicación $\Lambda_E : [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$ se define para todo subconjunto borroso μ de X como

$$\Lambda_E(\mu)(x) = \inf_{y \in X} \vec{T}(\mu(y) | E(x, y))$$

para todo $x \in X$.

Teorema 4.9 [5] [4] Sea E un operador de T -indistinguibilidad en un conjunto X . El conjunto de puntos borrosos maximales de E es el conjunto $Fix(\Lambda_E)$ de puntos fijos de Λ_E (i.e.: μ es un punto borroso maximal si, y sólo si, $\Lambda_E(\mu) = \mu$).

En general, dado un punto borroso μ , no resulta fácil hallar un punto borroso maximal que lo contenga. Sin embargo, si μ es un subconjunto borroso normal, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.10 Sea E un operador de T -indistinguibilidad en un conjunto X , μ un punto borroso normal de X y $x_0 \in X$ con $\mu(x_0) = 1$. Entonces $\mu = E(x_0, \bullet)$.

Demostración

Puesto que μ es un punto borroso,

$$\mu(x) = T(\mu(x_0), \mu(x)) \leq E(x_0, x).$$

Dado que μ es extensional respecto a E ,

$$\mu(x) = \overset{\leftarrow}{T}(\mu(x_0), \mu(x)) \geq E(x_0, x).$$

Proposición 4.11 Las columnas $E(x_0, \bullet)$ $x_0 \in X$ de un operador de T -indistinguibilidad E en X son puntos borrosos maximales de E .

Vamos a aplicar estos resultados a las aplicaciones borrosas.

En primer lugar veamos que el conjunto de aplicaciones borrosas tiene elementos maximales.

Teorema 4.12 Sea A el conjunto de aplicaciones borrosas en $X \times Y$ con E y F operadores de T -indistinguibilidad en X e Y respectivamente. A tiene elementos maximales.

Demostración.

Si $\{R_i\}_{i \in I}$ es una cadena de aplicaciones borrosas, entonces la relación borrosa $R = \sup_{i \in I} R_i$ es una aplicación borrosa. Por el lema de Zorn A posee elementos maximales.

Corolario 4.13 Toda aplicación borrosa en $X \times Y$ con E y F operadores de T -indistinguibilidad en X e Y respectivamente está contenida en una aplicación borrosa maximal.

Ejemplo 4.14 Sea T la t -norma Producto, $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d\}$, E la T -indistinguibilidad en X definida por $E(a, b) = \frac{1}{2}$, F la T -indistinguibilidad en Y definida por $F(c, d) = \frac{1}{2}$ y R la aplicación borrosa en $X \times Y$ definida por $R(x, y) = \frac{1}{2}$ para todo $x \in X$ y $y \in Y$. R no es maximal y está contenida, por ejemplo en la aplicación borrosa maximal $\bar{R}$ con $\bar{R}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\forall x \in X, \forall y \in Y$.

Corolario 4.15 Sea R una aplicación borrosa perfecta en $X \times Y$ con E y F operadores de T -indistinguibilidad en X e Y respectivamente. Si para todo $x \in X$, $y_x \in Y$ es el elemento único tal que $R(x, y_x) = 1$, entonces para todo $x \in X$ $R(x, y) = F(y_x, y)$.

Demostración

Proposición 4.11

Dicho de otro modo, para todo $x \in X$, $R(x, \bullet)$ es un punto borroso maximal de Y .

Corolario 4.16 Si R es una aplicación borrosa perfecta en $X \times Y$ con E y F operadores de T -indistinguibilidad en X e Y respectivamente, entonces $R_{f_R} = R$.

Podemos considerar un caso especial de aplicación borrosa en la que la igualdad del conjunto de partida sea la usual. De esta forma recuperaremos la definición primitiva de aplicación borrosa [6]. Los elementos

del dominio o conjunto de partida se consideran entonces crisp o totalmente distinguibles entre sí y sólo sus imágenes presentan vaguedad.

Definición 4.17 Una aplicación borrosa clásica R es una aplicación borrosa en $X \times Y$ con E la igualdad clásica en X ($E(x, x') = 0$ si $x \neq x'$) y F un operador de T -indistinguibilidad en Y .

Proposición 4.18 Un subconjunto borroso R en $X \times Y$ es una aplicación borrosa clásica en $X \times Y$ con F un operador de T -indistinguibilidad en Y si, y sólo si, R es un punto borroso de $X \times Y$ con el operador de T -indistinguibilidad $Id \times F$.

Proposición 4.19 Un subconjunto borroso R en $X \times Y$ es una aplicación borrosa clásica en $X \times Y$ con F un operador de T -indistinguibilidad en Y si, y sólo si, para cada $x \in X$ $R(x, \bullet)$ es un punto borroso de Y .

A partir de una aplicación borrosa clásica en $X \times Y$ se tiene definida automáticamente una aplicación $f : X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ donde $\mathcal{F}(Y)$ es el conjunto de subconjuntos borrosos de Y . Basta poner $f(x) = R(x, \bullet)$.

Recíprocamente, una aplicación $f : X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ define una aplicación borrosa clásica R en $X \times Y$ con F un operador de T -indistinguibilidad en Y si, y sólo si, para cada $x \in X$ $R(x, \bullet)$ es un punto borroso de Y .

Las primeras definiciones de aplicación borrosa daban una aplicación como f . Los resultados del final de esta sección relacionan estas primeras definiciones con la actual basada en los operadores de T -indistinguibilidad.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de la DGI número TIC2003-04564.

Referencias

- [1] D.Boixader, J. Jacas, J. Recasens (1998). A characterization of the columns of a T -indistinguishability operator. Actas del Congreso FUZZIEEE-98. Anchorage 808-812.
- [2] D. Boixader, J. Jacas (1995). Generators and dual T -indistinguishabilities. Fuzzy logic and soft computing, 291–299, Adv. Fuzzy Systems Appl. Theory, 4, World Sci. Publishing, River Edge, NJ.
- [3] D. Boixader, J. Jacas, J. Recasens (2000). Upper and Lower Approximations of Fuzzy Sets. Int. J. of General Systems 29 555-568.
- [4] D. Boixader, J. Jacas, J. Recasens (2000). Fuzzy Equivalence Relations: Advanced Material. En Dubois, Prade Eds. Fundamentals of Fuzzy Sets, Kluwer, pp. 261-290.
- [5] D. Boixader, J. Recasens (2005). A map characterizing the fuzzy points and columns of a T -indistinguishability operator. Enviado.
- [6] M. Delgado (1977). On a definition of fuzzy function. Actas del First World Conference on Mathematics at the Service of Man. Barcelona 426-448.
- [7] M. Delgado (1980). Una nueva definición de aplicación difusa. Stochastica 4 75-80.
- [8] M. Demirci (2002). Fundamentals of M -vague algebra and M -vague arithmetic operations. Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems 10 25-75.
- [9] J. Jacas (1993). Fuzzy Topologies Induced by S -Metrics. Journal of Fuzzy Mathematics 1 173-191.
- [10] F. Klawonn (2000). Fuzzy Points, Fuzzy Relations and Fuzzy Functions. En: V. Novák, I. Perfilieva (eds.): Discovering the World with Fuzzy Logic. Physica-Verlag, Heidelberg. 431-453.
- [11] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap (2000). Triangular norms. Kluwer. Dordrecht.
- [12] R. Mesiar, V. Novák (1999). Operations fitting triangular-norm-based biresiduation. Fuzzy Sets and Systems 104 77-84.
- [13] B. Schweizer, A. Sklar (1983). Probabilistic Metric Spaces. North-Holland. Amsterdam.
- [14] E. Trillas (1979). Sobre funciones de negación en la teoría de los subconjuntos difusos. Stochastica 3. 47-59. Versión inglesa en Advances of Fuzzy Logic. S. Barro et al. Eds. Universidad de Santiago de Compostela (1998) 31-43.
- [15] L.Valverde (1985). On the structure of F -indistinguishability operators. Fuzzy Sets and Systems 17 313-328.
- [16] L.A.Zadeh (1971). Similarity relations and fuzzy orderings. Information Science 3 177-200.

Cálculo de Cantidad de Incertidumbre en Redes de Restricciones Temporales Posibilísticas

José M. Juárez
Universidad de Murcia
jmjuarez@um.es

Francisco Guil
Universidad de Almería
francisco.guil@ual.es

Roque Marín
Universidad de Murcia
roque@dif.um.es

Resumen

Las redes de restricciones temporales constituyen una herramienta muy útil para implementar técnicas de representación y razonamiento temporal en dominios donde la dimensión temporal juega un papel fundamental (p.e. diagnóstico en UCIs). En algunas aplicaciones, como la Minería de Datos Temporales, se requiere evaluar el grado de incertidumbre global en las relaciones representadas en la red. Este trabajo propone una técnica para cuantificar el grado de incertidumbre global de una red de restricciones temporales posibilísticas entre puntos (instantes). Las redes posibilísticas fueron propuestas por Hadjali, Dubois y Prade [4]. Nuestra técnica de cuantificación de incertidumbre se basa en las medidas de no-especificidad y disonancia, y se aplica a varias topologías de red.

Palabras Clave: Teoría de la Posibilidad, Restricciones Temporales, Incertidumbre.

1 INTRODUCCIÓN

Las ventajas de utilizar álgebras temporales de puntos para representar la dimensión temporal en sistemas inteligentes son: la simplicidad de las relaciones entre sus elementos y la eficiencia computacional de sus algoritmos de propagación de restricciones. Se han propuesto modelos de redes de restricciones temporales entre puntos que permiten manejar la imprecisión y/o la incertidumbre (probabilísticos [8] y posibilísticos [4, 7]). Una de las ventajas de los modelos posibilísticos es la sencillez con la que se representa la ignorancia respecto a otras teorías (probabilidad) [2].

Toda red de restricciones binarias se compone de un conjunto de n variables y de un conjunto de relaciones definidas sobre parejas de variables. El conjunto de relaciones binarias explícitas establece implícitamente una relación algebraica global entre las n variables. Se suele decir que la red representa un conocimiento global explicitado sólo mediante piezas de conocimiento local. Si las relaciones binarias están sujetas a incertidumbre, la relación n -aria global implícita en la red también lo estará. Surge así el problema de cómo calcular la incertidumbre global del conocimiento representado en la red a partir de la incertidumbre local de las relaciones binarias.

Por ejemplo, en [3] se propone un proceso de minería de datos temporales para la extracción de patrones temporales posibilísticos. Así, una aplicación inmediata de estas medidas sería establecer un umbral de aceptación de qué patrones extraídos (redes) son suficientemente ciertos para ser consideradas y cuales no.

Proponemos una estrategia para establecer medidas incertidumbre global para el modelo de redes de restricciones temporales posibilísticas entre puntos propuesto por Dubois, Prade y Hadjal [4], partiendo de las medidas posibilísticas de incertidumbre de la no-especificidad y la disonancia [13, 1, 6], y aplicándolas a diversas topologías de red.

Este trabajo se estructura del siguiente modo. En la Secciones 2 y 3 revisamos los conceptos fundamentales de la Teoría de la Posibilidad, medidas de incertidumbre y redes de restricciones temporales posibilísticas; en la Secciones 4 y 5 plantean una solución concreta para estas medidas y algunas posibles aplicaciones prácticas. Finalmente, la Sección 6 describe las conclusiones y trabajos futuros.

2 POSIBILIDAD Y MEDIDAS DE INCERTIDUMBRE

La teoría de la posibilidad, descrita por Dubois y Prade [2], está enmarcada en la teoría de la incertidumbre a partir de información incompleta. Esta teoría propone un modelo no-aditivo para la creencia proponiendo las medidas de Posibilidad y Necesidad. Desde el punto de vista de la Teoría de la Evidencia de Dempster-Shafer [9] pueden definirse las medidas de posibilidad y la necesidad como casos particulares de las medidas de evidencia: *Pl* y *Bel*. Esa situación ocurre, cuando el conjunto Ω es infinito y sucede que dada una asignación básica de probabilidad (abp) denominada m , el conjunto focal de elementos (F) es anidado.

Es decir, $F = \{A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n = \Omega\}$. A este cuerpo (m, F) se le denomina consonante. Según definió Zadeh [15] la plausibilidad se le denomina medida de posibilidad (Π) y la credibilidad es la medida de necesidad (N).

Así, la medida de posibilidad se define como una función:

$$\Pi : 2^\Omega \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

Asumiendo: 1) $\Pi(\emptyset) = 0$; 2) $\Pi(\Omega) = 1$; 3) $\forall A, B \subseteq \Omega \quad \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$.

Así mismo se establece $\Pi(\{a\}) = \pi(a)$. A π se le denomina distribución de probabilidad y se define así:

$$\forall A \subseteq \Omega \quad \Pi(A) = \max\{\pi(x) | x \in A\} \quad (2)$$

2.1 Medidas de incertidumbre

A lo largo de los años se han establecido diferentes medidas de incertidumbre [12, 13]. Sin embargo, la mayoría de medidas probabilísticas y posibilísticas se fundamentan en dos medidas: entropía y cantidad de información de Hartley.

La *entropía de Shannon* (H) es la medida de incertidumbre por antonomasia. Basada en la teoría de la probabilidad, fundamenta su medida en cuantificar la disonancia y la confusión [6]. La entropía se define como: $H(p(x) | x \in X) = -\sum p(x) \log_2(p(x))$

La *información de Hartley* se basa en un conjunto finito X con n elementos, donde cada elemento representa una alternativa. Se define una secuencia como un conjunto de 's' selecciones, y por lo tanto existen n^s posibles secuencias. $I(n^s) = k(n)s = \dots = I(N) = \log_2(N)$

2.2 No Especificidad.

La no especificidad descrita, por Yager, puede interpretarse como el grado de precisión de un conjunto fuzzy [1]. Así, Yager propuso [13] la siguiente medida de especificidad:

$$Sp : 2^X \rightarrow [0, 1] \text{ y } Sp(F) = \int_0^1 \frac{1}{|F_x|} dx$$

Posteriormente, una interpretación posibilística (ver [1]), asumiendo que es posible describir una distribución de posibilidad ordenable:

$$Sp(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{i}$$

Klir y Folger proponen una medida de incertidumbre denominada *U-Uncertainty* para generalizar la medida de Hartley a conjuntos borrosos [1, 6, 14]. La *U-Uncertainty* se define en el conjunto de distribuciones de posibilidad ordenada (R) como: $U : R \rightarrow [0, \infty)$ donde $U(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = \dots = \sum_{i=1}^n (\pi_i - \pi_{i+1}) \log_2 i$ siendo $\pi_{n+1} = 0$.

Del cálculo de U , se puede generalizar como un conjunto de *abps* (M), y por lo tanto se puede definir la **no especificidad** como:

$$V : M \rightarrow [0, \infty) \text{ siendo } V(m) = \sum_{A \in F} m(A) \log_2(|A|) \quad (3)$$

donde (F, m) define un cuerpo de evidencia, siendo $F \subseteq 2^X$.

En [6] se demuestra que la medida de Hartley extendida para conjuntos fuzzy cumple las mismas propiedades que la entropía de Shanon y considerando que la entropía y la información de Hartley sobre conjuntos difusos son medidas *homólogas* aunque miden aspectos diferentes de la incertidumbre.

2.3 Disonancia.

La disonancia se produce cuando diferentes fragmentos de información entran en contradicción, incompatibilidad o inconsistencia. Desde el punto de vista de la Teoría de la Evidencia, podemos decir que la observación de un evento es disonante si existen conjuntos disjuntos de pertenencia, pero las evidencias apuntan a que pertenece a varios de ellos [6].

Una de las situaciones más comunes de disonancia proviene de considerar dos posibles fuentes de información. Sin embargo, también es posible que la misma fuente pueda producir información contradictoria.

Sea pues dos cuerpos de evidencia de fuentes información diferentes: (F_1, m_1) y (F_2, m_2) de un mismo universo X . Siendo $m(A_1) \neq 0$, $m_2(A_2) \neq 0$ y $A \cap B = \emptyset$

Se define el *Conflicto* como: $K : X \times X \rightarrow R$ donde $K = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m_1(A) \cdot m_2(B)$

Y la *Cantidad de Conflicto*: $con : m \times m \rightarrow [0, \infty]$ donde $con(m_1, m_2) = -\log_2(1 - K)$

Una propuesta de **Medida de Disonancia**, para un único cuerpo de evidencia (F, m) , es la propuesta por Yager en [14] denominada E e inspirada en la entropía de Shannon. Sea M el conjunto de todas las abps de 2^n elementos, la disonancia se define como:

$$E : M \rightarrow [0, \infty) \quad E(m) = - \sum_{A \in F} m(A) \log_2 Pl(A) \quad (4)$$

3 RED DE RESTRICCIONES TEMPORALES POSIBILÍSTICAS ENTRE PUNTOS

En los trabajos de Hadjali, Dubois y Prade[4] se hace referencia a una red de relaciones binarias entre puntos temporales donde se representan las relaciones mediante valores de posibilidad asociados a los tipos de relaciones existentes. Existen 3 tipos de relaciones básicas entre 2 puntos temporales (antes de , a la vez que , después de)[10, 11]. Así, en [4] se describe las relaciones temporales entre puntos como un vector con tres valores de posibilidad (uno por cada tipo de relación posible).

A esta red de restricciones la denominaremos *PTCN* (del inglés Possibilistic Temporal Constraint Network), que se define como:

$$PTCN = (R, P) \quad (5)$$

Donde P es el conjunto de puntos y R es el conjunto de relaciones entre puntos. Cada relación $(r \in R)$ se define: $r_{i,j} = \langle \pi_{i < j}, \pi_{i = j}, \pi_{i > j} \rangle$, siendo $i, j \in P$ y donde $\pi_{i < j}, \pi_{i = j}, \pi_{i > j}$ describe el grado de posibilidad de la ocurrencia de la relación entre el punto i y el j .

Además, este modelo propone para la inferencia de reglas a partir de relaciones temporales borrosas, un conjunto de operaciones basadas en un modelo similar para la teoría probabilística [8]. Estas operaciones son: inversión, composición, combinación y negación.

- inversión: dada la relación r_{ab} la inversión permite producir la relación r_{ba} . $r_{ab} = (\pi_{a < b}, \pi_{a = b}, \pi_{a > b})$ entonces $\tilde{r}_{ab} = r_{ba} = (\pi_{a > b}, \pi_{a = b}, \pi_{a < b})$
- composición: dada las relaciones r_{ab} y r_{bc} la composición obtiene la relación $r_{ac} = r_{ab} \otimes r_{bc}$.
- combinación: dadas dos fuentes de información que definen una misma relación r_{ab}^1 y r_{ab}^2 , la operación de combinación $\oplus$ permite resumir ambas en una única relación incierta $r_{ab} = r_{ab}^1 \oplus r_{ab}^2$

- negación: establece qué relaciones no son posibles: $\bar{r}_{ab}$.

4 INCERTIDUMBRE EN PTCN

Aplicando las medidas descritas en la Sección 2, plantearemos cómo medir la incertidumbre total generada en una red *PTCN* a partir de las distribuciones de posibilidad asociadas a las relaciones.

De este modo, la medida de incertidumbre de una red de restricciones posibilísticas depende fundamentalmente de (1) qué medida de incertidumbre concreta es más apropiada para medir la incertidumbre de una restricción de forma individual y (2) cómo cuantificar la incertidumbre total de la red.

A la hora de cuantificar la incertidumbre total de una red *PTCN* surge la idea de la suma de la incertidumbre local. Pero sólo es posibles con medidas que cumplan la propiedad aditiva en distribuciones independientes. Con el fin de responder a ambas cuestiones, resulta clave analizar -en primer lugar- la idea de independencia.

4.1 Independencia posibilística.

Para el concepto de independencia, existen en la teoría de la posibilidad diferentes enfoques como lógicas, independencia de variables o razonamiento por defecto [5].

Asumiremos la definición de independencia como la **no-ganancia** de Información. Expresado como $I(X, Z, Y)$, establece que conocido el valor de la variable Z , al conocer el valor de la variable Y no se gana información adicional sobre la variable X .

Para una definición formal de la Independencia entre distribuciones de posibilidad, se requiere de un conjunto de definiciones.

Se define la Medida de Posibilidad Marginal:

$$\Pi_x(A) = \Pi(A \times Y) \text{ donde } \forall A \subseteq X, Y \subseteq \Omega \quad (6)$$

Siendo $\pi_x(x) = \Pi_x(\{x\}) = \Pi(x \times Y) = \max(\pi(x, y)) \quad y \in Y, \forall x$

Así, la Medida de Posibilidad Condicional $\Pi_d(A|B) = \frac{\Pi(A \times B)}{\Pi_Y(B)}$ definida sobre una distribución de posibilidad que se define como $\pi_d(x|y) = \frac{\pi(x, y)}{\pi_Y(y)}$ siendo $\pi_Y = \max_{x \in X}(\pi(x, y)) \quad \forall y \in Y$.

La no-ganancia de información, se formaliza estableciendo si el conjunto de valores de una variable es más informativo que los valores de otra variable. En términos posibilísticos $\Pi(A) < \Pi(B)$, es decir si $\pi(x) < \pi'(x) \quad \forall x$ entonces decimos que π contiene más

información que π' (o contenida). Por lo tanto, la independencia (para más detalles ver [5]) se puede definir como:

$$I(X, Y, Z) \iff \pi_d(x|yz) \geq \pi_d(x|z), \quad (7)$$

$$\forall x, y, z \wedge \pi(yz) > 0 \quad (8)$$

4.2 Independencia de la red.

En el caso particular de las redes *PTCN*, la semántica temporal entre puntos permite un conjunto limitado de operaciones, donde cada distribución de posibilidad expresa la relación entre dos puntos de forma unívoca.

Por otra parte, la propia semántica de este tipo de redes apunta que es posible establecer relaciones dependientes entre ellas según la topología particular. Así, definimos:

$$PTCN = (P, R) \text{ independiente} \iff \quad (9)$$

$$\forall r_i, r_j, r_k \in R \text{ distintas, cumple } I(r_i, r_j, r_k) \quad (10)$$

A continuación describiremos dos situaciones donde las redes posibilísticas son independientes o dependientes. El primer caso introduciremos, mediante un ejemplo, cómo determinar una red dependiente (no camino consistencia). En segundo lugar describiremos una topología particular (la más simple) donde demostraremos que sus relaciones son siempre independientes.

4.2.1 Topología de red dependiente.

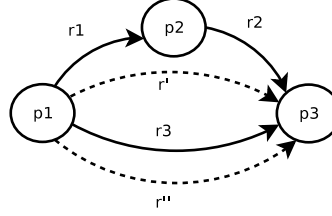
A partir de un ejemplo mostraremos cómo determinar en un *PTCN* la dependencia posibilística.

Consideremos 3 puntos temporales $p_1, p_2, p_3 \in P$ donde se establecen inicialmente dos relaciones temporales $r_1 = (\pi_{p_1 < p_2}, \pi_{p_1 = p_2}, \pi_{p_1 > p_2})$ y $r_2 = (\pi_{p_2 < p_3}, \pi_{p_2 = p_3}, \pi_{p_2 > p_3})$ sobre p_1 - p_2 y p_2 - p_3 respectivamente. Supongamos que, a continuación, consideráramos una nueva relación $r_3 = (\pi_{p_1 < p_3}, \pi_{p_1 = p_3}, \pi_{p_1 > p_3})$ entre p_1 - p_3 . Sería independiente r_3 ? (e.d. si no existe ganancia de información al incorporar r_3 al entorno).

Para poder responder a esta pregunta en primer lugar se debe buscar un dominio común para establecer cualquier alternativa, puesto que la distribución de posibilidad de la relación r_1 está definida para la relación entre los puntos p_1 - p_2 (igualmente r_2) mientras que el dominio de r_3 es respecto a p_1 - p_3 .

Para ello, el modelo de relación posibilística entre puntos establece un operador de composición, a partir del cual se puede describir una relación inferida r' entre p_1 - p_3 a partir de r_1 y r_2 . Entonces, $r' = r_1 \otimes r_2$, descrita por la distribución de posibilidad $\pi' =$

$(\pi'_{p_1 < p_1}, \pi'_{p_1 = p_3}, \pi'_{p_1 > p_3})$. Esta nueva relación se puede interpretar como la condicionalidad que existe entre los puntos p_1 y p_2 cuando están presentes las relaciones r_1 y r_2 . Es decir, asumimos que en un estado inicial (antes de establecerse r_1 y r_2) sólo sería posible un estado de completa ignorancia, es decir, que la única relación posible entre p_1 y p_2 sería la trivial $r = (1, 1, 1)$.



La incorporación de una nueva relación r_3 , definida por la distribución de posibilidad $\pi_3 = (\pi_{p_1 < p_3}, \pi_{p_1 = p_3}, \pi_{p_1 > p_3})$, modifica el estado actual de la red puesto ya que tanto π_3 como π' describen la relación existente entre los puntos p_1 y p_3 . Para evitar esta dualidad y un potencial estado de inconsistencia, es necesario combinar ambas informaciones en una nueva relación temporal que denominaremos r'' . Para ello el modelo de relación posibilísticas entre puntos establece el operador de combinación $\oplus$. Por lo que la distribución de posibilidad π'' que define el punto r'' se define como $\pi'' = \pi' \oplus \pi_3$. Esta nueva relación se puede interpretar como la condicionalidad que existe entre los puntos p_1 y p_2 cuando están presentes las relaciones r_1 , r_2 y r_3 .

Aplicando la definición de Independencia Posibilística (Formulas 7-8), diremos que el estado de la red relativo a la relación temporal entre p_1 y p_2 , formado por las relaciones r_1 y r_2 , es independiente de la aparición de la relación r_3 , si la distribución de posibilidad asociado al estado original y al estado (tras la incorporación de r_3) tienen Independencia Posibilística. Es decir, si $\pi' \leq \pi''$, o lo que sería igual, si:

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \leq (\pi_1 \otimes \pi_2) \oplus \pi_3 \quad (11)$$

4.2.2 Topología de red independiente.

En el siguiente ejemplo describiremos otro tipo de configuración de redes temporales posibilísticas entre puntos. Describiremos cómo en esta ocasión las relaciones temporales entre los diferentes puntos (descritas mediante una distribución de posibilidad) son independientes unas de otras.

Consideremos una red de relaciones temporales posibilísticas con un conjunto de puntos finitos $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ y con un conjunto de relaciones finitas $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\}$ donde cada relación r_i describe la relación temporal entre p_i y p_{i+1} .



En esta situación preguntamos si dada una relación r_j donde $j \in [1, n-1]$, es independiente de $r_k \forall k \in [1, n-1] \wedge k \neq j$. Es decir, dada una relación entre los puntos p_j y p_{j+1} . Existe un incremento de información añadiendo el resto de relaciones de la red respecto a la información ya dada por r_j ?

Sea la distribución de posibilidad que define r_j , $\pi_j = (\pi_{j < j+1}, \pi_{j=j+1}, \pi_{j > j+1})$. Esta distribución define el estado actual de la relación temporal entre los puntos p_j y p_{j+1} . Consideremos ahora la aparición de una nueva relación cualquiera $r_k \forall k \in [1, n-1] \wedge k \neq j$, $\pi_k = (\pi_{k < k+1}, \pi_{k=k+1}, \pi_{k > k+1})$. Esta distribución define la relación temporal existente $p_k (\neq p_j)$ y de $p_{k+1} (\neq p_{j+1})$. Es obvio que r_j y r_k están aplicadas sobre dominios distintos, no existiendo ningún operador del modelo (negación, inversión, combinación o composición) que permita inferir una nueva relación entre p_j y p_{j+1} a partir de las relaciones r_j y r_k . Por consiguiente, la relación existente entre ambos puntos (r) no cambia al incorporar la relación r_k respecto a la ya existente r_j . Así, $\pi_d(r|r_j) \leq \pi_d(r|r_j r_k)$ (de hecho es $=$), lo que implica que son independientes $\forall k \in [1, n-1] \wedge k \neq j$ y por lo tanto no existe un incremento de información.

4.3 Cuantificar la incertidumbre total de PTCN

Para medir la incertidumbre total de una *PTCN* un factor fundamental es la dependencia de las distribuciones de posibilidad asociada a sus restricciones. Tanto es así que esta característica de las topologías condiciona la forma en que se mide la incertidumbre total.

Por ello, es necesario analizar esta condición en las redes *PTCN* y proponer diferentes estrategias diferentes para calcular la incertidumbre tanto en situaciones de dependencia o independencia.

4.3.1 Incertidumbre en PTCN independientes: No Especificidad

Una de las ventajas de la restricción que supone obtener redes independientes es la facilidad para calcular la incertidumbre de la red. Esto es así ya que la mayoría de medidas de incertidumbre (entropía en teoría de la probabilidad, no especificidad en teoría de la posibilidad) cumplen la propiedad aditiva, es decir la que la cantidad total de incertidumbre es igual a la sumas parciales de incertidumbre, siempre y cuando sean independientes.

Para las restricciones temporales posibilísticas entre

puntos de las redes *PTCN* considereramos la medida no especificidad V (Sección 2.2) como medida de incertidumbre para distribuciones posibilísticas más sencilla de aplicar.

Sea $PTCN = (P, R)$ siendo $\forall r_{ij} \ r_{ij} \in R$ independientes, la medida de incertidumbre de la red se calcula como:

$$U_{PTCN} = \sum_{r_{ij} \in R} V(r_{ij}) \quad (12)$$

4.3.2 Incertidumbre en PTCN dependientes

Las restricciones posibilísticas son dependientes cuando unas aportan información adicional a la información que implican otras.

En este trabajo hemos considerado dos aproximaciones para el cálculo de incertidumbre en este tipo de redes según sea la información consistente o no.

Desde el punto de vista del razonamiento temporal, las relaciones independientes pueden llegar a describir situaciones inconsistentes temporalmente. Por ejemplo, supongamos $r_{ab}^1 = < 1, 0, 0 >$ y $r_{ab}^2 = < 0, 0, 1 >$. La restricción r_{ab}^1 indica que es absolutamente posible que ocurra $<$ mientras que $=$ o $>$ es imposible, mientras que r_{ab}^2 indica que $>$ es absolutamente posible y que $<$ o $=$ es imposible.

Aun cuando la red sea inconsistente, podría ser necesario medir la incertidumbre. Entre las medidas de incertidumbre existentes en la literatura, es el cálculo de disonancias permite cuantificar la contradicción entre fuentes de información diferentes o la misma fuente. Así, podríamos aplicar esta técnica para calcular las diferentes disonancias presentes en la red. No obstante, la disonancia de la red no puede ser establecida como la suma de disonancias parciales (no es aditiva), teniendo que considerar aproximaciones como el máximo (cota superior) o el mínimo (cota inferior).

$$TotDisonancia = \max\{E(m_i)\} \forall m_i \quad (13)$$

donde m_i es la *abp* obtenida a partir de la distribución de posibilidad asociada a la relación $r_i \in R$ donde $PTCN = (P, R)$ (para más detalles del paso de posibilidad a *abp*, ver [6]).

Alternativamente y asumiendo una red de restricciones consistente, se podría realizar una minimización de la red (siempre y cuando sea posible definir este proceso de minimización para el modelo de red). La minimización todas las posibles relaciones entre todos los puntos para redes de restricciones temporales entre puntos. Esta minimización inferirá, entre otras, las relaciones entre los pares de puntos contiguos, es decir

$\{r_{1,2}, r_{2,3}, \dots, r_{n-1,n}\} \forall r_{i,i+1} \in R$ que configuraría una red de restricciones independientes. En este caso sería posible calcular la incertidumbre mediante la no especificidad. Sin embargo, esta medida es orientativa, puesto que el resultado aditivo obtenido es calculado sobre relaciones inferidas, pudiendo ser poco informativas.

5 POSIBLES APLICACIONES

En [3] se propone un proceso de *Minería de Datos Temporales* (MDT) para la extracción de patrones. Estos patrones son sintetizados mediante redes *PTCN* para establecer patrones más descriptivos. Así, el uso de *TotDisonancia* (ver Fórmula 13) sería útil para evaluar qué patrones obtenidos deben ser considerados mediante un valor umbral de dicha medida. En *Razonamiento Basado en Casos Temporal* (RBCT), los casos son a menudo secuencias de eventos temporales. Es posible obtener redes *PTCN*, con la topología vista en Sección 4.2.2, que subsuman dos o mas secuencias de este tipo. Por lo que medidas en redes independientes (Sección 4.3.1) permitirían calcular la similitud entre casos.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se propone una estrategia para el cálculo global de la cantidad de incertidumbre para el modelo propuesto por Hadjali, Dubois y Prade de *PTCNs* [4]. Este trabajo está basado en un análisis de las diferentes medidas incertidumbre para modelos posiblisticos y teoría de la evidencia [1, 6, 13]. En este artículo se establece la disyuntiva entre configuraciones de restricciones de *PTCNs* independientes y dependientes. Por ello en el primer caso, las propiedades de la medida de no especificidad permiten un cálculo más simple. En las *PTCN* con restricciones dependientes esto no es posible, por lo que se describe una segunda propuesta mediante el uso de la medida de disonancia. También se proponen algunas posibles aplicaciones prácticas de estas medidas (en MDT y RBCT), que quedan como vías futuras de desarrollo.

Referencias

- [1] D. Dubois and H. Prade. Properties of measures of information in evidence and possibility theories. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:161–182, 1987.
- [2] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory: An approach to computerized uncertainty processing*. Plenum Press, 1988.
- [3] F. Guil and R. Marin. Extracting uncertain temporal relations from mined frequent sequences. In *TIME 06, accepted*, 2006.
- [4] A. Hadjali, D. Dubois, and H. Prade. A possibility theory-based approach to the handling of uncertain relations between temporal points. In *11th International Symposium on Temporal Representation and Reasoning (TIME 2004)*. *IEEE Society*, page 3643, 2004.
- [5] J. F. Huete. *Aprendizaje de Redes de Creencia Mediante Detección de Independencia: Modelos No Probabilísticos*. PhD thesis, Universidad de Granada, Universidad de Granada, Spain, 1995.
- [6] G. J. Klir and T. A. Folger. *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*. Prentice-Hall, 1988.
- [7] R. Marín, M. A. Cárdenas, M. Balsa, and J. L. Sánchez. Obtaining solutions in fuzzy constraint networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, 3-4:261–288, 1996.
- [8] V. Ryabov and S. Puuronen. Probabilistic reasoning about uncertain relations between temporal points. In *Proc. 8th Int. Symposium on Temporal Representation and Reasoning TIME 2001*, *IEEE Computer Society*, pages 1530–1511, 2001.
- [9] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [10] Y. Shoham and McDermott. Problems in formal temporal reasoning. *Artificial Intelligence*, (36):49–61, 1988.
- [11] M. Vilain and H. Kautz. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-86)*, pages 6:132–144, USA, 1986.
- [12] P. Walley. Measures of uncertainty in expert systems. *Artificial Intelligence*, 83:1–58, 1996.
- [13] R. R. Yager. Measuring tranquility and anxiety in decision-making: An application of fuzzy sets. *International Journal in General Systems*, 8:139–146, 1982.
- [14] R. R. Yager. Entropy and specificity in a mathematical theory of evidence. *International Journal*, 9(4):249–260, 1983.
- [15] L. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:3–28, 1978.

ANÁLISIS DIFUSO DE REDES NEURONALES DE CLUSTERS LOCALES

C.J. Mantas

Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada, 18071 - Granada, España
cmantas@decsai.ugr.es

Resumen

Las Redes Neuronales de Clusters Locales (RNCLs) [2] construyen funciones localizadas usando sigmoides. A partir de funciones “cresta” unidimensionales, el diseño de funciones localizadas sólo se justifica gráficamente. Este hecho impide la comparación entre las redes RBF y las RNCLs. En las redes RBF, las funciones localizadas se construyen con la combinación de funciones gaussianas unidimensionales por medio de la t-norma producto. En este trabajo, se prueba que las funciones localizadas de las RNCLs se diseñan con la agregación de funciones “cresta” unidimensionales usando una t-norma de Hamacher. Estas funciones son previamente alteradas con un modificador lingüístico. Este estudio permite comparar funcionalmente las redes RBF y las RNCLs.

Palabras Clave: Red neuronal, cluster local

1 INTRODUCCIÓN

En [2] se presentó un nuevo modelo de red neuronal, llamado Red Neuronal de Clusters Locales (RNCLs). RNCLs son perceptrones sigmoidales con dos capas ocultas, donde las conexiones están restringidas de tal modo que clusters de sigmoides forman funciones con respuesta local, similares a las funciones de base radial (RBFs). En [1] se introduce el algoritmo RULEX. Este algoritmo extrae reglas simbólicas a partir de los pesos de una RNCL entrenada y con ciertas restricciones.

El diseño de una RNCL se basa en una red multicapa con pares de funciones sigmoidales combinadas para formar funciones “cresta”. A continuación, estas funciones cresta se combinan para construir funciones localizadas. Una vez entrenada una RNCL, se pueden extraer de ella

reglas simbólicas donde el antecedente de cada regla corresponde a cada función local de la RNCL.

Cuando se presentaron las RNCLs, la construcción de las funciones localizadas a partir de funciones cresta sólo se justificó con ilustraciones gráficas. Este hecho dificulta una comparación funcional entre las RNCLs y las redes RBF.

En este trabajo se estudia la definición de funciones localizadas según la teoría de la lógica difusa [4, 5]. Si el cluster local de las redes RBF son el resultado de combinar funciones gaussianas unidimensionales con la t-norma producto, aquí se prueba que las funciones localizadas de las RNCLs se obtienen con la agregación de funciones cresta unidimensionales usando una t-norma de Hamacher. Previamente, estas funciones cresta son alteradas por un modificador lingüístico de tipo concentración [6]. Después de este análisis podemos comprender la principal diferencia entre las RNCLs y las redes RBF. Pensamos que este estudio puede ayudar a extender el algoritmo de extracción RULEX.

En la siguiente sección se presenta una revisión de las RNCLs. En la sección 3, se explica la formalización de las funciones localizadas según la lógica difusa. Un ejemplo para comprender la diferencia entre RNCLs y redes RBF se expone en la sección 4. Finalmente, se presentan algunas conclusiones y las pruebas de resultados.

2 CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES LOCALIZADAS A PARTIR DE SIGMOIDES

2.1. FUNCIONES CRESTA

Geva et al. [2] mostraron que una región de respuesta local se puede formar con la diferencia de dos funciones sigmoide desplazadas, paralelas y con sus parámetros apropiadamente ajustados:

$$l(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) = l^+(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) - l^-(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) \\ = \sigma(k, \mathbf{w}^T(\mathbf{x} - \mathbf{r}) + 1) - \sigma(k, \mathbf{w}^T(\mathbf{x} - \mathbf{r}) - 1). \quad (1)$$

donde $\sigma(k, h) = 1/(1 + e^{-kh})$.

La anterior función “cresta” l es una función que es casi cero excepto en la región entre las partes con más pendiente de las dos funciones sigmoide. El parámetro $\mathbf{r}$ es un vector de referencia; la anchura de la cresta se determina por la inversa de $|\mathbf{w}|$; y el valor de k indica la forma de la cresta (la cual puede variar de formas parecidas a impulsos rectangulares para valores grandes de k , hasta formas de campana ancha para valores pequeños de k).

Para problemas de aproximación de funciones el parámetro forma se elige para producir crestas en forma de campana, mientras que para problemas de clasificación se coloca para producir crestas en forma de impulso rectangular. El algoritmo RULEX se usa normalmente para problemas de clasificación, de aquí las funciones cresta usualmente tienen valores grandes para k .

2.2. FUNCIONES LOCALIZADAS

Sumando n funciones cresta l con diferentes orientaciones pero con un centro común producimos una función f que tiene su pico en el centro donde las crestas se cruzan pero con crestas residuales alrededor del centro. La suma de n funciones cresta es:

$$f(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n l(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}, k_i, \mathbf{x}). \quad (2)$$

Para hacer la función local, se deben eliminar las crestas residuales alrededor de la región de intersección. Una función sigmoide suave con un bias apropiadamente ajustado puede eliminar estas regiones no deseadas sin introducir discontinuidades en las derivadas de la función localizada.

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) = \sigma_0(k_0, f(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) - b). \quad (3)$$

El bias b se selecciona para asegurar que el valor máximo de la función f , localizado en $\mathbf{x} = \mathbf{r}$, coincide con el centro de la región lineal de la sigmoide de salida σ_0 .

$$b = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 + e^{-k_i}} - \frac{1}{1 + e^{k_i}} \right). \quad (4)$$

La pendiente de la sigmoide de salida, k_0 , debe de tener suficiente pendiente para asegurar que las crestas no deseadas se reducen a valores despreciables. Un valor de 10 para k_0 es adecuado para asegurar que estas crestas son eliminadas.

Como el máximo valor de entrada para la sigmoide de salida está centrado exactamente en la mitad de esta sigmoide, el máximo valor de la función $\mathcal{L}$ es 0.5. Para lograr una salida de 1.0 se escala la sigmoide de salida por un factor de 2:

$$\sigma_0 \equiv 2\sigma.$$

2.3. RNCL Y EL ALGORITMO RULEX

Geva et al. [2] mostraron que una función objetivo $y^*(\mathbf{x})$ se puede aproximar por una función $y(\mathbf{x})$ que es una combinación lineal de m funciones de cluster local con centros $\mathbf{r}_\mu$ distribuidos sobre el dominio de la función. La expresión

$$y(\mathbf{x}) = \sum_{\mu=1}^m v_\mu \mathcal{L}(\mathbf{w}_\mu, \mathbf{r}_\mu, k_\mu, \mathbf{x}). \quad (5)$$

describe la RNCL generalizada donde v_μ es el peso de salida asociado con cada uno de las funciones de cluster local $\mathcal{L}$. (La salida de la red es simplemente la suma ponderada de las salidas de los clusters locales).

Cuando se aplica el algoritmo RULEX, se usa una versión restringida de la RNCL. Esta versión tiene las siguientes características:

- Todas las crestas tienen el mismo parámetro forma (pendiente). Usualmente, este valor de pendiente, k , es grande para producir crestas con forma de impulso rectangular, las cuales son adecuadas para problemas de clasificación.
- La matriz de pesos es diagonal: $\mathbf{w}_i = (0, \dots, w_i, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$, lo cual simplifica las funciones l, f y $\mathcal{L}$:

$$l(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) = \sigma(k, w_i(x_i - r_i) + 1) - \sigma(k, w_i(x_i - r_i) - 1) \quad (6)$$

$$f(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n l(\mathbf{w}_i, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}). \quad (7)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) = \sigma_0(k_0, f(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) - b) \\ = 2\sigma(k_0, f(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) - b). \quad (8)$$

$$b = n \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{-k}} - \frac{1}{1 + e^k} \right). \quad (9)$$

La técnica RULEX extrae reglas proposicionales con la siguiente formato:

$$\text{SI } x_1 \in [x_{1 \text{ inferior}}, x_{1 \text{ superior}}] \text{ Y } \dots \text{ Y } x_n \in [x_{n \text{ inferior}}, x_{n \text{ superior}}]$$

ENTONCES el patrón pertenece a una clase determinada.

Donde los valores $x_{i \text{ inferior}}$ y $x_{i \text{ superior}}$ se calculan para cada dimensión de entrada i a partir de cada cluster local.

Usando la teoría de la lógica difusa para analizar la construcción de las funciones localizadas con sigmoides, el operador Y que agrega las proposiciones obtenidas con el algoritmo RULEX puede ser definido formalmente.

3 CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES LOCALIZADAS SEGÚN LA TEORÍA DE LA LÓGICA DIFUSA

3.1. FUNCIONES LOCALIZADAS COMO PROPOSICIONES DIFUSAS AGREGADAS

Una función localizada de una RNCL restringida se define como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) = 2\sigma\left(k_0, \sum_{i=1}^n \left(l(w_i, r_i, k, x_i) - \frac{b}{n}\right)\right). \quad (10)$$

donde $\left(l(w_i, r_i, k, x_i) - \frac{b}{n}\right) \leq 0.0$, $i = 1, \dots, n$.

Esta función localizada se puede expresar como la agregación de varias proposiciones difusas por medio de una t-norma. Para ello, necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 1

Si $z_i \leq 0.0$, $i = 1, \dots, n$

$$2\sigma\left(k_0, \sum_{i=1}^n z_i\right) = 2\sigma(k_0, z_1) \wedge \dots \wedge 2\sigma(k_0, z_n)$$

donde $c \wedge d = \frac{c \cdot d}{1 + (1-c)(1-d)}$ es una t-norma de la familia de Hamacher [4, 5] y $c, d \in (0,1]$. $\square$

De esta manera, una función localizada de una RNCL se puede interpretar como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) \equiv 2\sigma\left(k_0, l(w_1, r_1, k, x_1) - \frac{b}{n}\right) \wedge \dots \wedge 2\sigma\left(k_0, l(w_n, r_n, k, x_n) - \frac{b}{n}\right) \quad (11)$$

Si consideramos las funciones cresta $l(w_i, r_i, k, x_i)$ como funciones de pertenencia, para obtener una descripción lógica de una función localizada sólo debemos analizar la siguiente función $\mathcal{H}$ cuando trabaja con grados de pertenencia:

$$\mathcal{H}(x) = 2\sigma\left(k_0, x - \frac{b}{n}\right). \quad (12)$$

Con esta función, la interpretación de una función localizada es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x}) \equiv \mathcal{H}(l(w_1, r_1, k, x_1)) \wedge \dots \wedge \mathcal{H}(l(w_n, r_n, k, x_n)) \quad (13)$$

3.2. MODIFICADORES LINGÜÍSTICOS EN LAS FUNCIONES LOCALIZADAS

Como hemos dicho antes, normalmente tenemos valores grandes para k y para k_0 ($k, k_0 \geq 8$) ya que:

- Un valor grande de k es necesario para producir una cresta con forma de impulso rectangular que es adecuado para problemas de clasificación.
- k_0 debe de ser suficientemente grande para asegurar que las crestas residuales no deseadas se reducen a valores despreciables.

Con estas características obtenemos:

- $\mathcal{H}(0) = 2\sigma\left(k_0, 0 - \frac{b}{n}\right) = 2\sigma\left(k_0, 0 - \left(\frac{1}{1+e^{-k}} - \frac{1}{1+e^k}\right)\right) \approx 2\sigma(k_0, -1) \approx 0.0$.
- $\mathcal{H}(1) = 2\sigma\left(k_0, 1 - \frac{b}{n}\right) \approx 2\sigma(k_0, 0) = 1.0$.

Así, la función $\mathcal{H}$ se puede definir en el siguiente dominio: $\mathcal{H} : [0,1] \rightarrow (0,1)$, y se puede considerar un modificador lingüístico.

Esta función realiza una reducción en la magnitud de la entrada x (grado de pertenencia) que es relativamente pequeño para aquellas x con un grado de pertenencia alto, y relativamente grande para aquellas x con grado bajo. Este comportamiento de la función $\mathcal{H}$ corresponde con la definición de un modificador lingüístico de tipo concentración [6]. En la Figura 1 se ilustra la función $\mathcal{H}$ ($k_0 = 10, k = 10$) y el modificador lingüístico $H(x) = x^6$. Podemos apreciar que estas funciones tienen un comportamiento similar.

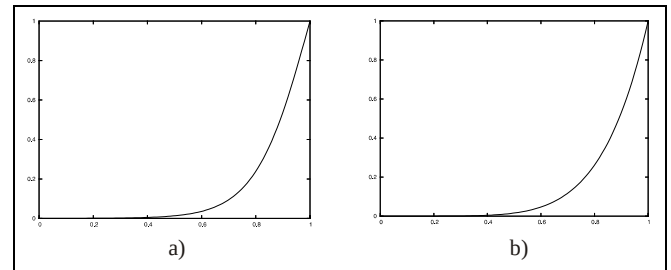


Figura 1: a) Función $\mathcal{H}$ ($k_0 = 10, k = 10$).
b) Modificador lingüístico $H(x) = x^6$.

Si la entrada de la función $\mathcal{H}$ se considera como un grado de pertenencia ($\mu_A(x)$) de un conjunto difuso A , entonces esta función puede ser interpretada lingüísticamente como “ x es extremadamente A ”. De este modo las proposiciones difusas obtenidas a partir de las funciones localizadas de una RNCL, $\mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{r}, k, \mathbf{x})$, se pueden interpretar como:

$$x_1 \text{ es extremadamente } l(w_1, r_1, k, x) \text{ Y } \dots \text{ Y } \\ x_n \text{ es extremadamente } l(w_n, r_n, k, x).$$

Hemos logrado definir formalmente el operador que agrega las funciones cresta de una RNCL. Además, también se ha estudiado la alteración de estas funciones antes de su agregación por medio de modificadores lingüísticos. De esta manera, ahora podemos analizar las diferencias entre las RNCLs y otros tipos de modelos difusos o redes neuronales como redes RBF.

4 COMPARACIÓN CON OTROS MODELOS

Normalmente, los sistemas basados en reglas difusas equivalentes a las redes RBF [3] usan la t-norma producto para agregar sus proposiciones difusas. Estas proposiciones no son alteradas por modificadores lingüísticos.

Ya que la t-norma producto y la t-norma de la familia de Hamacher presentada aquí tienen un comportamiento parecido (Figura 2), podemos deducir que la principal diferencia entre redes RBF y RNCLs es el uso de modificadores lingüísticos sobre las funciones cresta. Para ilustrar este hecho, se define la siguiente función de pertenencia sobre el conjunto difuso A :

$$\mu_A(x) = l(1, 2, 10, x) \text{ (Fig. 3.a)}$$

Esta función de pertenencia alterada por el modificador lingüístico $\mathcal{H}(k_0=10, k=10)$, $\mathcal{H}(l(1, 2, 10, x))$, se ilustra en la Figura 3.b:

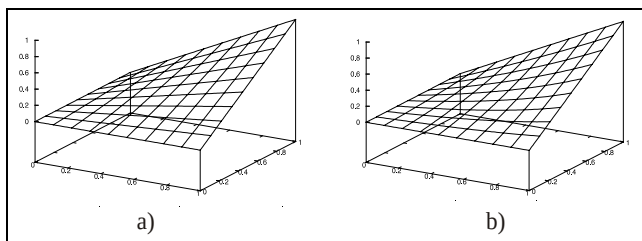


Figure 2: a) T-norma producto. b) T-norma de Hamacher.

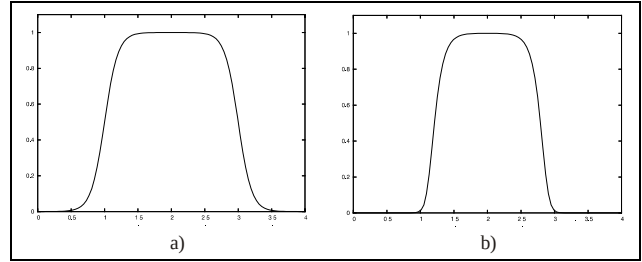


Figure 3: a) $l(1, 2, 10, x)$. b) $\mathcal{H}(l(1, 2, 10, x))$.

El cluster local producido por un modelo difuso similar a las redes RBF sería:

$$“x_1 \text{ es } A” \text{ Y } “x_2 \text{ es } A” \text{ (Fig 4.a),}$$

donde el operador Y se implementa con la t-norma producto.

Por otro lado, el cluster local producido por una RNCL sería:

$$“x_1 \text{ es extremadamente } A” \text{ Y } “x_2 \text{ es extremadamente } A” \text{ (Fig 4.b),}$$

donde el operador Y se implementa con la t-norma de Hamacher.

Podemos apreciar en la Figura 4 que la principal diferencia entre estos clusters está ocasionada por la concentración que produce el modificador lingüístico “extremadamente”. Esta es la característica más destacable de los cluster locales producidos por las RNCLs.

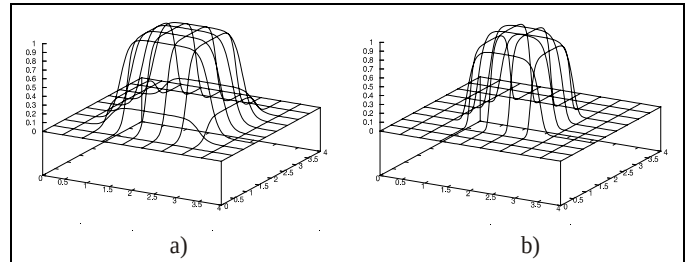


Figure 4: a) “ x_1 es A ” Y “ x_2 es A ” (t-norma producto). b) “ x_1 es extremadamente A ” Y “ x_2 es extremadamente A ” (usando la t-norma de Hamacher).

5 CONCLUSIONES

Las funciones localizadas de las RNCLs han sido estudiadas formalmente. Estas funciones se construyen usando sigmoides, pero se pueden interpretar como una combinación de proposiciones difusas cuando las funciones cresta unidimensionales son consideradas como funciones de pertenencia.

Se ha explicado que una función localizada es el resultado de agregar proposiciones difusas con una t-norma de la familia de Hamacher. Estas proposiciones son la alteración de las funciones cresta de una RNCL por medio de un modificador lingüístico.

Este estudio permite comparar RNCLs y redes RBF. Los clusters locales de las redes RBF son la agregación de funciones gaussianas unidimensionales con la t-norma producto. Estas funciones gaussianas no son alteradas por un modificador lingüístico. Desde el punto de vista de la lógica difusa, esta es la principal diferencia entre las redes RBF y las RNCLs.

Finalmente, el análisis realizado en este trabajo puede ayudar a extraer reglas difusas de las RNCLs. Este hecho puede ayudar a extender el algoritmo de extracción RULEX.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación del proyecto CICYT TIC2003-04650.

Referencias

- [1] R. Andrews, S. Geva, Rule extraction from local cluster neural nets, *Neurocomputing*, 47 (2002), 1-20.
- [2] S. Geva, K. Malmstrom, J. Sitte, Local cluster neural net: Architecture, training and applications, 20 (1998), 35-56.
- [3] J.R.Jang, C.T.Sun, Functional equivalence between radial basis function networks and fuzzy inference systems, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 4 (1993), 156-159.
- [4] G.J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, (1995).
- [5] L.I. Kuncheva, *Fuzzy classifier design*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Physica-Verlag, (2000).
- [6] L.A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 3, (1973), 28-44.

APÉNDICE

Prueba (Proposición 1)

Sea f una función definida como $f(x) = 2\sigma(k_0, x)$.

Sea $z_1, z_2 \leq 0.0$ con $f(z_1) = c, f(z_2) = d$. Como f es una función continua y estrictamente creciente, tenemos

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{k_0} \ln\left(\frac{2-y}{y}\right).$$

$$\text{Por lo tanto, } z_1 = f^{-1}(c) = -\frac{1}{k_0} \ln\left(\frac{2-c}{c}\right),$$

$$z_2 = f^{-1}(d) = -\frac{1}{k_0} \ln\left(\frac{2-d}{d}\right).$$

$$f(z_1 + z_2) = f(f^{-1}(c) + f^{-1}(d)) = f\left(-\frac{1}{k_0} \left(\ln\left(\frac{2-c}{c}\right) + \ln\left(\frac{2-d}{d}\right)\right)\right)$$

$$= f\left(-\frac{1}{k_0} \ln\left(\frac{(2-c) \cdot (2-d)}{c \cdot d}\right)\right) = \frac{2}{1 + e^{\ln\left(\frac{(2-c) \cdot (2-d)}{c \cdot d}\right)}} = \frac{2}{1 + \frac{(2-c) \cdot (2-d)}{c \cdot d}}$$

$$= \frac{2 \cdot c \cdot d}{c \cdot d + (2-c) \cdot (2-d)} = \frac{2 \cdot c \cdot d}{c \cdot d + 4 - 2c - 2d + c \cdot d}$$

$$= \frac{c \cdot d}{2 - c - d + c \cdot d} = \frac{c \cdot d}{1 + (1-c) \cdot (1-d)}$$

$$= \frac{f(z_1) \cdot f(z_2)}{1 + (1 - f(z_1)) \cdot (1 - f(z_2))} = f(z_1) \wedge f(z_2).$$

El operador $c \wedge d$ es una t-norma.

Si $z_1, z_2 \leq 0.0$ entonces $f(z_1) = c, f(z_2) = d \in (0,1]$.

□

Multi-adjoint concept lattices from a non-commutative perspective

J. Medina-Moreno, M. Ojeda-Aciego, J. Ruiz-Calviño

Dept. Matemática Aplicada. Univ. de Málaga

{jmedina,aciego,jorgerucal}@ctima.uma.es

Resumen

This paper shows that the recently introduced framework of multi-adjoint concept lattices naturally embeds the generalization of fuzzy concept lattices under the assumption of non-commutative conjunctors developed by Georgescu and Popescu.

Key words: Concept lattices, multi-adjoint lattice, Galois connection.

1 Introduction

When working with methods which use uncertainty, imprecise data or incomplete information one of the main tools is the formal concept analysis; the classical approach in this context is that introduced by Ganter and Wille [5]. After this, there has been many approaches trying to generalize it, like the fuzzy concept lattices presented by Burusco and Fuentes-González [3] and later developed by Pollandt [13] which are based on the lattice $[0, 1]$. Other approaches emerge trying to work with non-commutative fuzzy logic and similarity in the work of Georgescu and Popescu [6]. Bělohlávek in [2] proposed a generalization of the equality relation and similarity relation inside the fuzzy concept analysis which he called L -equalities. This last approach was extended in the case of the classical equality ($L = \{0, 1\}$), by Krajčí [7, 8] introducing the generalized concept lattices.

Recently, a new approach has been proposed by Medina et al in [9, 12] who introduced the multi-adjoint concept lattices, joining the multi-adjoint lattices with concept lattices. To do this the authors needed to generalize the adjoint pairs into what they called adjoint triples. This new structure directly generalizes almost all the approaches previously cited, but the one of Georgescu and Popescu.

In this paper we show that Georgescu and Popescu concept lattices can be seen as a complete sublattice of the product of two suitable multi-adjoint concept lattices, under this embedding we can prove the corresponding representation theorem by the representation theorem for multi-adjoint concept lattice, which makes the proof easier.

The plan of this paper is the following: In Section 2 we make a brief summary of the basic notions used in formal concept analysis together with a short reminder of the multi-adjoint concept lattices. Moreover, in this section, we also give several properties of the mappings involved in the fundamental theorem of multi-adjoint lattices. This result let us in Section 3, after a introduction of their approach, prove the representation theorem of this framework. The paper ends with some conclusions and some possible vias of future work.

2 Multi-adjoint concept lattice

A basic notion in formal concept analysis is that of Galois connection, since each Galois connection has an associated complete lattice, called *Galois lattice* or *concept lattice*.

Definition 1 Let $(P_1, \leq_1)$ and $(P_2, \leq_2)$ be posets, a pair $(\uparrow, \downarrow)$ of mappings $\downarrow: P_1 \rightarrow P_2, \uparrow: P_2 \rightarrow P_1$ forms a Galois connection between P_1 and P_2 if and only if:

1. $\uparrow$ and $\downarrow$ are decreasing.
2. $x \leq_1 x^{\downarrow\uparrow}$ for all $x \in P_1$.
3. $y \leq_2 y^{\uparrow\downarrow}$ for all $y \in P_2$.

If P_1 and P_2 are complete lattices then the following theorem can be established, see [4]:

Theorem 1 Let $(L_1, \preceq_1), (L_2, \preceq_2)$ be complete lattices, $(\uparrow, \downarrow)$ a Galois connection between L_1, L_2 and $\mathcal{C} = \{\langle x, y \rangle \mid x^\uparrow = y, x = y^\downarrow; x \in L_1, y \in L_2\}$ then $\mathcal{C}$ is a complete lattice, where

$$\bigwedge_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle = \langle \bigwedge_{i \in I} x_i, (\bigvee_{i \in I} y_i)^{\uparrow\downarrow} \rangle$$

$$\bigvee_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle = \langle (\bigvee_{i \in I} x_i)^{\uparrow \downarrow}, \bigwedge_{i \in I} y_i \rangle$$

In the rest of the section, a generalization of multi-adjoint lattices is introduced in order to admit different sorts, in which we allow non-commutative conjunctors as in [1, 6, 10]. To begin with, the adjoint pairs are generalized to adjoint triples, the basic blocks of multi-adjoint concept lattices, as follows:

Definition 2 Let $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$, $(P_3, \leq_3)$ be posets and $\&: P_1 \times P_2 \rightarrow P_3$, $\swarrow: P_3 \times P_2 \rightarrow P_1$, $\nwarrow: P_3 \times P_1 \rightarrow P_2$ be applications, then $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ is an adjoint triple with respect to P_1, P_2, P_3 if:

- $\&$ is increasing in both arguments.
- $\swarrow$ and $\nwarrow$ are increasing in the first argument and decreasing in the second.
- $x \leq_1 z \swarrow y$ iff $x \& y \leq_3 z$ iff $y \leq_2 z \nwarrow x$, where $x \in P_1, y \in P_2$ and $z \in P_3$.

This last property is known as *adjoint property* and generalises the *modus ponens* rule in a non-commutative multi-valued setting. Notice that no boundary condition is required, in difference to the usual definition of multi-adjoint lattice [11] or implication triples [1].

An interesting result we can extract from the adjoint property and that we will use later, is the following lemma:

Lemma 1 If P_1, P_2, P_3 have bottom element, P_1, P_2 have top element and $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ is an adjoint triple, then for all $x \in P_1, y \in P_2$ and $z \in P_3$ the following properties hold:

1. $\perp_1 \& y = \perp_3; x \& \perp_2 = \perp_3$.
2. $z \nwarrow \perp_1 = \top_2; z \swarrow \perp_2 = \top_1$.

Proof. The proof is straightforward from the adjoint property. $\square$

In order to introduce a Galois connection generalizing that given in the classical concept lattices framework, the consideration of several adjoint triples leads to the following definition of multi-adjoint frame.

Definition 3 A multi-adjoint frame $\mathcal{L}$ is a tuple

$$(L_1, L_2, P, \preceq_1, \preceq_2, \leq, \&_1, \swarrow^1, \nwarrow_1, \dots, \&_n, \swarrow^n, \nwarrow_n)$$

where L_i are complete lattices and P is a poset, and such that $(\&_i, \swarrow^i, \nwarrow_i)$ is an adjoint triple with respect to L_1, L_2, P for all $i = 1, \dots, n$.

A multi-adjoint frame as above will be denoted as $(L_1, L_2, P, \&_1, \dots, \&_n)$, for short. It is convenient to note

that, in principle, L_1, L_2 and P could be simply posets, the reason to consider complete lattices is that multi-adjoint frames will be used as the underlying lattice on which the operations will be made; hence, general joins and meets are required.

Definition 4 Given a frame $(L_1, L_2, P, \&_1, \dots, \&_n)$, a context is a tuple (A, B, R, σ) such that A and B are non-empty sets, R is a P -fuzzy relation $R: A \times B \rightarrow P$ and $\sigma: B \rightarrow \{1, \dots, n\}$ is a mapping which associates any object in B with some particular adjoint triple in the frame.

Following the usual terminology, A is to be considered as a set of attributes and B as a set of objects.

The fact that in a multi-adjoint context each object (or attribute) has an associated implication is interesting, in that subgroups with different degrees of preference can be established in a convenient way; however, a complete study of this possibility is outside the scope of this paper.

Now, given a frame and a context for that frame, the following mappings $\uparrow^\sigma: L_2^B \rightarrow L_1^A$ and $\downarrow^\sigma: L_1^A \rightarrow L_2^B$ can be defined:

$$\begin{aligned} g^{\uparrow^\sigma}(a) &= \inf\{R(a, b) \swarrow^{\sigma(b)} g(b) \mid b \in B\} \\ f^{\downarrow^\sigma}(b) &= \inf\{R(a, b) \nwarrow_{\sigma(b)} f(a) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

Notice that these mappings generalise those given in [3, 8] and, as it is proved below, generate a Galois connection.

Proposition 1 Given a frame $(L_1, L_2, P, \&_1, \dots, \&_n)$ and a context (A, B, R, σ) , the pair $(\uparrow^\sigma, \downarrow^\sigma)$ is a Galois connection between L_1^A and L_2^B .

Now, a concept is a pair $\langle g, f \rangle$ satisfying that $g \in L_2^B$, $f \in L_1^A$ and that $g^{\uparrow} = f$ and $f^{\downarrow} = g$; with $(\uparrow, \downarrow)$ being the Galois connection defined above.

Definition 5 The multi-adjoint concept lattice associated to a multi-adjoint frame $(L_1, L_2, P, \&_1, \dots, \&_n)$ and a context (A, B, R, σ) is the set

$$\mathcal{M} = \{\langle g, f \rangle \mid g \in L_2^B, f \in L_1^A \text{ and } g^{\uparrow} = f, f^{\downarrow} = g\}$$

with the ordering $\langle g_1, f_1 \rangle \preceq \langle g_2, f_2 \rangle$ iff $g_1 \preceq g_2$ (equivalently $f_1 \preceq f_2$).

Note that, by Theorem 1, the poset $(\mathcal{M}, \preceq)$ defined above is a complete lattice, since the arrows $(\uparrow, \downarrow)$ form a Galois connection between the complete lattices L_1^A and L_2^B .

From now on, given a multi-adjoint concept lattice, $(\mathcal{M}, \preceq)$, $(L_1, L_2, P, \&_1, \dots, \&_n)$ will be its frame and (A, B, R, σ) its context associated.

The representation theorem for multi-adjoint concepts presented later, is similar to those given in the different theories of concept lattices. To begin with, we need to introduce some definitions and preliminary results.

Definition 6 Given a set A , a poset P with bottom element $\perp$, and elements $a \in A$, $x \in P$, the characteristic mapping $@_a^x: A \rightarrow P$ is defined as:

$$@_a^x(a') = \begin{cases} x, & \text{if } a' = a \\ \perp, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The following lemma gives a technical property which will be needed later.

Lemma 2 In the concept lattice $(\mathcal{M}, \preceq)$, given $a \in A$, $b \in B$, $x \in L_1$ and $y \in L_2$, the following equalities hold:

$$\begin{aligned} @_a^{x\downarrow}(b') &= R(a, b') \searrow_{\sigma(b')} x & \text{for all } b' \in B \\ @_b^{y\uparrow}(a') &= R(a', b) \swarrow^{\sigma(b)} y & \text{for all } a' \in A \end{aligned}$$

The following definitions introduce properties which will be used in the statement of Proposition 2.

Definition 7 Given a complete lattice L , a subset $K \subseteq L$ is infimum-dense (resp. supremum-dense) if and only if for all $x \in L$ there exists $K' \subseteq K$ such that $x = \inf(K')$ (resp. $x = \sup(K')$).

Definition 8 Let $(\mathcal{M}, \preceq)$ be a multi-adjoint concept lattice, $(V, \sqsubseteq)$ a lattice and $\alpha: A \times L_1 \rightarrow V$, $\beta: B \times L_2 \rightarrow V$ two maps. We say that β is (V, R) -related with α if we have that:

1a) $\alpha[A \times L_1]$ is infimum-dense;

1b) $\beta[B \times L_2]$ is supremum-dense; and

2) for each $a \in A$, $b \in B$, $x \in L_1$ and $y \in L_2$:

$$\beta(b, y) \sqsubseteq \alpha(a, x) \quad \text{iff} \quad x \&_{\sigma(b)} y \leq R(a, b)$$

Proposition 2 Given a multi-adjoint concept lattice $(\mathcal{M}, \preceq)$, a complete lattice $(V, \sqsubseteq)$ and a mapping $f \in L_1^B$, if there exist two applications $\beta: B \times L_2 \rightarrow V$, $\alpha: A \times L_1 \rightarrow V$, where β is (V, R) -related with α we have that:

1. $f^\downarrow(b) = \sup\{y \in L_2 \mid \beta(b, y) \sqsubseteq v_f\}$, where v_f denotes $\inf\{\alpha(a, f(a)) \mid a \in A\}$.
2. If $g_v(b)$ denotes $\sup\{y \in L_2 \mid \beta(b, y) \sqsubseteq v\}$, then $\sup\{\beta(b, g_v(b)) \mid b \in B\} = v$.

Lemma 3 Let $(V, \sqsubseteq)$ be a complete lattice, $(\mathcal{M}, \preceq)$ a multi-adjoint concept lattice, and applications $\alpha: A \times L_1 \rightarrow V$ and $\beta: B \times L_2 \rightarrow V$ such that β is (V, R) -related to α . Then the following mapping $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow V$:

$$\begin{aligned} \varphi(\langle g, f \rangle) &= \sup\{\beta(b, g(b)) \mid b \in B\} \\ &= \inf\{\alpha(a, f(a)) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

is an isomorphism.

We can now state the representation theorem for multi-adjoint concept lattices.

Theorem 2 Given a complete lattice $(V, \sqsubseteq)$ and a multi-adjoint concept lattice $(\mathcal{M}, \preceq)$, we have that V is isomorphic to $\mathcal{M}$ if and only if there exist applications $\alpha: A \times L_1 \rightarrow V$, $\beta: B \times L_2 \rightarrow V$ such that β is (V, R) -related to α .

Now, we introduce some interesting properties that can be applied to the kind of maps α and β given in Theorem 2. The first one shows that the hypothesis that α is decreasing and β is increasing assumed in Krajčí's basic theorem on generalized concept lattices [7] can be omitted.

Proposition 3 Let $\langle P, \leq \rangle$ be a poset, $\langle L_1, \preceq_1 \rangle$, $\langle L_2, \preceq_2 \rangle$, $\langle V, \preceq_V \rangle$ be complete lattices and a relation $R: A \times B \rightarrow P$; if there exist two applications $\beta: B \times L_2 \rightarrow V$, $\alpha: A \times L_1 \rightarrow V$, where β is (V, R) -related with α we have that:

1. For all indexed set $\{y_j\}_{j \in J} \subseteq L_2$ and $b \in B$, β satisfies:

$$\beta(b, \sup\{y_j \mid j \in J\}) = \sup\{\beta(b, y_j) \mid j \in J\}$$

2. For all indexed set $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq L_1$ and $a \in A$, α satisfies:

$$\alpha(a, \sup\{x_j \mid j \in J\}) = \inf\{\alpha(a, x_j) \mid j \in J\}$$

Corollary 1 With the hypotheses of the proposition above, we have that β is increasing in the second argument and α is decreasing in the second argument.

The next result shows some boundary properties of α and β functions.

Proposition 4 If β is (V, R) -related with α we have that $\beta(b, \perp_2) = \perp_V$ and $\alpha(a, \perp_1) = \top_V$ for all $b \in B$ and $a \in A$.

Proof. Given $a \in A$ let us prove that $\alpha(a, \perp_1) = \top_V$. As, by Lemma 1, $\perp_1 \& y \leq R(a, b)$ for all $b \in B$ and $y \in L_2$, from Property 2 we obtain that $\beta(b, y) \sqsubseteq \alpha(a, \perp_1)$ for all $b \in B$ and $y \in L_2$.

On the other hand, as β is supremum-dense, there exists a subset of indices Λ such that $\top_V = \sup\{\beta(b_i, y_i) \mid i \in \Lambda\}$, therefore, from the comment above and the supremum property we have that:

$$\top_V = \sup\{\beta(b_i, y_i) \mid i \in \Lambda\} \sqsubseteq \alpha(a, \perp_1)$$

Hence, $\top_V = \alpha(a, \perp_1)$.

The other equality follows similarly. $\square$

This result can be used to prove that any subset of $A \times L_1$ is related to a concept; moreover, it is used in next section in order to generalize the framework introduced in [6].

Proposition 5 Given a multi-adjoint concept lattice $(\mathcal{M}, \preceq)$, $v \in V$, $\alpha: A \times L_1 \rightarrow V$, $\beta: B \times L_2 \rightarrow V$ such that β is (V, R) -related with α we have that for each $K \subseteq A \times L_1$ there exists a unique concept $\langle g, f \rangle \in \mathcal{M}$ such that

$$\begin{aligned} \inf\{\alpha(a, x) \mid (a, x) \in K\} &= \sup\{\beta(b, g(b)) \mid b \in B\} \\ &= \inf\{\alpha(a, f(a)) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

Proof. Given $K \subseteq A \times L_1$, let $h: A \rightarrow L_1$ be the function defined as:

$$h(a) = \sup\{x \mid (a, x) \in K\}$$

Therefore, we have:

$$\begin{aligned} \inf\{\alpha(a, x) \mid (a, x) \in K\} &\stackrel{(1)}{=} \inf\{\alpha(a, h(a)) \mid a \in A\} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sup\{\beta(b, h^\downarrow(b)) \mid b \in B\} \\ &\stackrel{(3)}{=} \varphi(\langle h^\downarrow, h^\uparrow \rangle) \\ &\stackrel{(4)}{=} \inf\{\alpha(a, h^\uparrow(a)) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

where (1) is given by Propositions 4 and 3, (2) by Proposition 2 and (3), (4) by Lemma 3. Then the required concept is $\langle h^\downarrow, h^\uparrow \rangle$. The uniqueness follows from Lemma 3. $\square$

3 Concept lattices for non-commutative fuzzy logics

In this section we will show how the concept lattice introduced in [6] can be embedded in the general setting of multi-adjoint concept lattices. This embedding, together with the representation theorem for multi-adjoint concept lattices, allows us to prove a more general fundamental theorem for those concept lattices.

To represent the Georgescu-Popescu concept lattices inside our framework we will consider two multi-adjoint frames $(L, L, P, \&)$ and $(L, L, P, \&^{op})$, where $\&^{op}$ is defined as $\&^{op}(x, y) = y \& x$, with contexts $\mathcal{C}_i = (A, B, R, \sigma_i)$, $i = \{1, 2\}$, respectively, where $\sigma_1(b) = \&$, $\sigma_2(b) = \&^{op}$ for all $b \in B$ (we will omit any further reference to σ because both contexts have only one adjoint triple); finally, the Galois connection associated to $\&$ is written as $(\uparrow, \downarrow)$ and to $\&_2$ is $(\uparrow^{op}, \downarrow^{op})$, and are defined as:

$$\begin{aligned} g^\uparrow(a) &= \inf\{R(a, b) \swarrow g(b) \mid b \in B\} \\ f^\downarrow(b) &= \inf\{R(a, b) \searrow f(a) \mid a \in A\} \\ g^{\uparrow op}(a) &= \inf\{R(a, b) \searrow g(b) \mid b \in B\} \\ f^{\downarrow op}(b) &= \inf\{R(a, b) \swarrow f(a) \mid a \in A\} \end{aligned}$$

where $g \in L^B$ and $f \in L^A$.

The four arrows associated to the two Galois connections naturally provide the means to reproduce adequately

Georgescu-Popescu concepts (in their notation $(\uparrow, \downarrow)$ and $(\uparrow^{op}, \downarrow^{op})$ would be written $(\uparrow, \downarrow)$ and $(\uparrow, \downarrow)$).

In the following definition, we introduce the term t-concept to distinguish them from the multi-adjoint based concepts.

Definition 9 Let (A, B, R) be a context. The triple $(g, f, f') \in L^{B \times A \times A}$ is called a t-concept if and only if it satisfies:

$$g^\uparrow = f_1; g^{\uparrow op} = f_2; f_1^\downarrow = g; f_2^{\downarrow op} = g$$

If $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ denote the complete lattices of concepts from the Galois connections $(\uparrow, \downarrow)$ and $(\uparrow^{op}, \downarrow^{op})$, and consider the set

$$\mathcal{L} = \{(g, f_1, f_2) \in L^{B \times A \times A} \mid (g, f_1, f_2) \text{ is a t-concept}\}$$

with the ordering $(g, f_1, f_2) \preceq (g', f'_1, f'_2)$ if and only if $g \leq g'$ (equivalently $f_1 \leq f'_1$ or $f_2 \leq f'_2$), then $\mathcal{L}$ is a complete lattice because it is isomorphic to the complete sublattice of $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ containing the pairs $\langle g_1, f_1 \rangle \in \mathcal{M}_1$, $\langle g_2, f_2 \rangle \in \mathcal{M}_2$ satisfying that $g_1 = g_2$.

This new framework generalizes the given in [6] in that it allows to define the same concepts but avoids the requirement of $(L, \&, 1)$ to be a monoid, in the same way that multi-adjoint lattices generalize residuated lattices. The representation theorem for t-concepts is stated below as a generalization of that by Georgescu and Popescu.

Proposition 6 A lattice $(V, \sqsubseteq)$ is isomorphic to a complete lattice of t-concepts $\mathcal{L}$ if and only if there exist two complete lattices $(V_1, \sqsubseteq_1)$ and $(V_2, \sqsubseteq_2)$ and four applications

$$\begin{aligned} \alpha_1: A \times L \rightarrow V_1 \quad ; \quad \alpha_2: A \times L \rightarrow V_2 \\ \beta_1: B \times L \rightarrow V_1 \quad ; \quad \beta_2: B \times L \rightarrow V_2 \end{aligned}$$

such that β_i is (V_i, R) -related with α_i , and there exists an isomorphism ν from V to the set of pairs

$$\left(\inf_{(a,x) \in K_1} \alpha_1(a, x), \inf_{(a,x) \in K_2} \alpha_2(a, x) \right)$$

where $K_1, K_2 \in A \times L$ and

$$\inf_{(a,x) \in K_1} @_a^{x\downarrow} = \inf_{(a,x) \in K_2} @_a^{x\downarrow op} \quad (1)$$

Proof. Firstly, let $\psi: V \rightarrow \mathcal{L}$ be an isomorphism and $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ the multi-adjoint concept lattices associated to the Galois connections $(\uparrow, \downarrow)$ and $(\uparrow^{op}, \downarrow^{op})$ respectively, then, by the representation theorem on multi-adjoint concept lattices and considering $V_1 = \mathcal{M}_1$, $V_2 = \mathcal{M}_1$, there exist $\alpha_1: A \times L \rightarrow V_1$, $\alpha_2: A \times L \rightarrow V_2$, $\beta_1: B \times L \rightarrow V_1$ and $\beta_2: B \times L \rightarrow V_2$ satisfying that β_i is (V_i, R) -related with

α_i ; and two isomorphisms $\varphi_1: \mathcal{M}_1 \rightarrow V_1$, $\varphi_2: \mathcal{M}_2 \rightarrow V_2$ defined, by Lemma 3, as:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\langle g, f \rangle) &= \inf\{\alpha_1(a, f(a)) \mid a \in A\}; \\ \varphi_2(\langle g, f \rangle) &= \inf\{\alpha_2(a, f(a)) \mid a \in A\}\end{aligned}$$

Now, if we define $\Pi_1: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_1$ and $\Pi_2: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}_2$, as $\Pi_1\langle g, f_1, f_2 \rangle = \langle g, f_1 \rangle$ and $\Pi_2\langle g, f_1, f_2 \rangle = \langle g, f_2 \rangle$, respectively, we can consider the mapping ν defined for all $v \in V$ as

$$\nu(v) = (\varphi_1(\Pi_1(\psi(v))), \varphi_2(\Pi_2(\psi(v))))$$

whose image, for every $v \in V$, is: if $\psi(v) = \langle g, f_1, f_2 \rangle$ and we consider the subsets $K_1 = \{(a, f_1(a)) \mid a \in A\}$ and $K_2 = \{(a, f_2(a)) \mid a \in A\}$ of $A \times L$, we have the equality (1), that is:

$$\begin{aligned}\inf_{(a,x) \in K_1} @_a^{x\downarrow} &= \inf_{a \in A} (@_a^{f_1(a)})^\downarrow \\ &= f_1^\downarrow \\ &\stackrel{(*)}{=} f_2^{\downarrow op} \\ &= \inf_{a \in A} (@_a^{f_2(a)})^{\downarrow op} \\ &= \inf_{(a,x) \in K_2} @_a^{x\downarrow op}\end{aligned}$$

where $(*)$ is given because $\langle g, f_1, f_2 \rangle$ is t-concept, moreover,

$$\begin{aligned}\inf_{(a,x) \in K_1} \alpha_1(a, x) &= \inf_{a \in A} \alpha_1(a, f_1(a)) \\ &= \varphi_1(\langle g, f_1 \rangle) \\ &= \varphi_1(\Pi_1(\psi(v)))\end{aligned}$$

and similarly that $\inf_{(a,x) \in K_2} \alpha_2(a, x) = \varphi_2(\Pi_2(\psi(v)))$, so the image of ν is the required one. Furthermore, ν is homomorphism since all the mappings involved in its definition are homomorphisms. Now, we are going to prove that it is bijective.

Let $v_1, v_2 \in V$ be, if $\nu(v_1) = \nu(v_2)$ then, as φ_1 and φ_2 are isomorphisms, we obtain equivalently that:

$$(\Pi_1(\psi(v_1)), \Pi_2(\psi(v_1))) = ((\Pi_1(\psi(v_2)), \Pi_2(\psi(v_2))))$$

Now, if $\psi(v_1) = \langle g, f_1, f_2 \rangle$ and $\psi(v_2) = \langle g', f'_1, f'_2 \rangle$ the equality above means that

$$g_1 = g_2; f_1 = f_2; f'_1 = f'_2$$

Hence, as ψ is an isomorphism, $v_1 = v_2$ and ν is injective.

Let now $(\inf_{(a,x) \in K_1} \alpha_1(a, x), \inf_{(a,x) \in K_2} \alpha_2(a, x))$, with $K_1, K_2 \subseteq A \times L$ satisfying the equality (1), by Proposition 5 we have that there are (unique) concepts $\langle g_1, f_1 \rangle$, $\langle g_2, f_2 \rangle$ such that

$$\begin{aligned}(\inf_{(a,x) \in K_1} \alpha_1(a, x), \inf_{(a,x) \in K_2} \alpha_2(a, x)) &= \\ &= (\inf_{a \in A} \alpha_1(a, f_1(a)), \inf_{a \in A} \alpha_2(a, f_2(a))) \\ &= (\varphi_1(\langle g_1, f_1 \rangle), \varphi_2(\langle g_2, f_2 \rangle))\end{aligned}$$

where the last equality is given by definition above of φ_1 and φ_2 , and f_1 satisfies that

$$\begin{aligned}f_1^\downarrow(b) &= \inf\{R(a, b) \searrow f_1(a) \mid a \in A\} \\ &\stackrel{(1)}{=} \inf\{R(a, b) \searrow \sup_{(a,x_i) \in K_1} \{x_i\} \mid a \in A\} \\ &\stackrel{(2)}{=} \inf\{\inf_{(a,x_i) \in K_1} \{R(a, b) \searrow x_i\} \mid a \in A\} \\ &= \inf_{(a,x) \in K_1} \{R(a, b) \searrow x\} \\ &\stackrel{(3)}{=} \inf_{(a,x) \in K_1} \{@_a^{x\downarrow}(b)\}\end{aligned}$$

where (1) is given by the definition of f_1 (Proposition 5), (2) from the adjoint property and (3) from Lemma 2. In a similar way, we can prove that $f_2^{\downarrow op}(b) = \inf_{(a,x) \in K_2} \{@_a^{x\downarrow op}(b)\}$ then, as (1) is satisfied, we obtain that $f_1^\downarrow = f_2^{\downarrow op}$. Now if we take $v = \varphi(\langle g, f_1, f_2 \rangle)$, where $g = f_1^\downarrow$, we have that

$$\nu(v) = (\inf_{(a,x) \in K_1} \alpha_1(a, x), \inf_{(a,x) \in K_2} \alpha_2(a, x))$$

Therefore ν is surjective. So we have proved that ν is an isomorphism.

Conversely, we have the maps α_i, β_i such that β_i is (V_i, R) -related with α_i , with $i \in \{1, 2\}$, and the isomorphism ν . Therefore, by the representation theorem on multi-adjoint concept lattices we have that there exist two isomorphisms $\varphi_1: \mathcal{M}_1 \rightarrow V_1$, $\varphi_2: \mathcal{M}_2 \rightarrow V_2$.

Now, if we consider the function ι from $\mathcal{L}$ to the complete sublattice of $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ containing the pairs $\langle g_1, f_1 \rangle \in \mathcal{M}_1$, $\langle g_2, f_2 \rangle \in \mathcal{M}_2$ satisfying that $g_1 = g_2$, defined as $\iota(\langle g, f_1, f_2 \rangle) = (\langle g, f_1 \rangle, \langle g, f_2 \rangle)$ we clearly have, from Proposition 5,

$$\begin{aligned}(\inf_{(a,x) \in K_1} \alpha_1(a, x), \inf_{(a,x) \in K_2} \alpha_2(a, x)) &= \\ &= (\varphi_1(\langle g, f_1 \rangle), \varphi_2(\langle g, f_2 \rangle))\end{aligned}$$

where $K_1, K_2 \subseteq A \times L$ satisfying (1).

Thus the function $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow V$ defined as $\varphi = \nu^{-1} \circ (\varphi_1 \times \varphi_2) \circ \iota$ is an isomorphism. $\square$

The following corollary is the representation theorem of the framework presented in [6].

Corollary 2 *Let $I: B \times A \rightarrow P$ be a relation. A lattice $(V, \sqsubseteq)$ is isomorphic to $\mathcal{L}$ if and only if there exist two complete lattices $(V_1, \sqsubseteq_1)$ and $(V_2, \sqsubseteq_2)$ and five applications:*

$$\begin{aligned}\alpha_1: A \times L &\rightarrow V_1 & \alpha_2: A \times L &\rightarrow V_2 \\ \beta_1: B \times L &\rightarrow V_1 & \beta_2: B \times L &\rightarrow V_2 \\ \nu: V &\rightarrow V_1 \times V_2\end{aligned}$$

such that:

1. $\alpha_1[A \times L]$ is infimum dense in V_1 and $\alpha_2[A \times L]$ is infimum dense in V_2 .
2. $\beta_1[B \times L]$ is supremum-dense in V_1 and $\beta_2[B \times L]$ is supremum-dense in V_2 .
3. For each $a \in A, b \in B, x, y \in L$:

$$\begin{aligned}\beta_1(b, y) \sqsubseteq_1 \alpha_1(a, x) & \text{ iff } x \& y \preceq I(b, a) \\ \beta_2(b, y) \sqsubseteq_2 \alpha_2(a, x) & \text{ iff } x \&^{op} y \preceq I(b, a)\end{aligned}$$

4. ν is a monomorphism join-preserving from V onto $V_1 \times V_2$ such that, for any $v \in V$, there exist $K_1, K_2 \subseteq A \times L$ satisfying that $\inf_{(a,x) \in K_1} @_a^{x\downarrow} = \inf_{(a,x) \in K_2} @_a^{x\downarrow^{op}}$ and such that $\nu(v)$ is equal to the pair:

$$\left(\inf_{(a,x) \in K_1} \left(\sup_{b \in B} \beta_1(b, I(b, a) \searrow x) \right), \right. \\ \left. \inf_{(a,x) \in K_2} \left(\sup_{b \in B} \beta_2(b, I(b, a) \searrow x) \right) \right)$$

Proof. The items (1), (2) and (3) are equivalent to the properties that satisfies α_i, β_i $i \in \{1, 2\}$ of Proposition 6, considering the residuated case, the relation $R: A \times B \rightarrow P$ defined as $R(a, b) = I(b, a)$ and the definition of (V_i, R) -related.

For item (4) we will prove the following equalities:

$$\begin{aligned}\sup_{b \in B} \beta_1(b, R(a, b) \searrow x) &= \alpha_1(a, x) \\ \sup_{b \in B} \beta_2(b, R(a, b) \swarrow x) &= \alpha_2(a, x)\end{aligned}$$

We will prove the first statement (the proof for the second is analogous). We have that $R(a, b) \searrow x = @_a^{x\downarrow}(b)$, by Lemma 2, therefore using Proposition 2 we obtain that

$$@_a^{x\downarrow}(b) = \sup\{y \in L_2 \mid \beta(b, y) \sqsubseteq v_{@_a^x}\}$$

where $v_{@_a^x} = \inf\{\alpha_1(a', @_a^x(a')) \mid a' \in A\}$.

Hence, by Proposition 2, we have that

$$\begin{aligned}\sup_{b \in B} \beta_1(b, @_a^{x\downarrow}(b)) &= v_{@_a^x} \\ &= \inf\{\alpha_1(a', @_a^x(a')) \mid a' \in A\} \\ &= \alpha_1(a, x)\end{aligned}$$

where the last equality is because α_1 is decreasing in the second argument and Proposition 4. $\square$

4 Conclusion and future work

We have given an extension of the multi-adjoint concept lattices which has allowed us to embed the concept lattice given by Georgescu and Popescu. This extension is based in a complete sublattice of the product of two multi-adjoint concept lattices which only have one adjoint triple.

We have proved the representation theorem for this new framework which embeds the one given in [6].

For future work we could consider the product of several multi-adjoint concept lattices (non necessary with only one adjoint triple) and give their representation theorem.

Another point to take into account could be the introduction of L -equalities relations as Bělohlávek do with the fuzzy concept lattices [2].

Referencias

- [1] A.A. Abdel-Hamid and N.N. Morsi. Associatively tied implicacions. *Fuzzy Sets and Systems*, 136(3):291–311, 2003.
- [2] R. Bělohlávek. Concept lattices and order in fuzzy logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 128:277–298, 2004.
- [3] A. Burusco and R. Fuentes-González. The study of L-fuzzy concept lattice. *Mathware & Soft Computing*, 3:209–218, 1994.
- [4] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, second edition, 2002.
- [5] B. Ganter and R. Wille. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundation*. Springer Verlag, 1999.
- [6] G. Georgescu and A. Popescu. Concept lattices and similarity in non-commutative fuzzy logic. *Fundamenta Informaticae*, 53(1):23–54, 2002.
- [7] S. Krajčí. The basic theorem on generalized concept lattice. In V. Snášel and R. Bělohlávek, editors, *International Workshop on Concept Lattices and their Applications, CLA 2004*, pages 25–33, 2004.
- [8] S. Krajčí. A generalized concept lattice. *Logic Journal of IGPL*, 13(5):543–550, 2005.
- [9] J. Medina, M. Ojeda-Aciego and J. Ruiz-Calviño. On multi-adjoint concept lattices: definition and representation theorem. Technical report, University of Málaga, <http://www.satd.uma.es/matap/jmedina/MACL.zip>, 2006.
- [10] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, A. Valverde and P. Vojtáš. Towards biresiduated multi-adjoint logic programming. *Lect. Notes in Artificial Intelligence*, 3040:608–617, 2004.
- [11] J. Medina, M. Ojeda-Aciego and P. Vojtáš. Similarity-based unification: a multi-adjoint approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 146:43–62, 2004.
- [12] J. Medina and J. Ruiz-Calviño. Towards multi-adjoint concept lattices. In *Information Processing and Management of Uncertainty for Knowledge-Based Systems, IPMU'06*, 2006. To appear.
- [13] S. Pollandt. *Fuzzy Begriffe*. Springer, Berlin, 1997.

REQUERIMIENTOS DIFUSOS

Daniel Montenegro Arenas¹
daniel.montenegro@gmail.com

Luís Garmendia Salvador¹
lgarmend@fdi.ucm.es

Matilde Santos Peñas²
msantos@dayca.ucm.es

¹Departamento de Sistemas Informáticos y Programación

²Departamento de Arquitectura de Computadores y Automática

Facultad de Informática. Universidad Complutense de Madrid. 28040-Madrid. España

Resumen

En este trabajo se proponen un procedimiento para el manejo de requerimientos imprecisos y con incertidumbre, así como posibles estrategias de diseño e implementación que los instancien de cara a la puesta en marcha de proyectos de Ingeniería del Software. El principal objetivo de este proceso de tratamiento difuso de restricciones es reducir el tiempo en las etapas de elicitación y en el análisis de requerimientos, en beneficio del tiempo total del proyecto de desarrollo software. Se plantea su posible aplicación a motores de inferencia difusos y motores de reglas de negocios.

Palabras Clave: Requerimientos Difusos, Ingeniería del Software, Lógica Difusa, Motores de Reglas de Negocio.

1. INTRODUCCION

El estudio de requerimientos software suele hacerse utilizando el lenguaje natural, muchas veces lleno de términos imprecisos difíciles de modelar. La elicitation y análisis de requerimientos exigen una gran cantidad de tiempo y recursos para modelar dicha imprecisión y realizar el tratamiento de la incertidumbre relacionada con ellos. Generalmente los ingenieros de requerimientos que se enfrentan a requisitos imprecisos y vagos tienen que realizar una labor de análisis exhaustiva con el cliente para poder explicitar dichos requerimientos y expresarlos en un lenguaje sin ambigüedades.

Este análisis exhaustivo de requerimientos conlleva tiempos y costos dentro del proyecto que retrasan actividades posteriores del mismo (diseño, implementación, pruebas, etc.). Estas demoras perjudican en gran medida a los proyectos, y aunque son solo una pequeña parte de los posibles retrasos y costes añadidos

que sufren, pueden llegar a ser relevantes en el éxito y fracaso de los mismos.

En este documento, en primer lugar, abordaremos la problemática real de los proyectos de software en la actualidad, que viene dada fundamentalmente por la necesidad de acortar tiempos en las fases iniciales de los mismos. Para ello se verá en la Sección 3 una forma de abordar los requerimientos imprecisos para que, en etapas posteriores del proceso de desarrollo de software, puedan ser concretados por estrategias de diseño e implementación. La sección 4 estudia la aplicación de estas propuestas en los motores de inferencia difusos y en los motores de reglas de negocios. Finalmente en las conclusiones se analizan posibles mejoras de este procedimiento.

2. LA REALIDAD DEL DESARROLLO DE PROYECTOS DE SOFTWARE

Muchos estudios sobre los proyectos de software dejan una imagen desalentadora. En ellos se muestra como sólo un pequeño porcentaje de los proyectos se consideran exitosos y en la mayoría de ellos los requerimientos no se cumplen en su totalidad (Figura 1).

Entre un tercio y un cuarto de los proyectos son considerados exitosos, es decir, proyectos que desarrollan los requerimientos del cliente en el tiempo y los costes estimados. El resto de ellos se entregan con costes excedidos, fuera del tiempo, con funcionalidad incompleta o simplemente son abandonados. Por otra parte, los proyectos que terminan (sin importar el coste o tiempo empleados) sólo cumplen con una parte de los requerimientos del cliente, entre la mitad y dos terceras partes de los mismos.

Según el análisis del Standish Group [5] [6] del año 2000, los proyectos exitosos fueron tan solo el 28%, mientras que un 21,6% de ellos fueron cancelados, y el restante 50,4% fueron entregados con exceso de costes, tiempo, o

con funcionalidad parcial¹. Resultan aun más desalentadoras las cifras en cuanto al coste y tiempo extra invertidos por las empresas: 214% de la inversión presupuestada y 239% del tiempo estimado.

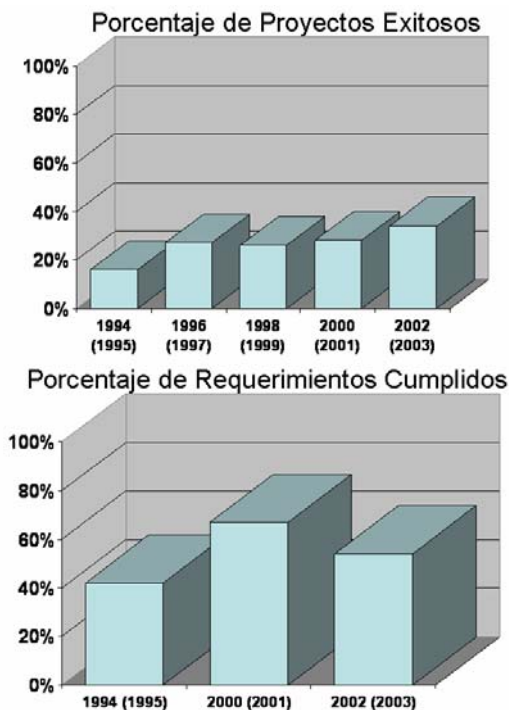


Figura 1: Resultados sobre realización de proyectos

Frente a estas alarmantes cifras, el Standish Group realizó una encuesta con los directores ejecutivos de empresas de tecnología para obtener sus opiniones acerca del éxito de los proyectos. A partir de estas opiniones se creó el *CHAOS Ten* [6], diez factores con una determinada puntuación que aseguran un nivel de confianza en cuanto al éxito del proyecto: usuarios involucrados (19), ayuda de la dirección ejecutiva (16), claridad de los requerimientos (15), planificación apropiada (11), expectativas realistas (10), hitos cortos (9), personal competente (8), pertenencia (6), claridad de visión y objetivos (3), y personal enfocado al trabajo (3). Con estos factores son calificados los proyectos para tener una visión concreta de las posibilidades de que estos sean exitosos o no.

2.1. LAS FASES INICIALES DE LOS PROYECTOS

Independientemente de la metodología que se utilice en el proyecto de software, ésta contará con unas fases iniciales de conocimiento del negocio y elaboración u obtención de

requerimientos [1]. Algunas de ellas pueden realizar estas actividades una sola vez al principio del proyecto (Metodologías tradicionales), otras pueden hacerlas repetidamente a lo largo de su proceso (Metodologías cíclicas y repetitivas). Unas pueden ser estrictas en el manejo de información concreta en los requerimientos y otras, como algunas metodologías ágiles, guiar la elicitación de requerimientos como procesos con pocos formalismos pero involucrando seriamente al cliente. Lo cierto es que para todas las metodologías, las etapas de elicitación y análisis de requerimientos son fases iniciales relevantes dentro del proceso de software. Aunque existan visiones iterativas, para cada iteración los requerimientos serán siempre el inicio del proceso.

Teniendo esto en cuenta, podemos apuntar como una vía sustancial de mejora en el diseño de proyectos el tercer factor del *CHAOS Ten*: *claridad de los requerimientos*. Tener requerimientos claros y precisos es una necesidad latente en todos los proyectos y su consecución está supeditada a procesos de validación, negociación y documentación exhaustiva de dichos requerimientos. La validación y negociación de requerimientos siempre involucra de una manera activa a clientes y usuarios, los cuales deben asegurar la nitidez de la información que los requerimientos reflejan. Pero la validación y negociación de requerimientos consumen gran cantidad de tiempo. Son necesarias varias reuniones con los clientes y realizar diversas estrategias de educación de la información y análisis para poder obtener un requerimiento concreto y con información nítida.

La pregunta que surge es: ¿podemos asegurar claridad en los requerimientos sin necesidad de concretarlos? No para todos los requerimientos, pero para aquellos que manejan incertidumbre. Algunos requerimientos tienen la necesidad de ser precisados completamente antes de ser pasados a fase de diseño, pero otros pueden ser imprecisos y es en esa etapa de diseño cuando son definidos. ¿Qué beneficios se obtienen con este planteamiento? Se evitan o reducen las reuniones y procesos de negociación con el cliente sobre requerimientos, que no necesitan la inversión de tanto tiempo para concretarlos, lo que supone una gran ventaja para ambas partes. De esta forma cuando ya esté el diseño, y posiblemente la implementación, se pueden realizar tareas de concretar la funcionalidad ya diseñada, pero para ese momento tanto el cliente como el analista y el diseñador están orientados en negociar la información que debe ser nítida.

3. TRATAMIENTO DIFUSO DE REQUERIMIENTOS

En esta sección se expone un bosquejo del diseño de un modelo que trate los requisitos software con términos

¹ Información de empresas pequeñas. Las empresas grandes y medianas presentan porcentajes más críticos de proyectos exitosos, cancelados, y entregados con problemas de costo, tiempo o funcionalidad.

imprecisos, procedentes del lenguaje natural de los expertos, en la definición de sistemas y elicitación de requerimientos propios de Ingeniería del Software.

Se propone para ello una metodología cuya entrada son explicaciones coloquiales, que se modelan con lógica difusa, y a las que se aplican motores de inferencia para que, finalmente, tras un proceso de “clarificación”, sirva para obtener unos requerimientos software con información nítida que permita un desarrollo claro y concreto de proyectos informáticos.

3.1. REQUERIMIENTOS DIFUSOS

Los requerimientos, según el Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos [8], son:

- 1) una condición o capacidad necesitada por un usuario para resolver un problema o lograr un objetivo;
- 2) una condición o capacidad que debe ser cumplida o poseída por un sistema o un componente de un sistema para satisfacer un contrato, estándar, especificación u otros documentos impuestos formalmente;
- 3) una representación documentada de una condición o capacidad como las anteriores.

Los buenos requerimientos deben ser [2, 3, 4]: necesarios, concisos, evitar ambigüedades, consistentes, completos, alcanzables, verificables y claros.

Es decir, un *Requerimiento Difuso* será cualquier condición o capacidad necesaria en un sistema que resuelva un problema o logre un objetivo, y que satisfaga unas características imprecisas que modelen el mundo real. Estos *requerimientos difusos* estarán basados en *predicados difusos*, los cuales serán variables lingüísticas calificables que describan un aspecto del requerimiento.

En la Tabla 1 se dan algunos ejemplos de *requerimientos difusos* y los posibles términos de los que se pueden encontrar *predicados difusos*. Estos términos serán *conjuntos borrosos* que no tienen una frontera precisa y su función de pertenencia indica un grado de cumplimiento de ese atributo [7]. Se utiliza (*) como notación para aquellos términos que pueden llegar a ser calificados con *predicados difusos*.

En el primer ejemplo identificamos dos términos que pueden tener *predicados difusos*. El primero de ellos, calificación, puede ser bien una escala o simplemente predicados como buena, aceptable, mala, etc. El segundo termino, cantidad espectadores, podría contener predicados como muchos, pocos, etc. En el segundo ejemplo, el termino clima puede contener predicados como despejado, nublado, tormentoso, etc. El resto de ejemplos podríamos identificar esos predicados con los cuales trabajaremos más adelante.

Para reconocer un requerimiento que pueda ser denominado como difuso debemos tener en cuenta la naturaleza de la información que maneja. Si el requerimiento depende de información concisa para ser validado, o es una funcionalidad que incluye valores determinados para su ejecución, no es un buen candidato. Los requerimientos que utilicen en su descripción términos a los cuales pueden aplicarse predicados calificativos que presenten antonimia, o la información de la que dependen está supeditada a este tipo de términos calificables, tenemos grandes posibilidades de incluirlos como *requerimientos difusos*.

4. REQUERIMIENTOS DIFUSOS EN EL PROCESO DE DESARROLLO DE SOFTWARE

El ciclo de vida de un *requerimiento difuso* es el mismo que el de un requerimiento normal. La diferencia radica en que el ingeniero de requerimientos debe identificar únicamente los *predicados difusos* que definen los términos del requisito, y documentar estos predicados junto a los requerimientos dentro de las especificaciones que para esta fase estén planteadas. Es en este punto donde se obtiene el beneficio de esta metodología. Al tener que definir sólo unos pocos predicados que describan el comportamiento de un término, los ingenieros de software podrán centrarse específicamente en el negocio, y no en las cifras, cantidades o límites numéricos que dificultan la labor de especificación de requerimientos. Un *requerimiento difuso* es entonces descrito empleando menos tiempo que uno normal, y puede pasar a etapas posteriores del proceso de desarrollo de software con mayor rapidez.

Tabla 1: Ejemplos de Requerimientos Difusos.

Requerimiento Difuso	Términos con Predicados Difusos
Calificar películas según la cantidad de espectadores que las ven.	• Calificación* • Espectadores*
Registrar medidas barométricas cuando el clima es adverso para la navegación.	• Clima*
Diagnosticar enfermedades respiratorias dependiendo de la tos y la temperatura corporal	• Tos* • Temperatura Corporal*
Evaluar estudiantes por su conocimiento, creatividad y motivación	• Conocimiento* • Creatividad* • Motivación*

Una vez el requerimiento difuso ha sido elicitado, debe realizarle el análisis del mismo para comprobar su difusidad. Si es necesario, un requerimiento deberá clarificarse y seguirá el ciclo de vida tradicional de los requerimientos nítidos. Generalmente las labores de elicitación de requerimientos y el análisis son etapas independientes realizadas por personas diferentes, pero muchos proyectos integran estas etapas, por lo cual esta verificación en análisis puede obviarse. Al tener el requerimiento analizado, validado, negociado y documentado, y este se encuentra en una especificación de funcionalidad (la más conocida de ellas es la especificación de casos de uso), puede pasar a la etapa de diseño. En ella se decidirá de qué forma va a implementarse este tipo de requerimientos. En este punto, y con una especificación de funcionalidad donde están claramente identificados los predicados difusos, podemos evaluar la posibilidad de utilizar los Motores de Reglas de Negocio para modelar los requerimientos difusos. De la misma forma que en análisis debe verificarse la naturaleza difusa de la funcionalidad planteada, y si es necesario, realizar un proceso de clarificación que convierta la información contenida en los requerimientos y el análisis, en datos nítidos para que el diseño pueda realizarse con normalidad. Finalmente al llegar a la fase de implementación, y cuando el diseño de los requerimientos plantea una solución basada en lógica difusa, estos requerimientos serán implementados apoyándose en los Motores de Inferencia Difusa. Aun en este punto es necesario realizar la última verificación sobre la difusidad de la información contenida, y de la misma forma, si se necesita, clarificar requerimientos, análisis y diseño de una forma nítida que permita la implementación de la funcionalidad por medios tradicionales (Figura 2).

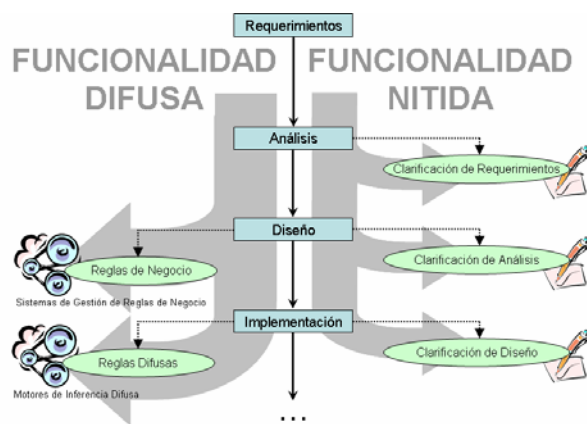


Figura 2: Método de Desarrollo de Requisitos Difusos

Los motores de inferencia difusa son herramientas matemáticas orientadas a implementar reglas difusas. Son conocidos ampliamente en sectores como la electrónica y

van muy ligados a dispositivos inteligentes de control. Como componente software son herramientas poco difundidas en el ámbito comercial, pero conocidas en el ámbito académico. Pueden encontrarse tanto en herramientas comerciales, como Matlab², o también en paquetes de libre distribución, como XFuzzy³.

Por otro lado, un motor de reglas de negocio es un software potente, robusto y caro, donde son modeladas las funcionalidades como reglas en lenguaje natural o propietario, utilizando términos de negocio acotados por cantidades específicas, las cuales pueden ser modificadas en cualquier momento, incluso en etapas de producción. Son ampliamente conocidos como complementos para herramientas de Inteligencia de Negocio, Gestores de Procesos de Negocio e Integradores.

La elección de uno u otro motor de inferencia dependerán de la arquitectura presente en la aplicación y de la posibilidad de manejar los predicados difusos como variables del sistema que cambiarán mientras éste se encuentre en producción. Si se toma la decisión de utilizar el motor de inferencia difuso, será necesario en la etapa de diseño acotar los predicados por cantidades significativas para darle coherencia al término y sus calificativos, es decir, identificar los valores límite de los predicados dentro del conjunto borroso que los contiene. Por el contrario, si es elegido el motor de reglas de negocio, esta identificación de valores puede esperar tranquilamente, incluso hasta momentos de producción, ya que estas herramientas cuentan con la funcionalidad necesaria para incluir estos acotamientos en cualquier momento.

De cualquiera de las dos formas, existirá un proceso de negociación con el cliente para acordar estos valores límites, pero estas reuniones se harán en etapas posteriores (diseño, implementación e incluso producción), lo cual será menos crítico que hacerlo en la fase de requerimientos.

4.1. BENEFICIOS DEL USO DE REQUERIMIENTOS DIFUSOS

Según [9], uno de los problemas principales con los métodos de diseño de software es que para transformar los requerimientos en modelos de diseño, era necesario tener un conjunto de requerimientos nítido, libre de ambigüedades y estable. Pero la realidad reflejaba que los requerimientos contenían generalmente conflictos, eran vagos y cambiaban con el tiempo. Esto podría contraponerse a uno de los factores de éxito identificado en el CHAOS TEN [6]: claridad de los requerimientos. Muchos proyectos fracasan porque su conjunto de

² <http://www.mathlab.com/>

³ <http://www.imse.cnm.es/Xfuzzy/>

requerimientos presenta problemas y conflictos. Pero esta es la naturaleza de los requerimientos.

Con el uso de los requerimientos difusos la clarificación de los requerimientos no es necesaria, ya que el diseño, y la implementación de estos requerimientos puede realizarse con la información difusa existente. Por supuesto que no todo requerimiento con información difusa podrá diseñarse e implementarse, pero avanzar en el ciclo de vida del requerimiento difuso podrá restringir el requerimiento lo suficiente para que al momento de volver la información vaga en nítida, se cuente con más herramientas para hacer este proceso mucho más rápido y efectivo. Los beneficios que se obtendrían con el uso de requerimientos difusos serían:

- Menor tiempo en Requerimientos: acortar el tiempo de elicitación, documentación y negociación de requerimientos, y con esto acortar el tiempo de entrega de la funcionalidad implementada. El hecho de ganar tiempo en requerimientos es evidente por la ausencia de reuniones para clarificar requerimientos, pero que este tiempo, o una parte de él, se gane al final del ciclo de vida es una asunción. Como bien puede presentarse el caso en que muchos de los requerimientos puedan ser implementados con la lógica difusa, podría presentarse el caso donde todos los requerimientos tuvieran que ser clarificados y transformar toda la información a datos nítidos. En este último caso podría no presentarse ganancia de tiempo al finalizar el ciclo de vida.
- Responsabilidad de definición nítida posterior: se cuenta con una metodología que solo especifica información nítida cuando es estrictamente necesario, y para ello cuenta con las actividades de clarificación de requerimientos, de análisis y de diseño.
- Nitidez a partir del conocimiento del negocio: con el conocimiento adquirido del negocio en el tiempo que se demora en convertir la información del requerimiento en datos nítidos, se está en capacidad de definir la información difusa sin necesidad de recurrir al cliente para preguntarlo.

5. CONCLUSIONES

La principal aportación original de este trabajo es el planteamiento de definición de un modelo de proceso de ingeniería de software basado en requerimientos con información difusa. A su vez esta metodología podrá contener estrategias de clarificación en distintas etapas del proceso de desarrollo para convertir la información difusa de los requerimientos en información nítida para su implementación. El uso de este modelo metodológico conllevará beneficios a la hora de afrontar un proceso de desarrollo, al acortar tiempos críticos en los procesos que involucran al cliente (específicamente los requerimientos)

amortizando estos tiempos en procesos donde esta participación no resulta relevante.

El mejoramiento de este modelo de trabajo para *requerimientos difusos* debe realizarse en base a experimentos en el mundo real. Su uso en un proyecto que maneje este tipo de información ayudara a identificar las carencias que el modelo pueda tener, y dar pie a nuevas interpretaciones de los términos *requerimiento difuso* y *predicado difuso*, de cara a soportar las dificultades que puedan encontrar los ingenieros de software al identificar este tipo de requerimientos.

Agradecimientos

Agradecemos el soporte del proyecto de Innovación educativa PIE 2003/7 de la UCM, el proyecto MCyT MTM2005-08982-C04-01 y el proyecto CAM Ref. 910149.

Referencias

- [1] Deb Jacobs. Requirements Engineering So Things Don't Get Ugly. *CrossTalk, The Journal of Defense Software Engineering*. Octubre 2004.
- [2] Shari Lawrence Pfleeger. Ingeniería de Software, Teoría y Práctica. *Pearson Education*. 2002.
- [3] Roger S. Pressman. Ingeniería del Software, un Enfoque Práctico. *Mc Graw Hill*. 5ª Edición. 2002.
- [4] Ian Sommerville. Ingeniería del Software. *Pearson Education*. 7ª Edición. 2005.
- [5] The Standish Group. CHAOS: A Recipe for Success. *West Yarmouth, MA: The Standish Group International, Inc*. 1999.
- [6] The Standish Group. T23E-T10E Standish Group Report. *West Yarmouth, MA: The Standish Group International, Inc*. Octubre 2000.
- [7] Lotfi A. Zadeh. Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 338-353, 1965.
- [8] Institute of Electrical and Electronic Engineers. IEEE Software Engineering Standards Collection: 1994 Edition. Washington, DC. 1994.
- [9] Noppen, Joost; Van den Broek, Pim; Aksit, Mehmet. Dealing with Fuzzy Information in Software Design Methods. *2004 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. 2004.

Control Difuso de la Tasa de Transferencia de Extremo a Extremo en Protocolos de Transporte de Internet

Federico Montesino¹

Diego R. Lopez²

Ángel Barriga¹

Santiago Sánchez-Solano¹

¹Instituto de Microelectrónica de Sevilla. Centro Nacional de Microelectrónica – CSIC
Avda. Reina Mercedes, s/n. Edif. CICA. E-41012 Sevilla
{Federico.Montesino,Angel.Barriga,Santiago.Sanchez}@imse.cnm.es

²RedIRIS, Red Española de I+D
Edif. Bronce, Plaza Manuel Gómez Moreno s/n, Planta 2. E-41012 Madrid
Diego.Lopez@rediris.es

Resumen

La dinámica del tráfico de extremo a extremo en Internet es un problema complejo para el cual los modelos disponibles son, en el mejor de los casos incompletos. Esta comunicación describe nuevos mecanismos para regulación de la tasa de transferencia de extremo a extremo en la capa de transporte por medio de sistemas difusos. Se describen una generalización basada en lógica difusa de los mecanismos de control de flujo y congestión de TCP (Transport Control Protocol), el diseño de un regulador difuso basado en mecanismo de ventana para TCP, así como la metodología de diseño empleada para simular e implementar de manera experimental el sistema. Se resume un estudio comparativo del regulador difuso presentado frente a los mecanismos tradicionales. El regulador difuso resulta útil como enfoque de modelado y proporciona significativas mejoras de prestaciones respecto a un conjunto de criterios.

Palabras Clave: TCP, Control difuso, Inferencia difusa, Control de flujo, Control de congestión, Protocolo de transporte, Ventana de congestión.

1. Introduction

La dinámica del tráfico de paquetes de extremo a extremo en Internet es un problema complejo para el cual los modelos disponibles son, en el mejor de los casos, incompletos [7]. Dos áreas de investigación en este ámbito reciben amplia atención actualmente: protocolos de transporte para redes de altas prestaciones, y soluciones para nuevos servicios y aplicaciones.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por los proyectos TEC2005-04359/MIC del Ministerio de Educación y Ciencia y TIC2006-635 de la Junta de Andalucía.

Los esquemas de regulación de tráfico desplegados actualmente en Internet (así como las alternativas propuestas) siguen uno de los dos enfoques siguientes [6]: a) control distribuido entre los nodos finales, y b) planificadores de colas en routers o nodos intermedios. Por ello, la regulación de flujos de paquetes entre fuente y destino puede involucrar a todos los nodos en el camino de extremo a extremo y se realiza tanto en cada uno de los saltos entre nodos como entre los extremos de las conexiones. Así, se tiene un sistema complejo formado por múltiples bucles realimentados cuyas interacciones son difíciles de modelar.

Ambos enfoques de regulación de tráfico se pueden redefinir en términos de sistemas difusos [12]. Mientras que existen diversas propuestas de reguladores difusos para colas de paquetes en routers de Internet [11], el único trabajo publicado sobre la aplicación de sistemas difusos a la regulación de tráfico de extremo a extremo que conocemos [3] plantea un estudio preliminar mediante simulación off-line basado en un controlador Takagi-Sugeno aplicado a algunos de los mecanismos básicos de TCP. Asimismo, se han propuesto sistemas difusos para mejorar los esquemas de control de congestión actuales en redes inalámbricas [14, 4].

En esta comunicación estudiamos el control de la tasa de transferencia de extremo a extremo. Más específicamente, describimos un regulador difuso que generaliza los mecanismos de control de flujo y congestión basados en ventana de TCP. Así, pretendemos proporcionar una reinterpretación de los mecanismos actuales, que aporta diversas mejoras en cuanto a prestaciones e interpretabilidad.

2. Generalización del Control de Tráfico de Extremo a Extremo Basado en Ventana

Existen diversos esquemas de control de la tasa de transferencia en protocolos de transporte de Inter-

net [7], de entre los cuales destacan los basados en ventana y los basados en ecuaciones. El protocolo de transporte predominante en la Internet actual, TCP, define mecanismos de regulación basados en ventana para implementar funciones de control de flujo y congestión.

Los mecanismos de control de la tasa de transferencia de TCP comprenden cuatro algoritmos fuertemente acoplados entre sí: slow start, congestion avoidance, fast retransmit y fast recovery, definidos y ampliados de manera progresiva durante las últimas dos décadas [1, 9]. Por simplicidad, consideraremos en primer lugar la versión simplificada de los mecanismos de control de flujo y congestión de TCP que se muestra en el algoritmo 1.

Algoritmo 1 Esquema AIMD (Additive Increase Multiplicative Decrease) Básico

```

if congestion then
     $w_i = d w_{i-1}, \quad (d < 1)$ 
else
     $w_i = w_{i-1} + u, \quad (u \ll w_{max})$ 
end if

```

Donde w_i son los valores que toma consecutivamente la ventana de congestión, definida como un valor de referencia que limita la cantidad de datos sin recibo acusado que una fuente de datos de una conexión TCP puede transmitir. w_{max} es el producto retardo - ancho de banda del camino de extremo a extremo. El algoritmo trata de reaccionar con rapidez ante situaciones de congestión. Cuando la red está congestionada, se adopta una ley de actualización de la ventana de congestión de tipo multiplicativo, lo que bajo condiciones de congestión persistente lleva a una reducción exponencial de la ventana de congestión.

Si no se detecta congestión, se adopta una ley de actualización de la ventana de congestión de tipo aditivo. Pese a la efectividad de este esquema bajo un gran rango de condiciones [9], bajo determinadas condiciones puede llevar a un pobre aprovechamiento de los recursos de la red, especialmente en redes de altas prestaciones, para las que en la actualidad existe una gran actividad de investigación en protocolos de transferencia eficientes, muchos de los cuales se han definido como variaciones o ampliaciones de TCP [15, 6].

En este contexto, las interacciones entre los diferentes componentes de la red conforman un sistema complejo caracterizado por una dinámica altamente no lineal que dificulta el desarrollo, simulación y prueba de esquemas de regulación de tráfico.

El algoritmo AIMD básico distingue dos etapas en la evolución de la ventana de congestión. Cada etapa

corresponde a un estado de red claramente identificado que lleva a la aplicación de una ley de actualización de la ventana de congestión específica [9]. No obstante, es común que el estado real de la red no se pueda definir ni conocer de manera unívoca. Es decir, la lógica binaria descrita no describe el sistema de manera correcta en aquellas situaciones en que el estado de la red no se corresponde con ninguna de las dos etapas consideradas. En casos intermedios, la respuesta del sistema es demasiado agresiva o demasiado conservadora. Podemos formular una primera generalización del algoritmo AIMD del siguiente modo [3]:

$$w_{i+1} = w_i + \alpha_D f_D(w_i) + \alpha_I f_I(w_i) \quad (1)$$

Donde f_D y f_I son funciones que establecen las leyes respectivas de incremento y decremento de la ventana de congestión, es decir, f_I es una generalización de la ley aditiva, mientras que f_D generaliza la ley multiplicativa. α_D y α_I se pueden considerar valores de certeza que representan en qué grado se encuentra el sistema en estado de congestión (decremento de la ventana) o sin congestión (incremento de la ventana). Ambos valores se pueden definir de manera mutuamente excluyente, $\alpha_D, \alpha_I \in [0, 1]$; $\alpha_D = 1 - \alpha_I$.

3. Diseño de un Regulador Difuso de Tráfico de Extremo a Extremo Basado en Ventana

De la ecuación 1 se desprende la posibilidad de gestionar el proceso de actualización de la ventana de congestión mediante sistemas de inferencia difusa. En lugar de considerar que la red se encuentra en un estado de entre un conjunto de estados mutuamente excluyentes, consideraremos que la red puede encontrarse simultáneamente en varios estados con un grado de certeza variable. El grado de certeza se inferirá mediante bases de reglas difusas.

La definición completa del esquema de control de flujo y congestión de TCP [1] comprende cuatro algoritmos (slow start, congestion avoidance, fast recovery y fast retransmit) para los cuales se define un conjunto de aproximadamente 20 leyes o reglas de actualización de la ventana de congestión. La definición detallada de estas reglas y su redefinición en términos de sistemas difusos se puede consultar en [10].

En el esquema AIMD estándar actual de TCP se define el parámetro *ssthresh*, que se emplea como valor umbral para seleccionar las etapas slow start y congestion avoidance según se muestra en el algoritmo 2. Por otra parte, las etapas fast retransmit y fast recovery se activan cuando se detectan acuses de recibo repetidos que indican posibles pérdidas de paquetes.

Algoritmo 2 Esquema AIMD estándar

```

if  $w < ssthresh$  then
    Realizar slow start
else if  $w \geq ssthresh$  then
    Realizar congestion avoidance
end if

```

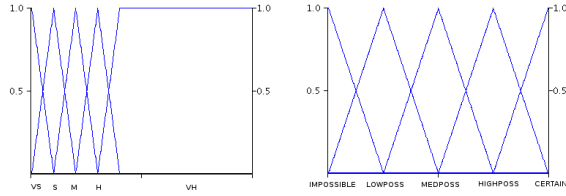


Figura 1: Funciones de pertenencia de $Tloss$ y $Tconfidence$

En el esquema ampliado mediante sistemas difusos que proponemos, se definen tres fases de control de la ventana de congestión (para slow start, congestion avoidance y fast retransmit/fast recovery). Puesto que el estado real de la red se conoce con cierto grado de incertidumbre, se considera que todos los estados se dan al mismo tiempo con diversos grados de certeza. Tres sistemas de inferencia difusa proporcionan como salidas estimaciones del grado en que se tiene la certeza de que la red se encuentra en cada uno de los tres estados definidos.

Las entradas consideradas son las siguientes: w , valor actual de la ventana de congestión; $ssthresh$, valor umbral de entrada en la etapa slow start; $loss$, porcentaje de pérdidas acumulado durante la conexión; rtt , tiempo de ida y vuelta de paquetes de extremo a extremo; y $timeout$, activa si ha expirado algún temporizador que indique que se ha de retransmitir un paquete por no haberse recibido acuse de recibo.

La figura 1 muestra la definición de etiquetas lingüísticas para la entrada $loss$ y la salida de los sistemas, $confidence$, para la que se definen 7 etiquetas para grados de certeza crecientes entre imposible (IM) y cierto (CE). Se han definido etiquetas para los rangos de valores considerados relevantes en los análisis de prestaciones de TCP y otros protocolos relacionados [15, 4].

Las bases de reglas de los sistemas de inferencia del estado slow start (SlowStartConfidence) y fast retransmit/fast recovery (FRFRConfidence) se muestran en las tablas 1 y 2, respectivamente. La base de reglas del sistema de inferencia del estado congestion avoidance (CongestionAvoidance) emplea las mismas entradas que SlowStartConfidence. Véase [10] para detalles adicionales que no mostramos por restricciones de

Cuadro 1: Base de reglas SlowStartConfidence

<i>timeout</i>	<i>w</i>	<i>ssthresh</i>	<i>ss - w</i>	<i>loss</i>	<i>rtt</i>	<i>conf.</i>
VS	x	x	x	x	x	HI
S	x	x	x	x	x	HI
M	x	x	x	x	x	ME
H	x	x	x	x	x	ME
VH	x	x	x	x	x	IM
x	IW	x	x	x	x	CE
x	S	x	x	x	x	LO
x	M	x	x	x	x	LO
x	H	x	x	x	x	LO
x	VH	x	x	x	x	IM
x	x	VS	x	x	x	IM
x	x	S	x	x	x	LO
x	x	M	x	x	x	LO
x	x	H	x	x	x	LO
x	x	VH	x	x	x	ME
x	x	x	VS	x	x	IM
x	x	x	S	x	x	LO
x	x	x	M	x	x	ME
x	x	x	H	x	x	HI
x	x	x	VH	x	x	CE
x	x	x	x	VH	VH	IM
x	x	x	x	VH	H	LO
x	x	x	x	H	VH	LO
x	x	x	x	VS	VS	ME

Cuadro 2: Base de reglas FRFRConfidence

<i>timeout</i>	<i>ssthresh - w</i>	<i>loss</i>	<i>rtt</i>	<i>conf.</i>
VS	x	x	x	IM
S	x	x	x	IM
M	x	x	x	IM
H	x	x	x	IM
VH	x	x	x	CE
x	VS	x	x	IM
x	S	x	x	LO
x	M	x	x	ME
x	H	x	x	HI
x	VH	x	x	CE
x	x	VH	VH	CE
x	x	VH	H	HI
x	x	H	VH	LO
x	x	M	H	HI

espacio.

Las reglas de actualización de $ssthresh$ y w empleadas en las implementaciones comunes de TCP se mantienen. Sin embargo, dado que el estado de la red es en general incierto, todas las reglas se evalúan simultáneamente y se aplican en un grado variable dado por los tres sistemas de inferencia difusa. Las reglas asociadas a las fases slow start y congestion avoidance son evaluadas en todo momento, mientras que las asociadas a la fase fast retransmit/fast recovery son evaluadas cuando se detectan paquetes de acuse de recibo duplicados. Así, mediante estos tres sistemas se puede describir, utilizando reglas lingüísticas, estados de la red cuya definición formal puede alcanzar una gran complejidad y no ser viable.

En el caso más sencillo, los tres conjuntos de reglas se combinan como sigue. Si denotamos por μ_{ss} , μ_{ca} y μ_{FRFR} las salidas de los tres sistemas de inferencia difusa, y por f_{ss} , f_{ca} y f_{FRFR} los valores dados por las reglas de actualización estándar (que podemos ge-

neralizar como μ_i y f_i ($1 \leq i \leq n$) para un número variable n de estados de red (o etapas del algoritmo de regulación de transferencia, o conjuntos de reglas de actualización)), definimos el grado de certeza de un estado de la red o etapa de control como:

$$c_i = \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^n \mu_j}$$

Donde las bases de reglas deben verificar $\sum_{j=1}^n \mu_j > 0$. La regla final de actualización de w se calcula como la media ponderada de las reglas asociadas a todas las posibles etapas de control (de manera análoga a la ecuación 1):

$$w_{i+1} = w_i + \sum_{i=1}^n c_i f_i(w_i, ssthresh)$$

En el caso que describimos, $n = 3$. De este modo, se combinan, empleando reglas lingüísticas, leyes de actualización de la ventana de congestión que han mostrado su efectividad bajo ciertas condiciones. Los conjuntos de reglas lingüísticas pueden llevar a soluciones de compromiso entre condiciones complejas. Por ejemplo, algunas de las reglas asociadas a la etapa fast retransmit normalmente implican una reducción drástica de la ventana de congestión. Cuando algunos parámetros tomados como entradas de los sistemas de inferencia indican que la red está congestionada, tales reglas de actualización son adecuadas. Sin embargo, cuando la red no parece estar congestionada, un comportamiento más agresivo del regulador puede mejorar las prestaciones en términos de tasa de transferencia y velocidad de respuesta a problemas transitorios.

4. Metodología de desarrollo y cadena de herramientas

Como resultado de más de una década de investigación sobre la implementación digital de sistemas difusos, el IMSE ha desarrollado y consolidado metodologías de diseño [2] y una cadena de herramientas de CAD [13] que cubren el flujo de diseño de sistemas difusos. Con el entorno Xfuzzy como base, se han articulado una metodología y una cadena de herramientas adaptada al desarrollo de módulos de inferencia difusa para regulación de tráfico de Internet, según se esquematiza en la figura 2. Así, queda cubierto todo el proceso de desarrollo, desde la etapa inicial de descripción mediante un lenguaje de alto nivel hasta su implementación como componentes software.

Las etapas posteriores a la especificación se han adaptado al diseño de reguladores de tráfico del siguiente

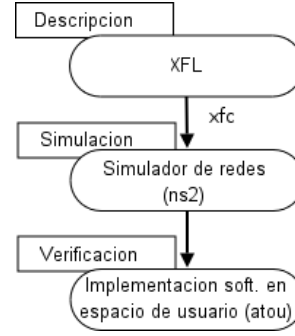


Figura 2: Flujo de diseño de sistemas difusos

modo. Para simular el procesamiento y control de tráfico de red se emplea el simulador ns-2 [8], un simulador discreto dirigido por eventos que soporta una extensa variedad de protocolos y sistemas de colas, así como esquemas de rutado y de acceso al medio, y reproduce el comportamiento de la pila de protocolos completa de cada nodo de una red simulada. Los reguladores difusos se integran dentro de ns-2 como componentes implementados en C. La verificación se realiza mediante implementaciones del protocolo TCP en espacio de usuario, en concreto se ha empleado la herramienta atou [5], ampliada según se describe en el apartado 6.

5. Resultados de Simulación

La simulación de los sistemas difusos se ha realizado mediante el simulador ns-2 [8], el estándar de facto dentro la comunidad de investigadores en protocolos Internet. Mostramos resultados de una comparación entre TCP Reno [1] (la versión de TCP más extendida actualmente en Internet), HighSpeed TCP [6] y el sistema difuso descrito en esta comunicación, que denominaremos Fuzzy TCP.

En la figura 3 se compara la evolución de la ventana de congestión para los tres sistemas, mientras que la figura 4 contrasta la evolución de la tasa de transferencia. En el escenario de red simulado se establecen conexiones TCP durante 10 segundos a través de caminos de extremo a extremo con 10 nodos intermedios, cuello de botella de 100 Mbps de ancho de banda en los bordes y 400 ms de tiempo de ida y vuelta medio. Se simulan asimismo pérdidas aleatorias en uno de los nodos intermedios, y se introduce tráfico cruzado con diversas fuentes, caminos y tiempos de ida y vuelta, consistente en un 10 % de tráfico UDP y 90 % de tráfico TCP Reno.

Como conclusión general, la versión difusa de TCP muestra mayor robustez ante pérdidas. Por ello, la tasa de transferencia final se incrementa (aproximadamente en un 12 % y 11 % frente a TCP Reno y HighSpeed

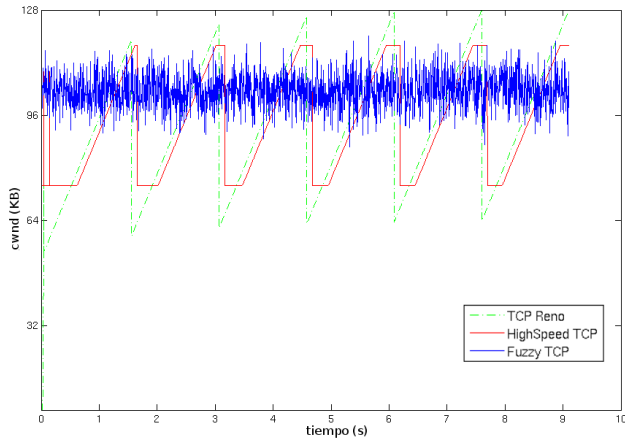


Figura 3: Evolución de la ventana de congestión (simulación)

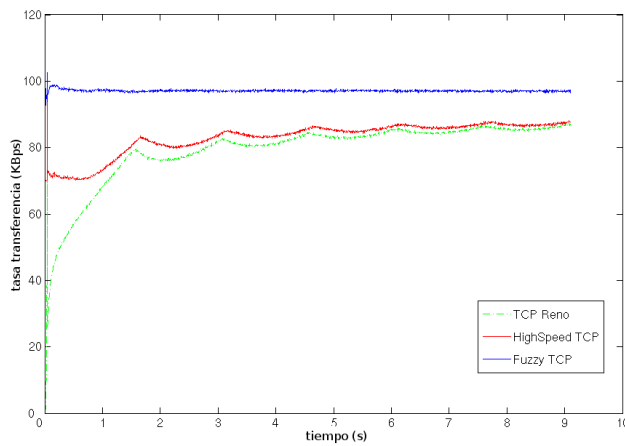


Figura 4: Evolución de la tasa de transferencia (simulación)

TCP, respectivamente). Otras simulaciones realizadas en un conjunto de escenarios representativo y con condiciones de congestión elevada confirman que el regulador difuso reacciona de manera rápida y adecuada. Asimismo, se satisfacen los principios de equidad [15] considerados comunmente en el diseño de esquemas de control de congestión de extremo a extremo en Internet.

6. Resultados de Implementación

Se ha desarrollado una implementación experimental de TCP con ampliaciones difusas como implementación en espacio de usuario (en lugar de en el núcleo del sistema operativo). De este modo, la flexibilidad de experimentación es mayor. La herramienta realizada está basada en la utilidad «Almost TCP over UDP» (atou) [5]. Se han efectuado los cambios necesarios en atou para incorporar el esquema de inferencia difusa

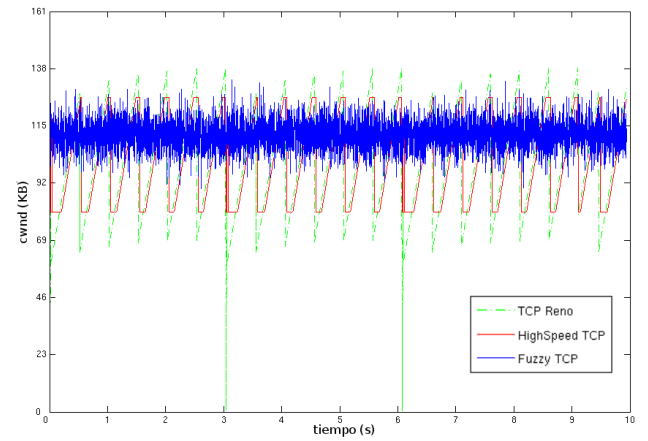


Figura 5: Evolución de la ventana de congestión (implementación)

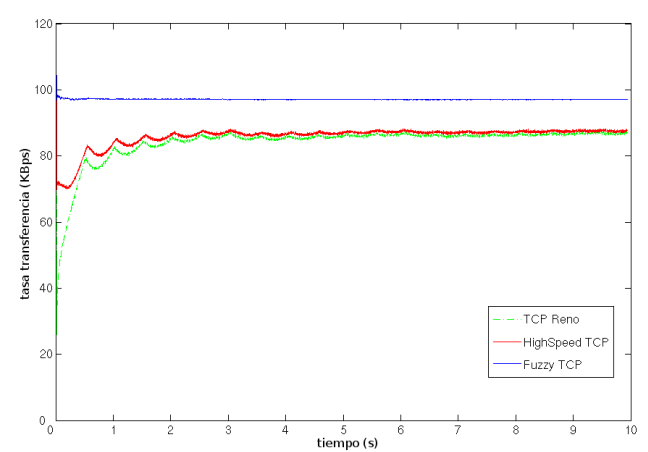


Figura 6: Evolución de la tasa de transferencia (implementación)

presentado anteriormente. Estos sistemas se generaron como código C empleando el entorno Xfuzzy. La herramienta atou modificada genera registros detallados de eventos y trazas de paquetes con nivel de detalle configurable.

Se han introducido además modificaciones para activar y desactivar opciones de control y algoritmos complementarios de TCP. De este modo, se dispone de un entorno flexible para experimentar con implementaciones de TCP significativamente modificadas entre dos nodos cualquiera de Internet.

Mostramos una comparación de las tres variantes de reguladores de TCP comparadas anteriormente mediante simulación. Las figuras 5 y 6 comparan la evolución de la ventana de congestión y la tasa de transferencia. El escenario de red es el siguiente: dos nodos transfieren datos durante 10 segundos; el camino de la conexión TCP contiene 5 nodos intermedios. El cue-

llo de botella del camino es 100 *Mbps* y el tiempo de ida y vuelta medio es 110 *ms* aproximadamente. Así, se confirman los resultados de simulación en cuanto a las mejoras en robustez y volumen de transferencia. La mejora global de la tasa de transferencia es de aproximadamente un 15 % y un 13 % frente a TCP Reno y HighSpeed TCP, respectivamente.

7. Conclusiones

Se ha presentado una reinterpretación de los mecanismos de control de flujo y congestión de TCP en términos de lógica difusa. El modelo difuso descrito da una perspectiva basada en reglas de los esquemas de regulación de tráfico actuales, constituyendo una primera aportación en la aplicación de sistemas difusos a la inferencia de estados de la red en nodos finales.

Los resultados de simulación e implementación muestran que el sistema presentado mejora las prestaciones respecto a un conjunto de criterios que incluye velocidad de convergencia a la tasa de transferencia alcanzable, volumen final de transferencia y magnitud de las oscilaciones en torno a la tasa estabilizada para transferencias prolongadas. El enfoque seguido facilita asimismo la definición de soluciones de compromiso aptas para diferentes requisitos de usuario.

Como continuación de la línea de desarrollo iniciada aquí consideramos la incorporación de entradas adicionales y el empleo de técnicas de aprendizaje supervisado con objeto de refinar las reglas a priori definidas.

Referencias

- [1] M. Allman, V. Paxson, and W. Stevens. TCP Congestion Control. RFC 2581, Internet Engineering Task Force, Network Working Group, 1999. status: Proposed Standard.
- [2] A. Cabrera, S. Sánchez-Solano, P. Brox, A. Barriga, and R. Senhadji. Hardware/Software Code-sign of Configurable Fuzzy Control Systems. *Applied Soft Computing*, 4(3):271–285, Dic. 2004.
- [3] P. Carbonell, J. Zhong-Ping, and S. Panwar. Fuzzy TCP: A Preliminary Study. In *15th IFAC World Congress*, pages 21–26, Barcelona, Spain, Jul. 2002.
- [4] L. Chang and I. Marsic. Fuzzy Reasoning for Wireless Awareness. *International Journal of Wireless Information Networks*, 8 (1):15–26, Ene. 2001.
- [5] T. Dunigan, F. Fowler, et al. Almost TCP over UDP (atou). Oak Ridge National Laboratory, U.S Department of Energy, Feb. 2006. <http://www.csm.ornl.gov/~dunigan/net100/atou.html>.
- [6] S. Floyd. HighSpeed TCP for Large Congestion Windows. RFC 3649, Internet Engineering Task Force, Network Working Group, Dic. 2003. Category: Experimental.
- [7] S. Floyd and E. Kohler. Internet Research Needs Better Models. In *ACM SIGCOMM First Workshop on Hot Topics in Networks (HotNets-I)*, Princeton, New Jersey, USA, Oct. 2002.
- [8] Information Sciences Institute. University of Southern California, Viterbi School of Engineering. The Network Simulator – ns-2. <http://www.isi.edu/nsnam/ns/>, Abr. 2006.
- [9] V. Jacobson and M. J. Karels. Congestion Avoidance and Control. *ACM Computer Communication Review SIGCOMM '88 Symposium: Communications Architectures and Protocols*, 18(4):314–329, Ago. 1988.
- [10] F. Montesino, D. R. Lopez, A. Barriga, and S. Sánchez-Solano. Fuzzy End-to-End Rate Control for Internet Transport Protocols. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, Vancouver, Canada, Jul. 2006.
- [11] F. Montesino, D. R. Lopez, A. Barriga, and S. Sánchez-Solano. Intelligent Scheduling of Aggregate Traffic in Internet Routers by Means of Fuzzy Systems. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, Paris, France, Jul. 2006.
- [12] F. Montesino, D. R. Lopez, A. Barriga, and S. Sánchez-Solano. Sistemas Difusos para Control de Congestión y Calidad de Servicio en Internet. In *XII Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF '2004)*, Jaén, España, Sep. 2004.
- [13] F. Moreno-Velo, I. Baturone, S. Sánchez-Solano, and A. Barriga. Rapid Design of Fuzzy Systems With Xfuzzy. In *FUZZ-IEEE'03. The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 342–347, Mayo 2003.
- [14] Ruy de Oliveira and Torsten Braun. A Delay-based Approach Using Fuzzy Logic to Improve TCP Error Detection in Ad Hoc Networks. In *IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, Atlanta, USA, Mar. 2004.
- [15] J. Wang, D. X. Wei, and S. H. Low. Modelling and Stability of FAST TCP. In *24th IEEE INFOCOM*, pages 938–948, Miami, FL, USA, Mar. 2005.

Reguladores Difusos de Tráfico en Disciplinas de Colas de Routers de Internet

Federico Montesino¹

Ángel Barriga¹

Diego R. Lopez²

Santiago Sánchez-Solano¹

¹Instituto de Microelectrónica de Sevilla. Centro Nacional de Microelectrónica – CSIC
Avda. Reina Mercedes, s/n. Edif. CICA. E-41012 Sevilla
{Federico.Montesino,Angel.Barriga,Santiago.Sanchez}@imse.cnm.es

²RedIRIS, Red Española de I+D
Edif. Bronce, Plaza Manuel Gómez Moreno s/n, Planta 2. E-41012 Madrid
Diego.Lopez@rediris.es

Resumen

Diseñar algoritmos de gestión o regulación de colas que puedan tener aplicación genérica en Internet plantea numerosas dificultades. Además, en el marco de las disciplinas de colas, el conjunto de requisitos, criterios de evaluación de prestaciones y objetivos de control relevantes es mayor. Esta comunicación describe sistemas difusos reguladores de tráfico best-effort en disciplinas de colas. Se resume la metodología de desarrollo de sistemas difusos seguida y la cadena de herramientas de diseño asociada. Se presenta el diseño e implementación de un regulador difuso de tráfico para disciplinas class based queueing (CBQ). Se resume una evaluación comparativa, realizada mediante simulación, del regulador difuso respecto a reguladores tradicionales empleados en las redes actuales. Los resultados de simulación muestran que el regulador difuso mejora las prestaciones respecto a varios criterios.

Palabras Clave: Disciplina de colas, Control difuso, Calidad de servicio, Regulación de tráfico, Class based queueing (CBQ), Clases de servicio (CoS), Tráfico best-effort, Gestión de colas.

1. Introducción

El desarrollo de mecanismos de regulación de tráfico de red que satisfagan los requisitos de la creciente diversidad de tecnologías, aplicaciones y servicios Internet supone un importante problema de investigación en la actualidad. De manera general, la dinámica del tráfico

de Internet es un tema de investigación abierto y de complejidad creciente [15].

Los requisitos de calidad de servicio así como los patrones de tráfico asociados a servicios y aplicaciones emergentes son difíciles de caracterizar y demandan profundos avances en los esquemas de control de flujo y congestión actuales. Debido a la naturaleza de tales problemas: complejidad, dificultad de desarrollar soluciones analíticas realistas así como información incompleta e inexacta, una de las alternativas para su estudio es el empleo de sistemas inteligentes basados en lógica difusa y posiblemente otras técnicas de soft computing.

Los esquemas de regulación de tráfico desplegados actualmente en Internet (así como las alternativas propuestas) siguen uno de los dos enfoques siguientes [2]: control distribuido o planificadores de colas en routers. Por ello, la regulación de los flujos de paquetes de datos entre emisores y receptores se realiza tanto de extremo a extremo como en los nodos que componen el camino entre emisor y receptor, pudiendo involucrar a todos ellos. Esto lleva a un sistema con interacciones complejas compuesto por múltiples bucles realimentados.

Los mecanismos de regulación de tráfico desplegados en la actualidad comparten diversas limitaciones como consecuencia de propiedades intrínsecas a tanto el proceso de control como la dinámica del tráfico de Internet, tales como resolución limitada, inexactitud, incertidumbre e información incompleta.

Los sistemas basados en lógica difusa destacan por su capacidad de abordar tales restricciones en numerosas áreas de la ingeniería. Además, la implementación hardware de sistemas difusos constituye un campo bien establecido de la microelectrónica [1], lo que los convierte en una solución factible para controlar grandes volúmenes de tráfico en tiempo real. En esta comunicación, nos centraremos en el diseño de reguladores de tráfico agregado en routers que implementan discipli-

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por los proyectos TEC2005-04359/MIC del Ministerio de Educación y Ciencia y TIC2006-635 de la Junta de Andalucía.

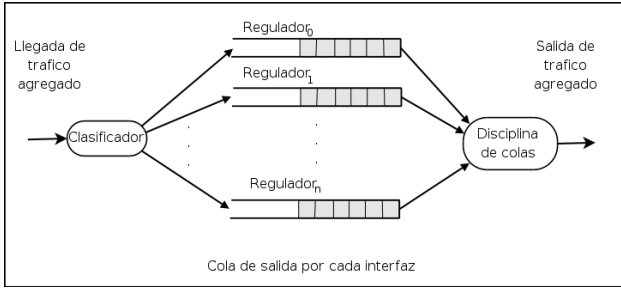


Figura 1: Esquema de una disciplina de colas

nas de colas.

2. Ampliaciones difusas para disciplinas de colas

El esquema de planificación de colas de paquetes que predomina actualmente en Internet es un esquema FI-FO pasivo sin clases de servicio (conocido como drop-tail). Sin embargo, se están desarrollando y promoviendo esquemas activos de gestión de colas [2, 16] que puedan proporcionar calidad de servicio, servicios diferenciados, o penalizar flujos irregulares, entre otras funciones demandadas. Las restricciones de calidad de servicio, cuando están implementadas, se aplican normalmente en los bordes de la red. Los equipos orientados a tales aplicaciones [10] normalmente integran soporte para calidad de servicio basada en disciplinas de colas.

La figura 1 muestra el esquema general de una disciplina de colas. Respecto a la gestión de colas, estos sistemas constan de componentes pertenecientes a dos categorías:

- Una disciplina de colas (o planificador), que selecciona paquetes entre los disponibles en un conjunto de colas.
- Reguladores de tráfico, que ordenan y/o calculan el instante en que están disponibles los paquetes dentro de cada una de las colas.

Algunos de los esquemas de disciplinas de colas más comunes son [6] WFQ (weighted fair queueing), WRR (weighted round robin) y CBQ (class based queueing). CBQ destaca por su flexibilidad y la disponibilidad de implementaciones en los núcleos de sistemas operativos de propósito general así como en simuladores de redes. En los próximos apartados, describiremos un regulador desarrollado en el contexto de las disciplinas de colas de tipo CBQ.

En una configuración CBQ, el conjunto de colas empleado para planificar los paquetes salientes está dis-

puesto en una estructura de clases. Las clases se estructuran siguiendo una jerarquía arborescente en la que se pueden emplear reguladores individualizados para cada cola.

Aunque se han propuesto diversos esquemas de gestión activa de colas para implementar reguladores de tráfico [7], las propiedades dinámicas de los agregados de tráfico [9] (tales como autosimilitud y elevada variabilidad en múltiples escalas temporales) dificultan la estabilización de las colas de paquetes. Existen actualmente numerosos retos en el ajuste de esquemas de gestión de colas en entornos reales, y no se ha encontrado ninguna solución con aceptación generalizada.

Algunos resultados recientes proponen y muestran la utilidad del empleo de técnicas de control difuso para planificar colas de paquetes [5], proporcionar servicios diferenciados [16] y regular tráfico best-effort [12]. Sin embargo, no tenemos conocimiento de ningún trabajo publicado en el ámbito de las disciplinas de colas. En éste, cabe considerar el diseño de sistemas de inferencia difusa tanto para tareas de clasificación y selección de paquetes (esto es, esquemas de disciplinas de colas) como para regulación de tráfico en el marco de una disciplina de colas. En esta comunicación, exploramos la segunda opción dentro del contexto de las disciplinas de tipo CBQ.

3. Metodología de desarrollo y cadena de herramientas

Como resultado de más de una década de investigación sobre la implementación digital de sistemas difusos, el IMSE ha desarrollado y consolidado metodologías [3] y herramientas de CAD [13] que cubren el flujo de diseño de sistemas difusos. Con el entorno Xfuzzy como base, se han articulado una metodología y una cadena de herramientas adaptada al desarrollo de módulos de inferencia difusa para regulación de tráfico de Internet, según se esquematiza en la figura 2.

El proceso de diseño queda cubierto completamente, desde la descripción inicial hasta la implementación tanto software como hardware. La primera etapa de desarrollo (descripción) se basa en un lenguaje de especificación de sistemas difusos de alto nivel: XFL [14]. Entre otras opciones, las especificaciones XFL se pueden traducir directamente a código C o VHDL.

Las siguientes etapas se han adaptado al control de tráfico del siguiente modo. Para simular el procesamiento y control de tráfico de red se emplea el simulador ns-2 [8], un simulador discreto dirigido por eventos que soporta una extensa variedad de protocolos, sistemas de colas así como esquemas de rutado y de acceso al medio, y reproduce el comportamiento de la pila de

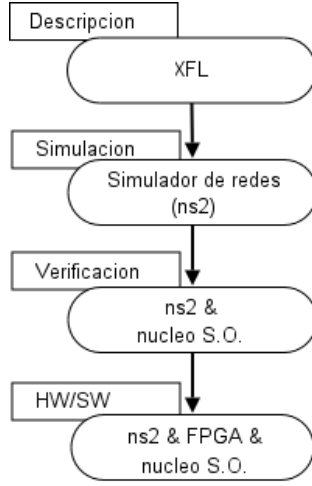


Figura 2: Flujo de diseño de sistemas difusos

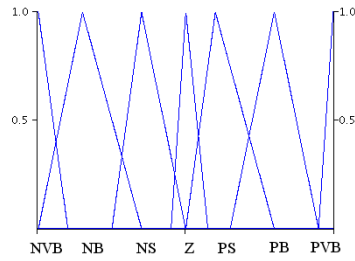


Figura 3: Funciones de pertenencia de Te_i

protocolos completa de cada nodo de una red simulada. Los reguladores difusos se integran dentro de ns-2 como componentes implementados en C. La verificación de las implementaciones software se realiza sobre reguladores implementados en el núcleo de sistemas operativos para arquitecturas de propósito general, en particular FreeBSD y Linux.

4. Regulador difuso de tráfico best-effort

En este apartado describimos el diseño de FBE-CBQ (fuzzy best-effort CBQ), un sistema de inferencia difusa de tipo Mamdani que implementa un regulador de tráfico para colas de tráfico de tipo best-effort en el contexto de las disciplinas de colas de tipo CBQ.

Se definen dos entradas y una salida. La entrada e_i es una medida de la desviación del número de paquetes actualmente en la cola respecto a un valor de referencia, mientras que la entrada e_{i-1} es la desviación registrada en el intervalo inmediatamente anterior. La figura 3 muestra un esquema de las funciones de pertenencia definidas para la entrada e_i .

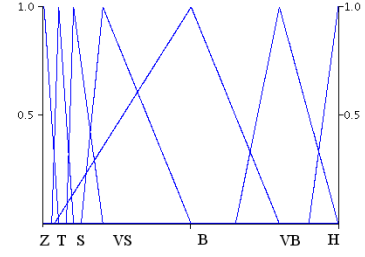


Figura 4: Funciones de pertenencia de TP_i

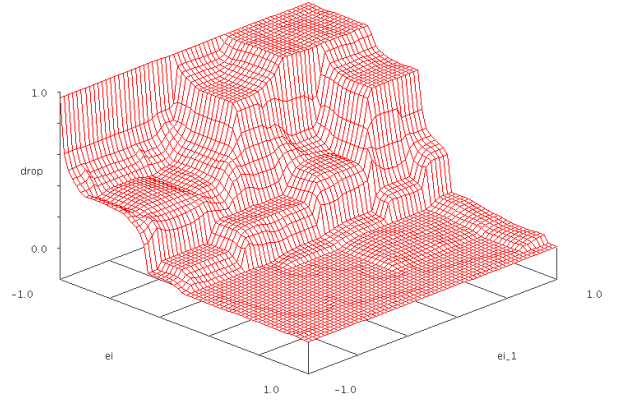


Figura 5: Superficie de control FBE-CBQ

La salida del sistema, p_i , se define como un valor de probabilidad de marcado del siguiente paquete que se ha de retransmitir. En este caso (al igual que en los esquemas de gestión activa de colas con mayor aceptación actualmente en la comunidad de investigadores de Internet) la política de marcado es tal que los paquetes marcados se eliminan de la cola. La figura 4 esquematiza las funciones de pertenencia definidas para el tipo de la salida, TP_i .

La tabla 1 muestra la base de reglas de FBE-CBQ. La superficie de control resultante se representa en la figura 5. Se definen 7 términos lingüísticos para ambas entradas, en el rango entre NVB a PVB, para diferencias crecientes. Para la salida, se definen 7 términos lingüísticos, asociados a probabilidades en el rango de 0 a 1; por orden creciente: Z, T, VS, S, B, VB y H.

Cuadro 1: Base de reglas FBE-CBQ.

p_i		e_{i-1}						
e_i	NVB	NVB	NB	NS	Z	PS	PB	PVB
	NVB	H	H	H	H	H	H	H
	NB	B	B	B	VB	VB	H	H
	NS	T	VS	S	S	B	VB	VB
	Z	Z	Z	Z	T	VS	S	B
	PS	Z	Z	Z	Z	T	T	VS
	PB	Z	Z	Z	Z	Z	Z	T
	PVB	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

Con objeto de simplificar la definición y facilitar el uso de técnicas de implementación eficientes, sólo se emplean funciones de pertenencia de tipo triangular y trapezoidal. Se sigue un modelo de inferencia de tipo Mamdani, empleándose el centro de las medias como método de defuzzificación. Las funciones de pertenencia se han ajustado atendiendo a valores de prestaciones considerados en estudios de medida de tráfico de Internet recientes [15].

5. Analisis de prestaciones

El regulador difuso descrito en los apartados anteriores se ha implementado en el simulador de redes ns-2 y la implementación de CBQ del sistema ALTQ [6] incluido en los núcleos de FreeBSD recientes. Resumimos los resultados de un estudio comparativo de prestaciones realizado mediante el simulador ns-2 sobre reguladores de tráfico tradicionales frente al regulador difuso propuesto. Lo que sigue es un resumen de resultados obtenidos mediante el regulador FBE-CBQ comparados con resultados obtenidos mediante un regulador RED [6] en un escenario de simulación que reproduce una configuración de red típica en la que las disciplinas de colas y los reguladores de tráfico pueden tener un impacto directo en las prestaciones de la red observada por usuarios finales.

Se ha considerado el siguiente escenario de red: se analiza el comportamiento del planificador de tráfico de un router que reproduce un punto de acceso a campus (donde las configuraciones de redes actuales llevan normalmente a altos grados de degradación de prestaciones desde la perspectiva de los usuarios finales [4]). El escenario completo considera enlaces de mayor escala, regionales, nacionales e internacionales, conteniendo caminos de extremo a extremo de hasta 16 nodos de longitud.

Los modelos de generación de tráfico empleados siguen estudios recientes [15] con objeto de generar tráfico con alto grado de verosimilitud en los routers analizados, atendiendo especialmente al grado de multiplexión estadística. En particular, se ha integrado tráfico no TCP y sin respuesta a congestión. En el router analizado, se ha definido una disciplina de colas CBQ con dos clases: una primera para tráfico de tiempo real (con mayor prioridad), y una segunda para tráfico sin restricciones temporales (con menor prioridad). La cola de tráfico de tiempo real se gestiona mediante un regulador TBF (token bucket flow), mientras que la segunda cola se gestiona mediante un regulador FBE-CBQ.

La comparación de prestaciones entre los reguladores RED y FBE-CBQ se estructura en términos de las siguientes métricas: tamaño de las colas, volumen de transferencia y distribución del retardo de paquetes. Se

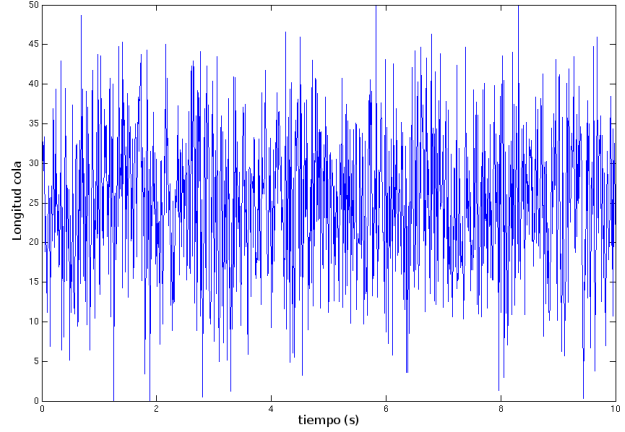


Figura 6: Longitud de la cola (regulador RED)

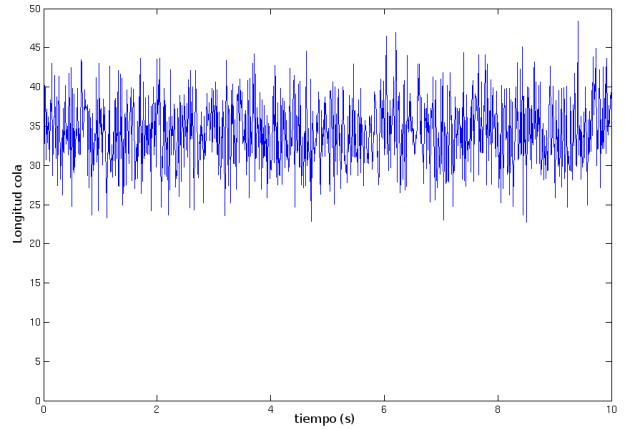


Figura 7: Longitud de la cola (regulador FBE-CBQ)

han considerado las restricciones más comunes sobre reguladores de tráfico en disciplinas de colas (ancho de banda, retardo, variación del retardo, pérdidas).

Las figuras 6 y 7 muestran la evolución de la longitud de la cola durante un periodo de 10 segundos, para el caso de los reguladores RED y FBE-CBQ, respectivamente. Las oscilaciones son significativamente menores para el regulador FBE-CBQ, que también mantiene una ocupación media de la cola superior. La estadística general de la longitud de la cola se resume para ambos casos en la tabla 2, que especifica valor medio, desviación estándar, máximo valor, mínimo valor, y los percentiles 5 % y 95 %.

Cuadro 2: Estadística de la longitud de las colas

Regulador	Media	Stdv	Max.	Min.	5 pc	95 pc
RED	25.9	9.2	50	0	9.8	40.7
FBE-CBQ	34.2	4.8	48	17	27.2	41.5

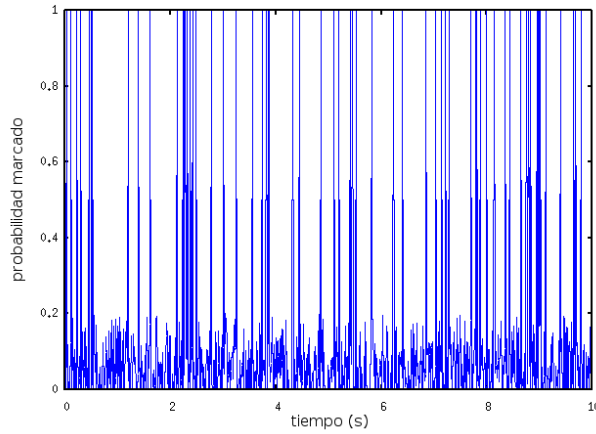


Figura 8: Salida del regulador RED

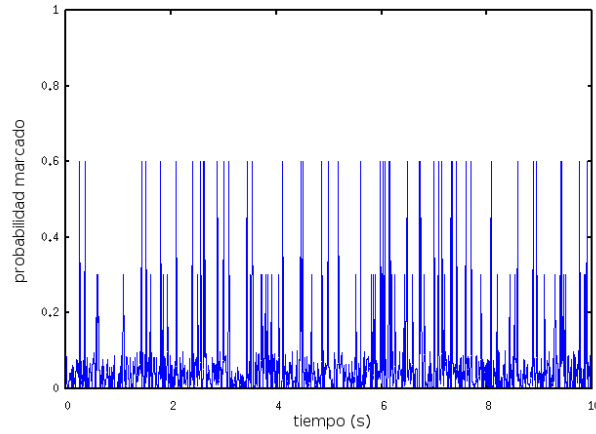


Figura 9: Salida del regulador FBE-CBQ

La mayor estabilidad de FBE-CBQ se puede apreciar también en las figuras 8 y 9, que muestran la evolución de la salida (probabilidad de marcado) para ambos reguladores.

El volumen total de transferencia de nivel de aplicación (goodput) resultante para ambos reguladores se compara en la figura 10. Como cabe esperar, la mayor estabilidad y longitud media de la cola mantenida por FBE-CBQ conlleva mejoras significativas.

Los resultados dados implican que los usuarios finales observarán un retardo medio mayor en el caso del regulador FBE-CBQ. El incremento es no obstante despreciable para las tecnologías actuales y de hecho menor que un 5 % del retardo de extremo a extremo en el escenario considerado. Por otra parte, FBE-CBQ mejora los valores de pico respecto a RED en un 50 % aproximadamente, lo que implica una mejora significativa. Así, FBE-CBQ proporciona mejores prestaciones

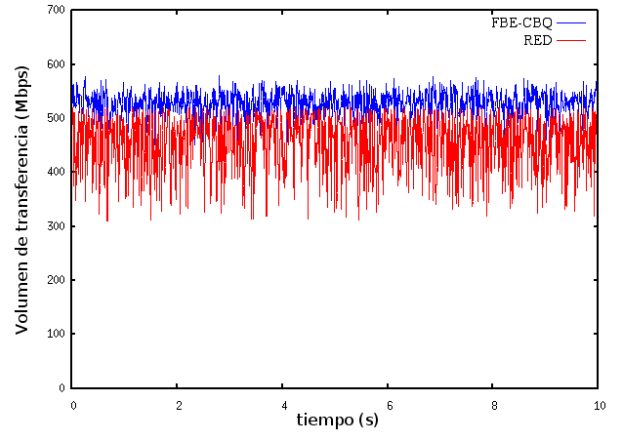


Figura 10: Volumen de transferencia de nivel de aplicación

nes en general para tráfico best-effort, mientras que los beneficios que introduce (sobre todo para tráfico con restricciones temporales) son muy superiores al apenas apreciable incremento del retardo medio.

Destacamos que, aunque FBE-CBQ se ha desarrollado para tráfico sin restricciones temporales, su mayor robustez y capacidad de respuesta ante ráfagas de paquetes lleva a una mejora de las prestaciones de extremo a extremo proporcionadas a servicios y aplicaciones con restricciones temporales. FBE-CBQ es por tanto una solución práctica y de compromiso para los routers actualmente desplegados en Internet que proporciona mejores prestaciones para aplicaciones restringidas. De este modo, el uso de FBE-CBQ puede reducir la complejidad de configuración de un sistema de disciplinas de colas para diversos patrones de tráfico.

Hacemos notar asimismo que algunas variaciones del regulador descrito (mediante desplazamientos de las funciones de pertenencia) pueden proporcionar resultados adaptados a patrones de tráfico específicos. Es por tanto fácil desarrollar planificadores especializados para el conjunto de patrones de tráfico considerados en un esquema de disciplinas de colar. Estos reguladores se pueden combinar de manera inteligente en infraestructuras con capacidad de provisión de clases de servicio.

Como conclusión general, los resultados de FBE-CBQ muestran una mayor robustez en presencia de tráfico con características de autosimilitud y alta variabilidad, proporcionando mejoras respecto a RED tanto para tráfico de tiempo real como para tráfico sin restricciones temporales. Las mejoras comprenden parámetros como la longitud de las colas, su estabilidad, la utilización de los enlaces, así como el impacto en el retardo de extremo a extremo y su variabilidad.

Como nota final respecto a las restricciones de implementación práctica del regulador descrito (fundamentalmente en cuanto a velocidad de inferencia), la viabilidad de reguladores como el descrito en redes de comunicaciones de altas prestaciones actuales se ha mostrado en trabajos complementarios [11].

6. Conclusiones

En el contexto de las disciplinas de colas CBQ, los resultados de simulación muestran que FBE-CBQ proporciona mayor robustez de control que los reguladores tradicionales en presencia de tráfico con autosimilitud y alta variabilidad. Las prestaciones mejoran tanto para tráfico con restricciones de tiempo real como para transferencias de grandes volúmenes de datos, respecto a diversos criterios, como longitud de las colas, estabilidad, utilización, retardo y variabilidad, entre otros parámetros.

Como continuación de este trabajo estamos trabajando en la aplicación de técnicas de aprendizaje y ajuste que puedan aportar perspectivas complementarias para el modelado y regulación de tráfico agregado en disciplinas de colas.

Referencias

- [1] I. Baturone, A. Barriga, S. Sanchez-Solano, C. J. Jimenez, and D. R. Lopez. *Microelectronic Design of Fuzzy Logic-Based Systems*. CRC Press., 2000. ISBN: 0-8493-0091-6.
- [2] S. Blake, D. L. Black, M. A. Carlson, E. Davies, Z. Wang, and W. Weiss. An Architecture for Differentiated Services. RFC 2475, Internet Engineering Task Force, Network Working Group, Dic. 1998. Category: Informational.
- [3] A. Cabrera, S. Sánchez-Solano, P. Brox, A. Barriga, and R. Senhadji. Hardware/Software Code-sign of Configurable Fuzzy Control Systems. *Applied Soft Computing*, 4(3):271–285, Dic. 2004.
- [4] P. Calyam, D. Krymskiy, M. Sridharan, and P. Schopis. Active and Passive Measurements on Campus, Regional and National Network Backbone Paths. In *14th IEEE International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN 2005)*, San Diego, California USA, Oct. 2005.
- [5] H. C. Cho, M. S. Fadali, and H. Lee. Dynamic Queue Scheduling Using Fuzzy Systems for Internet Routers. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2005)*, pages 471–476, Reno, USA, Mayo 2005.
- [6] K. Cho. ALTQ: Alternate Queueing for BSD UNIX. <http://www.csl.sony.co.jp/person/kjc/kjc/software.html>, Abr. 2006. Sony Computer Science Laboratories, Inc.
- [7] C. Hollot, V. Misra, D. Towsley, and W. Gong. Analysis and Design of Controllers for RED Routers Supporting TCP Flows. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:945–959, Jun. 2002.
- [8] Information Sciences Institute. University of Southern California, Viterbi School of Engineering. The Network Simulator – ns-2. <http://www.isi.edu/nsnam/ns/>, Feb. 2006.
- [9] T. Karagiannis, M. Molle, M. Faloutsos, and A. Broido. A Nonstationary Poisson View of Internet Traffic. In *23th IEEE INFOCOM*, volume 3, pages 1558–1569, Hong Kong, Mar. 2004.
- [10] A. K. Kloth. *Advanced Router Architectures*. CRC Press, Nov. 2005. ISBN: 0849335507.
- [11] F. Montesino, A. Barriga, D. R. Lopez, and S. Sánchez-Solano. FPGA Based Implementation of Fuzzy Controllers for Internet Traffic. In *XII IBERCHIP Workshop*, San José, Costa Rica, Mar. 2006.
- [12] F. Montesino, D. R. Lopez, A. Barriga, and S. Sánchez-Solano. Intelligent Scheduling of Aggregate Traffic in Internet Routers by Means of Fuzzy Systems. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, Paris, France, Jul. 2006.
- [13] F. Moreno-Velo, I. Baturone, S. Sánchez-Solano, and A. Barriga. Rapid Design of Fuzzy Systems With Xfuzzy. In *FUZZ-IEEE'03. The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 342–347, Mayo 2003.
- [14] F. Moreno-Velo, S. Sánchez-Solano, A. Barriga, I. Baturone, and D. López. XFL3: a New Fuzzy System Specification Language. In *5th WSEAS/IEEE Multiconference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC'01)*, pages 361–366, Rethymon, Jul. 2001.
- [15] D. Rolls, G. Michailidis, and F. Hernández-Campos. Queueing Analysis of Network Traffic: Methodology and Visualization Tools. *Computer Networks*, 48 (3):447–473, Jun. 2005.
- [16] R. Zhang, Y. A. Phillis, and J. Ma. A Fuzzy Approach to the Balance of Drop and Delay Priorities in Differentiated Services Networks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11 (6):840–846, Dic. 2003.

COMPARACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS MEDIANTE CADENAS DIFUSAS TEMPORALES

Juan Moreno-Garcia

E. U. de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad de Castilla-La Mancha
Avda. Carlos III s/n, Toledo, Spain
Juan.Moreno@uclm.es

Luis Jiménez, Jose Jesus Castro-Schez

Escuela Superior de Informática
Universidad de Castilla-La Mancha
Paseo de la Univ. 4, Ciudad Real, Spain
Luis.Jimenez@uclm.es, JoseJesus.Castro@uclm.es

Resumen

Este trabajo presenta un método para comparar dos cadenas difusas temporales (CDTs). La comparación de CDTs puede ser utilizada para comparar la evolución temporal de dos sistemas dinámicos (SDs). Inicialmente se generan las CDTs de varios SDs. Posteriormente se comparan las diferentes CDTs obtenidas representativas de los SDs, obteniendo como salida el "parecido" de los SDs de forma lingüística, es decir, utilizando etiquetas lingüísticas.

Palabras Clave: Sistemas dinámicos, modelado temporal, modelado lingüístico.

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema dinámico (SD) es definido como un sistema que cambia en el tiempo. En él existen un conjunto de relaciones entre las variables de entrada y salida que representan las modificaciones de las variables de salida cuando las variables de entrada son modificadas. En los SDs, también se necesita conocer la evolución temporal de sus variables, porque los valores de las variables en un tiempo dependen de los valores de las variables en los instantes anteriores. Los SDs con magnitudes físicas continuas verifican que la evolución de las variables es continua en el tiempo (el instante $t+1$ es muy parecido al instante t). Suponemos esta hipótesis en la definición de las CDTs [6]. Los SDs se modelan utilizando diferentes técnicas tradicionales [4]. Se modelan para explicar y predecir su comportamiento, y para analizar sus propiedades dinámicas. Se pueden modelar utilizando la lógica difusa [5, 1, 2]. Las CDTs se utilizan para representar la evolución en el tiempo del SD. Esta estructura simula el comportamiento de

un sistema en función de la entrada. Informalmente, las CDTs son una secuencia ordenada de estados y transiciones lingüísticas difusas.

En este trabajo utilizaremos las CDTs para comparar el *dinamismo* entre dos SDs. Para ello, se generará la CDT de la evolución temporal de cada SD, y posteriormente, se compararán dichas cadenas. El objetivo de este trabajo es presentar un método para comparar CDTs (la evolución temporal de dos SDs). Para que la comparación obtenida sea lo más comprensible posible se utilizarán etiquetas lingüísticas para mostrar la similitud entre CDTs mediante una serie consecutivas de instantes temporales. En la sección 2 se presenta una introducción a los CDTs. Después, se presenta el método propuesto. En la sección 4 se muestra un ejemplo de cómo funcionan los algoritmos, y se finaliza mostrando las conclusiones.

2. INTRODUCCIÓN A LAS CDTs

2.1. ALGUNOS CONCEPTOS PREVIOS

Sea un SD con m variables reales de entrada $X_1 \dots X_m$ y una variable real de salida S . El comportamiento del sistema se obtiene mediante un conjunto de ejemplos $E = \{e_1 \dots e_n\}$ siendo $e_i = (x_1^i \dots x_m^i, s^i, t_i)$ donde $x_j^i \in X_j$, $s^i \in S$ y t_i es el tiempo en el que ocurre el ejemplo i . Se define un **conjunto ordenado de etiquetas lingüísticas** SA_j para cada una de las variables de entrada X_j (figura 1). Su estructura es $SA_j = \{SA_j^1 \dots SA_j^{i_j}\}$, donde i es la posición de SA_j^i en SA_j e i_j es el número de etiquetas en SA_j ($i_j = |SA_j|$). Se define un **conjunto ordenado de etiquetas lingüísticas** SC para la variable de salida S . Su estructura es $SC = \{SC^1 \dots SC^{i_y}\}$ con $i_y = |SC|$. Estos conjuntos se definen a priori.

Las CDTs trabajan con variables lingüísticas. Éstas tienen definidas un conjunto ordenado de etiquetas sobre su dominio y se denominan **variables lingüísticas continuas** (desde ahora *variables*). X_j es una va-

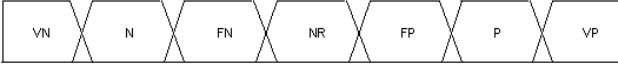


Figura 1: Conjunto ordenado de etiquetas SA_j

riable que tiene asociada una semántica a cada SA_j^i definida sobre ella que verifica: (1) Cada SA_j^i se define sobre un dominio ordenado. (2) La etiqueta definida en X_j está ordenado en base al método de defuzzificación denominado medio de máximos (MOM) [3]. (3) La suma del grado de pertenencia de un valor x a todas las etiquetas definidas en una variable continua debe ser 1 ($\sum_{SA_j^i \in SA_j} \mu_{SA_j^i}(x) = 1$). (4) Cada x_j en X_j verifica: ($\mu_{SA_j^i}(x_j) = 1$) ó ($\mu_{SA_j^i}(x_j) = a$ y $\mu_{SA_j^{i+1}}(x_j) = 1 - a$).



Figura 2: Intervalo lingüístico

Estas variables toman un **intervalo lingüístico** como valor. Un intervalo lingüístico (desde ahora intervalo) $LI_{j,p}^c = \{SA_j^p \dots SA_j^{p+(c-1)}\}$ para una variable X_j es un subconjunto ordenado de etiquetas de SA_j que empieza en la etiqueta p y tiene c etiquetas (Figura 2). Su función de pertenencia es la suma del grado de pertenencia a_j a cada etiqueta del intervalo (ecuación 1 con $z \in [p..c-1]$).

$$\mu_{LI_{j,p}^c}(a_j) = \sum_{SA_j^z \in LI_{j,p}^c} \mu_{SA_j^z}(a_j) \quad (1)$$

Un **conjunto ordenado de m intervalos** es una secuencia de m intervalos definidos sobre m variables para cada una de las variables de entrada, y se representan como $SLI_m = \{LI_{1,p_1}^{c_1}, \dots, LI_{m,p_m}^{c_m}\}$. La función de pertenencia de un SLI_m se calcula aplicando una t-norma entre el grado de pertenencia de los intervalos del SLI_m (ecuación 2).

$$\mu_{SLI_m}(e_i) = *(\mu_{LI_{j,p_j}^{c_j}}(x_j)) \quad (2)$$

donde $e_i = (x_1^i \dots x_m^i, s^i, t_i)$ es un ejemplo que pertenece a E , $j \in [1..m]$ y $*$ es una t-norma.

2.2. INTRODUCCIÓN A LAS CDTs

Informalmente, una CDT es una secuencia de estados y transiciones lingüísticas. Un estado lingüístico se utiliza para representar el SD en instantes consecutivos. Entre dos estados consecutivos se establece una transición lingüística que indica la condición necesaria para

pasar al siguiente estado lingüístico. El cambio de estado se describe de manera lingüística.

Un **estado lingüístico** i (desde ahora estado) se define como una tupla $est_i = \langle A_m^i, SE_i \rangle$ donde A_m^i es el SLI_m del estado i correspondiente a las m variables de entrada del SD, y SE_i es la salida del estado i correspondiente a la variable de salida del SD. Una **transición lingüística** i (desde ahora transición) es una tupla $trans_i = \langle T_m^i, ST_i \rangle$ donde T_m^i es el SLI_m de la transición i correspondiente a las m variables de entrada del SD, y ST_i es la etiqueta de salida de la transición i correspondiente a la variable de salida del SD. Una **CDT** es una tupla $CHAIN = \langle EST, TRANS \rangle$ donde $EST = \{est_1 \dots est_{ns}\}$ es un conjunto ordenado de ns estados, y $TRANS = \{trans_1 \dots trans_{ns-1}\}$ es un conjunto ordenado de $ns - 1$ transiciones. La transición i refleja las condiciones para cambiar de est_i a est_{i+1} .

Algoritmo 1 Método de inferencia de las CDTs

```

act ← 1
for i = 1 to |E| do
  if  $\mu_{A_m^{act}}(e_i) > \mu_{T_m^{act}}(e_i)$  then
    s ← SEact
  else
    s ← STact
    act ← act + 1
  end if
end for

```

Para reproducir el comportamiento del SD se ofrece el método de inferencia de las CDTs (algoritmo 1). En este algoritmo, act indica el estado y la transición actual, E el conjunto de ejemplos, e_i el ejemplo i de E y s la salida. El algoritmo usa un conjunto de ejemplos E como entrada y está basado en la definición del estado est_{act} denominado *estado actual*. est_{act} indica el estado en el que está el SD, y permite calcular la salida en ese instante. El método de inferencia comienza seleccionando est_1 como el primer estado actual. Luego se calculan $\mu_{A_m^{act}}(e_i)$ del estado est_{act} y $\mu_{T_m^{act}}(e_i)$ de la transición $trans_{act}$. Si $\mu_{A_m^{act}}(e_i)$ es mayor que $\mu_{T_m^{act}}(e_i)$ entonces la salida obtenida s es SE_{act} (correspondiente a est_{act}) y no hay cambio de estado. En otro caso, si $\mu_{A_m^{act}}(e_i)$ es menor o igual que $\mu_{T_m^{act}}(e_i)$, entonces hay un cambio de estado: la salida obtenida s es ST_{act} (correspondiente a $trans_{act}$) y el nuevo estado actual es el siguiente de la CDT (est_{act+1}). Este proceso se repite para todos los ejemplos de E .

Algoritmo 2 Método propuesto.

1. Definición de las fases
 2. Generación de las CDTs
 3. Comparación de las CDTs
-

3. MÉTODO PROPUESTO

El algoritmo general de todo el sistema se muestra en el algoritmo 2. Como puede verse consta de tres fases. En la primera se definen las fases de estudio del SD a estudiar. Esto se debe a que de esta forma se pueden comparar tramos temporales de los SDs entre sí. Esto es muy útil en la línea habitual de aplicación de nuestros trabajos que son los movimientos humanos, como puede ser la marcha humana o los movimientos deportivos (lanzamiento de peso, salto, etc). El estudio biomecánico de estos movimientos se realiza en fases. Por este motivo, nuestros algoritmos permiten definir el conjunto de fases o tramas que tiene el SD en su estudio. Esto no es ninguna limitación a los algoritmos, ya que en caso de no querer realizar el estudio del SD dividido en tramos sólo se debe indicar que hay una única fase.

En la siguiente fase del algoritmo se generan las CDTs de los SDs a estudiar. Para ello se utiliza el algoritmo presentado en [6]. A las CDTs presentadas en ese algoritmo se les debe añadir una componente temporal que indica la duración del estado. Esto supone una modificación en el algoritmo de inducción original. Ésta consiste en añadir el cálculo de la duración de todos los estados que han sido unidos para obtener el estado final en la segunda fase del algoritmo [6]. Para ello se utiliza la componente temporal t_i de cada ejemplo e_i del que se ha utilizado para obtener el estado.

Finalmente en la última fase del algoritmo se realiza la comparación de los SDs. Esto se realiza mediante el algoritmo 3.

La idea del algoritmo 3 consiste en comparar dos CDTs a lo largo del tiempo. Para ello se recorre el intervalo temporal que se quiere comparar. Ambas cadenas comienzan en el primer estado, éste será el estado actual en cada una de ellas, y se va comparando para cada instante el estado actual de ambas CDTs. El estado actual de cada CDT cambia al siguiente cuando el tiempo de comparación, denotado por t en el algoritmo, es menor que la duración del estado actual más la duración de todos los estados anteriores (esto se controla mediante las variables t_0 y t_1 para CDT0 y CDT1 respectivamente). El tiempo de comparación t se inicializa a 0 y se incrementa de manera constante mediante la constante inc . Para controlar el estado actual de CDT0 y CDT1 se utilizan los índices i_0 e i_1 respectivamente. Para manejar las fases dentro del algoritmo se utiliza una lista llamada $fases$ con los valores de inicio y fin de cada fase, por ejemplo: si $fases = [0, 0.6, 1.0, 1.2]$ se está indicando que nuestro SD tiene tres fases, la primera de ellas va desde el instante 0 al 0.6, la segunda a partir del 0.6 hasta el 1.0, y la última fase será desde el instante 1.0 al 1.2.

Algoritmo 3 Comparación de CDTs.

```

 $inc \leftarrow CTE$  {CTE indica el incremento del tiempo}
 $fases \leftarrow [0 \dots t_{max}]$  { $fases$  contiene las fases temporales. Es una lista con los valores del comienzo y fin de cada una de las fases. Empieza en 0 y termina con el máximo valor posible de la variable tiempo}
 $s \leftarrow 1$  { $s$  indica la fase por la que va el algoritmo}
 $t \leftarrow fases[0]$  { $t$  indica el instante temporal de comparación}
 $i_0 \leftarrow 1$  { $i_0$  es un índice que apunta al estado actual en el que se está comparando la CDT0}
 $t_0 \leftarrow Duracion\ Primer\ Estado\ de\ CDT0$  { $t_0$  toma el valor de la duración del primer estado de CDT0}
 $i_1 \leftarrow 1$  { $i_1$  es un índice al estado actual de la CDT1}
 $t_1 \leftarrow Duracion\ Primer\ Estado\ de\ CDT1$  { $t_1$  toma la duración del primer estado de CDT1}
 $P_{fase} \leftarrow \emptyset$  { $P_{fase}$  es una lista con los valores de parecidos de la fase actual}
 $P_{total} \leftarrow \emptyset$  { $P_{total}$  es una lista de listas. Cada lista contendrá los parecidos para cada una de las fases. Si hay  $n$  fases la lista será de  $n$  listas}
while  $t < t_{max}$  do
    {Controla si se ha llegado a un final de fase y cambia a la siguiente}
    if  $t \geq fases(s)$  then
         $P_{total} \leftarrow P_{total} + P_{fase}$  {Añade la lista  $P_{fase}$  a la lista de listas  $P_{total}$ }
         $s \leftarrow s + 1$  {Realiza el cambio de fase}
         $P_{fase} \leftarrow \emptyset$  {la lista  $P_{fase}$  se inicializa a  $\emptyset$  debido al cambio de fase}
    end if
    {Controla si se debe realizar un cambio de estado en CDT0}
    if  $t \geq t_0$  then
         $i_0 \leftarrow i_0 + 1$  {El estado actual es el siguiente}
         $t_0 \leftarrow t_0 + Duracion\ Estado\ i_0\ de\ CDT0$  {Se incrementa la duración del estado}
    end if
    {Controla si se debe realizar un cambio de estado en CDT1}
    if  $t \geq t_1$  then
         $i_1 \leftarrow i_1 + 1$  {El estado actual es el siguiente}
         $t_1 \leftarrow t_1 + Duracion\ Estado\ i_1\ de\ CDT1$ 
    end if
     $p \leftarrow Parecido(CDT_0(i_0), CDT_1(i_1))$  {Calcula el parecido de los estados actuales de CDT0 y CDT1}
     $P_{fase} \leftarrow P_{fase} + p$  {Añade el parecido obtenido a  $P_{fase}$ }
     $t \leftarrow t + inc$  {Incrementa el tiempo con el  $inc$ }
end while
 $P_{total} \leftarrow P_{total} + P_{fase}$ 

```

Esta primera parte del algoritmo obtiene una lista llamada P_{total} formada por listas con los valores numéricos de los parecidos para cada uno de los instantes temporales comparados en cada una de las fases, es decir, cada una de las listas de P_{total} tiene los parecidos en cada instante comparado de cada una de las fases. Por ejemplo, si $fases = [0, 0,6, 1,0, 1,2]$ e $inc = 0,05$, entonces P_{total} estará formado por 3 listas con 12 $(0.6/0.05)$, 8 $(0.4/0.05)$ y 4 $(0.2/0.05)$ elementos respectivamente ($P_{total} = [[p_0, p_{0,05}, p_{0,1} \dots p_{0,6}], [p_{0,65}, p_{0,7}, p_{0,75} \dots p_{1,0}], [p_{1,05}, p_{1,1}, p_{1,15}, p_{1,2}]]$ donde p_n representa el parecido en el tiempo n).

Para terminar esta sección sólo falta indicar cómo se realizará el parecido de dos estados. En el algoritmo 3 esto se hace mediante la función $Parecido(Est_1, Est_2)$, donde Est_1 y Est_2 son los estados a comparar. Ambos estados tienen el mismo número de variables, además estas variables son las mismas con los mismos conjuntos ordenados de etiquetas definidas sobre ellas. La ecuación 3 muestra el parecido entre dos estados donde $\otimes$ es una t-norma, P_{SLI_m} es el parecido entre los SLI_m de los estados a comparar y $P_{Lsalida}$ es el parecido entre las etiquetas de salida de cada estado

$$\otimes (P_{SLI_m}, P_{Lsalida}) \quad (3)$$

La ecuación 4 muestra la expresión utilizada para calcular P_{SLI_m}

$$\otimes (S(LI_{j,p_1}^{f^1}, LI_{j,p_2}^{f^2})) \quad (4)$$

donde $\otimes$ es una t-norma y $S(LI_{j,p_1}^{f^1}, LI_{j,p_2}^{f^2})$ calcula la similitud entre dos intervalos (ecuación 5).

$$S(LI_{j,p_1}^{f^1}, LI_{j,p_2}^{f^2}) = 1 - \left| \frac{M(LI_{j,p_1}^{f^1}) - M(LI_{j,p_2}^{f^2})}{Max_j - Min_j} \right| \quad (5)$$

donde $M(I_{j,p_j}^{f^j})$ es el valor central del intervalo (*media de máximos* MOM [3]), Max_j y Min_j son el máximo y mínimo valor del soporte de X_j .

Para comparar las etiquetas de salida ($P_{Lsalida}$) se utilizará la ecuación 6, siendo A y B etiquetas.

$$R(A, B) = 1 - \left| \frac{M(A) - M(B)}{M(SC^{i_y}) - M(SC^1)} \right| \quad (6)$$

Para describir de manera lingüística la salida obtenida se calcula el valor de similitud ρ_i para cada fase i definidas en el inicio del algoritmo. Para ello, se le aplica la ecuación 7 a cada una de las componentes de P_{total} , donde P_{total}^i es la componente i de P_{total} , $|P_{total}^i|$ es el número de elementos de P_{total}^i y $P_{total}^{i,j}$ es el valor en la posición j de P_{total}^i .

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^{|P_{total}^i|} P_{total}^{i,j}}{|P_{total}^i|} \quad (7)$$

Finalmente, se define un conjunto ordenado de etiquetas llamado *parecido*, y se calcula la etiqueta de mayor pertenencia a cada valor de similitud ρ_i de una fase que será el parecido para cada una de las fases.

4. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN

Esta sección presentará un ejemplo de aplicación de los algoritmos presentados. Para ello se utilizarán dos SDs similares correnpondientes a dos saltos con pies juntos, que consiste en saltar la mayor distancia posible sin carrera previa contándose como distancia saltada la última parte del pie (talón). Para su estudio se han utilizado 4 variables de entrada y una de salida. Las variables de entrada corresponden a los ángulos de la cadera (variable ACR), del codo (variable ACD), del hombro (variable AHB) y de la rodilla (variable ARD), mientras que para la variable de salida se ha utilizado el ángulo del tobillo (variable ATB). En el proceso de captura de datos se ha obtenido una muestra cada 0.005 segundos, es decir, 200 muestras por segundo, y se ha realizado una digitalización manual. Los datos corresponden a dos alumnos varones de la Facultad de Ciencias del Deporte de la Universidad de Castilla-La Mancha (Figura 3). La duración de ambos saltos es de 1.02 segundos. Para la inducción de las CDTs es necesario un conjunto ordenado de etiquetas lingüísticas para cada una de las variables de entrada y salida [6] que denominaremos SA_1 , SA_2 , SA_3 , SA_4 y SC para las variables ACR , ACD , AHB , ARD y ATB respectivamente. Cada uno de ellos está formado por 7 etiquetas lingüísticas trapezoidales con el nombre y soporte normalizado mostrado en la tabla 1.

Cuadro 1: Conjuntos de etiquetas lingüísticas.

Nombre	a	b	c	d
MN	0	0	0,15	0,18
N	0,15	0,18	0,29	0,32
PN	0,29	0,32	0,43	0,46
NR	0,43	0,46	0,57	0,60
PP	0,57	0,60	0,71	0,74
P	0,71	0,74	0,85	0,88
MP	0,85	0,88	1,00	1,00

En el algoritmo presentado en la sección 3 se explicó que es necesario definir las fases del SD para su estudio. En nuestra prueba se han definido las fases con una duración de 0.2 segundos excepto la última que dura desde el instante 0,8 al instante 1,02, es decir, $fases = [0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,02]$. Dentro del al-

goritmo presentado es necesario definir el incremento temporal que utilizará el algoritmo para cada instante. Nosotros hemos utilizado un incremento de 0,005, que corresponde al instante de captura de muestras, luego en el algoritmo la variable $inc = 0,005$. Finalmente indicar que la t-norma utilizada en las ecuaciones 3 y 4 es el mínimo.

Después de la inducción utilizando los datos se obtienen las figuras 4 y 5.

Cuadro 2: Conjunto de etiquetas *LABELS*.

Nombre	a	b	c	d
NADA	0	0	0, 10	0, 15
POCO	0, 10	0, 15	0, 35	0, 40
MEDIO	0, 35	0, 40	0, 60	0, 65
MUCHO	0, 60	0, 65	0, 85	0, 90
IGUAL	0, 85	0, 90	1, 00	1, 00

Para calcular el parecido de cada tramo se ha definido un conjunto ordenado de etiquetas con 5 etiquetas lingüísticas denominado *LABELS*. Sus etiquetas son trapezoidales y vienen definidas por los valores de la Tabla 2. Al calcular estas etiquetas se obtiene que en la fase 1 ambas cadenas se parecen *MUCHO* con un valor de pertenencia 0.76, en la fase 2 el valor de pertenencia es 0.93 y el valor de similitud es *IGUAL*, para la fase 3 la similitud es *MUCHA* con una pertenencia de 0.78, y para las dos últimas fases el parecido es *MUCHO* con valores de pertenencia 0.76 y 0.70 respectivamente.

Como fin de esta sección comentar que utilizando los valores de similitud obtenidos y la lista *LABELS* se puede describir lingüísticamente las *similitudes de dos CDTs* de la siguiente forma:

Los saltos del individuo 1 (CDT_1) y del individuo 2 (CDT_2) se parecen MUCHO en la fase 1, son IGUALES en la fase 2 y tienen MUCHO parecido en la fase 3, 4 y 5.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de comparación de CDTs que puede ser utilizado para comparar sistemas dinámicos. Además, esta comparación se puede ofrecer de manera lingüística, como se ha mostrado en la sección 4.

Creemos que es una buena herramienta para comparar lingüísticamente sistemas dinámicos del mismo tipo. El método presentado puede ser utilizado, por ejemplo, en entrenadores deportivos automáticos, o en detección de patologías (por ejemplo, en la marcha humana). También podría ser utilizado en otros campos como en sistemas económicos.

Como trabajos futuros tenemos pensado la utilización de nuestro método en un ámbito de aplicación concreto para comprobar su eficiencia y su posibles mejoras.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (proyecto DIMOCLUST TIC2003-08807-C02-02).

Referencias

- [1] Castro, J.L., Castro-Schez, J.J. , Zurita, J.M. *Learning maximal structure rules in fuzzy logic for knowledge acquisition in expert systems*, Fuzzy Sets and Systems, 101, 331-342, 1999.
- [2] Gonzalez, A. A learning methodology in uncertain and imprecise environments, *International Journal of Intelligence Systems*, vol 10, pag. 357-371, 1995.
- [3] W. V. Leekwijck, E. E. Kerre. Defuzzification: criteria and classification. *Fuzzy Sets and Systems*, vol 108 n.2, pag. 159-178, 1999.
- [4] Luenberger, D.G. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications, *John Wiley and sons*, 1979.
- [5] Moreno-Garcia, J., Jimenez, L., Castro-Schez, J.J. ,Rodriguez, L.. A direct linguistic induction method for systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 146, 79-96, 2004.
- [6] Moreno-Garcia, J., Castro-Schez, J.J., Jimenez, L.: A fuzzy inductive algorithm for modeling dynamical systems in a comprehensible way. To be published in *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006.

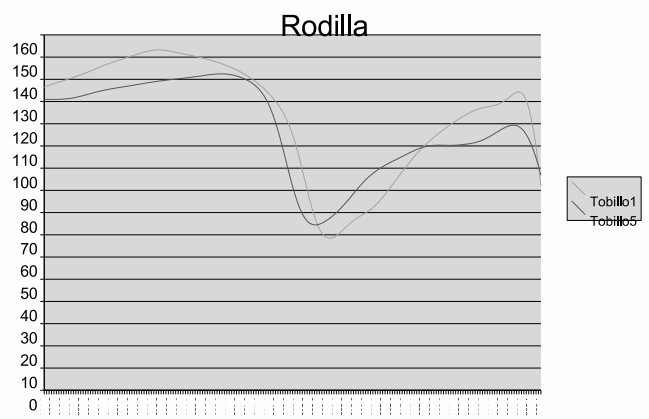
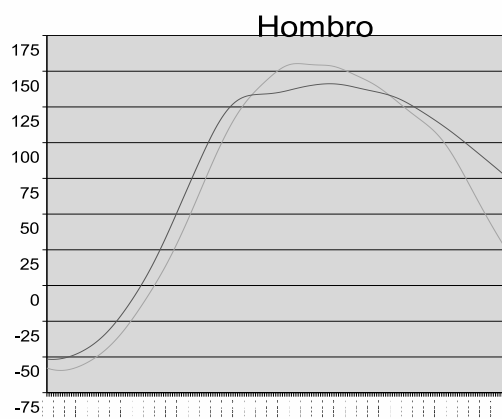
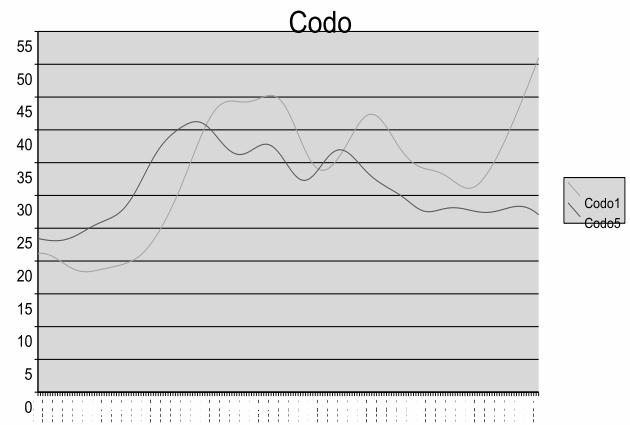
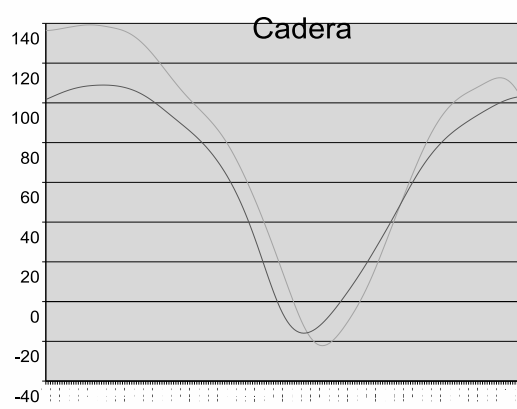


Figura 3: Gráficas de los datos

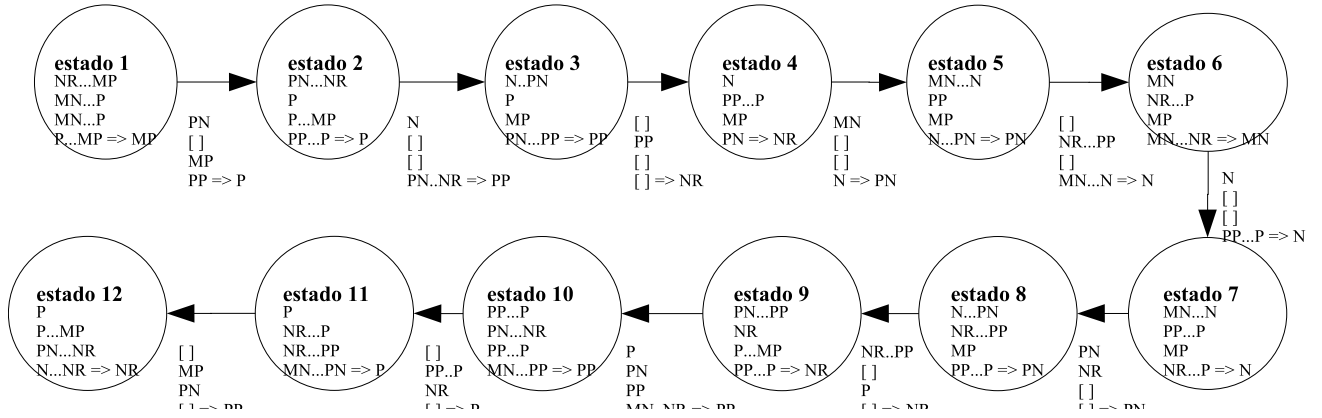


Figura 4: Cadena difusa temporal 0

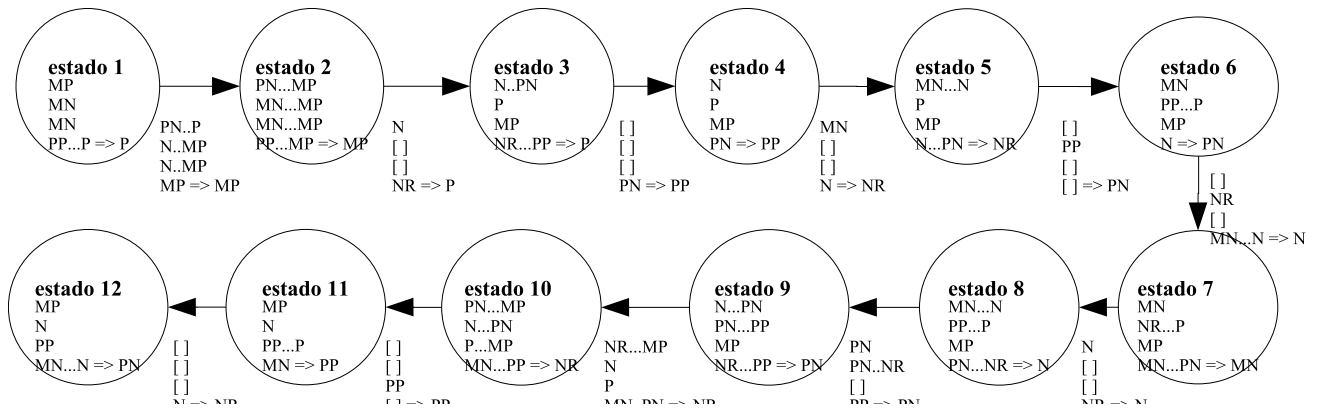


Figura 5: Cadena difusa temporal 1

SELECCIÓN ÓPTIMA DEL NIVEL DE SERVICIO EN UN SISTEMA DE COLAS FUZZY CON FUENTE DE ENTRADA LIMITADA

M^a José Pardo Santiago
Dep. de Economía Aplicada IV
Universidad del País Vasco
mjose.pardo@ehu.es

David de la Fuente García
Dep. Admón de Empresas y Contabilidad
Universidad de Oviedo
david@uniovi.es

Belén Castro Iñigo
Dep. de Economía Aplicada IV
Universidad del País Vasco
mariabelen.castro@ehu.es

Resumen

El objetivo del trabajo es determinar el número óptimo de servidores en un sistema de colas con fuente de entrada limitada utilizando para su desarrollo la Teoría de los Subconjuntos Borrosos. El trabajo se completa con un ejemplo y la simulación fuzzy del modelo que demuestra la validez del procedimiento.

Palabras Clave: Teoría de Subconjuntos Borrosos, Teoría de Colas, Fuente de Entrada Limitada.

1 Introducción

Los modelos de colas básicos implican que la fuente de entrada al sistema dispone de un número ilimitado de unidades. Las llegadas están así controladas mediante un proceso poissoniano al ser independientes del número de unidades presentes en el sistema en un intervalo de tiempo dado. A diferencia de ellos, el modelo de colas con fuente de entrada limitada $M/M/s:K$ estudia aquellos sistemas de colas en los cuales el tamaño de la población potencial es finito, de forma que las llegadas al sistema son dependientes del número de unidades en el mismo. La aplicación más importante de este modelo se ha encontrado en el problema de reparación y mantenimiento de máquinas, en donde se asigna a uno o más reparadores la responsabilidad de mantener en operación a un cierto grupo de K máquinas. Las máquinas constituyen la población potencial. Se considera que cada una es una unidad en el sistema de colas cuando está esperando para ser reparada o está en proceso de reparación, mientras que se encuentra fuera del sistema de colas cuando está operativa.

En este trabajo se analiza un sistema de colas con fuente de entrada limitada basado en el modelo clásico desarrollado por Hillier y Lieberman, Gross y Harris [8] y Taha [14] al que se le incorporan datos inciertos en sus supuestos de partida, con disciplina de cola ordenada y s servidores. Establecido el modelo fuzzy con fuente de entrada limitada, se pasa a la optimización del sistema calculando el número adecuado de estaciones, o de servidores. El trabajo se completa realizando una

comparación de los resultados analíticos obtenidos en la aplicación teórica con un experimento de simulación del sistema fuzzy con fuente de entrada limitada, simulación que permite demostrar la validez del procedimiento establecido.

Aunque los problemas de decisión de colas fuzzy son más prácticos que los convencionales, y los modelos de reparación de maquinaria con parámetros fuzzy son más realistas, son pocos los estudios publicados sobre este tema, por ejemplo, Chen [4] propone un método de programación paramétrica en un problema de reparación de máquinas con parámetros fuzzy pero no optimiza el modelo. La extensión de los modelos de decisión de colas a entornos fuzzy permite a estos modelos tener mayores aplicaciones.

2 Colas fuzzy con fuente de entrada limitada

Se considera un sistema de colas en el cual las llegadas siguen un proceso de Poisson con tasa fuzzy $\tilde{\lambda}$ y todos los tiempos de servicio son independientes e idénticamente distribuidos conforme a una distribución exponencial con tasa fuzzy $\tilde{\mu}$. Sobre la base del principio de extensión de Zadeh [15], el concepto de posibilidad y las cadenas de Markov fuzzy, Li y Lee [12] han propuesto una aproximación general para analizar colas fuzzy. Así, consideran que cada modelo de colas fuzzy puede ser considerado como una percepción de un sistema de colas usual, al que se le puede denominar el original del modelo de colas fuzzy. El conjunto de todos los posibles modelos de colas originales del modelo fuzzy propuesto son aquellos modelos con fuente de entrada limitada $M/M/s:K$ que cumplen que la tasa de llegadas λ pertenece al soporte de $\tilde{\lambda}$ y la tasa de servicio μ pertenece al soporte de $\tilde{\mu}$. Por ello, proponen obtener las distribuciones de posibilidad de las medidas de efectividad de los modelos de colas fuzzy aplicando el principio de extensión de Zadeh desde las soluciones de los modelos originales con los parámetros conocidos de forma precisa. En general, todas las funciones de parámetros fuzzy $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$ pueden ser definidas por:

$$\mu_{f(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})}(z) = \sup_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}} \{ \mu_{\tilde{\lambda}}(\lambda) \wedge \mu_{\tilde{\mu}}(\mu) / z = f(\lambda, \mu) \} \quad (1)$$

Las soluciones de estado estable del modelo $M/M/s:K$ clásico son:

- Probabilidad de que el sistema esté desocupado:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} A_n + \sum_{n=s}^K B_n} \quad (2)$$

$$\text{con } A_n = \frac{K!}{(K-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \text{ y } B_n = \frac{K!}{(K-n)!s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

- Probabilidad de que se encuentren i unidades en el sistema:

$$\pi_i = \begin{cases} A_i \pi_0 & \text{si } 1 \leq i \leq s \\ B_i \pi_0 & \text{si } s \leq i \leq K \end{cases} \quad (3)$$

- Longitud media de unidades en el sistema:

$$L = \sum_{n=0}^K n \pi_n = \pi_0 \left(\sum_{n=0}^{s-1} n A_n + \sum_{n=s}^K n B_n \right) \quad (4)$$

Mediante el principio de extensión de Zadeh se obtienen los resultados para el modelo fuzzy con parámetros inciertos $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$, resultados que se definen por sus funciones de pertenencia para las soluciones del estado estable. Dada la complejidad para determinar estas funciones de pertenencia, se ha comprobado que la función π_0 decrece en λ y crece en μ y la función L es creciente en λ y decreciente en μ y por ello, aplicando el método de Buckley y Qu [3], se obtienen las funciones de pertenencia de $\tilde{L}$ y $\tilde{\pi}_0$ desde los α -cortes de las variables fuzzy $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$

El valor de $\tilde{\pi}_i$ ($i \neq 0$) es calculado siguiendo el método vertex de Dong y Shah [5].

3 Criterio para la selección óptima del nivel de servicio

Las decisiones referentes al nivel óptimo de servicio que debe proporcionarse en un sistema de colas se basan principalmente en dos consideraciones: i) el coste que se incurre al dar el servicio y ii) la magnitud de la espera para ese servicio. El objetivo es determinar el nivel de servicio que minimice el valor esperado del coste total (Taha [14]):

$$\text{Minimizar } E(CT) = E(CS) + E(CE) \quad (5)$$

donde CT denota el coste total esperado; CS denota el coste esperado del servicio con:

$$E(CS) = sC_s \quad (6)$$

con s el número de servidores y C_s el coste marginal de un servidor por unidad de tiempo; CE es el coste esperado de la espera:

$$E(CE) = C_w L \quad (7)$$

siendo C_w el coste de la espera por unidad de tiempo para cada unidad del modelo de colas y L es la longitud media de unidades en el sistema.

Con todo, la función objetivo pasa a ser:

$$\text{Minimizar } E(CT) = sC_s + C_w L \quad (8)$$

Dado que normalmente sólo se necesitan considerar unos cuantos valores alternativos de s , la manera usual de resolver este modelo es mediante el cálculo de $E(CT)$ para esos valores de s y seleccionar el que minimiza la función de coste total.

En la selección óptima del nivel de servicio en el modelo con datos fuzzy, el coste marginal de un servidor por unidad de tiempo y el coste de la espera, también por unidad de tiempo, para cada unidad en el sistema pueden ser obtenidos como datos crisp, C_s y C_w , o como datos fuzzy, $\tilde{C}_s$ y $\tilde{C}_w$ los cuales vienen determinados mediante las distribuciones de posibilidad $\pi_{\tilde{C}_s}(C_s) = \mu_{\tilde{C}_s}(C_s)$ y

$$\pi_{\tilde{C}_w}(C_w) = \mu_{\tilde{C}_w}(C_w).$$

El modelo fuzzy de colas con fuente de entrada limitada y s servidores encuentra su valor óptimo en el número de servidores que minimicen la función fuzzy de coste total:

$$\tilde{E}(CT) = s\tilde{C}_s + \tilde{C}_w \tilde{L} \quad (9)$$

El modelo fuzzy de colas proporciona unos resultados de las medidas de efectividad que a su vez son números borrosos, lo que conduce a que la selección óptima del nivel de servicio es realizada entre alternativas que tienen asignado un número borroso, con la necesidad de elegir entre datos inciertos. Para determinar un criterio fuzzy en la selección del número de servidores que proporcione una relación borrosa de preferencia se utiliza el método de Nakamura [13], porque “este método parece conveniente utilizarlo cuando las circunstancias que determinen el resultado de dos acciones, presupongan que si para una se obtienen los resultados más favorables (desfavorables) también se obtengan los más favorables (desfavorables) para la otra” (Jiménez [10]).

Clasificados los resultados inciertos del modelo fuzzy de colas con fuente de entrada limitada, se tiene completo el criterio fuzzy para la selección óptima del nivel de servicio.

4 Simulación fuzzy

En los modelos de colas con línea de espera finita los sistemas de ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del modelo están constituidos por un número finito de ecuaciones.

En concreto, en el modelo en estudio, las ecuaciones diferenciales son (Kleinrock [11]):

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -K\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p'_i(t) &= (K-i+1)\lambda p_{i-1}(t) - [(K-i)\lambda + i\mu] p_i(t) \\ &\quad + (i+1)\mu p_{i+1}(t) \quad 1 \leq i < s \\ p'_i(t) &= (K-i+1)\lambda p_{i-1}(t) - [(K-i)\lambda + s\mu] p_i(t) \\ &\quad + s\mu p_{i+1}(t) \quad s \leq i < K \\ p'_K(t) &= \lambda p_{K-1}(t) - s\mu p_K(t) \end{aligned} \quad (10)$$

Con la restricción $\sum_{i=0}^K p_i(t) = 1$. Considerando:

$p'(t) = (p'_0(t), \dots, p'_K(t))$ y $p(t) = (p_0(t), \dots, p_K(t))$ se puede escribir el sistema (10) en forma matricial mediante la matriz $A \in M_{(K+1, K+1)}$:

$$p'(t) = A(\lambda, \mu) \cdot p(t) \quad (11)$$

Tener un número finito de ecuaciones posibilita que se pueda realizar en ellos un experimento de simulación que permita conocer la evolución en el tiempo de las variables del sistema, es decir, probabilidad de i unidades en el sistema en el instante t , $p_i(t)$ hasta alcanzar la condición de estado estable π_i .

Los sistemas dinámicos continuos con parámetros fuzzy pueden ser simulados mediante diferentes métodos (Fishwick [7], Armengol [1]), siendo el algoritmo Qua.Si. III de Bontempi [2] el adecuado al modelo en estudio. Con la aplicación de este algoritmo, se obtiene la evolución de las probabilidades fuzzy $\tilde{p}_i(t)$ cuando los parámetros iniciales λ y μ son a su vez números fuzzy $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\mu}$. Cuando t se hace suficientemente grande la evolución del modelo alcanza el equilibrio manteniéndose, a partir de un valor de t determinado, constantes los valores de $\tilde{p}_i(t)$.

De otra mano, aplicando el principio de extensión a las probabilidades de estado estable π_i se obtienen las probabilidades fuzzy de estado estable $\tilde{\pi}_i$.

La convergencia de las probabilidades $\tilde{p}_i(t)$ a las probabilidades de equilibrio $\tilde{\pi}_i$ está garantizada desde el siguiente resultado obtenido para el modelo de colas clásico con fuente de entrada limitada y un servidor $M/M/1:K$ (Fetz et al. [6]):

“Las probabilidades fuzzy $\tilde{p}_i(t)$ convergen a $\tilde{\pi}_i$

en el sentido: $d(\tilde{p}_i(t), \tilde{\pi}_i) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ ”.

Para ello parten de la aplicación del teorema de Gershgorin (Horn y Johnson [9]) a la matriz que determina el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el modelo de colas con línea de espera finita y un servidor $M/M/1:K$:

$$p'(t) = C(\lambda, \mu) \cdot p(t) \quad (12)$$

con la restricción $\sum p_i(t) = 1$. El punto de partida de la demostración se basa en que atendiendo a las columnas de la matriz $C(\lambda, \mu)$, el teorema de Gershgorin evidencia que los valores propios v_j , $j = 0, \dots, K$ de $C(\lambda, \mu)$ son cero o tienen parte real estrictamente menor que cero. De aquí, estudiando la multiplicidad de los valores propios derivan que la matriz $C(\lambda, \mu)$ tiene un valor propio $v_0 = 0$ con multiplicidad uno, y los restantes valores propios tienen parte real estrictamente negativa. En tal

caso, fijados los datos iniciales $p(0)$, la solución del sistema (11) que tiene la estructura:

$$p(t) = e^{Ct} p(0) \quad (12)$$

converge uniformemente a las probabilidades de equilibrio en λ y μ cuando $t \rightarrow \infty$ bajo la restricción $\sum_{i=0}^K p_i(t) = 1$.

Atendiendo al sistema en estudio con fuente de entrada limitada y s servidores, se puede constatar sin más que el teorema de Gershgorin aplicado a las columnas de la matriz $A(\lambda, \mu)$ establece que los valores propios de dicha matriz son cero, o tienen parte real estrictamente menor que cero. Por ello, en este modelo se cumplen las mismas condiciones respecto a los valores propios de la matriz que rige el sistema de ecuaciones diferenciales que en el modelo de colas con fuente de entrada y un servidor, $M/M/1:K$ analizado por Fetz, Oberguggenberger y Pittschmann lo que induce a que la solución del sistema (11) converge uniformemente a las probabilidades de equilibrio en λ y μ cuando $t \rightarrow \infty$ bajo la restricción $\sum_{i=0}^K p_i(t) = 1$. Y por ello también se da la convergencia de las probabilidades $\tilde{p}_i(t)$ a las probabilidades de equilibrio $\tilde{\pi}_i$.

5 Ejemplo

Se considera un modelo de colas consistente en un taller de mantenimiento con 6 unidades, cuya frecuencia de avería y duración de reparación (en días) se consideran idénticas de unas unidades a otras. El tiempo que transcurre hasta que cualquiera de las unidades en operación se descompone tiene una distribución exponencial cuya tasa media se conoce de forma aproximada y viene dada por el número borroso triangular (N.B.T.) $\tilde{\lambda} = [0.25, 0.33, 0.4]$. El tiempo requerido para reparar una unidad también tiene una distribución exponencial con tasa media conocida de forma incierta, y viene dada por el N.B.T. $\tilde{\mu} = [1.5, 2, 3]$.

El coste marginal de un servidor está determinado de manera cierta y es de 15.000 unidades monetarias por día. La distribución de posibilidad del coste de la espera por día para cada unidad del modelo de colas, $\pi_{\tilde{C}_w}(C_w) = \mu_{\tilde{C}_w}(C_w)$, es igual a un N.B.T. $C_w = [28000, 30000, 32000]$.

El objetivo es determinar el número de servidores del sistema que optimice el modelo de colas sabiendo que el agente decisor es neutro ante el riesgo, luego $\beta = 0.5$

Así, el parámetro a obtener es s y la función borrosa del coste total a minimizar es:

$$\tilde{E}(CT) = sC_s + \tilde{C}_w \tilde{L} \quad (14)$$

Las funciones de pertenencia de la longitud media de unidades en el sistema, $\tilde{L}_s$ y del coste total, $\tilde{E}(CT)_s$ para los valores de $s = 1, 2, 3$ son:

- Modelo con un servidor, $s = 1$:

$$\tilde{L}_1 = 6 - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda}} \left(1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^6 \frac{720}{(6-n)!} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n} \right) \quad (15)$$

$$\tilde{E}(CT)_1 = 15000 + \tilde{C}_w \tilde{L}_1 \quad (16)$$

- Modelo con dos servidores, $s = 2$:

$$\tilde{L}_2 = \frac{\sum_{n=0}^1 n \frac{720}{(6-n)!n!} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n + \sum_{n=2}^6 n \frac{720}{(6-n)!2^{n-1}} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n}{\sum_{n=0}^1 \frac{720}{(6-n)!n!} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n + \sum_{n=2}^6 \frac{720}{(6-n)!2^{n-1}} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n} \quad (17)$$

$$\tilde{E}(CT)_2 = 2 \cdot 15000 + \tilde{C}_w \tilde{L}_2 \quad (18)$$

- Modelo con tres servidores, $s = 3$:

$$\tilde{L}_3 = \frac{\sum_{n=0}^2 n \frac{720}{(6-n)!n!} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n + \sum_{n=3}^6 n \frac{720}{(6-n)!6 \cdot 3^{n-3}} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n}{\sum_{n=0}^2 \frac{720}{(6-n)!n!} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n + \sum_{n=3}^6 \frac{720}{(6-n)!6 \cdot 3^{n-3}} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right)^n} \quad (19)$$

$$\tilde{E}(CT)_3 = 3 \cdot 15000 + \tilde{C}_w \tilde{L}_3 \quad (20)$$

Gráficamente, las funciones de pertenencia de la longitud media de unidades en el sistema, $\tilde{L}_s$ son (figura 1):

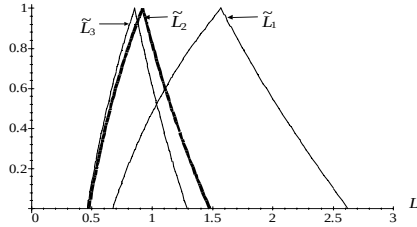


Figura 1: Funciones de pertenencia $\tilde{L}_s$

Para determinar cual es el nivel de servicio que minimiza la función de coste promedio total se comparan los tres costes totales (figura 2):

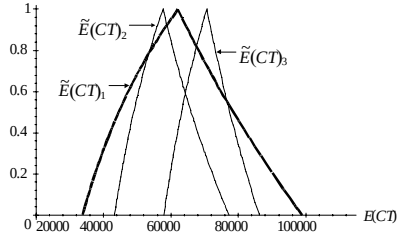


Figura 2: Costes totales $\tilde{E}(CT)_s$

Se observa que al comparar el coste total en los tres casos estudiados el resultado son números borrosos solapados. Para decidir cual de ellos representa el nivel de servicio

óptimo se clasifican en orden siguiendo el método de Nakamura [13]:

1- Se establece la relación borrosa de preferencia mediante el índice:

$$\mu_N(\tilde{A}, \tilde{B}) = \begin{cases} \frac{(1-\beta)T_1 + \beta T_3}{T_\beta} & \text{si } T_\beta \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } T_\beta = 0 \end{cases} \quad (21)$$

donde

$$T_\beta = (1-\beta)(T_1 + T_2) + \beta(T_3 + T_4) \quad (22)$$

$$T_1 = \int_{\{\alpha/\underline{A}_\alpha > \underline{B}_\alpha\}} [\underline{A}_\alpha - \underline{B}_\alpha] d\alpha \quad T_2 = \int_{\{\alpha/\underline{A}_\alpha < \underline{B}_\alpha\}} [\underline{B}_\alpha - \underline{A}_\alpha] d\alpha$$

$$T_3 = \int_{\{\alpha/\bar{A}_\alpha > \bar{B}_\alpha\}} [\bar{A}_\alpha - \bar{B}_\alpha] d\alpha \quad T_4 = \int_{\{\alpha/\bar{A}_\alpha < \bar{B}_\alpha\}} [\bar{B}_\alpha - \bar{A}_\alpha] d\alpha$$

siendo $A_\alpha = [\underline{A}_\alpha, \bar{A}_\alpha]$ el α -corte de $\tilde{A}$ y $B_\alpha = [\underline{B}_\alpha, \bar{B}_\alpha]$

el α -corte de $\tilde{B}$. El parámetro β representa la actitud del agente decisor ante el riesgo, de manera que si tiene aprecio por el riesgo β debe ser mayor que 0,5. La neutralidad ante el riesgo se corresponde con $\beta = 0,5$.

En el ejemplo queda:

$$\mu_N(\tilde{E}(CT)_i, \tilde{E}(CT)_j), \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (23)$$

con:

$$\mu_N(\tilde{E}(CT)_1, \tilde{E}(CT)_2) = 0.7559$$

$$\mu_N(\tilde{E}(CT)_1, \tilde{E}(CT)_3) = 0.1463$$

$$\mu_N(\tilde{E}(CT)_2, \tilde{E}(CT)_3) = 0$$

2- Se construye la matriz de relaciones borrosas (tabla 1):

Tabla 1: Matriz de relaciones borrosas

μ_N	$\tilde{E}(CT)_1$	$\tilde{E}(CT)_2$	$\tilde{E}(CT)_3$
$\tilde{E}(CT)_1$	0.5	0.7559	0.1463
$\tilde{E}(CT)_2$	0.2441	0.5	0
$\tilde{E}(CT)_3$	0.8537	1	0.5

3- La matriz de relaciones borrosas de preferencia entre los distintos costes totales permite su clasificación: La fila de la matriz compuesta por elementos todos mayores o iguales que 0.5 representa a la alternativa que domina a las demás y es la mejor elección (si hay dos son indiferentes). A continuación se elimina la fila y columna de dicha (o dichas) mejor elección y se razona igual con la matriz correspondiente al resto de las alternativas, aquella en la que el mínimo valor de su fila sea 0.5 es la segunda elección, etc. Así, se llega a:

$$\tilde{E}(CT)_3 > \tilde{E}(CT)_1 > \tilde{E}(CT)_2 \quad (24)$$

siendo el valor óptimo el mínimo, es decir, el que proporciona el modelo con dos servidores.

Seleccionado el nivel de servicio óptimo para el modelo de colas con fuente de entrada limitada, fijado en dos servidores, se pueden obtener las restantes medidas de efectividad del sistema:

- Probabilidad de que el sistema esté desocupado (figura 3):

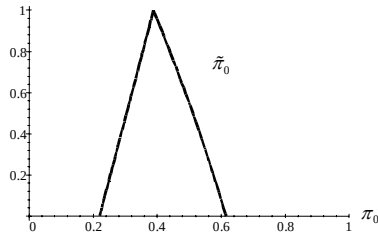


Figura 3: Probabilidad de sistema desocupado

- Promedio de unidades operativas (figura 4):

$$\tilde{N} = 6 - \tilde{L}_2 \quad (25)$$

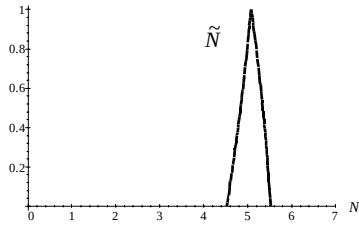


Figura 4: Promedio de unidades operativas

- Promedio de tiempo de no operatividad (tiempo medio de permanencia en el sistema) (figura 5):

$$\tilde{W} = \frac{\tilde{L}_2}{\tilde{\mu}(1 - \tilde{\pi}_0)} \quad (26)$$

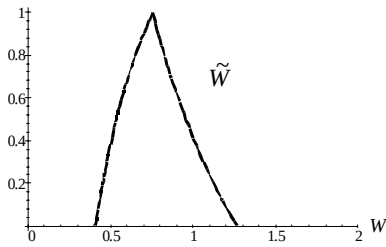


Figura 5: Tiempo de no operatividad

Realizada la simulación del sistema con el algoritmo Qua.Si. III de Bontempi [2] se obtiene la evolución en el tiempo t de las probabilidades $p_i(t)$, $i=0,...,6$. El proceso de simulación se ha realizado partiendo de las condiciones iniciales $p_0(0)=1$ y $p_i(0)=0$ si $i=1,...,6$ porque el sistema comienza a operar con todas las unidades en funcionamiento.

Realizado el algoritmo de la simulación, se muestran a continuación las figuras (figuras 6 a 12) con los límites de la evolución en el tiempo de las variables de estado $p_i(t)$, con $t \in [0,10]$. Puede verificarse cómo aproximadamente en el intervalo de tiempo $[3,6]$ las variables alcanzan el estado estable. La simulación se ha efectuado para los α -cortes $\alpha=0$ y $\alpha=1$, de forma que en los gráficos las dos líneas más finas indican el intervalo en el que fluctúan las probabilidades considerando $\alpha=0$, y la línea gruesa es la evolución de las probabilidades cuando $\alpha=1$.

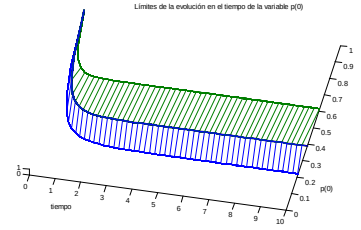


Figura 6: Límite de la evolución en el tiempo de p_0

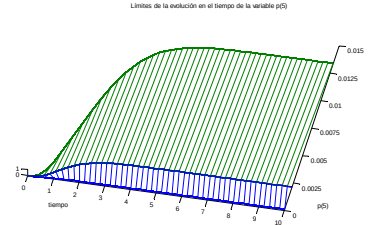


Figura 7: Límite de la evolución en el tiempo de p_1

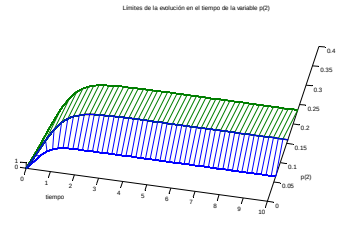


Figura 8: Límite de la evolución en el tiempo de p_2

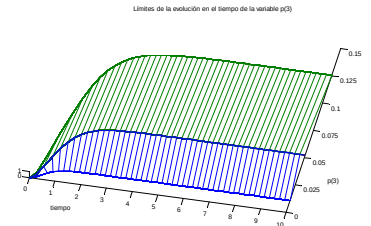


Figura 9: Límite de la evolución en el tiempo de p_3

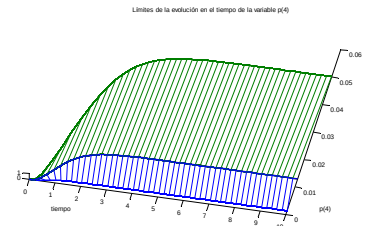


Figura 10: Límite de la evolución en el tiempo de p_4

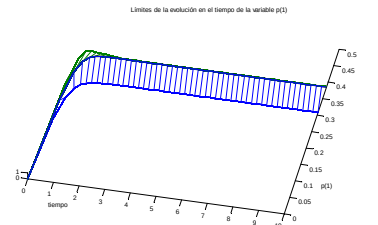


Figura 11: Límite de la evolución en el tiempo de p_5

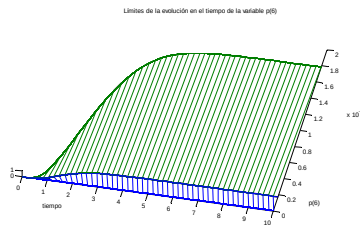


Figura 12: Límite de la evolución en el tiempo de p_6

Para terminar el ejemplo, se calculan las probabilidades de estado estable π_i , $i = 0, \dots, 6$ aplicando el principio de extensión de Zadeh a las probabilidades π_i ((2) y (3)) del modelo clásico, cálculo que se realiza para los α -cortes de nivel $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ (tabla 2).

Tabla 2: Probabilidades de estado estable

π_i	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$
π_0	[0.2207, 0.6158]	0.3887
π_1	[0.3079, 0.3851]	0.3849
π_2	[0.0641, 0.2354]	0.1588
π_3	[0.0107, 0.1255]	0.0524
π_4	[0.0013, 0.0502]	0.0130
π_5	[1.1×10^{-4} , 0.0134]	0.0021
π_6	[4.6×10^{-6} , 0.0018]	0.0002

Contrastando la solución analítica obtenida de manera teórica, con los resultados alcanzados en el experimento de simulación, se deriva que los datos teóricos son comparados de forma favorable con los conseguidos en la simulación dado que se obtienen los mismos resultados.

Conclusiones

Frente al modelo clásico, que presupone un proceso de entrada de Poisson y tiempos de servicio acordes a una distribución exponencial, sucede en muchas situaciones prácticas que la tasa de llegadas y la tasa de servicio son en realidad más posibilistas que probabilistas, los parámetros λ y μ en el modelo clásico son frecuentemente fuzzy y no pueden ser expresados en términos exactos. Este trabajo proporciona una representación más realista de los fenómenos de espera con fuente de entrada limitada mediante la incorporación de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, y se combina la capacidad de estos últimos para representar situaciones prácticas con las aproximaciones tradicionales a los modelos de la Teoría de Colas.

La optimización fuzzy del modelo permite encontrar el número de puestos de servicio que minimizan los costes totales.

Los resultados teóricos son aplicados a un ejemplo, y el sistema se simula a través del algoritmo Qua.Si. III de

Bontempi [2], simulación que permite comprobar que las soluciones de estado estable obtenidas con la simulación proporcionan el mismo resultado que las obtenidas desde el modelo clásico mediante el principio de extensión de Zadeh.

Referencias

- [1] Armengol, J. (1998). Simulation of dynamical systems with structured uncertainty: an overview. Research report IliA 98-05-RR. Universidad de Girona.
- [2] Bontempi, G. (1996). Qua.Si.III: a software tool for the simulation of fuzzy dynamical system. Modeling and Simulation ESM 96 (Proceedings European Simulation Multiconference 1996). Belgium. Javor. A, Lehmann, A. y Molnar, I. eds.
- [3] Buckley, J.J. y Qu, Y. (1990). On using α -cuts to evaluate fuzzy equations. Fuzzy Sets and Systems 38, 309-312.
- [4] Chen, SP. (2006). A mathematical programming approach to the machine interference problem with fuzzy parameters. Applied Mathematics and Computation 174, 374-387.
- [5] Dong, W. y Shah, H.C. (1987). Vertex method for computing functions on fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems 24, 65-78.
- [6] Fetz, T; Oberguggenberger, M. y Pittschmann, S. (2000). Applications of Possibility and Evidence Theory in Civil Engineering. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 8, 295-309.
- [7] Fishwick, P.A. (1991). Fuzzy simulation: Specifying and identifying qualitative models. International Journal of General Systems Vol. 19, 295-316.
- [8] Gross, D. y Harris, C.M. (1998). Fundamentals of Queueing Theory, third ed. New York. John Wiley and Sons.
- [9] Horn, R.A. y Johnson, C.R. (1985). Matrix Analysis. Cambridge University Press.
- [10] Jiménez, M. (1994). Modelos matemáticos aplicados a la toma de decisiones financieras en condiciones de incertidumbre. Tesis Doctoral. Universidad del País Vasco.
- [11] Kleinrock, L. (1975). Queueing Systems: Theory. Vol. 1. New York. John Wiley and Sons.
- [12] Lee, E.S. y Li, R.J. (1988). Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events. Computers and Mathematics with Applications Vol. 15, N° 10, 887-896.
- [13] Nakamura, K. (1986). Preference relations on a set of fuzzy utilities as a basis for decision making. Fuzzy Sets and Systems 20, 147-162.
- [14] Taha, H.A. (2003). Operations Research: An Introduction, (seventh ed.), Prentice-Hall, New Jersey.
- [15] Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems 1, 3-28.

APLICACIÓN DEL ALGORITMO DIFUSO DE C-MEDIAS A LA SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES DE RESONANCIA MAGNÉTICA CEREBRAL

Elena Prieto

Dpto. Matemática e Informática
Universidad Pública de Navarra
eprietoaz@unav.es

Marisol Gómez

Dpto. Matemática e Informática
Universidad Pública de Navarra
marisol@unavarra.es

Josep M^a Martí

Servicio de Medicina Nuclear
Clínica Universitaria de Navarra
jmmartic@unav.es

Pablo Lecumberri

Dpto. Matemática e Informática
Universidad Pública de Navarra
pablo.lecumberri@unavarra.es

Humberto Bustince

Dpto. Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
bustince@unavarra.es

Resumen

Este trabajo tiene como objeto la segmentación de los diferentes tejidos que componen el cerebro, a partir de imágenes de Resonancia Magnética (RM). Para ello se ha utilizado el algoritmo difuso de C-medias, ya que esta modalidad de imagen médica posee ciertas características que la hacen especialmente apropiada para el tratamiento mediante técnicas difusas.

Palabras Clave: Resonancia magnética (RM), segmentación, cerebro, algoritmo difuso de C-medias, FCM.

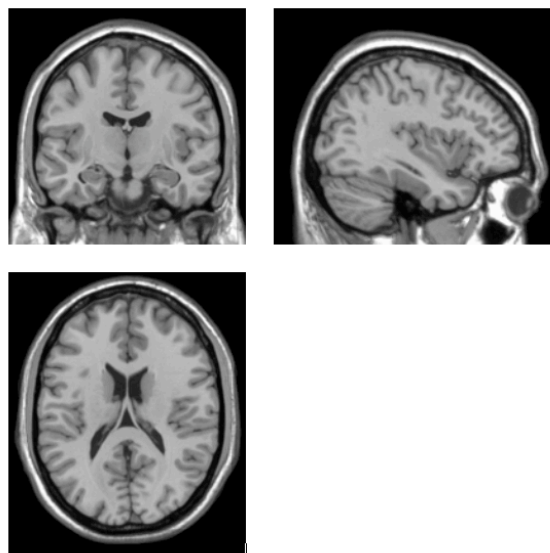


Figura 1. Imagen de resonancia magnética cerebral

1 INTRODUCCIÓN

El proceso de adquisición de la imagen de resonancia magnética consiste en colocar al paciente en el centro de un campo magnético muy intenso y de una frecuencia específica para cada sustancia (generalmente se usa la frecuencia correspondiente al átomo de hidrógeno). La atracción magnética generada por el aparato dirige los electrones de dicha sustancia hacia la fuente del campo magnético. En ese momento se capta una imagen que permite visualizar los tejidos con distinta proporción de hidrógeno.

En la Figura 1 vemos una imagen de resonancia magnética cerebral en sus diferentes orientaciones. Se observa que el cerebro está formado principalmente por sustancia blanca y sustancia gris, y además existen diferentes tejidos de protección (líquido cefalorraquídeo, meninges y cráneo).

La segmentación de una imagen cualquiera consiste en dividirla en los fragmentos que la forman. Cada fragmento contendrá píxeles con una característica común, como puede ser el valor de intensidad, el objeto del que forman parte o la posición en la imagen. Es el primer paso en cualquier proceso de análisis de imagen.

Los algoritmos de segmentación de imagen se basan generalmente en una de las dos propiedades básicas de los valores de intensidad: discontinuidad y similitud. En la primera categoría, la idea es dividir la imagen basándose en cambios abruptos en la intensidad, como por ejemplo, los bordes de una imagen. Las principales aproximaciones en la segunda categoría se basan en dividir la imagen en regiones similares de acuerdo a una serie de criterios predefinidos. La umbralización, el crecimiento de regiones o la clasificación en bloques son ejemplos de métodos en esta categoría.

La segmentación de imágenes de resonancia magnética cerebral es fundamental para facilitar el diagnóstico de distintas patologías, como tumores, esclerosis múltiple o alzheimer, e incluso para la planificación de neurocirugías o tratamientos de radioterapia.

Determinadas características de las imágenes médicas hacen que su segmentación sea una ardua tarea. Los objetos que se van a segmentar son estructuras anatómicas reales (no aproximadas) y además tienen formas complejas y no rígidas, y experimentan una gran variación entre distintos sujetos.

En las imágenes de resonancia magnética la segmentación resulta todavía más compleja debido a las limitaciones del equipo de adquisición, que introduce ruido y algunos artefactos, es decir, variaciones en la imagen no debidas al órgano que se desea registrar. Los artefactos que degradan la imagen pueden ser debidos a movimientos del paciente durante la adquisición o a errores de ganancia no lineal del equipo.

Dado que el cerebro es una estructura especialmente complicada y muy diferente para cada sujeto, no existen modelos anatómicos que lo caractericen. Por ello, es necesario desarrollar métodos automáticos de segmentación que no utilicen ningún tipo de información espacial a priori.

La lógica de difusa, que posibilita el tratamiento y manejo de la incertidumbre, resulta adecuada para el procesamiento de este tipo de imágenes.

2 ALGORITMO FUZZY DE C MEDIAS

El algoritmo difuso de C medias (Fuzzy C-means) es el algoritmo Fuzzy más sencillo y también uno de los más empleados en el tratamiento de imagen [5]. Esta técnica fue introducida por el profesor Jim Bezdek en 1981 [1]. Este algoritmo intenta dividir un conjunto finito de elementos en una colección de C conjuntos borrosos con respecto a un cierto criterio. En este caso los elementos que se intentan clasificar son los vóxeles de la imagen, siendo un vóxel (contracción del término inglés “volume element”) el equivalente tridimensional a un píxel en 2 dimensiones.

En este algoritmo, la entrada es un conjunto finito de datos X. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una matriz de dimensiones $p \times n$, donde n representa el número de elementos considerados, es decir el número de vóxeles en la imagen, y p representa el número de dimensiones de cada elemento x_i . En este caso, como se trata de imágenes de niveles de gris en las que cada elemento está caracterizado por un único valor, $p=1$.

La salida es una lista V con los valores de intensidad medios de cada conjunto, lo que se denomina centro. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_C\}$ es una matriz $p \times C$, siendo C el número de bloques elegido.

Además el algoritmo calcula una matriz de pertenencia, U de dimensiones $(n \times C)$, donde cada elemento u_{ij} es un valor numérico que indica en grado en el que el elemento x_j pertenece al bloque i-ésimo. Los elementos de esta matriz satisfacen estas dos condiciones:

$$u_{ij} \in [0,1] \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^C u_{ij} = 1, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

En este caso, las dimensiones de todos los vectores y matrices implicados son:

$$x_i \in X \in M(1 \times n)$$

$$v_i \in V \in M(1 \times C)$$

$$u_{ij} \in U \in M(n \times C)$$

Este algoritmo se basa en minimizar una función $J_m(U, V)$, una medida del error en la clasificación basado en la suma de las distancias entre cada dato y el conjunto asignado. Esta función depende de la matriz de pertenencia U y del vector de centros de los bloques V:

$$J_m(U, V) = \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^N u_{ij}^m d^2(x_j, v_i) \quad (3)$$

$m \in (1, \infty)$ es un número real llamado parámetro de Fuzzy, y $d(x, v)$ es una medida de disimilaridad entre x e v, que varía en función de la aplicación. La forma más sencilla de medir la disimilaridad entre dos valores es la distancia euclídea, y esta es la medida utilizada en esta aplicación, aunque se podrían utilizar otras más complejas.

Para obtener el mínimo de la función objetiva, se minimiza respecto a sus dos variables U y V, igualando sus derivadas parciales a cero. Realizando los cálculos pertinentes, se obtiene que dicha función toma valor mínimo cuando:

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left(\frac{d(x_j, v_i)}{d(x_j, v_k)} \right)^{\frac{2}{m-1}}} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^N (u_{ij})^m x_j}{\sum_{j=1}^N (u_{ij})^m} \quad (i = 1, 2, \dots, C) \quad (5)$$

El algoritmo difuso de C medias se basa en la optimización iterativa de la función $J_m(U, V)$, alternando la minimización respecto a U y respecto a V. La clase final asignada a cada píxel será aquella para la que tenga mayor grado de pertenencia después de todas las iteraciones.

3 IMPLEMENTACIÓN

Antes de aplicar el algoritmo de segmentación, es necesario separar el cerebro del resto de tejidos extracraneales (piel, cuero cabelludo...) y tejidos no cerebrales (meninges, cráneo...). Este paso preliminar, conocido como “skull stripping”, evita que estos tejidos se confundan con los de interés (sustancia blanca, sustancia gris y líquido cefalorraquídeo), facilitando la segmentación de estos últimos.

El procedimiento de extracción del cráneo consta de tres fases. En primer lugar, la imagen RM es suavizada con un filtro que suaviza gradientes no significativos y preserva los bordes más fuertes de la imagen. Seguidamente, se aplica sobre la imagen suavizada un filtro Marr-Hildreth de detección de bordes para identificar las fronteras anatómicas importantes [6]. De entre los objetos definidos por estas fronteras, se identifica el correspondiente a la materia blanca y se refina utilizando una secuencia de operaciones morfológicas y de componentes conectadas [3], hasta obtener una máscara que separe el cerebro propiamente dicho del resto de tejidos.

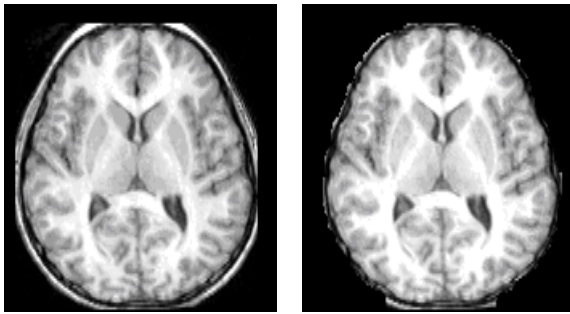


Figura 2. Resultado de la extracción del cráneo de la imagen

Una vez extraído el cráneo, se aplica un filtro anisotrópico de difusión para disminuir el ruido presente en la imagen [8]. Los parámetros elegidos para dicho filtro son $\kappa_d = 15$, $\tau_0 = 0.125$ y número de iteraciones = 2.

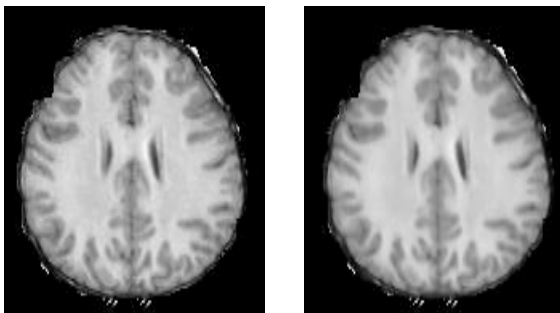


Figura 3. RM antes y después del filtrado anisotrópico

Para implementar el algoritmo difuso de C-medias, es necesario hacer una serie de elecciones iniciales. La más importante es el número de segmentos que se desea

obtener. Como se aplicará el algoritmo sobre la imagen sin cráneo, basta con 4 bloques, que corresponderán a materia blanca, materia gris, líquido cefalorraquídeo y fondo.

En segundo lugar, se debe determinar la condición de terminación del programa. Para ello se imponen dos condiciones. Por un lado, se utiliza un umbral de variación de la matriz de pertenencia U entre dos iteraciones consecutivas, es decir:

$$\max_{ij} |u_{ij}(t+1) - u_{ij}(t)| < \varepsilon \quad (6)$$

Se impone, además, un número máximo de iteraciones, considerando la posibilidad de que el algoritmo no converja. Normalmente se limita el número de iteraciones a 100.

Por último, se elige el exponente de ponderación m , cuyo valor típico es $m=2$.

Una vez elegidos todos los parámetros del algoritmo difuso, hay que decidir como se van inicializar las matrices y vectores implicados. Se puede inicializar la matriz de pertenencia U , o bien el vector de centros V . La primera opción supone un único recorrido de la imagen en cada iteración, mientras que la segunda implica dos recorridos, duplicando el tiempo de ejecución. Por tanto, se debe inicializar la matriz de pertenencia U , y para ello se asigna a cada posición de la matriz uno de estos vectores de pertenencia de forma aleatoria: $[1,0,0,0]$, $[0,1,0,0]$, $[0,0,1,0]$ y $[0,0,0,1]$.

Así, el esquema del algoritmo queda de la siguiente forma:

1. Inicializar la matriz de pertenencia U_0 para $t = 0$
2. Repetir
 - a. $V_t = G_\theta(U_{t-1})$
 - b. $U_t = F_\theta(V_{t-1})$
 - c. $t \leftarrow t+1$
3. Hasta que $t=100$ o $\max_{ij} |u_{ij}(t+1) - u_{ij}(t)| < 0.02$
4. $(U,V) \leftarrow (U_t, V_t)$

Una vez finalizado el algoritmo se realiza un post-procesado para ajustar el resultado final. El objetivo de este procesado es eliminar los restos de tejidos no cerebrales que no han sido suprimidos por el algoritmo de extracción del cráneo y se han identificado como sustancia gris o blanca. Para ello, se crea una máscara con aquellos píxeles que hayan resultado pertenecientes a uno de esos dos segmentos y se limpia dicha máscara eliminando regiones no conectadas y huecos. Esta máscara se aplicará al resultado del algoritmo de C-medias.

Para la implementación del algoritmo se ha optado por el lenguaje de programación C++, ya que constituye un modelo muy avanzado de programación extraordinariamente flexible (lenguaje de propósito general).

Para el pre-procesado y post-procesado de la imagen, se ha utilizado la librería ITK (Insight Toolkit) de código abierto y gratuito, diseñada para el procesamiento, segmentación y registro de imágenes y enfocada a aplicaciones médicas [4].

4 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para evaluar este método de segmentación, se ha aplicado sobre 16 imágenes de resonancia magnética de sujetos normales, disponibles en la base de datos de IBSR (Internet Brain Segmentation Repository) [7]. Esta es una base de datos que proporciona imágenes RM junto con los resultados de una segmentación manual realizada por expertos. Estos datos se ofrecen a investigadores y desarrolladores de algoritmos de segmentación con el objeto de disponer de un fondo común de imágenes sobre el que evaluar resultados.

Los datos sobre los que se ha trabajado corresponden a imágenes RM ponderadas en T1. Las imágenes presentan diferentes grados de dificultad, es decir, diferente nivel de contraste y gradiente de intensidad. Las imágenes tienen un tamaño de 256x128x256 vóxeles y sus datos son de tipo entero de 16 bits. Los estudios están normalizados espacialmente según las coordenadas de Talairach-Tournoux [10].

Para cada imagen, se realizan entre 15 y 25 iteraciones hasta que el algoritmo se estabiliza, siendo cada iteración de 2 minutos de duración aproximadamente. Además, se necesitan 3 minutos para pre-procesado y 1 minuto para post-procesado. De esta forma, el tiempo total de ejecución es de unos 45 minutos por imagen (tiempos medidos para un procesador Intel Pentium 4 a 1.7GHz, con 256MB de memoria RAM).

En la Figura 4, se representa una de las imágenes empleadas junto con la segmentación experta manual proporcionada por IBSR y la segmentación obtenida mediante el algoritmo difuso de C medias:

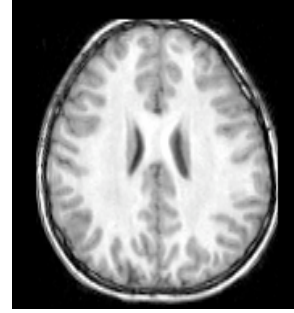


Figura 4. Imagen original, segmentación manual y difusa

Para llevar a cabo la comparación entre los resultados de los dos métodos de segmentación, se definen tres parámetros que evalúan la tasa de error para cada conjunto clasificado. Por tanto, la segmentación será mejor cuanto menores sean estos valores:

$$\text{Tasa de sub-segmentación} = \frac{N_{fp}}{N_n} \quad (7)$$

$$\text{Tasa de sobre-segmentación} = \frac{N_{fn}}{N_p} \quad (8)$$

$$\text{Tasa de segmentación incorrecta} = \frac{N_{fp} + N_{fn}}{N_n + N_p} \quad (9)$$

donde N_{fp} es el número de falsos positivos, N_{fn} es el número de falsos negativos, N_p es el número de píxeles que pertenecen a la clase y N_n es el número total de píxeles que no pertenecen a la clase.

Además, se ha calculado para cada conjunto otro parámetro llamado métrica de solapamiento. Este parámetro es más crítico que los anteriores, ya que no depende del volumen total de la imagen. Siendo A y B los conjuntos clasificados para un segmento dado por cada uno de los dos métodos de segmentación a comparar, la métrica de solapamiento se define como:

$$\text{Métrica de solapamiento} = \frac{\sum(A \cap B)}{\sum(A \cup B)} \quad (10)$$

Es equivalente al coeficiente de similaridad de Tanimoto[2]. Esta métrica se aproxima al 100% para

resultados idénticos y es próximo a cero si no comparten ninguna similitud en los vóxeles clasificados.

En la Tabla 1 se representan los resultados de los cuatro parámetros descritos para la materia gris:

Tabla 1. Resultados para materia gris

	Métrica solapamiento (%)	Sub-segmentación (%)	Sobre-segmentación (%)	Segmentación incorrecta (%)
1	65,41	0,36	32,12	3,10
2	69,91	0,60	25,28	2,59
3	71,72	0,53	23,42	2,18
4	74,57	0,40	22,12	2,20
5	69,11	0,54	25,98	2,35
6	54,57	0,67	40,48	3,40
7	54,00	0,45	41,99	2,82
8	57,00	0,55	38,58	3,07
9	60,64	0,45	35,39	2,71
10	61,21	0,34	35,71	2,55
11	62,01	0,40	34,48	2,68
12	70,44	0,45	26,24	2,69
13	78,93	0,41	17,53	1,82
14	70,90	0,71	24,68	3,16
15	71,94	1,19	21,37	3,48
16	72,98	0,94	22,01	3,49
Media	66,58	0,56	29,21	2,77

Los valores correspondientes a materia blanca se representan en la Tabla 2:

Tabla 2. Resultados para materia blanca

	Métrica solapamiento (%)	Sub-segmentación (%)	Sobre-segmentación (%)	Segmentación incorrecta (%)
1	69,90	1,52	6,06	1,71
2	75,98	1,34	4,90	1,52
3	71,28	1,10	6,65	1,29
4	77,21	0,82	7,08	1,06
5	70,03	1,53	4,65	1,65
6	62,01	2,74	2,13	2,71
7	79,28	0,39	12,07	0,79
8	76,76	0,72	10,84	1,15
9	80,37	0,58	7,95	0,87
10	79,33	0,88	4,81	1,05
11	79,57	0,53	8,57	0,80
12	69,20	1,13	8,33	1,38
13	77,72	1,00	5,42	1,20
14	78,83	0,79	9,70	1,25
15	69,96	1,08	15,76	1,82
16	70,92	1,73	8,13	2,09
Media	74,27	1,12	7,69	1,40

5 CONCLUSIONES

De los parámetros calculados para evaluar la precisión de este método de segmentación, la métrica de solapamiento es la más útil para establecer comparaciones con otros métodos, ya que es el valor más estandarizado. En la Tabla 3 se recuerdan los valores medios obtenidos para los dos conjuntos segmentados más importantes:

Tabla 3. Valores medios de la métrica de solapamiento

Métrica de solapamiento (%)	
Materia gris	66,58
Materia blanca	74,27

La base de datos IBSR, de donde hemos obtenido las resonancias magnéticas empleadas en este trabajo, proporciona también valores de la métrica de solapamiento para otros métodos de segmentación [9]:

Tabla 4. Métrica de solapamiento para distintos algoritmos

Materia gris	Materia blanca	Método
55.0 %	55.4 %	Máximo a posteriori (MAP)
55.8 %	56.2 %	MAP ajustado
56.4 %	56.7 %	MAP adaptativo
53.5 %	55.1 %	Máxima probabilidad
47.7 %	57.1 %	k-medias

Por tanto, los valores que se han obtenido son *mejores* que los conseguidos con otros métodos. Es decir, el tratamiento de la imagen mediante lógica borrosa, permite mejores resultados en la segmentación de los tejidos presentes en la misma.

Además, en IBSR se calcula el valor de la métrica de solapamiento para comparar dos segmentaciones manuales realizadas por dos expertos distintos, y se obtiene un valor del 85 % aproximadamente. Por tanto, teniendo en cuenta que ese es el máximo valor posible (es imposible alcanzar el 100%), los valores que se han obtenido mediante este algoritmo de difuso de C medias (con la extracción previa del cráneo) son *excelentes*.

El valor obtenido para materia gris es *peor*, debido a que el algoritmo tiene dificultades para segmentar la zona del tálamo y los ganglios basales, es decir, las estructuras de materia gris internas, que no pertenecen a la corteza (Figura 5). Este problema, sin embargo, es frecuente en la mayoría de los métodos de segmentación existentes, ya que el nivel de gris de esas zonas es intermedio entre el de la materia blanca y el nivel de la materia gris.

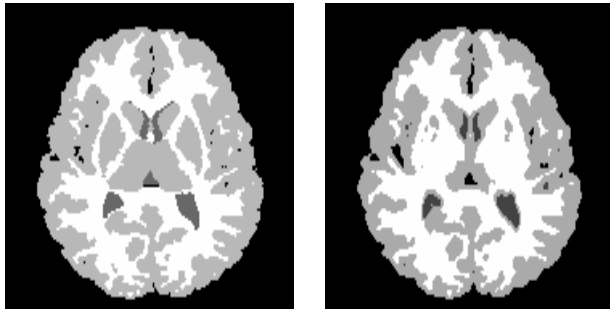
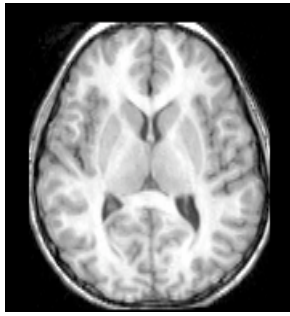


Figura 5. Imagen original, segmentación manual y difusa.

- [8] P. Perona and J. Malik, "Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion", *IEEE Trans. on Patt. Analysis and Machine Intelligence*. Pág 629-639, 1990.
- [9] J. C. Rajapakse and Frithjof Kruggel. Segmentation of MR images with intensity inhomogeneities, *Image and Vision Computing*. Pág. 165-180, 1998.
- [10] J. Talairach, P. Tournoux, Coplanar Stereotactic Atlas of the Human Brain. Thieme, Stuttgart. 1988
- [11] L. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and control*, Pág 338-353, 1965

Agradecimientos

Por último, agradecer al Departamento de Matemática e Informática de la Universidad Pública de Navarra y al Servicio de Medicina Nuclear de la Clínica Universitaria de Navarra su colaboración.

Referencias

- [1] J. C. Bezdek, J. M. Keller, R Krishnapuram, N.R. Pal. Fuzzy Models and Algorithms for Pattern Recognition and Image Processing. 2005.
- [2] R. Duda and P. Hart. Pattern Classification and Scene Analysis, 1973. Pág. 216
- [3] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. Digital Image Processing. Addison-Wesley, Reading, Ma, 1992.
- [4] L. Ibanez, W. Schroeder, L. Ng, J. Cates. The ITK Software Guide. The Insight Software Consortium, dec 2003.
- [5] A. Kaufmann, *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*, Vol. 1 (Academic Press, New York, 1975)
- [6] D. Marr and E. C. Hildreth (1980). "Theory of edge detection." in: Proceedings of the Royal Society of London. 187-217.
- [7] Massachusetts General Hospital, Center for Morphometric Analysis. Internet Brain Segmentation Repository (IBSR). [Online]. Available: <http://neuro-www.mgh.harvard.edu/cma/ibsr>.

Un nuevo modelo formal de agregación difusa para máquinas vectores soporte multicategoría uno frente a uno

J.M. Puche

Departamento de
Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial,
Universidad de Granada,
18071 Granada, España
puche@decsai.ugr.es

J.M. Benítez

Departamento de
Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial,
Universidad de Granada,
18071 Granada, España
J.M.Benitez@decsai.ugr.es

J.L. Castro

Departamento de
Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial,
Universidad de Granada,
18071 Granada, España
castro@decsai.ugr.es

C.J. Mantas

Departamento de
Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial,
Universidad de Granada,
18071 Granada, España
cmantas@decsai.ugr.es

Resumen

Inicialmente, las máquinas de vectores soporte (SVMs¹) se diseñaron para resolver problemas de clasificación binaria. Sin embargo, gran cantidad de problemas reales de clasificación no son binarios sino multicategoría.

Este artículo se centra en el conjunto de técnicas que extienden estas máquinas para resolver problemas multicategoría utilizando clasificación de clases por parejas y que aprovechan los resultados de la Teoría de Conjuntos Difusos para mejorar su rendimiento e interpretabilidad.

Palabras Clave: Máquinas vectores soporte, clasificación multicategoría, agregación difusa.

1. Introducción

Las máquinas de vectores soporte (SVMs) surgen como un paradigma de aprendizaje dedicado a la resolución de problemas de clasificación.

Su buena capacidad de generalización es debido a que el modelo se fundamenta en una sólida base matemática, la Teoría de Aprendizaje Estadístico o Teoría de Vapnik–Chervonenkis [20].

Inicialmente, una SVM permitía resolver problemas de clasificación binaria. Su extensión para resolver problemas de clasificación multicategoría no es única y se considera un campo activo de investigación. A grandes rasgos, podemos subdividir los métodos para extender este modelo a la resolución de problemas multicategoría en cinco grandes grupos:

- En primer lugar, tenemos un conjunto de métodos que se basa en resolver un único problema de optimización que tiene en cuenta todos los datos y clases a la vez [7, 16, 21] (AO²).
- La aproximación más clásica [20] consiste en reducir el problema multicategoría a resolver un conjunto de problemas binarios, considerando clasificadores binarios que separan los datos de una clase frente a los del resto de clases (OvA³).
- Al igual que en el caso anterior, el problema multiclase se reduce a resolver un conjunto de problemas binarios, pero en esta ocasión y a diferencia del caso anterior, cada uno de los clasificadores binarios es del tipo uno frente a uno [14] o lo que es igual, considerando un clasificador binario por cada pareja de clases (PWC⁴).
- Métodos basados en obtener la distribución de probabilidad subyacente de los conjuntos de datos [22, 23]. Formalmente, para que estos métodos puedan aplicarse se deben cumplir una serie de hipótesis iniciales que no siempre son sencillas de verificar.
- Por último, [9] se aplica por primera vez la técnica de codificación de la salida de códigos de error (ECOC⁵) a la resolución de problemas multicategoría. Posteriormente, en [3] se describe una generalización de la técnica anterior (añade un nuevo símbolo) que permite representar todas las posibles divisiones binarias del problema multicategoría. En concreto, la manera de disponer los datos en meta clases para entrenar clasificadores binarios se corresponde con la codificación de clases que se utiliza en ECOC. Por otro lado, las diversas técnicas OvA y PWC para, a partir de las salidas

²Término en inglés, all-at-once.

³Término en inglés, one-versus-all.

⁴Término en inglés, pairwise classification o all-pairs.

⁵Término en inglés, error correcting output code.

¹Término en inglés, Support Vector Machine.

de los clasificadores binarios, obtener la clase final para un ejemplo se corresponderían con técnicas de decodificación.

Gran parte de los métodos anteriores son ampliamente revisados en [11, 18].

Cuando se extienden las SVMs a problemas multicategoría utilizando OvA o PWC pueden aparecer regiones sin clasificar, en estas regiones se requieren *reglas de desempate* que nos permitan realizar la clasificación de los datos que caen en su interior.

Abe e Inoue fueron los pioneros en introducir el uso de conceptos de lógica difusa en los modelos de SVMs para multicategoría para evitar las regiones sin clasificar tanto utilizando técnicas OvA como PWC. El rendimiento y validez de sus modelos se muestra en [2, 12, 13].

En este artículo, nos centramos en los métodos PWC para SVMs multicategoría. A pesar de esto nuestra propuesta también se puede aplicar a OvA, como se hizo en [12].

1.1. Objetivos

Nuestro objetivo es proponer un modelo difuso para PWC SVMs multicategoría que extienda el modelo difuso de Abe e Inoue [2] que utiliza el operador mínimo, partiendo de que una clase es rechazada utilizando únicamente la información existente en su contra, en los puntos siguientes:

- Obteniendo grados de pertenencia para las clases que pertenezcan al intervalo unidad, lo cual es un estándar en el área de la Teoría de Conjuntos Difusos (FST⁶). Esto no ocurre con el modelo de Abe et. al.
- Una clase es rechazada teniendo en cuenta toda la información existente en su contra. Utilizaremos el operador *suma* aritmética para realizar la agregación de dicha información. En este sentido, nuestro modelo generaliza al propuesto por Abe e Inoue que aplica el operador *mínimo*. Como veremos en determinados casos esto permite aumentar el rendimiento de estos métodos.

1.2. Estructura del trabajo

Este artículo se divide en las siguientes secciones. A continuación en la Sección 2.1, motivaremos el modelo que presentamos en este artículo para seguidamente comenzar la descripción del mismo en la Sección 2.2.

Continuamos en la Sección 3 con un análisis empírico que muestra el buen rendimiento del método que proponemos. Finalmente, expondremos algunas conclusiones así como trabajo futuro.

2. Modelo difuso para la agregación de clasificadores uno frente a uno

2.1. Motivación

En la aproximación convencional un problema multiclase con K clases es resuelto convirtiéndolo en K problemas de clasificación binarios. En cada uno de los cuales, los datos pertenecientes a la clase i -ésima son separados de las restantes clases. Kressel [14] convierte un problema multiclase con K clases en $K(K-1)/2$ problemas de clasificación binaria, a este esquema se le denomina PWC.

Sea P un problema multicategoría con K clases a resolver utilizando PWC SVMs. Al clasificar un dato podemos distinguir los dos escenarios siguientes:

1. Hay una clase con $K-1$ votos positivos a su favor.
2. Todas las clases tienen al menos un voto en contra.

Este último escenario de aquí en adelante lo vamos a considerar el caso problemático. A continuación, vamos a describir brevemente los principales métodos PWC con sus ventajas y desventajas:

- *Recuento de votos*. Un dato que se evalúa pertenece a la clase que *sume* mayor número de votos positivos. Una clase i se dice que obtiene un voto positivo cuando una de las SVMs binarias que clasifican esta clase frente a cualquiera de las clases restante responda que es de clase i . Sea un hiperplano que clasifica los datos de la clase i frente a los datos de la clase j , un voto negativo para la clase i significa que el hiperplano ha clasificado el dato perteneciente a la clase j .

Al usar esta técnica de recuento de votos pueden aparecer regiones sin clasificar. Estas regiones aparecen cuando un conjunto de clases tienen el mismo número máximo de votos positivos. Ésta es una desventaja de este método.

- *DDAG*. Para resolver el problema de las regiones sin clasificar y aliviar el coste computacional de evaluar $K \times (K-1)/2$ SVMs binarias (estamos suponiendo un problema multiclase con K clases), Platt et al. propusieron aplicar el algoritmo DDAG.

Este método clasifica un ejemplo en $K-1$ pasos. En cada etapa, utiliza una frontera de decisión

⁶Término en inglés, Fuzzy Set Theory.

que clasifica los datos de la clase i frente a los de la clase j , de forma que tras evaluar dicha SVM binaria una de las dos clases es descartada. Si la SVM binaria indica que el dato pertenece a la clase i , entonces el algoritmo DDAG descarta la clase j . Desde este punto de vista, este método se basa en el uso de la información negativa proporcionada por las SVMs binarias para obtener la clase final para un dato a clasificar.

La desventaja de esta técnica se produce cuando todas las clases tienen al menos un voto en contra. En este caso, los datos que se encuentran en estas regiones se clasifican siguiendo un proceso no determinístico, el cual depende de la estructura del DAG [1].

- **Fuzzy Pairwise SVM (FPWSVM).** Este método también se propone para resolver las regiones sin clasificar. El modelo propuesto por Abe e Inoue [2] tiene en cuenta la *fuerza* de la salida continua de cada función de decisión asociada a cada clase para calcular a partir de la misma un grado de pertenencia *no estándar* del dato a cada clase.

Si el dato pertenece al caso problemático, FPWSVM considera la cantidad de información negativa que proporciona la función de decisión para obtener la clase para el dato evaluado, al igual que hace el método DDAG. Al tener en cuenta la fuerza de dicha información negativa evita el problema del DDAG para los datos en la región problemática, asignándoles una clase siguiendo un proceso determinístico.

El modelo difuso que se propone no es estándar, ya que los grados de pertenencia para las clases pertenecen al intervalo $(-\infty, 1]$. Mientras que en Teoría de Conjuntos Difusos (FST), los grados de pertenencia caen en el intervalo unidad.

El grado de pertenencia a una clase de un dato se obtiene agregando los grados de pertenencia que se obtienen de cada función de decisión utilizando el operador del mínimo *min* o de la media aritmética *avg*.

El operador de la media aritmética tiene un comportamiento inestable [2, 19] en las Fuzzy Pairwise Least Square SVMs. Cuando se utiliza el operador *min*, este modelo solamente considera la fuerza del voto más negativo para clasificar el dato. Esta aproximación en ciertas situaciones no funciona correctamente, ya que ignora la restante información negativa para decidir si se descarta o no una clase.

Para superar las desventajas de los métodos anteriores, proponemos un nuevo modelo que auna los puntos fuertes de los modelos anteriores:

- Del *recuento de votos* toma el agregar la información utilizando el operador *suma*.
- Del algoritmo DDAG utiliza la idea de usar las funciones de decisión de las SVMs binarias para *rechazar* una clase.
- Finalmente, del modelo FPWSVM coge el tener en consideración el *grado* de la salida de las funciones de decisión.

Eso sí, sin compartir sin puntos débiles:

- *Recuento de votos:* Las regiones sin clasificar que surgían cuando un conjunto de clases tenían el mismo número máximo de votos positivos.
- DDAG: Los datos pertenecientes a la región problemática eran clasificados siguiendo un proceso no determinístico.
- FPWSVM utilizan el operador de *min*: Los datos en la región problemática se clasificaban teniendo en cuenta no solamente el grado del voto más negativo para cada clase.

2.2. Formalización de la agregación difusa

Tal y como se ha comentado en la Sección 2.1, nuestro modelo difuso para PWC utilizando SVMs (FPSVM) se basa en utilizar el grado de los votos negativos para rechazar clases. Además, proponemos agregar este grado de los votos negativos utilizando el operador *suma*.

Para evitar el efecto de los votos positivos, siguiendo la filosofía marcada por el FPWSVM con el operador *min* descrito anteriormente, utilizamos la siguiente función T sobre la salida continua de cada una de las SVMs binarias:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \geq 0, \\ x & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (1)$$

Esta función transforma los grados de los votos positivos al elemento neutro del operador suma, de esta manera, la decisión para rechazar o no una clase se toma utilizando únicamente la información proveniente de los votos en contra de dicha clase.

La clasificación de un dato $\mathbf{x}$ se realiza como sigue:

$$clase(\mathbf{x}) = \arg \max_{i=1, \dots, K} \left\{ \sum_{\substack{j=1, \dots, K \\ j \neq i}} T(H_{ij}(\mathbf{x})) \right\}. \quad (2)$$

Tal y como se puede deducir de (2), la clase final a la que se asigna $\mathbf{x}$ es aquella que tiene menos información en su contra, tal y como dijimos en la Sección 2.1.

Para mejorar la interpretabilidad de los resultados, procedemos a emborronar el grado de cada uno de los votos. De esta forma obtenemos para cada clase un grado de pertenencia en el intervalo unidad, lo cual hace que el modelo sea más interpretable para un usuario externo que lo utilice. Esto se debe a que cuando se predice la clase de un dato, el usuario puede saber con facilidad en qué medida pertenece el dato a cada clase, gracias a que el rango de pertenencia está en el intervalo unidad. A continuación, proporcionamos un modelo difuso para PWC aplicado a SVMs multiclase:

- En primer lugar, proponemos utilizar la siguiente función de pertenencia para emborronar la cantidad total de información en contra de una determinada clase:

$$\mu(x) = \frac{2}{1 + \exp(-2x)}. \quad (3)$$

Al utilizar la función de pertenencia definida arriba, conseguimos que el grado de pertenencia de los ejemplos a cada clase caiga dentro del intervalo $[0, 1]$. Éste es el rango típico para los grados de pertenencia en FST.

Ya que (3) es continua y estrictamente creciente, la clasificación que se obtiene aplicando la regla del máximo descrita en (2) y la presentada a continuación son equivalentes:

$$clase(\mathbf{x}) = \arg \max_{i=1, \dots, K} \left\{ \mu \left(\sum_{\substack{j=1, \dots, K \\ j \neq i}} T(H_{ij}(\mathbf{x})) \right) \right\}. \quad (4)$$

- Si aplicamos el concepto de f-dualidad [4], la sumatoria presente en (4) que agrega la información negativa para cada clase puede descomponerse como sigue:

$$clase(\mathbf{x}) = \arg \max_{i=1, \dots, K} \{ \otimes_{\substack{j=1, \dots, K \\ j \neq i}} \mu(T(H_{ij}(\mathbf{x}))) \}. \quad (5)$$

donde el operador $\otimes$ se define como en [17]:

$$a \otimes b = \frac{ab}{1 + (1-a)(1-b)}, \quad (6)$$

con $a, b \in [0, 1]$. Este operador es una t-norma de la familia de Hamacher [8, 10, 15].

El modelo difuso presentado para PWC aplicado a SVMs multiclase tiene las siguientes características:

1. De cada hiperplano que separa los datos de la clase i de los correspondientes a la clase j aplicando (3) obtenemos un grado de pertenencia del dato a cada una de las clases que separa.

2. Para cada clase i vamos a tener $K - 1$ grados de pertenencia diferentes (teniendo en cuenta un problema multicategoría con K clases), estos $K - 1$ grados son agregados utilizando el operador definido en (6). Como resultado, obtenemos un grado de pertenencia en el intervalo unidad para el dato a clasificar y para cada clase.
3. Finalmente, el dato se asigna a aquella clase que tenga el grado de pertenencia máximo.

A pesar de que el modelo aquí presentado se ha aplicado únicamente a SVMs, en general, la filosofía presentada puede adaptarse para ser utilizada en cualquier otro clasificador que utilice PWC y que proporcione una salida tanto en $\mathbb{R}$ como en el intervalo unidad.

3. Análisis experimental

Para mostrar la validez de nuestra propuesta hemos realizado un estudio experimental utilizando cuatro problemas del mundo real extraídos del repositorio de la UCI [5].

Comparamos el rendimiento de nuestra propuesta con los dos modelos siguientes: DDAG y FPWSVM con operador $\min$.

Los problemas seleccionados corresponden a los siguientes conjuntos de datos: **satimage**, **segment**, **vehicle** y **glass**. A continuación, detallamos cómo hemos seleccionado el conjunto de parámetros para las SVMs:

- **satimage**. Este conjunto de datos está dividido en dos partes: entrenamiento y prueba. Para ajustar correctamente los parámetros de la SVM, a su vez, hemos muestreado de manera independiente y uniformemente distribuida los datos de la partición de entrenamiento, en una nueva partición de entrenamiento y otra de validación. Los porcentajes asignados a cada una son aproximadamente el 70 % y 30 %, respectivamente, de los datos de la partición de entrenamiento inicial. Para cada conjunto de parámetros considerado se ha entrenado una SVM con el 70 % de los datos y el rendimiento del modelo obtenido se ha evaluado con el 30 % restante. De esta forma, el conjunto de parámetros para la SVM que hemos seleccionado es aquél que proporciona el mejor rendimiento sobre esta partición de validación. Con este conjunto de parámetros entrenamos la SVM utilizando el conjunto de entrenamiento inicial al completo. Finalmente, el rendimiento que indicamos en la Tabla 2 es el porcentaje de aciertos del modelo obtenido al evaluarlo sobre la partición de prueba.

- En **segment**, **vehicle** y **glass** para conseguir la SVM con un conjunto de parámetros lo más óptimo posible hemos aplicado una validación cruzada de 10 particiones sobre los conjuntos de datos iniciales. Los porcentajes de aciertos detallados en la Tabla 2 se corresponden con los mejores porcentajes en media obtenidos a partir de la validación cruzada de 10 particiones que se ha aplicado.
- Los atributos de entrada para todos los conjuntos de datos han sido escalados al intervalo $[-1, 1]$.
- Para todas las SVMs binarias se ha utilizado un kernel gaussiano: $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp(\gamma \cdot \|\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\|^2)$.
- Para obtener el mejor conjunto de parámetros se ha utilizado un esquema de rejilla con los siguientes conjuntos para los dos parámetros a optimizar: $\gamma = \{2^4, 2^3, \dots, 2^{-10}\}$ y $C = \{2^{14}, 2^{13}, \dots, 2^{-2}\}$.
- El criterio de parada utilizado para detener el entrenamiento de las SVMs binarias optimizadas ha sido que la violación de las condiciones de Karush-Kahn-Tucker [20, 6] fuese menor que 10^{-3} .

Para una información más detallada de los conjuntos de datos consultar [5]. La experimentación se ha ejecutado en un Pentium IV 2.4 GHz con 2GB de memoria principal bajo sistema operativo Fedora Core 4. La construcción de los métodos multicategoría comparados en los experimentos se ha realizado empleando la biblioteca LIBSVM [6].

Cuadro 1: Mejor conjunto de parámetros (C, γ) para cada modelo.

Nombre	DDAG	Min	⊗
satimage	$(2^4, 2^0)$	$(2^4, 2^0)$	$(2^4, 2^0)$
segment	$(2^{12}, 2^{-3})$	$(2^{12}, 2^{-3})$	$(2^{12}, 2^{-3})$
vehicle	$(2^9, 2^{-4})$	$(2^9, 2^{-4})$	$(2^9, 2^{-4})$
glass	$(2^{11}, 2^{-3})$	$(2^{11}, 2^{-3})$	$(2^{11}, 2^{-3})$

Cuadro 2: Comparativa utilizando kernel gaussiano. Los mejores rendimientos medios en prueba aparecen resaltados en negrita.

Nombre	DDAG	Min	⊗
satimage	91,25	91,45	91,45
segment	97,61	97,74	97,74
vehicle	86,05	86,41	86,52
glass	72,89	73,83	74,76

4. Análisis de resultados

Los tres métodos comparados tienen una habilidad de generalización similar. Hay que tener en cuenta que

los métodos difieren en su comportamiento cuando un dato cae dentro de la región problemática. Para los puntos fuera de esta región los tres métodos proporcionan idéntico resultado de clasificación. Por tanto, las diferencias serán más o menos significativas dependiendo de la amplitud de dichas regiones y de que los datos en dicha región sigan una distribución concreta. Frente al mínimo se observa que nuestra propuesta mejora sus resultados en dos de los cuatro problemas. Si nos centramos en la región problemática, nuestra técnica alcanza un porcentaje de acierto del 70 % y 71,4 % en los problemas **glass** y **vehicle**, respectivamente. El porcentaje de aciertos para estos mismos problemas en la región problemática usando el operador del mínimo son del 50 % y 57,1 %, respectivamente. Frente al método DDAG la diferencia de resultados de clasificación en la región problemática se hace mayor, ya que el porcentaje de acierto de esta técnica para los dos problemas considerados antes es del 30 % y 28,6 %, respectivamente.

5. Conclusiones y trabajo futuro

En este artículo, hemos propuesto un modelo difuso para PWC SVMs multicategoría que extiende el modelo presentado por Abe e Inoue que utiliza el operador mínimo. Nuestra propuesta presenta las siguientes ventajas:

- El modelo difuso propuesto es estándar, ya que obtiene grados de pertenencia que caen en el intervalo unidad. Esto no ocurría en el modelo propuesto por Abe e Inoue.
- El proceso de clasificación de un dato sigue una filosofía clara que consiste en rechazar una clase teniendo en cuenta toda la información existente en su contra. Tal y como se observa en los resultados, esta filosofía para determinados problemas permite mejorar el rendimiento de clasificación en la región problemática.

Hemos realizado un análisis experimental donde se muestra la validez de nuestra propuesta frente a una técnica estándar como el DDAG y frente al modelo difuso que propone Abe e Inoue. Del análisis de los resultados se extrae que el considerar toda la información en contra de una clase para rechazarla es interesante para mejorar los resultados de clasificación para los datos que están dentro de la región problemática.

Agradecimientos

El presente trabajo de investigación ha sido subvencionado parcialmente por el Ministerio de Educación

y Ciencia, así como por el Ministerio de Ciencia y Tecnología a través de los proyectos TIC2003-04650 y TIN2004-07236, respectivamente.

Referencias

- [1] S. Abe. Analysis of multiclass support vector machines. In *Proceedings of International Conference on Computational Intelligence for Modelling Control and Automation (CIMCA'2003)*, pages 385–396, Viena(Austria) - February 2003.
- [2] S. Abe and T. Inoue. Fuzzy support vector machines for multiclass problems. In *Proceedings of European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN'2002)*, pages 113–118, Bruges(Belgium) 24-26 April 2002.
- [3] E.L. Allwein, R.E. Shapire, and Y. Singer. Reducing multiclass to binary: A unifying approach for margin classifiers. *Journal of Machine Learning Research*, 1:113–141, 2000.
- [4] J.M. Benítez, J.L. Castro, and I. Requena. Are artificial neural networks black boxes? *IEEE Transactions on Neural Networks*, 8(5):1156–1164, 1997.
- [5] C. L. Blake and C. J. Merz. (1998). UCI Repository of machine learning databases. univ. california, dept. inform. comput. sci., irvine, ca. [Online] <http://www.ics.uci.edu/mllearn/MLSummary.html>.
- [6] C. Chang and C. Lin. *LIBSVM: a library for support vector machines*, 2001. Software available at <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>.
- [7] K. Crammer and Y. Singer. On the algorithmic implementation of multiclass kernel-based vector machines. *Journal of Machine Learning Research*, 2(Diciembre):265–292, 2001.
- [8] M. Detyniecki. Mathematical aggregation operator and their application to video querying. Doctoral thesis — research report 2001-2002, Laboratoire d'Informatique de Paris, 2000.
- [9] Thomas G. Dietterich and Ghulum Bakiri. Solving multiclass learning problems via error-correcting output codes. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2:263–286, 1995.
- [10] H. Hamacher. *Über logische Aggregationen nicht-binar explizierter Entscheidungskriterien*. Rita G. Fischer Verlag, Frankfurt, 1978.
- [11] C. Hsu and C. Lin. A comparison of methods for multiclass support vector machines. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 13(2):415–425, March 2002.
- [12] T. Inoue and S. Abe. Fuzzy support vector machines for pattern classification. In *Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN '01)*, volume 2, pages 1449–1454, July 2001.
- [13] T. Kikuchi and S. Abe. Comparison between error correcting output codes and fuzzy support vector machines. *Pattern Recognition Letter*, 26:1937–1945, 2005.
- [14] U.H.-G. Kressel. Pairwise classification and support vector machines. In C.J.C. Burges B. Scholkopf and A.J. Smola, editors, *Advance in Kernel Methods, Chapter 15*, pages 255–268. The MIT Press, Cambridge, MA, 1999.
- [15] L.I. Kuncheva. *Fuzzy classifier design*. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Physica-Verlag, 2000.
- [16] Y. Lee, Y. Lin, and G. Wahba. Multicategory support vector machines. In *Proceedings of the 33rd Symposium on the Interface*, 2001.
- [17] C.J. Mantas. T-norms and t-conorms in multilayer perceptrons. In *Proceedings of the Joint 4th EUSFLAT and 11th LFA Conference (EUSFLAT-LFA'2005)*, pages 1313–1318, Barcelona(Spain) September 2005.
- [18] R. Rifkin and A. Klautau. In defense of one-vs-all classification. *Journal of Machine Learning Research*, 5:101–104, 2004.
- [19] D. Tsujinishi and S. Abe. Fuzzy least squares support vector machines for multiclass problems. *Neural Networks*, 16(5–6):785–792, 2003.
- [20] V. Vapnik. *Statistical Learning Theory*. John Wiley and Sons Inc. New York, 1998.
- [21] J. Weston and C. Watkins. Multi-class support vector machines. Technical Report CSD-TR-98-04, Royal Holloway, University of London, Department of Computer Science, 1998.
- [22] T.F. Wu, C.J. Lin, and R.C. Weng. Probability estimates for multi-class classification by pairwise coupling. *Journal of Machine Learning Research*, 5(Agosto):975–1005, 2004.
- [23] B. Zadrozny. Reducing multiclass to binary by coupling probability estimates. In *Proceedings of NIPS*, 2001.

Aproximaciones simples a una superficie mediante multiresolución y TSK

Adolfo R. de Soto

Escuela de Ingenierías Industrial e Informática
Universidad de León
ddears@unileon.es

Conrado A. Capdevila

Escuela de Ingenierías Industrial e Informática
Universidad de León
conrado.andreu@mac.com

Resumen

En este trabajo se describe un método para la construcción de sistemas TSK de primer orden para una superficie. El proceso está guiado por la información de la transformada wavelet y un parámetro que representa el grado de precisión deseado. De forma iterativa, el algoritmo propuesto utiliza esa información para establecer una partición del dominio de discurso y para realizar una simplificación acorde en la función objetivo. Así se detectan y aprovechan las zonas en las que el comportamiento de la función admite una representación de menor resolución sin comprometer la precisión. El resultado de este proceso sirve como base para la construcción del sistema TSK final que ofrece un modelo simple allí donde es posible y más complejo donde la precisión lo requiere.

Palabras clave: Sistemas de reglas borrosas, sistemas TSK, wavelets, aproximación.

1. Introducción

En los sistemas TSK clásicos no tarda en aparecer un problema de explosión en el número de etiquetas necesarias para lograr una cierta precisión. Por ejemplo, si se desea representar la superficie de la fig. 1, las zonas rugosas van a provocar la aparición de muchas etiquetas en ambas variables de entrada, incluso cuando la mayor parte del dominio de definición de esta función no requiere de esa complejidad. El sistema borroso final se ve perjudicado por el comportamiento de una pequeña zona de la superficie debido al comportamiento tensorial de los sistemas de reglas.

Una forma de abordar el problema es extender el modelo de sistema borroso para trabajar localmente, por ejemplo mediante una arquitectura jerárquica. Así, en

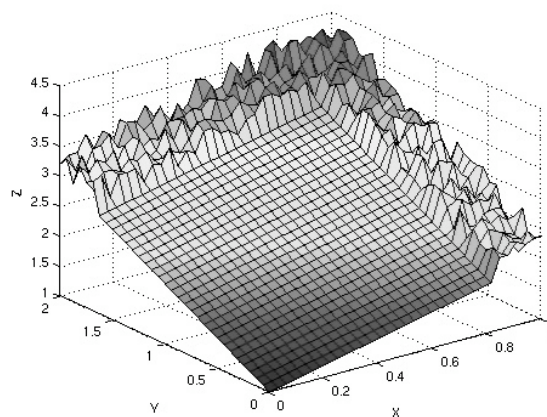


Figura 1: Superficie problemática en TSK

las zonas en las que sea necesario se incrementará el número de etiquetas, pero sin que esto evite una representación sencilla donde sea posible.

La transformada wavelet [3, 8] es una herramienta muy utilizada en el procesamiento de la señal. La transformada de una señal consiste en un conjunto de coeficientes de escala y otro de detalle. Los primeros son una representación de la señal en un nivel de resolución menor (más gruesa); los segundos contienen la información de diferencia entre ambas resoluciones. Si se desea, los coeficientes de escala pueden volver a ser transformados para obtener otro par de conjuntos, en un siguiente nivel de resolución aún menor.

La información de los coeficientes tiene carácter local, de forma que cada uno de ellos es relevante para una determinada zona del dominio de definición. Es posible aprovechar esta propiedad para realizar un análisis basado en un error local y encontrar los coeficientes de detalle de los que es posible prescindir. La equivalencia conocida entre una descomposición mediante wavelets basadas en b-splines y los sistemas TSK [5, 12] permite construir un sistema borroso a partir de la transforma-

da. En este trabajo se utiliza una implementación de la transformada en una dimensión basada en el esquema *lifting* [11], que se extiende mediante producto tensorial a varias dimensiones. Se utilizan b-splines [4] de segundo orden como funciones de escala interpolantes, por lo que el nivel de resolución y la posición de un coeficiente determinan directamente las funciones de pertenencia en los antecedentes y el valor del coeficiente es el consecuente de la regla. En las regiones en las que sea posible trabajar con pocos coeficientes, el sistema TSK asociado será simple. En aquellas zonas en las que sea necesaria más precisión y por lo tanto no se pueda prescindir de ningún coeficiente, el sistema TSK será necesariamente más complejo.

La transformada rápida por wavelets [9] es un algoritmo muy eficiente y permite obtener información local del comportamiento de una superficie sin gran coste computacional, algo que no sucede con métodos computacionales más complejos como los algoritmos genéticos [6]. Además trabajando con b-splines se consigue una alta interpretabilidad [2].

Como se verá a continuación, el algoritmo de simplificación propuesto utiliza una estructura en árbol *quadtree* para trabajar con los coeficientes de la transformada y las regiones asociadas en el dominio de definición. Esta estructura de datos es muy habitual en procesamiento de imágenes y computación gráfica, y su relación con la transformada wavelet ha sido muy utilizada [7, 13].

2. Descripción del método de simplificación

Dada una superficie, el método de simplificación aquí presentado utiliza los coeficientes de la transformada wavelet para determinar las regiones del universo de discurso en las que es posible descartar los detalles y obtener así una versión de la superficie de menor resolución. La elección se hace en base a un valor umbral, idéntico para todo el dominio de definición. Se trata de un proceso iterativo que comienza analizando la superficie en la mayor resolución posible. Las regiones iniciales, que son las más pequeñas que se consideran, se agrupan y se localizan los grupos que pueden ser simplificados. Los coeficientes de detalle elegidos se anulan y las regiones afectadas se sustituyen por una única región de mayor tamaño. La superficie se reconstruye entonces mediante la transformada inversa, de forma que los mismos pasos de simplificación que se llevan a cabo en la partición del dominio de definición se reflejan en la propia superficie. A continuación, se procesan los siguientes niveles de resolución, cada vez más gruesa. Con la ayuda de una estructura en árbol *quadtree*, se acumulan los resultados para obtener una

partición del dominio de discurso y una simplificación acorde de la superficie. El último paso es generar un sistema TSK a partir de esa información: la partición del universo de discurso genera las funciones de pertenencia en los antecedentes y los valores de la superficie los consecuentes.

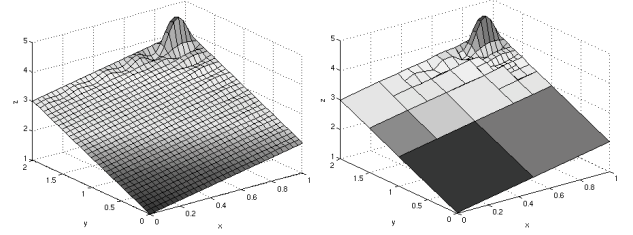


Figura 2: Simplificación mediante *quadtree*

En la fig. 2 se muestra el resultado para una superficie de ejemplo. La estructura inicial, a la izquierda en la figura, contiene muchas regiones pequeñas y el sistema TSK asociado necesita muchas reglas y etiquetas. Sin embargo, parece evidente que esa resolución solo es necesaria en el cuadrante superior, donde el comportamiento de la función no puede ser representado con precisión si no es mediante alta resolución. En el resultado se aprecia cómo el algoritmo ha colapsado las zonas donde esa resolución no es necesaria.

El paso final es generar un sistema TSK. En cada región final la superficie se aproxima mediante cuatro reglas borrosas, centradas en las esquinas. En los antecedentes se utilizan funciones de pertenencia triangulares para establecer la relación con la transformada wavelet con b-splines de segundo orden. El consecuente de cada regla es el valor de la superficie en esa esquina. El sistema final se construye a partir de esas reglas. El método permite utilizar la estructura jerárquica del árbol *quadtree* para definir una arquitectura jerárquica de un sistema borroso, así como generar un sistema tradicional. Para realizar esto último, la estructura del árbol se refleja en funciones de pertenencia trapezoidales en los antecedentes que efectivamente determinan la activación de las reglas asociadas a una región cuando sea necesario.

2.1. Desarrollo del algoritmo

Consideraremos una superficie $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ de dos variables, definida en un intervalo $I = [x_l, x_h] \times [y_l, y_h]$. La entrada al algoritmo consiste en un muestreo de la superficie z en los puntos de una rejilla R_l definida como $R_l = \{(x_i, y_j) : x_i = x_l + j2^{-l}(x_h - x_l), y_j = y_l + i2^{-l}(y_h - y_l) \mid i, j \in \{0, 1, \dots, 2^l\}\}$, donde l indica la resolución. Así, tendremos como entrada una matriz de puntos $z(x_i, y_j) = z_{ij}$.

En el algoritmo se utilizará una estructura de datos habitual en la computación gráfica, un árbol *quadtrees*. Éste es un árbol en el que cada nodo tiene cuatro hijos. Aquí se hacen corresponder los nodos con regiones cuadradas del dominio de definición, de forma que cualquier región pueda ser dividida en cuatro cuadrantes (sub-regiones) al tomar los puntos medios en cada dimensión de la región original. De esta forma, el árbol permite almacenar una descomposición jerárquica del dominio de definición. Los nodos hoja son las regiones que no están divididas.

El algoritmo de simplificación parte de un árbol completo Q , que representa la rejilla de muestreo. El proceso de construcción de un árbol se inicia con un único nodo que representa el dominio de definición I . En el primer nivel de división, se toman los puntos medios en cada dimensión y se generan así cuatro sub-regiones; cada uno de los nuevos cuatro nodos en el primer nivel del árbol *quadtrees* representa una de esas sub-regiones. Si se elige un esquema de direccionamiento como el que aparece en la fig. 3, y siendo $x_m = (x_l + x_h)/2$ e $y_m = (y_l + y_h)/2$, el primer nivel se corresponde con las regiones (1) $[x_l, x_m] \times [y_m, y_h]$, (2) $[x_l, x_m] \times [y_l, y_m]$, (3) $[x_m, x_h] \times [y_l, y_m]$ y (4) $[x_m, x_h] \times [y_m, y_h]$. A continuación se sigue dividiendo recursivamente en todos ellos hasta alcanzar la profundidad necesaria para representar todas las regiones de la rejilla de muestreo. A medida que el algoritmo avanza el árbol Q alcanzará otras configuraciones, debido a las simplificaciones producidas, como por ejemplo la que se muestra en la fig. 3.

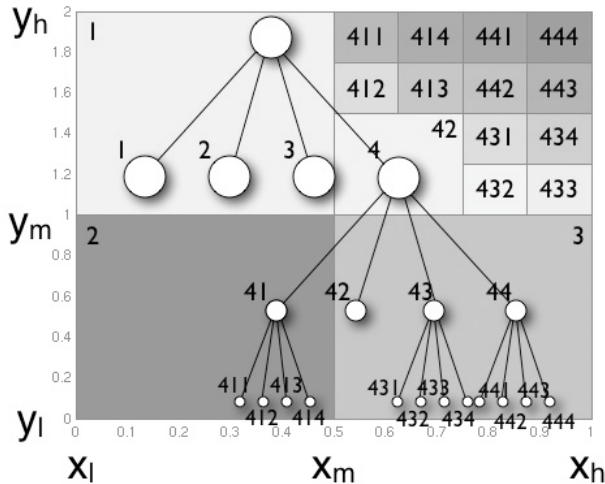


Figura 3: Ejemplo de árbol *quadtrees*

2.1.1. Transformada Wavelet

El algoritmo procede por iteraciones y en cada una de ellas se aplica la transformada por wavelets. La imple-

mentación de la transformada en una dimensión se basa en el esquema *lifting* [10], en este caso la de la familia biortogonal $\{2, 2\}$ de Cohen-Daubechies-Feauveau, en el que las funciones de escala son b-splines de segundo orden. La extensión a varias dimensiones se realiza mediante producto tensorial, de forma que el cálculo de la transformada se aplica secuencialmente a lo largo de cada dimensión. El resultado de aplicar la transformada a la matriz z_{ij} es una matriz de coeficientes de aproximación λ y de detalle γ entrelazados; si en primer lugar se trabaja en las filas y por último en las columnas, el resultado sería:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \gamma\lambda & \lambda^2 & & \\ \lambda\gamma & \gamma^2 & \lambda\gamma & \dots & \\ \lambda^2 & \gamma\lambda & \lambda^2 & & \\ & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de detalle son comparados con el umbral ϵ fijado y se hacen cero aquellos que están por debajo de este umbral obteniéndose una nueva matriz $\tilde{z}_{ij}$. El resultado de la iteración actual se obtiene al aplicar la transformada inversa a $\tilde{z}_{ij}$ para volver al nivel inicial.

En la fig. 4 se puede ver la posición de los coeficientes para una configuración inicial del árbol sobre una rejilla de cuatro por cuatro. En este caso el árbol tiene tres niveles de profundidad y la asignación se ha realizado en el nivel dos, inmediatamente superior a las hojas, donde se encuentran los nodos que pueden ser simplificados. La disposición geométrica de los coeficientes es consecuencia de la implementación de la transformada wavelet mediante *lifting* y permite establecer una relación entre nodos y coeficientes.

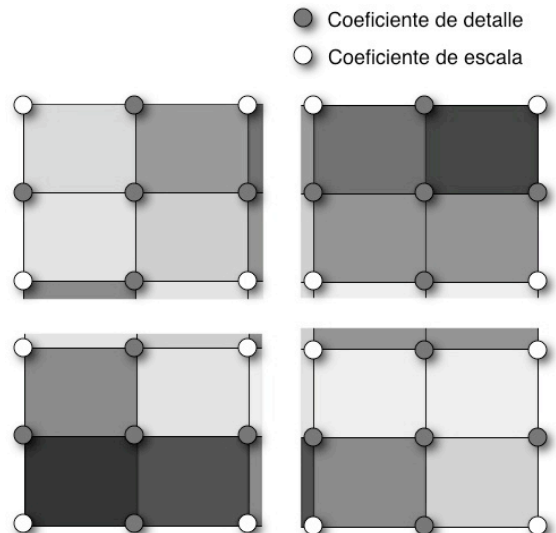


Figura 4: Asignación de coeficientes

En el algoritmo de simplificación propuesto aparece, hasta cierto punto, la misma idea que en la descomposición piramidal. Sin embargo, el descenso de un nivel de resolución (mayor) al siguiente se realiza solo en aquellas zonas en las que se pudo simplificar la superficie. La decisión se toma en base a la información acumulada en el *quadtree*.

2.1.2. Iteradores

En el árbol todos los nodos pueden llevar atributos, como por ejemplo el color en el que representar la región o los coeficientes de detalle de la transformada wavelet asociados. Muchas de las operaciones en el algoritmo de simplificación se realizan mediante iteradores que recorren el árbol y consultan o asignan atributos, sustituyen nodos, etc.

Los atributos relevantes para el proceso de simplificación son:

- Coeficientes de detalle de la transformada wavelet. Se asignarán a los nodos que únicamente tengan hojas como nodos hijo, para estudiar su posible sustitución por un único nodo hoja.
- Valores de superficie de la función objetivo. Cada hoja tiene cuatro esquinas en las que resultará útil conocer el valor de la función, para construir un sistema de reglas o para representar de forma gráfica el árbol.
- Atributo de selección que permite definir un subconjunto de nodos, de forma que la siguiente operación se aplique solamente a ellos.

A continuación se hace una breve descripción de los iteradores relevantes para este algoritmo. Se trabaja con un árbol *quadtree* representado mediante $Q = (N, R, T, t)$, donde N es el conjunto de nodos, R la rejilla sobre la que está definido, T un conjunto de atributos y $t : N \rightarrow T$ la asignación de atributos a nodos.

- $Q = \text{annotateDetailCoefficients}(Q, \tilde{z}_{ij}, n)$: Este iterador recorre el árbol y anota los nodos de un nivel n dado con sus coeficientes de detalle, que se extraen de la transformada wavelet $\tilde{z}_{ij}$ de la superficie.
- $Q = \text{thresholdAndSelect}(Q, \epsilon)$: Busca los nodos que tengan asociados coeficientes de detalle. Si la energía contenida en estos coeficientes es menor que el valor umbral ϵ , se cambia su valor por cero y el nodo es seleccionado para su posterior simplificación.

- $\tilde{z}_{ij} = \text{extractDetailCoefficients}(Q, \tilde{z}_{ij}, l)$: Localiza los nodos con coeficientes de detalle en el nivel n dado y sustituye los valores correspondientes en la matriz de la transformada wavelet $\tilde{z}_{ij}$. Se utiliza para recuperar los coeficientes resultantes de la simplificación del iterador anterior.
- $Q = \text{mergeSelectedNodes}(Q)$: Los nodos seleccionados que tengan cuatro hojas como hijos se sustituyen por un único nodo hoja ya que con la precisión requerida por el umbral, es aceptable perder los detalles proporcionados por la resolución más fina.
- $Q = \text{annotateSurfaceValues}(Q, z_{ij}, n)$: Localiza los nodo hoja de un nivel n dado y utiliza las coordenadas de cada esquina para buscar el valor de la superficie asociado en la matriz de muestras z_{ij} .
- $S = \text{constructTSK}(Q, C)$: Como se verá más adelante, el último paso en el algoritmo es la generación de un sistema TSK, S , a partir de la información contenida en el *quadtree*. Este iterador aplica un constructor de reglas borrosas, C , en cada nodo hoja que visita y acumula el resultado en la base de reglas de un sistema TSK.

2.1.3. Algoritmo de simplificación

El proceso de simplificación se aplica por niveles de resolución, de la más fina a la más gruesa. En cada uno de ellos se asignan los coeficientes de detalle de ese nivel, se ponen a cero los que cumplen un criterio dado y por último se colapsan los nodos que resulten seleccionados. La nueva matriz de coeficientes se utilizará para reconstruir la superficie con las simplificaciones propuestas, mediante la transformada wavelet inversa.

En cada nivel de resolución se aplica la siguiente simplificación:

```
function [Q,  $\tilde{z}_{ij}$ ] = mergeRegionsAtLevel(Q,  $\epsilon$ ,  $\tilde{z}_{ij}$ , n)
    Q = annotateDetailCoefficients(Q,  $\tilde{z}_{ij}$ , n);
    Q = thresholdAndSelect(Q,  $\epsilon$ );
     $\tilde{z}_{ij} = \text{extractDetailCoefficients}(Q, \tilde{z}_{ij}, n)$ ;
    Q = mergeSelected(Q);
```

El algoritmo comienza colapsando regiones de la resolución más fina. La nueva matriz de coeficientes se utilizará para reconstruir la superficie mediante la transformada inversa, de forma que se tengan en cuenta las simplificaciones realizadas. Con esta nueva superficie se anotarán las regiones que no fueron simplificadas para disponer así de un valor para la salida z en cada esquina. El proceso se repite para los niveles de resolución cada vez más gruesa.

El algoritmo consiste entonces en aplicar la transformada wavelet *tlift*, simplificar las regiones y reconstruir la superficie mediante la transformada inversa *itlift* en cada nivel de resolución:

```
function Q = simplifyQuadtree(R, zij, ε)
    levels = log2(R.size - 1)
    Q = constructQuadtree(R, zij);
    for n=levels-1:-1:0
         $\tilde{z}_{ij}$  = tlift(zij);
         $\tilde{z}_{ij}$  = mergeRegionsAtLevel(Q, ε,  $\tilde{z}_{ij}$ , n);
        zij = itlift( $\tilde{z}_{ij}$ );
        Q = annotateSurfaceValues(Q, zij, n);
        zij = nextLevel(zij);
    end;
```

En la fig. 5 se muestran los pasos en la simplificación de un ejemplo. En la resolución más fina, solo en el cuadrante superior derecho no ha sido posible colapsar todas las regiones. Esto provoca la asignación de valores de superficie a las regiones más pequeñas, que ya no serán simplificadas. En los demás cuadrantes todavía es posible colapsar las cuatro hojas de cada uno en una única, por lo que en el siguiente paso se asignan los coeficientes de detalle de siguiente nivel (más grueso). En este caso sí resultan simplificados los tres cuadrantes.

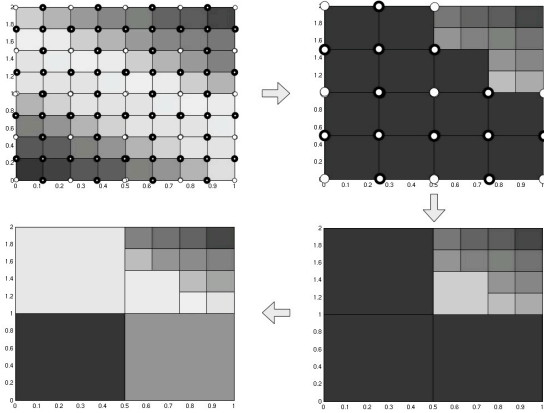


Figura 5: Ejemplo de simplificación

Por último se aplica el iterador de construcción del sistema TSK para obtener el resultado a partir del árbol. Cada nodo hoja se corresponde con una región del universo de discurso en la que la superficie tiene un comportamiento que se puede aproximar, según el valor umbral dado, por un plano. Desde el punto de vista de la descomposición mediante wavelets, se necesitan cuatro coeficientes de escala. Las funciones de escala correspondientes se encuentran en las esquinas de la región. Gracias a la equivalencia entre la descomposición utilizada y los sistemas TSK de primer orden, ese mismo plano se genera con cuatro reglas borrosas, en las que las funciones de pertenencia en los antecedentes son la proyección de las funciones de escala y los consecuentes son los coeficientes.

El árbol contiene pues varios sistemas TSK de primer orden con cuatro reglas cada uno. A la hora de obtener un resultado final se puede optar por incorporar el árbol *quadtree* a la arquitectura del sistema borroso y definir así un sistema jerárquico. La forma más inmediata para calcular la salida para un vector de entrada consistiría en descender en el árbol hasta localizar el nodo hoja que contiene al vector y aplicar el sistema TSK correspondiente. Sin embargo, en los bordes de las regiones aparecen discontinuidades que esta arquitectura no resuelve.

Otra opción es generar un conjunto de reglas para un sistema TSK tradicional. En los antecedentes habrá que incorporar la información del árbol, de forma que las cuatro reglas de cada región se activen solamente cuando el vector de entrada esté en esa región. En este artículo se añaden funciones de pertenencia trapezoidales en los antecedentes para codificar la información de partición del dominio de discurso, de forma que el soporte de estas funciones coincide con el intervalo de la región que representan. Además, el sistema TSK resultante sí resuelve el problema de las discontinuidades entre regiones.

2.2. Etiquetas lingüísticas generadas

Las funciones de pertenencia resultantes son siempre triangulares. El *quadtree* determina una estructura diádica en las particiones lingüísticas posibles, desde la de resolución más fina hasta una con tan solo tres etiquetas. Además, las funciones de pertenencia están organizadas jerárquicamente en niveles de resolución y dentro de cada nivel forman una partición con buena interpretabilidad [1].

En las figs. 6 y 7 se presentan las etiquetas necesarias según la región de interés en la superficie. Las etiquetas se organizan en niveles de resolución, aunque no siempre serán necesarias etiquetas en todos ellos. En el primer caso, se trata de una zona donde el comportamiento de la función requiere tener en cuenta detalles de alta resolución. Como consecuencia, el sistema borroso necesita funciones de pertenencia en los niveles más finos para poder expresar esos detalles. En el segundo caso, la función puede representarse de forma sencilla sin perder precisión; son suficientes pocas etiquetas y en el nivel más grueso para que el sistema TSK alcance el nivel de error requerido.

3. Ejemplos

En la fig. 8 se muestra el resultado para una superficie de ejemplo y diferentes valores de umbral, 0.001, 0.01 y 0.1. Si se requiere precisión, el algoritmo no puede encontrar zonas en las que eliminar etiquetas y el re-

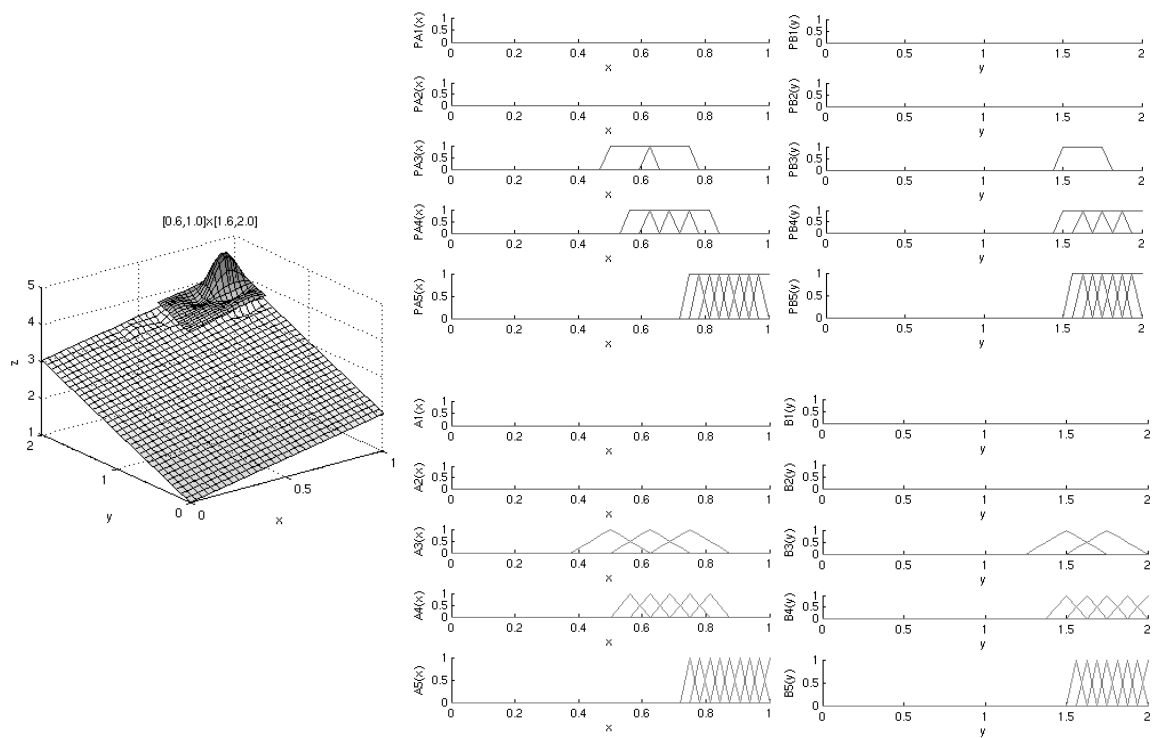


Figura 6: Funciones de pertenencia, región 1

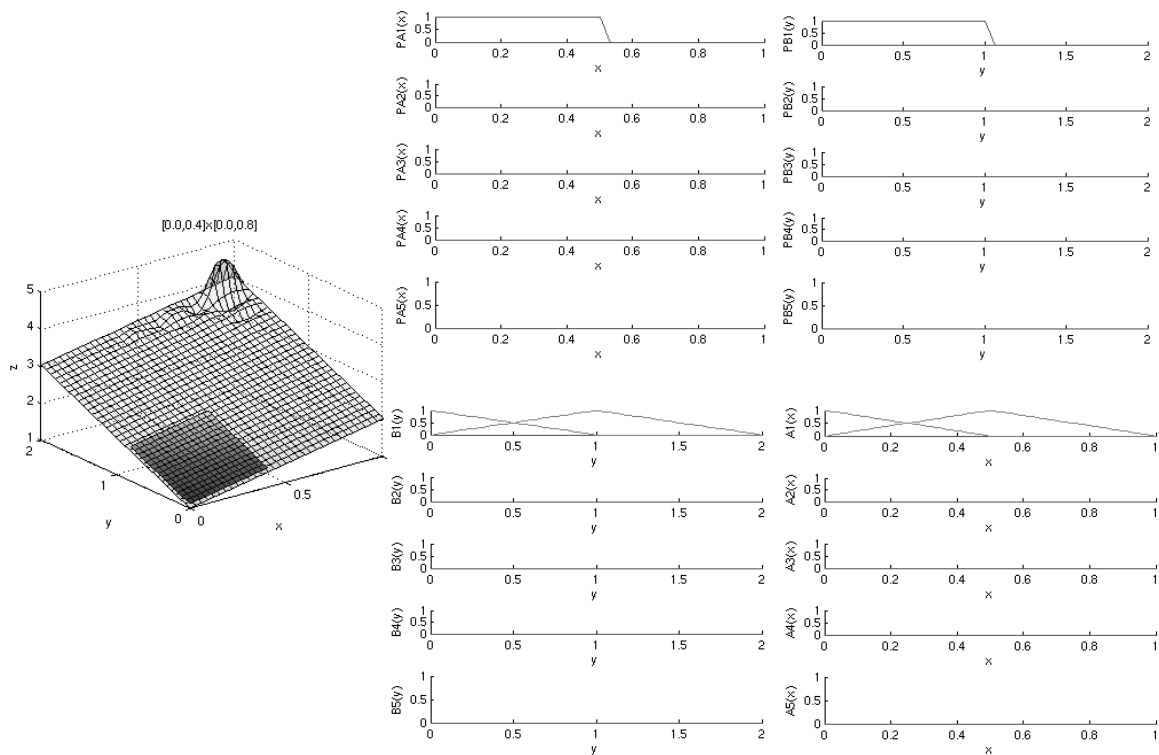


Figura 7: Funciones de pertenencia, región 2

sultado final es muy similar a la superficie original. A medida que se permite un error mayor, el sistema TSK es cada vez más simple y termina por representar solo los rasgos característicos de la función objetivo.

4. Conclusiones

El método propuesto es una aplicación de ideas propias de campos como la multiresolución y las wavelets al ámbito de los sistemas borrosos. En particular, se aprovecha el hecho de poder trabajar con diferentes resoluciones de una función objetivo en determinadas zonas, de forma que al utilizar una resolución baja allí donde sea aceptable en términos de precisión, el sistema TSK correspondiente sea más sencillo. El parámetro de error guía al algoritmo en la simplificación y, como se vió en los ejemplos, es posible obtener versiones cada vez más esquemáticas de una función objetivo. Esta es una propiedad que nos parece que podría dar lugar a aplicaciones interesantes dentro de la computación flexible.

Las líneas de trabajo más inmediatas a partir de este método serían:

- En el algoritmo propuesto el valor del umbral es el mismo en toda la superficie, pero se podrían definir regiones de interés en las que se requiera mayor precisión.
- La estructura de datos *quadtree* impone fuertes restricciones tanto en la entrada como en las posibles simplificaciones. Sería interesante explorar otras estructuras de datos más flexibles.
- También hay que estudiar la generalización a varias dimensiones y a otras familias de wavelets.

Referencias

- [1] Peter Bauer and Ulrich Bodenhofer. A formal model of interpretability of linguistic variables. In *Trade-Off between Accuracy and Interpretability in Fuzzy Rule-Based Modelling*. Physica-Verlag, 2002. 5
- [2] Jorge Casillas, Oscar Cordón, Francisco Herrera, and Luis Magdalena, editors. *Interpretability Issues in Fuzzy Modeling*, volume 128 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer-Verlag, 2003. 2
- [3] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM Publications, 1992. 1
- [4] C. de Boor. *A practical guide to Splines*. Springer Verlag, 1978. 2
- [5] Adolfo R. de Soto. Building a hierarchical set of fuzzy rule systems using wavelet theory. In *International Conference in Information Processing and Manangement of Uncertainty Knowledge-Based Systems*, volume 3, pages 1764–1769, Madrid, July 2000. 1
- [6] Adolfo R. de Soto, Conrado A. Capdevila, Carlos G. Testera, and Eva Cuervo. An experiment with local and global errors in fuzzy rules extraction. In *Procc. of the I Workshop on Genetic Fuzzy Systems*, pages 113–118, Granada, 2005. 2
- [7] Markus H. Gross, Oliver G. Staadt, and Roger Gatti. Efficient triangular surface approximations using wavelets and quadtree data structures. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph*, 2(2):130–143, 1996. 2
- [8] S. Mallat. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:674–693, 1989. 1
- [9] S.G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthogonal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Society*, 315:69–87, 1989. 2
- [10] W. Sweldens and P. Schröder. Building your own wavelets at home. Technical Report IMI 1995:5, Dept. of Mathematics, University of South Carolina, 1995. 3
- [11] Wim Sweldens. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets, 1995. 2
- [12] Marc Thuillard. *Wavelets in Soft Computing*, volume 25 of *World Scientific Series in Robotics and Intelligent Systems*. World Scientific, 2001. 1
- [13] Dan Xu and Minh Do. Extensions of two-dimensional wavelet packets and quadtree decompositions. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004. 2

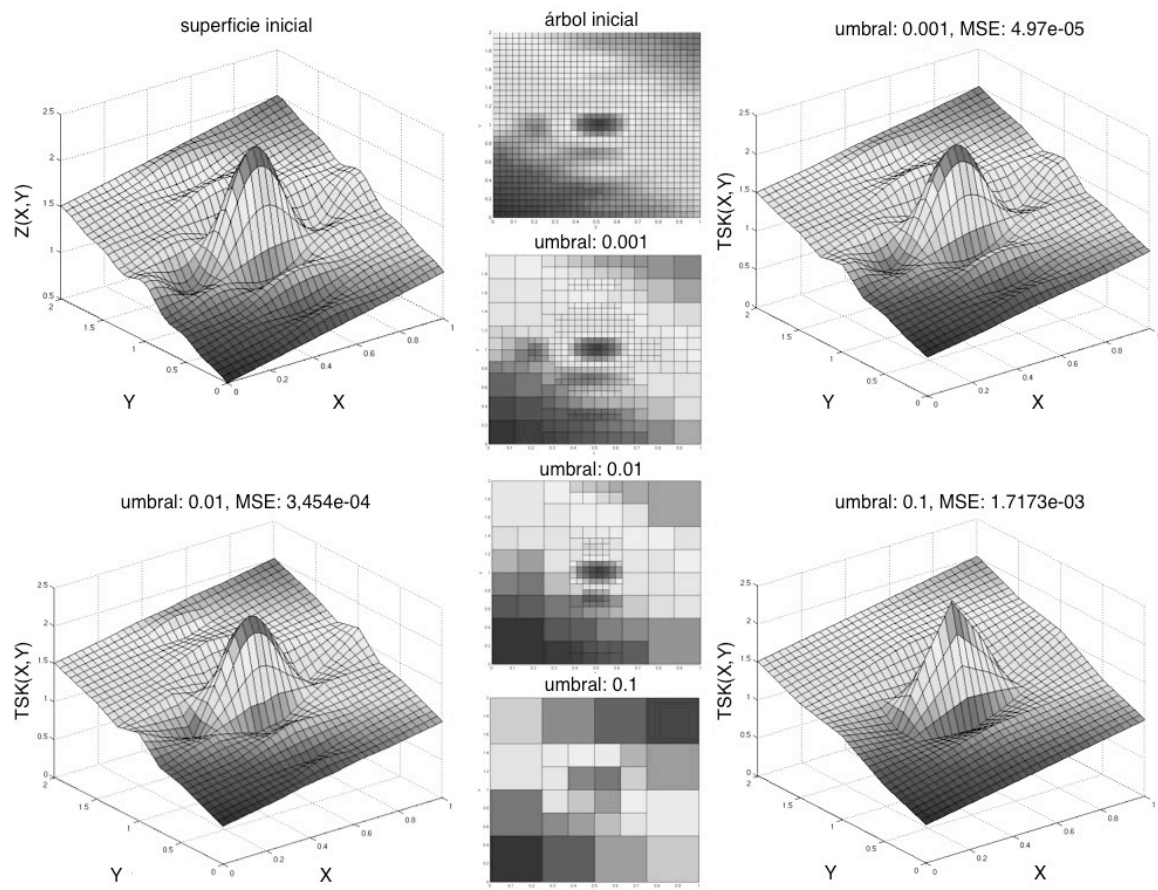


Figura 8: Diferentes valores umbral

Hacia un cálculo fuzzy numérico/simbólico *

Adolfo R. de Soto

E. de Ingenierías Industrial e Informática

Universidad de León

ddears@unileon.es

Resumen

En este trabajo se introduce un modelo para el cálculo numérico/simbólico en la lógica fuzzy. Mediante la selección de una base de etiquetas lingüísticas, los conjuntos fuzzy se representan mediante un vector del producto directo de un número determinado de intervalos unidad. Con esta representación se pueden realizar las operaciones, puntualmente definidas, habituales entre conjuntos fuzzy pero también se pueden definir operaciones, y ordenes, que se corresponden a los cálculos habituales con etiquetas fuzzy tratadas simbólicamente.

Palabras Clave: Conjuntos fuzzy, Lógica fuzzy, Cálculo fuzzy

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a L.A. Zadeh [10], la lógica fuzzy puede entenderse en dos sentidos, uno amplio y otro restringido. En el primero, la lógica fuzzy es un cálculo con funciones de pertenencia que representan conceptos vagos, borrosos, difusos. Este sentido es el que ha tenido gran éxito gracias a los sistemas de control y/o sistemas de decisión basados en sistemas de reglas fuzzy. Con el sentido restringido, la lógica fuzzy pretende dar cuenta de los procesos de razonamiento que involucran predicados fuzzy, y los modelos habituales son modelos de lógica infinito-valuada, aunque también aparecen modelos de lógica finito-valuada.

En el sentido restringido los progresos han ido más despacio, probablemente por el campo es mucho más

difícil. Dar cuenta de los procesos de razonamiento entre personas es siempre difícil, y más lo es si los queremos automatizar. Los trabajos en este campo pueden dividirse en dos tendencias. La primera consiste en tratar la lógica fuzzy como una lógica infinito-valuada (habitualmente en $[0, 1]$) y buscar operadores que representen adecuadamente los procesos de razonamiento en esta lógica [9, 5]. La segunda tendencia persigue operar con los fuzzy sets como representantes de predicados, y buscar operaciones que combinen esos predicados y hagan progresar el razonamiento con operadores entre predicados. La dificultad que principalmente aparece en esta orientación es la de la aproximación lingüística, al combinar dos predicados vagos con conectivas lógicas resultan conjuntos fuzzy que no están entre los predicados previamente definidos y que hay que aproximar de algún modo.

Este problema es el que lleva a que muchos sistemas de razonamiento [3] opten por operar con los predicados vagos de forma simbólica y así asegurarse que todas las conectivas y operadores lógicos son internos al conjunto de predicados definidos. Sin embargo la aproximación simbólica pierde la capacidad de transmisión de información que tienen los conjuntos fuzzy.

En este trabajo se pretende dar un modelo que permita unir estas dos aproximaciones al razonamiento con predicados vagos, por una parte se permita el cálculo habitual definido puntualmente a través de t-normas y t-conormas, por otra se permita cierto cálculo simbólico, tratando los predicados fuzzy como valores de un conjunto de etiquetas lingüísticas determinado previamente. Todo ello se consigue a partir de un análisis de multiresolución [6] que es el que determina la expresión de un conjunto fuzzy respecto a un conjunto de etiquetas que fijan el nivel de multiresolución. El conjunto de etiquetas a un nivel de resolución formarán una partición de la unidad fuzzy y habitualmente son las utilizadas como los valores de una variable lingüística en los sistemas de reglas fuzzy. La visión adoptada en este trabajo es que el conjunto de etiquetas lingüís-

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la CYCIT bajo el proyecto TIN2005-08943-C02-01 y la Junta de Castilla y León con el proyecto LE051A05

ticas que forman la variable lingüística es infinito, y jerárquico, y viene determinado por el análisis de multiresolución elegido. La determinación de un conjunto de etiquetas lingüístico finito se produce al fijar la resolución de trabajo.

2. Análisis de multiresolución

Un esquema de análisis de multiresolución, tal como se utiliza en la creación de sistemas de wavelets [7, 1], viene dado por una secuencia $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de subespacios funcionales del espacio $L^2(\mathbb{R})$ de funciones medibles cuadrado integrables que cumple las siguientes propiedades:

1. $V_i \subset V_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$
2. $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} V_i = L^2(\mathbb{R})$
3. $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} V_i = \{0\}$
4. $f(x) \in V_i \Leftrightarrow f(2x) \in V_{i+1}$
5. $f(x) \in V_i \Rightarrow f(x-j) \in V_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
6. existe una función $\phi \in V_0$ tal que el conjunto de funciones $\{\phi_{0,j} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz de V_0 .

Un análisis de multiresolución puede construirse imponiendo condiciones (ver [1]) sobre una función ϕ , denominada función de escala. En este artículo consideraremos como función de escala $\phi(x) = \max(0, 1 - |x|)$ que es el número triangular fuzzy centrado en el 0. No obstante se pueden considerar otras funciones de escala que son adecuadas como conjuntos fuzzy, en particular se pueden considerar las funciones b-spline [2] de orden más alto, puesto que ϕ es una b-spline de orden 1.

A partir de la función de escala ϕ se genera un análisis de multiresolución M_ϕ sin más que definir las funciones $\phi_{ij}(x) = \phi(2^i x - j) = \max(0, 1 - |2^i x - j|)$ y $V_i = \text{span}\{\phi_{ij} : j \in \mathbb{Z}\}$, es decir considerar todas las combinaciones lineales formadas con las funciones ϕ_{ij} . Estas funciones son números borrosos triangulares que resultan de trasladar por enteros y dilatar por potencias de 2, con soporte $2^{-i}[j-1, j+1]$ y centradas en $2^{-1}j$.

Consideremos ahora el espacio de todos los conjuntos fuzzy medibles y cuadrado integrables, es decir aquellos μ tales que $\int_{\mathbb{R}} (\mu(x))^2 dx < \infty$, definidos sobre un compacto $X \subset \mathbb{R}$, conjunto al que denominaremos $\mathcal{F}(X)$. Dado $\mu \in \mathcal{F}(X)$ y el sistema de resolución M_ϕ podemos tomar la proyección de μ en V_i calculando los valores:

$$\mu_{ij} = \int_X \mu(x) \phi_{ij}(x) dx$$

y definiendo

$$\mu_i(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu_{ij} \phi_{ij}(x).$$

Al ser X un compacto, la secuencia μ_{ij} es finita y representa a μ en V_i . Fijando la resolución i , representamos todo conjunto fuzzy μ con la secuencia $\mathbf{u} = (\mu_{ij})$. Debido a que para todo conjunto fuzzy μ se tiene que $\mu(x) \leq 1$, se tendrá que $\int_X \phi_{ij} \mu(x) \leq \int_X \phi_{ij}$. La integral última vale 1 para ϕ_0 y es menor que 1 para todas las ϕ_{ij} con $i > 0$. Las resoluciones que consideraremos serán las que cumplan $i \geq 0$, por lo que la secuencia $\mathbf{u}$ pertenecerá al producto directo $[0, 1]^{n_i}$ donde el número de factores n_i dependerá de la resolución escogida i . Salvo que exista ambigüedad, denotaremos por n al número de factores que consideramos, aún sabiendo que depende de la resolución. Podemos por tanto considerar el espacio $[0, 1]^n = \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)\}$ como el espacio de conjuntos fuzzy en una determinada resolución dado por el análisis de multiresolución M_ϕ . A los conjuntos fuzzy ϕ_{ij} les denominaremos etiquetas lingüísticas base y, de nuevo, si no hay ambigüedad, los denotaremos como ϕ_j y el índice j variará entre 1 y n .

Es interesante resaltar algunas observaciones sobre esta representación:

1. Los singletons φ_{x_0} van todos a la secuencia 0 puesto que

$$\int_X \varphi_{x_0}(x) \phi_{ij}(x) dx = 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}.$$

2. Los conjuntos fuzzy constantes $\mu(x) = k$ dan lugar a secuencias constantes puesto que

$$\int_X k \phi_{ij}(x) dx = k \int_X \phi_{ij}(x) dx$$

y para un i fijo la integral de ϕ_{ij} es siempre constante.

3. Las etiquetas lingüísticas base se representan con los vectores unidad, es decir, ϕ_j tendrá asociado el vector $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ con el 1 en el lugar j .
4. Dado un vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ el valor real del conjunto borroso $\mu = \sum u_j \phi_j$ y puede calcularse mediante interpolación lineal entre los valores $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$.

3. Cálculo fuzzy básico en

$$\mathcal{F}_i(X) = [0, 1]^n$$

Un vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{F}_i(X) = [0, 1]^n$ representará un conjunto fuzzy a una determinada resolución i que supondremos fija. Las operaciones habituales de la lógica fuzzy se extienden de forma natural.

3.1. t-normas y t-conormas

Dada una t-norma T , definimos la operación $\mathbf{T} : \mathcal{F}_i(X) \times \mathcal{F}_i(X) \rightarrow \mathcal{F}_i(X)$ que opera componente a componente:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (T(u_1, v_1), \dots, T(u_n, v_n)).$$

De forma análoga se define la operación para una T-conorma. Esas operaciones así definidas sobre $\mathcal{F}_i(X)$ heredan las propiedades de las operaciones originales y por tanto obtenemos t-normas y t-conormas. Como elemento unidad para las t-normas se define el vector unidad $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ y como elemento absorbente el vector cero $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. El orden $\leq$ definido punto a punto permite probar las propiedades de monotonía.

Esas operaciones definidas puntualmente se comportan bien pero la cuestión es comprobar su comportamiento en términos del conjunto original μ . Sea μ_i su proyección en la resolución i y sean μ_{ij} sus componentes en esa resolución. Se verifican las siguientes propiedades.

1. $T(\mu, \eta)_{ij} \leq \min(\mu_{ij}, \eta_{ij})$,
2. $S(\mu, \eta)_{ij} \geq \max(\mu_{ij}, \eta_{ij})$.

Es decir las componentes de la proyección de $T(\mu, \eta)$ ($S(\mu, \eta)$) siempre son menores (respectivamente mayores) o iguales que el mínimo (resp. máximo) de las componentes de las proyecciones de cada conjunto fuzzy. La prueba para la t-norma, y de forma análoga para las t-conormas, es evidente puesto que de $T(\mu, \eta) \leq \mu$ se deduce que $T(\mu, \eta)\phi_{ij} \leq \mu\phi_{ij}$ al ser ϕ_{ij} positivo y tomando integrales:

$$\begin{aligned} T(\mu, \eta)_{ij} &= \int_X T(\mu, \eta)(x)\phi_{ij}(x)dx \\ &\leq \int_X \mu(x)\phi_{ij}(x)dx = \mu_{ij}. \end{aligned}$$

Lo mismo se puede hacer para η_{ij} , de donde se deduce el resultado.

Por otra parte se verifica que

$$\begin{aligned} \min(\mu_i, \eta_i) &= \min(\sum \mu_{ij}, \sum \eta_{ij}) \\ &\geq \sum \min(\mu_{ij}, \eta_{ij}), \end{aligned}$$

relación que se obtiene a partir de la relación $\min(\sum \alpha_i \beta_i, \sum \alpha_i \gamma_i) \geq \sum \alpha_i \min(\beta_i, \gamma_i)$.

Es interesante resaltar que $\langle \mathcal{F}, \min, \max, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ es un álgebra booleana y que si nos restringimos a las etiquetas lingüísticas básicas tenemos un álgebra booleana finita. El orden reticular es el orden puntual y hay que observar que dos proyecciones μ_i, η_i verifican que $\mu_i \leq \eta_i$ si y sólo si sus componentes cumplen $(\mu_{ij} \leq \eta_{ij})$.

3.2. Negación

La negación puntual se define mediante la expresión:

$$\text{no}(\mathbf{u}) = (1 - u_1, \dots, 1 - u_n),$$

y efectivamente es una negación involutiva. Además se verifica que:

$$\begin{aligned} n(\mu)_{ij} &= \int_X (1 - \mu(x))\phi_{ij}(x)dx \\ &= \int_X \phi_{ij}(x)dx - \int_X \mu(x)\phi_{ij}(x)dx \\ &= k_i - \mu_{ij}, \end{aligned}$$

y

$$\sum (1 - \mu_{ij})\phi_{ij} = \sum \phi_{ij} - \sum \mu_{ij}\phi_{ij} = 1 - \mu_i$$

si $\sum \phi_{ij} = 1$, algo que se cumple siempre en el análisis de multiresolución M_ϕ que estamos considerando.

4. Cálculo como etiquetas simbólicas

Es interesante observar que la negación de un vector básico $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ es el vector no básico $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ que puede verse como la suma del resto de vectores básicos. Por tanto la negación se comporta adecuadamente si consideramos las etiquetas lingüísticas básicas como etiquetas simbólicas. Habitualmente, cuando se trabaja con un conjunto finito de etiquetas simbólicas, la negación se define como la etiqueta antónima, no existiendo a la vez el concepto de negación y el concepto de antónimo. En nuestro modelo el antónimo puede definirse como:

$$\text{ant}(\mathbf{u}) = (u_n, u_{n-1}, \dots, u_1).$$

Si deseamos considerar las etiquetas lingüísticas básicas como simbólicas podemos considerar el siguiente orden $\preceq_I$ definido como un orden lexicográfico inverso:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \preceq_I \mathbf{v} & \iff \\ & (u_n < v_n) \\ \vee & (u_n = v_n \wedge u_{n-1} < v_{n-1}) \\ \vee & (u_{n-1} = v_{n-1} \wedge u_{n-2} < v_{n-2}) \\ & \vdots \\ \vee & (u_2 = u_2 \wedge u_1 \leq v_1) \end{aligned}$$

Con este orden las etiquetas lingüísticas básicas están ordenadas ascendentemente:

$$\phi_1 \prec_I \phi_2 \prec_I \dots \prec_I \phi_n.$$

Observese que este orden también se consigue con el orden dado por las operaciones MIN y MAX obtenidas por el principio de extensión a partir de las operaciones mín y máx [8].

El antónimo invierte este orden, de forma que se tiene

$$\text{ant}(\phi_1) \succ_I \text{ant}(\phi_2) \succ_I \dots \succ_I \text{ant}(\phi_n).$$

La negación puntual invierte el orden puntual entre conjuntos fuzzy y también el orden lexicográfico entre las etiquetas básica:

$$\text{no}(\phi_1) \succ \text{no}(\phi_2) \succ \dots \succ \text{no}(\phi_n).$$

Una propiedad habitual que se le exige al antónimo [4] es que $\text{ant}\mu \subset \text{no}\mu$. Si consideramos como definición de inclusión la dada por el orden puntual habitual, es decir, $\mu \subset \eta \iff \mu \leq \eta$, esto ocurrirá cuando

$$u_{n-i+1} \leq 1 - u_i \iff u_{n-i+1} + u_i \leq 1$$

lo que ocurrirá para todas las etiquetas lingüísticas básicas excepto para la etiqueta central que existirá si n es impar. Para esta etiqueta su antónimo es ella misma.

En cambio con el orden lexicográfico inverso:

$$\text{ant}(u) \prec_I \text{no}(u) \iff \begin{cases} u_1 < 1 - u_n & \vee \\ u_1 = 1 - u_n \wedge u_2 < 1 - u_{n-2} & \vee \\ \vdots & \\ u_{\lfloor n/2 \rfloor} \leq u_{\lfloor n/2 \rfloor + 1} & \end{cases}$$

resulta que para todas las etiquetas lingüísticas básicas se cumple que $\text{ant}(\phi_i) \prec_I \text{no}(\phi_i)$.

5. Cambio de nivel de resolución

El sistema de multiresolución M_ϕ permite cambiar de nivel de resolución con un algoritmo muy eficiente y analizar los errores cometidos al pasar de un nivel más fino a uno más grueso. Brevemente, como $V_i \subset V_{i+1}$ existirá un espacio W_i complementario a V_i en V_{i+1} tal que $V_{i+1} = V_i \oplus W_i$. Siguiendo la teoría de wavelets existe una base en W_i de funciones ψ_{ij} de tal forma que para todo $\mu_{i+1} \in V_{i+1}$ se tendrá que

$$\mu_{i+1} = \sum \mu_{i+1j} \phi_{i+1j} = \sum \mu_{ij} \phi_{ij} + \sum \tilde{\mu}_{ij} \psi_{ij},$$

donde $\tilde{\mu}_{ij}$ se denominan coeficientes de detalles. La transformada rápida por wavelets asegura que los coeficientes $(\mu_{ij}, \tilde{\mu}_{ij})$ se pueden obtener de forma rápida a partir de los coeficientes μ_{i+1j} e, inversamente, estos coeficientes se pueden recuperar fácilmente a partir de $(\mu_{ij}, \tilde{\mu}_{ij})$. En este sentido, dada una proyección de un fuzzy set μ en V_{i+1} podemos calcular fácilmente su proyección en V_i y cambiar el error cometido al generar una resolución más baja.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha pretendido mostrar cómo a través de una base de funciones de multiresolución interpretadas como una base de etiquetas lingüísticas puede pasarse a realizar un cálculo fuzzy en el espacio de puntos del producto directo $[0, 1]_i^n$ para una resolución determinada i . Se ha mostrado que las operaciones habituales como las t-normas, t-conormas o negaciones se comportan adecuadamente y su relación con las proyecciones de los conjuntos fuzzy resultado originales. Por otra parte se ha mostrado que las etiquetas lingüísticas básicas pueden tratarse simbólicamente, dando el orden habitual entre etiquetas simbólicas, y definiendo operaciones como el antónimo que se comportan adecuadamente. En trabajos futuros se espera aumentar la operatividad fuzzy de este espacio así como las relaciones de estas operaciones, y otras como los modificadores lingüísticos, con el cambio de resolución.

Referencias

- [1] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, 1992.
- [2] C. de Boor. *A practical guide to Splines*. Springer Verlag, 1978.

- [3] Ramon López de Mántaras. *Approximate Reasoning Models*. Ellis Horwood Limited, 1990.
- [4] A. R. de Soto and E. Trillas. On antonym and negate in fuzzy logic. *Inter. Journal of Intelligent Systems*, 14:295–303, 1999.
- [5] L. Esteva, F. and Godo. Monoidal t-norm based logic. *Fuzzy sets and systems*, 124:271–288, 2001.
- [6] B. Jawerth and W. Sweldens. An overview of wavelet based multiresolution analyses. *SIAM Review*, 36(3):377–412, 1994. overview.ps.
- [7] S.G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthogonal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Society*, 315:69–87, 1989.
- [8] G. Mayor, A.R. de Soto, J. Suñer, and E. Trillas. Multi-dimensional aggregation of fuzzy numbers through the extension principle. In T.Y. Lin, Y.Y. Yao, and L.A. Zadeh, editors, *Data Mining, Rough Sets and Granular computing*, pages 350–363. Physica-Verlag, New York, 2002.
- [9] J. Pavelka. On fuzzy logic i, ii, iii. *Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Math.*, 25:45–52, 119–134, 447–464., 1979.
- [10] L. A. Zadeh. Preface, in (marks-ii r.j.) fuzzy logic technology and applications. Technical report, IEEE Technical Activities Board, 1994.

USO DE GRÁFICOS DE CAJAS BORROSOS PARA CONTROLAR EL FINAL DE UNA APLICACIÓN DEL MÉTODO DELPHI

Angel Sarabia Viejo
Alberto Aguilera, 23.
Madrid 28015
U. Pontificia Comillas
asarabia@upcomillas.es

Carlos Maté Jiménez
Alberto Aguilera, 23.
Madrid 28015
U. Pontificia Comillas
cmate@upcomillas.es

Raquel Caro Carretero
Alberto Aguilera, 23.
Madrid 28015
U. Pontificia Comillas
rcaro@upcomillas.es

Javier Tapia Cuevas
Alberto Aguilera, 23.
Madrid 28015
U. Pontificia Comillas
javier.tapia@icai.es

Resumen

Desde hace una década la aplicación con notable éxito de datos simbólicos borrosos en aplicaciones de muy diversa naturaleza se ha generalizado. En esta contribución se presenta un método, basado en el uso de gráficos de cajas (box-plots) borrosos y distancias entre ellos, como criterio para detener el proceso de rondas de encuestas del método DELPHI, cuando los expertos pueden dar información borrosa sobre las diferentes alternativas que pueden ser relevantes en un problema.

Palabras Clave: Método Delphi Borroso (Fuzzy Delphi Method), ordenación de números borrosos (ranking fuzzy number), datos simbólicos borrosos (fuzzy symbolic data), gráficos de cajas (box-plots).

1 CONTEXTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVO DEL TRABAJO

La información sobre un problema presenta con frecuencia vaguedad e imprecisión, estando disponible en forma de datos borrosos, no siempre formalizados. Para el caso en el que dicha formalización ha sido posible, el análisis de los mismos ha sido abordado rigurosamente en muchos textos y trabajos ([6], [11], [13], [20]).

El uso de datos simbólicos [2] es otra aproximación al objetivo de aprovechar la información en la forma natural en que habitualmente se proporciona: intervalos, histogramas, funciones de distribución empíricas, gráficos de cajas, etc. La estadística de datos simbólicos borrosos ya ha sido empleada con éxito en variadas aplicaciones: clustering y clasificación automática ([11]), recuperación de imágenes [18], predicción, etc.

En algunas aplicaciones del método Delphi, los autores de esta contribución, han facilitado a los expertos la posibilidad de transmitir su valoración, entre 0 y 10, sobre cada una de un conjunto de alternativas o ítems en orden a su importancia respecto a un objetivo (concretamente la importancia de un conjunto de ítems o factores en relación con el valor de los intangibles de una empresa). Los expertos podían dar su valoración no sólo en forma de una asignación numérica clásica o fuerte, sino también en forma de intervalos, números borrosos triangulares, intervalos borrosos (o números borrosos trapezoidales) o números graduales. Nos hemos encontrado con que el caso más frecuente es que los expertos otorguen a dicho ítem una puntuación clásica o fuerte, siendo también bastante común la asignación de un intervalo y, en otros casos, los menos frecuentes, el ítem recibe como evaluación un número borroso triangular. Alguna vez asignan un número trapezoidal, pero nunca un experto ha asignado un número gradual, circunstancia que, no obstante, se ofrecía como posible alternativa de evaluación. Por tanto, en el trabajo nos hemos limitado a considerar a la postre solamente números trapezoidales. En todo caso, el mecanismo por el que un experto evaluaba a un ítem garantiza que dicha valoración sea un número borroso, es decir, una magnitud borrosa con soporte finito, convexa y normalizada.

La propuesta que aquí se plantea es la de resumir la información borrosa proporcionada, en una de las rondas de recogida de información características del método Delphi, sobre cierta alternativa por n expertos en un gráfico de cajas (*box-plot*), cuyos cinco elementos definitorios (mínimo, primera cuartila, segunda cuartila o mediana, tercera cuartila y máximo) son modelados por sendos números borrosos, tras haber procedido a ordenar las n asignaciones proporcionadas, que supondremos borrosas. Con este enfoque, el gráfico de cajas se convierte así en un número borroso pentadimensional.

Si el número de alternativas a valorar es k , en cada ronda se dispondrá de k gráficos de cajas borrosos, uno por

cada alternativa, lo que se puede considerar como un vector cuyas componentes son *gráficos de cajas*.

En este trabajo se propone como criterio, para interrumpir el proceso de lanzar nuevas rondas informativas, que la distancia entre los vectores de *gráficos de cajas* correspondientes a dos rondas de información consecutivas sea inferior a una cantidad considerada por el equipo de control del proceso como indicadora de que las opiniones de los expertos se han estabilizado y, en consecuencia, que toda información adicional es redundante. Sobre distancias entre conjuntos y números borrosos hay también disponibles estudios y aportaciones importantes en ([5], [7], [19]).

2 EL PROBLEMA DE ORDENAR NÚMEROS BORROSOS

El problema de ordenar números borrosos se suscitó desde el momento en que apareció dicho concepto dentro de la lógica borrosa. En [1] se hace un estudio comparado de diferentes aproximaciones que, básicamente, se reducen a dos grandes líneas de investigación. La primera, iniciada por D. Dubois y H. Prade ([8], [9]), se mantiene siempre en el contexto borroso dando lugar a una serie de relaciones binarias, basándose en las cuales el decisor, en nuestro caso el grupo controlador del proceso Delphi, establece la ordenación de las asignaciones. En una línea sugerente que ha merecido ([10], [15]), una gran cantidad de estudio y sobre la que existe numerosos artículos y publicaciones, pero que hemos tenido que descartar pues los items analizados en nuestro problema eran más de 60 y los expertos que respondieron 35; eso suponía, para cada item, repetir 35 veces el proceso sugerido en [8] y ([10], lo que lo hace ineficiente, además de que resulta difícil, por no decir imposible, extraer una ordenación fuerte de los cuatro índices sugeridos en [8] o de las matrices de relaciones binarias borrosas asociadas, que son de orden 35×35 .

La segunda línea, iniciada por R. Yager [20], que tiene su continuación en [15] y [17] y en otra multitud de referencias, se basa en la idea de definir una función de ordenación que aplique cada número borroso en un punto de la recta real y ordenar los números borrosos de acuerdo con la ordenación natural en la recta real de sus transformados.

Una variante muy interesante la hemos encontrado en España, iniciada por A. González [12] y seguida en [4] y [5]. El proceso de valuación y ordenación propuesto en [5] es el que básicamente hemos adoptado, por razones de sencillez formal, eficiencia computacional y permitir la introducción en el proceso de elementos subjetivos y de criterios de valoración del propio grupo coordinador de la aplicación Delphi.

Por lo que se refiere al Método Delphi clásico hay una clara exposición en [16], mientras que extensiones borrosas, tan naturales como un tanto ingenuas, del método son sugeridas en [3] y [14].

3 ALGORITMO PARA LA OBTENCIÓN DE UN GRÁFICO DE CAJAS BORROSO.

Como ya se ha dicho, en la encuesta nos hemos limitado a considerar números borrosos trapezoidales,

$$\tilde{A} = (p, q, i, d); p \leq q; i, d > 0$$

cuya función de pertenencia es

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 + ((x - p) / i), & \text{si } x \in [p - i, p] \\ 1, & \text{si } x \in [p, q] \\ 1 - ((x - q) / d), & \text{si } x \in [q, q + d] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

y cuya gráfica se muestra en la Figura 1.

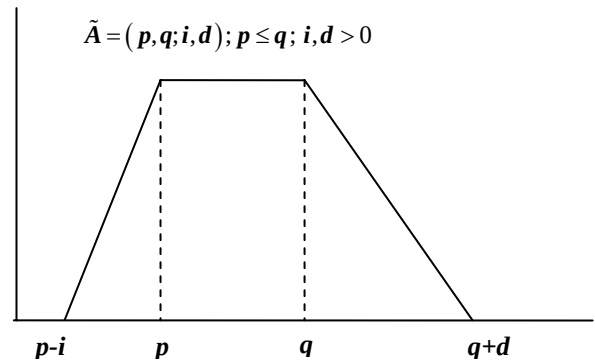


Figura 1: Número borroso trapezoidal

Como casos particulares de números borrosos tenemos

1. Números clásicos: $(p, p, 0, 0)$
2. Intervalos: $(p, q, 0, 0)$
3. Números triangulares: (p, p, i, d)

El algoritmo que se propone en esta contribución modifica sustancialmente los descritos en [3] y [14]. Los pasos a dar para construir el box-plot o gráfico de cajas borroso son los siguientes:

1.. A cada número borroso se le asocia su evaluación, siguiendo la línea iniciada por A. González en [12] y mostrada en [5]: Todo número borroso A es transformado en un número real, su *valor promedio* (*average value*), definido como

$$V_S^\lambda(A) = \int_Y f_A^\lambda(\alpha) \cdot dS(\alpha) \quad (2)$$

donde:

a) $Y \subseteq [0, 1]$

b) $\lambda \in [0,1]$

c) $f_A^\lambda(\alpha)$ es una función paramétrica representando la posición de cada α -corte $A_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$, donde

$$a_\alpha = p - i + \alpha i ; b_\alpha = q + d - \alpha d \quad (3)$$

por medio de una asignación subjetiva de pesos que refleja la importancia relativa de cada nivel α . En nuestra aplicación hemos adoptado la función paramétrica sugerida en [5]:

$$\forall \alpha \in (0,1], f_A^\lambda(\alpha) = \lambda b_\alpha + (1-\lambda)a_\alpha \quad (4)$$

donde un valor de λ próximo a 1 da más peso a la rama derecha de la función de pertenencia de A , mientras que los valores de λ más próximos a 0 valoran más la rama izquierda.

d) S es una medida aditiva sobre Y , en particular, una medida de Stieltjes.

Tras analizar las valoraciones que los expertos habían otorgado a los diferentes ítems tras la primera encuesta, se observó que la mayoría de ellos se inclinaban por números borrosos en los que $d > i$, es decir, parecían mostrar una cierta tendencia al optimismo. En consecuencia, en el grupo coordinador optamos por un valor $\lambda = 0.75$, mientras que como medida de Stieltjes se tomó $S(\alpha) = \alpha^{3/2}$, con lo que se da más peso a los α -cortes superiores, traduciendo así la impresión de que la opinión de un experto queda suficientemente reflejada en los valores modales de su asignación, mientras que las dos ramas laterales modelan sus márgenes de duda.

Esta selección tiene la ventaja de su sencillez formal y fácil computo puesto que

$$\begin{aligned} V_S^\lambda(A) &= \int_0^1 (\lambda b_\alpha + (1-\lambda)a_\alpha) r \alpha^{r-1} d\alpha = \\ &= \lambda q + (1-\lambda)p + \frac{1}{r+1} (\lambda d - (1-\lambda)i) \quad (5) \\ &= 0.75q + 0.25p + 0.3d - 0.1i \end{aligned}$$

2. Sean $\{A_j\}$, $j=1,2,\dots,n$ los n números borrosos que constituyen las valoraciones de los expertos y $\mu_j(u_j)$, con $u_j \in \text{Soporte}(A_j)$ sus respectivas funciones de pertenencia. Una vez ordenados los n números borrosos en función de la ordenación natural de sus transformados, se obtienen el mínimo y el máximo borroso de todos ellos, dos números borrosos cuyos respectivos α -cortes y funciones de pertenencia vienen dados por

$$\tilde{Min}(\alpha) = \left[\min_j \{a_j(\alpha)\}, \min_j \{b_j(\alpha)\} \right] \quad (6)$$

$$\tilde{Max}(\alpha) = \left[\max_j \{a_j(\alpha)\}, \max_j \{b_j(\alpha)\} \right] \quad (7)$$

$$\mu \sim \text{Min}(A_1, A_2, \dots, A_n)(w) =$$

$$\inf_{u_1, u_2, \dots, u_n} \max_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \mu_{A_i}(u_i) \right\} \quad (8)$$

$$\text{con } w = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

y

$$\mu \sim \text{Max}(A_1, A_2, \dots, A_n)(w) =$$

$$\sup_{u_1, u_2, \dots, u_n} \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \mu_{A_i}(u_i) \right\} \quad (9)$$

$$\text{con } w = \max(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

En lo que sigue, designaremos a las funciones de pertenencia del mínimo y máximo borrosos por

$$\mu_m(x) \text{ y } \mu_M(x) \quad (10)$$

respectivamente.

3. Para obtener la r -ésima ($r=1,2,3$) cuartila se obtiene, en primer lugar, el máximo borroso de los números asociados a las $k = \lceil rn/4 \rceil$ menores valoraciones y designamos por

$$\mu_{i,M}(x), i=1,2,3 \quad (11)$$

a las funciones de pertenencia de estas cuartilas borrosas, que llamaremos cuartilas máximas.

Por lo general, las cinco cantidades borrosas obtenidas no serán números trapezoidales, sino de un tipo que, por extensión, podemos magnitudes poligonales. (Figura 2).

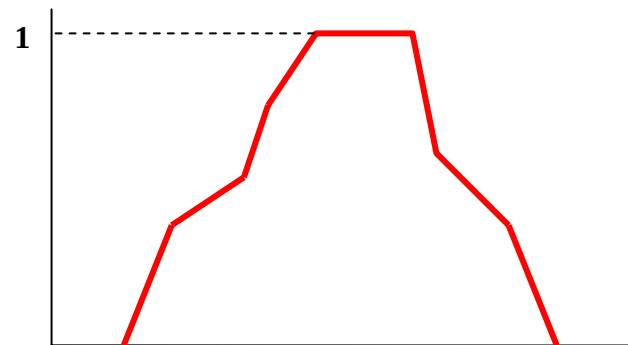


Figura 2: Una magnitud poligonal

Estas cantidades, dada la naturaleza de los datos de los que provienen y las operaciones realizadas para obtenerlas, tienen soporte acotado, son convexas y normalizadas, es decir, son números borrosos que configuran el vector pentadimensional que es el gráfico de cajas de máximos

$$B_M = (\tilde{Min}, \tilde{Q}_{1,M}, \tilde{Me}_M, \tilde{Q}_3, \tilde{Max}) \quad (12)$$

Obtenemos también el mínimo borroso de los números borrosos asociados a las $n-k$ valoraciones mayores; llamaremos a estos números cuartilas mínimas y designamos a sus funciones de pertenencia por

$$\mu_{i,m}(x), i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

Tenemos así un segundo gráfico de cajas que llamaremos de mínimos

$$B_m = (\tilde{Min}, \tilde{Q}_{1,m}, \tilde{Me}_m, \tilde{Q}_m, \tilde{Max}) \quad (14)$$

Cualquiera de los dos tipos de gráficos de cajas es, a su vez, otra cantidad borrosa cuya función de pertenencia, prescindiendo de los subíndices M y m , se define como

$$\mu_B(x_m, x_1, x_2, x_3, x_M) = \min_{i \in I} \{\mu_i(x_i)\} \quad (15)$$

donde $I = \{m, 1, 2, 3, M\}$, con lo cual el gráfico de cajas es también un número borroso cuyos α -cortes $B(\alpha)$ vienen dados por

$$B(\alpha) = \{(x_m, x_1, x_2, x_3, x_M) / \min_{i \in I} \{\mu_i(x_i)\} \geq \alpha\} \quad (16)$$

y al que se puede aplicar un método de evaluación del tipo descrito en [4], [5] y [12].

El tipo de resultado que se obtiene es mostrado en la Figura 3

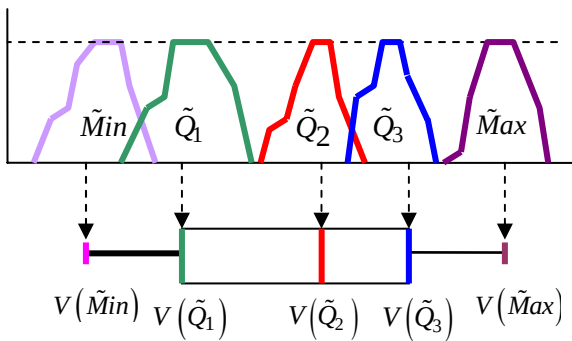


Figura 3: Gráfico de cajas borroso. Debajo, el gráfico de cajas clásico resultado de la desborrosificación por sus valores promedio de los elementos borrosos del primero.

4 USO DE BOX-PLOTS BORROSOS PARA INTERRUPIR LAS RONDAS DE ENCUESTAS DEL PROCESO DELPHI.

Supongamos obtenidos los dos pares de gráficos de cajas borrosos asociados a las rondas h y, que designaremos por

$$B_M^{(h)} = (\tilde{Min}^{(h)}, \tilde{Q}_{1,M}^{(h)}, \tilde{Me}_M^{(h)}, \tilde{Q}_{3,M}^{(h)}, \tilde{Max}^{(h)}) \quad (17)$$

$$B_m^{(h)} = (\tilde{Min}^{(h)}, \tilde{Q}_{1,m}^{(h)}, \tilde{Me}_m^{(h)}, \tilde{Q}_{3,m}^{(h)}, \tilde{Max}^{(h)})$$

y los correspondientes a la ronda precedente $h-1$ de recogida de información, que designaremos por

$$B_M^{(h-1)} = (\tilde{Min}^{(h-1)}, \tilde{Q}_{1,M}^{(h-1)}, \tilde{Me}_M^{(h-1)}, \tilde{Q}_{3,M}^{(h-1)}, \tilde{Max}^{(h-1)}) \quad (18)$$

$$B_m^{(h-1)} = (\tilde{Min}^{(h-1)}, \tilde{Q}_{1,m}^{(h-1)}, \tilde{Me}_m^{(h-1)}, \tilde{Q}_{3,m}^{(h-1)}, \tilde{Max}^{(h-1)})$$

Se trata ahora de definir una medida de la discrepancia por una parte entre los gráficos de cajas de máximos de las dos rondas, y lo mismo para la pareja de gráficos de cajas de mínimos. por medio de una “distancia”. Se han analizado tres opciones, sin que por el momento los autores hayan podido llegar a una conclusión definitiva respecto a cual de ellas es más adecuada al objetivo buscado, aunque desde la óptica de grupo coordinador de la aplicación Delphi, la descrita en primer lugar nos conduce a conclusiones más conformes con la intuición.

1ª: Obtener el valor promedio de cada uno de los cinco números borrosos que conforman cada gráfico de cajas, introduciendo incluso funciones de evaluación que tengan en cuenta las preferencias del grupo coordinador de la aplicación Delphi. De esta forma los gráficos de cajas se desborrosifican, dando lugar a sendos vectores clásicos pentadimensionales, para los cuales se calcula algún tipo de distancia clásica (euclídea, valor absoluto, máximo, etc). Las distancias entre las parejas de gráficos de cajas de máximos y mínimos se pueden promediar para tener una medida única de la discrepancia entre las opiniones de los expertos en dos rondas consecutivas.

2ª: Evaluar el gráfico de cajas completo con una función de evaluación doblemente parametrizada: uno de los parámetros estaría asociado a la valoración de cada número borroso componente y el otro a recoger la preferencia del grupo coordinador por las distintas componentes del gráfico de cajas. Una tendencia hacia las valoraciones más altas de los expertos haría que esta función de valoración asignara peso creciente a las componentes del gráfico de cajas, en tanto que si se tiene más confianza en las valoraciones centrales proporcionados por los expertos, el grupo coordinador utilizará una función de ponderación que tenga una moda en esos valores medios. Una vez hecha la valoración global de ambas parejas de gráficos de cajas, se decide, en función de la diferencia entre ambos si se prosigue o

no con las rondas de recogida de información entre los expertos

3ª. Utilizar la definición de distancia entre números borrosos de Yager para definir la distancia entre las dos parejas de gráficos de cajas como

$$d_M^{(h)} = d(B_M^{(h)}, B_M^{(h-1)}) = \sum_{i \in I} \int_a^b |\mu_{i,M}^{(h)}(x_i) - \mu_{i,M}^{(h-1)}(x_i)| \cdot dx_i \quad (19)$$

$$d_m^{(h)} = d(B_m^{(h)}, B_m^{(h-1)}) = \sum_{i \in I} \int_a^b |\mu_{i,m}^{(h)}(x_i) - \mu_{i,m}^{(h-1)}(x_i)| \cdot dx_i$$

En todo caso, cualquiera que sea la función de distancia utilizada, se ha tomado como medida en la ronda h-ésima de la discrepancia entre gráficos de cajas

$$d^{(h)} = \text{Max}\{d_M^{(h)}, d_m^{(h)}\} \quad (20)$$

5 CONCLUSIONES.

Con la línea abierta en este trabajo creemos haber obtenido una buena herramienta en la aplicación del método Delphi al caso en el que la información proporcionada por los expertos sea total o parcialmente borrosa. Las fases ya desarrolladas de este proceso son las siguientes

1. Selección por el grupo coordinador del proceso Delphi de un método de ordenación de los números borrosos en los que se concretan las valoraciones borrosas proporcionadas por los expertos. Se ha optado, por razones de eficiencia computacional e interpretabilidad de los resultados por la línea sugerida en [4], [5] y [12].
2. Obtención de los estadísticos borrosos que caracterizan un gráfico de cajas.
3. Proporcionar una distancia entre box-plots tal que, si es inferior a una cantidad prefijada, nos facilite la decisión de interrumpir o continuar con la ronda de encuestas entre expertos.

Desde el punto de vista de los autores de esta contribución, y grupo coordinador de la aplicación del método Delphi sobre la que se ha soportado, quedan abiertas diferentes líneas de trabajo.

- a) La elección de la función de ordenación. Creemos que la adoptada en esta contribución ofrece muy buenas posibilidades, pero es

necesario establecer un mecanismo que ayude a seleccionar los valores más adecuados de sus parámetros definitorios.

- b) La interpretabilidad de la distancia entre box-plots es esencial a la hora de fijar la cantidad umbral en función de la cual, y cuando la distancia entre dos gráficos de cajas consecutivos es inferior, se adopta la decisión, teóricamente importante, de interrumpir las rondas de encuestas entre los expertos. Decimos teórica porque en la práctica, y salvo que se den circunstancias poco comunes, es imposible ir más allá de tres rondas de encuestas.
- c) Otra línea de trabajo es analizar la posibilidad de cambiar los parámetros de la función de ordenación en cada ronda, a medida que la opinión de los expertos vaya estabilizándose.
- d) Por último, hay que analizar si para los gráficos de cajas asociados a ítems diferentes se debe mantener o no la misma combinación de parámetros de la función de ordenación y, adicionalmente, se debería investigar sobre la posibilidad de definir una distancia global entre el conjunto de todos los gráficos de cajas en consideración

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bortolan, G. and Degani, R., *A review of some methods for ranking fuzzy subsets*, Fuzzy Sets and Systems 15 (1985), pp. 1-19.
- [2] Billard, L. and Diday, E.: *From the Statistics of Data to the Statistics of Knowledge: Symbolic Data Analysis*. Journal of the American Statistical Association 98, pp. 991-999.
- [3] Bodjaziev, G. and Bodjaziev, M, *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic: Applications*. World Scientific, 1998
- [4] Campos, L. M. and González, A., *A subjective approach for ranking fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 29 (1989), pp. 145-153.
- [5] Campos, L. and González, A., *Further contributions to the study of the average value for ranking fuzzy numbers*, International Journal of Approximate Reasoning 10 (1994); pp.135-153.
- [6] Chatzis, V. and Pitas, I., *Mean and median of fuzzy numbers*, Proceedings of IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing 1995, Neos Marmaras, Greece, pp 297-300..

[7] Detyniecki, M. and Yager, R.R., *Ranking fuzzy numbers using α -weighted valuations*, International Journal on Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 8, No. 5 (2001), pp 573-592.

[8] Dubois, D. and Prade, H., *Ranking fuzzy numbers in the setting of Possibility Theory*, Information Science 30 (1983), pp 183-224.

[9] Dubois, D. and Prade, H., *Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications*, John Wiley, 1980

[10] Gebart, J, Gil, M.A. and Kruse, R. *Fuzzy Set-theoretic Methods in Statistics*, Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics (1998), ed, R. Slowinski; Kluwer Academic Publishers, pp 311-347.

[11] Gibert, K. y Pérez-Bonilla, A (2005)., *Fuzzy box-plots based induction rules: Towards automatic generation of classes-interpretation*, in Procs. 4th. Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT2005), pp. 524-529, Barcelona

[12] González, A., *A study of the ranking function approach through mean values*, Fuzzy Sets and Systems 35 (1990), pp. 29-41.

[13] Grabisch, M., Orlovski, S.A. and Yager, R.R. , *Fuzzy aggregation of numerical preferences*, Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics (1998), ed, R. Slowinski; Kluwer Academic Publishers, pp 31-64.

[14] Kaufmann, A. y Gil Aluja, J., *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Milladoiro, 1986.

[15] Kruse, R. and Meyer, K.D., *Statistics with vague data*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[16] Landeta, J., *El método Delphi*, Ariel, 1999

[17] Mikhailov, L., *Deriving priorities from fuzzy pairwise comparison judgements*. Fuzzy Sets and Systems 134 (2003), pp 233-247.

[18] Vertan, C and Boujemaa, N., *Using fuzzy histograms and distances for color image retrieval*, Challenge of Image Retrieval, Brighton, 2000.

[19] Yager, R.R. and Filev, D., *On ranking fuzzy numbers using valuations*, International Journal of Intelligent Systems, Vol. 14, (1999), pp 1249-1268.

[20] Yager, R.R., *A procedure for ordering fuzzy sets of the unit interval*, Information Science 24 (1981), pp 143-161.

A Fuzzy Evolutionary Algorithm for Scheduling in Wood-based Furniture Manufacturing

Juan C. Vidal Aguiar, M. Mucientes, M. Lama and A. Bugarín

Intelligent Systems Group

Department of Electronics and Computer Science

University of Santiago de Compostela

{jvidal, manuel, lama, alberto}@dec.usc.es

Abstract

This paper describes an Adaptive Evolutionary approach to the problem of the production planning task in the wood furniture industry. The objective is to schedule new incoming orders and if necessary regenerate the scheduling for already existing orders. Complexity and uncertainty of this task promotes the use of an hybrid solution that combines Evolutionary Algorithms (EAs) and Fuzzy Sets. On one hand, EAs allow an efficient and flexible use of the great amount of parameters involved in the scheduling task and to reduce its computation time. On the other hand, fuzzy sets improve the confidence in the evaluation of the solutions when uncertain knowledge is used.

Keywords: fuzzy production planning, evolutionary algorithms, wood furniture industry.

1 Introduction

The problem of production planning and scheduling in the furniture industry [8] is not new. Conventional search and optimization techniques are hard to apply for scheduling of large-scale custom furniture. On one hand jobs, resources and the variety of constraints and preferences configure a huge and complex search space that cannot be timely solved in practice by traditional techniques. On the other hand, the schedule must be frequently updated in response to changes in the jobs priority or the availability of resources. However, in real-world production environments, efficiency and optimization must be balanced and results close to the optimum but achieved in a reasonable amount of time are often sufficient. Evolutionary Algorithms (EAs) are well suited to such problems due to their adaptability and their effectiveness at searching large spaces

[7]. For detailed short/medium term scheduling, EAs can get good solutions in a reasonable amount of time, when compared with classic techniques [5, 6].

An important feature of the wood furniture industry is the difficulty to estimate its manufacturing times. Unlike other planning domains, humans still have much influence on the furniture manufacturing processes. Although some Computer-Aided Manufacturing (CAM) products which estimate the time from Computer-Aided Designs (CAD) designs are available, most of estimations are based on experts knowledge and are therefore uncertain. For this reason, the planning task must be able to manage the uncertainty of time estimations the schedules are based on.

In this paper, we describe the module for production planning as a part of a Knowledge-Based Business Process Management System (BPMS) [4] in the wood furniture industry that solves the product design task by means of knowledge-enriched workflows [3]. The module is implemented by means of an adaptive EA that selects a number of suitable production options taking into account the jobs to be done and the resources available for them to be done (current resource workload, resources centers availability, ...). The EA is adapted along the search process using a Fuzzy Rule-Based System (FRBS) in order to avoid premature convergence and increase the search speed, modifying the tradeoff between exploration and exploitation.

The paper is structured as follows: Section 2 presents the scheduling problem in custom furniture industry. Then, Section 3 describes the proposed approach, and Section 4 its implementation. Finally, in Section 5, conclusions and future work are pointed out.

2 Wood-based Furniture Manufacturing

This section describes the most elementary concepts of the production planning task in the custom wood-

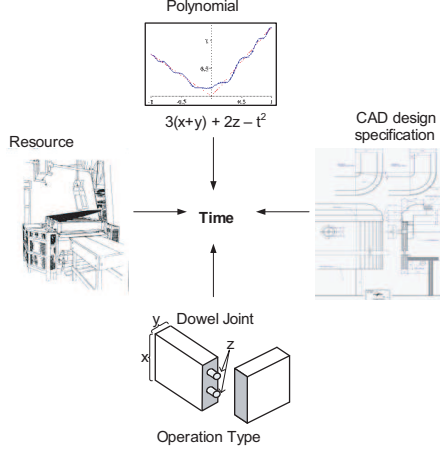


Figure 1: Time estimation of a resource manufacturing operation is built from a polynomial equation

based furniture manufacturing industry and provides the basis for the approach presented in the following sections. We must remark that some of the task features described in this section are attached to the characteristics of the industry the system is being developed for. However, experience tells us that most of companies of this field face similar troubles when promoting the automation of the production planning task and therefore, could take advantages of the solution herein described.

The aim of production planning is to schedule a finite set of client orders $O = \{O_o, 1 \leq o \leq NO\}$ in the manufacturing workload. A finite set of resources $R = \{R_r, 1 \leq r \leq NR\}$, both human as well as machines (cutting machine, horizontal band saw, two side thickness planner, abrasive finishing machine, etc.) have to perform the different manufacturing operations $MO = \{MO_m, 1 \leq m \leq NMO\}$ (cut, shape, assemble, finish, etc.) of a production plant. Client orders must be sorted according to a given priority and its delivery date. Orders are subdivided in a set of jobs $J_i = \{J_i^k, 1 \leq k \leq NJ_i\}$, $O_i \in O$ with a specific manufacturing operation MO_m to be done. Jobs inherit the client order precedence but are also sorted according to the operation dependencies. These dependencies are defined by means of predefined manufacturing routes which are assigned to a furniture manufacturing based on its CAD design specification. For example, the use of a type of joint may require to assemble the furniture before the finishing, thus increasing the manufacturing, packaging and/or shipping costs.

A special feature of the planning task in this field is that jobs are not directly related to resources. A job is assigned to a resource center C_c ($C = \{C_c | 1 \leq c \leq NC\}$) which is in charge of dividing the

work among its resources. In this sense, the resource center has the capability to assign the job to an individual or a group of resources. For this purpose, a set of strategies $S = \{S_s | 1 \leq s \leq NS\}$ have been defined to group resources. Basically, three type of strategies have been defined: (i) only one, (ii) a percentage or (iii) all the available resources belong to the group that will perform the job. However, the association of operations is made at a resource level and thus centers can only perform those operations that can be carried out by their resources. Moreover, resource assignment to centers may vary along the time. In a certain sense, resources define time slots that are assigned to a center. Thus, the time slots for resource R_r can be defined as $TS_r = \{TS_r^t, t = [t_{in}, t_{out}], J_i^k\}$ where t represents the resource assignment to perform a job J_i^k in the time interval $[t_{in}, t_{out}]$ in resource R_r . Initially, all the resources are available, i.e. they have no schedules assigned $J_i^k = \phi$ for $k = 1, \dots, NJ_i$ and $i = 1, \dots, NO$.

Let us suppose a client order O_1 composed of one hundred office desks. The office desks may consists of different kinds of materials such as metal, wood and wood-based products, plastic, melamine foils, laminate, PVC, and so on. Based on the CAD designs of the desks, specific manufacturing, and assembly rules related to the kind of material the furniture will be made of, the manufacturing operations to be performed and thus its jobs J_1^k for $k = 1, \dots, NJ_1$. In order to define a manufacturing plan, each job must be assigned to a resource center. For example, job J_1^1 (e.g. in charge of cutting the melamine panels) may be assigned to the cut center C_1 which assigns two cutting machines (R_1 and R_2) machines to perform this job. As regards the manufacturing plan, this assignment means that the free time slots of the R_1 and R_2 resources are assigned to job.

The main difficulty related to the planning task is that the time to perform a job depends on (i) the resource that will perform it, (ii) the manufacturing operation to be performed, and (iii) the furniture specification (specially related to material). This scenario implies that the job time must be estimated for each manufacturing plan generated along the planning process. We use an estimation method based on influence parameters in order to determine a polynomial approach for estimating the time of resource operations. Once these parameters are identified by means of regression equations (over a set of well balanced examples that were timed), the coefficients of these polynomials are calculated. Following with the office desk example, suppose the drying kiln operation J_1^1 . The polynomial that obtains the job time for this process should take into consideration relevant parameters such as the intended

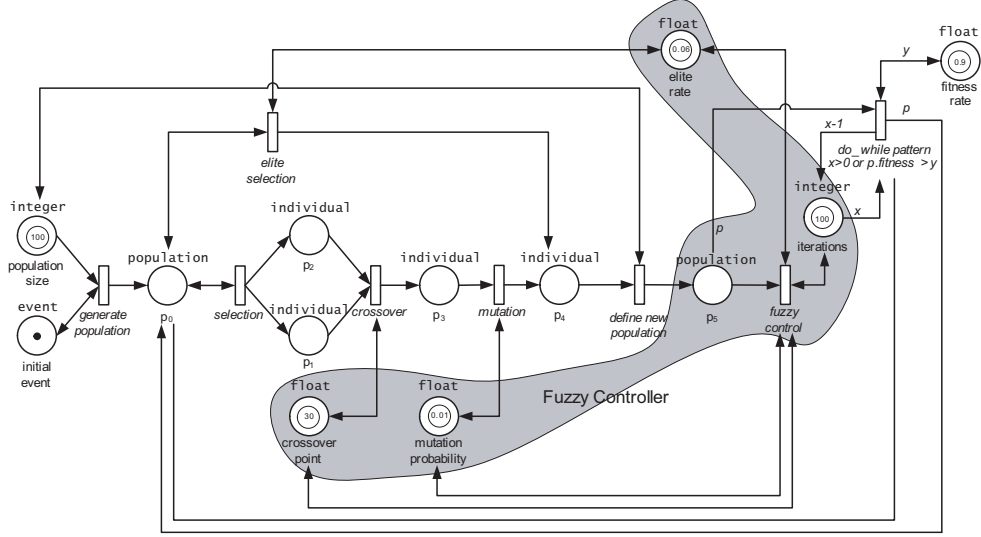


Figure 2: High Level Petri Net of the adaptive fuzzy EA

use of the product (inside or outside use), the product volume, or the moisture content among other aspects. As it is depicted in Fig. 1, time estimation requires to relate the resource and its polynomial equation with the CAD specification of the furniture purpose of the evaluation. Since time recordings are not available for all future productions, and the relevant parameters for them may also be different from previous ones, time estimations are always associated to a degree of uncertainty that is inherent to the production problem.

3 Adaptive Evolutionary Approach to Production Planning

The EA defined for our scheduling task is depicted in Fig. 2. The usual structure of the EA has been upgraded in order to support a fuzzy control over the EA behavior (grey box in Fig. 2). Production scheduling in the wood furniture industry is based on the human experience and empirical information to a great extent and its results have a certain degree of uncertainty. In this sense, it is necessary to control the degree of confidence of the solutions obtained in each EA iteration. For this purpose, a fuzzy controller supervises the new populations and modifies the elitism, mutation and crossover rates in order to improve the quality of the solutions and to avoid premature convergence.

3.1 Problem Encoding

The encoding of our scheduling problem is depicted in Fig. 3. The chromosomes contain all the orders that must be manufactured. Specifically, a chromosome contains a sequence of orders scheduled accord-

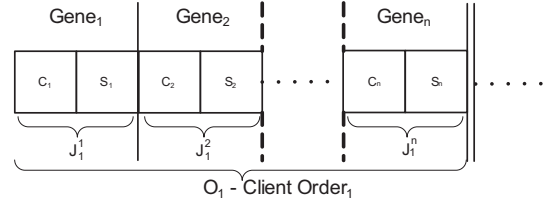


Figure 3: Chromosome and gene representation

ing to its priority and delivery date. This kind of arrangement assigns a higher priority to jobs based on the client order precedence and allows those jobs to choose their resources and reserve their free slot times in advance.

Jobs of the chromosome are ordered based on the manufacturing route selected to perform a client order. This kind of sorting, jointly with the precedence constraints of client orders, define a unique jobs configuration. In fact, a job position is the same in all the chromosomes of a population. The genes that compose the chromosomes are defined by three elements: a job identifier, a resource center identifier and a resource assignment strategy identifier. A gene defines the center that will perform a job and its resource assignment strategy.

3.2 Fitness Function

The fitness function herein described evaluates the goodness of each of the individuals of the population. This evaluation is very hard because of the simplicity of the chromosome. In a certain sense, an individual

defines the assignment of resources to jobs and the configurations of resources within the same resource center. Although this information restricts the scheduling, it does report nothing about the workload of the resources or the manufacturing time. In fact, it is necessary to compute the work plan from the chromosome information before the fitness function can evaluate it.

The method that solves this task defines the following steps for each job J_i^k of a client order O_i :

- Select all the resources R_r of the resource center C_c that can perform the job J_i^k .
- Compute the time and the percentage of work performed for the operation type MO_m per minute of work and for each R_r .
- Get the free time slots of each R_r based on (i) the manufacturing strategy of the O_i ("as soon as possible", "as late as possible", "no strategy"), on (ii) its delivery date and (iii) on the jobs dependencies.
- Define the resource groups of the C_c that can perform J_i^k according to the grouping strategy S_s in the chromosome.
- Select the most suitable group based on the free slot assignment and the time worked by each resource.

Fitness evaluation is based on four criteria. The first one, is related to the resources work load. In this sense, a high degree of work load indicates a good use of resources. Resource work load is based on the usage of a resource and on its availability in a time interval.

The second criterion looks for overloads and possible bottlenecks in the production plant. This is a negative property of a plan. A resource R_r for $r = 1, \dots, NR$ is overloaded for a certain period of time $[t_{in}, t_{out}]$ where $t_{in} + 60 < t_{out}$ if the $workload_r > 0.9$ and other resources R_k for $k = 1, \dots, NR$ and $k \neq r$ in the same center have a $workload_k < 0.9$ for the same manufacturing operations. It should be noted that the minimum period of time to define an overload is fixed in 1 hour.

The last two aspects taken into account are the time and cost related to the orders manufacturing. This evaluation compares the time and cost needed to perform a client order manufacturing in relation to the time and cost set in its price estimate. For example, the use of a certain resource may reduce the production time but increase the price of the manufacturing.

The same procedure has been used to compute the cost comparison. In this case, the time slots of each

resource are multiplied by the resource cost per minute and compared against the cost estimate.

3.3 Selection, Crossover and Mutation Functions

Although the operators used in this EA are quasi-standard, some of them introduce some differences because of the chromosome encoding. The scheduling task uses a crossover operator that randomly defines one crossover point. However, this point cannot cut a gene. As regards mutations, a random mutation operator is defined with the ability to perform two kind of changes. It is possible to change the center that will perform the manufacturing operation or the resource assignment strategy. In both cases, the number of mutations is restricted to the centers that have a resource with the ability to perform the job and the grouping strategies defined in the environment, respectively.

3.4 FRBS for EA adaption

The fuzzy control system modifies the elite, mutation and crossover rate values according to a fuzzy evaluation of the population. The objective of this control is the dynamic adaption of the algorithm in order to improve its behavior, also considering less uncertain plans. The fuzzy evaluation of the population and the control of the EA is performed in several steps:

- In a previous off-line step, experts are requested to linguistically define the significant terms for evaluating the quality or reliability of the estimation times provided by the regression equations for every job. This is done by a fuzzy partition involving three terms (HIGH, MEDIUM, LOW) that refer to the uncertainty of the estimation times.
- Historical information of all the previous time estimations and the actual production times for all jobs is collected. This allows the systems to calculate, for every job with estimated time te_J , its mean percentage error Δte_J . This error will be the key information for calculating the reliability of future time estimations. If no previous history exists for te , the value provided by a linear interpolation among the previously existing te is used.
- The first on-line step evaluates the quality of the time estimations of each job J_i of the work plan, using the previously indicated historical information. A percentage error Δte_{J_i} is obtained for job J_i and their membership degree to the three linguistic labels that define its quality. These three degrees are the measure of the uncertainty of the estimation times for each new job.

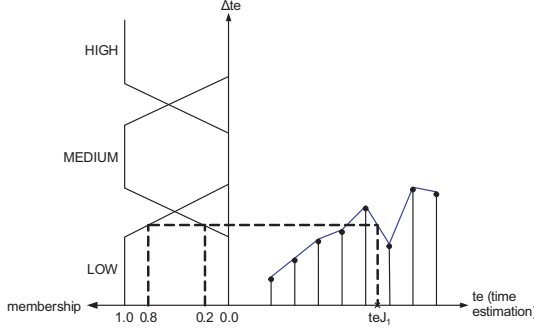


Figure 4: Calculation of uncertainty for a job

- The second step computes the global work plan evaluation. Once the particular degrees of uncertainty are calculated for each job in the plan (as stated before) the total uncertainty measures are calculated by means of simple t-conorm operations between the uncertainty of each job in the plan.
- Finally both the total time estimation for the plan and its uncertainty measure are used twofold:
 1. It is used as the input to the fuzzy control system that will improve the EA parameters.
 2. It is forwarded to the expert as an indication of the quality of the plan. In order to make it more understandable a linguistic approximation process is applied for giving such information only in terms of the relevant linguistic labels HIGH, MEDIUM, LOW and all the linguistic formulae including them (i.e., all the AND, OR, NOT combinations of these terms), thus considering all expressions that may be informative to experts.

Let us see this by means of an example. Figure 4 graphically describes the process. The historic of percentage deviations of previous jobs is depicted in $te - \Delta te$ axis, whilst linguistic labels defined by the expert are depicted in $membership - \Delta te$ axis. For a new job J_i , time estimation te_{J_i} is previously calculated using the regression model for that operation. The corresponding error mean percentage error Δte_{J_i} and its associated uncertainty are obtained. For the example in Fig. 4 uncertainty for job J_i is $(LOW_{0.8}, MEDIUM_{0.2}, HIGH_{0.0})$. For a plan involving just this job J_i and another job J_k ($LOW_{0.0}, MEDIUM_{0.4}, HIGH_{0.6}$), the total uncertainty will be described as $(LOW_{s(0.8,0.0)}, MEDIUM_{s(0.2,0.4)}, HIGH_{s(0.0,0.6)})$, where s is the t-conorm operator used for aggregation.

The global uncertainty (reliability) information for every plan is of great help for experts to select the most adequate plan at every moment. This critical decision is always done manually by experts and therefore the system is only requested to provide them with information on the plan duration, its schedule proposal and uncertainty associated. Decision is usually made on the total time criteria, but it may be the case that the uncertainty criteria be considered for discarding some plans.

Using the information coming from the fitness function and the uncertainty of each plan, a FRBS has been implemented in order to modify the crossover and mutation probabilities, and the elitism rate. Adaptive EAs [1, 2] can improve conventional EAs, for example avoiding the premature convergence and increasing the search speed.

In this application, it is quite important to obtain reasonably good solutions (plans) in a short time (few minutes). For this reason, an adaptive balance between exploration and exploitation of the search space helps in speeding up the search process. The main idea underlying the FRBS is to explore the search space when the obtained solutions are not good and have a high uncertainty. This is done with a regular genetic algorithm (GA) with high crossover rate and low mutation probability. But when the solutions improve and the uncertainty is reduced, this rates are changed to approach the genetic algorithm to an Evolution Strategy (lower crossover rate and higher mutation rate).

The FRBS uses as input variables the average fitness of the population (AF), the diversity of the population (div), and the average uncertainty of the plans (AU). As outputs, the system will modify the crossover and mutation probabilities (p_c , p_m), and the elitism rate (e_r). As an example: *If AF is low and AU is high and div is low Then p_c is high and p_m is medium and e_r is low*

In this situation the individuals have a low fitness value, the uncertainty of the plans is high, and the diversity is low, so the EA must maintain a high crossover rate to continue the exploration of the search space, keep a low value for the elitism (as the average fitness is low), but the mutation probability must be medium in order to increase the diversity of the population.

4 System implementation

In order to test the behavior of our solution we have designed a set of five small client orders. Each of these orders is composed of five jobs with different manufac-

turing operations: wood and wood-based panels cutting, varnishing, assembly, etc. The results described in this section were simulated with the following production plant configuration:

- 25 resource centers.
- 10 resources per center.
- 3 resource assignment strategies.

This produces a search space of size 10^{46} . The fact that each scheduling lasts approximately 2 seconds for each plan, makes the complete exploration of the search space impossible in a reasonable amount of time with a conventional algorithm.

The FRBS for the adaptation of the EA has three input and three output variables with the following characteristics:

Variable	Labels	Universe of discourse
AF	2	[1.0, 2.0]
AU	2	[0, 1]
div	2	[0.33, 0.66]
p_c	3	[0.4, 1.0]
p_m	3	[0.01, 0.05]
e_r	2	[0.06, 0.12]

Table 1: Characteristics of the data base of the FRBS

The other parameters of the EA are a population of 50 individuals and 100 iterations.

The proposed system will help in the near future in the decision making for scheduling in the wood furniture industry. For this reason, it provides the human decision maker with information related to the uncertainty of the proposed plan. This information must be also considered during the execution of the evolutionary algorithm in order to focus in areas of the search space with both high fitness and low uncertainty. The main advantage of the proposed adaptive EA over a usual EA is its capability to model all this information with a FRBS in a easier and more intuitive way.

5 Conclusions and Future Work

Although a prototype of the planning model is still currently being validated at a wood furniture industry, two conclusions can be derived from the results obtained. Firstly, our solution considerably reduces the time needed to compute manufacturing plans. In fact it fulfils all the requirements to perform a future dynamic re-scheduling task. Secondly, even though some time estimations are far from the obtained in the

production plant, the approach for dealing with uncertainty has proved to be useful for experts plan validation. In this sense, a fitness and uncertainty measure helps experts to have a vision of the plan that is closer to the reality. Moreover, the fuzzy labels facilitates the understanding of the plan evaluations.

Agradecimientos

This work is been carried out in the framework of a R+D contract with Martínez Otero Contract, S.A., supported by the Dirección Xeral de I+D of the Xunta de Galicia through grant PGIDIT04DPI096E.

References

- [1] F. Herrera and M. Lozano. Adaptive genetic operators based on coevolution with fuzzy behaviors. *IEEE Transactions of Evolutionary Computation*, 5(2):149–165, 2001.
- [2] F. Herrera and M. Lozano. Fuzzy adaptive genetic algorithms: Design, taxonomy and future directions. *Soft Computing*, 7(8):545–562, 2003.
- [3] J.C. Vidal, M. Lama, A. Bugarín and S. Barro. Problem-Solving Analysis for the Budgeting Task in Furniture Industry. In *Seventh International Conference on Knowledge-Based Intelligent Information & Engineering Systems*, volume 2774 of *LNAI*, pages 1307–1313, Oxford, UK, 2003. Springer-Verlag.
- [4] J.C. Vidal, M. Lama, and A. Bugarín. *Integrated Intelligent Systems for Engineering Design*, chapter Integrated Knowledge-based System for Product Design in Furniture Estimate. IOS Press, to be published in 2006.
- [5] S. Kreipl and M. Pinedo. Planning and scheduling in supply chains: An overview of issues in practice. *Production and Operations Management*, 13(1):77–92, 2004.
- [6] T. Löhl, C. Schulz, and S. Engell. Sequencing of batch operations for highly coupled production process: Genetic algorithms versus mathematical programming. *Computers and Chemical Engineering*, 22:S579–S585, 1998.
- [7] M. Gen and R. Cheng. *Engineering Design and Automation*. John Wiley & Sons Inc., 1997.
- [8] P. O’Grady and R.E. Young. Issues in Concurrent Engineering Systems. *Journal of Design and Manufacturing: The Research Journal of Concurrent Engineering*, 1:1–9, 1991.

Verificación de Taxímetros usando mediciones GPS como conjuntos borrosos

José R. Villar
villarjose@uniovi.es
Dpto. de Informática
Universidad de Oviedo
Gijón Asturias

Luciano Sánchez
luciano@uniovi.es
Dpto. de Informática
Universidad de Oviedo
Gijón Asturias

Adolfo Otero
otero@uniovi.es
Dpto. de Informática
Universidad de Oviedo
Gijón Asturias

José Otero
jotero@uniovi.es
Dpto. de Informática
Universidad de Oviedo
Gijón Asturias

Resumen

Para proceder a la verificación de un taxímetro es necesario simular el recorrido de un trayecto. Los recientes avances en ayudas a la conducción como ABS, ESP, TCS, etc. dificultan el proceso de verificación, cuando se utiliza una bancada estática en la que las ruedas tractoras giran mientras que las del otro eje no. Adicionalmente, la medida es afectada por la presión de inflado de las ruedas. Todo ello conlleva sustituir el mencionado dispositivo por otro que utilice la tecnología GPS. Debido a la naturaleza imprecisa de la tecnología GPS, ha sido necesario un preproceso de los datos con el fin de evitar posibles impugnaciones de la verificación. Mostraremos como, usando un algoritmo genético y técnicas fuzzy proporcionamos una cota del error cometido por el taxímetro que permite rechazar de forma incontestable un taxímetro cuando la medición que proporciona es incorrecta.

Palabras Clave: GPS, metrología, ITV, taxi, algoritmo genético, fuzzy.

1 INTRODUCCIÓN

El servicio proporcionado por los Taxis tiene carácter concesional, con tarifas reguladas por algún organismo oficial. Anualmente las tarifas se actualizan, implicando ajustes en los taxímetros y la consiguiente verificación de los mismos en una ITV. La tarificación depende de la longitud del trayecto y de la velocidad con que se recorra. Si se desea simular el recorrido en un trayecto calibrado, un técnico de la ITV tendría que verificar constantemente la velocidad del vehículo para utilizar en cada momento la tarifa corres-

pondiente. Esto no es adecuado, requiriéndose algún dispositivo que permita medir la velocidad y la distancia simultáneamente. El grupo de Metrología y Modelos de la Universidad de Oviedo viene encargándose desde 1990 del diseño de los dispositivos que realizan esta tarea en Asturias. Actualmente, en la verificación de los taxímetros se utiliza una bancada estática que dispone de unos rodillos sobre los que se sitúan las ruedas tractoras, con los que se mide satisfactoriamente la velocidad y la distancia. Sin embargo, la sucesiva incorporación a los turismos de diversas ayudas a la conducción dificultan el proceso de verificación, pudiendo llegar a averiar el vehículo debido a la diferencia de velocidad entre las ruedas tractoras y las del otro eje. Es por ello que se ha diseñado un dispositivo de verificación portátil, autónomo -sin necesidad de agente de ITV- y que no genere averías. Se le ha dotado de GPS y antena, así como de software adecuado. Con él, se ha conseguido registrar la posición del vehículo y su velocidad simultáneamente, consiguiendo así abaratar tanto el coste del equipo como el de la mano de obra.

Existe un claro inconveniente relacionado con la imprecisión intrínseca de los datos obtenidos mediante GPS. El grado de ésta no es constante, variando en cada medida, por lo que es necesario proporcionar una cota superior del error cometido en la medida de la distancia en caso de que la verificación resulte negativa. En la figura 1 se ilustra esta situación. El margen legal del error en distancia en España es del 10%: si un taxi presenta un error del 7% sólo se puede rechazar con seguridad si el proceso de verificación se produce con una precisión en la medida de la distancia, como mucho, del 3%. Dado que la distribución real del error cometido por los taxímetros no está libre de sesgo (gausiana que aparece a la derecha, desplazada hacia el límite legal), pequeños cambios en la tolerancia producen un gran aumento de la tasa de rechazo. Por lo tanto es fundamental calcular la mencionada cota de la forma más precisa posible y además de modo que se beneficie al propietario del taxi. Por este motivo

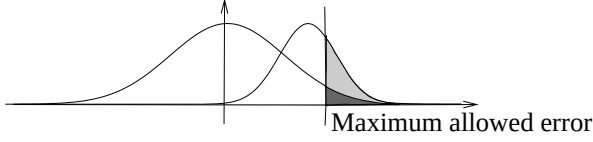


Figura 1: Distribución del error de los taxímetros: a la izquierda la esperada -libre de sesgo-, desplazada hacia la tolerancia máxima la real.

proponemos calcular la Menor Cota Superior (MCS) de todas las trayectorias compatibles con las medidas proporcionadas por el GPS.

En este artículo se presenta una nueva forma de calcular la MCS de una trayectoria a partir de datos imprecisos. Mediante un algoritmo genético multi objetivo se filtran los datos de entrada de modo que se obtenga el subconjunto de los mismos más pequeño que defina una multi poligonal que cubra los datos de entrada. La MCS se calcula a partir de esa multi poligonal mediante un heurístico determinista.

La estructura del trabajo es como sigue, en primer lugar se explica en la sección 2 como se obtienen las medidas GPS y la interpretación borrosa de las mismas. En la sección 3 se detalla el filtrado de los datos y el algoritmo determinista para el cálculo de la MCS. Posteriormente, en la sección 4 se muestran los experimentos realizados y los resultados obtenidos.

2 MEDIDAS GPS COMO DATOS FUZZY

El término Global Positioning System (GPS) se refiere a un sistema formado por un conjunto de dispositivos (satélites y receptor) cuya misión es determinar la posición del receptor. El receptor recibe de los satélites ciertas señales que le permiten calcular su longitud, latitud, altitud, número de satélites usados en la medida, fecha, etc. Cada señal que llega al receptor contiene información acerca del momento en el que partió del satélite el receptor.

Dado que se producen perturbaciones debidas a la atmósfera, desviaciones de los satélites, errores en el reloj de los satélites, errores del receptor y rebotes, es necesario disponer de un mayor número de satélites que los cuatro con los que en teoría bastarían para obtener una medida correcta.

Cuanto mayor sea el número de satélites, mejor será la precisión. Sin embargo, aún con un gran número de satélites disponibles, la configuración de la constelación de satélites es relevante a la hora de estimar la precisión de la medida. La influencia de este fac-

tor se mide con la magnitud denominada Dilution of Precision (DOP).

Los GPS comerciales proporcionan una indicación de su precisión utilizando una magnitud denominada Circular Error Probable (CEP), que informa de la probabilidad de que el receptor se encuentre en un entorno de cierto radio alrededor de la medida con determinada probabilidad. Así son comunes valores de CEP de 3 metros con un 50% de probabilidad o de 7 metros con un 90% de probabilidad.

2.1 HDOP Y PRECISIÓN DE MEDIDAS HORIZONTALES

Tal y como hemos dicho, en la precisión de las medidas realizadas con un GPS no sólo influye el número de satélites disponible sino que la geometría de la constelación de satélites también tiene impacto en dicha precisión. En el contexto de este artículo, la componente horizontal (HDOP) del DOP es la más importante, ya que está estrechamente relacionada con el CEP. A continuación se detalla como se relacionan estas magnitudes.

El RMS del error cometido en una serie de medidas GPS bajo un HDOP común se puede aproximar mediante la ecuación 1, donde A y B se pueden obtener de forma empírica para un receptor y antena específicos [17].

$$RMS\_Error(HDOP) = \sqrt{(A \cdot HDOP)^2 + B^2} \quad (1)$$

La componente HDOP se relaciona con el número de satélites disponible mediante la ecuación 2, donde C , D son específicas de nuevo.

$$RMS\_HDOP = \frac{C}{(\text{number of satellites})^2} + D \quad (2)$$

La probabilidad de que el error cometido en una medida sea menor que un CEP dado, condicionada a estar adquirida bajo un HDOP determinado sigue la distribución de Rayleigh, tal y como se muestra en la ecuación 3.

$$P(Err \leq CEP|HDOP) = 1 - e^{-\left(\frac{CEP}{RMS\_Error(HDOP)}\right)^2} \quad (3)$$

De las ecuaciones 1 y 3 y despejando CEP, se puede obtener este en función de HDOP y la probabilidad deseada. De forma análoga se puede obtener el CEP en función del número de satélites, tal y como se observa en la ecuación 4.

$$CEP = \left(-((A \cdot HDOP)^2 + B^2) \cdot \ln(1 - P(Err \leq CEP|HDOP))\right)^{0.5} \quad (4)$$

2.2 INTERPRETACIÓN BORROSA DE DATOS GPS

En el contexto de las probabilidades imprecisas, tiene sentido entender un conjunto borroso como un conjunto de tolerancias, asignado a cada una de ellas un grado de confianza, de modo que la de menor confianza sea la mas pequeña [10]. En concreto, se dice que dado un conjunto incompleto de intervalos de confianza para una variable aleatoria, podemos construir una variable aleatoria borrosa cuyos α -cortes son intervalos de confianza de grado $1 - \alpha$ [5], que contienen toda la información que conocemos sobre la variable aleatoria desconocida. En nuestro caso, el GPS proporciona dos intervalos de confianza, al 50% y al 90% (el mencionado CEP) y por lo tanto la representación borrosa de las coordenadas GPS es inmediata.

3 DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD DE LAS TRAYECTORIAS USANDO DATOS BORROSOS

Los datos GPS se toman a intervalos regulares. Cada muestra es un conjunto borroso, como se ha mencionado, cuyos α -cortes son círculos. Por lo tanto cada círculo es un intervalo de confianza para las coordenadas del taxi en ese momento. Tomar los centros de esos círculos como coordenadas del taxi no es válido. Necesitamos calcular la MCS cuyos extremos están contenidos en los círculos y esta longitud será siempre mayor que el valor obtenido uniendo los centros. Este cálculo no es fácil, sin embargo. Si intentamos calcular la longitud máxima de todos los trayectos lineales a trozos cuyos extremos están en los círculos, es obvio que a menor tiempo de muestreo, más grande será la estimación de la MCS. Esto es inadecuado, la estimación debería de ser independiente del período de muestreo [14]. Hemos decidido preprocesar los datos borrosos y eliminar toda la información redundante utilizando un algoritmo genético, como se mostrará en la siguiente sección.

Si se usan datos nítidos, la simplificación de una multipoligonal se ha estudiado en [8, 12]. La alternativa más parecida a la que se presenta, a la vista de la bibliografía consultada, usa datos borrosos de una base de datos geograficos [1] para reconstruir imágenes tridimensionales mediante B-splines borrosas [3].

3.1 FILTRADO DE LOS DATOS DE ENTRADA MEDIANTE UN ALGORITMO GENETICO MULTI OBJETIVO

Los datos de entrada al algoritmo genético es un vector de puntos borrosos. La salida es el subconjunto de tamaño mínimo que define una trayectoria borrosa conteniendo el mayor número de puntos posible. Usando ese subconjunto de puntos y para cada α -corte, se calcula la MCS usando el heurístico que explicaremos más adelante.

Cada candidato a solución se evalúa de la forma siguiente: en primer lugar se construye la cadena de poligonales para cada α -corte de los datos seleccionados, usando las superficies tangentes a los puntos borrosos seleccionados ¹. El objetivo es que la cadena contenga el máximo número de puntos y que ocupe el menor área posible. Ambos objetivos son números borrosos y definen un problema multicriterio [4] que resolveremos mediante el algoritmo NSGA-II [6, 7].

3.1.1 Codificación de cada individuo:

La codificación utiliza un vector de booleanos indicando si un punto está incluido en o ha sido eliminado de la trayectoria, de longitud arbitraria. Para generar un individuo, cada punto no extremo se incluye en el vector con probabilidad p . Los puntos extremos del camino nunca serán eliminados.

3.1.2 Operadores Genéticos:

Las definiciones de las operaciones de cruce y mutación deben reducir el número de vértices y por lo tanto no poseen sesgo. Dados dos progenitores A y B , los descendientes son dos cadenas C y D tales que $A \cap B \subseteq C$ y $A \cap B \subseteq D$; un vértice $v \in A - B$ tiene una probabilidad p^+ de estar en C , un vértice $v \in B - A$ tiene una probabilidad p^- de estar en C , donde p^- es mucho más pequeña que p^+ . El conjunto D se construye de la misma forma. La mutación se define como la eliminación aleatoria de un punto no extremo de la cadena.

3.1.3 Fitness borroso multiobjetivo:

Los objetivos utilizados en esta propuesta son el número de puntos borrosos sin cubrir y el área total de la cadena poligonal, ambos números borrosos. Es por ello que la dominancia de Pareto debe ser extendida para valores borrosos. Una manera de realizar la extensión es la α -dominancia descrita en [18]. En

¹Esta cadena puede contener algunos puntos adicionales no cubiertos por los datos de entrada, pero esto beneficiaría al usuario del servicio y por lo tanto es legal

[13] se propone obtener un rango de dominancia a partir de agregar las reglas borrosas para determinar el *grado de dominancia de x sobre y* y el *grado en que x es dominado por y* . En [11] se define la comparación entre números borrosos, de modo que la dominancia de Pareto puede usarse tal cual. En [9] se propone una generalización del concepto de dominancia de Pareto. En este trabajo se propone el uso de la α -dominancia, minimizando ambos criterios.

3.2 CALCULO DETERMINISTA DE LA LONGITUD DE LA TRAYECTORIA MAS LARGA

Una vez que los datos se preprocesan mediante el algoritmo genético, obteniendo el subconjunto más pequeño de vértices que contiene el recorrido real, necesitamos calcular su MCS.

Para cada α -corte de la B -spline borrosa que contiene la trayectoria del taxi, tenemos una cadena poligonal construida a base de trapezoides, como se ve en la figura 2. El sentido de la marcha se indica mediante una flecha. Cada vértice de un trapezoide se identifica mediante una pareja de enteros. Los que están a la izquierda de la flecha, según el sentido de la misma, tienen un cero como primer valor de ese par, los que están a la derecha un uno. El otro número es el índice del tramo. En cada tramo, la MCS pasa por $(0, i)$ o por $(1, i)$. El conjunto de vértices que forman parte de la MCS puede ser determinado por exploración exhaustiva, pero este cálculo es muy costoso e impracticable para cualquier trayectoria real del orden de 500 puntos. Este problema ha sido estudiado previamente, relacionado con el conocido como “Longest Path With Forbidden Pairs” [2] el cual es NPO-PB completo.

Debido a estas cuestiones y a que, en la práctica, los cambios en dirección y en velocidad (que implica una cierta distancia entre vértices) están limitados por la dinámica del taxi, la geometría del recorrido y el comportamiento del GPS, usamos un heurístico que es lineal con el número de vértices. El heurístico se basa en la selección de los vértices convexos: cuando un vehículo gira, el trayecto más largo que puede recorrer pasa por el exterior de las curvas que tome.

El heurístico es como sigue: el primer segmento de la MCS une los vértices $(x, 0)$ e $(y, 1)$ siendo x e y los valores escogidos de entre 1, 0 que maximizan la distancia entre esos vértices. Desde el vértice del paso 1 hasta al penúltimo, si sólo hay un vértice convexo, la MCS pasa por ese vértice. Si hay dos vértices convexos, la MCS pasa por el vértice más alejado del anterior. Si no hay vértices convexos, la MCS pasa por el vértice más alejado del anterior. El último tramo de la MCS termina

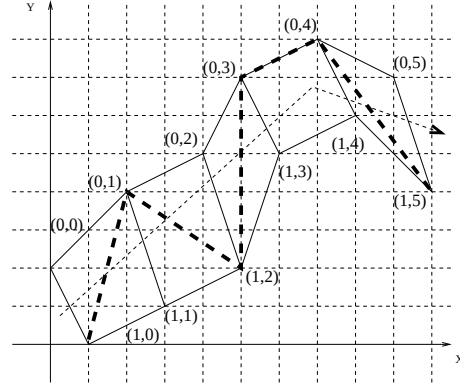


Figura 2: Ejemplo del cálculo de la MCS (línea gruesa a trazos) mediante el heurístico determinista.

en el vértice más alejado del vértice seleccionado en la etapa anterior. En la figura 2 se muestra un ejemplo de una MCS calculada mediante este heurístico, indicada por una línea gruesa a trazos.

4 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

En los experimentos correspondientes a este trabajo, los parámetros del algoritmo NSGA-II son los siguientes: 400 generaciones, población de 100 individuos, probabilidades de mutación y cruce 0.1 y 0.7 respectivamente, $p^+ = 0.7$, $p^- = 0.01$. Cada individuo debe cubrir un mínimo del 85% de los puntos para ser incluido en el frente de Pareto.

Hemos decidido evaluar nuestro algoritmo en un recorrido realista que cubra las situaciones encontradas habitualmente en la verificación de un taxímetro, con varias curvas, aceleraciones y deceleraciones, cambios en HDOP, CEP y número de satélites disponibles. Las longitudes y latitudes obtenidas se convirtieron en un par Northing/Easting del sistema Universal Transverse Mercator [16]. De este modo se puede utilizar la norma Euclídea para calcular distancias entre mediciones, al proyectarse la superficie terrestre en unos ejes cartesianos.

La trayectoria se ha muestreado cada segundo, la longitud total es de 21273.21 metros. En cada punto el número de satélites disponibles es una variable aleatoria uniforme que varía entre 4 y 9. A partir de estos datos, construimos un conjunto de mediciones GPS realizadas cada una en el mismo instante en el que se ha muestreado la trayectoria. El proceso de simulación se realiza de la siguiente forma: con una probabilidad igual a 0.95, se selecciona un punto que dista del correspondiente de la trayectoria menos que

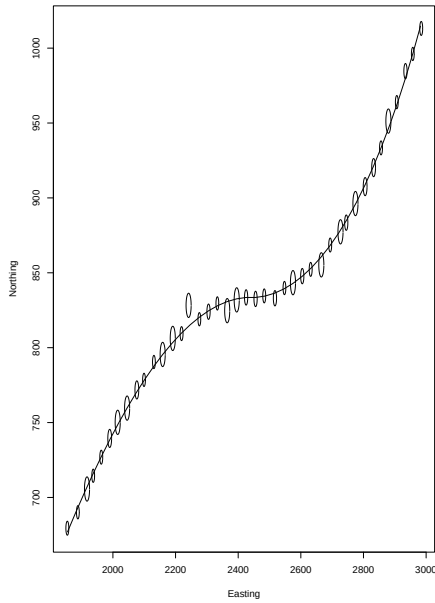


Figura 3: Parte de los datos usados en los experimentos. Los círculos (elipses por el escalado) representan las medidas GPS. La línea continua la trayectoria real. La mayor parte de los puntos de la trayectoria están en el CEP al 95%.

el CEP correspondiente al número de satélites adjudicado y a la mencionada probabilidad. Con probabilidad 0.05 el punto se toma más allá del correspondiente CEP. Este procedimiento remedia la incertidumbre que ocurre cuando se usa un GPS y los datos obtenidos sirven para averiguar como de ajustadas son las MCS obtenidas con nuestro algoritmo. En la figura 3 se muestra parte de los datos generados. Las medidas GPS se representan como círculos (elipses en realidad debido al escalado) con radio igual al CEP al 95% y la trayectoria original como una línea continua. Como se puede observar, la mayor parte de los círculos (de hecho el 95%) cortan a la trayectoria, es decir, el punto correspondiente de la trayectoria esta en el círculo de radio CEP centrado en la medida.

Hemos realizado dos experimentos con dos subconjuntos de los datos generados de tamaño 120 cada uno, que se pueden ver en la parte izquierda y derecha de la figura 4.

La longitud real de la primera trayectoria es de 3228.574 metros. La longitud de la MCS estimada, compatible con el 85% de los puntos es de 3418.81. Si el taxímetro devuelve una longitud un 10% mayor que esa cota superior, debe rechazarse, ya que incluso en el peor caso el taxímetro está fuera de tolerancia. La

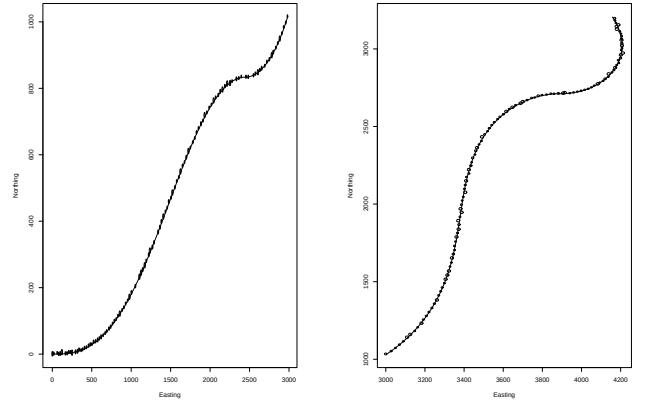


Figura 4: Trayectorias utilizadas en los experimentos.

distancia medida a través de las mediciones GPS es de 3238.521, que está mucho más cerca de los datos reales, pero el usuario del servicio puede aducir que la medida es imprecisa. Si proporcionamos una cota superior de la medida, esta argumentación no se sostiene. La longitud de la segunda trayectoria es de 2741.306 metros. La longitud de la MCS en los mismos términos que en el caso anterior es de 3250.78. En este caso, la cota es menos ajustada ya que la trayectoria tiene giros más pronunciados y por lo tanto existen MCS de mayor longitud compatibles con ella.

5 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Durante el desarrollo de este trabajo hemos visto que existen problemas legales si usamos directamente los datos obtenidos mediante el GPS. Los propietarios de los taxis podrían impugnar fácilmente cualquier verificación que resulta negativa esgrimiendo ese argumento. Sin embargo, debido a los problemas comentados en la sección 1, la única alternativa factible para verificar los taxímetros hoy en día es el uso de GPS. Por ello hemos decidido modificar la forma en la que una ITV presenta la información, dando una estimación de la MCS de modo que si el taxímetro está un 10% por encima de ella, entonces no hay duda de que el taxímetro está mal ajustado. Además esta alternativa es menos restrictiva, lo cual se ajusta mejor a la realidad de la distribución del error cometido por los taxímetros, sesgado hacia la tolerancia máxima. Hemos constatado que nuestro algoritmo funciona mejor cuando la trayectoria no presenta giros pronunciados, en futuras implementaciones, haciendo hincapié en la limitación de los cambios de dirección por cuestiones físicas, imitando el comportamiento dinámico de un conductor real.

El trabajo futuro incluye el uso de distintos algoritmos evolutivos como recocido simulado con operadores genéticos que es más rápido y produce mejores resultados en problemas multiobjetivo [15]. En el mismo sentido se deben probar distintos conceptos de dominancia borrosa, con el fin de estimar de forma más ajustada la MCS.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado por el Ministerio de Educación Español, en el marco del proyecto TIN2005-08386-C05.

Referencias

- [1] A.M. Anile, B. Falcidieno, G. Gallo, M. Spagnuolo and S. Spinello, *Modeling uncertain data with fuzzy B-splines*, Fuzzy Sets and Systems 113, 397–410, 2000.
- [2] Berman, P., and Schnitger, G. (1992), “On the complexity of approximating the independent set problem”, Inform. and Comput. 96, 77-94.
- [3] C. de Boor, *On Calculatin with B-splines*, Journal of Approximation Theory 6, 50-62, 1972.
- [4] C. A. Coello, *An Updated Survey of Evolutionary Multiobjective Optimization Techniques : State of the Art and Future Trends*, 1999 Congress on Evolutionary Computation, IEEE Service Center, 1999.
- [5] I. Couso, S. Montes, P. Gil The necessity of the strong alpha-cuts of a fuzzy set International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 9-2, 249-262, 2001
- [6] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratab, and T. Meyarivan, *A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II*, In Marc Schoenauer, Kalyanmoy Deb, Günter Rudolph, Xin Yao, Evelynne Lutton, Juan Julian Merelo, and Hans-Paul Schwefel, editors, Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference, 849-858, Springer. LNCS, 2000.
- [7] K. Deb and T. Goel, *Controlled Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithms for Better Convergence*, In Eckart Zitzler, Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Carlos A. Coello Coello, and David Corne, editors, First International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 67-81. Springer-Verlag. LNCS No. 1993, 2001.
- [8] R. Estkowski and J. S. B. Mitchell, *Simplifying a polygonal subdivision while keeping it simple*, SCG '01: Proceedings of the seventeenth annual symposium on Computational geometry, 40–49, ACM Press, New York, NY, USA, 2002.
- [9] M. Farina and P. Amato, *Fuzzy Optimality and Evolutionary Multiobjective Optimization*, in Carlos M. Fonseca y otroseds., Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Second International Conference, EMO 2003, pp. 58–72, Springer. LNCS. Volume 2632, Faro, Portugal, April 2003.
- [10] Goodman, Nguyen. *Uncertainty Models for Knowledge-based Systems*. North-Holland. 1985
- [11] M. Hapke, A. Jaszkievicz and R. Slowinski, *Pareto Simulated Annealing for Fuzzy Multi-Objective Combinatorial Optimization*, Journal of Heuristics, 6(3), 329-345, August 2000.
- [12] J. Hershberger and J. Snoeyink, *Speeding up the douglas-peucker line simplification algorithm*, in Proceedings of the 5th International Symposium on Spatial Data Handling, 134–143, Charleston, United States, 1992.
- [13] M. Köppen, K. Franke and B. Nickolay, *Fuzzy-Pareto Dominance Driven Multiobjective Genetic Algorithm*, In Proceedings of the 10th IFSAWorld Congress (IFSA 2003), pages 450-453, Istanbul, Turkey, June, 2003.
- [14] N. Meratnia and R. A. de By, *Trajectory representation in location-based services : problems and solutions*, in Proceedings of the 3rd IEEE Workshop on Web and Wireless Geographical Systems (W2GIS 2003) in conjunction with the Fourth International Conference on Web Information Systems Engineering (WISE), Rome, Italy, 2003.
- [15] L. Sánchez, J. Otero and J. R. Villar, *Boosting of fuzzy models for high-dimensional imprecise datasets*, in Proceedings of the Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems IPMU06, Paris, 2006.
- [16] Snyder, J. P., “Map Projections Used by the U. S. Geological Survey”, 2nd edition, Geol. Survey Bulletin 1532, 313 p., U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1982.
- [17] Wilson, D., David L. Wilson’s GPS Accuracy Web Page, <http://users.erols.com/dlwilson/gps.html>.
- [18] J. Zhang, B. Pham, and P. Chen, *Fuzzy Genetic Algorithms Based on Level Interval Algorithm*, In Kazmierczak, E, Eds. Proceedings The 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pages pp. 1424-1427, Melbourne, Australia, 2001.

USO DE MODELOS DE RESTRICCIÓN DEL CONTEXTO PARA EL DESARROLLO DE APLICACIONES MÓVILES INTELIGENTES

Fernando Bobillo, Miguel Delgado, Juan Gómez-Romero

ETS Ingeniería Informática, c/. Periodista Daniel Saucedo Aranda, S/N, 18071

Universidad de Granada

fbobillo@decsai.ugr.es, mdelgado@ugr.es, jgomez@decsai.ugr.es

Resumen

La movilidad se ha convertido en una necesidad fundamental que deben satisfacer los Sistemas Basados en Conocimiento actuales. Durante el proceso de toma de decisiones es esencial que los usuarios dispongan de toda aquella información relevante que pueda influir en el resultado final, sea cual sea el momento y el lugar en que éste tenga lugar.

En este artículo proponemos un modelo de representación que, utilizando conocimiento sobre el contexto, permite distribuir resúmenes de información útiles a usuarios ubicuos. Este modelo ha sido empleado en el diseño de un sistema que proporciona datos sobre la historia de los pacientes del Hospital Clínico San Cecilio de Granada durante la asistencia fuera del centro.

Palabras Clave: Movilización del Conocimiento, Ontologías, Dispositivos Móviles, Historias Clínicas.

1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad, cualquier implementación de un Sistema Basado en Conocimiento que se pretenda efectivo requiere intercomunicar numerosos componentes separados espacial y temporalmente e integrar distintos repositorios de datos distribuidos y con diferentes formatos. No obstante, las herramientas clásicas de adquisición, representación y recuperación del conocimiento no facilitan la realización de estas tareas. Por este motivo, uno de los principales desafíos en el área de los Sistemas Inteligentes es el desarrollo de métodos y tecnologías que promuevan

la incorporación de fuentes de conocimiento heterogéneas.

Los Sistemas Basados en Conocimiento modernos no sólo presentan una separación física entre los módulos que componen sus bases de conocimiento, sino también respecto a las personas que hacen uso de ellos. Ocurre, pues, que los usuarios necesitan acceder al sistema de soporte a la decisión en el lugar y en el momento en que ésta última vaya a tener lugar, lo cual en la mayoría de los casos no sucederá en un entorno fijo y controlado. La capacidad de “proporcionar la información precisa a la persona apropiada, en un formato adecuado y en el momento justo, de forma que pueda incorporarse al proceso de toma de decisiones” se conoce como Movilización del Conocimiento [6].

En este punto, conviene destacar que la Movilización del Conocimiento no propone un tipo de Sistemas Basados en Conocimiento diferentes a los tradicionales, que ya recogen la necesidad obvia de distribuir conocimiento cumpliendo ciertas restricciones de tiempo, lugar y persona. La novedad reside en tomar conciencia de las circunstancias complejas en que tienen lugar las actividades de negocio en el mundo actual, donde la ubicuidad de los usuarios y la existencia de grandes volúmenes de datos son dos dificultades fundamentales que se deben tener en cuenta en el soporte a la toma de decisiones.

De la propia definición de Movilización del Conocimiento se desprenden varias necesidades:

1. Accesibilidad y disponibilidad de los proveedores de conocimiento.
2. Integración de información representada con distintos formatos.
3. Adaptación a las características del terminal de acceso empleado por el usuario.
4. Personalización de resultados en función del contexto del usuario.

Adicionalmente, conviene resaltar algunos requisitos propios de las aplicaciones corporativas actuales, tales como la seguridad en las comunicaciones, la extensibilidad de los sistemas o la facilidad de mantenimiento.

Para satisfacer esta lista de requerimientos hemos propuesto el uso combinado de varias tecnologías, metodologías, herramientas y arquitecturas, que constituyen los bloques básicos en la implementación de un Sistema Basado en Conocimiento Móvil [4]:

1. Ontologías como formalismo para la representación de conocimiento distribuido [5].
2. Servicios Web, que ofrecen un marco de trabajo para el acceso automático a aplicaciones remotas [2].
3. Sistemas Multi-Agente, que proponen una arquitectura formal e instrumentos para la implementación de sistemas distribuidos donde se necesita orquestar la comunicación entre diferentes componentes [10].
4. Dispositivos móviles, por ejemplo PDAs o teléfonos celulares, que permitan acceder a los servicios remotos [9].
5. Tecnologías de comunicación inalámbricas: Bluetooth, Wi-Fi, UMTS, etc.

En este trabajo nos centraremos en un problema que presentan los Sistemas Basados en Conocimiento Móviles que manejan grandes volúmenes de información: la necesidad de obtener conocimiento resumido significativo para una decisión a partir de fuentes diversas. Para solventarlo, propondremos el uso de *modelos de restricción de contexto*, esto es, representaciones de conocimiento que determinan bajo qué circunstancias debe considerarse cada segmento de información disponible.

Adicionalmente, mostraremos el caso del Hospital Clínico San Cecilio de Granada, un escenario real donde estamos aplicando estas ideas para construir un sistema que distribuye información sobre historiales clínicos a los especialistas durante actuaciones fuera del centro.

El esquema de este trabajo es el siguiente: en la sección 2, presentaremos el concepto de modelo de restricción de contexto y veremos cómo puede beneficiarse de las aportaciones de la Lógica Difusa; en la sección 3, describiremos el funcionamiento del sistema de gestión de historiales implantado actualmente en el Hospital Clínico San Cecilio y cómo se incorpora nuestra ampliación; finalizaremos en la sección 4 enunciando algunas conclusiones y propuestas de trabajo futuro.

2 MODELOS DE RESTRICCIÓN DE CONTEXTO

Uno de los esfuerzos más notables efectuados en la última década en varias áreas de la Inteligencia Artificial ha sido la creación de mecanismos para la gestión de conocimiento heterogéneo y distribuido. Así, las ontologías se han convertido en el paradigma de formalismo de representación del conocimiento, gracias sobre todo a su potencia expresiva y a sus propiedades computacionales, heredadas de los Lenguajes de Marcos y de la Lógica de Descripciones [1]. De hecho, las ontologías conforman el soporte teórico de propuestas para la gestión de información tan ambiciosas como la Web Semántica [3].

El interés que formalismos como las ontologías despiertan es razonable si se tienen en cuenta algunas de las dificultades que presentan los ambientes de toma de decisiones actuales, que pueden resumirse en la necesidad de proporcionar información relevante (de entre el gran volumen disponible) a un usuario en el tiempo y lugar en que lo necesite. Satisfacer plenamente esta exigencia es el objetivo de los Sistemas Basados en Conocimiento Móviles, donde las dimensiones espacio y tiempo se extienden en toda su amplitud.

Cabe destacar, asimismo, que los inconvenientes derivados del manejo de amplias colecciones de datos son inherentes a los sistemas móviles. Ante una consulta de un usuario, habitualmente no será posible devolverle toda la información disponible, debido a las limitaciones de comunicación, procesamiento y presentación de datos que padecen los dispositivos involucrados. Por lo tanto, será muy interesante determinar cuál es el menor conjunto de datos representativo para un usuario y responder en consecuencia a su solicitud.

Nuestra propuesta para solucionar este problema es el uso de una metodología para la construcción de ontologías basada en la idea de *modelo de restricción de contexto*. Un modelo de restricción de contexto es, esencialmente, una representación formal que relaciona descripciones de posibles situaciones a las que puede enfrentarse el usuario con subconjuntos de información disponible en el sistema. Este modelo permite razonar qué conocimiento, de entre todo el disponible en el sistema, es útil para un usuario nómada que desempeña una labor en determinadas circunstancias.

Supongamos el caso de un especialista médico que desea consultar la historia clínica de un paciente. Si se trata de un acto de atención dentro de un hospital, el médico podrá recuperar de las bases de datos clínicas todos los registros referidos a un paciente utilizando la aplicación informática del centro. Con tiempo y conocimientos suficientes, y dependiendo de las facilidades que ofrezca el sistema de

gestión de historiales, el propio especialista descartará toda la información que no le resulte útil y obtendrá aquella que busca.

El ejemplo anterior se correspondería con un escenario de uso de un Sistema Basado en Conocimiento clásico. Pensemos ahora en otro especialista que forma parte de una unidad móvil de emergencias y se encuentra atendiendo a un individuo que ha sufrido un accidente de tráfico. También en este caso puede ser conveniente conocer ciertos datos sobre la historia clínica paciente (por ejemplo, si le ha sido diagnosticada alguna alergia a los medicamentos). No obstante, posiblemente no se podrá consultar a la aplicación del hospital o, en el caso de que ésta fuera accesible, no se dispone del tiempo necesario para revisar todos los documentos electrónicos almacenados.

Para el especialista podría resultar de gran utilidad disponer de una pequeña nota que le informara simplemente de que, puesto que está realizando una intervención a un paciente con traumatismo múltiple, debe saber que padece asma y que es alérgico a la novocaína, por lo que debe tomar ciertas precauciones en la administración de anestésicos.

El modelo de restricción de contexto se encarga de representar este tipo de conocimiento (Figura 1). Dados, por una parte, una representación más o menos formal y accesible de los datos de que se dispone (en el ejemplo, las historias clínicas), y por otra, una caracterización de algunas de las posibles situaciones a las que se enfrentará el usuario (para el médico, cuadros clínicos generales y valoraciones de gravedad), el modelo de restricción del contexto define relaciones entre subconjuntos de ambos dominios. Estas conexiones son las que determinan qué tipo de información es relevante según el ambiente del usuario. En consecuencia, empleando un esquema de este tipo es posible dotar de movilidad al sistema, pues se superan las limitaciones de los dispositivos involucrados gracias a la generación de resúmenes de información.

Las ventajas de estructurar el conocimiento utilizando un modelo de restricción del contexto son numerosas. En primer lugar, nuestro esquema proporciona una arquitectura de referencia para solucionar el problema de partida, que es la distribución de información en sistemas altamente distribuidos y móviles. Por otra parte, el modelo permite reutilizar cualesquiera otras representaciones sobre los dominios involucrados de que se disponga. En el caso propuesto, por ejemplo, podrían incorporarse al modelo de contexto algunas de las ontologías médicas existentes tales como UMLS o Galen. Asimismo, el modelo de información del dominio puede utilizarse como una capa de abstracción sobre las fuentes de información existentes que dé soporte a otras aplicaciones. En nuestro ejemplo, el modelo de información del dominio podría emplearse como formato intermedio para la transmisión

de datos entre hospitales que utilicen distintos sistemas de gestión de historiales. Por último, resaltamos que nuestra propuesta es fácilmente extensible tanto dentro de un mismo dominio de aplicación como a diferentes ámbitos.

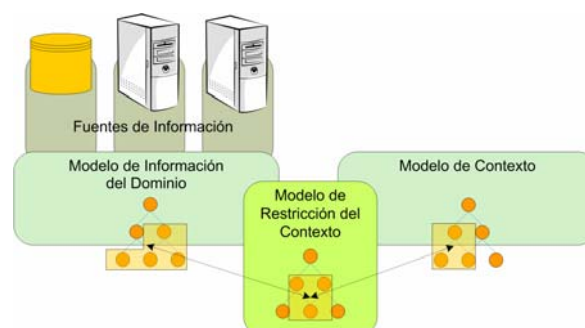


Figura 1: Esquema del Modelo de Restricción de Contexto.

El modelo de restricción de contexto admite además la incorporación de elementos de la Lógica Difusa. Así, sería posible: (i) describir de manera flexible escenarios afectados de imprecisión, y (ii) valorar cuán importante es cierta información en un contexto determinado. Por lo tanto, podremos razonar sobre un modelo que no sólo restringiría el contexto en que cierta información es interesante, sino que además aportaría valoraciones sobre su relevancia. Para ello, se está trabajando con extensiones de la Lógica de Descripciones para codificar el modelo de restricción del contexto utilizando características de la Teoría de Conjuntos Difusos [8].

Puede intuirse que las extensiones de la Lógica de Descripciones más prometedoras serán las que afectan a los constructores de roles y a los axiomas de inclusión general de conceptos. En el caso de los roles, las ampliaciones difusas permiten graduar (y etiquetar) la relación entre dos individuos. En el ejemplo del hospital, esto significa poder introducir en la ontología intermedia valoraciones de la importancia de los conjuntos de datos en los escenarios de intervención y establecer umbrales mínimos que reduzcan la información recuperada en función de diferentes parámetros. Por otra parte, la inclusión general de conceptos difusa permite definir relaciones de jerarquía parcial entre clases. Esta extensión es de utilidad durante la construcción del modelo de contexto del hospital, pues proporciona un mecanismo potente para definir estructuras de clases complejas en el dominio de la Medicina.

3 MODELO DE RESTRICCIÓN DEL CONTEXTO PARA LA RECUPERACIÓN DE HISTORIAS CLÍNICAS

3.1. SISTEMA DE GESTIÓN DOCUMENTAL DEL HOSPITAL CLÍNICO SAN CECILIO DE GRANADA

El Hospital Clínico de Granada dispone de un sistema de gestión documental en el que, esencialmente, se asocia una (única) historia clínica a un paciente. La historia de un paciente recoge toda la información relevante que ha sido generada durante los actos asistenciales realizados sobre él. Dicha información se organiza en documentos electrónicos estructurados en registros. Cada uno de estos documentos electrónicos se construye utilizando una plantilla predefinida, donde se establecen los campos que deben rellenarse para cada clase de documento (Figura 2).

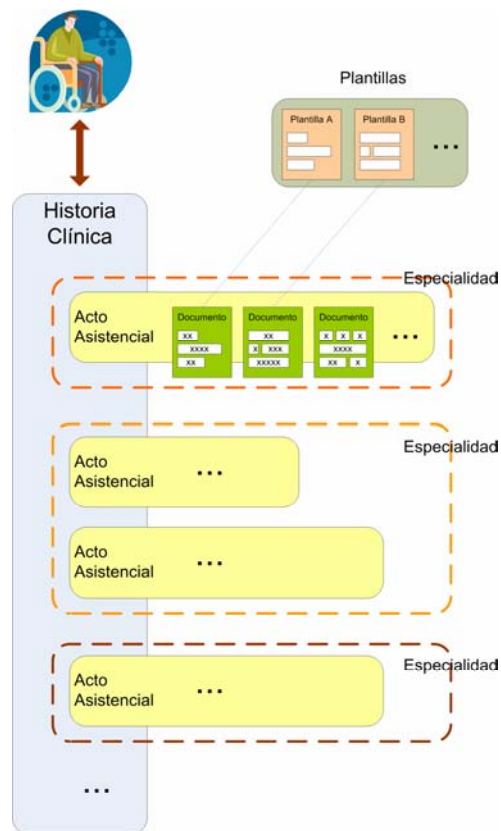


Figura 2: Historial clínico de un paciente en el Sistema de Gestión Documental del Hospital Clínico San Cecilio

El sistema de gestión documental es una aplicación cliente-servidor a medida para el hospital soportada por la base de datos de historias clínicas. Los médicos pueden utilizar el software para consultar información acerca de los actos asistenciales efectuados sobre un paciente dentro de su especialidad. Para garantizar la integridad y la seguridad de los datos, la aplicación implementa un mecanismo de identificación mediante contraseña.

El sistema actual funciona adecuadamente en situaciones controladas, donde el médico dispone de tiempo suficiente para consultar, filtrar y extraer manualmente información útil de los documentos electrónicos almacenados. Sin embargo, la aplicación no permite aprovechar la información existente cuando la decisión médica debe tomarse fuera del hospital. Esta limitación se debe a dos causas fundamentales: (i) no es posible acceder remotamente al sistema y, en caso de que se le dotara de esta capacidad, (ii) no sería factible enviar al dispositivo móvil de un especialista todo el volumen de información disponible acerca de un paciente. Dadas estas circunstancias, consideramos muy apropiado aplicar nuestra propuesta de modelo de restricción de contexto para desarrollar un sistema móvil que recupere de forma efectiva información sobre historias clínicas.

3.2. IMPLEMENTACIÓN DEL SISTEMA DE RECUPERACIÓN DE RESÚMENES CLÍNICOS *IASO*

El sistema que presentamos en este apartado tiene como objetivo mejorar la atención médica especializada fuera del hospital, ofreciendo al personal sanitario información útil sobre historiales clínicos allá donde se encuentre, aun cuando no sepa exactamente cuál debe ser esta información. Así, pretendemos dotar al médico ubicuo de una herramienta que aumente sus conocimientos sobre un paciente y, por lo tanto, las posibilidades de éxito de su intervención.

Para ello, hemos diseñado una ampliación del sistema actual que ofrece respuestas a consultas del tipo “quiero información relevante de la historia clínica del paciente X, que se encuentra en el estado Y” en cualquier momento y en cualquier lugar. Nuestra propuesta requiere la realización de dos tareas fundamentales:

1. Describir semánticamente la información documental almacenada en el sistema actual utilizando el esquema de modelo de restricción de contexto presentado en la sección anterior.
2. Implementar los componentes software y hardware necesarios para que la información (resumida) sobre historias clínicas pueda distribuirse de forma segura a los especialistas médicos.

La figura 3 muestra la arquitectura de nuestro Asistente Inteligente para Atención Sanitaria fuera del Hospital, denominado IASO (Intelligent ASsistant in Outdoors healthcare).

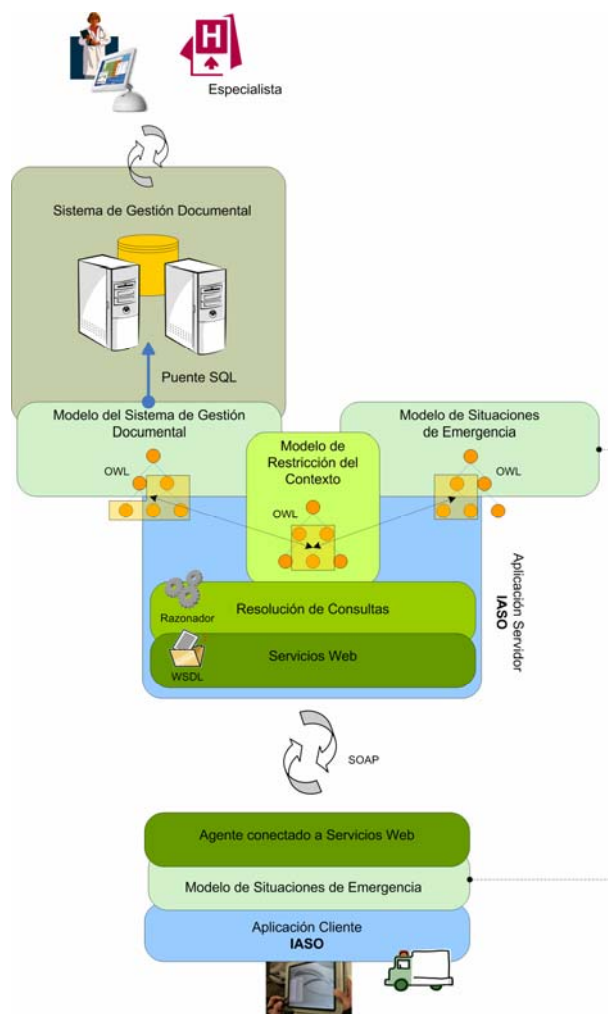


Figura 3: Arquitectura del Sistema IASO en el Hospital Clínico San Cecilio de Granada

La base de conocimiento del sistema consta de tres sub-modelos semánticos que respectivamente: (i) caracterizan la información sobre historias que actualmente se maneja en el hospital (Modelo de Información del Dominio), (ii) representan perfiles de estado de pacientes que necesitan atención clínica urgente (Modelo de Contexto), y (iii) conectan los dos anteriores (Modelo de Restricción de Contexto). Todos estos modelos son ontologías codificadas en OWL, el lenguaje estándar para ontologías web

[7], y sobre ellas se realizan tareas de razonamiento empleando un motor de inferencia.

El funcionamiento del sistema IASO puede intuirse a partir de la arquitectura de la Figura 3. Un especialista médico, equipado con un dispositivo móvil conectado a una red inalámbrica, puede enviar al servidor una consulta en la que se describe brevemente la situación en la que se encuentra el paciente (utilizando los términos del Modelo de Situaciones de Emergencia) y se aporta alguna información personal adicional para localizarlo entre todos los historiales. El servicio de resolución de consultas recurrirá al Modelo de Restricción de Contexto para determinar cuáles de los escenarios representados están relacionados con el actual y, a partir de estos, qué subconjuntos de información del Modelo del Sistema de Gestión Documental son útiles en estas circunstancias. Para evitar redundancias y mejorar la eficiencia del sistema, este modelo no contiene instancias de pacientes, así que será necesario extraer los datos clínicos concretos de las bases de datos del Sistema de Gestión Documental. El servicio de consulta, finalmente, dará formato a la información recuperada y la devolverá al usuario, que podrá revisarle cómodamente en su dispositivo.

En cuanto a la implementación del sistema, en primer lugar hay que tener en cuenta que la aplicación actual es un sistema cerrado al que sólo se puede acceder con el software disponible en el hospital. Por consiguiente, para ofrecer información hacia el exterior y que las historias puedan ser consultadas desde diferentes ubicaciones y dispositivos, es necesario habilitar convenientemente nuevos mecanismos de distribución de información. Consideramos que una arquitectura orientada a servicios donde participen Servicios Web y agentes inteligentes es la alternativa más interesante para ello.

Otro requisito importante del diseño es la participación en el sistema de dispositivos móviles, lo que obliga a considerar la variedad de plataformas y tecnologías existentes, así como sus limitaciones de procesamiento, conectividad, tamaño de pantalla y duración de baterías. Estos factores han sido tenidos en cuenta, de manera que el sistema resultado es adaptable, extensible y, sobre todo, cómodo de utilizar para el especialista médico.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo hemos presentado un patrón para el diseño de bases de conocimiento complejas que participen en Sistemas Móviles. El esquema descrito, denominado modelo de restricción del contexto, propone la creación de dos ontologías que codifiquen conocimiento acerca del dominio de la aplicación en cuestión y del contexto en que éste puede resultar útil; utilizando una tercera ontolo-

gía que relaciona las dos anteriores se establece bajo qué circunstancias conviene recuperar ciertos subconjuntos de información. De esta manera se proporciona un mecanismo formal para la provisión de resúmenes adaptados al contexto del usuario ubicuo.

Junto a este modelo de representación describimos una arquitectura de Sistema Basado en Conocimiento Móvil que se basa en él. Dicha arquitectura ha sido empleada en el diseño de una ampliación del Sistema de Gestión Documental del Hospital Clínico San Cecilio de Granada que permite recuperar extractos de historias clínicas útiles durante la atención sanitaria fuera del centro.

En la actualidad, estamos trabajando en la implementación de dicho sistema y disponemos de un prototipo inicial que demuestra la funcionalidad básica de cada uno de los módulos. Por lo tanto, nuestro principal objetivo es obtener una aplicación plenamente operativa y probar su utilidad en escenarios reales. Para ello es importante ampliar las ontologías de dominio con las que se trabaja en este momento y conseguir modelos que representen adecuadamente la información disponible en el hospital, las situaciones de emergencia más habituales y los protocolos estándar de actuación durante la atención fuera del centro. La incorporación de Lógica Difusa en el modelo de restricción del dominio es otra actividad que se está desarrollando y que permitirá caracterizar situaciones afectadas de incertidumbre y valorar la relevancia de las piezas de información disponibles.

Agradecimientos

Agradecemos la colaboración prestada para la realización de este trabajo al equipo informático del Hospital Clínico San Cecilio de Granada.

Trabajo parcialmente financiado por la Junta de Andalucía (Juan Gómez-Romero, beca de Formación de Doctores) y el Ministerio de Educación y Ciencia (Fernando Bobillo, beca de Formación de Personal Universitario).

Referencias

- [1] F. Baader, D. Calvanese, D. L. McGuinness, D. Nardi, P. F. Patel-Schneider. *The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications*. Cambridge University Press, 2003.
- [2] D. Booth, H. Haas, F. McCabe, E. Newcomer, M. Champion, C. Ferris, D. Orchard (Editores). *Web Services Architecture*. World Wide Web Consortium,

Online, 2003. Disponible: <http://www.w3.org/TR/ws-arch/>.

- [3] J. Davies, R. Studer, P. Warren (editors). *Semantic Web Technologies: Trends and Research in Ontology-based Systems*. Wiley, 2006.
- [4] M. Delgado, J. Gomez-Romero, P.J. Magaña, R. Perez-Perez. A flexible architecture for distributed knowledge based systems with nomadic access through handheld devices. *Expert Systems with Applications* 29, Pág. 965-975, 2005.
- [5] T. R. Gruber. A translation approach to portable ontologies. *Knowledge Acquisition* 5(2), Pág. 199-220, 1993.
- [6] P. Keen, R. Mackintosh. *The Freedom Economy: Gaining the M-commerce Edge in the Era of the Wireless Internet*. McGraw-Hill, 2001.
- [7] D. L. McGuinness, F. van Harmelen (editores). *OWL Web Ontology Language Overview*. World Wide Web Consortium. Online, 2004. Disponible: <http://www.w3.org/TR/owl-features>.
- [8] E. Sanchez (editor). *Fuzzy Logic in the Semantic Web*. Elsevier Science, 2005.
- [9] B.N. Schilit, U. Sengupta. Device ensembles. *Computer*, 37(12), Pág. 56-64, 2004.
- [10] G. Weiss (editor). *Multiagent Systems - A Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence*. MIT Press, 1999.

Minería Web: Aplicaciones con Lógica Difusa

Victor Heughes Escobar Jeria
Universidad Tecnológica Metropolitana
Santiago de Chile, Chile
victoresobar@yahoo.com

María J. Martín-Bautista Daniel Sánchez María Amparo Vila
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Granada
18071 Granada, España
{mbautis, daniel, vila}@decsai.ugr.es

Resumen

En este artículo, revisamos de forma muy general los procesos de Minería Web, centrándonos principalmente en la parte de análisis de la navegación de usuarios web, es decir, en Minería Web del Uso. En esta última área nos centraremos para estudiar las posibles técnicas a utilizar, y propondremos la aplicación de Reglas de Asociación Difusas, destacando su funcionalidad y ventajas al analizar un conjunto de datos de log.

Palabras Clave: Web Mining, Web Usage Mining, Reglas de Asociación Difusas.

1 INTRODUCCIÓN

El estudio de la World Wide Web se ha convertido en uno de los campos de investigación más interesantes de la última década. Como comenta Kleinberg [4], pocos eventos de la historia de la computación ha tenido tanta inferencia en la sociedad como la llegada y crecimiento de la World Wide Web.

Debido a esta situación, existen muchos desafíos, con respecto a la obtención de información de la Web, ya sea por tener una inmensa cantidad de datos, por la diversidad de lenguaje que se presenta, datos redundantes o no estructurados, la calidad de la información, datos distribuidos en diferentes plataformas, por referirnos a algunos.

Al margen de la Recuperación de Información, área ampliamente conocida, en la que se pretende obtener la información que un usuario con unas necesidades concretas requiere, otra de las áreas que permite la obtención de la información en la Web es la Minería Web (Web Mining). A diferencia de la Recuperación de Información, la Minería en Web, al igual que la Minería de Datos, trata de encontrar información no explícita, en este caso en el entorno de los datos que se publican,

generan y buscan en un sistema de información en el que intervenga un servidor web.

Como sabemos, fue Etzioni [15] de los primeros que intentó forjar el término de Web Mining (Minería Web), describiendo sus procesos. Cooley et al. [17], da la primera taxonomía de Minería Web distinguiendo entre Minería Web del Contenido y Minería Web del Uso. Además, divide la Minería Web del Contenido en un enfoque basado en agentes y un enfoque basado en base de datos. Desde estas primeras definiciones, hoy se aceptan al uso tres formas de entender la Minería Web: Desde el punto de vista del contenido, de la estructura y del uso.

La Minería Web del Contenido es el descubrimiento automático de patrones de contenido en documentos web [7][20]; La Minería Web de la Estructura consiste en estudiar las estructuras de los enlaces entre o intra documentos, para descubrir patrones útiles de las estructuras de los enlaces [12][20]; por último, la Minería Web del Uso (o de la Navegación), que trataremos más a fondo en este artículo y que podemos definir como un proceso de descubrimiento automático de patrones de accesos o uso de servicios de la Web, centrándose en el comportamiento de los usuarios cuando interactúan en la Web [7].

En este artículo nos vamos a centrar en dos aspectos de la Minería Web. En primer lugar, la aplicación de técnicas de lógica difusa en este campo (sección 2), principalmente trabajos de la literatura que hacen uso de estas técnicas. A continuación, en la sección 3 se revisamos los conceptos, técnicas y algunas de las propuestas más relevantes de la Minería Web del Uso. Finalmente, en la sección 4 veremos una aplicación con reglas de asociación difusas para descubrir conocimiento en los ficheros de log de un servidor web.

2 TÉCNICAS DE LÓGICA DIFUSA PARA MINERÍA WEB

Las técnicas entendidas dentro del ámbito de la Computación Flexible (lógica difusa, algoritmos

genéticos, redes neuronales y conjuntos rugosos) han sido aplicadas de una u otra forma a procesos de minería de datos clásica [22]. Recientemente, se están aplicando también estas técnicas a otros ámbitos de la minería tales como el texto y la web. Las particularidades que tienen los datos que se explotan en cuanto a representación, estructuración, diversidad, etc. hacen que las técnicas tengan que adecuarse al problema y completarse con métodos de pre-procesamiento más avanzados [23].

La lógica difusa, como una de estas técnicas, permite la manipulación y explotación de datos incompletos o con cierto grado de incertidumbre, situación que se da con bastante frecuencia en minería. Tanto los conjuntos difusos como técnicas de clasificación que hacen uso de ellos se han aplicado con anterioridad a diferentes procesos de minería [22]. Dentro del ámbito de la Minería Web, también encontramos algunas aportaciones como las que se recogen a continuación.

En [3] se habla de la importancia de la técnica *clustering* en la Minería Web, específicamente en el ámbito de la Minería Web de Contenido y la Minería Web del Uso. Esto incluye tanto *clustering* de documentos Web como accesos de ficheros logs de servidores web. Se mencionan diferentes algoritmos de *clustering* difusos, como el de las c-medias difuso (FCM), con poda (FCTM), y el de las medianas (FCLMedS).

Otra aplicación con *clustering* difuso se puede consultar en [19], donde se aplica con un doble objetivo: para realizar tanto Minería Web del Uso como de la Estructura. Los autores aplican el algoritmo llamado CARD (Competitive Agglomeration of Relational Data), para agrupar las diferentes sesiones de usuarios. Para ello, se tienen en cuenta no solo las entradas en los ficheros de log, sino también la estructura del sitio y las URLs para calcular la similitud entre dos sesiones de usuarios. El objetivo de esta aplicación es definir las sesiones de usuarios a partir de los accesos de los usuarios a la Web y de la estructura que posee el sitio.

Junto con el *clustering* difuso, la técnica más utilizada en minería web quizás sean las reglas de asociación difusas. Por ejemplo, en Minería Web del Contenido, encontramos una aplicación de esta técnica en [9] para el refinamiento de búsquedas, a partir de un conjunto inicial de documentos recuperados de Web. Las transacciones del texto son construidas también con valores difusos. El propósito del trabajo es proveer un sistema de una habilidad de reformulación de consultas usando tecnologías de minería. Otro ejemplo de aplicación de reglas de asociación difusas lo podemos encontrar en [2], donde se presenta una propuesta y descripción de una arquitectura de un sistema de preedición de accesos Web, donde trata el uso de reglas de asociación difusas y la generación de un árbol de índice difuso, para mejorar la

exactitud y la eficiencia de predicciones de caminos de accesos Web. También se hace uso en esta aplicación de razonamiento basado en casos (CBR) y además propone una estructura para la personalización guiada en adaptación Web (a través de perfiles de usuarios y accesos recogidos en los ficheros log de Web).

En este trabajo, nosotros también presentamos un ejemplo de aplicación de las reglas de asociación difusas a la Minería Web del Uso. Por esta razón, primero explicaremos de forma más amplia algunos detalles de este campo.

3 MINERÍA WEB DEL USO

La competencia en el comercio electrónico hace necesario la aplicación de métodos inteligentes para recoger y analizar la información de las sesiones Web del consumidor. Por eso se hace necesario conocer el comportamiento y los objetivos del usuario. El conocimiento que se obtienen del usuario de la Web es utilizado no solamente para saber del usuario sino para descubrir tendencias genéricas y también este conocimiento va guiado para la mejora de servicios en los sitios Web. Los comportamientos y los objetivos del usuario se pueden obtener de los datos recogidos de la actividad mantenida por el usuario dentro del sitio, y una de las formas de obtener esta actividad de los usuarios es a través de los ficheros logs del servidor web, completada con datos de otras fuentes tales como el servidor proxy y de la máquina del cliente. Los ficheros logs, son un grupo de datos de un servidor de Web relacionado con la conexión, como el servidor desde el que se conectan, o la identidad y autenticación de los usuarios. Esta información recoge actividades del usuario en línea y exhibe una gran variedad de patrones conductistas diferentes. Los patrones conductistas pueden mostrar preferencias de la navegación del usuario, el comportamiento del cliente en línea y las instrucciones futuras de mejoras del sitio Web.

La Minería Web del Uso tiene como objetivo extraer este conocimiento a través de la explotación de los datos almacenados en los ficheros logs del servidor web al que se accede. Esta información es usada por las compañías, desde el punto de vista del marketing, principalmente, donde se puede utilizar para aplicar diversas medidas e identificar usuarios con grupos sociales mediante la asignación de un perfil general a través de las preferencias mostradas por el usuario mientras navega por la Web. Para la explotación de diferentes tipos de datos se usan diferentes técnicas de descubrimiento de patrones. El conocimiento extraído se usa luego para realizar tareas como predicción, personalización e incrementar la infraestructura existente en el sitio Web.

La información extraída de estos procesos permiten, entre otras cosas, la construcción de perfiles prototípicos de usuario y la personalización de la Web. Obteniendo los perfiles de los usuarios se pueden tomar muchas decisiones, del punto de vista de contenido y diseño, para personalizar el sitio dependiendo del usuario. Para la obtención de estos perfiles, normalmente se aplican procesos de *clustering* y de reglas de asociación.

Mediante los procesos de *clustering*, se realiza una agrupación automática de clientes o datos con características similares sin tener una clasificación predefinida, el cual puede ser utilizado para estrategias de marketing dirigidos según la clases obtenidas [13].

Las reglas de asociación [6] descubren todas las asociaciones y correlaciones de ítems de datos donde la presencia de un conjunto de ítems en una transacción implica (con un grado de confianza) la presencia de otros ítems. La aplicación más directa a la minería web viene dada por la obtención de relaciones de visitas a páginas de usuarios con un determinado perfil. Hay que tener en cuenta que este tipo de procesos, al igual que los de minería de datos clásica se realiza de manera off-line, ya que el objetivo no es darle una respuesta inmediata al usuario, sino obtener la información de su navegación, para luego analizarla en busca de patrones.

Para tener una visión más amplia del área de investigación del Web Usage Mining, veremos algunas propuestas en este área.

En [1], se muestra una visión general de un proceso de personalización, basado en Minería Web del Uso. Aquí se utilizan técnicas de minería de datos, como *clustering* que puede conducir al descubrimiento de segmentos de usuarios; además las reglas de asociación pueden usarse para encontrar relaciones importantes entre los artículos basados en patrones de navegación en el sitio. Otra propuesta diferente la encontramos en [14], donde se propone una metodología dimensionable de *clustering*, inspirada en el sistema inmunológico natural con el poder de aprender continuamente y adaptarse a patrones entrantes nuevos. Otro artículo que se refiere a la personalización basada en la Minería Web del Uso es [5], donde el objetivo es obtener como resultado, el descubrimiento del patrón con los métodos y los algoritmos desarrollados de varios campos como la estadística, minería de datos, machine learning y el reconocimiento del patrón. Y que además muestra una visión breve del sistema WebSIFT, que es un ejemplo de un sistema prototípico de Web Usage Mining.

En [16], se identifica un modelo de comportamiento de la navegación del usuario que separa referencias de página Web, favoreciendo el propósito de navegación y el propósito de la información de contenido. En un método

de identificación de transacciones esta basado, donde las transacciones identificadas son descubiertas por métodos pensados en descubrir reglas de asociación, usando el sistema WEBMINER.

En [8], se ha utilizado como caso de estudio el sitio de Ridier Internet (<http://www.rieder.net.py>), y los archivos log de accesos almacenados en su servidor Web. Se analizaron transacciones de los usuarios para intentar describir patrones de comportamiento, es decir describir el comportamiento del usuario cuando navega por el sitio Web.

Una vez realizado una revisión de la Minería Web del Uso, nos centraremos en el estudio de las reglas de asociación difusas, por ser una técnica ampliamente utilizada con éxito en procesos clásicos de minería de datos. El aspecto difuso de las reglas nos permite modelizar elementos difíciles de manejar con simples valores, tales como el tiempo de permanencia de un usuario en una página.

4 REGLAS DE ASOCIACIÓN DIFUSAS

Las reglas de asociación difusas se extraen de un conjunto de transacciones difusas mediante un algoritmo de extracción tal como el algoritmo A priori [18].

Una transacción difusa puede ser definida como subset difuso no vacío donde $\tilde{\tau} \subseteq I$. Para toda $i \in I$, notaremos como $\tilde{\tau}(i)$ al grado de pertenencia de i en una transacción difusa $\tilde{\tau}$ [10]. Notaremos como $\tilde{\tau}(I_0)$ al grado de inclusión de un itemset $I_0 \subseteq I$ en una transacción difusa $\tilde{\tau}$, definida en (1).

$$\tilde{\tau}(I_0) = \min_{i \in I_0} \tilde{\tau}(i) \quad (1)$$

Para la representación de las reglas de asociación, utilizaremos un enfoque semántico basado en la evolución de sentencias cuantificada. Una sentencia cuantificada es una expresión de la forma “Q de F son G”, donde F y G son dos subconjuntos difusos de un conjunto finito X y Q es un cuantificador relativo difuso. Los cuantificadores relativos son etiquetas lingüísticas para porcentajes difusos que pueden ser representados en un conjunto difuso en [0,1], así como “la mayoría”, “casi todos” o “muchos”. De esta forma, podemos definir las dos medidas estimativas de la bondad de una regla.

El soporte de una regla de asociación $A \rightarrow C$ en el set de transacciones difusas T es $\text{supp}(A \cup C)$, y la evaluación de la sentencia cuantificadora (2).

$$Q \text{ de } T \text{ son } \tilde{\tau}_{A \cup C} = Q \text{ de } T \text{ son } (\tilde{\tau}_A \cap \tilde{\tau}_C) \quad (2)$$

La confianza de una regla de asociación difusa $A \rightarrow C$ en un set de transacciones difusas T es la evaluación de la sentencia cuantificadora (3).

$$Q \text{ de } \tilde{F}_A \text{ son } \tilde{F}_C \quad (3)$$

Comentadas estas definiciones que establecen la familia de las medidas de soporte y confianza, y dependiendo del método de evaluación y el cuantificador de nuestra elección, evaluamos las sentencias por medio del método GD que ha sido demostrado tener un mejor comportamiento que algunos cuantificadores clásicos para determinados casos [11].

La evaluación de " Q de F son G " por medio de GD está definido en (4).

$$GD_Q\left(\frac{G}{F}\right) = \sum_{\alpha_i \in \Delta(G/F)} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) Q\left(\frac{|(G \cap F)_{\alpha_i}|}{F_{\alpha_i}}\right) \quad (4)$$

donde $\Delta(G/F) = \Delta(G \cap F) \cup (F)$, $\wedge (F)$ siendo el conjunto del nivel de F , y $\Delta(G/F) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ con $\alpha_1 > \alpha_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.

Otra medida interesante y muy ligada a las medidas ya vistas anteriormente, es el Factor de Certeza [10]. El Factor de Certeza toma valores entre [1,-1]; Dada una regla $A \rightarrow C$, cuando es valor del factor es positivo indica que la dependencia entre A y C es positiva, si el valor es igual a 0 quiere decir que son independientes y cuando es negativo indica que la dependencia entre A y C es negativa. Con esto podemos decir que una regla de asociación es fuerte cuando el factor de certeza y el soporte tienen valores mayores que los umbrales puestos por el usuario como son el minFC y el minSup, respectivamente.

Estamos iniciando el desarrollo de una herramienta, la cual nos permite obtener reglas de asociación de ficheros log. Un ejemplo práctico del proceso de búsqueda de reglas de asociación difusas se muestra a continuación. La Figura 1, muestra una línea del tipo de archivo log llamado CSV (Comman Serapated Value), el cuál está compuesto por 6 campos (identificador de compra, fecha, IP, Sesión, Página visitada y Página referenciada).

```
11 {Id_Shop} Tue Jan 20 19:00:13 2004 {Fecha} 213.235.141.105 {IP}
1f75ccd2afb87dc9ab0348bd3f4ef7 {Sesión}
/dt/?c=11670 {Pag_Visitada} http://www.shop2.cz/ls/index.php?id
=98&view=2,5,9&filtr=102 {Pag_Refer}
```

Figura 1: Línea de archivo CSV.

Una vez que tenemos el conjunto de datos para el análisis, se puede decidir qué tipo de información se puede obtener, dependiendo de que campos sean elegidos. Por ejemplo, si el usuario elige los campos de fecha y páginas visitadas, se puede hacer una idea de qué páginas han sido más visitadas a ciertos horarios, o también si el usuario elige los campos de IP y campo de página visitada, de alguna manera podría identificar a los usuarios que visitan ciertas páginas en especial y/o si el usuario elige los campos de página visitada con la página referenciada, podría saber cual es tipo de navegación más habitual y por donde navega el usuario con mayor frecuencia.

Para poder obtener todo este tipo de información de los archivos web log, una vez obtenidas las transacciones de los archivos, extraemos las reglas de asociación mediante el algoritmo APrioriTID presentado por Agrawal en [18], el cual ataca el problema reduciendo el número de conjuntos considerados.

Presentamos un ejemplo de posibles resultados que podemos obtener para saber la página que visitan los usuarios a partir de una página inicial visitada. Algunas reglas obtenidas fueron:

1) /dt/?c=11670==> http://www.shop2.cz/ls/index.php?&id=98&view=2,5,9&filtr=102

Soporte	=	0.6
Confianza	=	1.0
FC	=	1.0

2) /dt/?c=12397==> http://www.shop7.cz/akce/?kat=239

Soporte	=	0.2
Confianza	=	1.0
FC	=	1.0

Los resultados obtenidos indican que de este pequeño grupo de 10 transacciones el 60% se presentaba la regla 1 y solo en un 20% la regla 2. La idea es principalmente que el usuario pueda interpretar de la forma más fácil los resultados obtenidos en el análisis y con las medidas de soporte, confianza y factor de certeza la cantidad de reglas encontradas sean siempre las más representativas del conjunto de datos analizados.

5 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.

En este artículo hemos tratado aspectos generales de Minería Web, principalmente la Minería Web del Uso.

Hemos analizado el estado del arte brevemente y también hemos presentado las reglas de asociación difusas, como una herramienta válida para explotar la información de los ficheros logs de un servidor web.

Los trabajos futuros van estar principalmente enfocados a profundizar en este área y el continuar con el desarrollo de una herramienta que nos permita aplicar diferentes técnicas de minería y la posible combinación de alguna de ellas para posibles mejoras en la extracción de nuevo conocimiento.

Referencias

- [1] B.Mobasher. Web Usage Mining and Personalization, DePaul University.
- [2] C. Wong, S. Shiu, S. Pal. "Mining fuzzy association rules for Web access case adaptation".
- [3] D. Arotaritei, S. Mitra. Web Mining: a survey in the fuzzy framework.
- [4] Kleinberg, J. M., Kumar, R. y Raghavan, P. The Web as a graph: measurements, models, and methods. Proceedings of the Fifth Annual International Computing and Combinatorics Conference, (1999).
- [5] J. Srivastava, R. Cooley, M. Deshpande, and P.N.Tan. Web usage mining: Discovery and applications of usage pattern from Web data. SIGKDD Explorations, 1(2):1-12,2000.
- [6] J. Carbonell, M. Carven, S. Fienberg, T. Mitchell, and Y. Yang. Report on the conald workshop on learning from text and the web. In CONALD Workshop on Learning from Text and The Web, June, 1998.
- [7] L.Cernuzzi, M. L. Molas. Integrando diferentes Tecnicas de Data Mining en procesos de Web Usage Minig. 2004
- [8] L.Cernuzzi, M. L. Molas. Integrando diferentes Tecnicas de Data Mining en procesos de Web Usage Minig. 2004.
- [9] M. J. Martín-Bautista, D. Sánchez, J.Chamorro, J. M. Serrano, M. A. Vila. Mining Web document to find additional query terms using fuzzy association. 2003.
- [10] M. Delgado, N. Marín; D. Sánchez and M. Villa. Fuzzy Association Rules: General Model and Application. IEEE Transactions on Fuzzy System, Vol. 11 (2), April 2003
- [11] M. Delgado, D. Sánchez and M.A. Vila "Fuzzy cardinality based evaluation of quantified sentences" Int. J. Approx.Reasoning, 3, pp 23-66, 2000.
- [12] M. N. Garofalakis, R. Rastogi, S. Seshadri, and K. Shim. Data Mining and the web: Past, present nad future . In WorkShop on Web Information and Data Managament, 1999, pages 43-47, 1999.
- [13] O. Nasraoui, C. Cardona, C. Rojas, F. González. Mining Evolving User Profiles in Noisy Web Clickstream Data with a Scalable Immune System Clustering Algorithm.
- [14] O. Nasraoui, C. Cardona, C. Rojas, F. González. Mining Evolving User Profiles in Noisy Web Clickstream Data with a Scalable Immune System Clustering Algorithm.
- [15] O. Etzioni. The World Wide Web : Quagmire or gold mine.Comunications of the ACM, 39 (11):65-68, 1996.
- [16] R. Cooley, B. Mobasher, and J.Srivastava.Grouping Web Page References into Transactions for Mining World Wide Web Browsing Patterns.
- [17] R. Cooley, B. Mobasher, and J. Srivastava. Web mining: Information and pattern discovery on the world wide web. In Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligent (ICTAI'97),1997.
- [18] R. Agrawal and R.Srikant. Fast algorithms for mining association rules. In Proceedings of the 20th International Conference on Very Large Data Base, IBM Almaden Research Center,1994.
- [19] R. Krishnapuram, A. Joshi, Olfa Nasraoui. H. Frigui. Mining Web Access Logs Using Relational Competitive Fuzzy Clustering.
- [20] S. Chakrabati. Data Mining for hypertext: A tutorial survey.ACM SIGKDD Explorations, 1(2):1-11, 2000.
- [21] L.A. Zadeh. Fuzzy Sets. Information and Control 8, 338-353, 1965.
- [22] S. Mitra, S.K. Pal. Data Mining in Soft Computing Framework: A Survey. IEEE Transactions on Neural Networks, 13(1), 3-14, 2002.
- [23] C. Justicia, M.J. Martín-Bautista, D. Sánchez. Minería de textos: Aplicaciones con lógica difusa. Actas del Congreso Español de Tecnologías con Lógica Difusa, 2004, Jaén (España)

Un Enfoque Deductivo para la Minería de Textos

C. Justicia de la Torre
Centro de Servicios de Informática.
Universidad de Granada
consuelo@ugr.es

M.J. Martín-Bautista, D. Sánchez¹, M.A. Vila
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial.
Universidad de Granada
{mbautis, daniel, vila}@decsai.ugr.es

Resumen

En este trabajo discutimos sobre el enfoque inductivo habitual y proponemos el uso de un enfoque deductivo para la Minería de Textos. Siguiendo este enfoque describimos una técnica deductiva basada en el uso de la interlingüa UNL como paso intermedio hacia una representación e inferencia lógicas, cuya finalidad es el descubrimiento de contradicciones en textos. Finalmente sugerimos algunas posibles contribuciones de la lógica difusa en el desarrollo de técnicas deductivas.

Palabras Clave: Minería de Textos, Descubrimiento de Conocimiento en Textos, Representación del Conocimiento, Formas Intermedias, Procesamiento del Lenguaje Natural, UNL.

1 Introducción

Una de las tareas más importantes para diferentes tipos de instituciones, particularmente aquellas con objetivos económicos y científicos, es el análisis de la información disponible y generada por las mismas, con el objetivo de comprender mejor su funcionamiento y tomar decisiones. El almacenamiento de cantidades cada vez mayores de información en soporte electrónico ha llevado al desarrollo de áreas de investigación específicas que estudian cómo llevar a cabo estas tareas de forma automática.

La gran mayoría de la información almacenada en formato electrónico se distribuye entre bases de datos y documentos de texto. Esto ha dado lugar al desarrollo de dos ramas de investigación, conocidas como

Minería de Datos (MD) y Minería de Textos (MT), respectivamente, que pretenden obtener conocimiento novedoso, no trivial y potencialmente útil a partir de la información almacenada en los formatos mencionados.

La MD parte de un conjunto de datos estructurados, habitualmente en forma de un conjunto de registros descritos por atributos ó transacciones que contienen items, y aplica técnicas de tipo inductivo como clustering, búsqueda de conjuntos frecuentes, búsqueda de reglas de asociación y dependencias, árboles de decisión o incluso redes neuronales, que en su mayoría proceden o se han adaptado del ámbito del aprendizaje automático.

La MT aparece más tarde, y este hecho ha motivado que el enfoque común para afrontar este problema haya sido el adaptar técnicas de MD al caso del texto. Para ello, se lleva a cabo un proceso previo de estructuración de la información presente en los textos, que trata de transformar lenguaje natural en una representación, habitualmente en registros o transaccional, llamada *Forma Intermedia*, sobre la que poder aplicar las técnicas anteriores.

Ejemplos típicos de formas intermedias son las bolsas de términos, que representan un texto a través de un conjunto de términos (palabras o pequeñas frases) significativos que aparecen en el mismo (en ocasiones con un peso que indica su importancia relativa, como ocurre en las representaciones utilizadas en la Recuperación de Información). Sobre esta representación pueden usarse técnicas de MD como la búsqueda de reglas de asociación o coocurrencias estadísticas.

Este enfoque común ha dado lugar a distintas técnicas de MT que han demostrado ser de utilidad en diversos problemas. Por ejemplo, las técnicas descritas en el párrafo anterior son útiles para descubrir relaciones entre términos que permitan el refinamiento de consultas a corpus de textos (en particular en la web) [5], o para completar estructuras de conocimiento que reflejen dichas relaciones, como es el caso por ejemplo de

¹Corresponding author.

Wordnet [3].

Sin embargo, existen diversas cuestiones y aspectos filosóficos acerca de qué podemos considerar como MT y qué diferencias existen con la MD. Por ejemplo, Hearst [4] distingue la MT que encuentra patrones o regularidades en el texto, de lo que llama Minería de Textos *Real*, que obtiene piezas de conocimiento nuevas y útiles a través del texto.

Un ejemplo de este tipo se encuentra, según Hearst, en los trabajos de Swanson y Smalheiser [7], plasmados en el proyecto Arrowsmith, que trata de asociar relaciones causales presentes en la literatura médica para generar relaciones desconocidas como hipótesis a demostrar. Por ejemplo, analizando títulos de artículos, Swanson y Smalheiser obtuvieron (entre otras) las siguientes piezas de conocimiento:

- El estrés está asociado con las migrañas.
- El estrés puede provocar pérdida de magnesio.
- Los bloqueadores de los canales de calcio previenen algunas migrañas.
- El magnesio es un bloqueador natural de los canales de calcio.

Estas pistas sugieren que un déficit de magnesio puede jugar un papel importante en algunos tipos de migrañas, una hipótesis que no existía hasta ese momento y que los autores pudieron derivar de forma parcialmente automática, demostrándose posteriormente de manera experimental.

En nuestra opinión, la discusión acerca de estas cuestiones y la propuesta de técnicas que puedan considerarse de Minería de Textos Real, en el sentido de Hearst, constituyen una contribución importante y necesaria, y a ello está dedicado el presente trabajo.

2 Minería de Textos Deductiva

Como ya hemos indicado en la introducción, el enfoque habitual para la MT consiste en aplicar técnicas que provienen de la MD. Sin embargo, este enfoque plantea algunas limitaciones debido a las diferencias que existen entre ambas tareas.

2.1 Datos vs. Texto

Una diferencia fundamental entre Minería de Datos y Minería de Textos es la naturaleza de la información de partida. Los datos tienen una estructura explícita y contienen conocimiento de forma implícita, mientras que con el texto ocurre todo lo contrario, es decir, contiene un conocimiento explícito (aunque por lo general

dependiente de un contexto que no está del todo hecho explícito en el documento) y una estructura implícita.

Esta diferencia puede interpretarse desde el punto de vista de la Ingeniería del Conocimiento, según el cual los datos constituyen colecciones de *hechos* simples, representados mediante un modelo de datos que facilita su tratamiento, mientras que el texto contiene una base de conocimiento completa que incorpora, además de hechos, relaciones de diversos tipos, con la desventaja de estar expresados en un lenguaje de representación (el lenguaje natural) que, aunque de una expresividad máxima, resulta totalmente inadecuado para llevar a cabo procesos automáticos de inferencia.

Sobre esta base, parece natural aplicar técnicas inductivas sobre datos, para extraer el conocimiento implícito en los mismos, y técnicas deductivas sobre texto, para a partir del conocimiento contenido en el mismo deducir nuevo conocimiento no trivial y que pueda ser potencialmente útil, como pretende la MT. Nótese que la aplicación de un procedimiento deductivo no está reñida con la propia definición de MT.

Para ilustrar la diferencia entre ambos enfoques (inductivo y deductivo), consideremos por ejemplo el texto A que se muestra en la figura 1. Este texto sencillo contiene dos piezas de conocimiento, la primera de las cuales establece una relación causa-efecto entre gripe y fiebre, mientras que la segunda afirma que un objeto, identificado como Juan, tiene gripe.

La gripe causa fiebre. Juan tiene gripe.

Figura 1: Texto A

Un enfoque inductivo que basara su representación en bolsas de términos representaría probablemente el texto anterior mediante el conjunto de términos {*gripe, causa, fiebre, Juan*}. Obviamente, esta representación pierde la semántica que hemos explicado anteriormente. Nótese que, aunque el conjunto de términos {*gripe, causa, fiebre, Juan*} parezca representar dicha semántica, en realidad es exactamente el mismo que {*fiebre, causa, gripe, Juan*}, siendo falso que "la fiebre causa gripe". No hay posibilidad de razonamiento sobre esta representación porque se ha reducido el texto a un conjunto de datos. Sin embargo, cualquiera de nosotros podría deducir del conocimiento contenido en el texto A que Juan tiene fiebre, nuevo conocimiento que no está explícito en dicho texto.

Desde nuestra perspectiva, el trabajo de Swanson y Smalheiser emplea también un enfoque deductivo donde se hace uso del conocimiento presente en el texto (un modelo simplificado del mismo) y de reglas de in-

ferencia para obtener nuevo conocimiento.

2.2 Formas intermedias para MT deductiva

En la literatura sobre MT es posible encontrar una gran cantidad de formas intermedias junto con las técnicas asociadas [2]. Sin embargo, el empleo de un enfoque deductivo tiene una influencia directa sobre la forma intermedia del texto. Aunque el lenguaje natural es muy expresivo, como hemos comentado es muy poco adecuado para llevar a cabo procesos de razonamiento, por lo que es necesario transformarlo a una representación que, conservando la semántica en la medida de lo posible, nos permita llevar a cabo un proceso deductivo.

Existen múltiples modelos de representación y razonamiento, bien estudiados por la Ingeniería del Conocimiento, que podrían ser usados para este fin. Cada uno de ellos aporta sus propios mecanismos de razonamiento, y resultaría útil para determinadas aplicaciones. El principal problema radica en transformar el conocimiento presente en un texto y expresarlo en dichos modelos de representación.

Como veremos en la sección 4, nosotros proponemos obtener en primer lugar una representación intermedia semánticamente rica, para extraer a partir de ella la forma intermedia final en el modelo elegido. Concretamente, proponemos utilizar una interlingüa, UNL, auspiciada por las Naciones Unidas bajo el proyecto UNL [1] (que se describe en la sección 3). Los motivos para tomar esta opción son fundamentalmente dos: en primer lugar, existen codificadores que obtienen, a partir de un texto en lenguaje natural, una representación en UNL que es mucho más fácil de tratar por medio del ordenador para poder obtener la forma intermedia deseada. En segundo lugar, al tratarse de una interlingüa, la representación obtenida es independiente del lenguaje, con lo que se resuelve uno de los problemas más graves de la MT. Como se verá en la siguiente sección, el proyecto UNL prevee proporcionar codificadores y decodificadores para un gran número de lenguas del mundo, lo que unido a su eficacia demostrada en diversas aplicaciones hace de ésta una opción muy interesante y de gran confianza.

3 El Lenguaje UNL

El Lenguaje Universal de Comunicación o (UNL) es un lenguaje artificial que nos permite representar información textual.

Desarrollado por el Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de las Naciones Unidas en 1996 y con la incorporación, un año más tarde, del Laboratorio de Inteligencia Artificial de IMCS, el estu-

dio del UNL se convirtió en el 'proyecto UNL'. Este proyecto abarca varios lenguajes como alemán, árabe, chino, español, francés, hindi, indonesio, inglés, italiano, japonés, letón, mongol, portugués y ruso, por el momento.

En la actualidad, existe un centro de estudio del lenguaje en casi todos los países miembros. En España, este centro se denomina Centro de Lengua Española (*Spanish Language Center*) y se trata de un Centro UNL que coordina e investiga el uso del lenguaje UNL (para más información véase la web [1]).

Fundamentalmente, UNL tiene una sintaxis que se representa mediante relaciones y atributos, un vocabulario formado por los conceptos o palabras universales (*universal words* o UW) y una semántica que se puede completar con una base de conocimiento.

Enumeraremos estos elementos a continuación de forma un poco más detallada aunque por ser una información que se puede encontrar entre las especificaciones del lenguaje UNL [1] no lo trataremos de forma extensa.

3.1 Componentes UNL

El lenguaje UNL está compuesto por una serie de elementos clave que consiguen representar tanto la sintaxis como la semántica del texto escrito en lenguaje natural. Estos elementos son:

Palabras Universales (*Universal Words* o UW): se llama palabra universal a cada una de las palabras que componen el lenguaje UNL. No existe un número determinado de ellas puesto que dependen del lenguaje en el que esté escrito el texto que se va a traducir a UNL y se pueden ir construyendo a medida que se van analizando nuevas oraciones en ese idioma y aparecen nuevos términos. Se representan como una palabra raíz escrita en inglés y, entre paréntesis, una serie de constantes y restricciones que ayudan a representar la sintaxis y la semántica de la palabra de manera que se elimine cualquier posible ambigüedad en el lenguaje.

Por ejemplo, veamos qué palabras universales se corresponden con la palabra española **estado**. Dependiendo del significado que se pretenda dar en el texto a este término podemos encontrar tres palabras universales diferentes *state(ict>country)* si utilizamos la acepción **país**, *state(ict>region)* si la usamos como sinónimo de **región** o *state(ict>abstract thing)* si para nosotros un estado es **algo abstracto**.

Relaciones UNL: las relaciones UNL representan

cómo se relacionan los conceptos entre sí. Para ello se han construido una serie de directivas que identifican el tipo de relación (circunstancial, condicional, lógica, de lugar, temporal, de participación entre otras) que se puede dar entre los conceptos del lenguaje.

Algunos ejemplos de relaciones UNL son **agente** (aquello que inicia una acción) y **objeto** (sobre quien recae la acción) y se representan como *agt* (*do*, *thing*) o *agt* (*action*, *thing*) si estamos usando la relación agente u *obj* (*be*, *thing*), *obj* (*do*, *thing*), *obj* (*occur*, *thing*) o bien *obj* (*uw(aoj)>thing,obj>thing*), *thing*) si usamos la relación objeto. Los diferentes tipos de representaciones se deben a las distintas opciones de combinar las palabras universales.

Existen muchos más tipos de relaciones UNL que se pueden consultar en el manual de especificaciones del lenguaje [1].

Atributos: son modificadores de los conceptos. Nos proporcionan información de número, de negación y de cantidad, entre otras, sobre un concepto. Ejemplos de atributos son: *@not*, *@indef*, *@pl*.

Por ejemplo, si queremos representar la proposición **unos hombres** mediante UNL, usaremos la palabra universal *man(icl>humankind)* con una serie de atributos: *man(icl>humankind).@indef.@pl*, donde *@indef* representa el artículo indefinido **unos** y *@pl* que indica que **hombres** es una palabra plural.

Expresiones UNL: son representaciones de las relaciones binarias entre dos conceptos y están compuestas por Relaciones UNL y Palabras Universales. Las Expresiones UNL se describen como: *<relación> (<uw1>, <uw2>)*.

Como ejemplo, en la figura 2 se muestra la expresión UNL correspondiente a la primera de las frases del texto A de la figura 1.

Si analizamos detenidamente estas expresiones, observamos dos relaciones (agente y objeto) que participan en la oración, es decir, en la frase *La gripe causa fiebre*, vemos cómo el verbo principal *causar* tiene un agente (relación UNL *agt*) y un objeto (relación UNL *obj*). Cada relación está compuesta por dos palabras universales a su vez, como son *cause* que representa al verbo **causar**, *fever* que representa a **fiebre** y por último *flu* palabra universal que se corresponde con **gripe**.

Es interesante también mencionar la labor desempeñada por los atributos UNL, por ejemplo la cláusula *@def* indica que el concepto **gripe** es determinado, está modificado por el artículo **la**.

```
[S:1] {org} La gripe causa fiebre. {/org}
{/unl}
agt(cause.@entry,flu.@def)
obj(cause.@entry,fever)
{/unl} [/S]
```

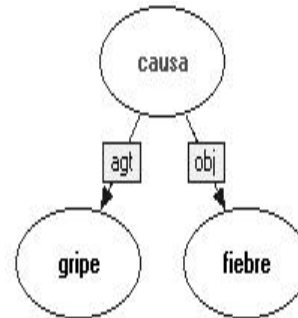


Figura 2: Expresión UNL para la primera frase del texto A (fig. 1) y grafo asociado.

La lectura de las expresiones UNL puede resultar complicada; para facilitar el análisis de estas frases podemos representarlas mediante grafos, ya que éstos se simplifican omitiendo algunos de los elementos del lenguaje (generalmente palabras vacías). En la figura 2 vemos la representación mediante un grafo de la frase *La gripe causa fiebre*.

4 Una propuesta de Minería de Textos deductiva

Con el objetivo de ilustrar lo que entendemos por Minería de Textos Deductiva, en este apartado esbozamos una propuesta concreta y discutimos sobre los problemas que puede plantear su realización práctica, que afrontaremos en el futuro.

4.1 Búsqueda de Contradicciones

La técnica que proponemos consiste en la búsqueda de contradicciones en textos. Por ejemplo, consideremos el texto B de la figura 3. Es evidente que entre el conocimiento dado por los textos A (figura 1) y B existe una contradicción.

Las personas que tienen fiebre tienen una temperatura mayor de 37 grados. Juan tiene una temperatura de 36 grados.

Figura 3: Texto B

El descubrimiento de tales contradicciones tiene múltiples aplicaciones potenciales, desde la detección

$\forall x [gripe(x) \rightarrow fiebre(x)]$	$\neg gripe(x) \vee fiebre(x)$	1
$\forall x [fiebre(x) \rightarrow \geq (temp(x), 37)]$	$\neg fiebre(x) \vee \geq (temp(x), 37)$	2
$gripe(Juan)$	$gripe(Juan)$	3

Tabla 1: Forma lógica y clausal de las frases de los textos A y B

de inconsistencias en documentos (buscando contradicciones en un solo texto) hasta el descubrimiento de opiniones contradictorias sobre un tema en foros de discusión o artículos de prensa. Con este conocimiento, que de forma ideal consistiría en una explicación de por qué se produce y dónde se encuentra la contradicción, podrían establecerse a su vez clasificaciones de los textos analizados en función de su concordancia o no en determinados temas.

Un modelo de representación adecuado para la búsqueda de contradicciones es la lógica de predicados, concretamente la representación mediante cláusulas. Esta representación permite detectar contradicciones en una base de conocimiento mediante el bien conocido procedimiento de resolución. La regla de resolución establece que dadas dos cláusulas de la forma $A \vee B$ y $\neg B \vee C$, es posible deducir $A \vee C$. Si se llega a dos cláusulas del tipo D y $\neg D$, es posible deducir que existe una contradicción.

Por ejemplo, en la tabla 1 se muestran expresiones lógicas y su correspondiente forma clausal (se han numerado las cláusulas) para las frases de los textos A y B. La frase "Juan tiene una temperatura de 36 grados" se refleja en la interpretación bajo la que se valorarán las cláusulas, y nos dice simplemente que la función $temp(\cdot)$ para el argumento *Juan* toma valor 36, es decir, $temp(Juan) = 36$. Si llevamos a cabo un proceso de resolución (llevando a cabo las sustituciones necesarias), de las cláusulas 1 y 3 obtenemos la cláusula $fiebre(Juan)$. Resolviendo ésta con la cláusula 2 obtenemos $\geq (temp(Juan), 37)$, o lo que es lo mismo, $\geq (36, 37)$, que es obviamente una contradicción.

4.2 UNL y obtención de la forma intermedia

Para la obtención de expresiones lógicas a partir de UNL planteamos la búsqueda de patrones semánticos. Por ejemplo, en una sentencia donde aparezca alguno de los verbos "causar", "implicar", etc ... es posible obtener una implicación lógica en la que la parte izquierda está compuesta por el agente y la derecha por el objeto. Ese es el caso por ejemplo de la frase "La gripe causa fiebre" del texto A.

Uno de los trabajos futuros a realizar, y no precisamente simple, es la determinación de éste tipo de patrones UNL. Sin embargo, queremos destacar que el objetivo no es realizar una expresión en base a la lógica

de toda la semántica del documento, sino extraer tanta información como sea posible.

Por supuesto, los posibles resultados del proceso deductivo estarán influidos en gran medida por la cantidad y calidad del conocimiento representado en nuestra forma intermedia, pero éste no es tan crítico como, por ejemplo, en el diseño de un sistema experto. Un proceso de Minería no fracasa si no descubre todo el conocimiento novedoso y potencialmente útil posible (de hecho, ninguna técnica existente puede garantizar esto). Descubrir una sola pieza de conocimiento constituye ya un éxito y un aporte valioso.

4.3 Algoritmo

Supongamos que disponemos de un conjunto de textos $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ y que para cada uno de ellos disponemos de una representación clausal tan rica como haya sido posible. Supongamos un procedimiento $res(t_i)$ que lleva a cabo un proceso de resolución con el conocimiento obtenido de t_i , devolviendo *falso* en caso de encontrar una contradicción en el mismo. Notaremos $t_i t_j$ la concatenación de los textos t_i y t_j (un texto a su vez). Sea PT el conjunto de concatenaciones de subconjuntos de textos de T . V representa el conjunto de concatenaciones de textos que no son contradictorios. Nuestro algoritmo para la búsqueda de contradicciones se muestra en la figura 4.

1. $V_1 \leftarrow \{t_i \in T \mid res(t_i) \neq falso\}$
2. $V \leftarrow V_1$
3. Para $k=2$ hasta n
 - (a) $V_k \leftarrow \{t' t'' \mid t' \in V_{k-1}, t'' \in V_1, t^* t'' \in V \mid \forall t^* \subset t' \text{ y } res(t' t'') \neq falso\}$
 - (b) $V \leftarrow V \cup V_k$
4. $Contradicciones \leftarrow PT \setminus V$

Figura 4: Algoritmo de búsqueda de contradicciones en textos

El algoritmo busca aquellos textos y concatenaciones de textos que no son contradicciones, procediendo por niveles en el retículo de $\mathcal{P}(T)$ respecto a la inclusión. Este procedimiento permite considerar directamente como contradicciones a aquellas concatenaciones en las

cuales algún subconjunto de los textos concatenados contiene una contradicción, con lo cual nos ahorramos el llevar a cabo el proceso *res* sobre los mismos. En cualquier caso, dado que el razonamiento basado en resolución presenta dificultades computacionales (algo habitual por otra parte en las técnicas de Minería), una de las líneas de trabajo futuro será el estudiar la forma de obtener algoritmos más eficientes.

5 Minería de Textos Deductiva y Lógica Difusa

La lógica clásica plantea diversos problemas como el de la monotonía o el hecho de permitir solamente dos grados de verdad, lo cual entra en conflicto en ocasiones con el conocimiento contenido en los textos. Existen diversas lógicas alternativas que permiten tratar estos problemas.

En particular, consideramos que la lógica difusa puede ser de gran utilidad en el desarrollo de técnicas de MT Deductiva, ya que permite recoger la semántica de conceptos imprecisos y modelar mediante distintos tipos de operadores los matices del discurso relativos a conjunciones, disyunciones, negaciones e implicaciones. Un ejemplo de esta utilidad que, a nuestro juicio, se acerca mucho (si no lo es) a un proceso de MT, es el trabajo de Trillas en [8].

En el aspecto concreto de la búsqueda de contradicciones usando lógica difusa, existen herramientas que pueden ser útiles y exploraremos en el futuro. En particular, una aportación al cálculo del grado en que una expresión lógica (en particular, de una lógica descriptiva difusa concreta) puede ser verdadera se encuentra en [6].

6 CONCLUSIONES

La Minería de Textos Inductiva proviene por motivos históricos y prácticos de la aplicación directa de técnicas de MD (que de forma natural son inductivas, porque el punto de partida es un conjunto de datos estructurados) al texto a través de formas intermedias que, forzadas a representar los textos mediante un conjunto de datos estructurados, pierden gran parte de la semántica.

Desde este punto de vista, consideramos que la Minería de Textos Deductiva es quizá más adecuada y la que se ajusta a lo que Hearst considera Minería de Textos Real. La Minería de Textos Deductiva se encuentra muy poco desarrollada y presenta mayores dificultades, pero también un mayor potencial. Consideramos que la lógica difusa tiene mucho que aportar en este desarrollo.

En este trabajo hemos propuesto una técnica concreta de Minería de Textos Deductiva, basada en el uso de una interlingüa como UNL como paso previo a una representación lógica sobre la que llevar a cabo un proceso de inferencia, concretamente de resolución, que nos permita encontrar contradicciones en textos. Nuestro trabajo futuro será el desarrollar la técnica planteada.

Agradecimientos

Agradecemos a Jesús Cardeñosa y a Carolina Gallardo del Centro de Lengua Española del Programa UNL de las Naciones Unidas [1] su inestimable ayuda poniendo a nuestra disposición herramientas y documentación imprescindibles para abordar el lenguaje UNL.

Referencias

- [1] *Web of the Institute of Advanced Studies, The United Nations University, Spanish Language Center- Universidad Politécnica de Madrid.* <http://www.unl.fi.upm.es/homepage.htm>.
- [2] C. Justicia de la Torre, M. J. Martín-Bautista, D. Sánchez, and M.A. Vila. Text mining: Intermediate forms for knowledge representation. In *Joint Eusflat-Lfa 2005 Conference*, pages 1082–1087, 2005.
- [3] M.A. Hearst. Automated discovery of wordnet relations. In C. Fellbaum, editor, *WordNet: An Electronic Lexical Database*. MIT Press, Cambridge, MA, 1998.
- [4] M.A. Hearst. Untangling text data mining. In *Proceedings of the 37 Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*, pages 20–26, 1999.
- [5] M.J. Martín-Bautista, D. Sánchez, J. Chamorro-Martínez, J.M. Serrano, and M.A. Vila. Mining web documents to find additional query terms using fuzzy association rules. *Fuzzy Sets and Systems*, 148(1):85–104, 2004.
- [6] D. Sánchez and A.G.B. Tettamanzi. Fuzzy quantification in fuzzy description logics. In E. Sanchez, editor, *Fuzzy Logic and the Semantic Web*, chapter 8, pages 135–159. Elsevier B.V., 2006.
- [7] D.R. Swanson and N.R. Smalheiser. Implicit text linkages between medline records : Using arrow-smith as an aid to scientific discovery. *Library trends*, 48(1):48–59, 1999.
- [8] E. Trillas. Lógica borrosa y narrativa: Un párrafo de Vila-Matas. In *Actas Del XII Congreso Español Sobre Tecnologías Y Lógica Fuzzy, ESTYLF'04*, pages 15–20, 2004.

Aprendiendo consultas lingüísticas difusas con algoritmos evolutivos multiobjetivo. Estudio preliminar⁰

A.G. Lopez-Herrera F. Herrera, E. Herrera-Viedma, A. Zafra

Dpto. de Informática,
Universidad de Jaén
aglopez@ujaen.es

Dpto. Ciencias de la
Computación e I.A.,
Universidad de Granada
{herrera, viedma}@decsai.ugr.es

M. Luque

Dpto. Ciencias de la
Computación y A.N.,
Universidad de Córdoba
mluque@uco.es

Resumen

El rendimiento de un sistema de recuperación de información es generalmente medido en términos de dos criterios diferentes, precisión y exhaustividad. De este modo, la optimización de cualquiera de sus componentes es un claro ejemplo de problema multiobjetivo. En esta contribución abordaremos el problema del aprendizaje automático de consultas mediante técnicas evolutivas multiobjetivo, en concreto nos centramos en el aprendizaje de consultas lingüísticas difusas. Presentamos un estudio comparativo de tres de las técnicas de optimización multiobjetivo de propósito general más conocidas, NSGA-II, SPEA2 y MOGLS, en el contexto de los sistemas de recuperación de información difusos.

Palabras Clave: Sistemas de Recuperación de Información, Programación Genética, Inductive Query By Example, Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo, Aprendizaje de Consultas.

1 INTRODUCCIÓN

La Recuperación de Información (RI) puede ser definida, en general, como el problema de la selección de información documental desde una fuente de almacenamiento en respuesta a necesidades de información del usuario, expresadas éstas mediante consultas [1, 21]. Los Sistemas de Recuperación de Información (SRI) son un tipo de sistemas automáticos

de información que trabajan con bases de datos compuestas por elementos de información, documentos que pueden ser textuales, gráficos o registros sonoros, y procesan las consultas de los usuarios permitiéndoles acceder a la información relevante en un intervalo de tiempo adecuado.

La mayoría de los SRI basados en el modelo Booleano [25] presentan algunas limitaciones. Debido a ello, se han diseñado otros paradigmas con el fin de extender este modelo de recuperación y superar sus problemas, como los modelos de RI difusa [5, 19, 24].

Sin embargo, el aumento en la potencia del modelo de recuperación también conlleva un aumento en la complejidad del lenguaje de consulta, tanto en el modelo Booleano como en el difuso. Por esto, se hace necesario diseñar métodos automáticos para desarrollar esta tarea.

De este modo, el paradigma "Inductive Query by Example (IQBE)" [6], consistente en el aprendizaje automático de una consulta a partir de un conjunto de documentos proporcionados por un usuario, puede ser útil para resolver este problema y asistir al usuario en el proceso de formulación de consultas.

Los Algoritmos Evolutivos (EAs) se han empleado para el aprendizaje automático de consultas [8]. Estos algoritmos se caracterizan por tener un conjunto de soluciones (consultas en nuestro contexto) de prueba a las que les aplican cambios aleatorios, y mediante mecanismos de selección determinan que soluciones serán mantenidas en futuras generaciones. En particular, las técnicas de Programación Genética (PG) [17], donde las consultas son representadas como árboles sintácticos de expresión y adaptados mediante procesos de selección, cruce y mutación, han sido las técnicas de EAs más utilizadas.

Dos de las primeras aproximaciones del IQBE al ámbito del aprendizaje automático de consultas son las propuestas por Smith y Smith [23] en el contexto

⁰Este trabajo ha sido financiado conjuntamente por el proyecto GLIRS-II, Ref. TIC-2003-07977 y el proyecto de excelencia de la Junta de Andalucía SAINFOWEB, Cod. 00602.

del modelo Booleano, y la de Kraft y otros [18] en el modelo difuso. Ambos guiados por una función fitness que combina, precisión y exhaustividad en un mismo objetivo.

En este trabajo abordaremos un estudio comparativo del desempeño, en el aprendizaje automático de consultas difusas con ponderaciones lingüísticas, de tres de los Algoritmos Evolutivos Multiobjetivo (MOEAs) más utilizados recientemente en la literatura, como son NSGA-II [10], SPEA2 [27] y un MOEA combinado con local search MOGLS [12], adaptados a la estructura de PG con árboles sintácticos de expresión codificando las consultas. Todos ellos optimizando, de manera simultánea, ambos objetivos, precisión y exhaustividad.

Para ello estructuraremos la contribución como sigue. La Sección 2 se dedicará a introducir las bases de los SRI difusos, así como la técnica IQBE. La descripción y particularización de los MOEAs utilizados se llevará a cabo en la Sección 3. En la Sección 4 se expondrá la experimentación, y finalmente, en la Sección 5 se recogerán algunas conclusiones.

2 PRELIMINARES

En esta sección introduciremos las bases de los SRIDs, sus componentes y procedimiento de evaluación, así como una breve descripción de la técnica IQBE.

2.1 Sistemas de Recuperación de Información Difusos

Los Sistemas de Recuperación de Información Difusos (SRIDs) permiten manejar la incertidumbre y la imprecisión inherentes al proceso de recuperación extendiendo los SRI Booleanos. Sus tres componentes son [2]:

Base de datos: almacena los documentos y su representación (típicamente basada en términos índice en el caso de documentos textuales). Sea $\mathcal{D}$ un conjunto de documentos y $\mathcal{T}$ un conjunto de términos representando el contenido subyacente de estos documentos. Existe una función de indización $\mathcal{F} : \mathcal{D} \times \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$ que define un conjunto difuso bidimensional (una relación difusa), que se proyecta para obtener el conjunto difuso asociado a cada documento y términos individuales:

$$d_i = \{\langle t, \mu_{d_i}(t) \rangle | t \in \mathcal{T}\}; \mu_{d_i}(t) = \mathcal{F}(d_i, t)$$

$$t_j = \{\langle d, \mu_{t_j}(d) \rangle | d \in \mathcal{D}\}; \mu_{t_j}(d) = \mathcal{F}(d, t_j)$$

Existen diferentes formas para definir la función de indización $\mathcal{F}$, la más extendida es la frecuencia inversa del documento (IDF) [21].

Subsistema de consulta: permite a los usuarios formalizar sus consultas. Las consultas difusas son expresadas usando un lenguaje de consulta basado en la ponderación de términos como en [3], donde los pesos numéricos o lingüísticos están asociados a alguna semántica (importancia relativa, cuantitativa o umbral) modelando algún requerimiento del usuario y los términos son conectados mediante conectivos lógicos *AND* y *OR*.

En SRIDs el subsistema de consulta proporciona un conjunto difuso q definido sobre el dominio de los documentos especificando el grado de relevancia (el así llamado *retrieval status value* (RSV)) de cada documento en la base de datos con respecto a la consulta procesada:

$$q = \{\langle d, \mu_q(d) \rangle | d \in \mathcal{D}\}; \mu_q(d) = RSV_q(d).$$

Subsistema de evaluación: evalúa el grado para el cual la representación del documento satisface los requerimientos expresados en la consulta (es decir, el RSV) y recupera aquellos documentos que son juzgados como relevantes a ella. Cuando usamos la semántica de umbral, los pesos de la consulta representan requerimientos mínimos que la representación de los documentos deben satisfacer para que estos sean considerados relevantes. La evaluación de una consulta se realiza mediante un proceso constructivo ascendente, consistente en evaluar en primer lugar los términos y en segundo lugar las combinaciones de estos aplicando los conectivos lógicos *AND* y *OR*.

2.2 Evaluación de los Sistemas de Recuperación de Información

Existen diferentes maneras de medir la calidad de un SRI, tales como la eficiencia y la eficacia, y varios aspectos subjetivos relacionados con la satisfacción del usuario [1]. Tradicionalmente, la eficacia de la recuperación - basada en la relevancia de los documentos con respecto a las necesidades de información del usuario - es la más empleada. Hay diferentes criterios para medir este aspecto, siendo la precisión P y la exhaustividad E las más usadas. La precisión se define como la razón entre el número de documentos relevantes recuperados por el SRI en respuesta a una consulta y el número total de documentos recuperados, mientras que la exhaustividad es la razón entre el número de documentos relevantes recuperados y el número total de documentos relevantes existentes en la base de datos [25]. La expresión matemática para cada una de ellas es:

$$P = \frac{\mathcal{D}_{rr}}{\mathcal{D}_{tr}} \quad ; \quad E = \frac{\mathcal{D}_{rr}}{\mathcal{D}_{rt}}$$

donde $\mathcal{D}_{rr}$ es el número de documentos relevantes recuperados, $\mathcal{D}_{tr}$ es el número total de documentos recuperados y $\mathcal{D}_{rt}$ es el número total de documentos relevantes existentes en la base de datos.

Ha de tenerse en cuenta, que ambas medidas están definidas en el intervalo $[0,1]$, siendo 1 el valor óptimo. Obsérvese que el único medio de conocer todos los documentos relevantes existentes para una consulta en una base documental (valor necesario para calcular la exhaustividad) es evaluarlos todos uno por uno. Debido a esto y a que la relevancia es subjetiva, hay disponibles diversas bases documentales clásicas, cada una con un conjunto de consultas para las que se conocen los juicios de relevancia, de forma que puedan ser usadas para verificar las nuevas propuestas que se dan en el campo de la RI [1, 20]. En esta contribución, utilizaremos la colección Cranfield.

2.3 La técnica IQBE

La técnica IQBE fue propuesta por Chen [6] como un proceso en el que los usuarios proporcionan documentos (ejemplos) y el algoritmo induce (o aprende) los conceptos claves con el fin de encontrar otros documentos similares (e igualmente relevantes). De esta forma, IQBE podría entenderse como una técnica para asistir a los usuarios en el proceso de formulación de consultas desarrollado por medio de métodos de aprendizaje automático. Trabaja tomando un conjunto de documentos relevantes (y opcionalmente documentos no relevantes) proporcionados por el usuario - que pueden ser obtenidos de una consulta preliminar o de un proceso de hojear de la base documental - y aplicando un proceso de aprendizaje para generar automáticamente una consulta que describa las necesidades de información del usuario (representadas por los documentos proporcionados por él). La consulta que se obtiene puede ejecutarse en otros SRIs para obtener nuevos documentos relevantes. De esta forma, no hay necesidad de que el usuario interaccione con el proceso como ocurre en otras técnicas de refinamiento de consultas tales como la retroalimentación por relevancia [20].

Se han propuesto métodos IQBE para los diferentes modelos de RI existentes [8]. Los métodos IQBE más utilizados son los basados en PG, donde las consultas son representadas mediante árboles sintácticos de expresión y los algoritmos son articulados en base a los operadores clásicos: cruce, mutación y selección.

2.4 Modelo Lingüístico Difuso Ordinal

Un enfoque lingüístico difuso ordinal se define considerando un conjunto de etiquetas finito y totalmente ordenado $\mathcal{S} = \{s_i\}$, $i \in \{0, \dots, T\}$ con $s_i \geq s_j$ si $i \geq j$, y con una cardinalidad impar (la cardinalidad de $\mathcal{S}$

es $T + 1$). La semántica del conjunto de etiquetas es establecida según la estructura ordenada del conjunto de etiquetas [4], considerando que cada etiqueta del par (s_i, s_{T-i}) es igualmente informativa. Por ejemplo, podríamos usar el siguiente conjunto de 9 etiquetas para representar la información lingüística:

$$\mathcal{S} = \{N, EL, VL, L, M, H, VH, EH, T\}.$$

Para operar con información lingüística ordinal es necesario definir una serie de operadores:

1. Negación: $Neg(s_i) = s_j, j = T - i$.
2. Comparación:
 - Maximización: $MAX(s_i, s_j) = s_i$ if $s_i \geq s_j$.
 - Minimización: $MIN(s_i, s_j) = s_i$ if $s_i \leq s_j$.
3. Agregación: Generalmente para combinar información lingüística ordinal usamos operadores de agregación basados en computación simbólica, como por ejemplo el operador LOWA [11].

3 Estructuras de los MOEAs con PG

3.1 Componentes

Los tres MOEAs adaptados al uso de árboles sintácticos de expresión estudiados en esta contribución comparten los siguientes componentes:

Esquema de codificación: las consultas son representadas mediante árboles sintácticos de expresión donde los nodos hoja representan los términos índice y sus ponderaciones lingüísticas y los nodos intermedios los conectivos lógicos *AND* y *OR*. Las ponderaciones lingüísticas son modeladas siguiendo el modelo lingüístico difuso ordinal.

Operador de Cruze: aleatoriamente se elige una rama de cada uno de los padres y se intercambian los subárboles de estas ramas entre ambos padres.

Operador de Mutación: la mutación es necesaria para variar las ponderaciones asociadas a los términos. Esta consiste en escoger de manera aleatoria el término a mutar y aumentar o disminuir el valor de ponderación asociado.

Generación de la población inicial: Todos los individuos de la primera generación son generados de manera aleatoria. La población es creada con todos los términos incluidos en el conjunto de documentos relevantes proporcionados por el

usuario, aquellos que aparezcan en más documentos tendrán mayor probabilidad de ser seleccionados.

Objetivos a optimizar: precisión y exhaustividad.

3.2 NSGA-II-PG

NSGA II [10] es un algoritmo muy completo ya que, no sólo incorpora una estrategia de preservación de la elite, sino que usa además un mecanismo explícito para preservar la diversidad. NSGA II trabaja con una población de descendientes Q_t que se crea usando la población padre P_t . Ambas poblaciones (Q_t y P_t) se combinan para formar una sola llamada R_t , de tamaño $2 \cdot M$, de la que se busca extraer el frente del Pareto. Es entonces cuando se realiza una ordenación sobre los individuos no-dominados para clasificar la población R_t . Aunque esto supone un mayor esfuerzo si lo comparamos únicamente con la ordenación del conjunto Q_t , permite una comprobación global de las soluciones no-dominadas que pertenecen tanto a la población de descendientes como a la de los padres.

Una vez que la ordenación de los individuos no-dominados termina, la nueva generación se forma con soluciones de los diferentes frentes de no-dominados, tomando de uno de los frentes cada vez. Se comienza con el mejor frente de individuos no-dominados y se continua con las soluciones del segundo frente, después con el tercero, etc. Como el tamaño de R_t es $2 \cdot M$, no todos los frentes pueden pertenecer a la nueva población, ya que ésta tiene sólo tamaño M . Todos los frentes de soluciones que no pasan a la nueva población se eliminan directamente.

Durante las ultimas etapas de la ejecución, es probable que la mayoría de las soluciones de la población se encuentren en el mejor frente de no-dominadas. También es probable que el número de soluciones en el primer frente de no-dominadas de la población combinada R_t (de tamaño $2 \cdot M$) sea mayor que M .

Es en ese momento cuando el algoritmo anterior asegura la selección de un conjunto diverso de soluciones de este frente mediante el método de nichos. Cuando la población entera converge a la frontera Pareto-óptima, el algoritmo continúa, de forma que se asegure la mejor distribución entre las soluciones.

3.3 SPEA2-PG

SPEA2 [27] introduce elitismo por el mantenimiento explícito de una población externa $\bar{P}$. Esta población almacena un número fijo de soluciones no-dominadas encontradas desde el comienzo de la simulación.

En cada generación, las nuevas soluciones no-

dominadas encontradas se comparan con la población externa existente y se preservan las soluciones no-dominadas resultantes. Además, SPEA2 usa estas soluciones elite para participar en las operaciones genéticas con la población actual con la esperanza de influenciar a la población para conducirla hacia buenas regiones en el espacio de búsqueda.

El algoritmo comienza con una población P_0 de tamaño M que se crea de forma aleatoria y una población externa $\bar{P}_0$ que en principio se encuentra vacía y tiene un máximo de capacidad $\bar{M}$. En cada generación t , las mejores soluciones no-dominadas (pertenecientes al primer frente no-dominado) de las poblaciones P_t y $\bar{P}_t$ se copian en la población externa $\bar{P}_{t+1}$. Si el tamaño de $\bar{P}_{t+1}$ excede $\bar{M}$ entonces se reduce $\bar{P}_{t+1}$ mediante un operador de truncamiento, en caso contrario $\bar{P}_{t+1}$ se completa hasta $\bar{M}$ con soluciones dominadas de P_t y $\bar{P}_t$. Este operador de truncamiento mantiene la diversidad.

A partir de $\bar{P}_{t+1}$ obtenemos un pool de individuos aplicando una selección por torneo binario con remplazamiento. Estos individuos son cruzados y mutados para obtener la nueva generación P_{t+1} .

3.4 MOGLS-PG

MOGLS es un enfoque híbrido, que combina conceptos de MOEAs y Local Search para mejorar la población actual. En la literatura especializada se han propuesto varias alternativas [12, 13, 14, 15]. De todas ellas, hemos optado por estudiar el rendimiento de la primera propuesta de Ishibuchi [12]. Este enfoque centra gran parte de su esfuerzo en conseguir una frontera Pareto lo más extendida posible, para ello, asocia a cada individuo de la población un vector de pesos que marcan la dirección, en el espacio objetivo, con la que dicho individuo fue generado. Estas direcciones son tenidas en cuenta a la hora de generar nuevos individuos.

Este algoritmo mantiene el elitismo usando dos conjuntos de soluciones: la población actual y una población provisional de soluciones no-dominadas.

El algoritmo empieza generando una población inicial de N_{pop} individuos, los evalúa y actualiza la población provisional con los individuos no-dominados obtenidos. A continuación obtiene un conjunto de $N_{pop} - N_{elite}$ padres. Estos padres serán seleccionados teniendo en cuenta su vector dirección. Después del correspondiente cruce y mutación, la población será completada con N_{elite} individuos no-dominados de la población provisional. A continuación se aplica una búsqueda local a todos los N_{pop} individuos de la población actual. En esta etapa el vector dirección de cada individuo guiará el proceso de búsqueda local.

Finalmente, la generación siguiente es obtenida con los N_{pop} individuos mejorados de la población actual.

3.5 Evaluación de MOEAs

Cuando trabajamos con optimización multiobjetivo, la definición de calidad es substancialmente más compleja que con problemas de optimización mono-objetivo, ya que los procesos de optimización en sí implican varios objetivos. En la literatura especializada se han propuesto diferentes medidas cuantitativas [7, 9, 16, 26]. Una de las más utilizadas es la medida C cuya expresión:

$$C(A, B) = \frac{|\{a \in A ; \exists b \in B : b \succ a\}|}{|A|}$$

mide el porcentaje de individuos del pareto A que son dominados por individuos del pareto B . Un valor de 1 indicaría que todos los individuos del pareto A son dominados por individuos del pareto B ; por su parte, un valor de 0 nos dice que ninguno de los individuos de A es dominado por individuos de B .

4 Estudio experimental

Como se ha comentado, el estudio experimental se ha desarrollado utilizando la colección Cranfield, compuesta por 1400 documentos sobre Aeronáutica. Los 1400 documentos de texto han sido automáticamente indizados de la forma usual, eliminando las palabras vacías, obteniendo un total de 3857 términos índice diferentes e indizando según el esquema $tf \cdot idf$ [20] para generar los términos relevantes en las representaciones de los documentos. De entre las 225 consultas asociadas a Cranfield, se han seleccionado aquellas que presentan 20 o más documentos relevantes. Las siete consultas resultantes (números 1, 2, 23, 73, 157, 220 y 225) tienen asociados 29, 25, 33, 21, 40, 20, 25 documentos relevantes, respectivamente.

Los MOEAs estudiados en esta contribución han sido ejecutados 30 veces para cada una de las consultas utilizadas, dando un total de 630 ejecuciones. De cada una de ellas se obtiene un pareto. Los tres paretos obtenidos por cada ejecución y consulta son comparados con la medida de rendimiento C (en la Tabla 1 se muestran los resultados promedio de C para cada pareja de EAs y consulta) y analizados de manera estadística mediante un test de Wilcoxon [22]. En la Tabla 2 mostramos los resultados de la comparación, donde el signo + indica que estadísticamente el algoritmo de la fila es mejor que el de la columna, el signo - indica lo contrario. Los parámetros generales utilizados son: 50.000 evaluaciones, 800 individuos por población, probabilidad de cruce = 0.8, probabilidad

Tabla 1: Resultado promedio de la medida $C(A, B)$ para cada una de las consultas estudiadas. X=NSGA-II-PG, Y=MOGLS-PG y Z=SPEA2-PG.

Consulta	$C(X, Y) / C(Y, X)$	$C(X, Z) / C(Z, X)$	$C(Y, Z) / C(Z, Y)$
1	0.831 / 0	1 / 0	0.008 / 0.960
2	0.754 / 0	1 / 0	0.025 / 0.920
23	0.728 / 0.005	0.985 / 0	0.013 / 0.920
73	0.705 / 0.028	0.951 / 0	0.031 / 0.917
157	0.727 / 0.011	0.975 / 0	0.002 / 0.953
220	0.768 / 0.011	0.970 / 0	0.011 / 0.932
225	0.782 / 0	0.974 / 0	0.002 / 0.981

de mutación = 0.2 y 20 nodos como máximo en el árbol sintáctico de expresión. Los parámetros específicos para MOGLS son: tamaño elite = 200, probabilidad de aplicar búsqueda local = 0.3 y máximo de 10 vecinos evaluados; y para SPEA2-PG: tamaño de la población élite = 200.

Tabla 2: Resultado del test de Wilcoxon, considerando $N = 7 : 2$

$C(A, B)$	MOGLS-PG	SPEA2-PG	NSGA-II-PG
NSGA-II-PG	+	+	
SPEA2-PG	-		-
MOGLS-PG		+	-

5 Conclusiones

En esta contribución hemos desarrollado un estudio comparativo del desempeño, aprendiendo consultas lingüísticas difusas, de tres de los MOEAs más utilizados recientemente en la literatura. Para ello, hemos desarrollado e implementado versiones PG de los citados MOEAs (NSGA-II-PG, SPEA2-PG, MOGLS-PG) y validado con la base de datos de test Cranfield. Los resultados arrojados por este estudio indican que NSGA-II-PG es el enfoque que mejor se comporta en esta faceta.

Referencias

- [1] R. Baeza-Yates and B. Ribeiro-Neto, *Modern information retrieval*, Addison-Wesley, 1999.
- [2] G. Bordogna, P. Carrara, and G. Pasi, *Fuzzy sets and possibility theory in database management systems*, ch. Fuzzy Approaches to Extend Boolean Information Retrieval, pp. 231–274, Bosc, P. and Kacprzyk, J., Eds. (Springer Verlag), 1995.
- [3] G. Bordogna and G. Pasi, *A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation*, Journal of the American Society for Information Science **44** (1993), no. 2, 70–82.

- [4] ———, *The ordered weighted averaging operators: Theory and applications*, ch. Application of the OWA operators to soften information retrieval systems, pp. 275–294, Yager, R.R. and Kacprzyk, J., Eds. (Kluwer Academic Publishers), 1997.
- [5] D. Buell and D.H. Kraft, *A model for a weighted retrieval system*, Journal of the American Society for Information Science **32** (1981), 211–216.
- [6] H. Chen, G. Shankaranarayanan, L. She, and A. Iyer, *A machine learning approach to inductive query by example: An experiment using relevance feedback, ID3, genetic algorithms, and simulated annealing*, Journal of the American Society for Information Science **49** (1998), no. 8, 693–705.
- [7] C.A. Coello, D.A. Van Veldhuizen, and G.B. Lamant, *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [8] O. Cordon, E. Herrera-Viedma, López-Pujalte C., and C. Luque, M. Zarco, *A review on the application of evolutionary computation to information retrieval*, International Journal of Approximate Reasoning **34** (2003), 241–264.
- [9] K. Deb, *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*, Wiley, 2001.
- [10] K. Deb, A. Pratap, S. Agrawal, and Meyarivan T., *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation **6** (2002), 182–197.
- [11] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay, *Direct approach processes in group decision making using linguistic owa operators*, Fuzzy Sets and Systems **79** (1996), 175–190.
- [12] H. Ishibuchi and T. Murata, *A multi-objective genetic local search algorithm and its application to flowshop scheduling*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews **28** (1998), no. 3.
- [13] H. Ishibuchi, T. Yoshida, and T. Murata, *Balance between genetic search and local search in memetic algorithms for multiobjective permutation flowshop scheduling*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation **7** (2003), no. 2, 204–223.
- [14] A. Jaskiewicz, *Do multiple-objective metaheuristics deliver on their promises? a computational experiment on the set-covering problem*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation **7** (2003), no. 2, 133–143.
- [15] ———, *Genetic local search for multi-objective combinatorial optimization*, European Journal of Operational Research **137** (2003), 50–71.
- [16] J. Knowles, L. Thiele, and E. Zitzler, *A tutorial on the performance assessment of stochastic multiobjective optimizers*, 214, Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), ETH Zurich, Switzerland, feb 2006, revised version.
- [17] J. Koza, *Genetic programming. on the programming of computers by means of natural selection*, The MIT Press, 1992.
- [18] D.H. Kraft, F.E. Petry, B.P. Buckles, and T. Sadasivan, *Genetic algorithms and fuzzy logic systems*, ch. Genetic algorithms for query optimization in information retrieval: relevance feedback, pp. 155–173, Sanchez, E. and Shibata, T. and Zadeh, L.A., Eds., (World Scientific), 1997.
- [19] S. Miyamoto, *Fuzzy sets in information retrieval and cluster analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [20] G. Salton, *Automatic text processing: The transformation, analysis and retrieval of information by computer*, Addison-Wesley, 1989.
- [21] G. Salton and M.J. McGill, *An introduction to modern information retrieval*, McGraw-Hill, 1983.
- [22] D.J. Sheskin, *Handbook of parametric and non-parametric statistical procedures*, New York, NY: CRC Press, 1997.
- [23] M. P Smith and M. Smith, *The use of genetic programming to build boolean queries for text retrieval through relevance feedback*, Journal of Information Science **23** (1997), no. 6, 423–431.
- [24] V. Tahani, *A fuzzy model of document retrieval systems*, Information Processing & Management **12** (1976), 177–187.
- [25] C.J. van Rijsbergen, *Information retrieval*, Butterworth, 1979.
- [26] E. Zitzler, K. Deb, and L. Thiele, *Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results*, Evolutionary Computation **8** (2000), no. 2, 173–271.
- [27] E. Zitzler, M. Laumanns, and L. Thiele, *SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization*, Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Application to Industrial Problems (EUROGEN 2001) (K. Giannakoglou et al. (Eds.), ed.), 2002, pp. 95–100.

Caracterización Automática de Perfiles de Usuarios basados en Consultas Lingüísticas Multigranulares usando un Algoritmo Genético Multiobjetivo

M. Luque
Dpto. Informática y A.N.,
Universidad de Córdoba,
14071-Córdoba (España)
mluque(at)uco.es

E. Herrera-Viedma, O. Cordon, A. Zafra
Dpto. Ciencia de la Computación e I.A.
Univesidad de Granada
18071- Granada (España)
viedma,ocordon@decsai.ugr.es

A.G. López
Dpto. Informática
Universidad de Jaén
23071-Jaén (España)
aglopez@ujaen.es

Resumen

El objetivo de esta contribución es presentar un algoritmo genético multiobjetivo para derivar de manera automática consultas persistentes representadas como consultas lingüísticas multigranulares. Los experimentos desarrollados mostrarán que los perfiles derivados por nuestro sistema, aunque menos precisos que los obtenidos con un método clásico de generación de perfiles (representados como “bag of words”), son más flexibles, interpretables y expresivos.

Palabras Clave: Consultas Persistentes, Información Lingüística Multigranular, Algoritmos Genéticos, Recuperación de Información

1 Introducción

Las técnicas de Soft Computing se han revelado como una excelente herramienta en la personalización de los sistemas de recuperación de información (SRI) [1], dotándolos de flexibilidad y de algún tipo de “inteligencia” [4, 8]. Una de las formas de dotar de flexibilidad a un SRI es haciéndolo tolerante a la incertidumbre y la imprecisión –ambos inherentes en la interacción usuario-sistema– lo que permitirá a los usuarios representar sus necesidades de manera más natural [8]. Para llevar a cabo esto, se han propuesto lenguajes de consulta flexibles los cuales permiten expresar las necesidades de información subjetivas de forma simple y aproximada [2]. En concreto, el uso de información lingüística para definir los pesos de consultas Booleanas extendidas incrementa la comprensión de éstas y mejora la interacción SRI-usuario[15, 12].

Por otro lado, la capacidad de adaptación de los SRIs puede modelarse desde el punto de vista del aprendizaje automático, utilizando, entre otros, algoritmos

evolutivos. La aplicación de éstos a la RI ha generado resultados prometedores, como demuestra la gran cantidad de publicaciones al respecto [5]. La unión de estas técnicas y los lenguajes de consultas flexibles permite obtener SRIs “inteligentes” [4].

El objetivo de este trabajo es presentar un algoritmo genético (AG) multiobjetivo para generar de forma automática varias consultas lingüísticas multigranulares en una única ejecución a partir de un conjunto de documentos proporcionados por el usuario que representan sus necesidades de información. Las consultas derivadas serán usadas como consultas persistentes, consultas de RI que representan las necesidades de información, constantes durante un periodo de tiempo, de un usuario [9, 18]. Estas consultas se convertirán en perfiles de usuario para sistemas de búsqueda de información, permitiendo al usuario estar permanentemente informado sobre los tópicos que le interesan [10]; además, su estructura, más interpretable para el usuario, mejorará la representación clásica de perfiles de usuario.

La propuesta será validada en un entorno simulado de recuperación, considerando siete necesidades de información diferentes, todas ellas extraídas de la conocida colección Cranfield. Su rendimiento, tanto en eficacia de recuperación como en interpretabilidad de las consultas, será comparado con los perfiles de usuario derivados por uno de los mejores métodos clásicos para la generación de perfiles, VSR-OKAPI [9].

Con este propósito, la contribución está estructurada como sigue. La Sección 2 expone la necesidad de utilizar información lingüística multigranular. El AG multiobjetivo propuesto para aprender automáticamente consultas lingüísticas multigranulares se describe en la Sección 3. La Sección 4 presenta los experimentos desarrollados y el análisis de resultados, mientras que las conclusiones se recogen en la Sección 5.

2 Información Lingüística Multigranular

Una cuestión importante en los SRIs es cómo facilitar la interacción usuario-sistema, incluso cuando la complejidad de los lenguajes difusos de consulta dificulta formular las consultas.

Es el subsistema de consulta el que soporta esta interacción usuario-SRI y, por lo tanto, debería tener en cuenta la imprecisión y la vaguedad típica de la comunicación humana. Este aspecto puede ser modelado introduciendo pesos numéricos o lingüísticos en el lenguaje de consulta usando para ello la Teoría de Conjuntos Difusos [2]. Parece más natural, caracterizar el contenido de los documentos asociando descriptores lingüísticos a los términos de una consulta, tales como “importante” o “muy importante”, en vez de valores numéricos. En este sentido, el uso de SRI difusos lingüísticos ha aumentado en los últimos años [15].

La mayoría de los SRIs lingüísticos suponen que los usuarios proporcionan sus necesidades de información por medio de consultas Booleanas cuyos términos se ponderan mediante valores lingüísticos representados por la variable lingüística “Importancia”, valorada en el conjunto de etiquetas S . De igual forma, el valor de relevancia de los documentos (RSV), tras evaluar una consulta, se representa mediante la variable “Relevancia”, también valorada sobre S . Usar el mismo conjunto de etiquetas para expresar la entrada y la salida de un SRI disminuye las posibilidades de comunicación en la interacción usuario-SRI. Además, puesto que ambas variables representan diferentes conceptos, parece lógico usar diferentes conjuntos de etiquetas para modelarlos, p.e., utilizar información lingüística multigranular [11], es decir, utilizar conjuntos de etiquetas con diferente semántica/granularidad para representar los diferentes tipos de información que aparecen en el proceso de recuperación.

Teniendo en cuenta lo anterior, en esta contribución, consideraremos una modificación de nuestra propuesta anterior de un SRI basado en información lingüística multigranular [13] como subsistema de evaluación para las consultas persistentes generadas por el AG que presentamos en la Sección 3.

La modificación consiste en utilizar funciones homogéneas [3] para modelar la semántica de importancia relativa en la evaluación de las subexpresiones. Esto nos permite eliminar la restricción de que una subexpresión tenga que estar compuesta de al menos dos términos para que tenga sentido aplicar dicha semántica. Así, conseguimos que el proceso de adaptación de las consultas, del conjunto de entrenamiento al de prueba, sea menos agresivo, lo que se

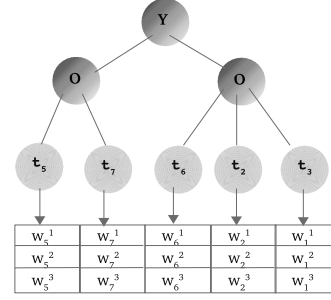


Figura 1: Consulta Booleana ponderada con pesos lingüísticos

espera que mejore el rendimiento del sistema.

Las características principales del SRI son: i) la ponderación de los términos de las consultas Booleanas y los RSV asociados a los documentos se expresan utilizando información lingüística multigranular; ii) cada término se pondera simultáneamente de acuerdo a tres semánticas: umbral simétrico, cuantitativa, importancia relativa; iii) los operadores Booleanos se modelan de manera flexible utilizando el operador OWA [21].

3 Un Algoritmo Genético Multiobjetivo para Aprender Consultas Persistentes Lingüísticas

En esta sección presentamos el AG multiobjetivo para aprender consultas lingüísticas multigranulares (perfiles de usuario expresivos), componente por componente.

3.1 Esquema de Codificación

La estructura de las consultas lingüísticas puede representarse como un árbol de expresión, donde los nodos terminales son los términos de la consulta y los nodos internos los operadores Booleanos. Además, cada nodo terminal tiene asociados tres pesos lingüísticos correspondientes a las tres semánticas indicada en la sección anterior. La Figura 1 muestra un ejemplo gráfico de este tipo de consultas. Lo natural sería codificar la consulta como un árbol y trabajar con Programación Genética [14] como se ha hecho en enfoques anteriores orientados al aprendizaje de consultas Booleanas [6, 19] o de consultas Booleanas extendidas (consultas difusas con pesos numéricos) [7, 16].

Sin embargo, el hecho de que nuestras consultas lingüísticas siempre estén en forma normal disyuntiva (DNF) o conjuntiva (CNF) nos permite tratar con una representación mucho más simple, sólo las subexpresiones de la consulta tienen que ser almacenadas (los operadores son siempre los mismos y no hace falta

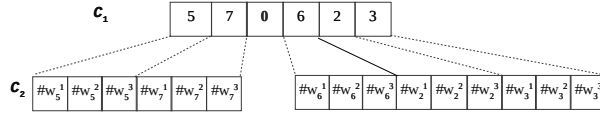


Figura 2: Estructura de un cromosoma

mantenerlos). Así, un cromosoma C que codifique una consulta lingüística estará compuesto de dos vectores de enteros:

1. C_1 , que codifica el árbol de consulta, donde el alelo 0 representa un separador entre subexpresiones y el resto de números representan los diferentes términos índice en la base de documentos. Los números negativos se asocian a los términos negados en la consulta.
2. C_2 , que codifica los pesos de los términos almacenando la etiqueta lingüística asociada como su posición dentro del conjunto de etiquetas.

Para ilustrar esto, la consulta de la Figura 1 se codificaría en el cromosoma de la Figura 2.

3.2 Generación de la Población Inicial

Todos los individuos de la población inicial son creados aleatoriamente, generando por separado ambas partes del cromosoma:

1. Las consultas (C_1) se compondrán de términos seleccionados de aquellos incluidos en el conjunto de documentos proporcionado por el usuario, teniendo mayor probabilidad aquellos que aparezcan en los documentos relevantes.
2. Los pesos (C_2) se calculan aleatoriamente, variando cada gen en su respectivo intervalo de definición: $\{1, \dots, \text{granularidad\_conjunto\_etiquetas}\}$.

3.3 Función de Evaluación

Los criterios clásicos de precisión y exhaustividad [1] – calculados como muestra la ecuación 1– se maximizan simultáneamente.

$$P = \frac{\sum_d r_d \cdot f_d}{\sum_d f_d} \quad ; \quad E = \frac{\sum_d r_d \cdot f_d}{\sum_d r_d} \quad (1)$$

donde $r_d \in \{0,1\}$ es la relevancia del documento d para el usuario, y $f_d \in \{0,1\}$ es la recuperación del documento d en el procesamiento de la consulta actual. Ha de tenerse en cuenta, que ambas medidas están definidas en el intervalo $[0,1]$, siendo 1 el valor óptimo.

¿Cuál es el conjunto de documentos recuperados?

El algoritmo evalúa cada consulta en el SRI Lingüístico indicado en la Sección 2, asociando a cada documento su correspondiente RSV. Los pasos que sigue son: i) preprocesamiento de la consulta para ponerla en DNF o CNF; ii) evaluación de los átomos respecto a la semántica de umbral simétrico; iii) evaluación de los átomos respecto a la semántica cuantitativa; iv) evaluación de las subexpresiones y modelado de la semántica de importancia relativa; y v) evaluación de la consulta completa.

3.4 Enfoque Multiobjetivo Considerado

Como se mencionó, el objetivo de nuestra propuesta es generar automáticamente varias consultas lingüísticas con diferente balance precisión-exhaustividad en una única ejecución. Para conseguir esto, hemos considerado el enfoque elitista de SPEA [22] como AG multiobjetivo. El esquema de selección implica los siguientes pasos:

1. La población intermedia se crea a partir de la población actual P y la población externa (P_e) por medio de torneo binario.
2. Los operadores genéticos se usan sobre los nuevos individuos para obtener una nueva población (P).
3. Las soluciones no dominadas existentes en la nueva población se copian a la población elitista P_e .
4. Las soluciones dominadas y duplicadas se eliminan.

De esta forma, la nueva población elitista está compuesta por las mejores soluciones no dominadas encontradas hasta el momento, incluyendo soluciones elitistas antiguas y nuevas. Para limitar el crecimiento de la población elitista, se restringe el tamaño a un número máximo de soluciones utilizando técnicas de clustering (ver [22] para más detalle).

3.5 Operadores Genéticos

La estrecha relación entre las dos partes de un cromosoma requiere operadores que trabajen de forma cooperativa en C_1 y C_2 , con el fin de sacar el máximo rendimiento a la representación elegida:

1. *Cruce*: Se emplean dos cruces diferentes en función de la estructura codificada por los padres:

- Si los dos padres codifican el mismo árbol de consulta (misma parte C_1), los dos descendientes se obtienen manteniendo los mismos valores de C_1 y aplicando un cruce en dos puntos sobre C_2 (pesos).
- De lo contrario, se aplica un operador de cruce simple en ambas partes del cromosoma seleccionando un punto de cruce aleatorio (pc) en C_1 para cada padre e intercambiando los genes existentes entre cp y el final de C_1 . En C_2 , el cruce se hace de la misma forma, utilizando los puntos de corte equivalentes.

2. *Mutación:* Se han utilizado siete operadores diferentes, seis que actúan sobre C_1 , y uno sobre C_2 . Los seis que actúan sobre C_1 son: cambio de un término por otro generado aleatoriamente, negación de un término, eliminación de un separador elegido aleatoriamente, adición de un separador en una posición aleatoria válida, desplazamiento de un separador y cambio de una subexpresión por otra generada aleatoriamente con más o menos términos (C_2 se actualiza automáticamente). Por otro lado, el operador de mutación sobre C_2 es similar al propuesto por Thrift en [20]. Cuando se realiza una mutación sobre un gen de C_2 , la etiqueta se cambia por la inmediatamente anterior o posterior. Si la etiqueta que se va a modificar es la primera o la última, se realiza el único cambio posible.

4 Experimentos y Análisis de Resultados

4.1 Experimentos Desarrollados

En esta sección mediremos el rendimiento del algoritmo MOGA-LPQ para el aprendizaje automático de perfiles de usuario representados como consultas lingüísticas persistentes. Como método de comparación, hemos elegido uno de los mejores métodos clásico para la generación de perfiles representados como “*bag of words*”, VSR-OKAPI [9], basado en el modelo espacio vectorial y en la teoría de probabilidades [1]. Considera el Valor de Selección de Robertson como fórmula para la creación de los perfiles y la función OKAPI BM25 como función de similitud para el emparejamiento del perfil y los documentos.

Sin embargo, esta comparación no sería adecuada por dos razones. En primer lugar, estamos diseñando perfiles de usuario más expresivos, lo que normalmente lleva asociado un descenso en la eficacia de la recuperación (problema del balance entre interpretabilidad y exactitud). Por otro lado, nuestro algoritmo es capaz de derivar varias consultas lingüísticas (perfiles de

usuario) con diferente balance precisión-exhaustividad en una sola ejecución. Por lo tanto, la elección de una única consulta persistente para compararla con el perfil generado por VSR-OKAPI limita las posibilidades de nuestra propuesta. No obstante, y con el fin de conocer la competitividad del algoritmo presentado, se ha decidido llevar a cabo esta comparación.

La base de datos considerada para diseñar nuestros experimentos ha sido la colección clásica de Cranfield, compuesta de 1398 documentos sobre Aeronáutica. Estos documentos han sido automáticamente indizados de la forma usual, eliminando las palabras vacías, obteniendo un total de 3857 términos índice diferentes, e indizando de forma binaria para generar los términos relevantes en las representaciones de los documentos.

De entre las 225 consultas asociadas a Cranfield, se han seleccionado aquellas que presentan 20 o más documentos relevantes¹. Las siete consultas resultantes (números 1, 2, 23, 73, 157, 220 y 225) tienen asociados 29, 25, 33, 21, 40, 20, 25 documentos relevantes, respectivamente. Para cada una de estas consultas, la base de datos ha sido dividida aleatoriamente en dos conjuntos de documentos diferentes y no solapados, entrenamiento y prueba, cada uno de ellos compuesto de un 50% de documentos relevantes e irrelevantes para la consulta.

MOGA-LPQ ha sido ejecutado, para cada consulta, cinco veces con diferentes inicializaciones durante 50000 evaluaciones de la función de fitness en un ordenador AMD Turion64 MT30. Los valores considerados para los parámetros son un tamaño de población igual a 100 individuos, 25 individuos para la población elitista, un máximo de 10 términos para la consulta, y 0.8 y 0.2 para las probabilidades de cruce y mutación (para ambas partes, C_1 y C_2). El umbral de recuperación se ha establecido en la tercera etiqueta del conjunto. Por otro lado, VSR-OKAPI se ha ejecutado una única vez, puesto que no tiene componentes aleatorios, con un tamaño de perfil igual a 10 y con QTW (pesos de los términos) igual al Valor de Selección de Robertson.

Después de calcular las estadísticas individuales, los conjuntos Pareto obtenidos de las cinco ejecuciones de cada consulta se han fusionado y eliminado las soluciones dominadas. Las consultas con mejor exactitud sobre el conjunto de prueba ha sido seleccionada para

¹Nuestro método, basado en IQBE, genera una consulta a partir de un conjunto de documentos relevantes e irrelevantes. Por tanto, a) es necesario que haya un número suficientemente representativo de ejemplos positivos (documentos relevantes), y b) las ejecuciones son más largas y costosas que en relevance feedback. Por esas razones, reducimos el número de consultas consideradas y nos quedamos con las de mayor número de documentos relevantes, las más representativas.

compararlas con la generadas por VSR-OKAPI.

4.2 Análisis de los Conjuntos Pareto Generados

Para medir la calidad de los conjuntos Pareto generados por MOGA-LPQ, se han considerado tres métricas clásicas: número diferente de soluciones no dominadas en el conjunto Pareto (en nuestro caso, número diferente de vectores objetivo (p.e., parejas precisión-exhaustividad)) ($\#d$), y las métricas $M_2^* \in [0, \#d]$ y $M_3^* \in [0, \sqrt{2}] = [0, 1.4142]$ [22]. La Tabla 1 recoge estos datos, mostrando el valor medio y la desviación estándar. En cada caso, cuanto mayor es el valor, mejor es la calidad del conjunto Pareto obtenido.

Tabla 1: Estadísticas de los conjuntos Pareto obtenidos por el algoritmo MOGA-LPQ

#q	#d	$\sigma_{\#d}$	M_2^*	$\sigma_{M_2^*}$	M_3^*	$\sigma_{M_3^*}$
1	6.2	0.335	5.680	0.325	1.062	0.032
2	5.6	0.537	5.400	0.456	1.097	0.046
23	9.6	0.669	8.676	0.540	1.199	0.010
73	5.4	0.537	5.400	0.537	1.086	0.054
157	11.2	0.867	10.127	0.813	1.213	0.011
220	4.6	0.358	4.600	0.358	1.022	0.073
225	7.2	0.522	7.019	0.459	1.203	0.035

A la vista de los resultados mostrados en la Tabla 1, el frente de los Pareto obtenidos son de buena calidad. Podemos observar como todas las ejecuciones generan al menos 5 consultas lingüísticas con diferente balance precisión-exhaustividad y con una desviación estándar de alrededor de 0.5. Los valores de M_2^* y M_3^* son muy apropiados también, mostrando una buena distribución del frente de los Pareto. Para ilustrar esto, la Figura 3 representa el frente unificado del Pareto obtenido para la consulta 157.

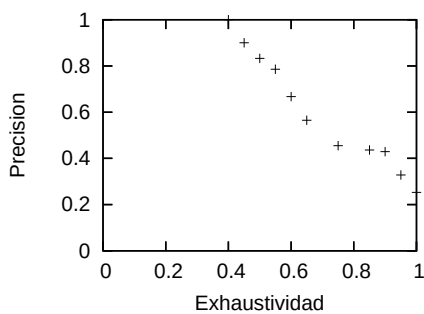


Figura 3: Frente del Pareto unificado generado por la consulta 157

4.3 MOGA-LPQ versus RSV-OKAPI

Para comparar ambos algoritmos, hemos elegido la precisión media a 11 niveles de exhaustividad (P_{avg})[1]

como medida de comparación, puesto que ambos algoritmos pueden devolver los documentos ordenados de acuerdo a su relevancia. Cuando se usa esta medida, el conjunto de documentos se ordena de acuerdo a su RSV de forma descendente, siendo interesante que los documentos relevantes estén al inicio del conjunto.

La Tabla 2 muestra la comparación entre la eficacia de recuperación de las mejores consultas sobre el conjunto de prueba, obtenidas por MOGA-LPQ y las correspondientes de VSR-OKAPI. En esta tabla, $\#rel$ representa el número de documentos relevantes asociados con la consulta, y $\#top$ el número de documentos relevantes situados en las primeras $\#rel$ posiciones del conjunto de documentos (ordenados por su RSV). En vista de los resultados, podemos observar como, sobre el conjunto de entrenamiento, nuestro método supera en seis de las siete consultas a VSR-OKAPI, además de generar perfiles más expresivos, como veremos más adelante. De hecho, la media global de los valores de P_{avg} para MOGA-LPQ es algo más alta que la de VSR-OKAPI (0.63 frente a 0.53). Además, el número de documentos relevantes en las primeras posiciones del conjunto de documentos recuperados es muy similar, con una pequeña ventaja en favor de nuestra propuesta.

Por otro lado, como era de esperar, RSV-OKAPI obtiene mejores resultados de prueba que MOGA-LPQ en cuatro de las siete consultas. Las diferencias son especialmente altas para las consultas 1 y 2. En este caso, la media global de los valores de P_{avg} de las siete consultas es 0.273 y 0.405 para MOGA-LPQ y VSR-OKAPI, respectivamente, lo que muestra claramente la existencia de sobreaprendizaje en nuestra propuesta. No obstante, aunque nuestra propuesta obtiene peores resultados que VSR-OKAPI sobre el conjunto de prueba, la representación de los perfiles de usuario como consultas persistentes mejora la expresividad de éstos, al aprenderse no sólo los términos que componen el perfil, sino también su estructura.

Finalmente, mencionar que los resultados obtenidos en esta experimentación mejoran a los obtenidos en [17]. Los algoritmos en ambos trabajos son idénticos, salvo por la modelización de la semántica de importancia relativa. En nuestra propuesta, utilizamos funciones homogéneas [3] para modelar esta semántica, consiguiendo que el proceso de adaptación de la consultas del conjunto de entrenamiento al conjunto de prueba sea menos agresivo que en [17].

5 Conclusiones

El uso de técnicas de soft computing para diseñar perfiles de usuario flexibles ha sido analizado, construyendo consultas lingüísticas por medio de un AG

Tabla 2: Perfiles de VSR-OKAPI *versus* Consultas lingüísticas de MOGA-LPQ

VSR-OKAPI							MOGA-LPQ						
Entrenamiento				Prueba			Entrenamiento				Prueba		
#q	P_{avg}	#rel	#top	P_{avg}	#rel	#top	#q	P_{avg}	#rel	#top	P_{avg}	#rel	#top
1	0.510	14	6	0.484	15	6	1	0.649	14	9	0.074	15	2
2	0.522	12	5	0.789	13	9	2	0.585	12	6	0.296	13	6
23	0.475	16	7	0.357	17	7	23	0.746	16	12	0.385	17	7
73	0.616	10	5	0.268	11	2	73	0.632	10	4	0.405	11	4
157	0.532	20	10	0.298	20	7	157	0.610	20	9	0.245	20	5
220	0.725	10	6	0.544	10	5	220	0.641	10	6	0.411	10	2
225	0.370	12	5	0.099	13	2	225	0.535	12	6	0.100	13	2

multiobjetivo a partir de un conjunto de documentos extraído de la colección Cranfield. Como se ha comentado, nuestra propuesta es competitiva con el método clásico sobre el conjunto de entrenamiento, teniendo, además, la ventaja de generar perfiles más expresivos; mientras que el método clásico obtiene mejores resultados sobre el conjunto de prueba. No obstante, nuestra propuesta es prometedora ya que aprende tanto los términos del perfil como su estructura, además de generar un conjunto de consultas con diferente balance precisión-exhaustividad en una única ejecución. De todas formas, aún tenemos que refinarla para mejorar su capacidad de encontrar nueva información relevante para el usuario.

Agradecimientos

Este trabajo está soportado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología en el marco de los proyectos TIC2003-07977 y TIC2003-00877, además de fondos FEDER.

Referencias

- [1] R. Baeza-Yates and B. Ribeiro-Neto. *Modern Information Retrieval*. Addison, 1999.
- [2] G. Bordogna, P. Carrara, and G. Pasi. Fuzzy Approaches to Extend Boolean Information Retrieval. In P. Bosc and J. Kacprzyk, editors, *Fuzziness in Database Management Systems*, pages 231–274. Springer-Verlag, 1995.
- [3] W. Cholewa. Aggregation of Fuzzy Opinions: An Axiomatic Approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 17:249–259, 1985.
- [4] O. Cordón and E. Herrera-Viedma. Editorial: Special Issue on Soft Computing Applications to Intelligent Information Retrieval on the Internet. *International Journal of Approximate Reasoning*, 34(2-3):89–95, 2003.
- [5] O. Cordón, E. Herrera-Viedma, C. López-Pujalte, M. Luque, and C. Zarco. A Review of the Application of Evolutionary Computation to Information Retrieval. *International Journal of Approximate Reasoning*, 34:241–264, 2003.
- [6] O. Cordón, E. Herrera-Viedma, and M. Luque. Improving the Learning of Boolean Queries by means of a Multiobjective IQBE Evolutionary Algorithm. *Information Processing and Management*, 42(3):615–632, 2006.
- [7] O. Cordón, E. Herrera-Viedma, M. Luque, F. Moya, and C. Zarco. Analyzing the Performance of a Multi-objective GA-P Algorithm for Learning Fuzzy Queries in a Machine Learning Environment. In *Lecture Notes in Artificial Intelligence 2715. Proc. of the 10th IFSA World Congress*, pages 611–615, Istanbul (Turkey), 2003.
- [8] F. Crestani and G. Pasi, editors. *Soft Computing in Information Retrieval*. Physica-Verlag, 2000.
- [9] W. Fan, M.D. Gordon, and P. Pathak. Effective Profiling of Consumer Information Retrieval Needs: A Unified Framework and Empirical Comparison. *Decision Support Systems*, 40(2):213–233, 2005.
- [10] U. Hanani, B. Shapira, and P. Shoval. Information Filtering: Overview of Issues, Research and Systems. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 11:203–259, 2001.
- [11] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A Fusion Approach for Managing Multi-Granularity Linguistic Term Sets in Decision Making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114:43–58, 2000.
- [12] E. Herrera-Viedma. Modeling the Retrieval Process for an Information Retrieval System using an Ordinal Fuzzy Linguistic Approach. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 52(6):460–475, 2001.
- [13] E. Herrera-Viedma, O. Cordón, M. Luque, A. G. López, and A. M. Muñoz. A Model of Fuzzy Linguistic IRS Based on Multi-Granular Linguistic Information. *International Journal of Approximate Reasoning*, 34:221–239, 2003.
- [14] J. Koza. *Genetic Programming. On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. The MIT Press, 1992.
- [15] D.H. Kraft, G. Bordogna, and G. Pasi. An Extended Fuzzy Linguistic Approach to Generalize Boolean Information Retrieval. *Information Sciences*, 2:119–134, 1994.
- [16] D.H. Kraft, F.E. Petry, B.P. Buckles, and T. Sadasivan. Genetic Algorithms for Query Optimization in Information Retrieval: Relevance Feedback. In

- E. Sanchez, T. Shibata, and L.A. Zadeh, editors, *Genetic Algorithms and Fuzzy Logic Systems*, pages 155–173. World Scientific, 1997.
- [17] M. Luque, O. Cordón, and E. Herrera-Viedma. A Multiobjective Genetic Algorithm for Linguistic Persistent Query Learning in Text Retrieval. In Y. Jin, editor, *Multi-objective Machine Learning*, pages 601–627. Springer, 2006.
 - [18] D.W. Oard and G. Marchionini. A Conceptual Framework for Text Filtering. Technical Report CS-TR-3643, University of Maryland, College Park, 1996.
 - [19] M.P. Smith and M. Smith. The Use of Genetic Programming to Build Boolean Queries for Text Retrieval through Relevance Feedback. *Journal of Information Science*, 23(6):423–431, 1997.
 - [20] P. Thrift. Fuzzy Logic Synthesis with Genetic Algorithms. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, pages 509–513, 1991.
 - [21] R.R. Yager. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.
 - [22] E. Zitzler and L. Thiele. Multiobjective Evolutionary Algorithms: A comparative Case Study and the Strength Pareto Approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4):257–271, 1999.

MEJORANDO LA BÚSQUEDA WEB MEDIANTE LA ADAPTACIÓN DE CONSULTAS EN GUMSe

Javier de la Mata
Computer Science Dept.
University of Castilla-La Mancha.
Paseo de la Universidad 4,
13071-Ciudad Real, Spain.
joseangel.olivas@uclm.es

José A. Olivas
Computer Science Dept.
University of Castilla-La Mancha.
Paseo de la Universidad 4,
13071-Ciudad Real, Spain.
javierl.mata@alu.uclm.es

Jesús Serrano-Guerrero
Computer Science Dept.
University of Castilla-La Mancha.
Paseo de la Universidad 4,
13071-Ciudad Real, Spain.
jesus.serrano3@alu.uclm.es

RESUMEN

Uno de los principales problemas que afecta a la calidad de la búsqueda es la utilización de pocos términos y operadores de búsqueda en los buscadores. Un desconocimiento de la funcionalidad del motor de búsqueda conlleva que los usuarios realicen pobres decisiones relativas a sus técnicas de búsqueda. El usuario debe de ser consciente de las características que posee la herramienta que utiliza para diseñar los planes y estrategias de búsqueda oportunos. En el marco del metabuscador GUMSe se incorpora la posibilidad de aprovechar los operadores de búsqueda avanzados incorporándolos como parte de un proceso de expansión de consultas. El objetivo es actuar como un intermediario que de forma transparente para el usuario aproveche las posibilidades que ofrecen las búsquedas avanzadas para diversificar la búsqueda. Con este planteamiento, basado en la expansión de consultas, esperamos corregir los dos malos hábitos principales de los usuarios que dificultan la búsqueda: la utilización de un número bajo de términos en la consulta y la ausencia de operadores de búsqueda avanzados. Este mecanismo, junto con un proceso de desambiguación del significado, posibilita una mejora en la recuperación.

Palabras clave: recuperación de información, metabuscador, expansión de consulta, agente, búsqueda avanzada.

1. INTRODUCCIÓN

Con el auge de Internet y el crecimiento exponencial de la cantidad de información alojada en ella el proceso de búsqueda se ha vuelto complicado y poco eficiente, desbordando con información poco relevante a los usuarios. El problema se debe a que la mayoría de los buscadores actuales basan su búsqueda en la coocurrencia de palabras clave dentro de los textos, limitándose a aspectos léxicos y en algunos casos sintácticos.

Las líneas de investigación actuales para mejorar la relevancia de los documentos devueltos por el proceso de búsqueda se basan en la incorporación de capacidades semánticas y deductivas mediante el uso de diccionarios, conceptos tales como la sinonimia y la antonimia o el uso de ontologías. Desde el punto de vista procedimental, se basan principalmente en la utilización de tesauros como WordNet [1] que dota al sistema de cualidades semánticas basadas en la hiperonimia, hiponimia o sinonimia.

Sin embargo, muchas veces el fracaso de la búsqueda no se debe al sistema de búsqueda, sino al usuario. Normalmente los usuarios, excepto los expertos [2], suelen limitarse a introducir una serie de palabras clave y confiar en los resultados proporcionados por el buscador. Esta forma de actuación suele proporcionar resultados adecuados en aquellos casos en los que se utiliza un número suficiente de términos en la consulta. No obstante, la mayoría de los usuarios suelen usar pocos términos en sus consultas en la World Wide Web. Existen diferentes estudios [3] que demuestran las tendencias de utilización de los buscadores en la web, aportando datos como el número de términos que forman las consultas, la frecuencia de modificación de la consulta, etc. Cuando se utilizan pocos términos aparecen problemas debido a los múltiples significados que puede tener una palabra, es decir, la polisemia. Así mismo, aparece otro inconveniente debido a las diferentes palabras utilizadas por los usuarios para describir el mismo concepto, conocido como problema del vocabulario [4].

El usuario debe de ser consciente de las características que posee la herramienta que utiliza para diseñar los planes y estrategias de búsqueda oportunos. La forma de realizar la consulta debe variar en función del motor de búsqueda que se utiliza para obtener mejores resultados. Un desconocimiento de la funcionalidad del motor de búsqueda conlleva que los usuarios realicen pobres decisiones relativas a sus técnicas de búsqueda [5]. La mayoría de los usuarios no expertos se limitan a utilizar las características básicas de los motores de búsqueda, evitando realizar búsquedas avanzadas y utilizar operadores de búsqueda como ponen de manifiesto

diferentes estudios sobre la utilización de los buscadores de Internet [6] [7]. Como mucho se limitan a realizar nuevas búsquedas con términos diferentes relacionados con el concepto buscado.

En el marco del meta-buscador GUMSe estamos incorporando la posibilidad de realizar búsquedas avanzadas de forma transparente para el usuario, aprovechando las posibilidades que ofrecen algunos buscadores, para diversificar la búsqueda. Con este planteamiento esperamos corregir los dos malos hábitos principales de los usuarios que dificultan la búsqueda: la utilización de un número bajo de términos en la consulta y la ausencia de operadores de búsqueda avanzados. El proceso de expansión de consulta, guiado por un proceso previo de desambiguación del significado, se utiliza como intermediario para facilitar la obtención de documentos relevantes.

2. ARQUITECTURA Y PROCESO DE BÚSQUEDA EN GUMSe

Los meta buscadores proporcionan una forma de acceder a múltiples motores de búsqueda mostrando un único entorno de interacción para el usuario. Aprovechando las ventajas que proporcionan, hemos desarrollado GUMSe como una plataforma de prueba que nos permita probar nuevas ideas aplicables al proceso de búsqueda en la web. La arquitectura de GUMSe (Fig. 1) está compuesta de un conjunto de agentes que se comunican entre sí mediante una red. Cada uno de ellos tiene una función específica, lo que permite incorporar nuevos mecanismos en cada uno de ellos sin que afecte al resto. Para lograr este propósito, el único requisito es respetar el formato de los mensajes que se intercambian.

Arquitectura de GUMSe

GUMSe [8] es un meta-buscador formado por un conjunto de agentes con distinta funcionalidad que se comunican entre sí a través de una red. La arquitectura de GUMSe se muestra en la figura 1. Este planteamiento permite la existencia de distintos agentes ejecutándose en máquinas diferentes. De esta forma se puede aumentar la eficiencia del sistema, ya que es posible la ejecución de las distintas tareas en paralelo. Además se permite la ejecución simultánea de varios agentes con funciones similares. Esta posibilidad conlleva un aumento de la eficiencia de la búsqueda y una reducción del tiempo de ejecución de los procesos que requieran mayor carga computacional.

El modelo de buscador propuesto se apoya en la utilización de los actuales motores de búsqueda para tratar de obtener un conjunto de documentos más relevantes para el usuario. Es decir, es un meta-buscador

que trata de mejorar la relevancia de los resultados mediante la combinación de diferentes motores de búsqueda. Este planteamiento requiere de un posterior proceso de los distintos resultados obtenidos que implica la integración y reajuste de la relevancia a la búsqueda del usuario.

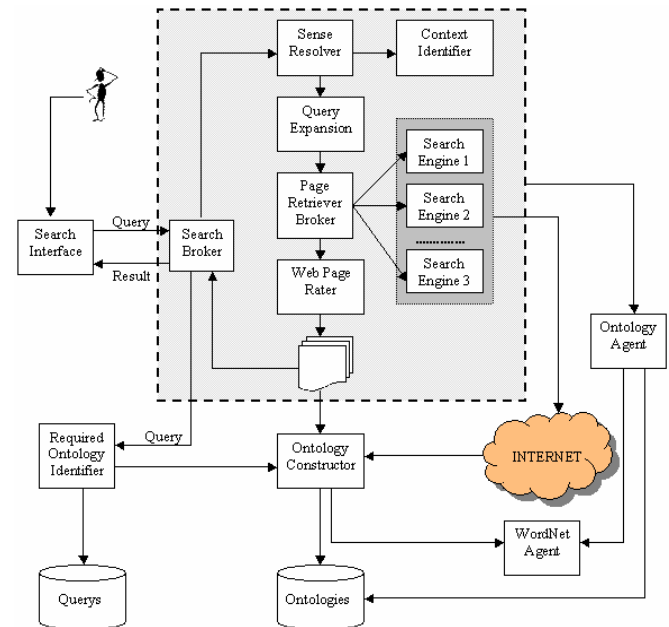


Figura 1: Arquitectura del meta-buscador GUMSe

Proceso de búsqueda

El proceso de búsqueda seguido en este modelo se puede descomponer en una serie de fases coordinadas por el agente *Search Broker*. En cada una de estas fases se va refinando sucesivamente la carga semántica de la consulta para permitir expandir los resultados de la misma con documentos relacionados conceptualmente. Las 4 fases propuestas son las siguientes:

Refinamiento del significado de la búsqueda:

Inicialmente se trata de refinar la búsqueda para evitar el mayor inconveniente de las búsquedas basadas en palabras clave, que es la técnica principalmente utilizada en los buscadores actuales. Este inconveniente es la polisemia de las palabras, es decir, la influencia de los múltiples significados que pueden tomar los distintos términos que intervienen en una consulta, provocando una desviación en la relevancia de los resultados obtenidos. Para tratar de solucionar este problema se utilizará el concepto de acepción o significado para permitir enfocar la búsqueda y mejorar los resultados. Esta etapa es necesaria si no se puede resolver la ambigüedad de forma automática. El Context Identified Agent implementa un sistema automático de desambiguación del significado. Si la desambiguación automática no tiene éxito, o si el usuario lo prefiere, se utiliza un proceso interactivo de desambiguación. Se trata por tanto, de que el usuario seleccione el significado que

mejor se adapte a sus intenciones de búsqueda, en caso de tratarse de un término con varios significados.

Expansión de la consulta: Posteriormente se utiliza la información adquirida de la fase anterior para aportar una mayor carga semántica al conjunto de consultas. Para ello, se construyen una serie de consultas adicionales a la original que permitan recuperar documentos relacionados con la consulta original del usuario. Para lograr este propósito en GUMSe se combinan varias técnicas que intentan diversificar la colección de documentos relacionados con la intención de búsqueda del usuario.

Recolección de la web: El siguiente paso consiste en lanzar las distintas consultas a una serie de motores de búsqueda para obtener una colección de páginas entre las que se encontrarán los documentos más relevantes.

Evaluación de los resultados: Por último se procede a recuperar las páginas obtenidas y mostrarlas al usuario ordenadas bajo un único criterio de relevancia. En el cálculo de la relevancia se utilizan los términos o sinónimos de las acepciones descartadas de forma que influyan de forma negativa en el cálculo de la relevancia, primando aquellos términos relacionados con la acepción correcta. De esta forma, se favorece a los documentos con la acepción seleccionada aumentando el grado de relevancia de la colección de documentos obtenidos.

3. FUNCIONAMIENTO DE LA BÚSQUEDA

Utilizando la técnica clásica de expansión [9] de consulta, obtenemos una colección de consultas adicionales a la original del usuario relacionadas semánticamente, construida por el Query Expansion Agent. La forma clásica de expansión consiste en construir consultas reemplazando o introduciendo nuevos términos relacionados con los del usuario mediante relaciones de sinonimia, hiponimia e hiperonimia. Hay que hacer notar que en las consultas con un único término es difícil obtener el dominio semántico sin la colaboración del usuario o asumiendo que la búsqueda se realiza con el significado más habitual. En las consultas con varios términos se intenta obtener la relación semántica subyacente con la ayuda de WordNet en la etapa previa de desambiguación del significado.

El primer paso, una vez identificado el significado de los términos que intervienen en la consulta, es obtener “bolsas de palabras”. Las “bolsas” son el conjunto de términos que se pueden utilizar en la expansión de consulta, y se obtienen principalmente de WordNet y las ontologías. Hay dos tipos de bolsas:

- **Bolsa de términos positivos:** son un conjunto de términos relacionados semánticamente con el

significado correcto (una vez desambiguado) de los términos de la consulta del usuario.

- **Bolsa de términos negativos:** son un conjunto de términos relacionados semánticamente con los significados descartados de los términos de la consulta del usuario.

Cada término de la bolsa tendrá un peso, que indica la fuerza de la relación (positiva o negativa). Este peso depende del tipo de relación existente entre los términos de la bolsa y los introducidos por el usuario.

Una vez determinados los términos candidatos para la expansión (junto con los originales introducidos por el usuario) se construyen las nuevas consultas. Existe un valor que determina el número de consultas expandidas que se crearán en cada proceso de búsqueda, denominado MEQ (Max Expanded Queries). Estas consultas se especifican mediante un lenguaje propio en XML.

Las nuevas consultas se pueden construir utilizando tres procedimientos distintos. Por defecto, se utilizan unos valores que determinan el porcentaje de consulta de cada tipo que se crearán (0,6 para sinonimia e hiponimia, 0,2 para variaciones morfológicas y 0,2 operadores de búsqueda). En la siguiente sección se explica cada uno de estos mecanismos. Estos valores son configurables, de forma que sea posible realizar un proceso de calibración para determinar que tipo de expansión produce mejores resultados, y en consecuencia potenciarlas. Así mismo hay que tener en cuenta el efecto de la influencia negativa a la hora de construir la nueva consulta, que se detalla a en la siguiente sección

Junto con cada nueva consulta, se calcula un factor para cada una de las consultas en función de los términos utilizados y su similitud con los originales. Este factor se denomina Medida de Similitud Conceptual (CSM o Conceptual Similarity Measure), y su cálculo depende del mecanismo de construcción de la consulta aplicado. En el cálculo se utilizan los pesos de cada término, tanto positivo como negativo. El CSM se utiliza en la siguiente fase para determinar el número de páginas que se tendrán en cuenta en la recuperación. La recuperación y posterior evaluación de todas los documentos devueltos por el buscador es inviable, ya que implicaría un alto coste computacional. Además, tampoco es práctica, ya que los usuarios por norma general no suelen pasar de la segunda pantalla de resultados, es decir, normalmente no revistan más de 20 documentos de los cuales examinaran 5 o 6 como muchos.

El siguiente paso consiste en lanzar las distintas consultas a una serie de motores de búsqueda para obtener una colección de páginas formada por documentos relevantes. Actualmente, solo se considera la utilización de Google y Altavista. Es posible también asignar un Grado de

Confianza (STG o Search Trust Grade) a cada buscador, que influye en el número de consultas que se le envían. Este número de consultas se tiene que repartir entre los diferentes buscadores que se pueden consultar. Por tanto, cada buscador recibirá un número de consultas proporcional al grado de confianza que se tenga en él (véase Figura 2). El número de consultas que recibirá un buscador S se calcula de la siguiente forma:

$$NQ(S) = MEQ * STG_S \quad (1)$$

Otro factor a tener en cuenta es el número de documentos que se recuperarán, ya que un número elevado de ellos hará la recuperación lenta e ineficiente. Por este motivo existe un número MDR (Max Document Retrieval, configurado actualmente a 30) que determina el número máximo de documentos que se recuperará de una consulta.

En el proceso de evaluación de cada una de las consultas, se consideran un número de documentos proporcional al CSM calculado en la fase anterior. Por tanto, el número de documentos recuperados está en función de la calidad de la consulta y el número máximo de documentos que se pueden recuperar. Actualmente, el número de documentos recuperado para una consulta Q con CSM_Q se calcula de la forma:

$$ND(Q) = CSM_Q * MDR \quad (2)$$

Una vez determinados el número de consultas que recibirá cada buscador y el número de documentos que cada consulta recuperará hay que enviar a cada Search Engine Agent las consultas. Cada uno de estos agentes está especializado en un buscador, lo que quiere decir que conoce el lenguaje de consulta de ese buscador, sabe como establecer la comunicación con él (enviarle una consulta) y además conoce el formato de los resultados.

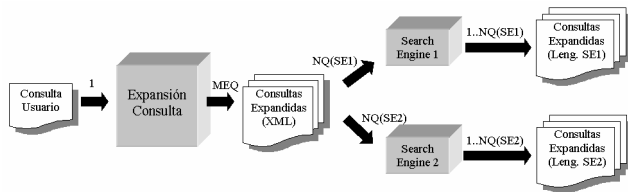


Figura 2: Proceso de distribución y traducción de las consultas expandidas.

Una vez recuperada la colección de documentos, se tiene que establecer el orden de aparición de los documentos en la pantalla de resultados. La aparición se realiza de acuerdo a un algoritmo de evaluación que estima la relevancia de cada página de acuerdo a la consulta introducida por el usuario.

Este algoritmo, para aumentar la eficiencia y rapidez de la búsqueda, debe estimar la relevancia sin recuperar cada uno de los documentos, lo que implica que no es posible

examinar su contenido. Por este motivo, se ha diseñado un algoritmo de evaluación denominado rápido (existe otro exhaustivo que si se basa en el contenido), que se basa en 4 suposiciones a la hora de establecer la valoración de un documento:

La afinidad semántica de la consulta utilizada para recuperarlo: Se supone que cuanto mayor sea la Medida de Similitud Conceptual (CSM) de la consulta utilizada para recuperar un documento más relevante será ese documento.

La posición del documento en el listado de resultados: Los buscadores tienen sus propios mecanismos de evaluación, por lo que se asume que cuanto mejor situado esté en el listado, más relevante será un documento.

La valoración del buscador utilizado: Se tiene en cuenta la fiabilidad de los resultados proporcionados por cada buscador. Se supone que cuanto mayor número de documentos le exigimos a un buscador en detrimento del resto (Grado de Confianza o STG) más relevantes son sus resultados.

Efecto “coro”: El efecto coro [10] se basa en que habitualmente distintos buscadores suelen recuperar los mismos documentos relevantes ante una misma consulta, mientras que difieren en los no relevantes. Basándonos en este principio, se aceptan como documentos más relevantes aquellos que aparecen con más frecuencia en las respuestas obtenidas a partir de diferentes consultas.

Teniendo en cuenta las cuatro suposiciones anteriores, la medida de evaluación rápida se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$Ranking_{rapid}(D) = \frac{DQ}{\sum_{i=1}^{\alpha} \sqrt{STG_i} * P_i * CSM_i} \quad (3)$$

Donde DQ es el número de consultas en las que aparece el documento D en la respuesta, P_i es la posición que ocupa D en la respuesta de la consulta i (siendo la mejor posición la posición 1), CSM_i es la medida de similitud conceptual de la consulta i y STG_i es el grado de confianza que se tiene en el buscador que realiza la consulta i. El parámetro α se utiliza para suavizar la dependencia de los resultados del buscador, sin dejar de tenerlo en cuenta. En nuestros experimentos toma el valor 2.

Esta medida prima el efecto “coro”, es decir, cuanto más frecuentemente aparezca un documento en los resultados, mayor será su grado de relevancia. Sin embargo, no deja

de lado el resto de factores a la hora de calcular su relevancia.

4. MECANISMOS DE CONSTRUCCIÓN DE NUEVAS CONSULTAS

Como se ha comentado anteriormente, GUMSe utiliza diferentes mecanismos para la construcción de las nuevas consultas. Cada uno de ellos trata de mejorar aspectos concretos de la búsqueda, con la intención de ser un intermediario que de forma transparente intente solucionar algunos inconvenientes presentes en la búsqueda, y por tanto, obtener buenos resultados. Cada consulta se crea utilizando un lenguaje de especificación propio en XML. El algoritmo empleado tiene dos fases, en cada una de las cuales se tiene en cuenta a la hora de construir la consulta los términos positivos (en la primera fase) y los términos negativos. La primera fase se denomina influencia positiva, y la segunda influencia negativa.

Influencia positiva

Esta fase construye la nueva consulta partiendo de cero empleando únicamente los términos pertenecientes a la “bolsa de palabras” positiva. Se emplean diferentes métodos a la hora de combinar los términos que formarán la nueva consulta.

Relaciones de sinonimia e hiponimia: Se utilizan términos que posean relaciones de sinonimia e hiponimia con los términos de la consulta del usuario. Estos términos se extraen de WordNet. Cada consulta se construye combinando nuevos términos mediante los operadores lógicos clásicos que implementan todos los buscadores hoy en día.

Variaciones morfológicas: La mayoría de buscadores devuelven resultados distintos cuando se utiliza en dos consultas un término en singular, y en la otra el mismo término en plural (como sucede en Google). Normalmente los usuarios suelen introducir los términos en singular, pero los documentos que poseen el plural de este término, también son relevantes para la búsqueda.

Por tanto, se utilizan técnicas de lematización (stemming) para recuperar un conjunto más amplio de documentos. En un primer momento se utiliza únicamente las formas singular y plural (unidas en la misma consulta mediante el operador lógico OR). El inconveniente de esta técnica es que depende del idioma, aunque por ahora este factor no nos preocupa

Operadores de búsqueda avanzados: Quizá este sea el aspecto más novedoso del proceso de consulta. Se pretende dedicar un porcentaje de las consultas para la

incorporación en ellas de aspectos de búsqueda avanzados. De esta forma, es posible crear consultas que busquen los términos de la consulta del usuario en el título del documento, en la URL, que estén próximas entre sí, que busque con palabras relacionadas (algunos buscadores permiten indicar que busque el término y los que tengan alguna relación con él extraída).

Influencia negativa

En esta segunda fase se añaden a la consulta los términos pertenecientes a la bolsa negativa mediante la utilización del operador lógico NOT. Este tratamiento no se realiza en todas las nuevas consultas, sino que depende de un valor que determina el grado de aplicación. Actualmente, este grado de aplicación vale 0,3, lo que significa que existe un 30% de probabilidad de introducir la influencia negativa en una consulta expandida.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El aspecto más novedoso consiste en añadir a la colección de consultas expandidas un porcentaje de consultas que trate de aprovechar las características avanzadas de los buscadores. Mediante este mecanismo pretendemos obtener resultados más relevantes incorporando a la búsqueda nuevos criterios que permitan diversificar la búsqueda y mejorarla. Pretendemos investigar la forma en que se puede mejorar la búsqueda mediante la utilización de características de búsqueda avanzadas experimentando con los distintos tipos de operadores y porcentaje de consultas que los incluyan.

Queda mucho trabajo que realizar todavía en la obtención de un sistema eficiente. El aspecto principal que tratamos de mejorar es la calibración de los parámetros que afectan al número de consultas de cada tipo que se construyen. Intentamos obtener una proporción que mejore los resultados, en vez de dificultarlos. Para conseguir este objetivo, es necesario todavía realizar muchas pruebas, así como someterlo a un proceso estandarizado de evaluación, como por ejemplo TREC [11], que nos permita obtener información objetivo sobre el funcionamiento de nuestro sistema.

Actualmente, la medida de la similitud de cada consulta con la original se realiza mediante la utilización de pesos fijos que dependen del tipo de relación. En un futuro se pretende mejorar este aspecto utilizando la noción de distancia semántica basándonos en WordNet [12]. Quedan muchos aspectos mejorables de la arquitectura propuesta, sin embargo, nuestro planteamiento se basa en un estudio y mejora del sistema progresivo para afrontar los problemas presentes en la búsqueda de Internet.

Referencias

- [1] Miller, G.: WORDNET: An Online Lexical Database, *International Journal of Lexicography*, 3(4), 1990.
- [2] Aula, A. & Käki, M. (2003) Understanding Expert Search Strategies for Designing User-Friendly Search Interfaces. In Isaías, P. & Karmakar, N. (Eds.) *Proceedings of IADIS International Conference WWW/Internet 2003*, Volume II, pp. 759-762. IADIS Press.
- [3] Jansen, B. J. and Spink, A. 2004. An Analysis of Web Searching by European Alltheweb.com Users. *Information Processing & Management*. 41(2), 361-381.
- [4] Furnas, G. W.; Landauer, T. K.; Gomez, L. M.; Dumais, S. T.: The Vocabulary Problem in Human-System Communication, *Communications of the ACM*, Vol 30, No. 11, 1987, pp. 964-971.
- [5] M. Gómez, J. M. Abasolo: Improving meta-search by using query-weighting and numerical aggregation operators, in *Proceedings Information Processing and Magement of Uncertainty conference*, IPMU 2002.
- [6] Jansen, B.; Spink, A.; Bateman, J.; Saracevic, T.: Real Life Information Retrieval: A Study Of User Queries On The Web, in *Proceedings SIGIR FORUM Spring 98*, 1998.
- [7] Silverstein, C.; Henzinger, M.; Marais, H.; Moricz, M.: Analysis of a Very Large Web Search Engine Query Log, in *Proceedings SIGIR FORUM Fall 99*, 1999.
- [8] Olivas, J. A., de la Mata, J. and Serrano-Guerrero, J.: Ontology Constructor Agent for improving Web Search with GUMSe, in *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems IPMU 2004*, Perugia, Italia, pp 1341-1348.
- [9] Efthimiadis, E. N.: Query expansion, in *M. E. Williams (Ed), Annual Review of Information Science and Technology*, Vol. 31., 1996, pp. 121-187.
- [10] Vogt, C. C.: Adaptive Combination of Evidence for Information Retrieval, *PhD thesis*, University of California, San Diego, 1999.
- [11]Text Retrieval Conference (TREC), <http://trec.nist.gov/> (Visitado Mayo 2004).
- [12] Budanitsky, A.; Hirst, G.: Semantic distance in WordNet: An experimental, application-oriented evaluation of five measures, in *Workshop on WordNet and Other Lexical Resources, Second meeting of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics*, Pittsburgh, 2001.

TÉCNICAS DIFUSAS Y NO-DIFUSAS PARA EL CLUSTERING DEL CONTENIDO DE PÁGINAS EN UN SITIO WEB

David Nettleton

Grupo de Investigación en
Recuperación de Información y
Minería de Datos en la Web,
Dpto. de Tecnología,
Universitat Pompeu Fabra,
Passeig de Circumval·lació, 8
08003 Barcelona.
david.nettleton@upf.edu

Bàrbara Poblete

Grupo de Investigación en
Recuperación de Información y
Minería de Datos en la Web,
Dpto. de Tecnología,
Universitat Pompeu Fabra,
Passeig de Circumval·lació, 8
08003 Barcelona.
barbara.poblete@upf.edu

Resumen

En este artículo comparamos dos algoritmos de *clustering*, uno difuso y otro no difuso, para agrupar los documentos de un sitio Web. En la mayoría de los casos el método ‘categórico’ *k-Means* es utilizado como método ‘de facto’ para el clustering de documentos en la Web, así como otras técnicas no-difusas. Es por este motivo que en este estudio realizamos una comparación de *k-Means* y el enfoque de la estadística clásica, respecto al enfoque difuso, representando por Fuzzy *c-Means*. Dentro de esta evaluación también consideramos algunas características particulares de los documentos encontrados en la Web, como por ejemplo, su alta dimensionalidad, y proponemos una solución novedosa a este problema basada en las covarianzas difusas. Presentamos los resultados del proceso de un conjunto de documentos de prueba, con datos extraídos a partir de documentos reales, y que sirven para contrastar los diferentes enfoques.

Palabras Clave: Clustering, Fuzzy/Difuso, Crisp/No-difuso, Internet, Web, Covarianzas, Minería de Datos, Término, Documento.

1 INTRODUCCIÓN

El presente artículo forma parte del trabajo en curso siendo realizado por el “Grupo de Investigación en Recuperación de Información y Minería de Datos en la Web”, de la Universidad Pompeu Fabra, Barcelona. El

trabajo continúa la línea de investigación en la aplicación de diferentes técnicas de clustering y modelización[10,11], incluyendo técnicas difusas, a datos de resultados de búsquedas en Internet. Ahora aplicamos las técnicas a una nueva área, esto siendo la agrupación de documentos de un sitio Web. Además introducimos un nuevo aspecto, la reducción de la dimensionalidad, contrastando dos técnicas, una difusa y otra no-difusa, para este fin. Los resultados tienen una aplicación práctica que será su incorporación en el sistema de minería Web [3], desarrollado por el grupo de investigación, que utiliza el clustering como medio para mejorar la organización y la estructura de un sitio Web.

2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA A RESOLVER

El problema a resolver se trata del clustering de documentos Web a base de su contenido. Dentro de este entorno, cada documento puede ser representado por un gran número de variables descriptivas, que representan las frecuencias de los términos en el documento.

- Las variables representan los términos y definen la anchura de la matriz de datos de entrada, y una colección de documentos representen las filas de casos.
- Los documentos Web son distintos de los documentos textuales en general debido al alto número de variables descriptivas (términos), y dado que están compuestas de documentos de una mayor heterogeneidad.
- Además, deseamos que el proceso de los datos sea de los documentos de un sitio Web concreto, en vez de la Web en general. Los documentos al interior de un sitio tienen un grado de similitud entre sí, significativamente mayor que la existente en general entre documentos Web.

Por consiguiente, proponemos que el enfoque difuso podría ser útil dado la mayor dificultad en clasificar cada documento de forma nítida en un único cluster.

3 ESTADO DEL ARTE – CLUSTERING DE DOCUMENTOS WEB Y REDUCCIÓN DE LA DIMENSIONALIDAD

3.1. CLUSTERING

Uno de los algoritmos citados en la literatura como una técnica efectiva para realizar el clustering de datos textuales de una gran dimensionalidad, y específicamente aplicado al clustering de documentos Web, es el “spherical k-Means” [6]. Este algoritmo es una versión de k-Means que emplea el coseno como medida de distancia. Se emplea para el clustering de texto, en el cual cada documento queda representado por un vector de ocurrencias de términos (modelo de espacio vectorial). El clustering de documentos en la Web en general ha sido estudiado en la literatura principalmente como una herramienta para mejorar la organización de los resultados de un motor de búsqueda en la Web [12]. También el clustering ha sido empleado como una forma automática de clasificación de documentos para directorios de categorías temáticas [1]. Indicamos que, en la literatura, no existen estudios significativos enfocados en realizar clustering y reducción de términos de documentos en sitios Web concretos, y que además incluyen una evaluación del valor de utilizar un método difuso sobre este tipo de documentos.

3.2. REDUCCIÓN DE LA DIMENSIONALIDAD EN EL CONTEXTO DEL CLUSTERING DE TÉRMINOS Y DOCUMENTOS

En esta área, citamos primero la representación de “Latent Semantic Indexing” [4], que consiste en la extracción de relaciones “útiles” entre términos clave (keywords) y documentos. Emplea técnicas estadísticas para calcular y cuantificar estas asociaciones. El método reside en la construcción de una matriz (conceptos – documentos), que resulta de la aplicación del método de descomposición SVD (Singular Value Decomposition) al término clave por la matriz de documentos. La ventaja principal de este método es la reducción de dimensiones desde $T \times N$ (dónde T es el número de términos en los documentos y N es el número de documentos) hasta $S \times N$ (dónde S es el número de conceptos). En general, permite identificar la relación entre términos. Además de esta técnica específica (SVD), también existen las técnicas estadísticas habituales de análisis factorial, y el análisis de correlación y de covarianzas, y la selección de factores mediante métodos de filtrado y de envoltura[2].

4 DESCRIPCIÓN DE NUESTRO ENFOQUE

Ante la problemática del clustering de documentos de sitios en la Web, la solución que proponemos es emplear un enfoque difuso, como alternativa o complemento para las técnicas principalmente ‘categóricas’ utilizadas habitualmente para los documentos Web. Para este fin, contrastamos Fuzzy c-Means para el clustering ‘difuso’ con k-Means para el clustering ‘categórico’. Según la tipología del conjunto de documentos, podemos elegir el enfoque difuso como el más adecuado. Parte de la aplicación de técnicas difusas sobre datos de alta dimensionalidad consiste en plantear una correcta reducción de dimensiones para el algoritmo difuso. Para esto proponemos una técnica de ‘análisis de covarianzas difusas’, para la reducción de la dimensionalidad en el preproceso de los datos de entrada a Fuzzy c-Means. Lo contrastamos con su equivalente “no-difuso”, la covarianza estadística estándar.

4.1. CLUSTERING: K-MEANS Y FUZZY C-MEANS

k-Means [7]: es una técnica común de clustering, que establece una distancia entre los casos mediante la selección de un número predefinido de casos. k-Means usa los casos pre-seleccionados como “semillas” en el proceso de construir los clusters. Se asigna un cluster a cada caso, en un proceso iterativo. El cluster asignado a cada caso es el más “cerca” al caso, y la distancia se mide entre el caso para ser incluido y el valor medio para todos los clusters. El objetivo del proceso del algoritmo k-Means es el de minimizar una función de error cuadrado. **Fuzzy c-Means** [5]: en contraste con k-Means, FCM puede asignar un caso a más de un cluster, con diferentes ‘grados de pertenencia’. Como primer paso, Fuzzy c-Means calcula los centros de cluster de los clusters difusos para el número elegido de clusters. Entonces calcula el grado de pertenencia de cada caso, respecto a cada cluster, y para cada variable de entrada. Fuzzy c-Means se basa en la minimización de la siguiente función objetiva:

$$J_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C u_{ij}^m \left\| x_i - c_j \right\|^2, \quad (1)$$

$$1 \leq m < \infty$$

donde m es cualquier número real mayor que 1, x_i es el i -ésimo caso de datos, u_{ij} es el grado de pertenencia de x_i en cluster j , c_j es el centro de cluster j , y $\|*\|$ es cualquier norma que expresa la similitud entre un caso y el centro de cluster.

4.2. CONSIDERACIONES: FUZZY C-MEANS

El algoritmo de Fuzzy c-Means en su versión “estándar” minimiza la varianza intra-cluster (y maximiza la varianza

inter-cluster), de modo parecido a k-Means. Sin embargo, también hereda algunos inconvenientes de k-Means: por ejemplo, las soluciones representadas por mínimos locales y el hecho de que los resultados están condicionados por la asignación inicial (aleatoria) de los pesos en la matriz u . Como una solución pragmática a estos problemas, cuando procesamos los datos con Fuzzy c-Means, comprobamos varias ejecuciones con diferentes asignaciones aleatorias de u . Además, hemos elaborado una medida propia para la distancia inter-cluster de Fuzzy c-Means, usando un cálculo a partir de la matriz v de centros de cluster/variable, y que explicamos a continuación. Observamos que v_{jd} representa el valor para cluster j y dimensión d . Es decir, con referencia a la fórmula (1), c_j representa el centro del cluster j con dimensionalidad D , y se implementa como un vector de con D dimensiones. Entonces, la distancia inter-cluster para dimensión d es igual a:

$$\phi_d = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \|v_j - v_i\| \quad (2)$$

y la distancia inter-cluster es igual a:

$$\Phi = \sum_{d=1}^D \phi_d \quad (3)$$

donde D = número de dimensiones y k = número de clusters. Elegimos la solución que proporciona un resultado de clustering coherente con la solución esperada y que además maximiza la distancia inter-cluster. En la Sección 5.2.7 indicamos algunos valores resultantes para Φ con los datos de prueba. Añadimos que, para poder comparar entre sí a los resultados para diferentes números de clusters y de dimensiones, es necesario tomar el promedio en cada suma. Es decir, para las dos sumas interiores, dividir cada una por el número de clusters, y para la suma exterior, dividir por el número de dimensiones. En consecuencia de las pruebas con el conjunto de datos, decidimos usar la Norma Euclideana como parámetro de proceso de Fuzzy c-Means, para el clustering con todos los 40 términos y para el clustering con los 12 términos.

4.3. REDUCCIÓN DE LA DIMENSIONALIDAD

En esta sección presentamos dos enfoques, uno difuso y otro no difuso, para la reducción de la dimensionalidad de variables que representan los términos en documentos. Estas dos técnicas nos servirán para contrastar los resultados del enfoque difuso respecto al enfoque no difuso.

4.3.1. Preproceso de las variables usando covarianzas estándar (no difusas)

Intuitivamente, la covarianza es la medida de variación mutua de dos variables aleatorias. Es decir, la covarianza

tendrá un valor positivo más grande para cada pareja de valores que difieren del valor medio con el mismo signo (+ o -). Asimismo, la covarianza tendrá un valor negativo más grande para cada pareja de valores que difieren del valor medio con signo distinto (+ o -). Si la covarianza mutua es cero entre dos variables aleatorias, esto indica que no existe una correlación entre ellas. Definición de la covarianza: suponemos que existe una muestra de n pares de observaciones de dos variables X e Y ,

$$X: x_1 x_2 \dots x_n$$

$$Y: y_1 y_2 \dots y_n$$

$$\text{Sea } x' = \frac{1}{n} \sum x_i, \quad y' = \frac{1}{n} \sum y_i.$$

La siguiente se llama la covarianza de la muestra:

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x') (y_i - y') \quad (4)$$

4.3.2. Preproceso de las variables usando covarianzas difusas

Este algoritmo fue presentado por la primera vez por Nettleton en [9]. Es una variación del método presentado por Gustafson y Kessel en [8], que calcula las covarianzas difusas entre casos. En [9] se extendió este método para calcular las covarianzas difusas entre variables difusas. Esto permite identificar las variables cuya “covarianza” esta por encima de un determinado umbral (definido mediante inspección de los valores resultantes), y usar sólo estas variables como entradas al clustering. A continuación se presenta formalmente el cálculo de las covarianzas difusas. Sea u_i la matriz de grados de pertenencia de n casos relativos a *partición i*; u_{ik} es el grado de pertenencia de caso k a *partición i*; x_k es el vector de características (datos) pertenecientes al caso k ; v_i es el centroide de *partición i*; m es un factor de ponderación que define el *grado difuso*; $(x_k - v_i)(x_k - v_i)$ es una distancia parecida a la de *Mahalanobis*. Medimos el grado de relación entre una variable V_1 con el centroide de una *partición* C_1 . Entonces medimos el grado de relación de una segunda variable V_2 al centroide de la misma *partición* C_1 . La distancia mide la diferencia entre el grado de relación de V_1 a C_1 y el grado de relación de V_2 a C_1 , es decir, $d(V_1, C_1) - d(V_2, C_1)$. Por consiguiente, el cálculo de las covarianzas difusas entre las variables en *partición i* se representa con la siguiente fórmula:

$$C_{fi} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^n (u_{ik})^m \sum_{q=1}^p \|d(V_1, C_1) - d(V_2, C_1)\| \quad (5)$$

donde

$$d(V_1, C_1) = (x_{jk} - v_i)(x_{jk} - v_i)$$

y

$$d(V_2, C_1) = (x_{qk} - v_i)(x_{qk} - v_i)$$

siendo p el número de variables, y n el número de casos.

5 APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS A LOS DATOS DE PRUEBA Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

5.1. DATOS DE PRUEBA

En orden de probar y contrastar el proceso difuso con el proceso no-difuso, hemos preparado una colección de documentos obtenida de un portal Web dirigido principalmente a estudiantes universitarios. El contenido del vocabulario es más heterogéneo que muchos sitios, aunque sigue siendo bastante más homogéneo que los documentos encontrados en la Web global. En la colección, hay algunos documentos que clasifican de forma única en categorías bien definidas, algunos documentos que tienen una clasificación ambigua, y otros no se clasifican (ruido). La matriz de datos de entrada esta en formato “denso”, en vez de “sparse”. Esto quiere decir que si un valor esta ausente, se rellene su posición con el valor cero. Dicha matriz tiene la siguiente estructura: 40 columnas (variables o términos) por 10 filas (documentos). Cada elemento o dato representa la frecuencia (sin normalizar) del término representado por la columna correspondiente. Cada término corresponde a una columna, desde la columna 1 hasta 40 y un valor cero (frecuencia cero) indica que el término no existe en el documento correspondiente.

Los términos son los siguientes: {agosto; alfaguara; aquí; añadir; biotecnología; brown; cable; carreras; código; construcción; correo; cuerpo; cultura; encuentro; escribenos; escritoras; foros; ingeniería; instituto; juana; loca; manuales; mapuche; matemática; metropolitana michio; minería; ministerio; nishihara; pergamino; portal; presenta; región; santiago; seducción; serena; superior; tecnología; umbriel; uweb}. Así que, en columna 1, fila 1, un valor de 3 indicaría que el término “agosto” tiene una frecuencia de 3 en documento 1. Asimismo, un valor de cero en columna 3, fila 3, indicaría que el término “aquí” no existe en documento 3. En el fichero de prueba, los términos fueron convertidos a minúscula y los acentos eliminados. Los términos y los documentos fueron seleccionados para poder contrastar las técnicas fuzzy y non-fuzzy y la reducción de atributos. El conjunto de documentos de prueba tiene la siguiente forma: **documentos (filas) 1 y 2:** no se parezcan entre si ni a ningún otro documento; **documentos 3 al 7:** son 5 documentos muy similares; **documentos 8 al 10:** son 3 documentos similares a documentos 3 al 7 pero con algunos términos adicionales.

5.2. RESULTADOS

En esta Sección presentamos los resultados del clustering y reducción de atributos usando la técnica difusa y la no-difusa. En Secciones 5.2.1 y 5.2.2 presentamos y comentamos los resultados del clustering usando k-Means y Fuzzy c-Means, respectivamente. En Secciones 5.2.3 y

5.2.4 presentamos los resultados de la reducción de atributos usando covarianzas estándar y covarianzas difusas, respectivamente. En la Sección 5.2.5 presentamos los resultados del clustering con k-Means usando los 12 atributos indicados por las covarianzas estándar. Entonces, en la Sección 5.2.6, presentamos los resultados del clustering con Fuzzy c-Means, usando sólo los 12 atributos indicados por las covarianzas difusas. Por último, en la Sección 5.2.7, comentamos la calidad de los clusters para Fuzzy c-Means, en términos del criterio de distancia inter-cluster.

5.2.1. Clustering del conjunto de documentos con k-Means

Los resultados para el número de clusters igual a 4 fueron: cluster 1, documento 1; cluster 2, documento 2; cluster 3, documentos 3 al 7; cluster 4, documentos 8 al 10. Estos resultados fueron exactamente los esperados.

5.2.2. Clustering del conjunto de documentos con fuzzy c-Means

Con referencia a la Tabla 1, los resultados para el número de clusters igual a 4 fueron: documento 1 tiene una pertenencia muy alta a cluster C2; documento 2 tiene una pertenencia moderada a cluster C1 y una pertenencia menor a C3, C4 y C2, en aquel orden; documentos 3 al 6 tienen una pertenencia muy alta a cluster C1; documento 7 tiene una pertenencia muy alta a cluster C4 y pertenencia “residual” a C1, C3 y C2; documentos 8 y 10 tienen una pertenencia alta a cluster C3; documento 9 tiene una pertenencia principal a cluster C3, aunque en menor grado que documentos 8 y 10; documento 9 también tiene una pertenencia significativa a cluster C4.

Tabla 1: FCM. Grados de pertenencia para clusters=4, 10 documentos y 40 variables de entrada.

	C1	C2	C3	C4
D1	0.0007	0.9980	0.0007	0.0007
D2	0.4109	0.1305	0.2503	0.2083
D3	0.9863	0.0020	0.0047	0.0070
D4	0.9863	0.0020	0.0047	0.0070
D5	0.9563	0.0066	0.0147	0.0224
D6	0.9671	0.0050	0.0115	0.0164
D7	0.0318	0.0094	0.0260	0.9328
D8	0.0746	0.0360	0.7720	0.1173
D9	0.1406	0.0730	0.3994	0.3870
D10	0.1348	0.0777	0.6535	0.1341

Si comparamos estos resultados con los de k-Means, observamos que documento 1 tiene el mismo resultado, con un cluster propio bien distinguido (C2). Documento 2, en cambio, ya no sigue el patrón “hard” y tiene su pertenencia esparcida por los 4 clusters. Documentos 2 al 6 tienen el mismo resultado que k-Means, siendo asignado a un cluster bien definido (C1). Documento 7 no tiene la misma asignación que k-Means y parece tener un

cluster propio (C4) con una alta pertenencia. Documentos 8 y 10 presentan el mismo resultado que k-Means, con un cluster propio (C3), aunque con una distribución menor de su pertenencia a otros clusters. Por último, documento 9 tiene su pertenencia distribuida entre C3 y C4. Estos resultados son coherentes con la selección de términos en documentos 7 y 9, que tienen unos términos en común. El resultado de documento 2 parece una consecuencia de la selección aleatoria de términos.

5.2.3. Resultados de la reducción de variables usando covarianzas estándar (no-fuzzy)

Las covarianzas de las frecuencias de los términos fueron calculadas y ordenadas de forma decreciente. A partir del gráfico de la Figura 1, un umbral fue definido a partir del doceno término, y los primeros 12 términos fueron seleccionados. Los 12 términos seleccionados a partir de sus valores de covarianza fueron los siguientes, dónde el primer número es su posición en el fichero original, y el último número es la covarianza: {40, uweb, 18.224}, {5, biotecnología, 16.74}, {10, construcción, 16.74}, {18, ingeniería, 16.74}, {19, instituto, 16.74}, {24, matemática, 16.74}, {28, ministerio, 16.74}, {31, portal, 16.74}, {35, seducción, 16.74}, {20, juana, 16.6}, {36, serena, 16.058}, {7, cable, 15.586}.

5.2.4. Resultados de la reducción de variables usando covarianzas difusas

Las covarianzas difusas de las frecuencias de los términos fueron calculadas, según la fórmula detallada en la Sección 4, y ordenadas de forma decreciente. A partir del gráfico de la Figura 2, un umbral fue definido a partir del doceno término, y los primeros 12 términos fueron seleccionados. Los 12 términos seleccionados a partir de sus valores de covarianza difusa fueron los siguientes, dónde el primer número es su posición en el fichero original, y el último número es la covarianza: {7, cable, 640.9}, {27, minería, 462.574}, {13, cultura, 256.008}, {23, mapuche, 251.892}, {30, pergamino, 205.118}, {3, aquí, 195.053}, {33, región, 191.657}, {21, loca, 190.285}, {1, agosto, 172.322}, {10, construcción, 170.232}, {34, santiago, 158.012}, {14, encuentro, 154.706}. Si comparamos el gráfico de la Figura 1, que representa las covarianzas estándar, con el gráfico de la Figura 2, que representa las covarianzas difusas, observamos en la Figura 2 una caída inicial más abrupta y a partir del caso 13, una disminución más suave. En contraste, la Figura 1 presenta una caída inicial más suave terminando con una disminución abrupta a partir de caso 36. Observamos que las covarianzas estándar y las covarianzas difusas han elegido, respectivamente, dos conjuntos de términos distintos entre sí. Este resultado es coherente, dado que existe más de un conjunto de términos que puede particionar los 10 documentos correctamente en 4 clusters.

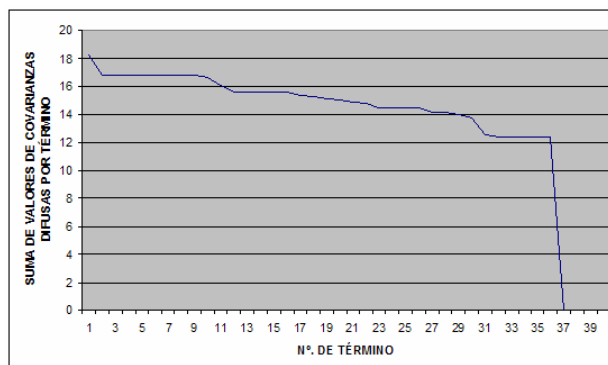


Figura 1: Gráfico del valor de la covarianza estándar (eje y) por el Id. de la variable (eje x), estos siendo ordenados de forma decreciente por la covarianza.

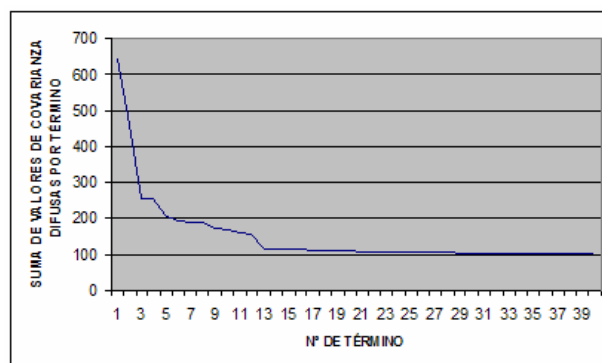


Figura 2: Gráfico del valor de la covarianza difusa (eje y) por el Id. de la variable (eje x), estos siendo ordenados de forma decreciente por la covarianza.

5.2.5. Clustering k-Means usando solo las variables indicadas por las covarianzas estándar

Los resultados para el número de clusters igual a 4 fueron: cluster 1, documento 1; cluster 2, documento 2; cluster 3, documentos 3 al 7; cluster 4, documentos 8 al 10. Estos resultados fueron exactamente los esperados.

5.2.6. Clustering Fuzzy c-Means usando solo las variables indicadas por las covarianzas difusas

En la Tabla 2, se ven los resultados del clustering difuso con las variables seleccionadas por las covarianzas difusas. Para documentos 1 al 7, se observa que los resultados son muy consistentes con los del clustering de k-Means, con grados de pertenencia igual a 1. Documentos 1 y 2 tienen sus propios clusters C2 y C4, respectivamente, y documentos 3 al 7 tienen su propio cluster C1. En el caso de documentos 8 al 10, se ha mantenido la característica de pertenencia difusa, con asignación principal al cluster C3. Con referencia a filas D8 hasta D10 de Tabla 2, y en términos de los datos originales, podemos indicar que los vectores que corresponden a D8 a D10 poseen menos valores cero que los demás documentos y las frecuencias tienden a ser más

altas. Esta característica quedó acentuada en el conjunto reducido de términos.

Tabla 2: FCM. Grados de pertenencia para clusters=4, 10 documentos y 12 variables de entrada.

	C1	C2	C3	C4
D1	0.0000	1.000	0.0000	0.0000
D2	0.0000	0.0000	0.0000	1.000
D3	1.000	0.0000	0.0000	0.0000
D4	1.000	0.0000	0.0000	0.0000
D5	1.000	0.0000	0.0000	0.0000
D6	1.000	0.0000	0.0000	0.0000
D7	1.000	0.0000	0.0000	0.0000
D8	0.0223	0.0167	0.9412	0.0197
D9	0.0151	0.0110	0.9608	0.0132
D10	0.0806	0.0453	0.8210	0.0531

5.2.7. Calidad del Clustering – Fuzzy c-Means

En el caso de Fuzzy c-Means, en la Sección 4.2 definimos una medida para la distancia inter-cluster, el objetivo siendo de maximizar esta distancia. En el caso del clustering con 40 términos, el cálculo resultó en un valor promedio de 0.6325 para 3 clusters y 0.6449 para 4 clusters. Esto es coherente con el hecho de que la partición de 4 clusters es la que ajustaba mejor a la solución correcta para el conjunto de los 10 documentos de prueba. En el caso del clustering con 12 términos, el cálculo resultó en un valor promedio de 0.6960 para 3 clusters y 0.7963 para 4 clusters. Otra vez, este resultado es coherente para la mejor solución de 4 términos, y además, según este criterio, indica una mejora en la calidad de los clusters en el caso del conjunto menor de 12 términos de entrada, respecto al conjunto completo de 40 términos.

6 RESUMEN

En este artículo hemos presentado y contrastado una técnica difusa con otra no-difusa para el clustering de documentos Web. Al comparar los resultados, hemos observado una consistencia entre los clusters generados por ambas técnicas, y por los resultados generados por las covarianzas difusas. Los grados de pertenencia han identificado diversas matices en las asignaciones de términos en los documentos que fueron perdidos en la asignación ‘crisp’. Un resultado significativo ha sido el hecho de que dos conjuntos de términos distintos, elegidos usando dos tipos de covarianzas distintas, han dado resultados de clustering muy parecidos. Este indica otra vez que el uso de la técnica difusa ha desvelado una solución válida y distinta a la técnica no-difusa. También, hemos conseguido el mismo resultado de clustering usando sólo 12 de los 40 términos originales, una reducción del 70% en el número de entradas. Por último, hemos definido una medida propia para evaluar la calidad del clustering de Fuzzy c-Means. Futuras líneas de trabajo incluyen pruebas con variantes del algoritmo Fuzzy c-

Means, con otras técnicas de reducción de la dimensionalidad y conjuntos de documentos de mayor tamaño y diversidad. Por último, proponemos optimizar el código de nuestra versión del algoritmo Fuzzy c-Means para procesar una mayor dimensionalidad de documentos y así demostrar la escalabilidad de la solución.

Referencias

- [1] Adami, G., Avesani, P., Sona, D. Clustering documents in a web directory. *Proc. 5th ACM Int. Workshop on Web Information and Data Management*. New Orleans, USA. Pág. 66-73, 2003.
- [2] Aguilera, J., del Jesus, M., Herrera, F. Hibridación de Métodos Filtro y de Envoltura para Selección de Características. *VIII Conf. de la Asoc. Esp. para la Inteligencia Artificial*, Nov. 1999, Vol. I, 58-63.
- [3] Baeza-Yates, R., Poblete, B. A Website Mining Model Centered on User Queries. *European Web Mining Forum (EWMF 2005)*. Oporto, Portugal. 2005. Pág. 3-15.
- [4] Berry, M., Dumais, S., Shippey, A. A Case Study of Latent Semantic Indexing, *Technical Report: UT-CS-95-271*, University of Tennessee, USA, 1995.
- [5] Bezdek, J.C. Pattern recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms. *Plenum Press*, 1981.
- [6] Dhillon, I., Modha, D. Concept decompositions for large sparse text data using clustering, *Machine Learning*, 42(1), Pág. 143–175, 2001.
- [7] Duda, R., Hart, P. Pattern Classification and Scene Analysis. *Wiley*, 1973.
- [8] Gustafson, D.E., and Kessel, W., Fuzzy Clustering with a Fuzzy Covariance Matrix, in *Proc. IEEE-CDC, Vol. 2 (K.S. Fu, Ed.)*, Pág. 761-766, IEEE Press, Piscataway, New Jersey, (1979).
- [9] Nettleton, D.F., Fuzzy covariance analysis, aggregation and input selection for fuzzy data. *IKBS '98. Int. Conf. on Knowledge Based Computer Systems*. Mumbai, India, Pág. 261-272, 1998.
- [10] Nettleton, D., Baeza-Yates, R. Web Retrieval: techniques for the aggregation and selection of queries and answers, (in Spanish), *I Spanish Symposium on Fuzzy Logic and Soft Computing*, Granada, Spain, Sept. 2005, Pág. 183-190.
- [11] Nettleton, D. Clustering and Aggregation of Web Query Session Data for User Profiling. *Proceedings of Modeling Decisions in Artificial Intelligence, MDAI 2006*, Tarragona, Spain, Abril 2006.
- [12] Zamir, O., Etzioni, O. Web document clustering: a feasibility demonstration. *Proc. 21st annual int. ACM SIGIR conf. on Research and Development in Information Retrieval*. Melbourne, Australia. Pág. 46 – 54, 1998.

UN SISTEMA DE RECOMENDACIONES LINGÜÍSTICO DIFUSO PARA FILTRAR RECURSOS EN BIBLIOTECAS DIGITALES UNIVERSITARIAS.

C. Porcel, M. Luque
Dpto. de Informática y
Análisis Numérico,
Universidad de Córdoba
{carlos.porcel, mluque}@uco.es

A.G. López-Herrera
Dpto. de Informática,
Universidad de Jaén
aglopez@ujaen.es

S. Alonso, L. Hidalgo,
E. Herrera-Viedma
Dpto. Ciencias de la
Computación e I.A.,
Universidad de Granada
{lhidalgo, salonso, viedma}@decsai.ugr.es

Resumen

La Web está provocando cambios en los procesos de acceso a la información e influyendo en el desarrollo de otros medios de información, como periódicos, revistas, bibliotecas, etc. Como en la Web, el crecimiento constante y continuo de información es uno de los problemas fundamentales de las *Bibliotecas Digitales Universitarias* (BDU). Por ello, creemos que es posible aplicar herramientas similares a las usadas en la Web para facilitar el acceso a la información en las BDU. Los *Sistemas de Recomendaciones* (SR) son herramientas que evalúan y filtran la gran cantidad de información disponible en la Web para ayudar a los usuarios en sus procesos de acceso a la información. En este trabajo, presentamos un modelo de SR lingüístico difuso para ayudar a investigadores y estudiantes a filtrar recursos de información, y así mejorar los servicios proporcionados por las BDU.

Palabras clave: sistemas de recomendaciones, modelado lingüístico difuso, filtrado de información, bibliotecas digitales universitarias.

1 INTRODUCCIÓN

Las bibliotecas digitales son colecciones de información que puede ser representada como texto digital, imágenes, audio, video u otros medios. Tienen asociados una serie de servicios que pueden ofrecer a usuarios individuales o comunidades de usuarios. El acceso a Internet está motivando el uso cada vez más extendido de estas bibliotecas. Conforme su uso es

más común y sus contenidos más variados, los usuarios esperan servicios cada vez más sofisticados [3, 7]. Las bibliotecas digitales disponen de personal encargado de gestionar y facilitar a los usuarios el acceso a los documentos más interesantes para ellos, según sus necesidades o áreas de interés. El personal se encarga de buscar, evaluar, seleccionar, catalogar, clasificar, mantener y gestionar los documentos digitales, y facilitar el acceso de los usuarios al material almacenado [7]. Las bibliotecas digitales se han usado en numerosos ámbitos, pero nosotros nos vamos a centrar en el ámbito académico, es decir, en las BDU.

Las BDU proporcionan recursos y servicios a estudiantes, profesores y personal en un entorno donde confluyen aprendizaje, enseñanza e investigación [4, 21]. Como en la Web, el crecimiento exponencial de la información está provocando que los usuarios de las BDU no sean capaces de acceder a la información de una manera simple y rápida. Por ello, pensamos que sería provechoso aplicar a estas bibliotecas las herramientas usadas con éxito en entornos Web [22].

Normalmente, cualquier biblioteca digital incluye una función de búsqueda tradicional. Como es sabido, la frustración de los usuarios con los sistemas de búsqueda tradicional va en aumento debido a que sus necesidades de información son cada vez más complejas y a que el volumen de información es mucho mayor. Las bibliotecas digitales deben dejar de ser elementos pasivos, con una escasa adaptación a los usuarios, para convertirse en elementos activos que ofrezcan y filtren la información según los usuarios y comunidades de los mismos [3]. En este sentido, las bibliotecas digitales deben predecir las necesidades de los usuarios y recomendar recursos que les puedan ser de interés.

En este trabajo proponemos la aplicación conjunta de dos técnicas que permiten mejorar el rendimiento de los servicios ofertados por las BDU. Por un lado, tenemos las herramientas de Filtrado de Información (FI) que evalúan y filtran la gran cantidad de información

disponible en cualquier ámbito y asisten a los usuarios en sus procesos de acceso a la información [24]; y por otro, aplicamos el Modelado Lingüístico Difuso (MLD) que aporta técnicas más flexibles para representar y gestionar la información subjetiva e imprecisa propia del lenguaje de los usuarios [11, 12, 26].

El trabajo se estructura de la siguiente forma. En la sección 2 se describe el concepto de FI, así como los enfoques de MLD que vamos a usar. En la sección 3 presentamos el modelo de SR lingüístico difuso para filtrar recursos de información en las BDU. Por último, analizaremos las conclusiones obtenidas.

2 PRELIMINARES

2.1 FILTRADO DE INFORMACIÓN

El acceso a la información requerida por los usuarios en Internet no es una tarea sencilla. El problema se agrava con el cada vez más extendido uso de la Web y el crecimiento constante de información electrónica. Por ejemplo, los usuarios suscritos a listas de correo, pierden gran cantidad de tiempo leyendo, ojeando o simplemente eliminando mensajes irrelevantes. Para mejorar estos procesos de acceso a la información, los usuarios necesitan herramientas que filtren la gran cantidad de información disponible en la Web. FI es un nombre usado para describir una variedad de técnicas encargadas de entregar información exclusivamente a quienes la necesiten, distinguiendo entre información relevante e irrelevante. Los sistemas de FI se caracterizan por las siguientes propiedades [8]:

- Se pueden aplicar sobre datos sin estructurar o semi-estructurados (por ejemplo documentos Web o mensajes e-mail).
- Están basados en perfiles de usuario, en lugar de que los usuarios expresen sus necesidades mediante consultas.
- Gestionan grandes cantidades de información.
- Trabajan fundamentalmente con información en modo texto.
- Su objetivo es eliminar información irrelevante del flujo de entrada.

Tradicionalmente, los sistemas de FI o también conocidos como SR, se dividen en dos categorías [8, 24]. Los *SR basados en contenidos* que realizan las recomendaciones basándose en la similaridad entre las características usadas en la representación de los ítems y aquellas de las mismas que se usan en la representación de perfil de los usuarios. Para recomendar

a un usuario dado, únicamente se tiene en cuenta la información de dicho usuario, ignorando al resto de usuarios. Por otro lado, los *SR colaborativos* identifican usuarios con preferencias similares agrupándolos según perfiles, de manera que para generar las recomendaciones para un usuario dado, se tienen en cuenta las valoraciones de los usuarios afines a su perfil. Por ello, el establecimiento de perfiles precisos es una tarea clave, pero además, es deseable que los perfiles se vayan actualizando conforme vayan cambiando las necesidades o preferencias de los usuarios [23]. Numerosos investigadores han adoptado enfoques híbridos entre los SR basados en contenidos y colaborativos, para aprovechar las ventajas de ambos.

Normalmente, en los SR la actividad de filtrado de información es seguida por una fase de realimentación, en la que los usuarios suministran al sistema evaluaciones sobre la relevancia de los documentos recuperados y el sistema usa estas evaluaciones para actualizar los perfiles de los usuarios.

Un aspecto importante a tener en cuenta en los SR es el método para establecer los perfiles de usuario que caracterizan las necesidades o preferencias de los usuarios. La información sobre las preferencias de los usuarios puede ser obtenida de forma explícita o de forma implícita. Un *enfoque explícito* interacciona directamente con los usuarios a través de un proceso de realimentación en el que especifican lo que desean, por ejemplo interrogando a los usuarios mediante un formulario. Un *enfoque implícito* realiza inferencias a partir de algún tipo de observación sobre los usuarios, por ejemplo analizando el comportamiento de los mismos. En este caso, también se suelen adoptar métodos mixtos que combinan características conjuntas de ambos.

2.2 MODELADO LINGÜÍSTICO DIFUSO

Hay numerosas situaciones en las que la información no puede ser valorada cuantitativamente de forma precisa, y es preciso hacerlo de forma cualitativa. Por ejemplo, cuando valoramos algún aspecto relacionado con percepciones humanas, solemos usar palabras del lenguaje natural en lugar de valores numéricos. En otros casos, no podemos trabajar con información cuantitativa bien porque no está disponible o bien porque el coste computacional es demasiado elevado y nos basta aplicar un "valor aproximado". El uso de la Teoría de Conjuntos Difusos ha dado muy buenos resultados para modelar información cualitativa [26] y ha sido aplicada con éxito en numerosos ámbitos como por ejemplo en toma de decisiones [11], evaluación de calidad [19], modelos de recuperación de información [15, 16], diagnósticos clínicos [6], análisis político [1], etc. Se trata de usar el concepto de *vari-*

able lingüística propuesto por Zadeh [26] para trabajar con información cualitativa. A continuación, revisaremos dos técnicas de MLD, el MLD 2-tuplas [12, 14] y el MLD multi-granular [10, 13, 18].

2.2.1 Modelado lingüístico difuso 2-tupla

El MLD 2-tuplas [12, 14] es un modelo continuo de representación de la información, que permite reducir la pérdida de información que se produce con otros enfoques (clásico y ordinal) [9, 11, 26]. Para definirlo, tenemos que establecer el modelo de representación y el modelo computacional 2-tupla para representar y agregar la información lingüística, respectivamente.

Consideremos que $\mathcal{S} = \{s_0, \dots, s_g\}$ es un conjunto de términos lingüísticos con cardinalidad impar, donde el término intermedio representa una valoración de aproximadamente 0.5 y el resto de términos se distribuyen simétricamente alrededor de ese punto intermedio. Asumimos que la semántica asociada con cada una de las etiquetas viene dada por medio de funciones de pertenencia triangulares, representadas por una 3-tupla (a, b, c) y consideramos todos los términos distribuidos simétricamente sobre una escala en la que hay establecida una relación de orden total, es decir, $s_i \leq s_j \iff i \leq j$.

Si mediante un método simbólico de agregación de información lingüística [9, 11] obtuviesenemos un valor $\beta \in [0, g]$, y $\beta \notin \{0, \dots, g\}$, podemos usar una función $\Delta : [0, g] \rightarrow \mathcal{S} \times [-0.5, 0.5]$ para expresar el resultado como una 2-tupla $\Delta(\beta) = (s_i, \alpha_i)$, donde:

- $s_i, i = \text{round}(\beta)$, representa la etiqueta lingüística asociada, y
- $\alpha_i = \beta - i$ es un valor numérico que representa la información de traslación lingüística de β .

Obviamente, Δ es biyectiva, es decir, existe una $\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha_i$ [12].

El modelo computacional 2-tupla contiene los siguientes operadores:

1. Operador de negación: $Neg((s_i, \alpha)) = \Delta(g - (\Delta^{-1}(s_i, \alpha)))$.
2. Comparación de 2-tuplas (s_k, α_1) y (s_l, α_2) :
 - Si $k < l$ entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2) .
 - Si $k = l$ entonces:
 - (a) Si $\alpha_1 = \alpha_2$ entonces (s_k, α_1) y (s_l, α_2) representan la misma información.

- (b) Si $\alpha_1 < \alpha_2$ entonces (s_k, α_1) es menor que (s_l, α_2) .
- (c) Si $\alpha_1 > \alpha_2$ entonces (s_k, α_1) es mayor que (s_l, α_2) .

3. Operadores de agregación: Con las funciones de transformación Δ y Δ^{-1} , podemos definir un operador de agregación 2-tupla desde cualquier operador de agregación conocido, como la media aritmética o la media ponderada lingüística.

2.2.2 Modelado lingüístico difuso multi-granular

En cualquier enfoque lingüístico difuso, un aspecto fundamental es determinar la *granularidad de la incertidumbre*, es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos $\mathcal{S}$. En función del grado de incertidumbre que un experto encargado de cualificar un fenómeno tenga sobre el mismo, el conjunto de términos lingüísticos elegido para proporcionar ese conocimiento tendrá más o menos términos. Por lo tanto, cuando distintos expertos tienen diferentes grados de incertidumbre sobre el fenómeno, es conveniente que cada uno trabaje con conjuntos de términos lingüísticos de diferente granularidad [10, 13, 18]. El uso de diferentes conjuntos de etiquetas es también necesario cuando un experto tiene que valorar conceptos diferentes, como por ejemplo ocurre en los problemas de recuperación de información, al evaluar la importancia de los términos de la consulta y la relevancia de los documentos recuperados [17], que son conceptos distintos. En ese tipo de situaciones necesitamos herramientas que nos permitan gestionar la información lingüística multi-granular, es decir, necesitamos definir un MLD multi-granular. En [13] se propuso un MLD multi-granular 2-tupla basado en el concepto de jerarquía lingüística [5].

Una *Jerarquía Lingüística*, LH , es un conjunto de niveles $l(t, n(t))$, i.e., $LH = \bigcup_t l(t, n(t))$, donde en cada nivel t tenemos un conjunto de términos lingüísticos $\mathcal{S}^{n(t)}$ con una granularidad $n(t)$ diferente del resto de niveles de la jerarquía [5]. Los distintos niveles están ordenados por granularidad, de manera que un nivel $t + 1$ es un refinamiento del nivel anterior t . Podemos definir un nivel a partir del anterior, de la siguiente manera: $l(t, n(t)) \rightarrow l(t + 1, 2 \cdot n(t) - 1)$. En [13] fue definida una familia de funciones de transformación entre etiquetas de diferentes niveles. Para establecer el modelo computacional seleccionamos un nivel que usamos para uniformizar la información (por ejemplo, el de mayor granularidad) y entonces podemos usar los operadores definidos en el modelo 2-tupla.

3 UN MODELO DE SR LINGÜÍSTICO DIFUSO PARA FILTRAR RECURSOS DE INFORMACIÓN EN LAS BDU

En esta sección presentamos un SR diseñado según el enfoque de filtrado basado en contenidos y el MLD multi-granular. Este SR es usado para filtrar la gran cantidad de información a la que pueden acceder los usuarios de las BDU. El sistema va filtrando la información que recibe y envía cada recurso únicamente a aquellos usuarios a los que les pueda interesar en función de sus áreas de interés. Concretamente, el sistema envía un email con un resumen del recurso, una estimación del grado de relevancia que el recurso tendrá para el usuario y recomendaciones sobre posibilidades de colaboración con otros usuarios.

3.1 ARQUITECTURA DEL SISTEMA

El sistema consta de tres componentes:

- **Módulo de gestión de recursos.** Este componente gestiona las fuentes de información de la BDU. Para representar los recursos de información usamos datos como el título, autor(es), resumen, revista, libro, publicación oficial (dependiendo del caso), fecha, fuente, texto, enlace, tipo de recurso (si es revista, libro, etc.), a quién va dirigido (investigadores, estudiantes o cualquiera) y el ámbito. Para representar el ámbito usamos la *clasificación de códigos UNESCO para la Ciencia y de la Tecnología* [25]. Vamos a usar un modelo vectorial, según el cual para cada recurso i almacenamos un vector VR_i con los códigos UNESCO de nivel 2 (248 disciplinas), por lo que necesitamos un vector de 248 posiciones, donde cada posición $VR_i[j]$ almacena el grado de importancia del código j para el ámbito del recurso i .
- **Módulo de gestión de perfiles de usuario.** El sistema trabaja con una representación interna de los usuarios en la que se incluyen sus preferencias o necesidades, es decir, que el sistema representa a cada usuario mediante de un perfil de usuario. Para definir los perfiles usamos datos generales sobre cada uno de ellos como su identificación, password, nombre y apellidos, datos de contacto, email, grupo de investigación (sólo para investigadores), etc. También almacenamos sus preferencias de colaboración, preferencias sobre el tipo de recursos que desea y sus tópicos de interés. Para ello usamos la clasificación UNESCO [25] de nivel 2, por lo que cada usuario tendrá asociada una lista de códigos UNESCO con aquellas

disciplinas que mejor representan sus intereses o necesidades de información. Para cada usuario x almacenamos un vector VR_x con los códigos UNESCO de nivel 2, por lo que necesitamos un vector de 248 posiciones, donde cada posición $VR_x[y]$ almacena el grado de importancia del código y para el área de interés de x .

- **Módulo de filtrado.** El sistema filtra la información para entregarla a los usuarios adecuados, basándose en un proceso de cálculo de similitud.

Para representar los distintos conceptos que tienen que ser valorados en la actividad del sistema, usaremos distintos conjuntos de etiquetas ($S_1, S_2, \dots$) seleccionados de una jerarquía lingüística. En nuestro sistema, distinguimos tres conceptos que tienen que ser valorados:

- **Grado de importancia** de un código UNESCO con respecto al ámbito de un recurso o respecto a los tópicos de interés de un usuario. Este concepto será valorado en S_1 .
- **Grado de relevancia** de un recurso para un usuario. Este concepto será valorado en S_2 .
- **Grado de compatibilidad** entre dos usuarios. Este concepto será valorado en S_3 .

En particular, usamos conjuntos de etiquetas seleccionados de una jerarquía lingüística de 3 niveles de 3, 5 y 9 etiquetas cada uno. Entonces, consideramos que $S_1 = S^5$, $S_2 = S^9$ y $S_3 = S^3$.

3.2 FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA

El SR funciona en base a los cuatro procesos siguientes:

3.2.1 Proceso de inserción de usuarios

Los usuarios acceden al sistema para solicitar los servicios ofertados por una BDU. El sistema presenta un formulario en el que los usuarios introducen su información personal, sus preferencias de colaboración y preferencias sobre el tipo de recursos que desean recibir. Los usuarios también establecen definen sus áreas de interés. Si el usuario pertenece a un grupo de investigación, el sistema muestra los códigos del grupo con grado *Total* ($s_4^5 \in S_1$) y el usuario podrá editarlos para ajustarlos a sus temas de interés. Si el usuario no pertenece a ningún grupo, tendrá que especificar sus tópicos de interés de forma explícita seleccionando códigos UNESCO y asignando pesos de importancia (etiquetas de S_1); el resto de posiciones tendrán un valor *Nulo* ($s_0^5 \in S_1$). Entonces el sistema registra al usuario y le asigna su identificador (su e-mail) y

un password. Para concluir el proceso de registro, el sistema envía al usuario un e-mail para confirmar la información insertada.

3.2.2 Proceso de inserción de recursos

Este proceso se lleva a cabo cuando el personal de una BDU recibe o encuentra información sobre un recurso que hay que difundir. Los expertos insertan la información en el sistema para que automáticamente se envíe a los usuarios a los que les pueda interesar, junto con un grado de relevancia y posibilidades de colaboración. Cuando el personal de la BDU va a insertar un nuevo recurso, comienza por rellenar toda la información general como título, autor(es), resumen, fecha, etc. A continuación establece su ámbito valorando, mediante una etiqueta lingüística $s_i^5 \in S_1$, cada código UNESCO de nivel 2 respecto del ámbito del recurso.

3.2.3 Proceso de filtrado

Al tratarse de un sistema de filtrado basado en contenidos, filtra la información realizando un proceso de cálculo de similaridad entre los términos usados en la representación de los perfiles de usuario y los términos usados en la representación de los recursos. Como hemos comentado, usamos un modelo vectorial [20] para la representación de los tópicos de interés del usuario y los ámbitos de los recursos, por lo que para el cálculo de la similitud hemos optado por usar la Medida Angular del Coseno:

$$\sigma(VR, VU) = \frac{\sum_{k=1}^n (r_k \times u_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (r_k)^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n (u_k)^2}}$$

donde n es el número de términos (248 en nuestro caso), r_k es el valor del término k para el vector del ámbito del recurso y u_k es su valor en el vector de tópicos de interés del usuario. Con esta medida, obtenemos un valor de 1 para los casos máxima similaridad y 0 para los de mínima, de manera que podemos establecer un valor de umbral α por debajo del cual se rechaza la información. A continuación debemos tener en cuenta las preferencias de los usuarios sobre el tipo de recursos que desean y sus preferencias de colaboración; en caso de que desee colaborar, el sistema calcula su similaridad con otros usuarios (usando la medida del coseno). Por último, el sistema envía a los usuarios seleccionados la información del recurso, su grado de relevancia estimado (etiqueta de S_2) y recomienda sobre posibilidades de colaboración con otros usuarios justificándolas con el grado de compatibilidad calculado (etiqueta de S_3). Para transformar las etiquetas de un nivel a otro usamos las funciones de transformación definidas en el MLD multi-granular.

3.2.4 Proceso de realimentación

Esta fase abarca la actividad desarrollada por el sistema de filtrado una vez que los usuarios comienzan a recibir la información filtrada por el sistema. Como ya hemos dicho, es fundamental que los perfiles de usuario se puedan ir adaptando, puesto que las necesidades o preferencias de los usuarios van a ir cambiando a lo largo del tiempo. Por ese motivo, el sistema permite a los usuarios actualizar sus perfiles según los intereses de cada uno y así mejorar el proceso de filtrado; para ello, tendrán que acceder al sistema y editar sus preferencias sobre colaboración o sobre el tipo de recursos que desean, o bien editar sus áreas de interés añadiendo nuevos códigos UNESCO, eliminando alguno de los ya asignados o modificando los grados de importancia que tengan asignados.

4 CONCLUSIONES

El incremento de recursos de información que experimentan las BDU provoca que los usuarios de las BDU no sean capaces de acceder a la información de forma eficiente, por lo que necesitan herramientas automáticas que les faciliten el acceso a la información. En este trabajo hemos presentado dos técnicas que ayudan a solventar dicho problema, las herramientas de FI y el MLD. Basándonos en la aplicación conjunta de ambas, hemos presentado un SR para filtrar recursos de información en las BDU. Se trata de un sistema personalizado diseñado según el enfoque de filtrado basado en contenidos y el MLD multi-granular, que filtra la información y la distribuye a aquellos usuarios a los que más les pueda interesar, recomendando además sobre posibilidades de colaboración con otros usuarios.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con financiación del proyecto de excelencia de la Junta de Andalucía SAIN-FOWEB, Cod. 00602.

Referencias

- [1] B. Arfi. Fuzzy decision making in politics: A linguistic fuzzy-set approach (LFSA). *Political Analysis*, 13(1), 23-56, 2005.
- [2] R. Baeza-Yates, B. Ribeiro-Neto. *Modern Information Retrieval*. Addison-Wesley, 1999.
- [3] J. Callan, et. al. Personalisation and Recommender Systems in Digital Libraries. *Joint NSF-EU DELOS Working Group Report*. May 2003.

- [4] H. Chao. Assessing the quality of academic libraries on the Web: The development and testing of criteria. *Library & Information Science Research*, 24, 169-194, 2002.
- [5] O. Cerdón, F. Herrera and I. Zvir. *Linguistic modelling by hierarchical systems of linguistic rules*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10(1), 2-20, 2001.
- [6] R. Degani, G. Bortolan. The Problem of Linguistic Approximation in Clinical Decision Making. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 2, 143-162, 1988.
- [7] E. Garca, L.A. Garca. *La Biblioteca Digital*. Arco Libros S.L., 2001.
- [8] U. Hanani, B. Shapira, P. Shoval. Information Filtering: Overview of Issues, Research and Systems. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 11, 203-259, 2001.
- [9] F. Herrera, E. Herrera-Viedma. Aggregation operators for linguistic weighted information, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems*, 27, 646-656, 1997.
- [10] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez. A Fusion Approach for Managing Multi-Granularity Linguistic Term Sets in Decision Making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114, 43-58, 2000.
- [11] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79, 175-190, 1996.
- [12] F. Herrera, L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6), 746-752, 2000.
- [13] F. Herrera, L. Martínez, A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 31(2), 227-234, 2001.
- [14] F. Herrera, Martínez, The 2-tuple linguistic computational model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9, 33-48, 2001.
- [15] E. Herrera-Viedma, Modeling the retrieval process of an information retrieval system using an ordinal fuzzy linguistic approach. *J. of the American Society for Information Science and Technology*, 52(6), 460-475, 2001.
- [16] E. Herrera-Viedma, An information retrieval system with ordinal linguistic weighted queries based on two weighting elements. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9, 77-88, 2001.
- [17] E. Herrera-Viedma, O. Cerdón, M. Luque, A.G. López, A.M. Muñoz, A Model of Fuzzy Linguistic IRS Based on Multi-Granular Linguistic Information. *Int. J. of Approximate Reasoning*, 34(3), 221-239, 2003.
- [18] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata, F. Chiclana. A Consensus Support System Model for Group Decision-making Problems with Multi-granular Linguistic Preference Relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(5), 644-658, 2005.
- [19] E. Herrera-Viedma, E. Peis, Evaluating the informative quality of documents in SGML-format using fuzzy linguistic techniques based on computing with words. *Information Processing & Management*, 39(2), 195-213, 2003.
- [20] R.R. Korfhage. *Information Storage and Retrieval*. New York: Wiley Computer Publishing, 1997.
- [21] J. Lau Noriega. Bibliotecas universitarias: Su importancia en el proceso de acreditación. *Gaceta Universitaria*, 149, p. 1, 2002.
- [22] S. Lawrence, C. Giles. Searching the web: General and scientific information access. *IEEE Comm. Magazine*, 37(1), 116-122, 1998.
- [23] L.M. Quiroga, J. Mostafa. An experiment in building profiles in information filtering: the role of context of user relevance feedback *Information Processing & Management* 38, 671-694, 2002.
- [24] P. Reisman, H.R. Varian. Recommender Systems. *Special issue of Comm. of the ACM*, 40(3), 56-59, 1997.
- [25] Clasificación UNESCO. Ministerio de Educación y Ciencia.
<http://www.mec.es/ciencia/jsp/plantilla.jsp?area=proyectos/invest&id=53>
- [26] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part I. *Information Sciences*, 8, 199-249, 1975. Part II, *Information Sciences*, 8, 301-357, 1975. Part III, *Information Sciences*, 9, 43-80, 1975.

Gestión Dinámica de Estructuras de Documentos mediante Mecanismos de Comparación Borrosos

Francisco P. Romero

Centro I+D Soluziona – UCLM

Ronda de Toledo, s/n

13071-Ciudad Real, SPAIN

fpromero@soluziona.com

José A. Olivas

Departamento de Informática,

Universidad de Castilla-La Mancha,

Paseo de la Universidad 4,

13071-Ciudad Real, SPAIN

JoseAngel.Olivas@uclm.es

Pablo J. Garcés

Departamento de Informática,

Universidad de Alicante

Ctra. S. Vicente del Raspeig s/n

03080 – Alicante, SPAIN

pgarces@dccia.ua.es

Resumen

En este trabajo se presentan las técnicas necesarias para realizar una gestión dinámica e inteligente de repositorios de documentos. La base de este sistema es una estructura de conocimiento en la que se sustenta la organización del repositorio. Las características principales de esta estructura son, por una parte la distribución jerárquica y borrosa de los documentos, la conformación basada en conceptos extraídos a través de relaciones semánticas borrosas y por último, la representación de las agrupaciones mediante Prototipos Deformables Borrosos. El tratamiento de documentos entrantes al repositorio se realiza a través de mecanismos de comparación e inferencia borrosos que permiten su clasificación y el desencadenamiento de acciones posteriores. La estructura se actualiza automáticamente para adaptar el conocimiento a la evolución temporal del repositorio.

Palabras Clave: Repositorios de Documentos, Prototipos Deformables Borrosos, Gestión Dinámica de Documentos.

1 INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

El término repositorio de documentos tiene diversos significados según el ámbito en el que se utilice. Una interpretación clásica del término daría lugar a su definición como una biblioteca física. Extrapolando este término al mundo digital, un repositorio de documentos sería una biblioteca de documentos electrónicos. Este enfoque se ve superado en la actualidad dado que los documentos que manejamos las personas no son únicamente libros, artículos o boletines, sino que pueden ser páginas web, blogs, correos electrónicos, noticias, etc.

La realidad actual nos incita a ampliar el término más allá de las bibliotecas formalizadas llevándonos a incorporar como repositorios documentales todas las colecciones de documentos más o menos organizadas que circulan por Internet. De esta forma, calificamos repositorios de documentos a todo grupo de documentos electrónicos que puede llegar a tener entidad por sí mismos. Ejemplos de este tipo de repositorios son el correo electrónico, los foros de discusión, los grupos de noticias, incluso las conversaciones en discusiones y debates, etc. Entre todo el compendio de este tipo de documentos existe un conocimiento subyacente que debe ser accedido y aprovechado por parte del usuario final.

Una característica especial de estos nuevos repositorios es su accesibilidad y su dinamismo. El número de personas que tiene acceso sencillo a un gran número de documentos crece cada día. En cuanto al dinamismo, viene dado por el constante cambio de contenidos y el creciente tráfico de documentos que existe en Internet. Esta nueva situación produce que la estructuras estáticas y cimentadas en criterios expertos en las que se basaba la anterior organización de los repositorios documentales haya quedado obsoleta, necesitándose nuevas estructuras, basadas en el significado de los documentos, claras para el usuario y fácilmente actualizables con el fin de conservar su validez y utilidad en el tiempo.

Las estructuras estáticas normalmente están basadas en reglas definidas por el usuario que conforman la gestión de cada uno de los documentos entrantes al repositorio, un ejemplo de ello, son las reglas que sobre la gestión del correo electrónico disponen los sistemas comerciales. Por otro lado, existen herramientas de filtrado que permiten de alguna forma aligerar la carga en la gestión eliminando la posible basura (spam, información no relevante) de los documentos que entran en el repositorio.

Las técnicas basadas en Soft Computing han sido ampliamente utilizadas en estas tareas con rendimientos debidamente contrastados [15][19]. Estos estudios van desde los procesos de clustering para la estructuración [3] y el filtrado de colecciones de documentos [17], como la utilización de clasificadores probabilísticos [11][8] u otras técnicas [13].

El trabajo propuesto propone la gestión dinámica de un repositorio basándose en su estructuración a partir de los conceptos manejados en los documentos que contiene.

La estructura básica del repositorio posee una organización jerárquica de grupos en la cual los documentos pueden pertenecer a varios grupos con distintos grados de pertenencia. A esta estructura básica se incorpora una representación formal de cada grupo de documentos basada en conjuntos de términos relevantes y Prototipos Deformables Borrosos[6].

El mecanismo de tratamiento de los documentos entrantes al repositorio también será conceptual. De esta manera, se establece un vínculo entre los conceptos relevantes que se definen en cada uno de los grupos de la estructura con los aparecidos en el documento entrante.

Las características principales de la propuesta de estructura de repositorio son las siguientes:

- **Automática:** Se obtiene mediante un algoritmo de funcionamiento desasistido por lo que se evita que el usuario defina grandes cantidades de reglas para su gestión.
- **Clara:** Su representación es simple no basándose en complicadas fórmulas probabilísticas que pueden quedar lejos de la comprensión que el usuario debe tener sobre la organización del repositorio.
- **Conceptual:** Los criterios que se siguen tanto para agrupar los documentos como para clasificar los nuevos documentos entrantes al repositorio se basan en el contenido conceptual de los mismos utilizándose para ello las técnicas definidas en el modelo FIS-CRM[5].
- **Dinámica:** Su actualización no depende directamente del usuario sino que dinámicamente y a partir de los conceptos manejados en los documentos entrantes se realizará una adaptación automática de la estructura.

El artículo se organiza de la siguiente forma; en el siguiente apartado se definirán los componentes de la estructura del repositorio que nos permiten realizar una gestión dinámica y conceptual de éste. En el apartado 3 se definirá de forma completa el mecanismo de tratamiento de un documento entrante al repositorio, y posteriormente en el apartado 4 se presentará el proceso de actualización de la estructura. Se finalizará con la sección de conclusiones que incluirá las líneas directrices del trabajo futuro a realizar.

Se utilizará para los ejemplos prácticos una colección de documentos no estándar, concretamente la extraída de subconjuntos de los documentos incluidos en las actas de la Conferencia Internacional de Estadística en Estudios Medioambientales del año 2001(EMA'01) [1].

2 DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL REPOSITORIO

La organización del repositorio está basada en una jerarquía de carpetas de documentos. La base de conocimiento que sustenta esta organización está basada en los componentes que se obtienen tras un proceso de representación conceptual mediante el modelo FIS-CRM [5], de clustering borroso y de Representación del Conocimiento basado en Prototipos Deformables Borrosos [9]. Al basarse en componentes cabe la posibilidad de transformar otras estructuras, obtenidas mediante procesos distintos al utilizado en este trabajo, a las especificaciones de la estructura propuesta.

2.1. ESTRUCTURA GENERAL

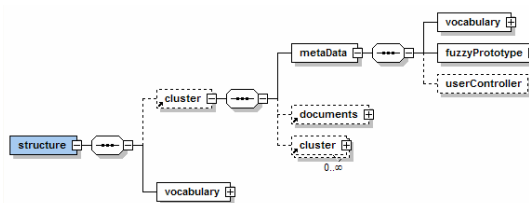


Figura 1: Diagrama de componentes de la estructura del repositorio.

La estructura general del repositorio se basa en carpetas (clusters) que contienen documentos. Estos documentos podrán ser ubicados en varias carpetas diferentes según los conceptos que se manejan en él. Dentro de cada una de las carpetas obtenidas poseerán el grado de pertenencia correspondiente.

La jerarquía posee una “carpeta de ruido”, ésta representa a aquel grupo de documentos que no puede ser encuadrado conceptualmente en ninguna de las agrupaciones encontradas. El número de documentos almacenado en esta grupo debe ser reducido ya que un número alto de no clasificados indica que la estructura no ha logrado representar la realidad conceptual del repositorio. Para realizar esta labor es muy importante elegir adecuadamente el algoritmo de cluster a aplicar con el fin de la construcción de la estructura. En este caso se ha obtenido la agrupación por un proceso de clustering mixto combinando y adaptando dos algoritmos, de tipo jerárquico y particionante respectivamente [10].

2.1 Estructura de Carpeta Enriquecida.

Una carpeta o agrupación de documentos normalmente únicamente contiene una etiqueta que la define y los documentos que pertenecen a ella.

En este trabajo las carpetas de la estructura tienen un contenido enriquecido con el fin de que se conviertan en los componentes de la base de conocimiento que sustenta al repositorio. De esta manera, la carpeta, además de poseer documentos con un cierto grado de pertenencia al grupo, contará con un vocabulario propio conformado por los términos más relevantes de entre los que han sido reflejados directa o indirectamente en sus documentos. Las estructuras de conocimiento están basadas en Categorías Prototípicas Borrosas [6] de pertenencia a la carpeta (prototipos de documentos con respecto a la agrupación). Además, se cuenta con una serie de reglas de usuario, necesarias para personalizar la gestión de los documentos.

2.2 Vocabulario de estructura.

El **vocabulario de la estructura** son aquellos términos que definen completamente a la estructura del repositorio independientemente de la carpeta a la que pertenezcan. Contiene al conjunto de términos más relevantes procedentes de las diferentes agrupaciones obtenidas. En este vocabulario los términos no cuentan con pesos asociados a los términos, sino que únicamente se tiene en cuenta su presencia/ausencia. De esta manera, se obtendrá un vector binario que conformará la representación del “documento de la estructura”, el cual, será objeto de traducción o transformación en el tratamiento multidioma.

De este vocabulario se obtendrán las estructuras (mapas) que contienen todas las relaciones semánticas entre las palabras del vocabulario. Estas relaciones serán claves para el tratamiento conceptual y los procesos de desambiguación de los documentos entrantes al repositorio. Otra de sus utilidades será el dar soporte a las diferentes funcionalidades de filtrado de documentos basura que se implementen en el sistema.

2.2. ESTRUCTURA DE UNA CARPETA

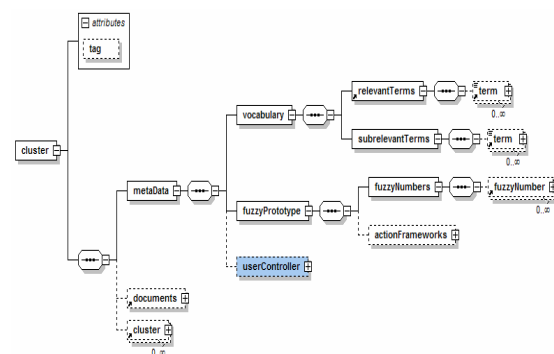


Figura 2: Diagrama de componentes de la estructura de una carpeta de documentos.

Con el fin de conservar funcionalidades de etiquetado, cada carpeta contendrá una palabra o palabras que la identifiquen que o bien pueden ser los términos más relevantes de la carpeta, o bien pueden ser establecidos directamente por el usuario.

2.2.1. Vocabulario de la carpeta.

Como se ha indicado anteriormente cada carpeta posee un vocabulario propio obtenido a partir de los términos de los documentos que contiene, con ello disponemos de un vector FIS-CRM que representa a la carpeta. Debido a que un porcentaje reducido de los términos determinan el contenido de la carpeta (ley de Pareto) es necesario establecer mecanismos para identificar los grupos de términos importantes dentro de ella.

La extracción de los términos que definen el contenido de la agrupación se consigue mediante un algoritmo adaptado de las ideas presentadas [2]. La relevancia de un término dentro de una carpeta se calcula de la siguiente forma:

$$w_i^d = (\sum w_i) * (1 + \ln(|d(i)|)) \quad (1)$$

Siendo

- $\sum w_i$: La suma del valor del término dentro de cada uno de los documentos del cluster.
- $1 + \ln(|d(i)|)$: Factor logarítmico del número de documento en los que aparece. Este factor sirve para dar importancia limitada al número de documentos en los que aparece un término dentro del cluster.

A partir de este valor se establecen tres grupos diferentes de términos:

- **Otros Términos:** Son los conceptos que apareciendo en los documentos de la carpeta no son relevantes en su definición. Su grado de relevancia es inferior a la media de los términos que aparecen en el cluster.
- **SubRelevantes:** Grupo conformado por aquellos términos que no siendo suficientemente significativos para identificar la carpeta frente al usuario pero que son fundamentales para la clasificación de un nuevo documento en la carpeta. Conformarán este grupo, los términos situados entre el percentil 2 y 3 de la distribución de relevancia de los términos.
- **Relevantes:** Está conformado por los términos que representan a la “etiqueta conceptual” del cluster, obtenida de forma automática y que puede coincidir o no con la del usuario. Son aquellos términos con mayor grado de relevancia en el grupo.

Ejemplos de carpetas con sus términos relevantes se pueden observar en la tabla 1:

Tabla 1: Ejemplo de título de una tabla.

Etiqueta	Descripción
<i>M.Amb. Andalucía</i>	Medio ambiente, andalucía, metales, estadística
<i>Vertidos Tóxicos</i>	Vertido, suelo, guadiamar, zn, cu, pb, as
<i>Estudios Contaminación</i>	Contaminación, predicción, proceso , programa
<i>Suelos contaminados</i>	especies, metales, pesado, suelo, ,planta

2.3.2. Prototipos Deformables Borrosos.

Cada carpeta de la estructura representa un prototipo de mensaje por lo que deberá de estar caracterizado de forma que se permita definir una función de pertenencia al grupo a partir de los conceptos que aparecen en el documento.

Se definen los *Prototipos Deformables Borrosos* [6], como una combinación lineal de Prototipos Borrosos [18] con la capacidad de adaptarse a una situación real, cuyos coeficientes son los grados de pertenencia a cada uno de estos Prototipos Borrosos. Cada prototipo viene definido por un número borroso y un marco de definición de la situación de datos de los que no se dispone a priori (en este caso los marcos de acción).

Los prototipos han sido representados formalmente como números borrosos, los cuales permitirán obtener un grado de pertenencia de un documento con los prototipos borrosos que definen la carpeta. Para calcularlos se necesita contar con un grado de pertenencia de los documentos al cluster. Este valor se basa en los conceptos que se encuentran expresados en el documento. A partir de este grado se establece un proceso de post-clasificación que terminará con el cálculo de los valores que definen al prototipo.



Figura 3: Ejemplos de números borrosos triangulares que representan prototipos de carpetas de documentos.

En la figura 3 se pueden ver tres ejemplos de números borrosos que representan prototipos de carpetas extraídos de la colección del ejemplo. Las funciones de pertenencia representan claramente que dentro de una misma carpeta existen dos tipos de documentos: los afines a la carpeta y los que son destacadamente afines. Estas diferencias marcarán la realización de ciertas acciones con los documentos entrantes (priorización de los destacadamente afines, etc.).

2.3.4. Marcos de Acción.

El marco de definición de cada prototipo determinará las acciones especiales a realizar (priorización, eliminación, auto-respuesta, reclasificación, etc.) con cada documento entrante según su afinidad a la carpeta. Cada carpeta tendrá un marco con toda la serie de acciones que se pueden realizar cuando un documento sea clasificado en ella. Dentro de estos marcos podrá haber actividades de la lista que no se realicen nunca (probabilidad 0) o se realicen siempre (probabilidad 100%) o que se realicen dependiendo de cierta probabilidad que se va a ver condicionada por el grado de afinidad del documento entrante al prototipo; por ejemplo acciones que solo se realizarán cuando el prototipo sea muy afín a la carpeta.

Los marcos están conformados por pares acción-probabilidad. Las acciones que se pueden ejecutar ante la llegada de un documento entrante son las siguientes: leer inmediatamente, reenviar, clasificar, priorizar, poner en espera, descartar, etc. Las probabilidades de acción o bien vendrán dadas de forma automática o definidas por el usuario mediante variables lingüísticas como las siguientes: seguro (100%), muy probable (75%), probable (50%), poco probable (25%), no realizable (0%).

Un ejemplo de marcos de probabilidades de acciones según la afinidad a la carpeta se puede ver en la Tabla 2.

Tabla 2: Ejemplo de marcos de acciones.

Vertidos Tóxicos (<i>Vertido, suelo, guadiamar, zn, cu, pb, as</i>)		
	Documento Afín	Documento Muy Afín
<i>Acción</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Probabilidad</i>
<i>Leer</i>	Muy Probable (75%)	Seguro (100%)
<i>Reenviar</i>	No Realizable (0%)	No Realizable (0%)
<i>Clasificar</i>	Seguro (100%)	Seguro (100%)
<i>Priorizar</i>	Probable (50%)	Muy Probable (75%)
<i>Poner en espera</i>	Poco Probable (25%)	No Realizable (0%)
<i>Descartar</i>	No Realizable (0%)	No Realizable (0%)

La definición de este marco puede provenir de diversas fuentes, como pueden ser las especificaciones por defecto que establezca el usuario, la reutilización de la información existente en una estructura previa, o un proceso de aprendizaje adaptativo.

2.3.3. Controlador de usuario.

Llamamos “Controlador de usuario” a aquel conjunto de reglas o especificaciones que permiten al usuario perfilar según sus necesidades los procesos automáticos conceptuales que se realicen en la gestión dinámica del repositorio.

Se podrán distinguir dos niveles de reglas, las reglas de estructura y las reglas de carpeta.

Las reglas de estructura implican la funcionalidad de filtrado existente en diversas herramientas comerciales. Permite que a partir de los campos fijos de un documentos (títulos, origen del documento, etc.) establecer una serie de reglas que faciliten su gestión.

Las reglas de carpeta serán reglas de usuario expresadas mediante etiquetas lingüísticas. Este conjunto de especificaciones terminarán conformando un controlador borroso que modificará los resultados de la inferencia automática realizada sobre la definición formal de la carpeta (números borrosos).

3 PROCESAMIENTO DE UN NUEVO DOCUMENTO ENTRANTE

El proceso de tratamiento de un mensaje entrante, que es transparente al usuario, se realiza en diversas fases que confluyen en la comparación entre el documento entrante y cada una de las carpetas en las que puede ir almacenado. Previa a esta comparación es necesario preprocesar lingüísticamente el documento y realizar su representación conceptual según el modelo FIS-CRM [5].

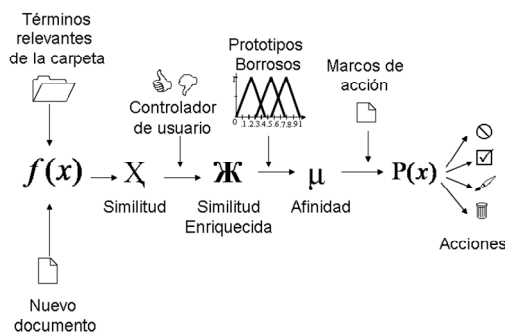


Figura 4: Proceso de tratamiento de un mensaje entrante

3.1. Preproceso del documento.

El preproceso del documento es muy sencillo simplemente supone la eliminación de stop words [12] que aparezcan, se realizará el stemming [7] sobre los lexemas que existentes.

3.2. Representación Conceptual.

Como producto del preproceso obtendremos un vector del documento entrante siguiendo el modelo espacio vectorial [15]. Con el fin de poder extraer que conceptos se tratan en el documento se realizará un reajuste de estos vectores mediante el uso de las técnicas de FIS-CRM[5] Este proceso se realiza siguiendo los siguientes pasos:

1. Incrementar el conjunto de términos perteneciente al vector del documento con todos los pertenecientes al vocabulario de la estructura. Esto es, se incorporarán

al vector todos los términos que, existiendo en el vocabulario de la estructura, no aparecen explícitamente en el documento. De esta forma se construye el vector extendido de documento.

2. Obtención a partir de los diccionarios de relaciones semánticas (sinonimia, ontologías, etc.) de los mapas de reajuste utilizando todos los conceptos que entran en juego en esta comparación.
3. Reajustar el vector introduciendo pesos en aquellos términos del vocabulario de la estructura que están referenciados conceptualmente en el documento. El mecanismo de reajuste es idéntico al utilizado dentro del proceso de creación de la estructura y está especificado en el modelo FIS-CRM[5].

3.3. Comparación entre documento entrante y carpetas.

Para poder clasificar el mensaje dentro de las carpetas de la estructura se necesita obtener un valor X que sea indicativo de la similitud entre cada una de las carpetas y el documento entrante. Para ello, no se realiza una comparación entre los documentos del cluster y el nuevo documento sino que se realiza un proceso de comparación entre los conceptos que definen el vocabulario de la carpeta y los que aparecen en el documento entrante. Este valor X se obtiene mediante la siguiente fórmula.

$$X = \frac{\ln(\sum w_i^d * w_i^c)}{\ln(|D| * ((R + S) - |(R \cup S) \cap D|))} \quad (2)$$

Siendo:

- R : conjunto de términos relevantes de la carpeta.
- S : número de elementos del conjunto de términos subrelevantes de la carpeta
- D : conjunto de términos del vector extendido del documento con peso (originales + procedentes del reajuste conceptual).
- w_i^d : Peso del término en el documento.
- w_i^c : Peso del término dentro del cluster

La utilización del logaritmo en la fórmula viene dada la por la utilización en las fórmulas de funciones no acotadas. Estas funciones provocan que los resultados se puedan disparar a valores en los que no están acotados los números borrosos. La utilización de funciones, como el logaritmo, que suavizan la curva dentro de unos límites permite minimizar el efecto “desborde” del intervalo de validez de los números borrosos [0,1] y se pueda utilizar la regla que $X > 1 \rightarrow X = 1$.

Un ejemplo de la obtención de similitudes con las diferentes carpetas se puede ver en la tabla 3 en la que un artículo sobre un vertido tóxico se compara con los carpetas de la tabla 1.

Tabla 3. Similitudes entre documento entrante y carpetas

Carpeta	Afinidad
M.Amb. Andalucía	0
Vertidos Tóxicos	0,654
Estudios Contaminación	0
Suelos contaminados	0,274

Se puede destacar que el documento será clasificado en dos carpetas pero hay una de ellas con un contenido conceptual más afín, el cual será determinante para ejecutar las acciones definidas en la carpeta.

3.3 Utilización de los prototipos borrosos y reglas de usuario.

El valor de similitud obtenido es un valor calculado de forma automática que es totalmente “ciego” en cuanto a preferencias del usuario. Este valor de similitud es necesario modificarlo con la definición de reglas a partir del usuario. Este proceso se realizará siguiendo los siguientes pasos:

- Comparación con reglas de estructura con el fin de comprobar para ver si es un documento aceptable o no para la estructura.
- Comparación de las reglas establecidas en la carpeta. Estas reglas en forma de controlador recibirán el valor X como entrada y regresarán un nuevo valor X' tras ser tratado por las reglas definidas mediante etiquetas lingüísticas.

Una vez obtenido este valor de similitud modificada se debe obtener la afinidad del valor X' para cada uno de los números borrosos que definen la Categoría Prototípica Borrosa de la carpeta. Como fruto de este cálculo obtendremos diferentes grados de afinidad a los prototipos de documento definido dentro de la carpeta.

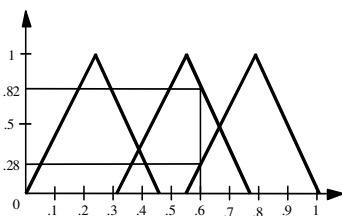


Figura 4: Afinidad calculada de un documento a los números borrosos de una carpeta

Posteriormente se determina el prototipo correspondiente al documento mediante la modificación de los prototipos originales. Este proceso se realiza mediante una combinación lineal modificada de éstos mediante el grado de afinidad a los prototipos y los parámetros que los definen.

$$C_p(w_1...w_n) = \sum \mu_{p_i}(v_1...v_n) \quad (3)$$

donde:

- C_p : Prototipo correspondiente al documento entrante.
- $(w_1... w_n)$ Parámetros que describen el marco correspondiente al prototipo del documento entrante.
- μ_{p_i} : Grado de afinidad del documento entrante al cada uno de los prototipos.
- $(v_1... v_n)$: Parámetros que describen el marco correspondiente a cada uno de los prototipos definidos en la carpeta.

3.4. Ejecución de acciones.

Una vez obtenido el prototipo correspondiente al documento entrante hay que ejecutar las acciones necesarias a su tratamiento.

La primera de las acciones, correspondientes a las labores de clasificación propias del sistema, es almacenar el documento en los grupos en las que haya conseguido una afinidad positiva superior a un umbral medio.

Para cada carpeta en la que se almacene se dispondrá de un marco de acción. Estos marcos de acción podrán resumirse de diferentes formas.

- Tomar únicamente el más afín y efectuar las acciones correspondientes a éste.
- Resumir mediante funciones de agregación todos los marcos relevantes en uno solo.

Actualmente la utilización de marco sobre la carpeta más afín es la solución elegida y ofrece buenos resultados, pero no deja de ser una opción incompleta. De esta forma se propone como trabajo futuro desarrollar la segunda opción teniendo en cuenta la utilización de operadores de agregación (OWA)[14].

Las probabilidades de acción se gestionarán mediante la generación de números aleatorios siguiendo una distribución normal.

4 ACTUALIZACIÓN DINÁMICA DE LA ESTRUCTURA

Dada la constante llegada de documentos entrantes en este tipo de repositorios de documentos tan dinámicos, por ejemplo, el correo electrónico, es inviable el rehacer la construcción de la estructura ante un cierto volumen de cambios. De esta situación surge la necesidad de que la clasificación de un nuevo documento entrante suponga algún cambio en la estructura a la que ha pasado a formar parte, conservándose, de esta manera, la vigencia de la estructura en el tiempo sin detrimento de la eficiencia.

Ante un nuevo documento entrante se realizarán las siguientes modificaciones en la estructura:

- En el vocabulario de la estructura se introducirán los términos nuevos que haya introducido el documento, los cuales pasarán a formar parte a la “bolsa” de términos no relevantes, pero que podrán pasar a serlo en el transcurso del tiempo.
- La jerarquía se verá afectada en cuanto se superen los factores de “mezcla” y “división” que se definan sobre ella. Estos factores permiten tratar situaciones en las que, dada la evolución del sistema, se den lugar a carpetas conceptualmente parecidas o carpetas con demasiados documentos que pueden ser a su vez organizadas para mejorar la manejabilidad.
- Cada carpeta individualmente se verá afectada por la inclusión del documento. Esto afectará tanto a Categorías Prototípicas Borrosas como a su vocabulario.
- Recálculo de probabilidades de acción potenciando aquellas que el usuario haya dado como buenas. Se utiliza para ello un aprendizaje parcialmente supervisado. Adaptar también las reglas del controlador de usuario.

4.1. ACTUALIZACIÓN DE LOS TERMINOS QUE DEFINEN EL CLUSTER

Ante un nuevo documento es necesario actualizar tanto el conjunto de términos de la carpeta como los grados de relevancia correspondientes. Esta actualización se realizará con el fin de que la definición de la carpeta sea similar a la que se hubiera obtenida si el documento entrante hubiera estado disponible en el proceso de construcción de la estructura.

Con este fin, para las carpetas en las que se ha clasificado el nuevo documento se realiza el siguiente proceso:

1. Para todos los términos del nuevo documento (utilizando el vector extendido del documento) :
 - a. Si existe el término en el vocabulario de la carpeta se añade su relevancia para tenerla en cuenta en el vector que define la carpeta.
 - b. Si no existe, se incorpora con la relevancia existente en el vector extendido del documento entrante. Normalmente, estos términos pasarán a formar parte del conjunto de otros términos.
2. Actualización/ recálculo de los términos relevantes según el algoritmo utilizando en la creación de la estructura. Este proceso puede tener los siguientes efectos:

- a. Un término relevante/subrelevante permanece en el conjunto en el que estaba situado pero se aumenta su relevancia debido a su presencia conceptual en el documento entrante.
- b. Un término subrelevante a partir de su nueva relevancia por su presencia conceptual en el documento entrante pasa a ser un término relevante.
- c. Un término relevante/subrelevante no presente en el documento entrante mantiene su relevancia pero debido a la nueva distribución de grados de relevancia pierde su categoría y pasa al grupo inferior (subrelevante u otros términos respectivamente).

4.2. ACTUALIZACIÓN DE LAS CATEGORÍAS PROTOTÍPICAS BORROSAS

Esta fase consistirá en la modificación del centro de los prototipos y/o en la definición paramétrica de ésta. Esta representación facilita la actualización de los coeficientes relevantes en la definición del cluster.

Dado que el documento ha sido almacenado en la carpeta, el documento entrante poseerá afinidad a uno o más prototipos de los definidos en esa carpeta. El documento por lo tanto entrará a formar parte dentro del grupo de documentos que definen a ese prototipo teniendo en cuenta su grado de afinidad a ellos. Esto producirá un cambio en los parámetros que definen los prototipos de los prototipos más afines, el cual, puede ser muy simple, cambiando únicamente su prototipo más afín, o causar un recálculo de todos los números borrosos (efectos frontera).

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se ha presentado una metodología de gestión dinámica de repositorios de documentos. En primer lugar se parte de una estructura jerárquica y borrosa que se obtiene de forma automática a partir de los conceptos inherentes a los documentos que conforman la colección. En segundo lugar, se utiliza la estructura de conocimiento para procesar convenientemente todos los documentos entrantes al repositorio a partir de los conceptos que se tratan en él. El objetivo final es poder clasificar el documento entrante en las diversas carpetas a las que sea conceptualmente afín y ejecutar las acciones vinculadas a su llegada (priorización, rechazo, etc.). Por último, la estructura debe adaptarse al entorno cambiante representando por sus documentos entrantes. Para ello, se establecen mecanismos para actualizar y adaptar todos los componentes de la estructura, asegurando su vigencia, adaptabilidad y utilidad en el tiempo.

Una de las ampliaciones más importante de este sistema es su aplicación en repositorios de documentos multi-idioma. Actualmente este método de gestión está preparado para actuar sobre colecciones de documentos que estén en inglés o en español de forma exclusiva. Como trabajo futuro se pretende que las agrupaciones conceptuales de la estructura puedan contar con documentos en diferentes idiomas que sean conceptualmente similares. Para ello se puede recurrir a la utilización del material procedente a la iniciativa UNL [16] de la UNESCO cuyo objetivo obtener una representación semántica unificada para frases expresadas en diferentes idiomas.

Dentro de los diversos cálculos efectuados en el proceso de construcción y gestión de la estructura se presentan diversas situaciones problemáticas a la utilización de funciones no acotadas. Un objetivo por tanto será solucionar o reducir el problema del cierre en cuanto a la utilización de combinaciones lineales como formas de agregación de resultados. Para ello se realizará un estudio exhaustivo de la utilización de los operadores de agregación avanzados (OWA) [14] y su aplicación en los procesos de construcción y gestión de la estructura de conocimiento.

También es necesario establecer mecanismos más avanzados de aprendizaje en la gestión del repositorio que pueden ser muy importantes tanto en el aprendizaje de reglas de usuario como en la modificación de las probabilidades de acción dependientes de las carpetas. Se plantea para ello la utilización de procesos de co-entrenamiento [4] que puedan combinar perfectamente las virtudes del aprendizaje supervisado con el no supervisado para realizar esta labor más eficientemente.

Referencias

- [1] Almorza Gomar, D. y otros. Conferencia Internacional de Estadística en Estudios Medioambientales Cadiz 2001.
- [2] Beil, F., Ester, M., Xu X.: Frequent Term-Based Clustering. Proceedings of the SIGKDD'02, Edmonton, Canada (2002)
- [3] Debole F., Sebastiani F., Supervised Term Weighting for Automated Text Categorization. In Proc. SAC-03, 18th ACM Symposium on Applied Computing, 2003.
- [4] Kiritchenko S. & Matwin S. Email Classification with Co-training, CASCON'02 (IBM Centre for Advanced Studies Conference), Toronto, 2002.
- [5] Olivas J.A., Garcés P., Romero F.P., An application of the FIS-CRM model to the FISS metasearcher: Using fuzzy synonymy and fuzzy generality for representing concepts in documents. International Journal of Approximate Reasoning (Soft Computing in Recognition and Search) 34, pp. 201- 219, 2003.
- [6] Olivas, J. A. (2000): Contribution to the experimental study of the prediction based on Fuzzy Deformable Categories, PhD Thesis, University of Castilla-La Mancha, Spain.
- [7] Porter, M. F., "An Algorithm for Suffix Stripping". Program, 14(3), 130-13, (1980).
- [8] Provost J., "Naïve-Bayes vs. Rule-Learning in Classification of Email". University of Texas at Austin, Artificial Intelligence Lab. Technical Report AI-TR-99-284, 2000.
- [9] Romero, F.P., Olivas J.A., Garcés, P., Proposal of a Document Cluster Representation based on Fuzzy Deformable Prototypes. Proceedings of EUSFLAT 2005. Barcelona, Spain.
- [10] Romero, F.P., Olivas J.A. A Soft Approach to Hybrid Models for Document Clustering, Proceedings of the IPMU 2006, (Aceptado para su publicación)
- [11] Sahami, M. et al. 1998. A Bayesian Approach to Filtering Junk E-Mail, in Proceedings of the AAAI Symposium.
- [12] Salton G. and McGill M.J. "Introduction to Modern Information Retrieval". McGraw-Hill, 1983.
- [13] Secker A., Freitas A., Timmis J.: "AISEC: an Artificial Immune System for E-mail Classification", Proc. of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO), San Francisco, USA, 2003.
- [14] Yager, R., On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operations in Multicriteria Decision making. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18, pp. 183-190, 1988.
- [15] Y. Yang , "An Evaluation of Statistical Approaches to Text Categorization", Journal of Information Retrieval, Vol 1, No. 1/2, pp. 67-88, 1999
- [16] H. Uchida, M. Zhu, Senta T. Della. "UNL: A Gift for a Millennium". The United Nations University, 1995.
- [17] Ungar, L.H., Foster, D.P.: Clustering Methods for Collaborative Filtering. Proceedings of the Workshop on Recommendation Systems, AAAI Press, Menlo Park California, 1998.
- [18] Zadeh, L. A note on prototype set theory and fuzzy sets. Cognition, 291-297, 1982
- [19] Y. Zhao and G. Karypis. "Evaluation of hierarchical clustering algorithms for document datasets". In Proceedings of CIKM, pp. 515-524. ACM Press, 2002.

UNA INTRODUCCION A LOS RESÚMENES AUTOMÁTICOS DE TEXTOS BASADOS EN SIMILITUD

Alejandro Sobrino

Facultad de Filosofía, Plaza de Mazarelos, Santiago de Compostela
lflgalex@usc.es

Resumen

El objetivo que persigue este trabajo es hacer una presentación breve de algunos de los aspectos más importantes que caracterizan a los resúmenes automáticos de texto, resaltar el papel de la similitud en esta tarea y presentar alguna parte significativa de algún sistema informático que ya hace resúmenes de textos en papel. A continuación, se presentan algunas de las singularidades propias de los resúmenes de textos electrónicos y se concluye apuntando la posibilidad de enfocar los resúmenes automáticos desde una perspectiva lógica en vez de léxica.

Palabras clave: Similitud, resúmenes automáticos de textos, resúmenes de páginas web

1. INTRODUCCIÓN

Resumir automáticamente textos no es una preocupación actual. A mediados del siglo pasado, [Luhn, 1958] ya se entrevió la utilidad de esta tarea. La difusión extensiva de información, primero en soporte papel, y recientemente en formato electrónico, ha convertido al resumen automático de textos no sólo en una interesante curiosidad intelectual -que también-, sino también, quizás, en una utilidad imprescindible en el futuro.

Se puede decir de modo genérico que resumir un texto es condensar lo que de relevante tiene. La relevancia es un concepto fundamental en la gestión de información, aunque está lejos de ser aprehendido de modo completo. La relevancia se asocia a la importancia que *per se* tenga un texto, pero también a la utilidad que proporcione al que lo lee, de manera que, para el propósito que nos ocupa, podríamos decir que un texto recoge lo relevante de otro si capta lo fundamental e informa convenientemente -usualmente con un propósito determinado o atendiendo a una intuición concreta- a la persona o personas que lean ese resumen.

Abreviar la información de un texto editado en formato electrónico tiene algunas peculiaridades añadidas a

extraer un texto escrito en papel. El formato electrónico impone ciertas marcas, propias de lenguajes como el HTML (HyperText Mark Language) con el que se crea la mayoría de los documentos web. Las marcas determinan la organización del texto, pero no aspectos relativos a su significado. Para paliar este problema se trató de asociar a cada página un conjunto de metadatos, que deberían resumir, usando una serie de palabras clave, el ámbito conceptual al que pertenece la página. Aunque se ha aconsejado profusamente la introducción de metadatos, no es obligatoria, motivo por el que raramente se anotan, siendo necesario acudir a otras estrategias para localizar o adivinar el contenido semántico de la página útil en un resumen.

La búsqueda en bases de datos tan extensas y heterogéneas como la web ofrece un número enorme de documentos relevantes que no es posible consultar en su totalidad. Si bien los buscadores son bastante eficientes procurando información -tienen gran cobertura-, no son muy exhaustivos. Disponer de buenos resúmenes ayudaría a paliar este problema. Los *snippets* quieren cumplir esta función, aunque todavía lo hacen de manera tosca, porque suelen resumir simplemente con las frases o palabras de la primera página del texto al que apunta el hiperenlace. En el caso de aparatos miniaturizados (móviles, *pdas*...) hay también aplicaciones que condensan el texto a sus notas esenciales (tecnologías WAP *Wireless Application Protocol*, o *i-mode* (mobile Internet)), aunque son muy imperfectos.

Disponer de aplicaciones mejores y más potentes para hacer resúmenes automáticos más completos requiere recursos avanzados, entre los que destacan aquellos procedentes del Procesamiento del Lenguaje natural (PLN), que permiten estructurar y aislar unidades relevantes de texto, y los provenientes del *Soft Computing* (SC), que posibilitan agrupar información o contenido significativo con *clusterings* basados en similitud. Este trabajo se dedicará a indagar en estos dos ámbitos, en las interrelaciones que presentan entre sí y en algunas tecnologías derivadas de ese mestizaje, haciendo referencia sobre todo a los resúmenes de textos escritos en soporte papel y apuntando, para terminar, sólo algunas dificultades añadidas cuando el formato es electrónico.

Para ello, el artículo se estructura de la siguiente forma. En el punto 2 se describirán las características principales de un resumen y de su automatización. En 3 destacaremos el papel de la similitud en el resumen automático de textos. En 4 indicaremos algunas técnicas de resúmenes automáticos basadas en el empleo de PNL y SC. En 5 nos referiremos a algunas características señaladas de los resúmenes de páginas web textuales. En 6 resumiremos algunas conclusiones de presente y trataremos de bosquejar algunas perspectivas de futuro. Los agradecimientos y las referencias bibliográficas cerrarán este trabajo.

2. RESÚMENES AUTOMÁTICOS

Resumir un texto es presentar, de modo breve, su contenido principal o más relevante. La tarea de resumir consta de varias acciones encadenadas [Spark-Jones, 1993]:

1. Análisis del texto a resumir
2. Selección de la información relevante
3. Generalización de esa información
4. Edición o generación del resumen.

Estas acciones se pueden concretar en dos modalidades de resumen, a las que laxamente denominaremos:

- Extracto: se extrae lo importante
- Síntesis: se abstrae lo relevante

Un extracto es un resumen que se construye escogiendo aquellos trozos de texto que se consideran relevantes, secuenciándolos de manera adecuada. Lo seleccionado no se suele corregir y, si hay que hacer alteraciones, serán siempre menores. De un extracto se dice que comprime un documento descartando o haciendo desaparecer aquel contenido que es poco relevante. Un extracto, por tanto, aísla aquellas oraciones más informativas de un texto y las une en un resumen.

Una síntesis es una glosa que describe el contenido de un documento expresando aquello que es más relevante sin usar necesaria, ni siquiera mayoritariamente, frases o expresiones que en él se hayan vertido. De una síntesis se dice que condensa un documento, y al ser un discurso abreviado sobre otro discurso, ha de mostrar tendencia a usar generalizaciones de hechos particulares.

Los resúmenes automáticos pueden tratar de combinar ambos métodos (extracto y síntesis), aunque hacerlo origina problemas de diseño por mezclar dos estilos diferentes de abreviar información.

Respecto a lo que se espera que ofrezcan los resúmenes, estos se clasifican en:

1. Genéricos
2. Guiados por preguntas
3. Enfocados por tópicos

1. Se dice que un resumen es genérico cuando abrevia el contenido global de un documento.

2. Un resumen está guiado por preguntas cuando se confina o restringe a la información relevante para responder a la pregunta. Este tipo de resumen es útil cuando se trata de manejar documentos muy grandes, como manuales de texto, o cuando son recopilatorios de temas diversos, como entradas de enciclopedias. Los resúmenes basados en preguntas también tienen importancia especial en el ámbito de la web y de sus buscadores.

3. Finalmente, un resumen enfocado por tópicos o temas tiene características similares a los resúmenes guiados por preguntas, si bien en vez de ceñirse a la información singular de la pregunta ha de atender a ciertos contenidos o temas. A los resúmenes guiados por temas se le suele requerir una estabilidad de contenido mayor que los resúmenes conducidos por preguntas.

El problema principal que caracteriza a cualquier tipo de resumen es:

- como seleccionar y extraer información específica de un texto
- cómo detectar su relevancia

La selección se suele hacer atendiendo a:

1. Aspectos léxico-estructurales.
2. Aspectos semánticos.

1. Aspectos léxico-estructurales

Los aspectos léxico-estructurales permiten hacer selecciones en términos de:

1.1. La posición o clase gramatical de un subconjunto seleccionado de léxico.

1.2. La segmentación de texto elegida.

1.1. Posición o clase gramatical

Respecto a la posición o naturaleza del léxico se apuntan, a modo de ejemplo y sin ánimo de completud, sólo algunos casos: así, son oraciones candidatas a figurar en un resumen:

- En contextos específicos, como artículos de periódico, la primera o la última frase.
- En contextos más generales, aquellas frases que empiezan por palabras como '*en resumen, brevemente dicho, a modo de conclusión...*'.

En este último caso, lenguajes formales clásicos como las expresiones regulares o lenguajes de programación

adecuados como *perl*, permiten operacionalizar o automatizar la extracción de oraciones que incluyan esas palabras. De usar expresiones regulares, el resumen se puede modelar en términos de un autómata finito. Si contuviera varias frases, una cascada de autómatas finitos donde la salida de uno es entrada de otro, simularía ese proceso. El sistema FASTUS [Hobbs et al., 1996], p. ej., emplea expresiones regulares para detectar oraciones adecuadas para los resúmenes, ponderándolas según la frecuencia que presentan en un corpus de resúmenes previamente seleccionado.

1.2. Segmentación

En lo que refiere a la segmentación de texto elegida, la elección de qué fragmentos de documentos son susceptibles de figurar como piezas de un resumen atiende a las siguientes alternativas:

- 1.2.1. Oraciones
- 1.2.2. Oraciones co-referenciales
- 1.2.3. Parágrafos
- 1.2.4. Discursos

1.2.1. Oraciones

Si se considera que la unidad de resumen es la oración, abreviar un texto no es tanto una tarea cognitiva compleja como un ejercicio de selección y ordenamiento de frases. Este ejercicio no es fácil y para resolverlo se han proporcionado varias heurísticas, que se basan en análisis de corpus de resúmenes, con los que es posible estimar la probabilidad de que una oración sea candidata a tal papel y esté en una posición determinada. Una vez ordenadas, se incluyen o no respetando el umbral máximo de longitud con el que usualmente se limitan los resúmenes.

Se estima que las oraciones candidatas a figurar en un resumen se han de atener a algunas características léxicas y semánticas:

Características léxicas:

- Han de incluir nombres propios. Los nombres propios de personas, empresas, etc., suelen representar objetos de interés; por tanto, deben figurar en un resumen.
- Deben comenzar con un artículo indefinido ‘un, una,...’, señal de generalidad.
- No deben tener pronombres. Los pronombres, por referir a entidades previamente mencionadas, indican redundancia, que no debe tener un resumen.
- Como ya se indicó, es buena señal que las oraciones incluyan partículas que señalan el fin o la conclusión del relato (‘finalmente’, ‘parar terminar’, ‘en resumen’,...)
- Las oraciones que expresan contenido relevante suelen ser más bien largas que muy cortas.
- No suelen tener partículas negativas (no, nunca,...)
- No acostumbran a incluir números.

-Tampoco suelen incluir términos imprecisos o informales (vagamente hablando, bueno, en fin,...).

Estas tres últimas características son acordes con la intuición de que los enunciados de un resumen deben ser positivos, generales y atender a convenciones de expresión.

Características semánticas:

-Las descripciones que expresan contenido relevante suelen ser más bien generales (Un maremoto de gran intensidad azotó...) que concretas (El tsunami de 2004 azotó...). Esto vale para resúmenes orientados por temas y no tanto para los basados en preguntas.

- Las oraciones candidatas a figurar en un resumen suelen tener léxico que se relaciona semánticamente con otras muchas palabras del texto (sinónimos, hipónimos o antónimos).

El problema más serio que aqueja a este tipo de segmentación es cómo combinar las oraciones seleccionadas para formar una redacción con sentido.

1.2.2. Oraciones co-referenciales

Se dice que dos expresiones lingüísticas, como ‘*Bill Gates*’ y ‘*El Presidente de Microsoft*’, son co-referenciales porque refieren a la misma entidad. La co-referencialidad es útil en los resúmenes basados en preguntas. En efecto, si la pregunta contiene el nombre de una persona o compañía, un método de obtener una oración candidata a figurar en un resumen es seleccionar aquellas frases co-referenciales de esa persona o compañía. La co-referencia también se usa como expansión de acrónimos (*PP*, *Partido Popular*) o en cadenas más bien largas donde solapan o coinciden la mayoría de las palabras (*El presidente ratificará el tratado de paz, Moncloa ratificará el tratado de paz, Zapatero ratificará el tratado de paz ...* -(en este caso, *El presidente, Moncloa* y *Zapatero* son co-referenciales)-).

1.2.3. Parágrafos

La oración, aunque frecuente, no es siempre la unidad escogida para construir resúmenes. Así, la mayoría de los artículos de periódico se resumen bien aislando el primer o el último párrafo y algo similar podría decirse de los artículos científicos, (el *Abstract* o las Conclusiones). Una tendencia usual para diagnosticar los párrafos que deben figurar en un resumen es reducir las posibilidades de elección vinculando aquellos que son similares y seleccionando uno de ellos como representante del resto. Para el cálculo de la similitud entre párrafos se pueden usar diversas técnicas. Aquí nos referiremos a dos:

- técnicas vectoriales
- anáfora

Con las técnicas de espacio vectorial se representan dos o más párrafos como vectores de términos. Se halla su similitud como el coseno del ángulo que los separa y se identifican los párrafos más similares. Cuanto más párrafos similares haya, más se podrá confiar en que el tema del que hablan es recurrente y, por tanto, relevante para el resumen. En ese caso, se elige a uno de ellos como representativo y se incorpora al resumen.

[Strzalkowski et al., 1999] identifican párrafos similares a través de la anáfora. La anáfora es una figura literaria mediante la cual se hacen menciones implícitas usando pronombres demostrativos (Juan y Pedro usaron la toalla de aquél y el desodorante de éste). Una vez identificados los párrafos similares, la decisión sobre su presencia en el resumen es de todo o nada: o se incluyen todos o ninguno de ellos en el sumario. Dependiendo de los tópicos que trate y de la longitud máxima admitida, se puntúan con una nota con la que se decide sobre su selección.

1.2.4. Discurso

En los resúmenes basados en discursos se suelen imponer algunas restricciones sobre los tópicos o temas que debe incluir un resumen. Si se trata de una sinopsis de un discurso judicial, se puede requerir que, p. ej., necesariamente se incluya información sobre los antecedentes, las pruebas y la sentencia. La elección de frases ha de rellenar cada uno de esos *slot* de manera conveniente, vinculándose además coherentemente. Una manera de hacerlo es acudir a una gramática textual, en la cual se ordenan los segmentos de texto en nodos y enlaces. SALOMON [Moens, 1997] en un ejemplo de sistema automático de resúmenes de textos judiciales. Su talón de Aquiles es su contextualidad, su localidad.

2. Aspectos semánticos.

Los aspectos de contenido semántico permiten seleccionar trozos de discurso para los resúmenes atendiendo a su cohesión significativa. Distinguimos:

- Cohesión léxica
- Redes conceptuales o marcos
- Identificación de tópicos

2.1. Cohesión léxica

[Kintsch & van Dijk, 1978] propusieron que el grado de cohesión léxica fuese un indicativo de las oraciones de resumen. La cohesión de un texto viene indicada, entre otros factores, por el uso repetitivo de una palabra o por la aparición frecuente de sinónimos. Si eso acontece, la palabra o clase de palabras aludidas probablemente sea importante en el texto, porque revele o acerque a su

temática principal y, por tanto, el pasaje que la incluye debería ser incorporado al resumen.

2.2. Redes conceptuales o marcos

Otra técnica para seleccionar oraciones de resumen son los marcos, un instrumento tradicional de I.A. usado para establecer y detectar dependencias conceptuales. Los marcos determinan algún tipo de relación jerárquica entre palabras y posibilitan que, a partir de cierto léxico ya seleccionado para un resumen, se pueda ‘adivinar’ o inducir otro que le debería acompañar. En esta tarea, la mayoría de los sistemas de extracción y recuperación de información no usan *scripts* completos sino *scripts sketchy*, que contienen sólo las aquellas conceptualizaciones más relevantes del tema. Así opera, p. ej., el sistema FRUMP, que resume noticias de periódicos [DeJong, 1982]. Una vez obtenida información específica (p. ej., naturaleza y localización del evento) genera, usando plantillas de dependencias conceptuales, un resumen (infiriendo, p. ej., que el arma utilizada en un atraco se encuentra en una oración después de la forma de infinitivo ‘matar’ y de la preposición ‘con’). La construcción manual de los marcos condiciona su aplicación a sistemas de extracción de información en dominios limitados. Resultados experimentales mostraron que los marcos obtenidos con aprendizaje automático producían resultados competitivos [Soderland, 1999].

2.3. Identificación de tópicos

La identificación de tópicos y subtópicos en un texto es muy importante para su resumen. Según [Hahn, 1990], para hacer un buen epitome hay que:

- Identificar el tema del documento
- Detectar los cambios de tema
- Elaborar un tema a partir de los diferentes subtemas del documento

El algoritmo más famoso de segmentación de texto es *TextTiling*, [Hearst, 1997] que computa la similitud de dos unidades de texto adyacentes. Los resultados se expresan en un gráfico de curvas suavizadas con valles, que señalan cambios de tema. El problema que suele afectar a estas estrategias es que descansan sobre conocimiento de dominio muy específico.

3. EL PAPEL DE LA SIMILITUD EN LOS RESÚMENES

La mayoría de los algoritmos de resumen descansan sobre la reiteración y sobre los vínculos colocacionales. Se dice que dos palabras tienen un vínculo colocacional si a menudo co-ocurren; esto es, si frecuentemente aparecen juntas o a cierta distancia. Se ha mostrado [Lin & Hovy, 2002] que la cohesión léxica detectada por relaciones

colocacionales es un buen indicador de contenido textual y, consecuentemente, un índice a tener en cuenta en los resúmenes automáticos.

En el ámbito de los resúmenes de texto, la similitud tiene un papel primordial atendiendo al siguiente *desideratum*: si se selecciona una frase como digna de figurar en un resumen y esa frase se articula respecto a una palabra nuclear o principal, otras frases que contengan sinónimos de esa palabra podrán ser representadas en el resumen por la primera. Es decir, en los resúmenes automáticos es fundamental contar con algoritmos de *clustering* o clasificación, que permitan agrupar oraciones o párrafos similares en un representante, que formaría parte del resumen. Los algoritmos de clasificación son jerárquicos: por tanto, la generación del cluster se detiene cuando se alcanza un número prefijado, que puede venir impuesto por el umbral de longitud máxima del resumen o, convencionalmente, por $\log_2 N$, siendo N el número de documentos a resumir.

La segmentación o agrupamiento de tópicos requiere técnicas que comparen el contenido de oraciones o párrafos y computen su similitud. Para extraer la oración representativa de un cluster se puede usar el *medoide*; es decir, la oración que es en promedio más similar a las otras oraciones del cluster, o apelar a la ayuda de modelos de discurso que señalen o marquen el contenido importante, como seleccionar la oración que aparece en primer lugar de la frase o el párrafo.

Las técnicas de clasificación requieren que se represente a las oraciones como vectores de términos y que se calcule su similitud. Las funciones de distancia más usadas son el producto interno y la función coseno. Otra variante para calcular la similitud es considerar el emparejamiento de n -gramos en vez del solape de términos sencillos. Estas medidas son la base de métricas más sofisticadas, en tanto que hallan la novedad informativa de la nueva oración cuando el resumen ya cuenta con un cierto número de ellas. Tal ocurre, p. ej., con la métrica de la relevancia marginal maximal [Goldstein, 1999].

Las medidas de similitud pueden incorporar restricciones que tengan en cuenta aspectos lingüísticos de los términos, como p. ej., si el igualamiento se restringe a palabras con un orden específico, a palabras que tienen el mismo rol semántico, a frases idénticas, a frases que comparten el mismo encabezamiento, etc. También que relajen las exigencias de solape, permitiendo emparejamiento de términos semánticos relacionados (sinónimos, hiperónimos, hipónimos, etc) o, incluso, palabras que pertenezcan a la misma clase categorial (organización, localización, evento, etc.).

Para que el resumen sea bueno es necesario detectar agrupamientos naturales de oraciones o párrafos, de tal

que manera que cada tema tratado pueda tener una representación en el resumen. Para ello los algoritmos empleados en el resumen automático deben capturar un grupo muy amplio de posibles *clusters* y buscar los mejores agrupamientos, minimizando la similitud entre objetos de diferentes clusters y maximizando el parecido entre objetos del mismo cluster. Debido a que el número de oraciones en un resumen es limitado, la ejecución de estos algoritmos es computacionalmente tratable [Angheluta, 2002].

Dada la amplia variedad de expresiones del lenguaje natural que sirven para expresar los mismos contenidos o significados, así como la enorme diversidad de estilos de autor, de tipos de textos, de clases de resúmenes..., es difícil definir criterios de similitud globales. Cuando es factible disponer de un conjunto de entrenamiento, el peso o importancia de un criterio de similitud se puede determinar a partir los *clusters* ya hallados.

4. ALGUNAS TÉCNICAS DE RESÚMENES AUTOMÁTICOS BASADAS EN PLN O EN SC.

Describiremos sólo aquellas partes de algunos sistemas seleccionados que realizan operaciones descritas en secciones anteriores:

- *KTDS (Kupiec's Trainable Document Summarizer)*
- *Reformulation Method (Columbia University Researchers)*
- *Clustering System (Carnegie Mellon Group)*

4.1. KTDS

Un ejemplo de sistema que emplea para la selección de oraciones-resumen conocimiento lingüístico y métodos estadísticos, como la Regla de Bayes o la métrica del coseno, es el *Kupiec's Trainable Document Summarizers*. La selección la hace fijándose en los siguientes parámetros:

- *Longitud*. Selecciona oraciones cortas, con un umbral máximo de 5 palabras
- *Presencia de coletillas de resumen*. Selecciona oraciones que empiecen por 'en conclusión', 'resumiendo'...
- *Orden de párrafo*. Se selecciona el primer y último párrafo de un documento.
- *Frecuencia*. Se seleccionan las oraciones que contienen las palabras más frecuentes.
- *Letras mayúsculas*. Se seleccionan nombres propios y acrónimos (especialmente si llevan descripciones entre paréntesis).

En general, dadas k características $C_1, \dots, C_k$, como las descritas, KTDS calcula la puntuación de cualquier

oración (s) de un documento (D) como candidata a ser oración-resumen usando la regla de Bayes -asumiendo independencia entre características-:

$$P(s \in D | C_1, \dots, C_K) = \frac{P(C_1, \dots, C_K | s \in D)P(s \in D)}{P(C_1, \dots, C_K)} = \frac{\prod_{j=1}^k P(C_j | s \in D)P(s \in D)}{\prod_{j=1}^k P(C_j)}$$

$P(s \in D)$ se puede aproximar por un factor constante, tal como el recíproco del número de oraciones de un documento y, por tanto, puede ser ignorado. Tanto $P(F_j | s \in D)$ como $P(F_j)$ se estiman a partir de conjuntos de entrenamiento.

4.2. REFORMULATION METHOD

Escoger párrafos representativos de *clusters* ayuda a reducir la redundancia, pero no integra información que pueda proceder de diferentes oraciones de esos párrafos. El método de la reformulación, desarrollado en la Columbia University, permite identificar frases clave de párrafos usando la estructura ‘predicado-argumento’ proveniente del cálculo de predicados. Con ella consigue reducir varias oraciones a una que no es ninguna de las anteriores. Para ello efectúa un doble proceso, primero de reducción y después de integración. Así, p. ej., las expresiones ‘El gobierno modificó el decreto’ y ‘El decreto fue modificado por el gobierno’, con diferente léxico, se pueden colapsar en su forma lógica:

modificar(gobierno, decreto)

que señala un significado común.

Oraciones más complejas pueden requerir métodos más sofisticados, como p. ej., una gramática de dependencias. Esta gramática permite anotar verbos con tiempo y voz o señalar el número de los nombres. Usando este recurso, la expresión de la lógica de predicados anterior quedaría ahora así:

<modificar, pasado>(<gobierno, definido, singular>, <decreto, genérico, singular>)

Análisis más sofisticados pueden incluir el uso de *Thesaurus*, que permitan asociar sinónimos. El propósito es dar cuenta de similitudes avistadas en la estructura profunda más allá de las diferencias que muestren las estructuras superficiales.

Una vez reducidas a su forma lógica, las oraciones se igualan usando un algoritmo de aprendizaje llamado RIPPER y las frases relevantes se intersecan entre sí para formar nuevas oraciones-resumen más informativas. P. ej. las oraciones ‘*Chomsky es el mayor lingüista vivo contemporáneo*’ y ‘*Chomsky, 75 años de edad, profesor del MIT,*’ las integra en ‘*Chomsky, 75 años de edad,*

profesor del MIT, es el mayor lingüista vivo contemporáneo’. Como se ha indicado antes, este proceso de integración se hace a partir de la forma lógica de las oraciones en vez de tratar con el texto plano. Usando el programa de generación de lenguaje FUF/SURGE se obtienen oraciones-resumen que previamente no había en los textos.

4.3. GROUP AVERAGE CLUSTERING ALGORITHM

Investigadores de la *Carnegie Mellon University* usaron un modelo convencional de espacio vectorial para su sistema de clasificación. Los documentos se procesan de la siguiente forma: se eliminan las *stop words*; de las palabras que quedan, se hace *stemming* (se escogen su raíces) y, finalmente, se calculan sus ponderaciones o pesos. El peso de un término *t* en un documento *d* se define así:

$$w(t, d) = \frac{1 + \log_2 TF_{t,d} \times IDF_t}{\sqrt{\sum_{d \in \langle d_i \rangle} d_i^2}}$$

donde *TF* e *IDF* son la frecuencia y la frecuencia inversa de un término y el denominador es la norma 2 del vector documento. La similitud entre dos documentos se define entonces como el coseno entre los dos vectores (este es el procedimiento que usa el popular sistema de recuperación de información, SMART).

Un *cluster* de documentos queda representado por un vector centroide, que es la suma normalizada de los vectores-documento. La similitud entre un *cluster* y un documento se halla usando, otra vez, la medida del coseno y el documento pasa a formar parte del *cluster* si supera un umbral, actualizándose así el centroide ante cada nueva incorporación. Si el documento no es suficientemente similar a alguno de los *clusters* existentes, entonces describe un nuevo evento y se crea otro *cluster* diferente para él, que tratará de atraer para sí a nuevos documentos.

La naturaleza iterativa de este algoritmo, denominado *Group Average Clustering*, maximiza la similitud entre documentos tomados de dos en dos en un *cluster*. El algoritmo sigue un patrón *bottom-up* (de abajo arriba) y comprende los siguientes pasos:

- Los relatos individuales son nodos hoja en un árbol binario de *clusters*, y se tratan como *clusters* individuales.
- Cualquier nodo intermedio es un centroide de dos hijos, más similares entre ellos que con cualquier otro elemento del *cluster*.
- La raíz del árbol contiene todos los *clusters* y, por tanto, todos los relatos.

5. ALGUNAS PECULIARIDADES DE LOS RESÚMENES DE TEXTOS WEB

Los textos web atienden a un número relativamente grande de formatos, aunque tienen un aire de familia: HTML, XML, PDF y PS. Ocultos, pueden incluir metadatos (decriptores de contenido), objetos incorporados (imágenes, pistas de sonido) o pequeños programas (Applets de Java). Pueden ser estáticos o ser generados dinámicamente a partir del contenido de bases de datos. La mayoría están escritos en lenguaje natural, lo que le añade flexibilidad pero, al mismo tiempo, le confiere un enorme potencial combinatorio de posibilidades expresivas. Todas estas circunstancias y otras no descritas ponen serias restricciones a las tecnologías que se pueden usar para resumir textos web.

Los esfuerzos para hacer la información de las páginas web más adaptable a las máquinas conllevan el desarrollo de estándares de intercambio de datos, como XML o formatos definidos sobre XML, como RDF. La Web semántica puede ser vista como un intento de anotar las páginas con metadatos que capaciten transacciones cada vez más complejas entre software. Visto en términos de una moneda, constituye el reverso del Procesamiento del Lenguaje Natural: el PLN busca como adaptar los lenguajes mecánicos a los lenguajes humanos; XML y sus tecnologías intentan llevar el lenguaje humano al redil de las máquinas. No obstante, ambas aproximaciones son complementarias y no excluyentes, como sugiere el W3C, que intenta promover la sinergia entre ambas, de la que resultarán productos interesantes.

Las páginas Web cubren todos los géneros posibles de escritura y temas y están escritas en una variedad enorme de lenguas. Pueden tener cualquier tamaño y desplegar todo tipo de estructuras y formatos. Los textos son volátiles y cambian frecuentemente; a menudo también son redundantes. Las páginas contienen hipertexto y se enlazan con otras de contenido similar o que tienen poco que ver con la original. Sistemas automáticos de resumen deben tratar con estas dificultades: volúmenes enormes de datos, diferentes lenguajes, datos distribuidos y pocos ejemplos ya clasificados que sirvan de entrenamiento a partir de los cuales aprender.

Los resúmenes web pueden estar orientados
-por preguntas
-por contexto
-por contenidos

5.1 POR PREGUNTAS

En el mundo web, el internauta se socializa (además de con otros medios, como chats, foros, ...) usando buscadores, con los que accede a la información sobre la

que pregunta. El buscador ofrece una lista de respuestas en formato de *snippets*; esto es, un hipertexto que dirige a una URL y un breve resumen de la página a la que se accedería caso de pinchar el enlace. El resumen que proporcionan los *snippets* es tosco y limitado, pero a veces ayuda al usuario a decidir si pinchar o no el enlace, (aunque el factor crítico de decisión parece relacionarse con el orden en el que aparece el *snippet*, no con el resumen que incluye). Dado que no se pueden consultar todas las páginas que devuelve un buscador, resúmenes mejores ayudarían a seleccionar mejor.

5.2 POR CONTEXTO

Los sistemas automáticos basados en contexto analizan y resumen el contexto (esto es, los *snippets*) de un documento en vez de sus contenidos. (Amitay & Paris, 2000) propusieron analizar el contexto de un documento haciendo preguntas del tipo "link:URL" a los motores de búsqueda. Esa consulta ofrece como resultado los *snippets* de las páginas que tienen hiperenlaces a esa Url. Un mecanismo de filtro, que recoge las preferencias de los usuarios halladas en un experimento *on line* de larga escala, permite seleccionar aquel más representativo como resumen del documento matriz.

5.3 POR CONTENIDOS

Lo resúmenes web también pueden estar orientados por contenidos, nutriéndose de las técnicas tradicionales de resumen, si bien se diferencian de los textos escritos en que las páginas web presentan una gran variedad de contenidos y carecen frecuentemente de una estructura de discurso visible. Debido a estas dificultades, en vez de seleccionar texto, los resúmenes basados en contenidos proponen un sistema de representación conceptual al que se 'traduciría' la página. OCELOT (Berger & Mittal, 2000) presenta un intento de descubrir los slots de esas representaciones a partir de colecciones de resúmenes hechos por los humanos, como la *DMOZ Open Directory Project*.

Como se ha dicho, actualmente se dispone de resúmenes de sitios Web hechos manualmente por expertos humanos, pero también hay intentos de acometer esta tarea de modo automático. El contenido de los resúmenes generados mecánicamente se compara, en un proceso de evaluación que implica a humanos, con los resúmenes DMOZ, para algunas páginas seleccionadas y tiempos de navegación acotados. La evaluación estadística de las respuestas a una lista de preguntas sobre el contenido de los sitios demuestra que los resúmenes generados mecánicamente ofrecen información similar a la que transmiten los resúmenes DMOZ.

6. CONCLUSIONES

Los resúmenes automáticos se han basado fundamentalmente en la extracción oportuna de frases o párrafos relevantes o en rellenar de modo conveniente los *slots* de la estructura del discurso. Ambos procedimientos son textuales y se basan en las habilidades logradas en el procesamiento del lenguaje natural. Existe no obstante otra orientación, de naturaleza no léxica, sino lógica. Se basa en el dictum de que hacer buenos resúmenes es obtener buenas conclusiones. En el modelo clásico que contesta a qué es una explicación, se dice que, en un formato legaliforme, explicar es resumir la información más conocida (el explanans), en aquello por lo que se pregunta y es más desconocido (el explanandum). Explicar sería resumir bien y resumir bien sería deducir convenientemente.

En el ámbito de la web, la recuperación de información también puede ser vista desde un punto de vista lógico. Recuperar un documento *d* a partir de una pregunta *p* es dirimir si $d \rightarrow p$. En este caso, *p* es lo más conocido y *d* es lo que hay que averiguar, pero si $d \rightarrow p$, encontrando *d* ratificaríamos que *p* ha sido una buena pregunta, ha sido una pregunta fructífera, porque ha hallado respuesta.

Una visión lógica de los resúmenes textuales automáticos y de los resúmenes web parece prometedora y fructífera, pero debe ser explorada en otro trabajo.

7. AGRADECIMIENTOS

Financiación a cargo del proyecto del MEC (TIN2004-07246-C03-01).

8. REFERENCIAS

- Anghelutta et al. 2002, 'The use of Topic Segmentation for Automatic Summarization', in *Proceedings of the Workshop on Automatic Summarization*, Philadelphia, 2002, 66-70
- Amitay, E & Paris C. 'Automatically Summarising Web sites: Is There a Way Around It?.' In *Proc. of the Ninth ACM Int. Conf. on Information and Knowledge Management*, 173-179, nov. 6-11, 2000
- Berger, A. & Mittal, V. 'OCELOT: A System for Summarizing Web Pages.' In *Proc. of the 23rd. Annual Int. ACM SIGIR Conf. on Research and Development in Information Retrieval*, 144-151, July, 24-28, 2000
- DeJong, G. 'An overviews of the FRUMP System', in Lehnert & Ringle (eds.), *Strategies for Natural Language Processsing*, Hillsdale, 1982, 149-176

Goldestein, J. 'Automatic Text Summariztion of Multiple Documents', 1999, <http://citeseer.nj.nec.com/goldstein99automatic.html>

Hearst, M. A. 'TextTiling: Segmenting text info multiparagraph subtopic pasajes'. *Computational Linguistics*, 23(1):33-64, 1997.

Kintsch, W & van Dijk, T.A., 'Toward a model of text comprensión and production', *Psychological Review*, 85 (5), 1978, 363-394

Lin, C. Y & Hovy, E. H., 'Neats in DUC 2002', in *Proceedings of the Workshop on Automatic Summarization*, Philadelphia, 2002, 99-103

Moens, M. F. et al., 'Abstracting of legal cases: The SALOMON experience,' *Proceedings of 6th International Conference on AI and Law*, Melbourne, pp. 114-122, 1997.

Moens, M. F. et al. 'Summarizarion of texts found on the World Wide Web', in W. Abramowicz, *Knowledge-Based Information Retrieval and Filtering from the Web*. Kluwer Academic Pub, 2003.

Jackson, P. & Moulinier, I., *Natural Language Processing for Online Applications*. John Benjamin Pub. Co., 2002.

Strzalkowski, T. et al., 'A robust practical text summarizer'. In Mani et al. (eds.), *Advances in Automated Text Summarization*. MIT Press, 1999.

Dealing With Ignorance Problems in Decision Making Under Fuzzy Preference Relations

S. Alonso

salonso@decsai.ugr.es

Dept. Of Computer Science
and Artificial Intelligence
University of Granada

E. Herrera-Viedma

viedma@decsai.ugr.es

Dept. Of Computer Science
and Artificial Intelligence
University of Granada

F. Herrera

herrera@decsai.ugr.es

Dept. Of Computer Science
and Artificial Intelligence
University of Granada

F. Chiclana

chiclana@dmu.ac.uk

Centre for Computational
Intelligence
De Montfort University (UK)

Abstract

Multiperson decision making problems involve using the preferences of some experts about a set of alternatives in order to find the best of those alternatives. However, sometimes experts cannot give all the information that they are required. Particularly, when dealing with fuzzy preference relations they can avoid giving some of the preference values of the relation. In previous works we developed a procedure able to estimate the missing values in the experts' fuzzy preference relations and we gave some basic approaches that would allow to solve *total ignorance* situations, that is, situations where an expert does not provide any information on at least one alternative (which could not be completed by the only application of the procedure). However, those approaches did not take into account any available external information in the problem. In this paper, we present some more advanced strategies which take advantage of other possible available sources of information as proximity among alternatives, proximity among the different experts in the problem and consensus information.

Keywords: Ignorance, Incomplete Information, Consensus, Multiperson Decision Making, Fuzzy Preference Relations.

1 Introduction

Multiperson decision-making (MPDM) consists of multiple individuals (usually experts) $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ which interact to reach a decision, that is, to choose the *best* alternative(s) from a feasible set of solution

alternatives $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, ($n \geq 2$) for the problem to be solved. Each expert may have unique motivations or goals and may approach the decision process from a different angle, but have a common interest in reaching eventual agreement on selecting the final solution(s) to the problem [5, 15]. Fuzzy preference relations are a preference representation format that has been widely used to express expert preferences over the set of possible solutions [3, 6, 7, 10, 18, 19].

It is a rather common situation in multiperson decision making when experts are not completely able to provide all the information that they are required [4, 12, 13, 14, 20]. For example, an expert might not possess a precise or sufficient level of knowledge of part of the problem or might be unable to discriminate the degree to which some options are better than others. In such cases, an expert would not be able to efficiently express any kind of preference degree between two or more of the available options, and therefore the fuzzy preference relation provided is *incomplete* [4, 20]. As usual decision models are not prepared to handle incomplete information situations (they usually require *complete* fuzzy preference relations as inputs) it is important to provide the experts with appropriate tools that allow them to overcome this lack of knowledge in their opinions.

Two different kinds of incomplete information in a MPDM problem can be identified:

- *Partial incomplete information.* In this case at least one expert does not provide all possible preference degrees over the set of alternatives, but provides information on his/her preferences in which every alternative is at least compared once against one of the rest of alternatives.
- *Total incomplete information.* In this case at least one expert does not provide all possible preference degrees over the set of alternatives, and provides information on his/her preferences in which at least one alternative is not compared against

any one of the rest of alternatives. We call this an *ignorance situation*.

The resolution of MPDM problems that present partial incomplete information has received some attention in the literature [1, 4, 9, 20]. However, the resolution of total incomplete information situations has yet received small attention. In [2] we pointed out four basic approaches to solve this kind of incomplete information situations. Nevertheless, those approaches were ad-hoc and consistency based strategies and thus, they did not make use of any external information that can be present in the problem.

In this paper we introduce some additional strategies that allow to solve total incomplete information situations in multiperson decision making which make use of information from different sources as information about the proximity of the alternatives, information about the proximity of the experts and consensus information in order to improve the results of the existent strategies. The use of these external sources of information can lead to the obtention of better quality solutions than the previously mentioned ad-hoc and consistency based strategies.

To do so, the rest of the paper is set out as follows: In *section 2* we present our preliminaries. *Section 3* presents three new strategies to solve the ignorance problem in MPDM which make use of one external information source (proximity of the alternatives, proximity of the experts or consensus among experts). In *section 4* we present an hybrid approach that is able to solve the ignorance problem using two or three of the possible external sources of information. Finally in *section 5* we point out some conclusions and future works.

2 Preliminaries

Fuzzy preference relations are commonly used to represent decision makers' preferences over the set of possible alternative solutions $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, ($n \geq 2$) [3, 6, 7, 10, 11, 16, 18, 19].

Definition 1. A Fuzzy Preference Relation (FPR) P on a set of alternatives X is a fuzzy set on the product set $X \times X$, i.e., it is characterized by a membership function $\mu_P: X \times X \rightarrow [0, 1]$.

When cardinality of X is small, the preference relation may be conveniently represented by the $n \times n$ matrix $P = (p_{ik})$, being $p_{ik} = \mu_P(x_i, x_k)$ ($\forall i, k \in \{1, \dots, n\}$) interpreted as the preference degree or intensity of the alternative x_i over x_k : $p_{ik} = 1/2$ indicates indifference between x_i and x_k ($x_i \sim x_k$), $p_{ik} = 1$ indicates that x_i is absolutely preferred to x_k , and $p_{ik} > 1/2$ indicates

that x_i is preferred to x_k ($x_i \succ x_k$). Based on this interpretation we have that $p_{ii} = 1/2 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ($x_i \sim x_i$).

Since each expert is characterized by his/her own personal background and experience of the problem to be solved, experts' opinions may differ substantially (there are plenty of educational and cultural factors that influence an expert's preferences). This diversity of experts could lead to situations where some of them would not be able to efficiently express any kind of preference degree between two or more of the available options. Indeed, this may be due to an expert not possessing a precise or sufficient level of knowledge of part of the problem, or because that expert is unable to discriminate the degree to which some options are better than others. We must note that an expert which is not able to provide a particular preference value p_{ik} does not necessarily imply that he/she is indifferent between both x_i and x_k alternatives, that is, we cannot directly suppose that $p_{ik} = 0.5$.

2.1 Incomplete Fuzzy Preference Relations

Usually, we assume that experts are always able to provide all the preferences required, that is, to provide all p_{ik} values. However, this may not always be the case, and experts end providing *incomplete fuzzy preference relations* [1, 20]. In the following definitions we express the concept of an incomplete fuzzy preference relation:

Definition 2. A function $f: X \rightarrow Y$ is *partial* when not every element in the set X necessarily maps onto an element in the set Y . When every element from the set X maps onto one element of the set Y then we have a *total* function.

Definition 3. [1] An *Incomplete Fuzzy Preference Relation* P on a set of alternatives X is a fuzzy set on the product set $X \times X$ that is characterized by a *partial* membership function.

When a particular preference value p_{ik} is not given by an expert we will note $p_{ik} = x$ and we will call it a *missing value*.

From a particular incomplete fuzzy preference relation P^h we define the following sets [1]:

$$A = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \dots, n\} \wedge i \neq j\}$$

$$MV^h = \{(i, j) \in A \mid p_{ij}^h = x\}$$

$$EV^h = A \setminus MV^h$$

$$EV_i^h = \{(a, b) \mid (a, b) \in EV^h \wedge (a = i \vee b = i)\}$$

where MV^h is the set of pairs of alternatives for which the preference degree of the first alternative over the second one is not given by expert e_h , that is, the set

of *missing values* of the expert e_h , EV^h is the set of pairs of alternatives for which the expert e_h provides preference values (we call it the *expert values* for e_h) and EV_i^h is the set of preferences about pairs of alternatives given by e_h involving x_i .

An ignorance situation in MPDM problems is defined as follows:

Definition 4. Let $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ be a group of experts which have expressed their preferences on a set of alternatives $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ by means of a set of incomplete fuzzy preference relations $\{P^1, \dots, P^m\}$. We define an ignorance situation in MPDM when at least one of the experts $e_h \in E$ does not provide any preference value involving a particular alternative $x_i \in X$, being x_i the unknown or ignored alternative for e_h , that is, $\exists i, h \mid EV_i^h = \emptyset$.

We must note that in [1, 9] we presented an estimation procedure able to estimate all missing values in an incomplete FPR except in ignorance situations, where the values that involve the ignored alternative could not be estimated. Thus, in the following we suppose that all the missing values in the FPR are the ones involving the unknown alternative (if not, we could use the procedure to estimate them).

3 Criteria Guided Strategies to Solve Ignorance Situations

In this section we present three different strategies to solve ignorance situations in MPDM which are based on the exploitation of external to the experts information. We will also provide some examples of application of every strategy. The first strategy is based on the proximity of the alternatives, and the second and third ones are based on *social properties* that can be obtained from the problem (proximity of the experts and the available consensus information).

3.1 Strategy 1: Estimate Ignored Information Considering the Proximity of the Alternatives

In some decision problems there exists information which relates the different alternatives among them. For example, for a particular problem, some of the alternatives could be similar. If this is the case, the preference values from an unknown alternative may be computed as some small random changes from the values provided for the similar alternative:

Estimation Procedure 1: If an incomplete fuzzy preference relation P^h has an unknown alternative x_i , and we know that alternative x_i is similar to alternative x_j

(that is, they share several characteristics), this strategy will compute every missing value as:

$$\begin{aligned} p_{ik}^h &= \text{rand}(p_{jk}^h - \delta, p_{jk}^h + \delta) \\ p_{ki}^h &= \text{rand}(p_{kj}^h - \delta, p_{kj}^h + \delta) \\ &\forall k \in \{1, \dots, n\}, k \neq i \neq j, \\ p_{ij}^h &= \text{rand}(0.5 - \delta, 0.5 + \delta) \\ p_{ji}^h &= \text{rand}(0.5 - \delta, 0.5 + \delta) \end{aligned}$$

where δ is a small factor (for example 0.1) that determines the magnitude on the change from the preference values of the similar alternative. This factor must be chosen prior to the beginning of the decision process (for example, the moderator can set this factor when defining the alternatives in the problem).

We must note that this kind of information (about the proximity of the alternatives) might not be present for every MPDM problem. Additionally, this kind of information cannot be obtained from the preferences provided by the rest of experts involved in the decision process. That is, if many experts choose very similar preference values for alternatives x_i and x_j , they cannot be considered as if they were similar options, because it would just mean that both options are more or less equally preferred, and thus, this strategy could not be applied on the unknown alternative.

Example 1: We have to solve a MPDM problem to find the best of 4 different alternatives: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. An expert e_1 gives the following incomplete fuzzy preference relation

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & 0.7 & x & 0.68 \\ 0.4 & - & x & 0.7 \\ x & x & - & x \\ 0.6 & 0.75 & x & - \end{pmatrix},$$

If we know that alternative x_3 is similar to x_2 and we assume that $\delta = 0.1$ we can estimate the unknown values following the *estimation procedure 1*. For example: $p_{13} = \text{rand}(p_{12} - 0.1, p_{12} + 0.1) = \text{rand}(0.6, 0.8)$. A possible result of the application of the procedure is:

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & 0.7 & \mathbf{0.76} & 0.68 \\ 0.4 & - & \mathbf{0.52} & 0.7 \\ \mathbf{0.41} & \mathbf{0.49} & - & \mathbf{0.63} \\ 0.6 & 0.75 & \mathbf{0.71} & - \end{pmatrix}$$

3.2 Strategy 2: Estimate Ignored Information Considering the Proximity of the Experts

This approach studies the similarities between experts to find which experts are similar to the expert which

has not provided preference values for an unknown alternative. The preference values about the unknown alternative provided by the most similar experts are then used to estimate the ignored values:

Estimation Procedure 2: If an incomplete fuzzy preference relation P^h given by an expert e_h has an unknown alternative x_i , we apply the following scheme:

1. For every expert $e_v \in E$, $e_v \neq e_h$ {
2. Compute $d_v = \text{dist}(e_v, e_h)$
3. }
4. $NE = \{e_v \mid d_v < \gamma\}$
5. if $\#NE < 2$ {
6. $NE =$ the 2 nearer experts
7. }
8. $p_{ik}^h = \phi^{v \in NE} p_{ik}^v$; $p_{ki}^h = \phi^{v \in NE} p_{ki}^v$

where $\text{dist}(e_a, e_b)$ computes a distance function between the two experts e_a and e_b , γ is a distance threshold to use the preferences from experts which are near to e_h and ϕ^{NE} is an aggregation operator that is used to aggregate different expert preference values. For simplicity reasons we propose the arithmetic mean as aggregation operator. Note that we do not provide a particular distance function as there are plenty that can be suitable to a particular problem.

Example 2: Lets suppose that expert e_1 provides the incomplete preference relation of the previous example (P^1). Additionally, experts e_2 , e_3 and e_4 give the following preference relations:

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & 0.6 & 0.4 & 0.7 \\ 0.4 & - & 0.7 & 0.4 \\ 0.6 & 0.35 & - & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & 0.3 & 0.6 & 0.25 \\ 0.7 & - & 0.55 & 0.5 \\ 0.4 & 0.45 & - & 0.7 \\ 0.8 & 0.5 & 0.3 & - \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} - & 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & - & 0.65 & 0.75 \\ 0.5 & 0.35 & - & 0.7 \\ 0.3 & 0.25 & 0.3 & - \end{pmatrix}$$

We compute a distance between the experts, for example, as a mean of the error between the preference

values given by each expert:

$$d_2 = \text{dist}(e_2, e_1) = 0.13 \quad ; \quad d_3 = \text{dist}(e_3, e_1) = 0.3$$

$$d_4 = \text{dist}(e_4, e_1) = 0.16$$

If we set the $\gamma = 0.15$, then $NE = \{e_2, e_4\}$ and we compute the ignored preference values as the arithmetic mean between the preference values of experts e_2 and e_4 :

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & 0.7 & \mathbf{0.45} & 0.68 \\ 0.4 & - & \mathbf{0.67} & 0.7 \\ \mathbf{0.55} & \mathbf{0.35} & - & \mathbf{0.65} \\ 0.6 & 0.75 & \mathbf{0.35} & - \end{pmatrix}$$

3.3 Strategy 3: Estimate Ignored Information Considering the Consensus Among Experts

If the resolution process for the MPDM problem involves obtaining a global opinion of consensus (consensus preference relation) [8, 16, 17, 19] (by means of an aggregation function over the different preference relations, for example) and it can be applied even if there exist missing values (aggregating only the given preference values, for example), its preference values about the unknown alternative can be used to complete the ignored preference values:

Estimation Procedure 3: If an incomplete fuzzy preference relation P^h has an unknown alternative x_i , and we have a global preference relation P^c which represents the current global opinion (solution of consensus) of all the experts on the problem, we can complete every missing value as:

$$p_{ik}^h = p_{ik}^c \quad ; \quad p_{ki}^h = p_{ki}^c \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, k \neq i.$$

Example 3: Lets suppose that expert e_1 provides the incomplete preference relation of the previous examples (P^1). Additionally, we know that the global (consensued) preference relation P^c is as follows:

$$P^c = \begin{pmatrix} - & 0.43 & 0.57 & 0.42 \\ 0.5 & - & 0.61 & 0.55 \\ 0.38 & 0.5 & - & 0.44 \\ 0.67 & 0.5 & 0.33 & - \end{pmatrix}$$

Then we can complete P^1 taking the unknown preference values from P^c :

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & 0.7 & \mathbf{0.57} & 0.68 \\ 0.4 & - & \mathbf{0.61} & 0.7 \\ \mathbf{0.38} & \mathbf{0.5} & - & \mathbf{0.44} \\ 0.6 & 0.75 & \mathbf{0.33} & - \end{pmatrix}$$

4 Hybrid Strategy

The presented strategies solve the ignorance problem by taking into account only one external source of information (proximity of the alternatives, proximity of the experts or consensus among experts). However, we think that to obtain better solutions it would be of great interest to be able to integrate all the available external sources of information. For example, if for a particular MPDM problem there is information about proximity of the alternatives and we can compute the proximity of the expert with an unknown alternative to the other experts it would be interesting to solve the ignorance problem taking into account both sources of information.

To do so, we provide the following generic procedure which is able to solve the ignorance problem taking into account the three possible external sources of information. It makes use of the previously presented strategies. We suppose that expert e_h has an unknown alternative x_i in his incomplete fuzzy preference relation P^h :

1. $StrategiesCount = 0$
2. if information about *proximity of alternatives* {
3. Compute $(p_{ik}^h)^1$ and $(p_{ki}^h)^1$ with *strategy 1*
4. $StrategiesCount ++$
5. } else {
6. $(p_{ik}^h)^1 = (p_{ki}^h)^1 = 0$
7. }
8. Compute $(p_{ik}^h)^2$ and $(p_{ki}^h)^2$ with *strategy 2*
9. $StrategiesCount ++$
10. if information about *consensus* {
11. Compute $(p_{ik}^h)^3$ and $(p_{ki}^h)^3$ with *strategy 3*
12. $StrategiesCount ++$
13. } else {
14. $(p_{ik}^h)^3 = (p_{ki}^h)^3 = 0$
15. }
16. Compute $p_{ik}^h = \frac{(p_{ik}^h)^1 + (p_{ik}^h)^2 + (p_{ik}^h)^3}{StrategiesCount}$
17. Compute $p_{ki}^h = \frac{(p_{ki}^h)^1 + (p_{ki}^h)^2 + (p_{ki}^h)^3}{StrategiesCount}$

We must note that *strategy 2* can always be applied (it is possible to measure the distance from e_h to the rest of the experts and it uses at least the information of the two nearest experts to compute the ignored values) whilst *strategy 1* and *strategy 3* can only be applied if the appropriate source of information is available, and thus, the *StrategiesCount* variable is needed to control the final computation of the ignored values.

Example 4: Lets suppose that expert e_1 provides the incomplete preference relation of the previous examples (P^1), that experts e_2 , e_3 and e_4 provide the preference relations presented in *example 2*, that there is information about consensus (the P^c preference relation of *example 3*), and additionally we have a piece of information that says that x_2 is similar to x_3 . Then we can use all of this information to compute the ignored preference values (as the arithmetic mean of the values obtained by the application of the three strategies):

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & 0.7 & \mathbf{0.59} & 0.68 \\ 0.4 & - & \mathbf{0.6} & 0.7 \\ \mathbf{0.45} & \mathbf{0.45} & - & \mathbf{0.57} \\ 0.6 & 0.75 & \mathbf{0.46} & - \end{pmatrix}$$

5 Conclusions and Future Works

In this paper we have presented some strategies to solve ignorance situations in MPDM, that is, situations where at least one expert involved in the resolution process does not provide any information on at least one alternative. The presented approaches differ from some previous efforts to solve this situations because they make use of external to the experts information (the previous approaches used ad-hoc and consistency based methodologies to solve the problem). Some of the external information that is used in the presented strategies comes from some social properties present in the resolution process for the MPDM problem, such as the proximity of the experts (the proximity of their opinions) and the available consensus information (information about the current consensus solution). We also provide a hybrid strategy that allows to exploit all available external information.

In future works we will study how to hybridize the presented strategies with consistency strategies, that is, we will define strategies that will solve the ignorance problem taking into account both external information (consensus or proximity of experts) with internal information (consistency of the experts).

Additionally, the strategies will be improved by integrating them in an on-line decision process which will

allow to incorporate user satisfaction on the ignorance problem (the experts will be able to accept or refuse the estimations obtained by the different strategies according to their point of view).

Acknowledgements

This work has been supported by the Research Project *TIC2003-07977* and *REDEMAP-II*: REd Temática Nacional de Procesos de Toma de DEcisiones, Modelado y Agregación de Preferencias (*TIN2004-21700-E*).

References

- [1] Alonso, S., Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Alcalá-Fdez, J., Porcel, C.: A Consistency Based Procedure to Estimate Missing Pairwise Preference Values. *International Journal of Intelligent Systems*, in press (2006)
- [2] Alonso, S., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., Herrera, F., Porcel, C.: Strategies to Manage Ignorance Situations in Multiperson Decision Making Problems. In proceedings of *Third International Conference, Modeling Decisions for Artificial Intelligence 2006*, Tarragona (Spain), *LNAI 3885*, (2006) 34–45
- [3] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E.: Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems* **97** (1998) 33–48
- [4] Efe A. Ok.: Utility Representation of an Incomplete Preference Relation, *Journal of Economic Theory* **104** (2002) 429–449
- [5] Evangelos, T.: *Multi-Criteria Decision Making Methods: A comparative Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000)
- [6] Fodor, J., Roubens, M.: *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994)
- [7] Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Chiclana, F., Luque, M.: Some issues on consistency of fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research* **154** (2004) 98–109
- [8] Herrera-Viedma, E., Alonso, S., Herrera, F., Chiclana, F.: A Consensus Model for Group Decision Making with Incomplete Fuzzy Preference Relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, in press (2006)
- [9] Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., Herrera, F., Alonso, S.: A Group Decision-Making Model with Incomplete Fuzzy Preference Relations Based on Additive Consistency. *IEEE Transactions On Systems Man And Cybernetics, Part B*, in press (2006)
- [10] Kacprzyk, J.: Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems* **18** (1986) 105–118
- [11] Kahraman, C., Ruan, D., Dogan, I.: Fuzzy group decision-making for facility location selection. *Information Sciences* **157** (2003) 135–153
- [12] Kim, S. H., Ahn B. S.: Group Decision Making Procedure Considering Preference Strenght Under Incomplete Information, *Computers and Operations Research* **24** (1997) 1101–1112
- [13] Kim, S. H., Ahn, B. S.: Interactive Group Decision Making Procedure Under Incomplete Information, *European Journal Of Operational Research* **116** (1999) 498–507
- [14] Kim, S. H., Choi, S. H., Kim, J. K.: An interactive procedure for multiple attribute group decision making with incomplete information: Range-based approach, *European Journal of Operational Research* **118** (1999) 139–152
- [15] Marakas, G. H.: *Decision support systems in the 21th century, 2nd edition*, Pearson Education, Inc., New Jersey, 2003
- [16] Orlovski, S. A.: Decision-making with fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978) 155–167
- [17] Szmidt, E., Kacprzyk, J.: A consensus reaching process under intuitionistic fuzzy preference relations, *International Journal of Intelligent Systems* **18:7** (2003) 837–852
- [18] Tanino, T.: Fuzzy preference orderings in group decision making. *Fuzzy Sets and Systems* **12** (1984) 117–131
- [19] Tanino, T.: Fuzzy preference relations in group decision making. In: J. Kacprzyk, M. Roubens (Eds.). *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*. Springer-Verlag, Berlin, (1988) 54–71
- [20] Xu, Z.S.: Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. *International Journal of Approximate Reasoning*, **36:3** (2004) 261–270

A recursive multiperson decision procedure based on OWA operators and quasiarithmetic means

Miguel Ángel Ballester

Dep. d'Economia i d'Història Econòmica
Universitat Autònoma de Barcelona
mballester@pareto.uab.es

José Luis García Lapresta

Dep. de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid
lapresta@eco.uva.es

Abstract

In this paper we introduce a new group decision procedure that follows a recursive pattern. In the first stage, the members of a group show their opinions on all the individuals of that group, regarding a specific attribute, by means of assessments within the unit interval. Taking into account this information, some aggregation operators and a family of thresholds, a subgroup of individuals is selected: those members whose collective assessment reach a specific threshold. Now only the opinions of this qualified subgroup are taken into account and a new subgroup emerges in the implementation of the aggregation phase. We analyze when this recursive procedure converges providing a final subgroup of qualified members, taking into account some extended EOWAs and quasiarithmetic means.

1 Introduction

In some occasions a group of individuals has to select a subgroup for doing a task or regarding an attribute. This is the case of a group of experts that has to decide which members should participate in a concrete task. Another possibility consists on determining which members of a society are the best for constituting a committee. There exist in the literature some works where the problem arises in choosing the members of the society satisfying a social identity (see Kasher and Rubinstein [7]), or with respect to a general attribute (see Samet and Schmeidler [11]). We note that in these mentioned papers, only dichotomous assessments are allowed. In Ballester and García-Lapresta [1] a recursive procedure for selecting a final group of individuals is introduced, taking into account individual assessments within the unit in-

terval and providing some results with respect to the convergence of that decision group procedure.

Aggregation operators allow us to generate a collective assessment to each individual of the group taking into account the individual opinions (see Fodor and Roubens [5], Grabisch, Orlovski and Yager [6] and Calvo, Kolesárova, Komorníková and Mesiar [3], among others). A simple way of selecting that subgroup can be done by means of thresholds or quota: all the members reaching the quota have to be chosen.

Typically, those members enrolled in this conformed category have more valuable opinions about the task or topic under discussion. It seems therefore reasonable to choose a *stable group*, i.e., a group such when considering their assessments on all society members, they would select themselves for the task. To analyze the possibility of arriving to stable subgroups, in this paper we consider a sequential procedure where in each stage a subgroup is selected, and taking the opinions of this subgroup a new subgroup emerges. We analyze when this procedure converges to a final set of selected individuals.

Among the large variety of aggregation operators, we have considered OWAs and quasiarithmetic means. OWA (“Ordered Weighted Averaging”) operators were introduced by Yager [12]; a wide study can be found in Yager and Kacprzyk [13]. Quasiarithmetic means were characterized by Kolmogoroff [8] and Nagumo [10]. In Bullen, Mitrovic and Vasić [2] there is an exhaustive study on means (chapters IV and VI are devoted to quasiarithmetic means). See Fodor and Roubens [5, 5.5] and Calvo, Kolesárova, Komorníková and Mesiar [3, 4.3] as well.

The paper is organized as follows. In Section 2 we introduce the framework for developing the group decision procedure we analyze in the paper. Section 3 includes some important families of collective evaluation mechanisms suitable for the recursive decision problem. In Section 4 we show the results of the pa-

per and Section 5 contains some conclusions.

2 Preliminaries

Consider a finite set of individuals $N = \{1, 2, \dots, n\}$ with $n \geq 2$. We use 2^N to denote the power set of N , i.e., the set of all the subsets of N , and $|S|$ is the cardinal of S . A *profile* is an $n \times n$ matrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

with values in the unit interval, where p_{ij} is the assessment with which the individual i evaluates individual j as being qualified to belong to the committee in question. The set of profiles is denoted by $\mathcal{P}$. Given a subset of individuals $S \subseteq N$, P_S denotes the $|S| \times n$ submatrix of P composed by those i -rows with $i \in S$. Given $j \in N$, we denote by P_S^j the j -th column vector of P_S . Finally, we denote by $\sigma(P_S^j)$ a permutation of vector P_S^j such that opinions are ordered from best to worst; and $[\sigma(P_S^j)]_i$ denotes the i -th component of $\sigma(P_S^j)$.

Definition 1 A Committees' Evaluation Mechanism (CEM) is a family of functions $\{v_S\}$, with $\emptyset \neq S \subseteq N$, where $v_S : \mathcal{P} \times N \rightarrow [0, 1]$ is a function that, given $P \in \mathcal{P}$, assigns a collective assessment $v_S(P, j) \in [0, 1]$ to each individual $j \in N$ in such a way that $v_S(P, j) = v_S(Q, j)$ for all $P, Q \in \mathcal{P}$ satisfying $P_S^j = Q_S^j$.

According to the previous definition, the collective assessment that the subgroup S provides to individual j , $v_S(P, j)$, only depends on the individual assessments of S on the individual j .

A CEM determines individual qualification only in gradual terms. A very natural way to convert a gradual opinion into a dichotomic assessment is by means of thresholds or quotas. An individual is qualified if the collective assessment is above a fixed quota.

Definition 2 A family of values $\{\alpha_S\}$, $\emptyset \neq S \subseteq N$, and $\alpha_S \in (0, 1]$ for every S , is called a Threshold Mechanism (TM).

Given a CEM $\{v_S\}$ and a TM $\{\alpha_S\}$, the family of functions $\{V_S\}$, with $S \subseteq N$, where $V_S : \mathcal{P} \rightarrow 2^N$ is the function that, given $P \in \mathcal{P}$, qualifies a new subgroup $V_S(P)$ as follows:

$$V_S(P) = \begin{cases} \{j \in N \mid v_S(P, j) \geq \alpha_S\}, & \text{if } S \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The family of functions $\{V_S\}$ is called the Committees' Qualification Mechanism (CQM) associated with $\{\alpha_S\}$ and $\{v_S\}$.

Definition 3 Given a CQM $\{V_S\}$, the sequence $\{S_t\}$, where $S_1 = N$ and $S_{t+1} = V_{S_t}(P)$, is called committees' sequence. A committees' sequence is said to be convergent if $\{S_t\}$ has a limit $\lim S_t$ (and it is also said that the sequence converges to $\lim S_t$). The CQM is said to be convergent if for any $P \in \mathcal{P}$ the committees' sequence generated is convergent.

Notice that, since society is a finite set, chain convergence can also be expressed as: there exists a positive integer q such that $S_t = S_q$ for every $t \geq q$.

3 Describing families of CEMs

In this section, we focus our attention on how general aggregations operators and classes of extended OWAs and quasiarithmetic means can be used in the recursive procedure introduced in the previous section.

3.1 The use of aggregation operators to construct CEMs

In some occasions, aggregation operators are defined for a given number of individual opinions. Notice however that for our model to apply, we have to consider collections of operators, one for each possible subgroup of individuals in society. There are multiple options to consider here, and it is our purpose to analyze general classes of operators. For the sake of a more intuitive analysis, we adopt here the following two assumptions about CEMs to be used:

SE Self-Exclusion: When an individual had to decide on himself/herself, he/she will exclude his/her opinion when possible (i.e., he/she is not the only reviewer).

CS Cardinality-Symmetry: When the same number of opinions have to be aggregated, the same operator will be applied (independently of the names of the reviewers).

Both of them could be eliminated without altering significantly the results, but we consider this model more natural.

3.2 OWAs

A broad family of operators that make sense in an aggregation process is that of OWAs.

Definition 4 The OWA operator of dimension p associated with the weighting vector $(w_1^p, \dots, w_p^p) \in [0, 1]^p$ such that $w_1^p + \dots + w_p^p = 1$ is the function $w^p : [0, 1]^p \rightarrow [0, 1]$ defined by

$$w^p(a_1, \dots, a_p) = w_1^p \cdot b_1 + \dots + w_p^p \cdot b_p,$$

with b_i the i -th largest of the $a_1, \dots, a_p$.

The notion of extended aggregation functions and extended OWAs (see Mayor and Calvo [9] and Calvo and Mayor [4]) becomes useful for our purposes.

Definition 5 An Extended OWA (EOWA) operator is a family of OWA operators $\{w^p\}$ where w^p is an OWA of dimension p with associated weights $(w_1^p, \dots, w_p^p) \in [0, 1]^p$ such that $w_1^p + \dots + w_p^p = 1$.

We now formally explicit how an EOWA can be considered a CEM following the assumptions **SE** and **CS**. This can be done by considering, for any $\emptyset \neq S \subseteq N$:

1. The OWA of dimension $|S|$, $w^{|S|}$, applied to P_S^j , if $j \notin S$.
2. The OWA of dimension $|S| - 1$, $w^{|S|-1}$, applied to $P_{S \setminus \{j\}}^j$, if $j \in S \neq \{j\}$.
3. The OWA of dimension 1, w^1 , i.e., the identity, applied to $P_{\{j\}}^j = p_{jj}$, if $S = \{j\}$.

It could be seem reasonable to impose certain conditions about the consistency of the threshold values and EOWAs across elites. However, we initially avoid such conditions in order to present the most general results. As it will be shown in Section 4, convergence is close related to the chosen families and therefore, the imposition of consistency conditions could help to get new insights for our recurrent model.

The following examples explicit relevant families of EOWAs.

Example 1 The *maximum* or *best* aggregator can be defined, for any p , through the weights

$$(w_1^p, \dots, w_p^p) = (1, 0, \dots, 0, 0).$$

The associated CEM $\{b_S\}$ is described in Table 1.

Cases	CEM: $b_S(P, j)$
(1) $j \notin S$	$\max\{p_{ij} \mid i \in S\}$
(2) $j \in S \neq \{j\}$	$\max\{p_{ij} \mid i \in S \setminus \{j\}\}$
(3) $S = \{j\}$	p_{jj}

Table 1: CEM associated with the *best* aggregator.

The associated CQM $\{B_S\}$ is defined by

$$j \in B_S(P) \Leftrightarrow b_S(P, j) \geq \alpha_S.$$

The *minimum* or *worst* aggregator has as associated weights: $(w_1^p, \dots, w_p^p) = (0, 0, \dots, 0, 1)$. The associated CEM and CQM are denoted by $\{w_S\}$ and $\{W_S\}$, respectively.

The *median* aggregator has weights

- $w_{\frac{p+1}{2}}^p = 1$ and $w_i^p = 0$ otherwise, whenever p is odd.
- $w_{\frac{p}{2}}^p = w_{\frac{p}{2}+1}^p = 0.5$ and $w_i^p = 0$ otherwise, whenever p is even.

The associated CEM and CQM are denoted by $\{m_S\}$ and $\{M_S\}$, respectively.

The description of the associated CEMs $\{w_S\}$ and $\{m_S\}$, and the CQMs $\{W_S\}$ and $\{M_S\}$, follows a similar pattern to that of the maximum in Table 1 and thus we omit them.

Example 2 The *average* aggregator can be defined, for any p through the weights

$$(w_1^p, \dots, w_p^p) = \left(\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right).$$

The associated CEM $\{a_S\}$ is described in Table 2.

Cases	CEM: $a_S(P, j)$
(1) $j \notin S$	$\frac{1}{ S } \sum_{i \in S} p_{ij}$
(2) $j \in S \neq \{j\}$	$\frac{1}{ S - 1} \sum_{i \in S \setminus \{j\}} p_{ij}$
(3) $S = \{j\}$	p_{jj}

Table 2: CEM associated with the *average* aggregator.

The associated CQM $\{A_S\}$ is defined by

$$j \in A_S(P) \Leftrightarrow a_S(P, j) \geq \alpha_S.$$

Example 3 The *olympic* aggregator can be defined, when $p \geq 3$, through the weights $w_1^p = w_p^p = 0$ and $w_i^p = \frac{1}{p-2}$ otherwise. For the cases $p = 1, 2$ we use as a natural extension the average aggregator. The associated CEM $\{o_S\}$ is described in Table 3.

The associated CQM $\{O_S\}$ is defined by

$$j \in O_S(P) \Leftrightarrow o_S(P, j) \geq \alpha_S.$$

Cases	CEM: $o_S(P, j)$
(1a) $j \notin S$ and $ S > 2$	$\frac{1}{ S - 2} \left(\sum_{i \in S} p_{ij} - \min\{p_{ij} \mid i \in S\} - \max\{p_{ij} \mid i \in S\} \right)$
(1b) $j \notin S$ and $ S \leq 2$	$\frac{1}{ S } \sum_{i \in S} p_{ij}$
(2a) $j \in S$ and $ S > 3$	$\frac{1}{ S - 3} \left(\sum_{i \in S \setminus \{j\}} p_{ij} - \min\{p_{ij} \mid i \in S \setminus \{j\}\} - \max\{p_{ij} \mid i \in S \setminus \{j\}\} \right)$
(2b) $j \in S$ and $ S \in \{2, 3\}$	$\frac{1}{ S - 1} \sum_{i \in S \setminus \{j\}} p_{ij}$
(3) $S = \{j\}$	p_{jj}

Table 3: CEM associated with the *olympic* aggregator.

3.3 Quasiarithmetic means

Definition 6 Let $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be an order automorphism, i.e., φ is bijective and increasing. The quasiarithmetic mean of dimension p associated with φ is the function $f_\varphi^p : [0, 1]^p \rightarrow [0, 1]$ defined by

$$f_\varphi^p(a_1, \dots, a_p) = \varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_p)}{p} \right).$$

We consider quasiarithmetic means that use the same order automorphism φ across dimensions. The construction of the associated CEM function $\{v_S\}$, as before, would be, for any $\emptyset \neq S \subseteq N$:

1. The quasiarithmetic mean of dimension $|S|$, $f_\varphi^{|S|}$, applied to P_S^j , if $j \notin S$.
2. The quasiarithmetic mean of dimension $|S| - 1$, $f_\varphi^{|S|-1}$, applied to $P_{S \setminus \{j\}}^j$, if $j \in S \neq \{j\}$.
3. The quasiarithmetic mean of dimension 1, f_φ^1 , i.e., the identity, applied to $P_{\{j\}}^j = p_{jj}$, if $S = \{j\}$.

Notice that the average aggregator is indeed a quasiarithmetic mean simply considering the identity automorphism.

Example 4 The *root-power* operators can be defined through the order automorphism $\varphi(x) = x^q$, with q

a positive integer. The associated CEM $\{r_S\}$ is described in Table 4.

Cases	CEM: $r_S(P, j)$
(1) $j \notin S$	$\left(\sum_{i \in S} p_{ij}^q \right)^{\frac{1}{q}}$
(2) $j \in S \neq \{j\}$	$\left(\sum_{i \in S \setminus \{j\}} p_{ij}^q \right)^{\frac{1}{q}}$
(3) $S = \{j\}$	p_{jj}

Table 4: CEM associated with the *root-power* aggregator.

The associated CQM $\{R_S\}$ is defined by

$$j \in R_S(P) \Leftrightarrow r_S(P, j) \geq \alpha_S.$$

4 The results

In this section we provide some necessary and sufficient conditions for the convergence of CQMs based on EOWAs and quasiarithmetic means. We pay special attention to CQMs based on examples provided in Section 3.

4.1 Convergence of CQMs based on EOWAs

In our first result, we present a very soft necessary condition for the convergence of the CQM derived from the use of EOWAs.

Proposition 1 Let $\{V_S\}$ be a CQM associated with an EOWA $\{w^p\}$ and a TM $\{\alpha_S\}$. If there exists a dimension $u \leq n - 1$ such that $w_1^u = 0$, then $\{V_S\}$ is not convergent.

The previous result allows us to discuss the instability of a broad family of OWAs.

Corollary 2 If $n \geq 4$, given any TM $\{\alpha_S\}$, the CQMs $\{W_S\}$, $\{M_S\}$ and $\{O_S\}$ are not convergent. If $n \geq 3$, the result still holds for $\{W_S\}$.

We now provide sufficient conditions for ensuring the convergence of CQMs based on EOWAs.

Proposition 3 Let $\{V_S\}$ be a CQM associated with an EOWA $\{w^p\}$ and a TM $\{\alpha_S\}$. If the following two conditions are satisfied:

1. For all positive integers m, u, v such that $m \leq u \leq v$ it holds

$$\sum_{i=1}^m w_i^u \geq \frac{u}{v} \sum_{i=1}^m w_i^v,$$

2. For all non-empty sets $U, V \subseteq N$ such that $U \subseteq V$ it holds $|U| \alpha_U \geq (|V| - 1) \alpha_V$,

then $\{V_S\}$ is convergent.

The previous result allows us to derive a characterization result regarding the convergence of the average OWA.

Corollary 4 *Given a TM $\{\alpha_S\}$, the following two conditions are equivalent:*

1. The CQM $\{A_S\}$ is convergent.
2. For all non-empty sets $U, V \subseteq N$ such that $U \subseteq V$, it holds $|U| \alpha_U \geq (|V| - 1) \alpha_V$.

We complete these results with a discussion of the maximum operator. This function generalizes the dichotomous case corresponding to an *invitation rule*, where one approval of a member of the *committee* is sufficient to qualify an individual.

Proposition 5 *Given a TM $\{\alpha_S\}$, the following two conditions are equivalent:*

1. The CQM $\{B_S\}$ is convergent.
2. For all non-empty sets $U, V \subseteq N$ such that $U \subseteq V$ it holds $\alpha_U \geq \alpha_V$.

4.2 Convergence of CQMs based on quasiarithmetic means

We now present sufficient conditions for the convergence of CQMs associated with quasiarithmetic means.

Definition 7 *Let $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be an order automorphism. The function $g_\varphi : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ is defined by $g_\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$.*

Lemma 6 *Let φ be an order automorphism. If the function g_φ is increasing, then $x \varphi(y) \geq \varphi(xy)$ for all $x, y \in [0, 1]$.*

Proposition 7 *Let $\{V_S\}$ be a CQM associated with a quasiarithmetic mean $\{f_\varphi^p\}$ and a TM $\{\alpha_S\}$. If the following two conditions are satisfied:*

1. The function g_φ is increasing,
2. For all non-empty sets $U, V \subseteq N$ such that $U \subseteq V$ it holds $|U| \alpha_U \geq (|V| - 1) \alpha_V$,

then $\{V_S\}$ is convergent.

Corollary 8 *If for all non-empty sets $U, V \subseteq N$ such that $U \subseteq V$ it holds $|U| \alpha_U \geq (|V| - 1) \alpha_V$, then any associated CQM $\{R_S\}$ is convergent.*

Corollary 9 *Let $\{V_S\}$ be a CQM associated with a quasiarithmetic mean $\{f_\varphi^p\}$ and a TM $\{\alpha_S\}$. If φ is convex and for all non-empty sets $U, V \subseteq N$ such that $U \subseteq V$ it holds $|U| \alpha_U \geq (|V| - 1) \alpha_V$, then $\{V_S\}$ is convergent.*

5 Concluding remarks

In the recursive decision procedure introduced in this paper, individuals show their opinions on the members of the society by means of assessments within the unit interval. For each committees' evaluation mechanisms and each family of thresholds, a committees' qualification mechanism is defined that generates a subset of qualified individuals in each stage. It is worth emphasizing that individuals only show their opinions once, and the recursive procedure sequentially generates a new group of qualified individuals taking into account only the opinions of the qualified individuals in the previous stage.

We have mainly considered some specific EOWAs and quasiarithmetic means and we have obtained results about the convergence of the associated committees' qualification mechanisms. So, we have found sufficient conditions for ensuring the convergence of EOWA mechanisms, being non convergent those EOWAs based on the worst, the median and the olympic procedures. We have also obtained some sufficient conditions ensuring the convergence of EOWA mechanisms. Moreover, some necessary and sufficient conditions for the convergence of the EOWAs based on the average and the best opinions have been obtained. On the other hand, we have provided some sufficient conditions for the convergence of mechanisms based on quasiarithmetic means, paying special attention to root-power means and those generated by convex order automorphisms.

6 Acknowledgments

This work is partially financed by the Spanish Ministerio de Educación y Ciencia (Projects MTM2005-08982-C04-02 and SEJ2005-01481/ECON), ERDF,

CREA, Junta de Castilla y León (Consejería de Educación y Cultura, Project VA040A05) and REDEMAP-II: Red Temática Nacional de Procesos de Toma de DEcisiones, Modelado y Agregación de Preferencias, TIN2004-21700-E.

[13] Yager, R.R., Kacprzyk, J. (eds.): *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications* (1997).

Referencias

- [1] Ballester, M.A., García-Lapresta, J.L.: A model of elitist qualification. Submitted.
- [2] Bullen, P.S., Mitrović, D.S., Vasić, P.M.: *Means and Their Inequalities*. Reidel, Dordrecht (1988).
- [3] Calvo, T., Kolesárová, A., Komorníková, M., Mesiar, R.: Aggregation operators: Properties, classes and constructions models. In T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, R. (eds.), *Aggregation Operators: New Trends and Applications*. Physica-Verlag, Heidelberg, 3–104 (2002).
- [4] Calvo, T., Mayor, G.: Remarks on two types of extended aggregation functions. *Tatra Mountains Mathematical Publications* **16**, 235–253 (1999).
- [5] Fodor, J., Roubens, M.: *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994).
- [6] Grabisch, M., Orlovski, S.A., Yager, R.R.: Fuzzy aggregation of numerical preferences. In: R. Slowinski (ed.), *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations and Statistics*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 31–68 (1998).
- [7] Kasher, A., Rubinstein, A.: On the question “Who is a J?”. A social choice approach. *Logique & Analyse* **160**, 385–395 (1997).
- [8] Kolmogoroff, A.: Sur la notion de la moyenne. *Atti della R. Accademia Nazionale del Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali* **12**, 388–391 (1930).
- [9] Mayor, G., Calvo, T.: On extended aggregation functions. *Proceedings of IFSA 97* vol. I, Prague, 281–285 (1997).
- [10] Nagumo, M.: Über eine Klasse der Mittelwerte. *Japanese Journal of Mathematics* **7**, 71–79 (1930).
- [11] Samet, D., Schmeidler, D.: Between liberalism and democracy. *Journal of Economic Theory* **110**, 213–233 (2003).
- [12] Yager, R.R.: Ordered weighted averaging operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **8**, 183–190 (1988).

Handling of absorbent information by aggregation operators

G. Beliakov

Deakin University
Australia
gleb@deakin.edu.au

T. Calvo

Univ. de Alcalá
Spain
tomasa.calvo@uah.es

A. Pradera

Univ. Rey Juan Carlos
Spain
ana.pradera@urjc.es

Abstract

We propose a generalization of the notion of the absorbent element of aggregation operators. Our construction involves tuples of values that are absorbent, that is, that decide the result of aggregation. We analyze some basic properties of this generalization and determine the absorbent tuples of some popular classes of aggregation operators.

Keywords: Aggregation operators, absorbent element, absorbent tuple, null set.

1 Introduction

Combining preferences, expert opinions, group decision making and welfare economics are generic examples in which aggregation procedures with different behaviour are needed. Such features as the veto rule, oligarchy, abstentions, anonymity and coalitions need to be properly modeled. Aggregation operators ([3]) are used to express in mathematical language various aggregation procedures.

In this work we extend the notion of the absorbent element of aggregation operators, a specific value which determines the result of the aggregation whenever any of its arguments takes this value. Our construction involves *absorbent tuples* – certain tuples (or vote combinations) that determine the result of aggregation by themselves.

Consider the following motivating example. A listed company has an executive board and broader shareholder's meetings, at both meetings preferences (expressed as votes) are aggregated. However if the executive board is mostly unanimous in its decision, it takes this decision by itself, without other shareholder's vote. If the executive board were able to take all decisions by itself, we would be talking about oligarchy. In our case we have partial oligarchy – only

certain vote combinations result in the outcome determined solely by the board. We call the set made of all such combinations a *null set*.

Another example of null sets involves combination of expert opinions, for instance during a competitive grant allocation procedure. A small committee of experts considers a large number of competitive grant applications, and gives each application a numerical score. The applications are also sent to reviewers – experts in a particular field – who also score the applications. At the end of the process all the scores are aggregated. The scores given by committee members weight more, because these experts consider many more applications than the reviewers. Thus several strong votes by committee members may decide the outcome irrespective of the scores of the reviewers, while in case of disagreement reviewers scores will be used. Can we model such situation with a single aggregation operator?

These illustrative examples suggest the variety of practical situations in which we would like to model absorbent behavior of the aggregation procedure. The purpose of this paper is to study aggregation operators from the point of view of handling absorbent information. It is organized as follows. After briefly recalling the main issues related to aggregation operators (Section 2), Section 3 generalizes the standard notion of an absorbent element in order to deal with absorbent tuples, and studies some basic properties of this generalization. Section 4 identifies the null sets (made of absorbent tuples) of some of the most popular families of aggregation operators, and, finally, the paper ends with some conclusions and pointers to future work.

2 Preliminaries

We assume that the reader is familiar with the main issues regarding *aggregation operators* (for details on the topic, see [1, 4] and the recent overview on aggregation theory included in [3]), and we just recall the

most basic notions that are needed in this paper. If the unit interval $[0, 1]$, denoted by I , is chosen as the basic domain, aggregation operators are defined as follows:

Definition 1 An aggregation operator is a function $F : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^n \rightarrow I$ such that:

- (i) $F(x_1, \dots, x_n) \leq F(y_1, \dots, y_n)$ whenever $x_i \leq y_i$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$.
- (ii) $F(t) = t$ for all $t \in I$.
- (iii) $F(\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-times}}) = 0$ and $F(\underbrace{1, \dots, 1}_{n\text{-times}}) = 1$

Each aggregation operator F can be represented by a family of n -ary operators $f_n : I^n \rightarrow I$ given by $f_n(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$. This representation allows to define most of the properties of aggregation operators. Let us recall, in particular, the definition of *absorbent element*:

Definition 2 Let F be an aggregation operator and $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ the corresponding family of n -ary operations. An element $a \in I$ is called an *absorbent element (annihilator)* of F if for each $n \geq 2$ and for all $x_1, \dots, x_n \in I$ it is $f_n(x_1, \dots, x_n) = a$ whenever $a \in \{x_1, \dots, x_n\}$.

3 Absorbent information

According to the definition which has just been recalled, an absorbent element of an aggregation operator F is a value $a \in I$ that carries the final output to a . In the following, in order to cope with larger pieces of absorbent information, we generalize the standard definition of absorbent element to the case of tuples $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in I^m$, $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

To denote the subsets of components of a vector $x \in I^n$ we shall employ the following notation. If $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ is an index set with cardinality $m = |\mathcal{I}|$ and $P = (P(1), \dots, P(m))$ is a permutation of $(1, \dots, m)$, then $x_{\mathcal{I}_P}$ will be used to denote the vector obtained from x by selecting the components whose indices are in $\mathcal{I}$ but in the order given by the permutation P (and using the convention $\mathcal{I}_1 < \dots < \mathcal{I}_m$): that is, we will have $x_{\mathcal{I}_P} = (x_{\mathcal{I}_{P(1)}}, \dots, x_{\mathcal{I}_{P(m)}})$. In addition, if $\bar{\mathcal{I}} = \{\bar{\mathcal{I}}_1, \dots, \bar{\mathcal{I}}_{n-m}\}$, with convention $\bar{\mathcal{I}}_1 < \dots < \bar{\mathcal{I}}_{n-m}$, denotes the complement of $\mathcal{I}$ in $\{1, \dots, n\}$, then $x_{\bar{\mathcal{I}}}$ will denote the tuple $(x_{\bar{\mathcal{I}}_1}, \dots, x_{\bar{\mathcal{I}}_{n-m}})$. For example, if $n = 5$, $\mathcal{I} = \{2, 4, 5\}$ and $P = (2, 1, 3)$, then $x_{\mathcal{I}_P} = (x_4, x_2, x_5)$, $\bar{\mathcal{I}} = \{1, 3\}$ and $x_{\bar{\mathcal{I}}} = (x_1, x_3)$.

Definition 3 Let F be an aggregation operator, $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$, $n > 1$, an index set such that $|\mathcal{I}| = m$ and P a permutation of $(1, \dots, m)$. Then:

- A tuple $\alpha \in I^m$ is *absorbent for F at level n with respect to (w.r.t.) $(\mathcal{I}, P)$* when

$$f_n(x) = f_m(\alpha_P) \quad (1)$$

holds for all $x \in I^n$ such that $x_{\mathcal{I}_P} = \alpha$, where $\alpha_P = (\alpha_{P(1)}, \dots, \alpha_{P(m)})$ is the tuple obtained from $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ by means of P .

- The set made of all the tuples $\alpha \in I^m$ which are absorbent for F at level n w.r.t. $(\mathcal{I}, P)$ will be denoted by $\mathcal{A}_m(F, n, \mathcal{I}, P)$ and will be called the *null set of F at level n w.r.t. $(\mathcal{I}, P)$* .

Example 1 Let F be an aggregation operator, $n = 3$, $\mathcal{I} = \{2, 3\}$, $P = Id$ (respectively $P = (2, 1)$) and $\alpha = (1, 0) \in I^2$. Then α is absorbent for F at level 3 w.r.t. $(\mathcal{I}, P)$, i.e., $\alpha \in \mathcal{A}_2(F, 3, \mathcal{I}, P)$, if $f_3(x_1, 1, 0) = f_2(1, 0)$ (resp. $f_3(x_1, 0, 1) = f_2(0, 1)$) holds for any $x_1 \in I$.

The above definition implies that when aggregating n values with F , the information contained in a given tuple α , if appearing in the positions indicated by some particular pair $(\mathcal{I}, P)$, transforms the final output to $F(\alpha_P)$. Of course, the same could happen – as it is the case of the standard absorbent element – independently of the positions that the components of α occupy in the input vector x and independently of the dimension of the input vector (as long as it is greater than the dimension of the absorbent tuple). The next definition accommodates this situation.

Definition 4 Let F be an aggregation operator and let $m \in \mathbb{N}$. Then:

- A tuple $\alpha \in I^m$ is *absorbent for F* when, for any $n > m$, for any index set $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$ such that $|\mathcal{I}| = m$ and for any permutation P of $(1, \dots, m)$, α is absorbent for F at level n w.r.t. $(\mathcal{I}, P)$.
- The set made of all the tuples $\alpha \in I^m$ which are absorbent for F will be denoted by $\mathcal{A}_m(F)$ and will be called the *m -null set of F* .

Example 2 The tuple $\alpha = (1, 0) \in I^2$ is absorbent for F if: $\forall n > 2, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n$,

1. If there exist $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, such that $x_i = 0, x_j = 1$, then $f_n(x) = f_2(0, 1)$.
2. If there exist $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, such that $x_i = 1, x_j = 0$, then $f_n(x) = f_2(1, 0)$.

Remark 1 If F is an aggregation operator and $m \in \mathbb{N}$, then:

1.

$$\mathcal{A}_m(F) = \bigcap_{n > m} \mathcal{A}_m(F, n, \mathcal{I}, P)$$

2. When choosing $m = 1$, Definition 4 recovers the standard definition of the absorbent element, i.e.:

$$\mathcal{A}_1(F) = \begin{cases} \{a\}, & \text{if } a \in I \text{ is absorbent for } F \\ \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

When referring to the set made of *all* the tuples, regardless of their dimension, which are absorbent for a given operator F , we will use the following:

Definition 5 The *null set* of an aggregation operator F , denoted by $\mathcal{A}(F)$, is the set made of all the tuples $\alpha \in I^m$, $m \in \mathbb{N}$, which are absorbent for F , i.e.,

$$\mathcal{A}(F) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_m(F)$$

Let us now discuss some general properties of absorbent tuples. We can first of all notice that absorbent tuples have the property that their aggregation, by means of F , always provides the same output:

Proposition 1 Let F be an aggregation operator. Then for any $\alpha, \beta \in \mathcal{A}(F)$ it is $F(\alpha) = F(\beta)$.

PROOF. Let us suppose that it is $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in I^r$ and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in I^s$ for some $r, s \in \mathbb{N}$. Then:

- (i) $\alpha \in \mathcal{A}(F)$ implies, in particular, $f_{r+s}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = f_r(\alpha)$
- (ii) Similarly, $\beta \in \mathcal{A}(F)$ implies $f_{r+s}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = f_s(\beta)$

From (i) and (ii) we get $F(\alpha) = F(\beta)$. $\square$

Remark 2 Observe that the last result allows one to simplify example 2 as follows: the tuple $\alpha = (1, 0) \in I^2$ is absorbent for F if $\forall n > 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$, it is $f_n(x) = f_2(0, 1) (= f_2(1, 0))$ whenever there exist $i, j \in \{1, \dots, n\}$ such that $x_i = 0, x_j = 1$.

Note also that choosing $\alpha, \beta \in I$, Proposition 1 recovers the uniqueness of the standard absorbent element. In addition, the result can be particularized to the case of aggregation operators with standard absorbent element in the following way:

Corollary 1 Let F be an aggregation operator with absorbent element $a \in I$. Then for any $\alpha \in \mathcal{A}(F)$, it is $F(\alpha) = a$.

In general, as the following example shows, tuples whose aggregation coincides with the absorbent element are not necessarily absorbent tuples.

Example 3 Let F be an aggregation operator such that each f_n , $n \geq 2$, is a –possibly different– t -norm [6]. Zero is absorbent for any t -norm, and, therefore, for F . Suppose now that $f_2(x, y) = T_L(x, y) = \max(0, x + y - 1)$ (the so-called Lukasiewicz t -norm) and that $f_3(x, y, z) = \min(x, y, z)$ (the minimum t -norm). Choosing, for example, $\alpha = (0.3, 0.3)$, it is $F(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$, but α is not an absorbent tuple, since we have, for instance, $F(0.3, 0.3, 0.2) = 0.2 \neq F(0.3, 0.3)$.

The next result shows that in some specific cases tuples whose aggregation coincides with the absorbent element are necessarily absorbent tuples:

Proposition 2 Let F be an associative and symmetric aggregation operator. Then, for any $\alpha \in I^m$, $m \in \mathbb{N}$, it is $F(\alpha) = F(0, 1)$ if and only if $\alpha \in \mathcal{A}_m(F)$.

PROOF. Recall (see e.g. [8]) that, if F is a symmetric and associative aggregation operator, then $F(0, 1)$ is its absorbent element. Then, we only need to prove that $F(\alpha) = F(0, 1)$ implies $\alpha \in \mathcal{A}_m(F)$, since Corollary 1 provides the converse. Therefore, we have to prove that for any $n > m$, any index set $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$, $|\mathcal{I}| = m$, any permutation P of $(1, \dots, m)$ and any $x \in I^n$ such that $x_{\mathcal{I}_P} = \alpha$, it is $f_n(x) = f_m(\alpha_P)$. But F is associative and symmetric, and therefore it is $f_n(x) = f_2(f_m(\alpha_P), f_{n-m}(x_{\bar{\mathcal{I}}}))$, and the latter is equal to $f_m(\alpha_P)$, since, by hypothesis, $f_m(\alpha_P) = F(\alpha)$ is the absorbent element. $\square$

This last result may be applied, in particular, to the well-known *triangular norms*, *triangular conorms*, *uninorms*, and *nullnorms*, since they all are symmetric and associative aggregation operators with absorbent elements, respectively, 0, 1, 0 or 1, and $0 < F(0, 1) < 1$ (see e.g. [3]). Note in addition that Proposition 2 proves the existence of aggregation operators having absorbent tuples: indeed, it shows that the null set of any symmetric and associative aggregation operator will include, at least, the tuples $(0, 1)$ and $(1, 0)$ (in addition to the absorbent element $F(0, 1)$). Moreover, Proposition 2 also points out the existence of operators –nullnorms– having absorbent tuples $(0, 1)$ and $(1, 0)$ – that do not contain their corresponding absorbent element (in the next section we shall see that nullnorms, as well as certain classes of triangular norms, triangular conorms and uninorms, have other non-trivial absorbent tuples).

We will now see that given an absorbent tuple, any tuple containing it (in whatever positions) is also an absorbent tuple:

Proposition 3 Let F be an aggregation operator and let $\alpha \in \mathcal{A}(F)$. Then for any tuple α^+ containing, at

least, all the values of α (in any position), it is $\alpha^+ \in \mathcal{A}(F)$.

PROOF. Let us suppose that $\alpha \in I^r$ and $\alpha^+ \in I^s$, $r \leq s$. Then we have to prove that for any $n > s$, any index set $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$, $|\mathcal{I}| = s$, any permutation P of $(1, \dots, s)$ and any $x \in I^n$ such that $x_{\mathcal{I}_P} = \alpha^+$, it is $f_n(x) = f_s(\alpha_P^+)$. But:

1. On one hand, $x_{\mathcal{I}_P} = \alpha^+$ and the fact that α is contained in α^+ implies the existence of an index set $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, n\}$, $|\mathcal{J}| = r$ and a permutation Q of $(1, \dots, r)$ such that $x_{\mathcal{J}_Q} = \alpha$. Then, since by hypothesis it is $\alpha \in \mathcal{A}(F)$, we get $f_n(x) = f_r(\alpha_Q)$.
2. On the other hand, the fact that α is contained in α^+ (and therefore in α_P^+), alone, implies the existence of an index set $\mathcal{K} \subset \{1, \dots, s\}$, $|\mathcal{K}| = r$ and a permutation R of $(1, \dots, r)$ such that $(\alpha_P^+)_{\mathcal{K}_R} = \alpha$. Then, since by hypothesis it is $\alpha \in \mathcal{A}(F)$, we get $f_s(\alpha_P^+) = f_r(\alpha_R)$.

Now, from 1. and 2. and the fact that $f_r(\alpha_Q) = f_r(\alpha_R)$ (see Proposition 1), we get $f_n(x) = f_s(\alpha_P^+)$. $\square$

Proposition 3 allows one to enlarge the class of aggregation operators having non-empty null sets with operators not necessarily symmetric or associative:

Corollary 2 *Let F be an aggregation operator with absorbent element $a \in I$ and let $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in I^m$, $m \in \mathbb{N}$, verify $\alpha_i = a$ for some $i \in \{1, \dots, m\}$. Then $\alpha \in \mathcal{A}_m(F)$.*

Thus we have established that the null sets of aggregation operators with a standard absorbent element will include, at least, any tuple containing the absorbent element. In the particular case of associative and symmetric aggregation operators, Proposition 3 also entails the following:

Corollary 3 *Let F be an associative and symmetric aggregation operator and let $\alpha \in I^m$, $m \geq 2$, be a tuple containing at least one 0 and one 1. Then $\alpha \in \mathcal{A}_m(F)$.*

Recall also (see for example [3]) that given an aggregation operator F and a monotone bijection $\varphi : I \rightarrow I$, the operator $F_\varphi : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^n \rightarrow I$, defined as $(f_n)_\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}(f_n(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)))$, is in turn an aggregation operator, usually known as the φ -transform of F . We may therefore wonder about the relationship between the null information associated to F and the one related to its φ -transform F_φ . The next proposition describes this relationship:

Proposition 4 *Let F be an aggregation operator and let $\varphi : I \rightarrow I$ be a monotone bijection. If $\mathcal{I} \subset$*

$\{1, \dots, n\}$, $n > 1$, is an index set such that $|\mathcal{I}| = m$ and P is a permutation of $(1, \dots, m)$, then for any $\alpha \in I^m$: $\alpha \in \mathcal{A}_m(F, n, \mathcal{I}, P)$ if and only if $\varphi^{-1}(\alpha) \in \mathcal{A}_m(F_\varphi, n, \mathcal{I}, P)$ where, if α represents the vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, then $\varphi^{-1}(\alpha)$ denotes the vector $(\varphi^{-1}(\alpha_1), \dots, \varphi^{-1}(\alpha_m))$.

PROOF. It suffices to take into account that $\phi(x_{\mathcal{I}_P}) = \phi(x)_{\mathcal{I}_P}$ and $\phi(\alpha_P) = \phi(\alpha)_P$ for any monotone bijection $\phi : I \rightarrow I$. $\square$

The above result can be applied to the duality transformation $\varphi(x) = \varphi_d(x) = 1 - x$ for any $x \in I$. In such case, the φ_d -transform of a given aggregation operator F , F_d , is known as the *dual* of F , and Proposition 4 states that the absorbent tuples of a given operator may be directly obtained from the ones of its dual operator.

Remark 3 *Note that the results obtained previously show the existence of tuples which are absorbent at the same time for an aggregation operator and its dual. Indeed:*

- If F is an associative and symmetric aggregation operator, an immediate consequence of Propositions 2 and 4 is that a tuple is absorbent both for F and its dual F_d if and only if it is $F(\alpha) = F(1 - \alpha) = F(1, 0)$ (indeed, F_d is obviously associative and symmetric and has $1 - F(1, 0)$ as absorbent element). In addition, Corollary 3 shows that this is the case, in particular, of any tuple containing the values 0 and 1. Note that when dealing with nullnorms, such tuples do not necessarily contain the absorbent element of either F or F_d .
- If F is an aggregation operator with absorbent element $a \in I$, an immediate consequence of Corollary 2 is that any tuple containing the values a and $1 - a$ is absorbent both for F and for its dual operator.

4 Null sets of aggregation operators

In this section we identify the null sets of some specific families of aggregation operators, namely *conjunctive/disjunctive* operators, *uninorms* and *nullnorms* (the study of other important classes of operators, such as *means*, will be addressed in future works).

4.1 Conjunctive and disjunctive operators

Conjunctive aggregation operators, i.e., those verifying $F \leq \min$, constitute an important class of operators that includes widely-used ones such as the already

mentioned *triangular norms* (t-norms) or *copulas* (see e.g. [6, 9]). Among their dual operators, known as *disjunctive aggregation operators*, one can find *triangular conorms* (t-conorms) and *dual copulas*. Conjunctive/disjunctive aggregation operators have 0/1 as absorbent element, so it suffices to apply Corollary 2 to obtain the following general result regarding their null sets:

Proposition 5 *If F is a conjunctive (resp. disjunctive) aggregation operator, then any tuple $\alpha \in I^m$, $m \in \mathbb{N}$, containing at least one 0 (resp. 1) satisfies $\alpha \in \mathcal{A}_m(F)$.*

T-norms and t-conorms are symmetric and associative aggregation operators, and therefore Proposition 2 provides the following characterization:

Proposition 6 *For any t-norm T , any t-conorm S and any $\alpha \in I^m$, it is $\alpha \in \mathcal{A}_m(T)$ if and only if $T(\alpha) = 0$, and $\alpha \in \mathcal{A}_m(S)$ if and only if $S(\alpha) = 1$.*

It is clear that strict t-norms/t-conorms (isomorphic to the product t-norm or the probabilistic sum t-conorm) have only trivial absorbent tuples (those containing at least one 0 or one 1). But there are t-norms and t-conorms (either continuous or non-continuous) with non-trivial absorbent tuples: those having zero divisors or one divisors, such as the drastic t-norm or drastic t-conorm, nilpotent t-norms or nilpotent t-conorms (isomorphic to the Łukasiewicz t-norm or t-conorm), the nilpotent minimum or nilpotent maximum, etc ([6]).

Example 4 *Nilpotent t-norms and t-conorms are given, respectively, by:*

$$T_{L\varphi}(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}[\max(0, \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) - (n-1))]$$

$$S_{L\varphi}(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}[\min(1, \sum_{i=1}^n \varphi(x_i))]$$

for all $x, y \in I$, where $\varphi : I \rightarrow I$ is a strictly increasing bijection. Then a tuple $\alpha \in I^m$ is absorbent for $T_{L\varphi}$ if and only if it satisfies the inequality $\sum_{i=1}^m \varphi(\alpha_i) \leq m-1$, and is absorbent for $S_{L\varphi}$ if and only if it satisfies the inequality $\sum_{i=1}^m \varphi(\alpha_i) \geq 1$.

Remark 4 *Following Remark 3, note that Example 4 provides tuples which are absorbent both for a nilpotent t-norm $T_{L\varphi}$ and for its dual t-conorm, $S_{L\varphi}$: those $\alpha \in I^m$ verifying $1 \leq \sum_{i=1}^m \varphi(\alpha_i) \leq m-1$.*

4.2 Uninorms and Nullnorms

Uninorms ([10, 5]) are associative and symmetric aggregation operators U with the neutral element $e \in$

$[0, 1]$. When $e = 1$ or $e = 0$ they coincide, respectively, with a t-norm or a t-conorm. They may be built by means of a rescaled t-norm in $[0, e]^n$ and a rescaled t-conorm in $[e, 1]^n$. Otherwise (that is, when it is $\min x_i < e < \max x_i$), uninorms verify $\min x_i \leq U(x_1, \dots, x_n) \leq \max x_i$. Recall in addition that for any uninorm it is $U(0, 1) \in \{0, 1\}$, and this allows one to classify them into two different classes: those such that $U(0, 1) = 0$, which have absorbent element 0 and are known as *conjunctive uninorms*, and those with absorbent element $U(0, 1) = 1$, known as *disjunctive uninorms*. Regarding absorbent information, the following result may be established from Proposition 2:

Proposition 7 *Let U be a uninorm with neutral element $e \in]0, 1[$, underlying t-norm T and underlying t-conorm S , and let $\alpha \in I^m$, $m \in \mathbb{N}$.*

1. *If U is conjunctive, then α is absorbent for U if and only if one of the two following conditions is satisfied:*
 - $\min \alpha_i = 0$, or
 - $\max \alpha_i \leq e$ and $T(\frac{\alpha_1}{e}, \dots, \frac{\alpha_m}{e}) = 0$.
2. *If U is disjunctive, then α is absorbent for U if and only if one of the two following conditions is satisfied:*
 - $\max \alpha_i = 1$, or
 - $\min \alpha_i \geq e$ and $S(\frac{\alpha_1 - e}{1 - e}, \dots, \frac{\alpha_m - e}{1 - e}) = 1$

Note therefore that a conjunctive (disjunctive) uninorm has non-trivial absorbent tuples if and only if its underlying t-norm (t-conorm) has zero divisors (one divisors).

Example 5

- *Consider the conjunctive uninorm with neutral element $e \in]0, 1[$ and with the nilpotent minimum (drastic product) as underlying t-norm. Then the tuples $\alpha = (x, y) : x + y \leq e$ ($\alpha = (x, y) \in [0, e]^2$) are absorbent for U .*
- *Consider the disjunctive uninorm with neutral element $e \in]0, 1[$ and with the nilpotent maximum (drastic sum) as underlying t-conorm. Then the tuples $\alpha = (x, y) : x + y \geq 1 + e$ ($\alpha = (x, y) \in [e, 1]^2$) are absorbent for U .*
- *The so-called representable uninorms (see e.g. [5]), which are defined with the help of an additive generator, have strict underlying t-norms and t-conorms. Therefore, their null sets are limited to the tuples containing the value 0 (if U is conjunctive) or the value 1 (if U is disjunctive).*

Nullnorms ([7, 2]) are symmetric and associative aggregation operators with an absorbent element $a \in [0, 1]$. They coincide with a t-norm or a t-conorm when $a = 0$ or $a = 1$, respectively, and may be built by means of a rescaled t-norm T on $[a, 1]^n$, a rescaled t-conorm S on $[0, a]^n$ and, otherwise, are equal to a . From Proposition 2 we have:

Proposition 8 *Let F be a nullnorm with absorbent element $a \in]0, 1[$, underlying t-norm T and underlying t-conorm S . Then $\alpha \in I^m$ is absorbent for F if and only if one of the following conditions is satisfied:*

- $\min \alpha_i < a < \max \alpha_i$, or
- $\max \alpha_i \leq a$ and $S(\frac{\alpha_1}{a}, \dots, \frac{\alpha_m}{a}) = 1$, or
- $\min \alpha_i \geq a$ and $T(\frac{\alpha_1 - a}{1 - a}, \dots, \frac{\alpha_m - a}{1 - a}) = 0$.

As a consequence, nullnorms have always some fixed absorbent tuples (those $\alpha \in I^m$ such that $\min \alpha_i \leq a \leq \max \alpha_i$) but may also have additional ones, depending on whether the underlying t-norm and t-conorm have, respectively, zero or one divisors:

Example 6 *Let F be a nullnorm with absorbent element $a \in]0, 1[$, underlying t-norm T and underlying t-conorm S . Then:*

- *If both T and S are strictly increasing (in $]0, 1]^n$ and $[0, 1[^n$, respectively), then the only tuples which are absorbent for F are those verifying $\min \alpha_i \leq a \leq \max \alpha_i$.*
- *If T is a nilpotent t-norm $T_{L\varphi}$ (see example 4), then the tuples $\alpha \in [a, 1]^m$ such that $\sum_{i=1}^m \varphi(\frac{\alpha_i - a}{1 - a}) \leq m - 1$ are absorbent for F .*
- *If S is a nilpotent t-conorm $S_{L\varphi}$ (see example 4), then the tuples $\alpha \in [0, a]^m$ such that $\sum_{i=1}^m \varphi(\frac{\alpha_i}{a}) \geq 1$ are absorbent for F .*

5 Conclusions and future work

We have extended the notion of the absorbent element of aggregation operators to absorbent tuples, studying some properties of this generalization, and have determined the absorbent tuples of some specific classes of aggregation operators.

Applications of the proposed notion of absorbent tuples can be found in various instances of multicriteria and multiperson decision making, as was illustrated in the introduction. Existence of absorbent tuples can be a desired or unwanted property, and the presented analysis will be useful when choosing aggregation operators for specific applications.

In the future we plan to determine the absorbent tuples of other classes of aggregation operators (as for example averaging operators or compensatory operators) and to develop construction procedures allowing to obtain aggregation operators with a predefined absorbent behavior.

Acknowledgements

This work was supported by the projects MTM2004-3175, BFM2003-05308, TIC2002-11942-E, TIC2003-09001-C02-02 and REDEMAP-II (TIN2004-21700-E) from Ministerio de Educación y Ciencia, Spain, and PRIB-2004-9250, Govern de les Illes Balears.

References

- [1] B. Bouchon-Meunier, editor. *Aggregation and Fusion of Imperfect Information*. Physica Verlag, Springer, 1998.
- [2] T. Calvo, B. De Baets, and J. Fodor. The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 120:385–394, 2001.
- [3] T. Calvo, G. Mayor and R. Mesiar, editors. *Aggregation Operators: New Trends and Applications*. Physica Verlag, Springer, 2002.
- [4] D. Dubois, H. Prade. A review of fuzzy set aggregation connectives. *Information Sciences*, 36: 85–121, 1985.
- [5] J. Fodor, R.R. Yager and A. Rybalov. Structure of Uninorms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5(4): 411–427, 1997.
- [6] E.P. Klement, R. Mesiar and E. Pap. *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [7] M. Mas, G. Mayor, and J. Torrens. T-operators. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 7(1):31–50, 1999.
- [8] M. Mas, R. Mesiar, M. Monserrat and J. Torrens. Aggregation Operators with annihilator, *International Journal of General Systems*, Vol. 34(1):17–38, 2005.
- [9] R.B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*, Springer, Berlin, 1998.
- [10] R. Yager and A. Rybalov. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 80:111–120, 1996.

UN MÉTODO ALGORÍTMICO PARA EXTENDER TOPSIS EN PROBLEMAS DE DECISIÓN CON NÚMEROS DIFUSOS

M. Socorro García

Depto de Electrónica, Tecnología
de Computadoras y Proyectos.
E.T.S de Ingeniería Industrial.
Universidad Politécnica de Cartagena. Murcia, Spain
socorro.garcia@upct.es

M. Teresa Lamata

Depto de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial.
E.T.S de Ingeniería Informática.
Universidad de Granada. 18071. Granada, Spain
mtl@decsai.ugr.es

Resumen

En muchos casos es difícil determinar con precisión el valor exacto de los datos correspondientes a un problema de decisión, bien por imprecisión ó por vaguedad, por ello, estos valores vamos a considerarlos como números difusos triangulares. De ésta manera, el propósito principal de este artículo es extender el método TOPSIS para problemas de toma decisión con datos difusos, presentando para ello un algoritmo que determine la opción preferible entre todas las posibles, cuando los datos son números difusos. Finalmente se presenta un ejemplo que ilustra el algoritmo propuesto

Palabras Clave: MCDM, TOPSIS, números difusos

tantes dentro de la extensa bibliografía disponible como son Triantaphyllou E [13] y Luce R.D, Raiffa H [10].

El objetivo de éste trabajo es presentar un algoritmo para extender el método TOPSIS clásico a problemas donde manejamos datos imprecisos, en este caso variables lingüísticas, que son modelizadas mediante números difusos, y donde el cálculo de los pesos de los criterios lo haremos aplicando el Modelo Jerárquico Analítico. Estas dos técnicas se aplicarán en un caso práctico donde poder apreciar las ventajas al utilizar este tipo de metodología.

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 2 recogemos los fundamentos del método TOPSIS así como la extensión de éste a la utilización de los números difusos, igualmente presentamos los pasos del algoritmo propuesto. En la Sección 3 desarrollamos el ejemplo de aplicación y finalmente en la sección 4 presentamos las conclusiones al trabajo así como los trabajos futuros.

1 INTRODUCCIÓN

Desde que el mundo es mundo, y a diario, las personas nos vemos involucradas en tomar decisiones que afectan a nuestra vida y desde hace gran cantidad de años los investigadores están interesados en el análisis de cómo los humanos realizamos esta tarea. De ésta forma, estudiamos las alternativas que podemos elegir así como los criterios en función de los cuales las vamos a evaluar; esto que a primera vista parece sencillo, forma parte de toda una disciplina que llamaremos Modelos de Decisión Multicriterio (MDMC).

Cuando acometemos la compra de un producto, la calidad y el precio son dos de los factores a tener en cuenta en la decisión final, pero uno de ellos es contable mientras que el otro es incontable por lo que resulta interesante poder trabajar con métodos donde puedan integrarse tanto valores cuantificables como no cuantificables siendo éste el caso del método TOPSIS.

Muchos son los autores que podríamos referenciar en este contexto pero nos referiremos a dos libros impor-

2 MÉTODO TOPSIS

El método TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) es un método para ordenar preferencias por similitud a una solución ideal, fue desarrollado por Hwang y Yoon [5] en 1981 y mejorada por los propios autores en 1987 y 1992, también trabajaron Zeleny [19], Lai et al [9] y muchos más. TOPSIS es un método de decisión multicriterio para identificar las soluciones de un conjunto finito de alternativas. El principio básico es que la alternativa elegida debe tener la menor distancia a la solución ideal positiva y la mayor distancia a la solución ideal negativa. Una solución ideal se define como una colección de puntuaciones o valores en todos los atributos considerados, pudiendo suceder que tal solución sea inalcanzable. El vector compuesto por los mejores valores del j-ésimo atributo respecto a todas las alternativas posibles es quien recibe el nombre de “solución ideal positiva”; recíprocamente, la “solución ideal negativa” será aquella cuyo vector contenga los peores valores en todos los atributos.

De éste modo, puede suceder que una alternativa seleccionada desde el punto de vista de su “distancia” más corta respecto de la solución ideal positiva deba competir con otra alternativa seleccionada como la más lejana de la solución ideal negativa. Por ello, y a fin de definir la solución ideal, el método TOPSIS define un índice de similaridad que se construye combinando la proximidad al ideal positivo y la lejanía respecto al ideal negativo.

El procedimiento de TOPSIS puede expresarse en una serie de pasos que pueden verse en Chen y Hwang [2]

2.1. MÉTODO TOPSIS CON NÚMEROS DIFUSOS

En determinados casos es difícil trabajar con los valores exactos de los pesos así como con la valoración de las alternativas dentro de un problema de decisión, como es el caso del ejemplo que nos ocupa y muchas veces la información de la que se dispone no está claramente definida, por lo que consideraremos números difusos y extenderemos el método TOPSIS para estos tipos de datos.

La teoría de los conjuntos difusos introducida por Zadeh (1965) trata de modelizar aquellos problemas que son vagos, imprecisos e inciertos; esta herramienta ha sido utilizada para modelar sistemas complejos que pueden controlarse por los humanos pero que son difíciles de definir con precisión. Una colección de objetos X (universo de discurso) contiene un conjunto A que se describe mediante una función de pertenencia f_A con valores en el intervalo $[0,1]$.

$$f_A: X \rightarrow [0,1].$$

Así, un conjunto A puede representarse como $A = \{f_A(x); x \in X\}$. En este artículo, con el soporte de la teoría de conjuntos difusos, utilizaremos los números difusos triangulares, que se parametrizan por tripletas, para representar la importancia de los criterios y la actuación sobre las alternativas.

Definición 1: Un número real difuso A se describe como un subconjunto difuso de la recta real a través de la función de pertenencia f_A que tiene las siguientes propiedades.

- (a) f_A es una aplicación continua de R en el intervalo cerrado $[0,1]$
- (b) $f_A(x)=0$, para todo $x \in (-\infty,a]$.
- (c) f_A es estrictamente creciente en $[a,b]$
- (d) $f_A(x)=1$, para todo $x \in [b,c]$
- (e) f_A es estrictamente decreciente en $[c,d]$

(f) $f_A(x)=0$, para todo $x \in [d, \infty)$

donde a,b,c y d son números reales.

Definición 2: El número difuso A será triangular si su función de pertenencia f_A está dada por:

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1)$$

donde a,b y c son números reales. En esta fórmula, c y a son respectivamente, los valores superior e inferior del soporte de A , y b es un punto interior al soporte. El número difuso triangular se denota como (a,b,c) .

Las operaciones para los números difusos positivos son como siguen. Sea $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos números triangulares difusos parametrizados por las tripletas (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) respectivamente, entonces:

Suma de números difusos:

$$\underline{A} \oplus \underline{B} = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2] \quad (2)$$

Multiplicación de números difusos:

$$\underline{A} \otimes \underline{B} = [a_1 \times a_2, b_1 \times b_2, c_1 \times c_2] \quad (3)$$

División de números difusos:

$$\underline{A} \div \underline{B} = [a_1 \div c_2, b_1 \div b_2, c_1 \div a_2] \quad (4)$$

Definición 3: Un (MDMC) consta en general de los siguientes elementos: Un conjunto de alternativas $A_1, A_2, \dots, A_m$ entre las que el decisor tiene que elegir, un conjunto de criterios $C_1, C_2, \dots, C_n$ con los que se mide cada actuación de las alternativas, el número difuso $\underline{x}_{ij} = [\underline{x}_{ij}^a, \underline{x}_{ij}^b, \underline{x}_{ij}^c]$ es la evaluación de la alternativa A_i con respecto al criterio C_j . Un MCDM con números difusos puede considerarse concisamente expresado en forma de matriz como la representada en la tabla 1.

Tabla1: Matriz de decisión

	w_1	w_2	w_n	
	C_1	C_2	$\dots$	C_n
A_1	$\underline{x}_{11}$	$\underline{x}_{12}$	$\dots$	$\underline{x}_{1n}$
A_2	$\underline{x}_{21}$	$\underline{x}_{22}$	$\dots$	$\underline{x}_{2n}$
A_m	$\underline{x}_{m1}$	$\underline{x}_{m2}$	$\dots$	$\underline{x}_{mn}$

donde $w_j, j=1,2,\dots,n$ se expresa también mediante un número difuso que representa el peso del criterio C_j .

2.1.1. El método algorítmico propuesto

Proponemos un algoritmo para determinar la opción preferible entre todas las posibles alternativas, y para ello tendremos en cuenta las operaciones con números difusos anteriormente definidas:

Paso 1: *Identificación de los criterios de evaluación* de forma que relacione las capacidades del sistema con los objetivos.

Paso 2: *Generación de alternativas* determinando el sistema finito de alternativas para lograr el objetivo

Paso 3: *Evaluación de las alternativas en función de los criterios.*

Paso 4: *Identificación del peso de los criterios.* Es importante considerar que los criterios puedan tener distinta importancia. En el caso difuso que nos ocupa y puesto que tratamos con variables lingüísticas una vía es el uso del modelo de pares comparados.

Paso 5: *Construcción de la matriz de decisión* con números difusos así como la matriz de decisión normalizada asociada, Para ello los valores de cada criterio los dividimos por la norma

$$\bar{n}_{ij} = x_{ij} / \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij})^2}, j=1,\dots,n, i=1,\dots,m \quad (5)$$

utilizando para los números difusos las operaciones definidas (2) y (4), siendo $\bar{n}_{ij} = (n_{ij}^a, n_{ij}^b, n_{ij}^c)$ otro número difuso.

Paso 6: *Construcción de la matriz ponderada normalizada asociada.*

$$\bar{v}_{ij} = w_j \bar{n}_{ij}, j=1,\dots,n, i=1,\dots,m, \quad (6)$$

donde $\bar{v}_{ij} = (v_{ij}^a, v_{ij}^b, v_{ij}^c)$ y operaremos utilizando (3).

Paso 7: *Determinación de la solución ideal positiva y la solución ideal negativa*, respectivamente.

$$\bar{A}^+ = \{\bar{v}_1^+, \dots, \bar{v}_n^+\} = \left\{ \left(\max_{j \in J} \bar{v}_{ij}, j \in J \right), \left(\min_{j \in J'} \bar{v}_{ij}, j \in J' \right) \right\} \quad (7)$$

$$\bar{A}^- = \{\bar{v}_1^-, \dots, \bar{v}_n^-\} = \left\{ \left(\min_{j \in J} \bar{v}_{ij}, j \in J \right), \left(\max_{j \in J'} \bar{v}_{ij}, j \in J' \right) \right\} \quad (8)$$

donde J está asociado con aquellos criterios que indican ganancias o beneficios y J' está asociado con los criterios que indican pérdidas o costes.

Paso 8: *Cálculo de la separación de cada alternativa con respecto a la solución ideal positiva y a la solución ideal negativa* respectivamente:

$$\bar{d}_i^+ = \left\{ \sum_{j \in J} (\bar{v}_{ij} - \bar{v}_j^+)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, i=1,\dots,m \quad (9)$$

$$\bar{d}_i^- = \left\{ \sum_{j \in J} (\bar{v}_{ij} - \bar{v}_j^-)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, i=1,\dots,m \quad (10)$$

en este caso usamos la distancia euclídea.

Paso 9: *Cálculo de la proximidad relativa* de cada alternativa a la solución ideal positiva y negativa mediante el índice de proximidad.

$$\bar{R}_i = \frac{\bar{d}_i^-}{\bar{d}_i^+ + \bar{d}_i^-}, i=1,\dots,m \quad (11)$$

Si $\bar{R}_i = 1 \rightarrow A_i = \bar{A}^+$

Si $\bar{R}_i = 0 \rightarrow A_i = \bar{A}^-$

Paso 10: *Establecimiento del orden de preferencias de todas las alternativas de acuerdo al coeficiente de proximidad.*

Obviamente, una alternativa A_j está más próxima a la $\bar{A}^+$ y más lejana de $\bar{A}^-$ cuanto más se aproxima a 1 el índice $\bar{R}_i$.

3 EJEMPLO DE APLICACIÓN

En esta sección, trabajamos con un caso real de decisión para ilustrar el método de decisión TOPSIS mediante el algoritmo propuesto. El problema del que se parte es el siguiente; contamos con piezas que tienen diversos grados de suciedad, con geometría muy diferente, y necesitamos un proceso de trabajo que exige rapidez y flexibilidad a la hora de limpiar piezas y donde se deben tener en cuenta criterios como el coste total de operación anual, la productividad del sistema empleado, la capacidad de carga del sistema, la eficiencia en la limpieza y la salubridad de los productos utilizados. El objetivo global del problema es decidir cual es el mejor sistema de lavado de piezas.

Al abordar el problema nos encontramos con unos criterios cuyos datos se podían cuantificar y otros que no, dadas sus características, la evaluación solo podía obtenerse mediante valores lingüísticos.

Paso 1: Establecer los criterios de decisión

- C1: Coste Total de operación anual.
- C2: Productividad volumétrica de la Pila
- C3: Capacidad de carga

- C4: Eficiencia en la limpieza
- C5: Salubridad

Paso 2: Determinar las alternativas

- A1: Lavadora convencional
- A2: Lavado químico
- A3: Lavado ultrasonidos

Paso 3: Evaluar las alternativas en términos de los criterios.

Donde por un lado tendremos valores numéricos, son los referentes a los criterios 1 y 2 y etiquetas lingüísticas para el resto, ambos tipos de datos los modelizaremos mediante números difusos triangulares y que recogemos en la figura 1 y en la tabla 2 respectivamente.

	C_1 (miles €)	C_2 (m^3/h)	C_3	C_4	C_5
A_1	$21,399+2\%+4\%$	$0.768 \pm 3\%$	Regular	Regular	Bueno
A_2	$27,971+2\%+4\%$	$0.468 \pm 3\%$	Muy bueno	Bueno	Muy malo
A_3	$45,479+2\%+4\%$	$2.520 \pm 3\%$	Bueno	Bueno	Bueno

Figura 1: Matriz de decisión.

Tabla 2: Valores numéricos de las etiquetas

Pesos de los C_i	
Muy malo	[0, 1, 1.9]
Regular	[4.2, 4.8, 5]
Bueno	[5, 5.8, 6.8]
Muy bueno	[7.9, 9, 10]

Paso 4: Identificar el peso de los criterios

Para la identificación del peso de los criterios se utilizó el método de pares comparados [13, 14] y debido a sus propiedades usamos como operador la media geométrica, estos datos una vez normalizados nos dieron la tabla 3. Estos resultados provienen de la matriz de comparación de criterios del Apéndice 1.

Tabla 3: Pesos de los criterios	
Pesos de los C_i	
C1	[0.1357, 0.3942, 0.9035]
C2	[0.0912, 0.2601, 0.7121]
C3	[0.0327, 0.0610, 0.2092]
C4	[0.0693, 0.1772, 0.5175]
C5	[0.0437, 0.1076, 0.3417]

Paso 5: Construir la matriz de decisión con números difusos así como la matriz de decisión normalizada, estos datos quedan representados en las tablas 4 y 5.

Tabla 4: Matriz de decisión

	A_1	A_2	A_3
C_1	(21.349, 21.776, 22.203)	(27.971, 28.530, 29.090)	(45.479, 46.388, 47.298)
C_2	(0.745, 0.768, 0.791)	(0.454, 0.468, 0.482)	(2.446, 2.520, 2.595)
C_3	(4.2, 4.8, 5)	(7.9, 9, 10)	(5.5, 5.8, 6.8)
C_4	(4.2, 4.8, 5)	(5.5, 5.8, 6.8)	(5.5, 5.8, 6.8)
C_5	(5.5, 5.8, 6.8)	(0.1, 1.9)	(5.5, 5.8, 6.8)

Tabla 5: Matriz de decisión normalizada

	A_1	A_2	A_3
C_1	(0.357, 0.371, 0.386)	(0.468, 0.486, 0.506)	(0.760, 0.791, 0.822)
C_2	(0.270, 0.287, 0.304)	(0.165, 0.175, 0.186)	(0.888, 0.942, 0.999)
C_3	(0.321, 0.409, 0.488)	(0.604, 0.767, 0.976)	(0.382, 0.494, 0.663)
C_4	(0.387, 0.505, 0.608)	(0.461, 0.610, 0.827)	(0.461, 0.610, 0.827)
C_5	(0.510, 0.702, 0.962)	(0.0, 0.121, 0.269)	(0.510, 0.702, 0.962)

Paso 6: Construir la matriz ponderada normalizada .

Tabla 6: Matriz de decisión ponderada normalizada

	A_1	A_2	A_3
C_1	(0.048, 0.146, 0.349)	(0.063, 0.192, 0.457)	(0.103, 0.312, 0.743)
C_2	(0.025, 0.075, 0.217)	(0.015, 0.045, 0.132)	(0.081, 0.245, 0.712)
C_3	(0.010, 0.025, 0.102)	(0.019, 0.047, 0.204)	(0.012, 0.030, 0.139)
C_4	(0.027, 0.089, 0.315)	(0.032, 0.108, 0.428)	(0.032, 0.108, 0.428)
C_5	(0.022, 0.075, 0.329)	(0.0, 0.013, 0.092)	(0.022, 0.075, 0.329)

Paso 7: Determinar la solución ideal positiva y la solución ideal negativa, que se exponen en las tablas 7 y 8 respectivamente.

Tabla 7: Solución ideal positiva

v_1^+	$(v_1^{a+}, v_1^{b+}, v_1^{c+})$	(0.0484, 0.1464, 0.3489)
v_2^+	$(v_2^{a+}, v_2^{b+}, v_2^{c+})$	(0.0810, 0.2450, 0.7116)
v_3^+	$(v_3^{a+}, v_3^{b+}, v_3^{c+})$	(0.0197, 0.0468, 0.2041)
v_4^+	$(v_4^{a+}, v_4^{b+}, v_4^{c+})$	(0.0320, 0.1081, 0.4279)
v_5^+	$(v_5^{a+}, v_5^{b+}, v_5^{c+})$	(0.0223, 0.0755, 0.3286)

Tabla 8: Solución ideal negativa

v_1^-	$(v_1^{a-}, v_1^{b-}, v_1^{c-})$	(0.1032, 0.3118, 0.7432)
v_2^-	$(v_2^{a-}, v_2^{b-}, v_2^{c-})$	(0.0150, 0.0455, 0.1322)
v_3^-	$(v_3^{a-}, v_3^{b-}, v_3^{c-})$	(0.0105, 0.0250, 0.1021)
v_4^-	$(v_4^{a-}, v_4^{b-}, v_4^{c-})$	(0.0269, 0.0895, 0.3146)
v_5^-	$(v_5^{a-}, v_5^{b-}, v_5^{c-})$	(0, 0.0130, 0.0918)

Paso 8: Calcular la distancia de cada alternativa a la solución ideal positiva y a la solución ideal negativa que reflejamos en las tablas 9 y 10 respectivamente.

Tabla 9: Distancia de cada alternativa a la solución ideal positiva

d_1^+	$(d_1^{a+}, d_1^{b+}, d_1^{c+})$	(0.0573, 0.1727, 0.5176)
d_2^+	$(d_2^{a+}, d_2^{b+}, d_2^{c+})$	(0.0712, 0.2139, 0.6352)
d_3^+	$(d_3^{a+}, d_3^{b+}, d_3^{c+})$	(0.0552, 0.1663, 0.3997)

Tabla 10: Distancia de cada alternativa a la solución ideal negativa

d_1^-	$(d_1^{a-}, d_1^{b-}, d_1^{c-})$	(0.0599, 0.1792, 0.4677)
d_2^-	$(d_2^{a-}, d_2^{b-}, d_2^{c-})$	(0.0411, 0.1234, 0.3242)
d_3^-	$(d_2^{a-}, d_2^{b-}, d_2^{c-})$	(0.0698, 0.2099, 0.6371)

Paso 9: Calcular el coeficiente de proximidad. Ver tabla 10.

Tabla 11: Coeficiente de proximidad

Alternativas	$\bar{R}_i$ $(\bar{R}_i^a, \bar{R}_i^b, \bar{R}_i^c)$	Orden
A ₁	(0.0608, 0.5092, 3.9910)	2
A ₂	(0.0428, 0.3659, 2.8864)	3
A ₃	(0.0673, 0.5581, 5.0952)	1

Paso 10: Ordenar las alternativas de acuerdo al coeficiente de proximidad.

$$A_3 > A_1 > A_2$$

Según se desprende de los resultados propuestos en la tabla 11 y se refleja en la figura 2.

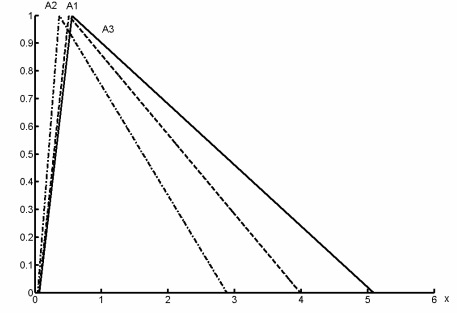


Figura 2: Representación de las alternativas.

4. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un análisis con números difusos ya que al tratarse de una empresa que está relacionada con defensa, preferían no suministrar otro tipo de datos. Es cierto que se podría haber usado el método Topsis clásico pero los resultados no ofrecían discernimiento entre las alternativas A₃ y A₁, esto supondría tener que experimentar por ejemplo con un análisis de sensibilidad lo cual habría complicado más el trabajo que el realizado con la técnica propuesta.

Según se desprende de los resultados propuestos en la tabla 11 podemos admitir en éste caso el orden como

$$A_3 > A_1 > A_2$$

ya que:

$$\bar{R}_3^a = 0.0673 > \bar{R}_1^a = 0.0608 > \bar{R}_2^a = 0.0428$$

$$\bar{R}_3^b = 0.5581 > \bar{R}_1^b = 0.5092 > \bar{R}_2^b = 0.3659$$

$$\bar{R}_3^c = 5.0952 > \bar{R}_1^c = 3.9910 > \bar{R}_2^c = 2.8864$$

donde la mejor alternativa es la 3, pero si este orden no estuviera claro, por que algún $\bar{R}_i^j$ no cumpliera la relación de orden estricta, tendríamos que definir algún método para ordenar números difusos como por ejemplo el presentado en García y Lamata [3] y [4]

Si usásemos el criterio de Zeleny [19] que únicamente trabaja con $\bar{A}^+$ sin tener en cuenta la $\bar{A}^-$, trataríamos de minimizar d_i^+ . En nuestro caso.

$$d_3^{a+} = 0.0552 < d_1^{a+} = 0.0573 < d_2^{a+} = 0.0712$$

$$d_3^{b+} = 0.1663 < d_1^{b+} = 0.1727 < d_2^{b+} = 0.2139$$

$$d_3^{c+} = 0.3997 < d_1^{c+} = 0.5176 < d_2^{c+} = 0.6352$$

con lo que con este método también se sigue manteniendo que $A_3 > A_1 > A_2$ siendo la tercera alternativa la mejor.

También podríamos tratar con decisores pesimistas que tratasen de optimizar solo la distancia a la solución ideal

negativa. En este caso correspondería a hacer máxima la distancia con respecto a d_i^- .

$$d_3^{a-} = 0.0698 > d_1^{a-} = 0.0599 > d_2^{a-} = 0.0411$$

$$d_3^{b-} = 0.2099 > d_1^{b-} = 0.1792 > d_2^{b-} = 0.1234$$

$$d_3^{c-} = 0.6371 > d_1^{c-} = 0.4677 > d_2^{c-} = 0.3242$$

Vemos como los tres criterios de evaluación nos proporcionan el mismo resultado.

Se concluye que la principal ventaja de TOPSIS es la capacidad de tratar tanto con valores cuantitativos como cualitativos, podemos considerar las dos distancias + y – que tendría en cuenta la actitud del decisor así como la propia evaluación TOPSIS que es menos subjetiva (no influyendo la actitud del decisor) y además más completa al tener en cuenta tanto la menor distancia a la mejor posibilidad como la mayor a la peor de ellas.

Agradecimientos

Este artículo se ha elaborado bajo los proyectos, TIN2005-02418, TIN2004-21700-E, TIN2005-24790-E financiados por la DGICYT.

Referencias

- [1] C.T. Chen, Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment, Fuzzy Sets and Systems 114, 1-9, 2000.
- [2] S.J. Chen, C.L. Hwang, Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications, Springer-Verlang, Berlin, 1992.
- [3] M.S. Garcia Cascales and M.T. Lamata. Una alternativa al índice de Liou y Wang para la ordenación de números difusos X Congreso Nacional sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy. Jaén, 113-118, 2004.
- [4] M.S. Garcia Cascales and M.T. Lamata. A new approach for ranking fuzzy numbers by areas. Euro WG on Fuzzy Sets (EUROFUSE). Varsovia, 505-513, 2004.
- [5] C.L. Hwang, K. Yoon, Multiple Attribute Decision Methods and Applications, Springer, Berlin Heidelberg, 1981.

- [6] G.J. Jahanshloo, F. Hosseinzadeh Lofti, M. Izadikhah, An algorithmic method to extend TOPSIS for decision-making problems with interval data. Applied Mathematics and Computation, 175, 1375-1384, 2005

- [7] Kacprzyt, J, Yager, R.R. Linguistic summaries of data using fuzzy logic. International Journal of General Systems, vol. 30, No 2, 133-154, 2001.

- [8] E.E. Kerre, The use of fuzzy set theory in electrocardiological diagnostics, in : M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., Approximate Reasoning in Decision Analysis (North-Holland, Amsterdam, 277-282, 1982.

- [9] Y.J. Lai, T.Y. Liu, C.L. Hwang, TOPSIS for MODM, European Journal of Operational Research 76 (3), 486-500, 1994.

- [10] M.T. Lamata. Ranking Alternatives with Ordered Weighted Averaging Operators. International Journal of Intelligent Systems, Vol 19(5), 473-482, 2004.

- [11] Lootsma, F. Multi-Criteria Decision Analysis via Ratio and Difference Judgement. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999.

- [12] Luce R.D, Raiffa H. Games and Decisions: Introduction and Critical Survey. New York: John Wiley and Sons, 1967.

- [13] Saaty.T.L. The Analytic Hierarchy Process. Macgraw Hill, 1980.

- [14] Saaty.T.L. Group Decision Making and the AHP. Springer Verlag. New York, 1989.

- [15] Triantaphyllou E. Multi-Criteria decision making methods: A comparative study. The Netherlands: Kluwer Academic, 2000.

- [16] Zadeh, L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning: Part 1. Information Sciences 8, 199-249, 1975.

- [17] Zadeh, L.A, Kacprzyt, J. (eds). Computing with Words in Information / Intelligent Systems. Part 1. Foundations, Physica-Verlag (Springer-Verlag), Heidelberg and New York, 1999.

- [18] Zadeh, L.A, Kacprzyt, J. (eds). Computing with Words in Information/ Intelligent Systems. Part 2. Foundations, Physica-Verlag (Springer-Verlag), Heidelberg and New York, 1999.

- [19] M. Zeleny, Multiple Criteria Decision Making, McGraw-Hill, New York, 1982

APÉNDICE 1:

Matriz de comparación de criterios

	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>C3</i>	<i>C4</i>	<i>C5</i>	Average	Normalized
C1	[0.58,1,1.71]	[0.7,2,2.7]	[2.7,4,4.7]	[1.7,3,3.7]	[1.7,3,3.7]	1.2594,2.3522,3.1230	[0.1357,0.3942,0.9035]
C2	[0.37,0.5,1.43]	[0.58,1,1.71]	[1.7,3,3.7]	[0.7,2,2.7]	[1.7,3,3.7]	0.8463,1.5518,2.4616	[0.0912,0.2601,0.7121]
C3	[0.21,0.25,0.37]	[0.27,0.33,0.59]	[0.58,1,1.71]	[0.21,0.25,0.37]	[0.37,0.5,1.43]	0.3030,0.3642,0.7230	[0.0327,0.0610,0.2092]
C4	[0.27,0.33,0.59]	[0.37,0.5,1.43]	[2.7,4,4.7]	[0.58,1,1.71]	[0.7,2,2.7]	0.6425,1.0571,1.7887	[0.0693,0.1772,0.5175]
C5	[0.27,0.33,0.59]	[0.27,0.33,0.59]	[0.7,2,2.7]	[0.37,0.5,1.43]	[0.58,1,1.71]	0.4054,0.6418,1.1811	[0.0437,0.1076,0.3417]
						3.4566,5.9671,9.2773	

SOBRE LOS CONJUNTOS INTUICIONISTAS DE ATANASSOV

D. Gómez

E.U. Estadística
Universidad Complutense
Madrid 28040
dagomez@estad.ucm.es

J. Montero

Fac.CC. Matemáticas
Universidad Complutense
Madrid 28040
javier.montero@mat-ucm.es

H. Bustince

Depto. Automática y Computación
Universidad Pública de Navarra
Pamplona 31006
bustince@unavarra.es

Resumen

En este trabajo se hace hincapié en el modelo de clasificación subyacente dentro del marco de los Conjuntos Difusos Intuicionistas de Atanassov para justificar que la coincidencia formal con otros modelos sólo se verifica en determinado contexto, y que fuera de este contexto puede estar justificado su desarrollo. En concreto, dicho modelo se plantea como un caso muy particular de los sistemas de clasificación difusa propuestos por Amo et al., permitiendo además una interpretación muy específica del modelo de Atanassov, que creemos fiel a su intuición inicial.

Palabras Clave: Conjuntos Intuicionistas de Atanassov, Sistemas de Clasificación Difusa.

1 INTRODUCCIÓN

Desde que Zadeh [21] introdujo los conjuntos difusos, un buen número de modelos y teorías han sido propuestos como posibles modelos para la incertidumbre. En este sentido, quizá un primer logro de su trabajo ha sido romper el monopolio de la Teoría de la Probabilidad como única posibilidad de modelizar la incertidumbre: hay varios tipos de incertidumbre, y éstos pueden y deben ser formalmente caracterizados (ver, de todas maneras, [16]). Una primera generalización inmediata fueron los *L-Fuzzy sets* de Goguen [13], y más tarde vinieron los *Intuitionistic Fuzzy Sets* de Atanassov, AIFS [5]. Los AIFS han sufrido una fuerte controversia, tanto por la propia denominación que Atanassov adoptó como por la identificación real de su propuesta con otros modelos ya existentes (ver, por ejemplo, [9, 11]).

Baste recordar aquí que un L-Fuzzy Set de Goguen [13] se caracteriza a través de una aplicación sobre cierto universo X de objetos

$$\mu : X \longrightarrow L$$

donde $(L, \leq_L, N)$ es un retículo completo (toda familia de elementos de L tiene un ínfimo y un supremo), dotado de un operador N involutivo que invierte el orden de sus elementos.

En concreto, un Conjunto Difuso Intervalo Valorado, abreviadamente IVFS (*Interval-Valued Fuzzy Set*, [18, 20]) se define como una aplicación sobre un universo X de objetos de modo que su función de pertenencia toma la forma

$$\mu : X \longrightarrow \text{Int}([0, 1])$$

donde $\text{Int}([0, 1])$ es el conjunto de todos los subintervalos cerrados en $[0, 1]$.

Los AIFS fueron efectivamente introducidos por Atanassov [5] como una generalización de los Conjuntos Difusos de Zadeh [21]. Así, un AIFS ordinario se puede modelizar como una aplicación

$$\mu^A : X \longrightarrow [0, 1]^2$$

para una familia de objetos X , siendo la primera coordenada $\mu_+^A(x)$, que representa el grado en que $x \in A$, y la segunda coordenada $\mu_-^A(x)$ el grado en que $x \notin A$. La restricción

$$\mu_+^A(x) + \mu_-^A(x) \leq 1$$

se suele imponer por definición, de modo que $\mu_0^A(x) = 1 - \mu_+^A(x) - \mu_-^A(x)$ puede interpretarse como el grado de *no-determinación* del objeto x con respecto al AIFS (ver también [7]).

Pero resulta que los AIFS coinciden formalmente con los IVFS

En este artículo vamos a presentar a los AIFS como un caso particular de sistema de clasificación en el sentido de Amo et al. [2], donde el grado de verificación

se distribuye entre tres clases, y que este enfoque es generalizable a otros sistemas de clasificación más complejos donde aquella identificación no es ya directa (ver también [3, 1]). Nótese en concreto que un *AIFS* define una partición difusa en el sentido de Ruspini [17] con tres clases $(\mu_{A^+}, \mu_{A^-}, \mu_{A^0})$, puesto que

$$\mu_{A^+}(x) + \mu_{A^-}(x) + \mu_{A^0}(x) = 1$$

para todo $x \in X$. Pero ni Ruspini [17] ni Atanassov [5] hacen referencia alguna a la posible existencia de una estructura entre estas clases, ni a las operaciones entre ellas (en el caso de [2] no se impone a priori que la suma o agregación de los grados de pertenencia entre las diferentes clases tenga que ser necesariamente la unidad, ni menor que la unidad, ni mayor que la unidad).

2 META FUZZY SETS

Como ya puntualizaron los autores en [15], muchos de los conceptos que aparecen en la Teoría de Conjuntos Difusos pueden explicarse dentro de un sistema de clasificación donde se asignan diferentes grados de pertenencia a una serie de clases dotadas de una cierta estructura (por ejemplo, de proximidad). Por supuesto, esos grados de pertenencia no tienen necesariamente que sumar la unidad a lo largo de todas las clases, como impone Ruspini [17]: se trata ésta de una propiedad quizá deseable en abstracto (y no siempre), pero que desde luego sólo puede entenderse como producto final de un largo proceso de aprendizaje acerca del mejor conjunto de clases (si es que nuestro objetivo es definir una partición de Ruspini, que no siempre lo es).

Pero es esa estructura asociada a la familia de clases la que da un significado concreto a las operaciones (conjunciones, disyunciones, negaciones,...) que se pretenden introducir, algunas de las cuales pueden no tener una justificación en base a esa estructura, y por tanto no ser operaciones lícitas (ver [15]). Esta cuestión del papel de la estructura subyace en el planteamiento de Goguen [13], una vez que se plantea que el conjunto de valoración de los grados de verificación no tiene por qué ser el intervalo real, como asumió inicialmente Zadeh [21].

Así, por ejemplo, puede que no tenga un significado directo la agregación de clases no conexas, y si los cálculos han de realizarse sobre un grafo de proximidades, quizá los modelos secuenciales de [4, 10], o una generalización suya, puedan jugar un papel esencial (la estructura que define la familia de clases puede marcar el orden en que la información puede ser agregada).

En base a los argumentos anteriores, proponemos la

siguiente definición como el modelo que debe centrar buena parte de nuestras aplicaciones.

DEFINICIÓN.- Sea

$$\mu_A : X \longrightarrow V$$

una función donde X es una familia de objetos y cada elemento de V es un conjunto difuso ordinario [21]

$$\mu : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 1]$$

siendo $\mathcal{C}$ una familia de clases. Diremos que A es un *Meta Fuzzy Set* si y sólo si existe un grafo (V, E) (siendo V el conjunto de vertices y E el conjunto de relaciones no dirigidas entre ellos), una negación N [19] y una regla de agregación [10]

$$\{\Phi_n : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1]\}_n$$

tal que sean consistentes con dicho digrafo (es decir, que el resultado de la agregación sea el mismo independientemente de la secuencia de cálculo a lo largo del digrafo).

Evidentemente, esta consistencia limita el campo de estructuras posibles.

Así, caso de que el cardinal de $\mathcal{C}$ sea c finito, a cada objeto $x \in X$ se le está asignando un vector de grados de pertenencia de dimensión c , y cada coordenada indica el grado de pertenencia de ese objeto a una clase concreta. Estos *Meta Fuzzy Sets* (MFS) son por tanto una clases específica de Conjuntos Difusos de Tipo 2, donde cada componente tiene un significado concreto (y la familia de clases está dotada de una cierta estructura).

De esta manera, una vez determinada la estructura (elementos, grafo, negación, regla de agregación y otros operadores asociados), la información contenida en un camino debe ser complementaria a la información contenida en el resto de clases, siempre que éstas definan otro camino. Muchos problemas de aplicación de la Teoría de conjuntos difusos son casos particulares de esta estructura.

EJEMPLO 1.- Una estructura muy estándar es la formada por cuatro valores de verdad:

- “Verdadero” (T),
- “Falsedad” (F),
- “Ignorancia” (I) y
- “Contradicción” (C)

Pero el sistema en cuanto tal no queda descrito con precisión si no se incorpora la relación entre estas

clases o valores de verdad, que desde luego no es unívoca. Por una parte, podría asumirse (es lo que parece hacerse por defecto) que todas las clases están relacionadas entre sí, de acuerdo a la siguiente figura.

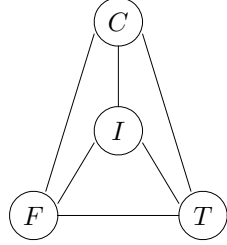


Figura 1: Grafo con cuatro valores de verdad cruzados

Naturalmente pueden aparecer entonces ciertas imposiciones para las reglas de agregación, como por ejemplo las siguientes:

- $\Phi_2(\mu_I, \mu_F) = N(\Phi_2(\mu_C, \mu_T))$
- $\Phi_2(\mu_I, \mu_T) = n(\Phi_2(\mu_F, \mu_C))$
- $\Phi_3(\mu_I, \mu_F, \mu_C) = n(\mu_T)$
- $\Phi_3(\mu_T, \mu_C, \mu_F) = n(\mu_I)$

Y desde luego que existen muchas reglas de agregación verificando dichas ecuaciones.

Pero podría justificarse alternatively la siguiente estructura alternativa, donde la relación entre la verdad y la falsedad no es directa, sino a través de la ignorancia o la contradicción.

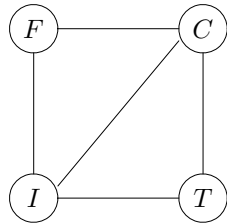


Figura 2: Grafo alternativo con cuatro valores

Así, a partir de unas asignaciones de los grados de pertenencia a cada valor de verdad, y por supuesto teniendo en cuenta una estructura concreta, podremos o no podremos tratar de responder a determinadas preguntas, en función claro está de las operaciones que

hayamos escogido (en la segunda estructura, por ejemplo, no es lícita la pregunta “cuál es el grado en que la afirmación es cierta o falsa?”)

EJEMPLO 2.- Otra estructura muy común es la basada en 5 valores lingüísticos de coincidencia, muy frecuente en las encuestas:

- “Ninguna” (N),
- “Poca” (P),
- “Intermedia” (A),
- “Mucha” (V) y
- “Completa” (C).

En este caso las cinco clases

$$\mathcal{C} = \{N, P, A, V, C\}$$

definen una estructura linealmente ordenada, por lo que no es lícita la agregación de clases no conexas (no tiene sentido preguntarnos hasta qué punto se está “nada o completamente” de acuerdo con una frase).

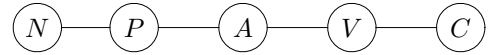


Figura 3: Escala lineal de 5 valores de coincidencia

EJEMPLO 3.- En la lógica trivalente de Lukasiewicz, tres son los valores de verdad, con una clase intermedia de “Posibilidad” (P) que se sitúa entre lo “Verdadero” (T) y la “Falsedad” (F). Esta situación parece sugerir una estructura linealmente ordenada como en el ejemplo anterior.

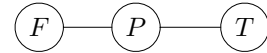


Figura 4: Sistema de evaluación de Lukasiewicz

Sin embargo, si tratamos de introducir el aprendizaje en esta estructura, el punto de partida (ignorancia, desconocimiento) habría de ser asignado a la Posibilidad con un grado de pertenencia máximo, para a partir de ahí iniciar una transferencia hacia los dos otros estados (el grafo sería entonces un digrafo, marcando de manera explícita las posibles disgregaciones y agregaciones). Este modelo no sería entonces exactamente

igual que el del ejemplo anterior, donde el punto de partida para el aprendizaje debiera ser uno de los dos extremos, para a partir de ese punto iniciar las transferencias de los grados de pertenencia. No deja de tener esta cuestión una cierta analogía con el problema de las distribuciones *a priori* en el contexto Bayesiano de la Probabilidad.

En nuestro contexto, quizá fuese más correcto que la ignorancia (ausencia total o parcial de información) quedase reflejada en un cuarto estado adicional. Una estructura razonable sería introducir este estado de ignorancia (I) conectándolo únicamente con el estado de Posibilidad (de modo que se accede a los dos valores extremos de Verdadero o Falsedad reconociendo previamente su Posibilidad).

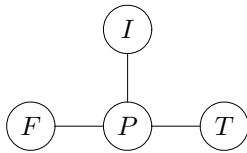


Figura 5: Lukaszewicz con Ignorancia

3 EL MODELO DE ATANASSOV

Observar que el modelo de Atanassov [7] no hace referencia alguna a la estructura existente entre sus tres clases:

- “Verdadero” (T),
- “Falsedad” (F) e
- “Indeterminación” (N).

Esta omisión sugiere a nuestro entender que está asumiendo que todas las clases están conectadas entre sí.

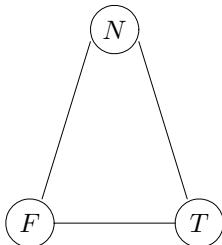


Figura 6: Sistema de Atanassov cruzado

Pero si hacemos caso al significado que Atanassov [5, 7] le da al estado de “Indeterminación”, este estado parece jugar el papel de la “Ignorancia” en ejemplos anteriores. En este caso quizá la estructura más fiel al pensamiento de Atanassov sería la siguiente, donde tiene sentido calcular el grado de “Determinación” como la negación de la “Indeterminación”, pero no como la agregación entre lo “Verdadero” y la “Falsedad”.

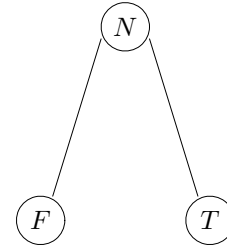


Figura 7: Sistema de Atanassov alternativo

Adoptamos esta representación para remarcar que no se trata de un orden lineal, donde la “Indeterminación” hace el papel de la “Posibilidad” de Lukaszewicz en la figura 4.

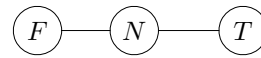


Figura 8: Sistema de Atanassov lineal

Hay que hacer notar que todavía Atanassov [8] parece utilizar representaciones que sugieren esta estructura lineal. Pero el sentido en el que la “Posibilidad” está entre lo “Verdadero” y la “Falsedad” no es el sentido en el que la “Indeterminación” está entre esos dos valores de verdad: la “Posibilidad” está a medio camino entre lo “Verdadero” y la “Falsedad”, por lo que la estructura lineal parece correcta; pero la “Indeterminación” no está a medio camino y la estructura no es lineal (el grafo que caracteriza la estructura es en el caso de Atanassov un digrafo, no linealmente ordenado en nuestra opinión, pues el caso linealmente ordenado correspondería al modelo de Lukaszewicz).

4 COMENTARIOS FINALES

La tesis que planteamos en este trabajo se resume en lo siguiente: si el modelo de Atanassov es visto como un modelo de clasificación, la generalización que proponemos mantiene sus planteamientos intuitivos, y la

asimilación formal con otros modelos queda limitada a contextos concretos. Efectivamente, un intervalo en la recta real introduce una partición de la recta en tres regiones: el intervalo en cuestión, el intervalo anterior y el intervalo posterior (es decir, tres clases como propone Atanassov, por lo que hubiese sido de esperar el isomorfismo entre los dos modelos). Los Meta Fuzzy Sets que proponemos permiten superar la paradoja de tener un único modelo formal con diferentes aproximaciones. Y es que la intuición de Atanassov no genera un modelo diferenciado si nos quedamos en una estructura tan básica como la que él propone, pero éste no será el caso en otras estructuras más complejas (ver [6]).

Además, la familia de conjuntos difusos que generamos dentro de la familia de Meta Fuzzy Sets puede cubrir previsiblemente una buena proporción de los casos prácticos de mayor interés.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con financiación del proyecto MTM2005 – 08982 – C04 – 01 del Plan de Promoción General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia, y dentro de la Red Temática Nacional de Procesos de Toma de Decisiones, Modelado y Agregación de Preferencias REDEMAP-II, TIN2004-21700-E.

Referencias

- [1] A. Amo, D. Gómez, J. Montero and G. Biging (2001): *Relevance and redundancy in fuzzy classification systems*. *Mathware and Soft Computing* 8:203–216.
- [2] A. Amo, J. Montero, G. Biging and V. Cutello: Fuzzy classification systems. *European Journal of Operational Research* 156:459–507 (2004).
- [3] A. Amo, J. Montero and V. Cutello: On the principles of fuzzy classification. *Proceedings NAFIPS Conference*, IEEE Press, Piscataway, NJ; pp. 675–679 (1999).
- [4] A. Amo, J. Montero, and E. Molina: Representation of consistent recursive rules. *European Journal of Operational Research* 130:29–53 (2001).
- [5] K.T. Atanassov: Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy sets and Systems* 20:87–96 (1986).
- [6] K.T. Atanassov, ed.: *Generalized nets*, World Scientific (1991).
- [7] K.T. Atanassov: *Intuitionistic Fuzzy sets*, Physica-Verlag (1999).
- [8] K.T. Atanassov: Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade paper “Terminological difficulties in fuzzy set theory-The case of Intuitionistic Fuzzy Sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 156:496–499 (2005).
- [9] H. Bustince and P. Burillo: Vague sets are intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 79:403–405 (1996).
- [10] V. Cutello and J. Montero: Recursive connective rules. *International Journal of Intelligent Systems* 14:3–20 (1999).
- [11] G. Deschrijver and E.E. Kerre: On the relationship between some extensions of fuzzy sets theory. *Fuzzy Sets and Systems* 133:227–235 (2003).
- [12] D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk and H. Prade: Terminological difficulties in fuzzy set theory-The case of “Intuitionistic Fuzzy Sets”. *Fuzzy Sets and Systems* 156:485–491 (2005).
- [13] J. Goguen: L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 18:145–174 (1967).
- [14] P. Grzegorzewski and E. Mrówka: Some notes on (Atanassov’s) intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 156:492–495 (2005).
- [15] J. Montero and D. Gómez: Preferences, classification and intuitionistic fuzzy sets. *Proceedings EUSFLAT’03*, University of Applied Sciences, Zittau; pp. 187–192 (2003).
- [16] J. Montero and M. Mendel: Crisp acts, fuzzy decisions. In S. Barro *et al.*, eds.: *Advances in Fuzzy Logic*, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela; pp. 219–238 (1998).
- [17] E.H. Ruspini: A new approach to clustering. *Information and Control* 15:22–32 (1969).
- [18] R. Sambuc: Fonctions Φ -floues, application à l’aide au diagnostic en pathologie thyroïdienne. *Ph.D. Thesis*, University of Marseille (1975).
- [19] E. Trillas: Sobre funciones de negación en la teoría de los subconjuntos difusos. *Stochastica* III-1:47–59, 1979. English version in S. Barro *et al.*, eds.: *Advances of Fuzzy Logic*, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela; pp. 31–43 (1998).
- [20] I.B. Türkmen: Interval valued fuzzy sets based on normal forms. *Fuzzy Sets and Systems* 20:191–210 (1986).
- [21] L.A. Zadeh: Fuzzy sets. *Information and control* 8:338–353 (1965).

Learning the user's preferences for multiple criteria ranking

David Isern, Aïda Valls, Antonio Moreno

Universitat Rovira i Virgili

Department of Computer Science and Mathematics

Research Group on Artificial Intelligence, BANZAI

{david.isern,aida.valls,antonio.moreno}@urv.cat

Abstract

Multicriteria decision ranking methods (MCDM) are used to aggregate information from different preference (or utility) functions to obtain a global ranking of a given set of alternatives. However, in some domains the preferences used may change dynamically over time. In this paper, we present a learning method that adapts the user's preference functions by means of the observation of which is the alternative that the user selects from the ranking that the MCDM method has proposed.

Keywords: Aggregation operators, preferences, learning, multicriteria decision making.

1 INTRODUCTION

In traditional multicriteria decision making (MCDM) approaches the main goal of the method is to select the best alternative, or to rank or classify a set of given alternatives. Those alternatives are described by means of a set of preference attributes per each alternative. In utility-based approaches those criteria indicate the degree of satisfaction of each alternative with respect to one of the attributes that the user wants to consider. In this sense, different algorithms were developed according to the nature of the data (*i.e.* numerical or linguistic) and the weighting factor applied to the attributes and/or to the values [1, 2, 3]. Unfortunately, these methods are not designed to be used in an *on line* system where the preferences considered can change dynamically according to some criteria. In those systems, the user's preferences are modeled and stored in his personal profile to be used by decision making tools. In our approach, the algorithm proposed allows to deal with dynamic preferences by changing the user's profile values.

The process described in this paper is divided in two main tasks: first, it evaluates a set of proposals received from a recommender system, and second, it learns from actions made by the user (feedback). Relating to the first task, a rating and ranking of the proposals received is

required. This process could be performed using several well-known multicriteria decision making operators [4] or applying case-based reasoning from a set of well known past examples [5]. The next task is to adapt the user's preferences automatically by a learning process. That process could allow the system to evolve from a set of predefined preferences to the user's-centered interests.

Moreover, with this approach we know the preferences of all users and we can extract information of their behavior, for instance, know the most selected value of an attribute.

Each time that the system ranks a set of alternatives using a multicriteria decision making method, the system observes which is the alternative selected by the user, assuming that the multicriteria decision method is reliable; if the user does not choose the first one, it indicates that the preferences are not appropriately modeled in the user's profile. This is a valuable information because we set up the ranking process with different parameters and an aggregation-based operator has been designed in order to adapt the profile to that selection [6]. Therefore, we use the information of the selected alternative, and of all the discarded ones (the ones that were ranked better than the selected one) to deduce which should be the correct user's profile, that is, which are the current user's preferences.

Although we will explain this approach using a specific MCDM method, namely a LOWA operator, we believe that the ideas presented here could be used in a more general framework.

The rest of the paper is organised as follows. First of all, an analysis of the related work in the area is made. In §3 the multicriteria decision ranking process is described. Then, in §4 the learning process and dynamic adaptation of the user's profile is explained. After that, an example of the use of this method in a healthcare domain is shown. Finally, some conclusions are given.

2 RELATED WORK

The paper is focused in the learning preferences process applied in a multicriteria decision making application. Preference learning is recently beginning to be taken into consideration. Related works in this area such as [7, 8] learn

global preferences as an iteration of *pairwise preferences*. The goal is to use pairwise preferences from training examples for predicting a total order function that allows to rank all possible labels for a new training example. However, as pointed out in [7], this approach requires a great number of examples in the training set in order to use SVM, that sometimes could be hard to obtain. A more general framework is described in [9] where the authors learn both the attributes considered in the user's profile and the preferred values also using SVM as a classifier to distinguish the good and bad alternatives.

Another approach is to consider the preferences as a Constraint Satisfaction Problem (CSP). In [10], the authors develop a learning method based on multiclass label, which builds a constraint classifier between each example and the rest (is a case of "one versus all" approach). This approach allows to determine a partial order of that example in comparison with the rest.

In contrast, our approach is different because we do not use past examples. We learn from the most recent experience in a system that is continuously used by the user. Although we miss the information about past episodes, this model allows to react easily to new trends and new situations. Moreover, the complexity of our method is lower than that of the SVM-based approaches.

3 MULTICRITERIA ALTERNATIVES RANKING

Our goal is to employ the user's preferences to rate, rank and filter a set of alternatives. As it has been introduced, we are interested in a healthcare environment, where the alternatives are a set of possible appointments for a medical test, described using different criteria, such as the distance to the medical centre or the day and time of the test, among others. In this context, the user's preference with respect to the distance/day/time may change over time. So, we propose to adapt the user profile each time that the patient uses the system to obtain a ranking of appointment proposals. Fig. 1 shows the two steps: the ranking of the alternatives and the adaptation of the user's profile. In this section, we explain how the user's preferences are modelled and aggregated.

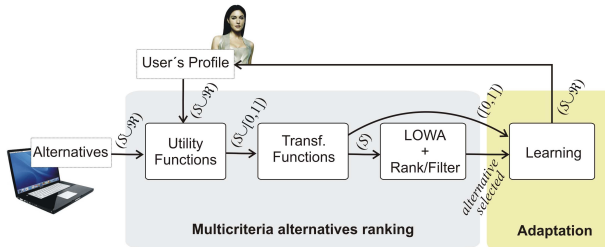


Figure 1: Decision and adaptation

3.1 USER'S PROFILE

The user's profile is a set of both linguistic and numerical variables. The scale of the linguistic variables is S and the domain of the numerical ones is $[0, 1]$.

We will denote $S = \{s_i\}$, and $i \in \{0, \dots, T\}$ a finite ordered set of $T + 1$ linguistic labels whose semantics is given by fuzzy sets. Each label s_i is defined by a 4-tuple (x_0, x_1, x_2, x_3) , where x_1 and x_2 indicate the interval in which the membership function value is 1, and x_0 and x_3 are the bounds of the definition of a trapezoidal fuzzy membership function (see Fig. 3). Then, in the user's profile we have a utility function $U_{atr_i}^L$ that associates each possible value of the categorical attribute atr_i to a label in S , indicating its preference score. For numerical attributes, we have a utility function $U_{atr_i}^N$ that receives the numerical value r of the corresponding attribute, and compares r with the preferred value of the user r_{user_i} . The utility function of the i^{th} attribute takes $k_i \approx \frac{10}{(max_{atr_i} - min_{atr_i})}$.

$$U_{atr_i}^N : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad U_{atr_j}^L : String \rightarrow S$$

$$r \rightarrow 1/e^{k_i|r_{user_i}-r|} \quad str \rightarrow s_i$$

3.2 RATING OF ALTERNATIVES

To rank the set of alternatives we use a classical multicriteria decision-making process with two stages: rating and ranking [4]. Being an alternative a tuple of the form $p_i = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_K)$ its rating is done in three steps (Fig. 1):

Step 1) All the values describing an alternative, p_i , are transformed into preference values in the domain $([0, 1] \cup S)$ by applying the appropriate utility functions U_{atr_h} as described above.

Step 2) The numerical preferences in $[0, 1]$ are transformed into the linguistic domain S by means of a particular numerical-linguistic transformation function defined in [1] (linguistic preferences are left without changes), obtaining the transformed vector called $alt_i = \{a_k\}$ ($a_k \in S$).

Step 3) The linguistic preferences in alt_i are aggregated using the LOWA operator, obtaining a linguistic rating.

Finally, all alternatives can be ranked using the rating values. Then, a filtering is performed to show to the user only the best alternatives, so that he can select one of them.

The problem of aggregating information has been widely studied [11]. There exist several methods to aggregate numerical values as well as linguistic terms. The family of OWA operators are in the class of mean operators. They are idempotent, monotonic and commutative.

The LOWA aggregation operator ϕ was defined in [12]. It is an extension of the OWA operator to deal with linguistic variables. The operator ϕ aggregates a set of labels $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, where $a_i \in S$, with respect to a set of weights

$W = \{w_1, \dots, w_m\}$ such that $w_i \in [0, 1]$ and $\sum_i w_i = 1$. Those weights specify the decision-maker policy.

$$\begin{aligned}\phi(a_1, \dots, a_m) &= W \cdot B^T = C^m \{w_k, b_k, k = 1, \dots, m\} \\ &= w_1 \odot b_1 \oplus (1 - w_1) \odot C^{m-1} \{\beta_h, b_h, h = 2, \dots, m\}\end{aligned}$$

where $\beta_h = w_h / \sum_2^m w_h$, $h = \{2, \dots, m\}$ and $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ is a permutation of the elements of A , such that $B = \sigma(A) = \{a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(m)}\}$, where $a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)} \forall i \leq j$. C^m is the convex combination operator of m labels; if $m = 2$, then $C^2 \{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \odot s_j \oplus (1 - w_1) \odot s_i = s_k$, $s_i, s_j \in S, (i \leq j)$ such that, $k = \min\{T, i + \text{round}(w_i \cdot (j - i))\}$. If $w_j = 1$ and $w_i = 0$ with $i \neq j$, then $C^m \{w_i, b_i, i = 1, m\} = b_j$

The weight vector w permits to adjust the degree of conjunction and disjunction implicit in any aggregation. This is done by using linguistic quantifiers (expressed as a set of weights) that permit to define different aggregation policies. In [2] different fuzzy majority-based policies are identified, such as “most”, “at least half” or “as many as possible”.

In a previous work ([6]) we compared the effect of using different policies in the rating results following this method. In addition, we studied the behaviour of different linguistic domains (S) (symmetric versus non-symmetric linguistic domains were compared).

4 LEARNING PREFERENCES

As a result of the aggregation process, the alternatives are rated with a linguistic label in S , and then ranked. If the user does not choose the first alternative, we adapt the user's profile so that if we repeated the rating and ranking with the same alternatives and the new profile, the selected alternative would receive a better rating (if possible, a rating that would place it in the first position). If the selected alternative is the first, it is not necessary to adapt the profile.

Our method is based in the following statement: if the user has selected p_i with a rate a_r ($a_r \in S$), we can use the subset of alternatives $\{p_h, h = 0, i - 1\}$ that received better ratings (and, therefore, have better positions in the ranking) to learn which should be the user's profile.

4.1 LEARNING ALGORITHM

As we have just said, we will only consider the p_h , $h \in (0 \dots i - 1)$ best ranked alternatives to learn. Having that each alternative p_j has K values for the criteria, we propose the following algorithm to adapt the user's profile after his/her selection:

Step 1) All the linguistic preference values of the alternatives from position $j = 0$ to $j = i$ are translated to the numerical domain $[0, 1]$ by means of a particular linguistic-numerical transformation function defined in [1] (numerical preferences are left without changes), obtaining the transformed vector called $v_j = \{n_{jk}\}$ ($n_{jk} \in [0, 1]$) (See Fig. 2a).

Step 2) Using any unsupervised clustering method, generate c clusters from the set of alternatives $V = \{v_h, h = 0, i - 1\}$. Then, we calculate the prototype of each cluster, $R_j, j = 0, \dots, c - 1$ (See Fig. 2b).

Step 3) Find the distance between v_i (the alternative selected by the user) and all the prototypes R_j . Let R_{min} be the closest prototype to v_i , so that its distance¹ is $\{\min(\text{dist}(R_j, v_i)) \forall j = 0, c - 1\}$.

Step 4) Let A be the vector v_i , and B be the vector R_{min} . For each of the $K + 1$ criteria, calculate the difference of its value in A with respect to B , $d_j = (a_j - b_j)$ ($j \in 0..K$). The variables for which the difference d_j is greater than a given threshold, are marked to be changed in the user's profile.

Step 5) To update the preference values of the criteria marked in the previous step, we propose a method based on the LOWA aggregation operator described in §3.2. Being A the vector v_i , B the vector R_{min} , and m the variable to be updated, an intermediate value α_m is calculated, so that $\alpha_m = a_m + w_m(b_m - a_m)$, where the weight w_m is indicating the degree of change that we want to apply to the criterion m . We propose to use the difference of the actual value and the desired one, that is $w_m = |b_m - a_m|$.

Step 6) Using the value α_m , adapt the user's profile. For numerical variables, the new value of the m^{th} variable in the user's profile is $\beta_m = (U_m^{N-1}(\alpha_m))$. For linguistic variables, that value β_m is obtained transforming the number α_m into its corresponding term in S , with the same function applied in *Step 1* and defined in [1].

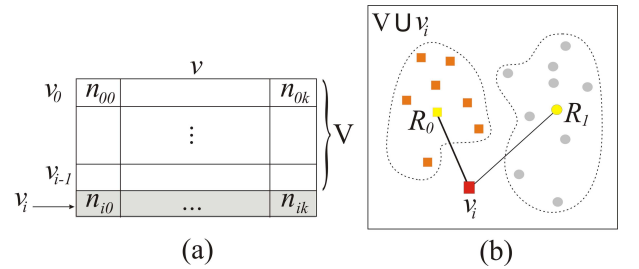


Figure 2: Clustering of alternatives in the learning process

4.2 SOME COMMENTS ON THE LEARNING METHOD

In this section we want to present some alternatives to some of the steps of the learning method we have proposed, and argue why we have chosen this configuration and not another. Let us proceed step by step.

In step 2 we use the k-means algorithm because it is a fast and well-known method, but other non-supervised clustering techniques could be applied [13]. The number of

¹Any distance measures can be applied. We choose the Euclidean Distance

clusters that are generated must be carefully studied. Depending on the application domain, we could consider to have more than 2 clusters. However, we must think that if the profile and the decision making methods are correct, the user should not select an alternative far from the initial positions of the ranking, so the number of alternatives to cluster should not be more than 10. With this assumption, building more than 3 clusters seems not necessary.

The rationale behind step 3 is that we can have sets of alternatives with common features, and we must select one of the prototypes to become our ideal alternative, that is, the one we want to get closer to. If we select the more distant prototype, we are very optimistic and want to make all the changes necessary in our preferences to arrive to the best positions. A more conservative approach is to consider the closest prototype. If we have more than 2 clusters we can select any other cluster in between.

The threshold defined in step 4 allows us to restrict the number of changes in the user's profile. Depending on the number of criteria that change, the profile is adapted more or less smoothly.

In step 5, we calculate the new value for each criterion in the profile, β_m . The weight w_m indicates the degree of change we will apply to the actual value in the profile. It is based on the difference between the actual value, a_k and the desired one b_k . However, other options or more parameters could be used. For example, we could allow bigger changes at the beginning of the use of the recommendation system, and after some time, take a more conservative approach, reducing the amount of change per iteration.

4.3 CASE STUDY: MEDICAL SERVICES

We have tested the proposed method for learning preferences in a multiagent system called HeCaSe2[14]. This system is intended to facilitate the provision of user-centered medical services. In particular, HeCaSe2 helps doctors to personalise medical guidelines to the treatment of each patient. During the process, if the doctor detects that some clinical test is needed, the agents are able to automatically obtain a list of possible appointments for the test. Then, using the patient preferences on different criteria, the list of appointments is ranked using the method described in §3.2. If the patient does not select the first proposal, we apply the learning process to adapt the user's profile.

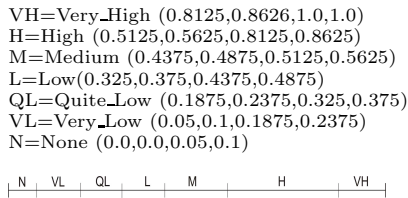


Figure 3: Linguistic domain used

In this application we consider 5 variables. Three of them are linguistic variables: *day_of_week*, *centre* (destination medical centre) and *period_day* (morning, afternoon,

night); and two are numerical: *distance* (kilometers from the origin centre to the destination) and *delay_days* (days to wait before the test). Fig. 3 shows the linguistic domain S of the variables. After the study made in [6], we have selected a vocabulary with seven linguistic labels non symmetrically distributed, to have more precision to indicate different bad degrees of preference.

For our example, let us consider that the profile of Mrs. Smith is this one:

delay_days (0.0)
distance (0.0)
centre ((MCBona,N)(MCBorges,M) (MCConst,H)
(MCMorell,VH) (MCGimb,M) (MCHospi,L)
(MCJaume,QL) (MCLlib,L))
day_of_week ((Sun,VL) (Mon,QL) (Tue,M) (Wed,H)
(Thu,M) (Fri,M) (Sat,L))
period_day ((Morning,VH) (Afternoon,QL) (Night,VL))

Mrs. Smith needs a tooth X-ray to check which is the origin of her recurrent toothache. Each of the appointments that the system finds is initially considered a valid alternative. Each alternative is a 5-tuple $p_i = \langle \text{delay\_days}, \text{distance}, \text{medical\_centre}, \text{day\_of\_week}, \text{period\_day} \rangle$. The values on each alternative are evaluated using Mrs.Smith's utility functions stored in her profile, in order to know the corresponding linguistic preference values (following [12]). Let's consider the we have found six possible appointments P for Mrs. Smith:

$p_0 : (2.0, 1.2, \text{MCBorges}, \text{Wed}, \text{Morn}) \xrightarrow[\text{transf}]{U} (\text{H H M H VH})$
 $p_1 : (1.0, 8.0, \text{MCConst}, \text{Mon}, \text{Aft}) \rightarrow (\text{H VL H QL QL})$
 $p_2 : (4.0, 9.0, \text{MCBona}, \text{Thu}, \text{Aft}) \rightarrow (\text{L VL N M QL})$
 $p_3 : (5.0, 1.2, \text{MCBorges}, \text{Sat}, \text{Night}) \rightarrow (\text{QL H M L VL})$
 $p_4 : (10.0, 1.2, \text{MCBorges}, \text{Fri}, \text{Morn}) \rightarrow (\text{N H M M VH})$
 $p_5 : (9.0, 17.0, \text{MCHospi}, \text{Fri}, \text{Aft}) \rightarrow (\text{VL N L M QL})$

The next step consists of applying the LOWA operator to rate the proposals. An important parameter to be fixed in this stage is the weight vector W . As it has been mentioned before, weights specify different aggregation policies. In this application we have good results with the policy "as many as possible" [2], so weights are: $W = (.0, .0, .2, .4, .4)$. After applying the LOWA operator, all alternatives are linguistically rated and can be ranked and presented to the user for a selection. In the example, the ranked list of appointments for Mrs. Smith is the next one:

$p_0 : (\text{H H M H VH}) \rightarrow (\text{H})$
 $p_4 : (\text{N H M M VH}) \rightarrow (\text{H})$
 $p_1 : (\text{H VL H QL QL}) \rightarrow (\text{M})$
 $p_3 : (\text{QL H M L VL}) \rightarrow (\text{M})$
 $p_2 : (\text{L VL N M QL}) \rightarrow (\text{L})$
 $p_5 : (\text{VL N L M QL}) \rightarrow (\text{L})$

Let us suppose that Mrs.Smith is not suffering from toothache at the moment, and that she needs some time to arrange her schedule to fix the medical appointment, because she must find a babysitter for her twins. So, she selects option p_5 , although it is in the fifth position of the ranking. So, we assume that her profile is not correct and

we will try to modify it. In fact, if we observe the profile, we will see that the most preferred option is to wait 0 days, but this is not the case of Mrs. Smith.

Now, we start the learning process to adapt the user's profile to the selection made. We build the set $V = \{v_0, v_4, v_1, v_3, v_2\}$ and make two clusters using the k Means algorithm. To apply this method we need to have all the information in a numerical scale. To do this we apply the linguistic-numerical transformation function described in [12] (see Fig. 1). As a result of that transformation, the alternatives are described as follows²:

$$\begin{aligned} v_0 &: (\text{H H M H VH}) \leftrightarrow \\ & \quad (0.6065 \ 0.7408 \ 0.4999 \ 0.6875 \ 0.9259) \\ v_4 &: (\text{N H M M VH}) \leftrightarrow \\ & \quad (0.0821 \ 0.7408 \ 0.4999 \ 0.4999 \ 0.9259) \\ v_1 &: (\text{H VL H QL QL}) \leftrightarrow \\ & \quad (0.7788 \ 0.1353 \ 0.6875 \ 0.2812 \ 0.2812) \\ v_3 &: (\text{QL H M L VL}) \leftrightarrow \\ & \quad (0.2865 \ 0.74082 \ 0.4999 \ 0.4062 \ 0.1437) \\ v_2 &: (\text{L VL N M QL}) \leftrightarrow \\ & \quad (0.3679 \ 0.1054 \ 0.03055 \ 0.4999 \ 0.2812) \\ v_5^* &: (\text{VL N L M QL}) \leftrightarrow \\ & \quad (0.1054 \ 0.0143 \ 0.4062 \ 0.4999 \ 0.2812) \end{aligned}$$

The k Means algorithm generates two clusters $\{v_1, v_2, v_3\}$ and $\{v_0, v_4\}$, with their corresponding centroids, called R_0 and R_1 , respectively.

$$\begin{aligned} R_0 &: (0.4777 \ 0.3272 \ 0.4060 \ 0.3958 \ 0.2354) \\ R_1 &: (0.3443 \ 0.7408 \ 0.4999 \ 0.5937 \ 0.9259) \end{aligned}$$

Now, we measure the distance between the selected alternative (v_5^*) and the two prototypes. We apply the Euclidean Distance obtaining:

$$\text{dist}(v_5^*, R_0) = 0.22338 < \text{dist}(v_5^*, R_1) = 0.45125$$

Having a conservative approach, we decide that we should adapt the user's profile to be closer to R_0 .

In the next step, we calculate the differences d_j between v_5^* and R_0 , obtaining:

$$\begin{aligned} v_5^* & \quad (0.1054 \ 0.0143 \ 0.4062 \ 0.4999 \ 0.2812) \\ R_0 & \quad (0.4777 \ 0.3272 \ 0.4060 \ 0.3958 \ 0.2354) \\ d & \quad (0.3723 \ 0.3129 \ 2.3150\text{E-}4 \ 0.1042 \ 0.0458) \end{aligned}$$

At this point, we have to establish a threshold to choose which attributes are so distant to be considered to update the profile. If we choose a low threshold, too many attributes will be changed simultaneously and the profile modification will be bigger and more difficult to control. On the other hand, a threshold too high will not allow the system to react to the changes in the preferences of the user. Let us suppose that we take a threshold of 0.35; in that case, we only have to change the first attribute: the *delay_days*.

²To improve legibility, all numerical values have been rounded to four decimals. Internal operations maintain more precision.

The adaptation of that variable is made according to the aggregation-based updating function defined in the proposed learning algorithm. According to that, $\alpha = 0.1054 + w(0.4777 - 0.1054)$ where $w = 0.3723$, resulting $\alpha = 0.2440$. This means that the preference of the value proposed in v_5 should have been 0.2440 instead of 0.1054. Therefore, to change this preference utility function, we can only change the number of days considered to be the most preferred by the user. In this example, we initially assumed that Mrs. Smith wants to wait 0 days, but from the scenario, we have said that this is not true. Applying the inverse function to obtain the number of days from the preference value 0.2440, we found that the most preferred number of days is set to 5.3, which is a good approximation of the real desired value.

Now, we can check what happens with this new profile. So, we start again the ranking process with the same alternatives. The results obtained now are shown below. Notice that the change in the utility function of the *delay_days* variable has affected the preference values of all the proposals.

$$\begin{aligned} p_0 &: (\text{L H M H VH}) \rightarrow (\text{H}) \\ p_1 &: (\text{QL VL H QL QL}) \rightarrow (\text{L}) \\ p_2 &: (\text{H VL N M QL}) \rightarrow (\text{M}) \\ p_3 &: (\text{VH H M L VL}) \rightarrow (\text{H}) \\ p_4 &: (\text{QL H M M VH}) \rightarrow (\text{H}) \\ p_5 &: (\text{L N L M QL}) \rightarrow (\text{L}) \end{aligned}$$

Our goal was to increase the preference value of p_5 smoothly. In fact, it can be observed that now p_5 is considered of L (low) preference in its first attribute, instead of VL (very-low). Moreover, the changes suffered by the first variable have some effects in the ranking, changing the positions of some of the alternatives. Some alternatives with a delay close to the new preferred value have increased its global utility value such as p_3 . However, in this particular example this change is not sufficient to change the overall ranking of the proposal selected by Mrs. Smith. Note that the method does not aim to improve automatically all variables in one step (that would be too drastic). Moreover, there are several parameters that affect the degree of change, such as the threshold taken in the adaptation or the centroid chosen to adapt the selected proposal.

5 CONCLUSIONS

We propose a method for learning the user's preferences that takes into account the feedback from the user when it makes a selection from a ranking recommended by a multicriteria decision making system. We have explained the case of using a ranking method based on the use of the LOWA operator. However, this learning method could be also applied with other ranking techniques.

We want to stress that the learning method is able to deal both with qualitative and numerical preferences. It is only required (i) to have a function to transform qualitative preference values into numbers and vice-versa and (ii) for numerical utility functions, to have an inverse function to obtain a single value in the original scale from any preference value. These constraints are due to the fact that we

use numbers to learn, because with numbers we can work with more precision and modify the profile more gradually than using qualitative values.

In the tests that we have made using the HeCaSe2 prototype, when the user changes one of his preference values (like Mrs. Smith with the preferred number of days before making any test), the profile is correctly updated after some iterations of the learning method, which is also indicating that the learning is done smoothly, in order not to be too sensitive to occasional changes of the user's preferences.

In fact, it can be argued that it would be interesting to be able to introduce information about the context of each decision. For example, in the medical setting, Mrs. Smith can prefer to wait a week before a test to arrange her schedule; however, in an urgency situation, this criterion should not be used. Another example, could be the situation of having different preferences of medical centres for different types of tests. Context-situated decision making and learning is an interesting open issue to consider.

6 ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been partially supported by the IST project K4CARE (IST-2004-026968) and the Spanish Research Network REDEMAP-II (REd Temática Nacional de Procesos de Toma de DEcisiones, Modelado y Agregación de Preferencias) (TIN2004-21700-E).

References

- [1] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez, "Combining numerical and linguistic information in group decision making," *Inf Sci*, vol. 107, pp. 177–194, 1998.
- [2] D. R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision making," *IEEE Trans Syst Man Cybern*, vol. 18, pp. 183–190, 1988.
- [3] V. Torra, "The Weighted OWA Operator," *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 12, pp. 153–166, 1997.
- [4] J. Figueira, S. Greco, and M. Ehrgott, *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, vol. 78 of *International Series in Operations Research and Management Science*. Springer, 2005.
- [5] A. Aamodt and E. Plaza, "Case-Based Reasoning: Foundational Issues, Methodological Variations, and System Approaches," *Artificial Intelligence Communications*, vol. 7, pp. 39–59, 1994.
- [6] D. Isern, A. Valls, and A. Moreno, "Using Aggregation operators to personalize agent-based medical services," in *10th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information and Engineering Systems, KES2006*, LNAI, (Bournemouth, UK), p. to appear, Springer Verlag, 2006.
- [7] J. Fürnkranz and E. Hüllermeier, "Pairwise Preference Learning and Ranking," in *14th European Conference on Machine Learning, ECML-03* (N. Lavrac, D. Gamberger, L. Todorovski, and H. Blockeel, eds.), vol. 2837 of *LNCS*, (Cavtat, Croatia), Springer Verlag, 2003.
- [8] M. T. Gervasio, M. D. Moffitt, M. E. Pollack, J. M. Taylor, and T. E. Uribe, "Active Preference Learning for Personalized Calendar Scheduling Assistance," in *10th international conference on Intelligent user interfaces* (J. Riedl, A. Jameson, D. Billsus, and T. Lau, eds.), (San Diego, California, USA), pp. 90–97, ACM Press, 2005.
- [9] G. González, C. Angulo, B. López, and J. L. Rosa, "Smart User Models: Modelling the Humans in Ambient Recommender Systems," in *Workshop on Decentralized, Agent Based and Social Approaches to User Modelling (DASUM 2005)* (P. Dolog and J. Vassileva, eds.), (Edinburgh, Scotland), pp. 11–20, 2005.
- [10] S. Har-Peled, D. Roth, and D. Zimak, "Constraint Classification: A New Approach to Multiclass Classification," in *13th International Conference on Algorithmic Learning Theory*, vol. 2533 of *LNCS*, (Lübeck, Germany), pp. 365–379, Springer, 2002.
- [11] M. Grabisch, S. Orlovski, and R. Yager, "Fuzzy aggregation of numerical preferences," in *Fuzzy sets in decision analysis, operations research and statistics* (R. Slowinski, ed.), pp. 31–68, Kluwer Academic, 1999.
- [12] F. Herrera and E. Herrera-Viedma, "Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 115, pp. 67–82, 2000.
- [13] I. H. Witten and E. Frank, *Data Mining: Practical machine learning tools and techniques*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2nd edition ed., 2005.
- [14] D. Isern and A. Moreno, "Agent-Based Careflow Usign CPGs," in *Recent Advances in Artificial Intelligence Research and Development* (J. Vitrià, P. Radeva, and I. Aguiló, eds.), vol. 113 of *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, (Barcelona, Catalonia), pp. 11–18, IOS Press, 2004.

EVALUACIÓN DEL DESEMPEÑO EN CONTEXTOS LINGÜÍSTICOS MULTI-GRANULARES MEDIANTE JERARQUÍAS LINGÜÍSTICAS

L. Martínez

Dep. de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Universidad de Jaén, 23071 - Jaén
martin@ujaen.es

R. de Andrés¹, J. L. García-Lapresta²

¹Dep. de Fundamentos del Análisis Económico
e Historia e Instituciones Económicas

²Dep. de Economía Aplicada (Matemáticas)

^{1,2}Grupo de investigación *PRESAD*
Universidad de Valladolid, 47011 - Valladolid
{rocioac,lapresta}@eco.uva.es

Abstract

La evaluación del desempeño es un proceso formal utilizado en muchas grandes empresas y organizaciones para evaluar, medir y gestionar el rendimiento individual o colectivo de sus empleados con el objetivo (entre otros) de establecer planes de remuneración variable o de promoción del personal. Esta evaluación se basa en la opinión de distintos evaluadores sobre indicadores que pueden ser objetivos (logro de metas, competencias, potencial de mejoramiento,...) o subjetivos (rasgos, comportamientos,...) [14, 22] y cuyo conocimiento suele implicar incertidumbre. La literatura existente plantea procesos de evaluación del desempeño que suelen utilizar un único dominio de expresión para valorar los diferentes criterios, a pesar de un conocimiento no preciso de los mismos. En esta contribución proponemos: (i) la definición de un nuevo marco evaluador que modele la incertidumbre mediante etiquetas lingüísticas y que permita a los evaluadores expresar sus valoraciones sobre los indicadores en distintos conjuntos de etiquetas, dependiendo del conocimiento que tengan sobre ellos [16, 18]. Y (ii) un modelo difuso de evaluación del desempeño que maneje la información lingüística del marco evaluador anterior y la incertidumbre que ésta conlleve, sin pérdida de información, para conseguir una ordenación global o respecto de un determinado atributo de los empleados que permita a la empresa adoptar las decisiones oportunas.

1 Introducción

Actualmente las empresas se ven inmersas en un marco de competencia global. La mejora de la productividad y/o de la eficiencia en este contexto es uno de los principales retos de cualquier empresa u organización. Una de las formas de obtener ese grado de competitividad es a través del desarrollo del departamento de recursos humanos, donde el método de evaluación del desempeño es una de las herramientas más importantes para conseguir los objetivos mencionados [27]. *La evaluación del desempeño es un proceso formal y sistemático para identificar, revisar, evaluar, medir y gestionar el rendimiento de los recursos humanos en organizaciones, con la finalidad de ver si el trabajador es productivo y si podrá mejorar su rendimiento futuro* [8]. Esta evaluación se ha realizado desde distintos puntos de vista como puede verse en [2, 4, 7, 9, 12, 13, 19, 21, 23].

Los métodos tradicionales de evaluación del desempeño únicamente incluyen en el proceso de evaluación la opinión emitida por los directivos. Sin embargo, debido al marco de competencia global que impera en los mercados, las empresas y organizaciones para lograr sobrevivir y obtener éxito han pasado a realizar evaluaciones basadas en nuevos métodos que tienen en cuenta el conocimiento del empleado por parte de un buen número de personas que interactúan con el trabajador: directivos, superiores, colaboradores, subordinados y clientes, tanto internos como externos [11, 20]. *La evaluación 360° es un método que incluye reactivos de evaluación de múltiples niveles dentro de la empresa* [22]. En este método todas las personas que, directamente o indirectamente mantienen una relación profesional con el empleado, participan en el proceso de evaluación emitiendo opiniones sobre el mismo. Por tanto, cada evaluador de los distintos colectivos existentes valora los indicadores utilizados para estimar la eficiencia y eficacia en el desempeño de su función del trabajador evaluado. Este proceso de evaluación per-

mite obtener a la empresa una evaluación más objetiva sobre el desempeño de sus trabajadores que los métodos tradicionales. La inclusión de valoraciones procedentes de diferentes fuentes minimiza la tendencia a la subjetividad, propia de procesos de evaluación uni-direccionales. A partir de esta evaluación multi-direccional se ha de generar una valoración global que agregue las proporcionadas por todos los evaluadores, la cual se utilizará para la toma de decisiones por parte de la empresa u organización, en función de los diferentes objetivos fijados.

Aunque el proceso de evaluación 360° sea más objetivo que el convencional, debido a la incursión de diferentes fuentes de información, el método de evaluación normalmente utiliza criterios de naturaleza tanto cuantitativa como cualitativa. Conviene destacar que, si bien el uso de criterios cualitativos conlleva incertidumbre, la mayoría de los procesos de evaluación de desempeño obliga a los evaluadores a expresar sus valoraciones de forma precisa mediante una única escala numérica [3].

La utilización de una escala basada en valores numéricos precisos para evaluar indicadores que tienen normalmente una naturaleza cualitativa o de los que se posee un conocimiento vago y/o impreciso no parece un procedimiento adecuado, ya que puede generar falta de precisión a la hora de expresar las valoraciones y una pérdida de información en el resultado final de la evaluación. El uso de la aproximación lingüística difusa [25] ha producido resultados satisfactorios en la modelización de la información cualitativa o aquella cuantitativa en la que exista cierta vaguedad o incertidumbre en su valoración [1, 10, 26].

En esta contribución proponemos un marco evaluador en el que los distintos grupos evaluadores podrán valorar al empleado con etiquetas lingüísticas, pero cada grupo podrá utilizar distintos conjuntos de etiquetas con diferente granularidad según su conocimiento sobre el empleado. Para manejar esta información lingüística multi-granular revisamos diferentes marcos evaluadores y proponemos el uso de jerarquías lingüísticas para realizar los procesos computacionales con este tipo de información de forma precisa y sin pérdida de información. Una vez definido el marco evaluador definiremos un modelo de evaluación difusa basado en los procesos de análisis de decisión clásicos [24], que tienen las siguientes fases:

- *Fase de agregación*: conocido el amplio espectro de opiniones sobre cada empleado a evaluar, se hace necesaria su agregación con objeto de disponer de una valoración colectiva para cada individuo que permita tomar la decisión final.
- *Fase de explotación*: en esta fase se establecerá un orden sobre los distintos empleados evaluados a partir de la valoración global obtenida en la fase

de agregación. Este orden se utilizará para llevar a cabo las políticas fijadas por la empresa

Esta contribución se estructura como sigue. En la Sección 2 se revisan conceptos sobre información lingüística que necesitaremos más adelante. En la Sección 3 se esboza brevemente el modelo de evaluación difuso para la evaluación del desempeño definido en un marco lingüístico multi-granular y, finalmente, en la Sección 4 se exponen algunas conclusiones.

2 Conceptos preliminares

2.1 Enfoque lingüístico difuso

Como ya hemos comentado, el enfoque lingüístico difuso representa información lingüística utilizando valores lingüísticos mediante variables lingüísticas [25].

Cuando trabajamos con información lingüística hay que seleccionar los descriptores lingüísticos adecuados y su semántica. Para llevar a cabo esta tarea, un aspecto importante a considerar es la *granularidad de la incertidumbre*, es decir, la capacidad de discriminación entre distintos valores de información. Valores típicos de cardinalidad en los modelos lingüísticos son valores impares, tales como 5, 7 o 9, donde el término medio representa una valoración de “aproximadamente 0.5” y el resto de términos están distribuidos simétricamente a su alrededor.

La semántica de los términos lingüísticos viene dada por números difusos con una función de pertenencia definida en el intervalo $[0, 1]$. Éstos son valoraciones aproximadas, por lo que diferentes autores consideran que una función de pertenencia trapecial es lo suficientemente buena para capturar la vaguedad de los términos lingüísticos. Una representación trapecial viene determinada por una 4-tupla (a, b, d, c) , donde $[b, d]$ es el intervalo en el cual la función de pertenencia vale 1, y a y c indican los límites izquierdo y derecho donde la función no se anula [5]. Un caso particular de este tipo de representación lo constituyen las funciones triangulares, es decir, $b = d$; entonces esta función de pertenencia triangular se representa como (a, b, c) . Otros autores usan representaciones no trapeciales, por ejemplo funciones gaussianas [6].

2.2 Modelado lingüístico basado en 2-tuplas

El modelo de representación lingüístico basado en 2-tuplas [15] está fundamentado en el concepto de traslación simbólica. Se considerarán un conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ y el conjunto de 2-tuplas asociado a S : $\langle S \rangle = S \times [-0.5, 0.5]$.

La 2-tupla lingüística $(s_i, \alpha) \in \langle S \rangle$ que expresa la información equivalente a un valor $\beta \in [0, g]$ en el

intervalo de granularidad de S se obtiene usando la función $\Delta : [0, g] \rightarrow \langle S \rangle$, definida por

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \text{ con } \begin{cases} s_i, & i = \text{round}(\beta), \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-0.5, 0.5), \end{cases}$$

donde round es el operador usual de redondeo, gracias al cual a β se le asigna la etiqueta lingüística $s_i \in S$ con índice $i \in \{0, \dots, g\}$ más cercano a β y α es el valor de la traslación simbólica.

Conviene señalar que Δ es biyectiva [16, 17] y que su inversa $\Delta^{-1} : \langle S \rangle \rightarrow [0, g]$ viene dada por $\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha$. En este sentido, las 2-tuplas de $\langle S \rangle$ quedan identificadas con los números del intervalo $[0, g]$.

Por ejemplo, para $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$, se tiene $\Delta(2.3) = (s_2, 0.3)$ y $\Delta(3.5) = (s_4, -0.5)$; asimismo, $\Delta^{-1}(s_1, 0.4) = 1.4$ y $\Delta^{-1}(s_3, -0.4) = 2.6$.

Además, existe una aplicación inyectiva $S \hookrightarrow \langle S \rangle$ que permite ver cada etiqueta s_i como una 2-tupla lingüística: $(s_i, 0)$. Así, para cada $i \in \{0, 1, \dots, g\}$ se tiene $\Delta(i) = (s_i, 0)$ y $\Delta^{-1}(s_i, 0) = i$.

Este modelo de representación basado en 2-tuplas facilita las operaciones sobre 2-tuplas y tiene un modelo computacional asociado [15], del cual se ha demostrado que las operaciones con etiquetas con semántica triangular y simétricas se realizan sin pérdida de información.

2.3 Manipulación de información lingüística multi-granular

El objetivo de nuestro trabajo es proponer un marco evaluador multi-granular, en el que los distintos grupos evaluadores utilicen etiquetas lingüísticas para emitir sus calificaciones teniendo en cuenta que cada grupo podrá utilizar diferentes conjuntos de etiquetas con distintas granularidades, según sea su conocimiento sobre los empleados a evaluar.

Consideraremos una familia de m conjuntos de etiquetas lingüísticas

$$\mathcal{S} = \left\{ S^{n(q)} \right\}_{q=1}^m$$

donde para cada nivel $q \in \{1, \dots, m\}$, el conjunto de etiquetas lingüísticas viene definido por

$$S^{n(q)} = \left\{ s_0^{n(q)}, s_1^{n(q)}, \dots, s_{n(q)-1}^{n(q)} \right\}$$

y $n(q)$ es la granularidad de $S^{n(q)}$.

El problema fundamental en este tipo de contextos se plantea a la hora de agregar las calificaciones emitidas por los diferentes evaluadores (procedente de conjuntos de etiquetas con distinta granularidad), ya que

no se puede operar directamente sobre diferentes escalas de valoración. En la literatura existente se lleva a cabo un proceso de normalización o unificación de la información lingüística multi-granular de dos formas alternativas [17, 18].

2.3.1 Unificación mediante conjuntos difusos

En [18] se propone un proceso de unificación sobre un marco común de expresión, S_T , que normalmente será el conjunto de etiquetas de mayor granularidad. La unificación consiste en transformar las etiquetas lingüísticas iniciales en conjuntos difusos sobre el marco común de expresión, $F(S_T)$, mediante un conjunto de funciones de transformación.

El uso de este proceso de unificación permite que el contexto lingüístico multi-granular esté constituido por conjuntos de etiquetas lingüísticas sin ningún tipo de restricción, haciendo totalmente flexible la definición del marco de evaluación del problema. Sin embargo, este modelo presenta el problema de la pérdida de información en el proceso de unificación y una alta complejidad en el modelado de la información.

2.3.2 Jerarquías lingüísticas

La segunda alternativa consiste en modelar la información lingüística multi-granular mediante la estructura de *jerarquías lingüísticas* [16, 17], las cuales mejoran la precisión en los procesos computacionales de información lingüística multi-granular. Dentro de una jerarquía lingüística, los niveles están ordenados de acuerdo con su granularidad de la siguiente forma:

$$n(q+1) = 2n(q) - 1.$$

Hay que señalar que las jerarquías lingüísticas tratan con conjuntos de etiquetas cuya función de pertenencia es triangular, simétrica y uniformemente distribuida. Además tienen un valor de granularidad impar, de forma que la etiqueta central de dichos conjuntos lingüísticos representa el valor de indiferencia. Un ejemplo gráfico de jerarquía lingüística puede verse en la Figura 1.

Como se ha indicado anteriormente, en el caso de las jerarquías lingüísticas la granularidad viene determinada por $n(q+1) = 2n(q) - 1$. Así, para $n(1) = 3$ se tiene que $n(2) = 5$, $n(3) = 9$, etc. (véase la Figura 1). Por tanto, el uso de jerarquías lingüísticas no permite considerar conjuntos de etiquetas lingüísticas de cualquier granularidad como 7 y 11 conjuntamente, que el modelo anterior sí permitía. Sin embargo, el uso de jerarquías lingüísticas nos proporciona una serie de ventajas sobre el modelo anterior:

- Permite realizar el proceso de unificación de infor-

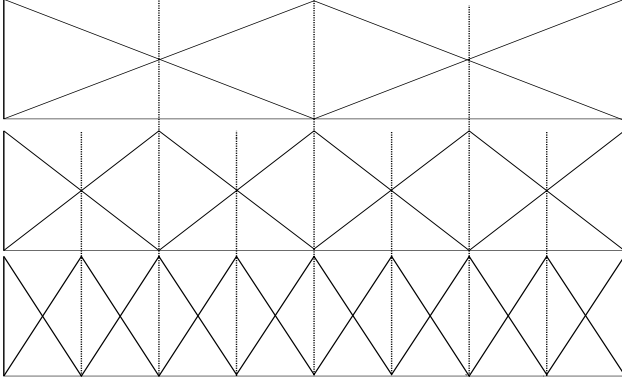


Figura 1: Jerarquía de 3, 5 y 9 etiquetas

mación multi-granular sin pérdida de información y con valoraciones lingüísticas de 2-tuplas sin necesidad de usar conjuntos difusos [17].

- Los procesos de computación con palabras pueden realizarse de forma precisa sin pérdida de información usando el modelo computacional para 2-tuplas [15].

A continuación definimos la función que nos permite unificar la información lingüística de un conjunto de etiquetas de una jerarquía lingüística a otro conjunto de la misma, es decir, la función que nos va a permitir realizar la unificación de la información sin pérdida de información.

Supongamos, como antes, $\mathcal{S} = \{S^{n(q)}\}_{q=1}^m$. La función de transformación entre conjuntos de 2-tuplas lingüísticas con diferente granularidad viene dada por:

$$F_{q'}^q : \langle S^{n(q)} \rangle \longrightarrow \langle S^{n(q')} \rangle$$

a partir de la función

$$f_{q'}^q : [0, n(q) - 1] \longrightarrow [0, n(q') - 1]$$

definida por

$$f_{q'}^q(x) = \frac{n(q') - 1}{n(q) - 1} x$$

mediante

$$F_{q'}^q(s_i^{n(q)}, \alpha_i) = \Delta_{q'}(f_{q'}^q(\Delta_q^{-1}(s_i^{n(q)}, \alpha_i))).$$

Para ilustrar el proceso anterior, consideremos a modo de ejemplo la jerarquía lingüística correspondiente a la Figura 1, es decir, $\mathcal{S} = \{S^{n(1)}, S^{n(2)}, S^{n(3)}\}$ con $n(1) = 3$, $n(2) = 5$ y $n(3) = 9$. Entonces

$$\begin{aligned} F_1^3(s_5^9, 0) &= \Delta_1(f_1^3(\Delta_3^{-1}(s_5^9, 0))) = \Delta_1(f_1^3(5)) = \\ &\Delta_1\left(\frac{2}{8} \cdot 5\right) = \Delta_1(1.25) = (s_1^3, 0.25). \end{aligned}$$

3 Modelo lingüístico de evaluación del desempeño 360°

En esta sección vamos a definir de forma breve nuestra propuesta de modelo de evaluación del desempeño basado en un proceso de decisión capaz de manejar y operar información valorada un marco lingüístico multi-granular modelado con jerarquías lingüísticas.

3.1 Notación

El objetivo de la evaluación es calificar a los empleados según las opiniones de diferentes colectivos relacionados con ellos. A continuación presentamos el esquema del problema de evaluación de desempeño 360° así como el marco de definición del mismo sobre un contexto lingüístico multi-granular, señalando las características y terminología que usaremos en el problema.

- Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de empleados a evaluar. Supondremos que los individuos son evaluados por tres colectivos distintos: el de sus superiores, A , el de los compañeros y colaboradores, B y el de los clientes, C .
 - Superiores: $A = \{a_1, \dots, a_r\}$.
 - Colaboradores: $B = \{b_1, \dots, b_s\}$.
 - Clientes: $C = \{c_1, \dots, c_t\}$.
 - Además también se incluye en el proceso la opinión que el propio individuo evaluado tiene sobre sí mismo.
- Las evaluaciones se realizarán de acuerdo con diferentes criterios y/o indicadores: $Y_1, \dots, Y_p$.
- Notaremos las valoraciones de $a_i \in A$, $b_i \in B$ y $c_i \in C$ para el empleado x_j según el criterio Y_k como a_j^{ik} , b_j^{ik} y c_j^{ik} , respectivamente. Además, x_j^{jk} será la valoración del empleado x_j sobre sí mismo respecto del criterio Y_k . De aquí deducimos que hay $(r+s+t+1)p$ valoraciones para cada empleado evaluado.
- Consideramos para cada criterio Y_k y para cada colectivo de evaluadores un conjunto de etiquetas lingüísticas.

3.2 Modelo de decisión

Nuestra propuesta sigue un esquema decisión clásico [24] y un esquema de decisión lingüístico multi-granular [16] que proponen dos fases diferenciadas para realizar la evaluación.

3.2.1 Fase de agregación

Su objetivo es obtener una evaluación colectiva para cada individuo a partir de las opiniones individuales de

todos los evaluadores. Debido al contexto de definición del problema en el que hay información expresada en distintos dominios de expresión, esta fase se lleva a cabo en varios pasos:

1. *Unificación de información*: La información suministrada por los evaluadores está definida en un contexto de información no homogéneo, por lo que para operar sobre ella, en primer lugar hay que expresarla de forma uniforme. Dado nuestro marco evaluador, esta fase del proceso consistirá en expresar todas las valoraciones en un único conjunto de etiquetas, para lo cual utilizaremos las funciones de transformación mostradas en 2.3.2.
2. *Proceso de agregación*: Una vez unificada la información, para obtener una evaluación global de cada empleado, x_j , utilizamos un proceso de agregación que cuenta con las siguientes etapas:
 - (a) *Evaluación por criterio y para cada colectivo*, $v_-^k(x_j)$. Las evaluaciones de cada colectivo para cada criterio son agregadas por medio de un operador de agregación, que puede ser diferente según el colectivo:
 - Superiores: $v_A^k(x_j)$.
 - Colaboradores: $v_B^k(x_j)$.
 - Clientes: $v_C^k(x_j)$.
 - Individuo: $v_j^k(x_j)$.
 - (b) *Evaluación colectiva para cada criterio*, $v^k(x_j)$: los valores obtenidos en la fase anterior, $v_-^k(x_j)$, son agregados mediante un operador de agregación, u^k , consiguiendo una valoración global para cada criterio Y_k :

$$v^k(x_j) = u^k(v_A^k(x_j), v_B^k(x_j), v_C^k(x_j), v_j^k(x_j))$$
 - (c) *Evaluación global por individuo*, $v(x_j)$: con un operador de agregación u obtenemos la valoración global para el empleado x_j :

$$v(x_j) = u(v^1(x_j), \dots, v^P(x_j)).$$

Las operaciones de agregación se realizarán utilizando operadores de agregación para 2-tuplas [15], seleccionando en cada problema el más adecuado.

3.2.2 Fase de explotación

En esta fase se ordenarán los individuos según la evaluación colectiva para cada criterio, $v^k(x_j)$, o según la evaluación global, $v(x_j)$, en función de cuáles sean los objetivos fijados por la empresa. Una vez ordenados los empleados, la empresa u organización tomará las decisiones correspondientes.

Téngase en cuenta que cada empleado tendrá asignada una 2-tupla, asociada al conjunto de etiquetas elegido

para unificar la información, pongamos $S^{n(q)}$. De esta manera, los empleados serán clasificados atendiendo a las etiquetas asignadas en la evaluación, pero dentro de cada categoría, pongamos $\alpha_i^{n(q)}$, se puede realizar una ordenación de los empleados teniendo en cuenta la traslación simbólica.

El proceso anterior no sólo permite clasificar y ordenar los empleados según atributos o globalmente, sino que proporciona una manera de dar las valoraciones agregadas en cada espectro de etiquetas lingüísticas utilizado gracias a las funciones de transformación $F_{q'}^q$ correspondientes.

4 Conclusiones

La evaluación del desempeño es un proceso que se lleva a cabo en algunas empresas y organizaciones para determinar el grado de eficiencia y eficacia de los empleados. En esta contribución hemos presentado un modelo de evaluación del desempeño de 360°, teniendo en cuenta que los indicadores respecto de los que son evaluados los trabajadores suelen ser valorados con presencia de incertidumbre, y los evaluadores pueden presentar distinto grado de conocimiento sobre los individuos evaluados. Así, el modelo presentado ofrece a los distintos evaluadores un modelado lingüístico de los indicadores que puede ser valorado en distintos conjuntos de etiquetas, atendiendo al conocimiento sobre el individuo evaluado, es decir, ofrece un marco de evaluación lingüístico multi-granular. Para llevar a cabo esta tarea el modelo de evaluación utiliza la aproximación lingüística difusa junto con el modelado de 2-tuplas con el fin de manejar esta información multi-granular, agregarla convenientemente y ordenar los distintos individuos evaluados. En consecuencia, este modelo ofrece un aumento de flexibilidad para los expertos a la hora de expresar sus opiniones y una mejora en el tratamiento de información con incertidumbre.

5 Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado en parte por el Ministerio de Educación y Ciencia (proyectos MTM2005-08982-C04-02 y MTM2005-08982-C04-03), REDEMAP-II (TIN2004-21700-E) y fondos FEDER.

References

- [1] B. Arfi. Fuzzy decision making in politics. A linguistic fuzzy-set approach (LFSA). *Political Analysis* **13**, pp. 23–56 (2005).
- [2] C. G. Banks y L. Roberson. Performance appraisers as test developers. *Academy of Management Review* **10**, pp. 128–142 (1985).

- [3] J. N. Baron y D. M. Kreps. *Strategic Human Resources. Frameworks for General Managers*. Wiley & Sons, Nueva York (1999).
- [4] H. J. Bernardin, J. S. Kane, S. Ross, J. D. Spina y D. L. Johnson. Performance appraisal design, development, and implementation. En: G. R. Ferris, S. D. Rosen y D. T. Barnum (eds.). *Handbook of Human Resources Management*. Blackwell, Cambridge, pp. 462–493 (1995).
- [5] P. P. Bonissone y K. S. Decker. Selecting uncertainty calculi and granularity: An experiment in trading-off precision and complexity. En: L.H. Kanal y J. F. Lemmer (eds.). *Uncertainty in Artificial Intelligence*. North-Holland, pp. 217–247 (1986).
- [6] G. Bordogna y G. Pasi. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science* **44**, pp. 70–82 (1993).
- [7] R. D. Bretz, G. T. Milkovich y W. Read. The current state of performance appraisal research and practice: Concerns, directions and implications. *Journal of Management* **18**, pp. 321–352 (1992).
- [8] M. C. de la Calle y M. Ortiz. *Fundamentos de Recursos Humanos*. Pearson Prentice Hall, Madrid (2004).
- [9] R. L. Cardy y G. H. Dobbins. *Performance Appraisal: Alternative Perspectives*. South-Western, Cincinnati (1994).
- [10] C. H. Cheng y Y. Lin. Evaluating the best main battle tank using fuzzy decision theory with linguistic criteria evaluation. *European Journal of Operational Research* **142**, pp. 174–186 (2002).
- [11] M. Edwards y E. Ewen. Automating 360 degree feedback. *HR Focus* **70**, p. 3 (1996).
- [12] G. R. Ferris y T. A. Judge. Personnel/human resources management: A political influence perspective. *Journal of Management* **17**, pp. 1–42 (1991).
- [13] C. Fletcher. Performance appraisal and management: The developing research agenda. *Journal of Occupational and Organization Psychology* **74**, pp. 473–487 (2001).
- [14] P. Gwynnw. How consistent are performance review criteria? *MIT Sloan Management Review* **43**, pp. 15 (2002).
- [15] F. Herrera y L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8**, pp. 746–752 (2000).
- [16] F. Herrera y L. Martínez. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in multiexpert decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics* **31**, pp. 227–234 (2001).
- [17] F. Herrera y L. Martínez. The 2-tuple linguistic computational model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **9**, pp. 33–48 (2001).
- [18] F. Herrera, L. Martínez y P. J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research* **166**, pp. 115–132 (2005).
- [19] J. L. Kerr. Diversification strategies and managerial rewards: An empirical study. *Academy of Management Journal* **28**, pp. 155–179 (1985).
- [20] S. Marshall. *Complete turnaround 360-degree evaluations gaining favour with workers management*. Arizona Republic, D1 (1999).
- [21] J. B. Miner. Development and application of the rated ranking technique in performance appraisal. *Journal of Occupational Psychology* **6**, pp. 291–305 (1988).
- [22] R. W. Mondy y R. M. Noe. *Administración de Recursos Humanos*. Pearson Prentice Hall, México (2005).
- [23] K. R. Murphy y J. N. Cleveland. *Performance Appraisal: An Organizational Perspective*. Allyn & Bacon, Boston (1991).
- [24] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems* **90**, pp. 199–206 (1997).
- [25] L. A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, **8**, pp. 199–249; **8**, pp. 301–357; **9**, pp. 43–80 (1975).
- [26] L. A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**, pp. 103–111 (1996).
- [27] R. Zemke. The service edge. *Incentive* **177**, p. 59 (2003).

MODELO DE CONSENSO ADAPTATIVO PARA PROBLEMAS DE TOMA DE DECISIÓN EN GRUPO CON INFORMACIÓN LINGÜÍSTICA MULTIGRANULAR

L. Martínez, F. Mata⁰

Dept. Informática
Universidad de Jaén
23700- Jaén, Spain
e-mail: martin,fmata@ujaen.es

E. Herrera-Viedma

Dept. CC e I.A
Universidad de Granada
18071- Granada, Spain
e-mail: viedma@decsai.ugr.es

Resumen

Para resolver un problema de Toma de Decisión en Grupo (TDG) se aplican dos procesos, un proceso de consenso y un proceso de selección. En el primero los expertos llevan a cabo varias rondas de discusión en un intento de aproximar sus opiniones, mientras en el segundo se realiza la selección de las alternativas solución de acuerdo a las opiniones de los expertos.

En este trabajo nos centraremos en el proceso de consenso en problemas de TDG con conocimiento vago o impreciso. El Enfoque Lingüístico Difuso se ha mostrado como una herramienta eficaz para tratarlo.

El propósito de este trabajo es optimizar el proceso de consenso en problemas de TDG en los que los expertos utilizan diferentes conjuntos de términos lingüísticos para expresar sus preferencias, es decir, definidos en contextos lingüísticos multigranulares. Para ello proponemos un modelo de consenso adaptativo que se comporte de forma diferente según el grado de consenso alcanzado en cada una de las rondas que componen el proceso de consenso.

Palabras Clave: Consenso, Información Lingüística Multigranular, Toma de Decisiones en Grupo, Relaciones de Preferencia.

1 INTRODUCCIÓN

Un problema de TDG se puede definir como una situación de decisión en la que intervienen varios expertos que intentan encontrar en conjunto la mejor solución al problema planteado.

⁰Soportado parcialmente por los Proyectos de Investigación MTM 2005-08982-C04-03 y TIN2004-21700-E

Normalmente en los problemas de TDG los expertos expresan sus opiniones de una manera precisa utilizando valores cuantitativos. Sin embargo, en algunas ocasiones, puede ocurrir que los expertos tengan que valorar aspectos cualitativos que difícilmente admiten valoraciones numéricas precisas. En estos casos el uso de otro tipo de valoraciones, como por ejemplo las palabras, puede ser más apropiado. El Enfoque Lingüístico Difuso [13] ha dado buenos resultados en la representación y valoración de información cualitativa en problemas de Toma de Decisiones [1, 7, 10, 12].

En los problemas de TDG al intervenir un conjunto de expertos, es frecuente que éstos pertenezcan a diferentes áreas de estudio o bien que tengan un grado de conocimiento distinto sobre el problema. Esto puede propiciar que cada experto prefiera usar su propio conjunto de términos lingüísticos para expresar sus preferencias. Cada conjunto estará caracterizado por su semántica y/o granularidad. En estos casos decimos que el problema de TDG está definido en un contexto lingüístico multigranular [3, 5, 6].

Los problemas de TDG se resuelven llevando a cabo dos procesos (ver Figura 1):

- i) Proceso de Consenso: Se desarrolla en varias rondas de discusión en las que los expertos discuten y cambian sus opiniones con el objetivo de alcanzar un grado de acuerdo o consenso mínimo antes de tomar una decisión. Aparece la figura del moderador que comprueba el grado de acuerdo existente y en caso de ser necesario sugerirá los cambios en las preferencias de los expertos que permita incrementar el grado de consenso.
- ii) Proceso de Selección: Una vez alcanzado el nivel de consenso adecuado, se lleva cabo la selección de la mejor o mejores alternativas solución al problema planteado.

El intento de modelar el proceso de consenso ha llevado a varios autores a proponer diferentes modelos [2, 8, 11], si bien en ninguno de ellos se intenta optimizar el proceso conforme mejora el grado de acuerdo,

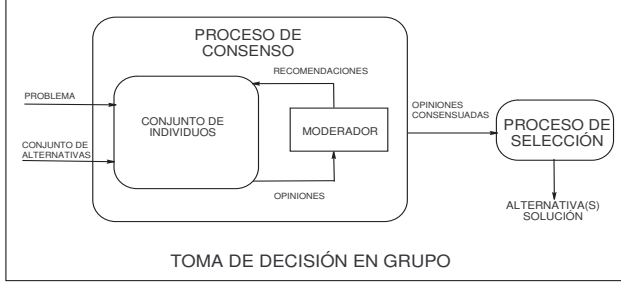


Figura 1: Procesos en los problemas de TDG.

sino que siempre se mantiene el mismo modelo de actuación independientemente del acuerdo existente. Esta contribución propone un modelo de consenso adaptativo que automatice las tareas del moderador mediante la generación de recomendaciones que indiquen a los expertos cómo han de modificar sus opiniones para incrementar el nivel de acuerdo. Esta generación de recomendaciones se basará en un proceso de búsqueda de preferencias con bajo nivel de acuerdo. La característica de *adaptativo* de este modelo de consenso se refleja en el proceso de búsqueda de preferencias anterior, que se implementará utilizando uno de tres procedimientos posibles, donde el procedimiento utilizado en cada ronda dependerá del grado de acuerdo existente en la misma. Este modelo adaptativo mejorará el incremento del grado de acuerdo en cada ronda y disminuirá el número de cambios y rondas del proceso de consenso.

Dado que en este trabajo nos centramos en problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares las medidas de consenso utilizadas para calcular el acuerdo en cada ronda y recomendar los cambios de preferencias necesarios serán las presentadas en [9]:

- Grados de consenso: Miden el grado de consenso entre todos los expertos.
- Medidas de proximidad: Miden la proximidad o distancia de la opinión de cada experto respecto a la opinión colectiva del grupo.

El modelo de consenso adaptativo propuesto para problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multi-granulares está compuesto por cuatro fases que se repiten hasta alcanzar el nivel de consenso deseado o un número máximo de rondas fijado inicialmente:

- Unificación de la información.
- Control del grado de consenso.
- Búsqueda adaptativa de preferencias a modificar.
- Generación de recomendaciones.

Esta contribución está estructurada de la siguiente forma. En la Sección 2 se hace una breve revisión de los

problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares. En la Sección 3 presentamos el modelo de consenso adaptativo para este tipo de contextos. En la Sección 4 finalizaremos con una serie de conclusiones.

2 PROBLEMAS DE TDG EN CONTEXTOS LINGÜÍSTICOS MULTIGRANULARES

Un problema de TDG está compuesto por un grupo de expertos, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($m \geq 2$), que expresan sus opiniones sobre un conjunto de alternativas finito, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$), con el objetivo de encontrar una solución común al problema. Cada experto e_i proporciona sus preferencias sobre X por medio de relaciones de preferencia, $P_{e_i} \subset X \times X$, donde cada valor $\mu_{P_{e_i}}(x_l, x_k) = p_i^{lk}$ denota el grado de preferencia de la alternativa x_l sobre x_k expresada por el experto e_i , [4].

En algunas ocasiones los expertos han de valorar fenómenos o aspectos de naturaleza cualitativa que no admiten valoraciones numéricas precisas, apareciendo cierto grado de imprecisión o incertidumbre que ha sido tratada satisfactoriamente por el Enfoque Lingüístico Difuso [13].

En esta contribución nos centramos en problemas de TDG en los que los expertos utilizan términos lingüísticos y relaciones de preferencia para expresar sus preferencias, $\mu_{P_{e_i}} : X \times X \rightarrow S$, siendo S un conjunto de etiquetas lingüísticas $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ que cumple las siguientes condiciones:

- Es ordenado, $s_i \geq s_j$, si $i \geq j$.
- Existe un operador de negación, $\text{Neg}(s_i) = s_j$ tal que $j = g - i$.

La semántica de los términos se representa mediante números difusos definidos en el intervalo $[0,1]$.

Los expertos que intervienen en el problema de TDG pueden pertenecer a diferentes áreas de investigación y/o tener distinto grado de conocimiento sobre el problema. Esta circunstancia puede implicar que utilicen conjuntos de términos lingüísticos diferentes. Diremos que estamos ante un problema TDG definido en un contexto lingüístico multigranular si cada experto e_i utiliza para expresar sus preferencias su propio conjunto de términos lingüísticos $S_i = \{s_0^i, \dots, s_g^i\}$ caracterizado por su granularidad y/o semántica, siendo necesario disponer de herramientas para trabajar y modelar este tipo de información [5].

3 MODELO DE CONSENSO ADAPTATIVO

En esta sección presentamos el modelo adaptativo propuesto para optimizar el proceso de consenso en problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares. Este modelo está compuesto por cuatro fases:

1. *Unificación.* Unifica las preferencias lingüísticas multigranulares proporcionadas por los expertos en un único dominio de expresión.
2. *Control del consenso.* Calcula distintas medidas de consenso para comprobar el nivel de acuerdo existente.
3. *Búsqueda Adaptativa de preferencias a modificar.* Si no existe un acuerdo suficiente ejecuta diferentes procedimientos para buscar e identificar las preferencias que deben cambiar los expertos.
4. *Generación de Recomendaciones.* Recomienda cómo han de cambiar los expertos sus preferencias para mejorar el nivel de acuerdo en la siguiente ronda.

Cada una de estas fases se describen con mayor detalle en las siguientes subsecciones.

3.1 UNIFICACIÓN

Debido a que tratamos con información lingüística multigranular, antes de poder operar con ella, es necesario unificar todas las preferencias lingüísticas en un único dominio que denominaremos conjunto básico de términos lingüísticos S_T . Esta unificación la realizaremos mediante conjuntos difusos en S_T siguiendo el proceso presentado en [5]:

1. Elección del conjunto básico de términos lingüístico, $S_T = \{c_0, \dots, c_g\}$.
2. Transformación de todos los términos lingüísticos pertenecientes a los diferentes S_i en conjuntos difusos definidos sobre S_T . Para realizar esta unificación se definen diferentes funciones de transformación $\tau_{S_i S_T}(\cdot)$ que transforman cada preferencia lingüística p_i^{lk} en un conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk}$ en S_T :

$$\tilde{p}_i^{lk} = \tau_{S_i S_T}(p_i^{lk}) = \{(c_h, \alpha_{ih}^{lk}) \mid h = 0, \dots, g\}$$

$$\alpha_{ih}^{lk} = \max_y \min\{\mu_{p_i^{lk}}(y), \mu_{c_h}(y)\}$$

donde al menos $\exists \alpha_{ih}^{lk} > 0$ y $\forall \alpha_{ih}^{lk} \in [0, 1]$.

Para simplificar la notación usaremos sólo los grados de pertenencia $(\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ para representar cada conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk}$. Con lo que las relaciones de preferencia unificadas, $\tilde{\mathbf{P}}_{e_i}$, se representarán:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{e_i} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_i^{11} = (\alpha_{i0}^{11}, \dots, \alpha_{ig}^{11}) & \dots & \tilde{p}_i^{1n} = (\alpha_{i0}^{1n}, \dots, \alpha_{ig}^{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_i^{n1} = (\alpha_{i0}^{n1}, \dots, \alpha_{ig}^{n1}) & \dots & \tilde{p}_i^{nn} = (\alpha_{i0}^{nn}, \dots, \alpha_{ig}^{nn}) \end{pmatrix}$$

3.2 CONTROL DEL CONSENSO

Una vez unificadas todas las preferencias mediante conjuntos difusos en S_T , se calcula y comprueba el nivel de acuerdo existente entre los expertos.

Esta fase se realiza en dos pasos:

1. Cálculo de los grados de consenso. Los grados de consenso miden el nivel de consenso alcanzado entre los expertos. En primer lugar se calcula una matriz de consenso, CM , que representa la similitud entre las opiniones de todos los expertos. Para su cálculo se utiliza la función de similitud presentada en [9] y se realizan los siguientes pasos:

- Se calculan matrices de similitud, SM_{ij} , entre cada par de expertos, i y j con $i < j$, usando la medida de similitud presentada en [9].
- Se agregan todas las matrices, SM_{ij} , en una única matriz mediante un operador de agregación como la media aritmética y a la matriz obtenida la denominamos matriz de consenso, CM .

Una vez obtenida la matriz de consenso se evalúa el consenso en tres niveles diferentes:

Consenso sobre pares de alternativas cp^{lk} :

Evalúa el consenso en cada par de alternativas (x_l, x_k) , coincidiendo con los valores de la matriz de consenso $CM = (cm^{lk})$,

$$cp^{lk} = cm^{lk}, \text{ para } l, k = 1, \dots, n \text{ y } l \neq k$$

Consenso sobre las alternativas, ca^l : Evalúa el consenso en cada alternativa x_l ,

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, k \neq l}^n cp^{lk}}{n-1}$$

Consenso entre expertos, ce : Evalúa el grado de consenso “total” entre los expertos considerando todas las alternativas,

$$ce = \frac{\sum_{l=1}^n ca^l}{n}$$

Para cualesquiera de estas medidas un valor próximo a 1 indica un grado de consenso alto y un valor próximo a 0 indica bajo.

2. Control del grado de consenso. El modelo comprueba el nivel de acuerdo y decide si el proceso de consenso debe terminar o continuar. Para ello compara el grado de consenso entre expertos, ce , con un umbral de consenso γ fijado a priori:

- Si $ce \geq \gamma$, se ha alcanzado un nivel de acuerdo suficiente, y se pasa al proceso de selección de alternativas.
- Si $ce < \gamma$, el acuerdo alcanzado no es suficiente por lo que continúa la siguiente fase del proceso de consenso.

3.3 BÚSQUEDA ADAPTATIVA DE PREFERENCIAS A MODIFICAR

Esta fase es la que imprime el carácter adaptativo del modelo al adaptar la búsqueda e identificación de las preferencias a cambiar dependiendo del grado de consenso alcanzado en cada ronda de consenso. Si el grado de consenso es bajo significa que existen bastantes discrepancias entre las preferencias de los expertos y por lo tanto los expertos deberán acometer muchos cambios para acercar sus opiniones. Sin embargo, si el grado de consenso es alto significa que existe bastante coincidencia entre sus preferencias y sólo los expertos más alejados deberán cambiar sus preferencias.

Este modelo propone que el procedimiento de búsqueda consiga disminuir el número de cambios conforme el nivel de acuerdo se va incrementado. Para ello proponemos que el modelo utilice tres procedimientos de búsqueda de preferencias (PBp) diferentes según el nivel de acuerdo.

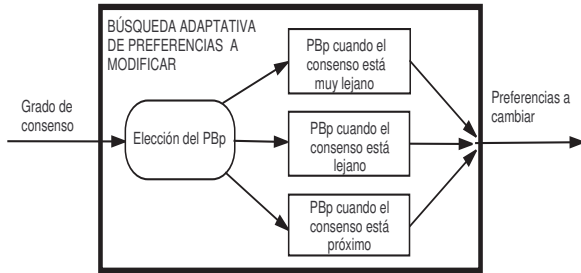


Figura 2: Búsqueda Adaptativa de preferencias

En esta fase se llevan a cabo dos tareas (Figura 2):

- 1) Elección del procedimiento de búsqueda de preferencias más apropiado. El modelo establece una serie de condiciones en las que se tiene en cuenta el grado de consenso alcanzado en la ronda actual, ce , y dos umbrales de consenso θ_1 y θ_2 utilizados para diferenciar tres posibles situaciones de consenso: muy lejano, lejano y próximo.

Los umbrales de consenso θ_1 y θ_2 son establecidos a priori y dependerán del problema a resolver.

- 2) Ejecución del PBp. Según el grado de consenso actual, ce , se ejecutará uno de los tres procedimientos. Cada PBp analiza el consenso desde un punto de vista diferente:

Tabla 1: Características de los PBp

Estado de Consenso	Foco de atención	Expertos afectados por los cambios
Muy Lejano	Pares de alternativas	Todos los expertos
Lejano	Alternativas	Expertos más alejados en las alternativas en desacuerdo
Próximo	Expertos	Expertos más alejados en pares y alternativas en desacuerdo

El resultado de la ejecución de un PBp es el conjunto de preferencias que cada experto e_i deberá cambiar en la siguiente ronda de consenso. A continuación se describen las características y el funcionamiento de cada uno de estos procedimientos.

3.3.1 PBp para situaciones en las que el consenso está muy lejano.

El modelo adaptativo propone ejecutar este procedimiento cuando considera que el grado de consenso es bajo, i.e., $ce \leq \theta_1$, y por lo tanto el acuerdo está muy lejano.

Tal y como se muestra en la Tabla 1 el propósito de este procedimiento es identificar los pares de alternativas (x_l, x_k) en los que existe menor grado de consenso y proponer a todos los expertos que cambien sus preferencias sobre estos pares.

Para buscar las preferencias a cambiar lleva a cabo las siguientes operaciones:

1. Identificar todos los pares (x_l, x_k) en los que el grado de consenso es menor que un determinado umbral de consenso ρ definido a nivel de pares de alternativas,

$$P = \{(l, k) \mid cp^{lk} < \rho, l, k = 1, \dots, n\}$$

donde cp^{lk} representa el grado de consenso calculado para cada par de alternativas. El valor de ρ puede ser fijado a priori o bien ser dinámico y actualizarse adaptándose al nivel de acuerdo alcanzado en cada ronda (ej.: media de los valores actuales).

2. Obtener el conjunto de preferencias que el modelo recomendará cambiar a todos los expertos e_i :

$$PREFECH_i^{ML} = \{(l, k) \mid (l, k) \in P\}, \quad \forall e_i \in E.$$

3.3.2 PBp para situaciones en las que el consenso está lejano

Tras una o varias rondas de consenso en las que todos los expertos han cambiado sus preferencias conforme a las recomendaciones del modelo, el grado de consenso deberá haber aumentado, i.e., $\theta_1 < ce \leq \theta_2$.

Parece lógico cambiar el criterio utilizado para buscar las preferencias a cambiar. En la Tabla 1 se ve que el propósito de este procedimiento es identificar las alternativas x_l y pares de alternativas (x_l, x_k) pertenecientes a estas alternativas en las que no existe consenso suficiente, y proponer que sean cambiadas sólo por los expertos que en esas alternativas se encuentren más alejados.

Para seleccionar las preferencias a cambiar el procedimiento lleva a cabo las siguientes operaciones:

1. Calcular los grados de consenso a nivel de alternativas, ca^l , utilizando para ello los grados de consenso a nivel de pares, cp^{lk} :

$$ca^l = \frac{\sum_{k=1, l \neq k}^n cp^{lk}}{n-1}$$

2. Identificar las alternativas en las que grado de consenso es menor que un umbral de consenso ρ , siendo éstas el conjunto de alternativas a cambiar,

$$X^{ch} = \{l \mid ca^l < \rho\}.$$

3. Identificar los pares pertenecientes a estas alternativas en las que no hay consenso,

$$P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch}, cp^{lk} < \rho\}.$$

4. Calcular la proximidad de cada experto a nivel de alternativas de las alternativas en las que no hay consenso,

$$\{pa_i^l, l \in X^{ch}\}, \forall e_i \in E.$$

5. Finalmente, obtener el conjunto de preferencias que cada experto e_i deberá cambiar: $PREFECH_i^L = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \beta_1^l\}$, donde β_1^l es un umbral de proximidad utilizado para seleccionar los expertos a cambiar según su proximidad a nivel de alternativas.

3.3.3 PBp para situaciones en las que el consenso está próximo

Este procedimiento se ejecuta en situaciones en las que el grado de consenso esta próximo la umbral de consenso γ considerado para finalizar el proceso de consenso, i.e., $\theta_2 < ce < \gamma$.

Llegado este momento, un número relativamente pequeño de cambios de opinión puede hacer que se alcance el consenso en la siguiente ronda. Esto se consigue añadiendo una nueva restricción a las restricciones existentes en el PBp anterior cuyo resultado es la reducción del número de expertos que han de cambiar sus preferencias.

En la Tabla 1 se muestra que este procedimiento pretende identificar las alternativas y pares de alternativas en las hay menor consenso y proponer su cambio sólo a los expertos que en esos pares se encuentren más alejados.

Para conseguir su propósito lleva a cabo los siguientes pasos:

1. Realiza las mismas operaciones numeradas del 1-4 descritas en el PBp cuando el consenso está lejano.
2. Obtiene para cada e_i el conjunto de preferencias a cambiar: $PREFECH_i^P = \{(l, k) \mid l \in X^{ch} \wedge (l, k) \in P \wedge pa_i^l < \beta_1^l \wedge pp_i^{lk} < \beta_2^{lk}\}$, donde pp_i^{lk} representa la proximidad de cada experto a nivel de pares de alternativas y β_1^l y β_2^{lk} son dos umbrales de proximidad utilizados para seleccionar los expertos a cambiar, β_1^l a nivel de alternativas y β_2^{lk} a nivel de pares de alternativas.

Con esta nueva condición se comprueba fácilmente que $|\bigcup_i PREFECH_i^P| \leq |\bigcup_i PREFECH_i^L|$, y dado que $|\bigcup_i PREFECH_i^L| \leq |\bigcup_i PREFECH_i^{ML}|$, se puede deducir que el modelo de consenso adaptativo adapta su funcionamiento al grado de consenso existente en cada momento, reduciendo el número de cambios conforme el grado de consenso va aumentando.

3.4 GENERACIÓN DE RECOMENDACIONES

Para conseguir que en cada nueva ronda el acuerdo entre los expertos sea mayor y el número de cambios a realizar por los expertos menor, es necesario que estos cambien sus preferencias más alejadas en la dirección correcta. En caso contrario, si los cambios se realizan de forma arbitraria, no se podrá garantizar que el grado de consenso mejore.

El objetivo de esta fase es recomendar a los expertos cómo han de cambiar las preferencias obtenidas por los PBp's para aproximar sus opiniones y mejorar el grado de consenso en la siguiente ronda. Para identificar la dirección se han definido un conjunto de *reglas de dirección* que comparan los valores centrales de los conjuntos difusos que representan tanto a las preferencias individuales como a la preferencia colectiva del grupo de expertos. El valor central representa la posición o el centro de gravedad de la información contenida en el conjunto difuso $\tilde{p}_i^{lk} = (\alpha_{i0}^{lk}, \dots, \alpha_{ig}^{lk})$ y se calcula como:

$$cv(\tilde{p}_i^{lk}) = \frac{\sum_{h=0}^g index(s_h^i) \cdot \alpha_{ih}^{lk}}{\sum_{h=0}^g \alpha_{ih}^{lk}}$$

donde $index(s_h^i) = h$.

Esta comparación se lleva a cabo teniendo en cuenta tres reglas de dirección:

DR.1. Si $(cv(\tilde{p}_i^{lk}) - cv(\tilde{p}_c^{lk})) < 0$, el experto e_i debería incrementar la valoración dada al par de alternativas (x_l, x_k) .

DR.2. Si $(cv(\tilde{p}_i^{lk}) - cv(\tilde{p}_c^{lk})) > 0$, el experto e_i debería decrementar la valoración dada al par de alternativas (x_l, x_k) .

DR.3. Si $(cv(\tilde{p}_i^{lk}) - cv(\tilde{p}_c^{lk})) = 0$ entonces el experto e_i no modificará la valoración dada al par de alternativas (x_l, x_k) .

Donde $\tilde{p}_i^{lk}$ son valores individuales del experto i y $\tilde{p}_c^{lk}$ son los valores colectivos del grupo de expertos

4 CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un modelo de consenso para problemas de TDG definidos en contextos lingüísticos multigranulares. Este modelo busca e identifica las preferencias a cambiar de forma diferente según el grado de consenso alcanzado en cada ronda de consenso. Con esta adaptación se consigue optimizar el proceso de consenso incrementando la velocidad de convergencia hacia el consenso y reduciendo el número de rondas y por lo tanto el tiempo necesario para alcanzar el consenso buscado.

Este modelo es una mejora al presentado en [9] tal y como muestra la Tabla 4, donde se comparan los resultados devueltos por ambos modelos aplicados sobre el mismo problema de TDG con ocho expertos y cuatro alternativas y que será expuesto en detalle en la presentación de este trabajo:

Tabla 2: Comparativa de modelos

Nº Rondas	Modelo adaptativo	Modelo no adaptativo [9]
1ª Ronda	ce=0.634 cambios=56	ce=0.634 cambios=36
2ª Ronda	ce=0.73 cambios=17	ce=0.703 cambios=28
3ª Ronda	ce=0.77	ce=0.749 cambios=6
4ª Ronda		ce=0.759

Referencias

- [1] B. Arfi. Fuzzy decision making in politics: A linguistic fuzzy-set approach (lfsa). *Political Analysis*, 13(1):23–56, 2005.
- [2] N. Bryson. Group decision making and the analytic hierarchy process: Exploring the consensus-relevant information content. *Computers and Operational Research*, 23:27–35, 1996.
- [3] S.L. Chang, R.C. Wang, and S.Y. Wang. Applying a direct multi-granularity linguistic and strategy-oriented aggregation approach on the assessment of supply performance. *European Journal of Operational Research*, page In Press, 2006.
- [4] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [5] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114 43-58, 114:43–58, 2000.
- [6] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martinez, F. Mata, and P.J. Sanchez. *A Multi-Granular Linguistic Decision Model for Evaluating the Quality of Network Services*. Intelligent Sensory Evaluation: Methodologies and Applications. Springer, Ruan Da, Zeng Xianyi (Eds.), 2004.
- [7] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A linguistic decision process in group decision making. *Group Decision and Negotiation*, 5:165–176, 1996.
- [8] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:73–87, 1996.
- [9] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata, and F Chiclana. A consensus support system model for group decision-making problems with multi-granular linguistic preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(5):644–658, 2005.
- [10] M.H. Rasmy, S.M. Lee, W.F. Abd El-Wahed, A.M. Ragab, and M.M. El-Sherbiny. An expert system for multiobjective decision making: Application of fuzzy linguistic preferences and goal programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 127:209–220, 2002.
- [11] S.Zadrozny. *Consensus under Fuzziness*, chapter An Approach to the Consensus Reaching Support in Fuzzy Environment, pages 83–109. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [12] Z.S Xu. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Science*, 166:19–30, 2004.
- [13] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, 8,8,9:199–249,301–357,43–80, 1975.

NORMAS TRIANGULARES SOBRE DOMINIOS DE FACTORIZACIÓN ÚNICA

G. Mayor

Dep. de Matemáticas e Informática
Universitat de les Illes Balears
gmayor@uib.es

J. Monreal

Dep. de Matemáticas e Informática
Universitat de les Illes Balears
jaumemonreal@mallorcaweb.net

Resumen

En este trabajo se plantea el estudio de t-normas y t-conormas en un ámbito muy general: los valores a agregar pertenecen a un conjunto dotado únicamente de una ordenación parcial. A partir del conocimiento de estos operadores en ciertos tipos de dominios discretos lineales, se consigue estudiarlos en dominios que son producto directo de aquéllos y, finalmente, esto permite abrir el camino a la investigación de t-normas y t-conormas definidas en dominios de factorización única.

Palabras Clave: Conjunto parcialmente ordenado, retículo, producto de retículos, t-norma y t-conorma divisibles, producto directo de t-normas, divisibilidad, dominio de factorización única.

1 Introducción

Desde el punto de vista matemático, el proceso de agregación/fusión de datos en un resultado concreto se modeliza mediante las llamadas funciones de agregación (ver por ejemplo [2]). Es decir, funciones $F : P^n \rightarrow P$, donde P es el conjunto al que pertenecen los datos a agregar, verificando determinadas condiciones que varían según los diversos objetivos y/o necesidades y los campos en los que han de ser aplicadas. En el caso de utilizar funciones asociativas, el modelo más general sería $F : P^2 \rightarrow P$, siendo P un conjunto parcialmente ordenado con mínimo y máximo

En esta sección P es un conjunto parcialmente ordenado (mediante $\leq$) con mínimo e y máximo u .

Para más detalles sobre normas triangulares definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados y, en particular, sobre producto de retículos puede consultarse [1]

Definición 1 Una norma triangular (brevemente t-norma) sobre P es una operación binaria $T : P \times P \rightarrow P$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in P$ se satisfacen las siguientes axiomas:

1. $T(x, y) = T(y, x)$ (commutatividad)
2. $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ (asociatividad)
3. $T(x, y) \leq T(x', y')$ para cualquier $x \leq x', y \leq y'$ (monotonía)
4. $T(x, u) = x$ (u es neutro)

Una conorma triangular (t-conorma para abreviar) es una operación binaria $S : P \times P \rightarrow P$ tal que se satisfacen los axiomas 1 a 3 y $S(x, e) = x$.

Definición 2 Una t-norma T (una t-conorma S) sobre P es divisible si se verifica la condición: Para cualesquiera $x, y \in P$ con $x \leq y$ existe $z \in P$ tal que $x = T(y, z)$ ($y = S(x, z)$).

En el caso $P = [0, 1]$ con la ordenación usual, la clase de las t-normas divisibles coincide con la clase de las t-normas continuas, que a su vez contiene de forma estricta la clase de t-normas que satisfacen la condición de Lipschitz $T(z, y) - T(x, y) \leq z - x$ siempre que $x \leq z$. En el caso finito $P = \{0, 1, \dots, n\}$ con la ordenación usual, la clase de las t-normas divisibles coincide con la clase de las t-normas suaves (ver [4, 5]) y también con las lipschitzianas.

Ejemplo 1 Un ejemplo básico de t-norma (no divisible) sobre cualquier P es la drástica T_D definida por:

$$T_D(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = u \\ y & \text{si } x = u \\ e & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\text{Análogamente, } S_D(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = e \\ y & \text{si } x = e \\ u & \text{de otro modo} \end{cases}$$

es la t-conorma drástica.

Si P es un retículo acotado, es decir, todo subconjunto finito de P tiene cota inferior máxima (ínfimo) y cota superior mínima (supremo), entonces $T_\wedge(x, y) = x \wedge y$

$(x \wedge y = \inf\{x, y\})$ es una t-norma y $S_\vee(x, y) = x \vee y$ ($x \vee y = \sup\{x, y\}$) es una t-conorma. Trivialmente $T_\wedge$ y $S_\vee$ son divisibles: $x \leq y$ equivale a $x \wedge y = x$ o $x \vee y = y$.

Con argumentos parecidos al caso continuo $P = [0, 1]$, pueden probarse algunas propiedades básicas de cualquier t-norma definida sobre un conjunto parcialmente ordenado cualquiera.

Proposición 1 Sea T una t-norma sobre P . Entonces:

1. $T_D \leq T$ (orden puntual). Así, T_D es la t-norma más pequeña
2. $T(x, y) \leq x$, $T(x, y) \leq y \forall x, y \in P$
3. $T(x, e) = e \forall x \in P$ (e es absorbente)
4. Si P es un retículo, entonces $T \leq T_\wedge$. Así, en este caso, $T_\wedge$ es la t-norma más grande
5. Si P es un retículo, entonces $T(x, x) = x \forall x \in P$ si, y sólo si, $T = T_\wedge$.

Análogamente, si S es una t-conorma sobre P entonces tenemos:

1. $S_D \geq S$ (orden puntual). Así, S_D es la t-conorma más grande.
2. $S(x, y) \geq x$, $S(x, y) \geq y \forall x, y \in P$.
3. $S(x, u) = u \forall x \in P$ (u es absorbente)
4. Si P es un retículo, entonces $S \geq S_\vee$. Así, en este caso, $S_\vee$ es la t-conorma más pequeña
5. Si P es un retículo, entonces $S(x, x) = x \forall x \in P$ si, y sólo si, $S = S_\vee$.

Observación 1. Sea T una t-norma sobre P . Podemos definir la relación:

$$x \leq_T y \Leftrightarrow \text{existe } z \in P \text{ tal que } x = T(y, z)$$

Así se obtiene un orden parcial sobre P tal que $x \leq_T y$ implica $x \leq y$. De este modo, una t-norma T sobre P es divisible si, y sólo si, $\leq$ y $\leq_T$ son iguales.

De forma similar, a partir de una t-conorma S podemos definir: $x \leq_S y \Leftrightarrow \text{existe } z \in P \text{ tal que } y = S(x, z)$. Una t-conorma S sobre P es divisible si, y sólo si, $\leq$ y $\leq_S$ coinciden.

Observación 2. Dada una negación fuerte n sobre P , es decir, una función $n : P \rightarrow P$ involutiva y decreciente, entonces para cada t-norma T sobre P podemos obtener una t-conorma S sobre P , llamada la n -dual de T de la forma siguiente: $S(x, y) = n(T(n(x), n(y))) \forall x, y \in P$. Observemos que aplicando esta construcción a la t-conorma S , obtenemos de nuevo la t-norma inicial T .

2 Normas y conormas triangulares divisibles sobre $L = \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$

En esta sección recordamos los principales resultados sobre t-normas y t-conormas divisibles definidas en $L = \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$. L es el conjunto de números enteros no negativos ordenados de la manera habitual, completado con $+\infty$, tal que se suponen: $n < \infty \forall n \neq +\infty$ y $n + \infty = \infty + n = \infty \forall n \in L$. De forma parecida al caso finito, hemos obtenido un teorema de representación para t-normas divisibles sobre L [4, 5]. Sin embargo, hay que hacer notar que en el caso presente aparecen algunas diferencias notables respecto del caso finito. Por ejemplo, no existe ahora ninguna t-norma arquimediana y divisible sobre L y $S(x, y) = x + y$ es la única t-conorma arquimediana divisible. Por otra parte, no existen negaciones fuertes sobre L y, consecuentemente, no disponemos de relación de dualidad entre t-normas y t-conormas, así que necesitamos caracterizar las t-normas y t-conormas separadamente. A falta de dualidad hemos completado esta sección con la ecuación de Frank que nos proporciona soluciones (T, S) que pueden interpretarse como pares "duales" en el sentido $S(x, y) = x + y - T(x, y)$.

Podemos caracterizar las t-normas y t-conormas divisibles sobre L de la forma siguiente

Proposición 2 Una operación $T : L \times L \rightarrow L$ es una t-norma divisible si, y sólo si, existe un conjunto infinito $I = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m < a_{m+1} < \dots < +\infty\}$ de elementos de L tal que:

$$T(x, y) = \begin{cases} \max(a_i, x + y - a_{i+1}) & \text{si } (x, y) \in [a_i, a_{i+1}]^2, i \geq 0 \\ \min(x, y) & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Para el caso de t-conormas aparecen dos clases bien diferenciadas.

Proposición 3 Una operación $S : L \times L \rightarrow L$ es una t-conorma divisible si, y sólo si, se satisface una de las siguientes condiciones:

1. Existe un conjunto infinito $I = \{0 = a_0, a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, +\infty\}$ de elementos de L tal que:

$$S(x, y) = \begin{cases} \min(a_{i+1}, x + y - a_i) & \text{si } (x, y) \in [a_i, a_{i+1}]^2, \\ & i \geq 0 \\ \max(x, y) & \text{de otra forma} \end{cases}$$

2. Existe un conjunto finito $I = \{0 = a_0, a_1, \dots, a_m, a_{m+1} = +\infty\}$ de elementos de L tal que:

$$S(x, y) = \begin{cases} \min(a_{i+1}, x + y - a_i) & \text{si } (x, y) \in [a_i, a_{i+1}]^2, \\ & 0 \leq i \leq m \\ \max(x, y) & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Demostraciones y más detalles sobre t-normas definidas sobre cadenas acotadas pueden hallarse en [5].

A partir de las dos proposiciones anteriores podemos ahora probar

Proposición 4 *Un par (T, S) formado por una t-norma y una t-conorma divisibles sobre L es una solución de la ecuación de Frank*

$$T(x, y) + S(x, y) = x + y \quad x, y \in L \quad (1)$$

si, y sólo si, existe un conjunto infinito $I = \{0 = a_0, a_1, \dots, +\infty\} \subset L$ tal que T y S son de la forma:

$$T(x, y) = \begin{cases} \max(a_i, x + y - a_{i+1}) & \text{si } (x, y) \in [a_i, a_{i+1}]^2, i \geq 0 \\ \min(x, y) & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (2)$$

$$S(x, y) = \begin{cases} \min(a_{i+1}, x + y - a_i) & \text{si } (x, y) \in [a_i, a_{i+1}]^2, i \geq 0 \\ \max(x, y) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Demostración. Es obvio que el par (T, S) definido en (2) es una solución divisible de (1): para todo $(x, y) \in [a_i, a_{i+1}]^2$ tenemos $T(x, y) + S(x, y) = \max(a_i, x + y - a_{i+1}) + \min(a_{i+1}, x + y - a_i) = x + y$, también $T(x, y) + S(x, y) = \min(x, y) + \max(x, y) = x + y$ de otro modo. Recíprocamente, si (T, S) es un par divisible que es solución de (1) entonces T y S han de tener el mismo conjunto de elementos idempotentes, así de acuerdo con las dos proposiciones anteriores deben ser de la forma descrita en (2). $\diamond$

En la próxima sección se estudian t-normas sobre el retículo formado por productos cualesquiera de copias de la cadena L . En especial se aborda el problema de la caracterización de aquéllas que son descomponibles en producto directo de t-normas sobre L , utilizando para ello la propiedad de $\vee$ -distributividad.

3 Normas triangulares sobre L^X . Normas triangulares descomponibles

Sea X un conjunto no vacío cualquiera. Indicamos por L^X el conjunto de las funciones entre X y $L = \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$. Se considera sobre L^X el orden puntual (producto) $\mu \leq \sigma$ si, y sólo si, $\mu(x) \leq \sigma(x)$ para todo $x \in X$. Resulta L^X un retículo completo con mínimo 0 (función constante 0) y máximo 1 (función constante 1).

Definición 3 $\mu \in L^X$ es un singletón si existe $x \in X$ tal que $\mu(t) = 0 \forall t \neq x$.

Fijado $x \in X$, sea $\Sigma_x = \{\mu \in L^X ; \mu(t) = 0 \forall t \neq x\}$. Evidentemente, $\varphi : \Sigma_x \rightarrow L$ que hace corresponder a cada singletón $\mu \in \Sigma_x$ el valor $\mu(x)$ es un isomorfismo entre Σ_x y L . Por otra parte, si $\mu \in L^X$, podemos escribir $\mu = \vee_{x \in X} \mu_x$, donde $\mu_x = \varphi^{-1}(\mu(x))$.

Definición 4 Diremos que una t-norma T sobre L^X es puntualmente funcionalmente expresable (p.f.e.) si existe una familia $(T_x)_{x \in X}$ de t-normas sobre L tal que se verifica:

$$(T(\mu, \sigma))(x) = T_x(\mu(x), \sigma(x)) \quad \forall \mu, \sigma \in L^X \quad \forall x \in X \quad (3)$$

En este caso, podemos decir que T es el producto directo de T_x , $x \in X$. A menudo se escribe $T = \prod_{x \in X} T_x$ para indicar este hecho.

Ejemplo 2 Hay t-normas sobre L^X que no son p.f.e., es decir, no existe ninguna familia $(T_x)_{x \in X}$ de t-normas sobre L tal que se verifica (3). En efecto, sea $X = \{a, b\}$ y sea la t-norma (lo es) T definida sobre $L^X = L^2$ de la manera siguiente:

$$T((x, y), (x', y')) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x', y') = (+\infty, +\infty) \\ (x', y') & \text{si } (x, y) = (+\infty, +\infty) \\ (\min(x, x'), \min(x, x', y, y')) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que no existen t-normas sobre L , T_1 y T_2 , tales que $T((x, y), (x', y')) = (T_1(x, x'), T_2(y, y'))$. En efecto, si existieran tales t-normas tendría que ser $T_1(x, x') = \min(x, x')$ y $T_2(y, y') = \min(x, x', y, y')$ siempre que $(x, y), (x', y') \neq (+\infty, +\infty)$, cosa que evidentemente es imposible.

Para el caso de t-normas divisibles tenemos la siguiente equivalencia

Proposición 5 Supongamos $T = \prod_{x \in X} T_x$. Entonces, T es divisible si y sólo si cada T_x , $x \in X$, es divisible.

Demostración. Sea $T = \prod_{x \in X} T_x$ divisible, veamos que cada T_x es divisible. Sean $a, b \in L$ con $a \leq b$, podemos escribir $a = T(b, \sigma)$ para algun $\sigma \in L^X$, de donde $a = a(x) = T(b, \sigma)(x) = T_x(b(x), \sigma(x)) = T_x(b, \sigma(x))$ y, por tanto, T_x es divisible. Veamos el recíproco, supongamos ahora que cada T_x es divisible y sea $\mu \leq \sigma$. Podemos escribir $\mu(x) = T_x(\sigma(x), \pi(x)) = T(\sigma, \pi)(x)$. Por tanto $\mu = T(\sigma, \pi)$. $\diamond$

A continuación se introduce el concepto de operación $\wedge, \vee$ -distributiva en el marco de un retículo completo cualquiera R . En la proposición 6 se analiza esta propiedad para t-normas definidas en L .

Definición 5 Sea F una operación binaria definida sobre un retículo completo $(R; \leq, \wedge, \vee)$. Diremos que F es (completamente) distributiva respecto de $\wedge$ (F es

$\wedge$ -distributiva) si verifica la condición $F(\wedge_{i \in I} r_i, s) = \wedge_{i \in I} F(r_i, s)$ para cualquier familia $(r_i)_{i \in I}$ de elementos de R y todo $s \in R$. Análogamente, diremos que F es $\vee$ -distributiva si verifica $F(\vee_{i \in I} r_i, s) = \vee_{i \in I} F(r_i, s)$.

Proposición 6

1. Una t -norma T sobre $L = \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ es $\vee$ -distributiva si, y sólo si, verifica la siguiente condición:

$$\forall \beta < +\infty \exists \alpha < +\infty \text{ tal que } T(x, \beta) = \beta \forall x \geq \alpha \quad (4)$$
2. Si una t -norma T sobre L es divisible, entonces es $\vee$ -distributiva. El recíproco no es cierto.
3. Cualquier t -norma sobre L es $\wedge$ -distributiva.

Demostración.

1. Supongamos que T es $\vee$ -distributiva y sea $\beta < +\infty$. Consideremos $(a_i)_{i \in I}$ tal que $\vee_{i \in I} a_i = +\infty$ con $a_i < +\infty \forall i \in I$, sabemos que $\vee_{i \in I} T(a_i, \beta) = \beta$ por tanto existe a_k tal que $T(a_k, \beta) = \beta$. Así, si hacemos $\alpha = a_k$ tenemos $T(x, \beta) = \beta \forall x \geq \alpha$. Recíprocamente, supongamos ahora que T verifica (4) y veamos que se cumple $T(\vee_{i \in I} a_i, b) = \vee_{i \in I} T(a_i, b)$ en el único caso "problemático" $\vee_{i \in I} a_i = +\infty$ con $a_i < +\infty \forall i \in I$, $b < +\infty$. Es decir, se trata de demostrar que en este caso se verifica: $\vee_{i \in I} T(a_i, b) = b$. Por hipótesis sabemos que existe $\alpha < +\infty$ tal que $T(x, b) = b \forall x \geq \alpha$, pero por otra parte existe $a_k > \alpha$ así que $T(a_k, b) = b$ y también $\vee_{i \in I} T(a_i, b) = b$.

2. Es inmediato según el teorema de estructura de las t -normas divisibles sobre L .

3. Obvio. $\diamond$

Según la siguiente proposición, las t -normas sobre L^X que son $\vee$ -distributivas son las que son producto directo de t -normas (sobre L) $\vee$ -distributivas.

Proposición 7 Sea T una t -norma sobre L^X . Entonces $T = \prod_{x \in X} T_x$, donde cada T_x es $\vee$ -distributiva, si y sólo si T es también $\vee$ -distributiva.

Demostración. Si $T = \prod_{x \in X} T_x$ y cada T_x es $\vee$ -distributiva, tenemos $T(\vee_{i \in I} \mu_i, \sigma)(x) = T_x(\vee_{i \in I} \mu_i(x), \sigma(x)) = \vee_{i \in I} T_x(\mu_i(x), \sigma(x)) = \vee_{i \in I} T(\mu_i, \sigma)(x) = (\vee_{i \in I} T(\mu_i, \sigma))(x)$ de donde $T(\vee_{i \in I} \mu_i, \sigma) = \vee_{i \in I} T(\mu_i, \sigma)$. Recíprocamente, si T es una t -norma sobre L^X que es $\vee$ -distributiva, debido a que $T(\mu_x, \sigma_{x'}) = 0$ siempre que $x \neq x'$, podemos escribir $T(\mu, \sigma) = T(\vee_{x \in X} \mu_x, \vee_{x \in X} \sigma_x) = \vee_{x \in X} T(\mu_x, \sigma_x)$. Pero $T(\mu_x, \sigma_x)$ es un singletón para cada $x \in X$, así que podemos definir (ver definición 1):

$$T_x(a, b) = \varphi T(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) \quad x \in X \quad \forall a, b \in L$$

T_x es una t -norma sobre L . La simetría es obvia, probemos que T_x es asociativa:

$$T_x(T_x(a, b), c) = \varphi T(\varphi^{-1}(T_x(a, b)), \varphi^{-1}(c)) = \varphi T(T(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)), \varphi^{-1}(c)) = \dots = T_x(a, T_x(b, c)).$$

La monotonía de T_x es cierta teniendo en cuenta la de T y la de φ . Finalmente, $T_x(a, +\infty) = \varphi T(\varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(+\infty)) = \varphi(\varphi^{-1}(a)) = a$. Lo último es debido a $\mu = T(\mu, +\infty) = \vee_{x \in X} T(\mu_x, (+\infty)_x) = \vee_{x \in X} \mu_x$.

T resulta ser p.f.e. mediante la familia $(T_x)_{x \in X}$. En efecto, $(T(\mu, \sigma))(x) = (\vee_{y \in X} T(\mu_y, \sigma_y))(x) = \vee_{y \in X} T(\mu_y, \sigma_y)(x) = T(\mu_x, \sigma_x)(x) = T_x(\mu(x), \sigma(x)) \forall \mu, \sigma \in L^X \quad \forall x \in X$.

Finalmente, se demuestra que cada T_x es $\vee$ -distributiva. En efecto,

$$T_x(\vee_{i \in I} a_i, b) = \varphi^{-1} T(\varphi(\vee_{i \in I} a_i), \varphi(b)) = \varphi^{-1} T(\vee_{i \in I} \varphi(a_i), \varphi(b)) = \varphi^{-1} (\vee_{i \in I} T(\varphi(a_i), \varphi(b))) = \vee_{i \in I} \varphi^{-1} (T(\varphi(a_i), \varphi(b))) = \vee_{i \in I} T_x(a_i, b) \quad \diamond$$

Corolario 1 Sea T una t -norma divisible sobre L^X . Entonces, T es p.f.e. si y sólo si T es $\vee$ -distributiva.

Demostración. Basta aplicar la proposición anterior teniendo también en cuenta las proposiciones 5 y 6. $\diamond$

De forma similar podemos demostrar resultados semejantes para t -conormas. Así tenemos

Proposición 8 Sea S una t -conorma sobre L^X . Entonces $S = \prod_{x \in X} S_x$, donde cada S_x es $\wedge$ -distributiva, si y sólo si, S es $\wedge$ -distributiva.

Corolario 2 Sea S una t -conorma divisible sobre L^X . Entonces, S es p.f.e. si y sólo si S es $\wedge$ -distributiva.

A continuación, y pensando en la aplicación de lo expuesto para el caso de dominios de factorización única, conviene estudiar la restricción de una t -norma a una parte de L^X

Definición 6 Si $\mu \in L^X$, definimos soporte de μ : $\text{sop } \mu = \{x \in X; \mu(x) \neq 0\}$.

Consideremos ahora $(L^X)^* = \{+\infty\} \cup \{\mu \in L^X; +\infty \notin \text{Ran } \mu, \text{ sop } \mu \text{ finito}\}$. Se trata de un subretículo de L^X que con el orden inducido es un retículo completo. Evidentemente, $0, +\infty \in (L^X)^*$.

Proposición 9 La restricción a $(L^X)^*$ de una t -norma p.f.e. T definida sobre L^X es una t -norma sobre $(L^X)^*$.

Demostración. Si $T = \prod_{x \in X} T_x$ es una t -norma sobre L^X y $\mu, \sigma \in (L^X)^*$ entonces $T(\mu, \sigma) \in (L^X)^*$.

En efecto, si $\mu = +\infty$, $T(+\infty, \sigma) = \sigma \in (L^X)^*$. Supongamos ahora $\mu, \sigma \neq +\infty$, $T(\mu, \sigma)(x) = T_x(\mu(x), \sigma(x)) \neq +\infty \forall x \in X$ y por otra parte

$\text{sop } T(\mu, \sigma) = \{x \in X ; T(\mu, \sigma)(x) \neq 0\} \subset (\text{sop } \mu) \cap (\text{sop } \sigma)$ y por tanto $\text{sop } T(\mu, \sigma)$ es finito. $\diamond$

Observación 3. En el caso de una t-conorma $S = \prod_{x \in X} S_x$, la condición $S(\mu, \sigma)(x) = S_x(\mu(x), \sigma(x)) \neq +\infty \forall x \in X$ puede fallar (basta pensar en la t-conorma drástica). En el caso divisible este problema no se presenta: $S_x(a, b) = +\infty$ equivale a $a = +\infty$ o $b = +\infty$. Vale la pena observar que en cualquier caso, $\text{sop } S(\mu, \sigma) = \{x \in X ; S(\mu, \sigma)(x) \neq 0\} = (\text{sop } \mu) \cup (\text{sop } \sigma)$ que es finito.

Para finalizar, se marcan a continuación las líneas a seguir para el estudio de t-normas definidas sobre dominios de factorización única. Más concretamente, dado uno de estos dominios D se considera una parte representativa del mismo, D' , construida a partir de una colección Π' seleccionada en el conjunto Π de los elementos primos de D . D' se estructura como retículo completo respecto de la relación de divisibilidad propia del dominio y, a continuación, D' se inserta de forma natural en el retículo $L^{\Pi'}$, lo que permite el estudio de t-normas y t-conormas sobre D' via $L^{\Pi'}$ utilizando los recursos expuestos anteriormente.

4 Normas triangulares sobre dominios de factorización única

Sea D un dominio de integridad, es decir, D es un anillo conmutativo y unitario ($1 \neq 0$) sin divisores de cero ($a, b \neq 0$ implica $ab \neq 0$). Si $a, b \in D$ diremos que a divide b , $a|b$, si existe $x \in D$ tal que $b = ax$. Esta relación es claramente reflexiva y transitiva, pero en general no es antisimétrica. Diremos que $a, b \in D$ son asociados si $a|b$ y $b|a$, en este caso escribiremos $a \sim b$. Es evidente que esta relación es una equivalencia sobre D , y la clase definida por a es $[a] = aU$, donde U es el conjunto de elementos inversibles de D .

Sea ahora D un dominio de factorización única (DFU), es a decir, D es un dominio de integridad tal que cualquier elemento $a \in D$, $a \neq 0$, y no inversible, puede escribirse esencialmente de manera única como un producto de la forma $a = up_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ donde u es inversible, p_i son primos no asociados y e_i enteros no negativos, $i = 1, \dots, k$.

Diremos que $p \in D$ es primo si $p \neq 0$, $p \notin U$, y no admite factorización no trivial (p no es el producto de dos elementos no inversibles). Indicamos por Π el conjunto de elementos de D que son primos. Es $\Pi/\sim \subset D/\sim$. Ahora escogemos en cada clase de $\Pi/\sim$ un único representante y así formamos el conjunto Π' (es $\{[p] ; p \in \Pi\} = \Pi/\sim$).

A continuación consideramos

$$D' = \{a = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k} ; k \geq 1, p_i \in \Pi', e_i \geq$$

$1, i = 1, \dots, k\} \cup \{0, 1\}$. Interpretamos $p_1^0 \dots p_k^0 = 1$ y $p_1^{+\infty} \dots p_k^{+\infty} = 0$. Se trata de un subconjunto D' de D tal que $\{[a] ; a \in D'\} = D/\sim$. D' es un conjunto parcialmente ordenado (por divisibilidad) con mínimo 1 y máximo 0. D' es un retículo completo ($\wedge = \text{m.c.d.}$ y $\vee = \text{m.c.m.}$)

Proposición 10 La correspondencia $f : D' \rightarrow L^{\Pi'}$ definida por:

$$f(a) = \begin{cases} p \rightarrow 0 & \forall p \in \Pi' \quad \text{si } a = 1 \\ p \rightarrow +\infty & \forall p \in \Pi' \quad \text{si } a = 0 \\ p \rightarrow \begin{cases} e_i & \text{si } p = p_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} & \text{si } a = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k} \end{cases}$$

es un isomorfismo entre los retículos D' y $(L^{\Pi'})^*$ (ver definición 6)

La teoría general desarrollada en este trabajo puede aplicarse a dominios fundamentales. Así en el caso $D = \mathbb{Z}$ (números enteros) es $\Pi = \{\pm 2, \pm 3, \pm 5, \dots\}$ y si seleccionamos $\Pi' = \{2, 3, 5, \dots\}$ entonces $D' = \{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$ es el conjunto ampliado de los números naturales, que ordenado por divisibilidad resulta ser, según la proposición anterior, un retículo isomorfo a $(L^{\Pi'})^*$. Para consultar otros conceptos y resultados sobre t-normas definidas sobre el conjunto de los números naturales puede consultarse [3].

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado por los proyectos PRDIB 2002-GC3-19, PRIB 2004-9250, REDEMAP TIC 2002-11942-E, BFM 2003-05308 y REDEMAP II TIN 2004-21700-E.

Referencias

- [1] B. De Baets, R. Mesiar. Triangular norms on product lattices. *Fuzzy Sets and Systems* 104: 61-75, 1996.
- [2] Lobfi. Funciones de Agregación. En *Procesos De Toma De Decisiones, Modelado y Agregación de Preferencias* (TIC-2002-11492-E). Ed. E. Herrera-Viedma, 2005.
- [3] G. Mayor, J. Monreal. The greatest common divisor and other triangular norms on the set of natural numbers. IPMU 2006, Paris.
- [4] G. Mayor, J. Torrens. On a class of operators for expert systems. *Int. J. Intell Syst.* 8: 771-778, 1993.
- [5] G. Mayor, J. Torrens. Triangular norms on discrete settings. En *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*. Ed. E.P. Klement, R. Mesiar. Elsevier, 2005.

Majority Semantic in OWA Operators

Peláez J.I. Doña J.M. Sánchez P.

Department of Languages and Computer Sciences,
University of Malaga, Malaga 29071, Spain.
E-mail: jignacio@lcc.uma.es

La Red D.

Department of Computer Sciences, University of National
of the Northeast, Corrientes, Argentina.
E-mail: lrmdavid@exa.unne.edu.ar

Abstract

Ordered weighting operators are usually used to aggregate information in problems where it is necessary to define a fusion strategy which takes individual values into account in order to produce an overall result which synthesizes the majority of the initial values. In OWA operators, the majority concept plays a main role and can be modelled using fuzzy logic and linguistic quantifiers. For this reason, it is important to analyze and to compare the different processes and semantics used for modelling the majority concept in order to obtain a feasible majority aggregation value.

Keywords: Owa Operators; Majority; Aggregation.

1. INTRODUCTION

OWA operators are one of the most commonly used in decision making problems to define a fusion method. In these operators diverse approaches exist in which an aggregation guided by the semantic of majority takes place, where majority is defined as a collective evaluation in which most of the values involved in the decision problem are considered [5, 8]. In these approaches the result is not necessarily of unanimity, but a solution must be obtained with agreement among a fuzzy majority of the decision makers [4, 6, 8].

In fuzzy approaches the concept of majority is usually modelled by means of linguistic quantifiers such as *at least 80%* and *most*. A linguistic quantifier is formally defined as a fuzzy subset of a numeric domain [1, 3]. The semantic of such a fuzzy subset is described by a membership function which describes the compatibility of a given absolute or percentage quantity to the concept expressed by the linguistic quantifier. By this interpretation, a linguistic quantifier is seen as a fuzzy concept which is referred to the quantity of elements of a considered reference set.

Generally, linguistic quantifiers are used to indicate a fusion strategy to guide the process of aggregating the experts' opinions [8]. The results of this aggregation process must represent the semantic of the linguistic quantifier. An example of linguistic expression which employs a quantifier guided aggregation is the following: *Q experts are satisfied by solution a*, where *Q* denotes a linguistic quantifier (for example *most*) which expresses a majority concept. To produce a solution which satisfies this proposition the experts' opinions must be aggregated using an operator which captures the semantics of the concept expressed by the quantifier *Q*.

In this paper the semantics of the OWA operators is analyzed. We study the usual definition of an OWA operator and the most common families of OWA used for modelling the majority concept. The paper is structured as follows: in section 2 the aggregation guide by quantifiers

in OWA operators is introduced and the problems-solutions related to modelling the majority semantic are explained; and finally the conclusions are presented.

2. MODELLING THE MAJORITY CONCEPT USING OWA OPERATORS

In this section some variations of OWA operators are analyzed. The first operator is based on the induced OWA operator and two approaches to obtain a majority fusion are shown and the problems of these strategies are presented. The second family of OWA operator presented is based on the neat OWA operator and how this type of OWA operator uses the majority concept in the aggregation process is shown.

2.1. IOWA OPERATORS

In [10], Yager and Filev introduced an extension of the OWA called the Induced Ordered Weighted Averaging (IOWA) Operators. The IOWA operator works with a collection of values $(a_1, \dots, a_n)$ to be aggregated, and with an associate weight vector W . However, associated with each value a_j , is another value v_j called the order inducing value. Let $v\text{-index}$ be an ordering function such that $v\text{-index}(i)$ is the index of the i^{th} largest v_i . Using the induced OWA:

$$I-F(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot a_{v\text{-index}(i)}$$

where the order of the a_j values is done with respect to the v_j value (pairs (a_j, v_j) , a_j being the argument value and v_j being the order inducing value). If W is a vector of weights and B_v is a vector whose values are the argument values ordered by the order inducing values:

$$I-F(a_1, a_2, \dots, a_n) = W^T B_v.$$

As a simple example consider the case where we want to aggregate the following four pairs (a_j, v_j) : $(0.7, 0.4)$, $(0.9, 0.3)$, $(0.2, 1)$ and $(0.6, 0.7)$. In this case the inducing

values are $v_1 = 0.4$, $v_2 = 0.3$, $v_3 = 1$, and $v_4 = 0.7$, which are ordered $1 > 0.7 > 0.4 > 0.3$; hence $v\text{-index}$ is such that $v\text{-index}(1) = 3$, $v\text{-index}(2) = 4$, $v\text{-index}(3) = 1$, $v\text{-index}(4) = 2$.

If the weighting vector has the following values: $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.2$, $w_3 = 0.3$, $w_4 = 0.4$, we obtain the following aggregated value:

$$I-F(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0.1)(0.2) + (0.2)(0.6) + (0.3)(0.7) + (0.4)(0.9) = 0.71.$$

To produce an aggregation with majority semantics, Pasi and Yager [8] propose to use the IOWA operators with an inducing ordering variable which is based on a proximity metrics on the elements to be aggregated: the most similar values must have close positions in the induced ordering in order to be easily aggregated. They also suggest a new strategy for constructing the weighting vector so as to model the new “majority- based” semantics of the aggregation.

The values of the inducing variable are obtained by means of a similarity function between pairs of the values to be aggregated (support function). The support function sup is a binary function which computes a value $\text{sup}(a, b)$ which expresses the support from b for a ; the more similar or the closer two values are, the more they support each other. A simple example of this support function is the following:

$$\text{sup}(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } |a_i - a_j| < \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

If we consider a set of values to be aggregated, and we want to order them in increasing order of support (the values which give the greatest support are the highest values of the support function) we compute for each value the sum of its support values with respect to all the other

values to be aggregated. Then for each value we sum all its supports in order to obtain its overall support. The overall supports are used as the values of the order inducing variable.

An example of application of the previous *sup* function with $\alpha=0.3$ with the IOWA operator is the following: Let us suppose we have the following values to aggregate:

$$a_1=0.9 \quad a_2=0.7 \quad a_3=0.6 \quad a_4=0.1 \quad a_5=0$$

The overall support for each a_i is obtained by adding the support values for a_i we denote this value by s_i :

$$s_1=1 \quad s_2=2 \quad s_3=1 \quad s_4=1 \quad s_5=1$$

The use of the adopted support function induces a clustering of the arguments which can be controlled by the choice of the threshold parameter α .

This result, combined with the previous one allows ordering the elements to be aggregated in the following increasing order of similarity: $I = [0 \ 0.1 \ 0.6 \ 0.9 \ 0.7]$

Let us suppose that we now want to obtain a majority-based aggregation of the previous values. The selected IOWA operator should then correspond to the linguistic quantifier *most*. We first consider the definition of *most* proposed in Figure 1; in this case the linguistic quantifier is defined by means of a non-decreasing function. Starting from this definition the weighting vector of 5 elements is $W = [0 \ 0 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.2]$. It should be observed that the fifth element of this vector is smaller than the fourth element. By aggregating the vector I above we obtain: $I * W = 0.76$. This value is more representative of the majority of the values to be aggregated than the value which is obtained with the usual OWA operator associated with *most* (with the elements in decreasing order of their value): $B = [0.9 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.1 \ 0]$, and $B * W = 0.28$.

However, as mentioned before, it can be seen that in the W vector considered, the weights decrease; this is coherent with the interpretation of the weights as increase in satisfaction in having $i + 1$ with respect to having i criteria satisfied. However, in an aggregation with the semantics of majority would be expected to be the weights non decreasing; in fact as the top value is the most “supported one of all the other values in the induced order of the arguments (the most representative) then it should be more emphasized than them, or at least not less emphasized.

For this reason, and in order to obtain a value which better represents a majority of the aggregated elements, in [8] a new strategy is proposed for the construction of the weighting vector in IOWA operators. In the next subsection we show the definition of this variation of IOWA operator and the difficulties it has in relation to obtain the weighting vector.

2.2. MODIFIED IOWA OPERATOR

The modification of the IOWA operator presented in [8] is based on a new strategy for the construction of the weighting vector. This strategy aims to emphasize the closest values in the aggregation (the most supported values), the values which appear on the right hand side of the vector of values to be aggregated have more influence on the aggregation. For this reason a new procedure is proposed for the construction of the weighting vector with non decreasing weights.

First the overall support values computed for the n values to be aggregated are considered: $s_1, s_2, \dots, s_n$. In order to compute the non decreasing weights of the weighting vector, the values $t_1, t_2, \dots, t_n$ are defined based on a modification of the $s_1, s_2, \dots, s_n$ values: $t_i = s_i + 1$. In this way the similarity of the value a_i with itself is also included in the definition of the overall support for a_i .

The t_i values are in increasing order; t_1 is the smallest value among the t_i . On the basis of the t_i values, the weights of the weighting vector are computed as follows:

$$w_i = \frac{Q\left(\frac{t_i}{n}\right)}{\sum_{j=1}^n Q\left(\frac{t_j}{n}\right)}$$

The value $Q\left(\frac{t_i}{n}\right)$ denotes the degree to which a given member of the considered set of values represents the majority.

It is easy to see the error produced with the previous formulation, if we use the quantifier defined in figure 1, for the example [0 0.1 0.6 0.9 0.7] we obtain a feasible weighting vector [0 0 0.333 0.333 0.333], but if we aggregate, for example, the following vector [0 0 0.5 0.5 1 1 1] using the same quantifier we obtain for all w_i the incoherent value of $\frac{0}{0}$. Due to the values t_i (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3) divided by n (7) is always less than 0.4 and then

$$Q\left(\frac{t_i}{n}\right) = 0 \text{ for all } i.$$

Using the previous definition of the weights and using the usual definition of quantifier (figure 1), when $x_i = \frac{t_i}{n} \leq a$ the value for $Q(x_i)$ is zero, and if for all i , $t_i \leq n \cdot a$ then all w_i is equal to the indeterminacy $\frac{0}{0}$.

Obviously the results that can produce this strategy for some values are incorrect from an interpretation based on the majority-oriented aggregation.

2.3. MAJORITY OPERATORS

Majority operators [5, 6, 7] arise because it is necessary to obtain representative values of the majority of the elements to aggregate in some aggregation processes without omission of minority values. The most common aggregation operators [2, 9] over-emphasize the opinion of the minority at the expense of those of the majority creating an aggregation that can be considered imprecise for group decision making problems. The majority operators are defined as neat OWA [5] without use of linguistic quantifiers.

The MA-OWA is defined in [5] as:

$$F_{MA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^n f_i(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot b_i$$

where $w_i \in [0,1]$ with $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

b_i is the i^{th} element of $a_1, \dots, a_n$ that is ordered in ascending order by cardinalities or importance values.

The weights of the MA-OWA operator are calculated:

Let δ_i the cardinality for the element i with $\delta_i > 0$, then

$$w_i = f_i(b_1, \dots, b_n) = \frac{\gamma_i^{\delta_{\min}}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1} \cdot \theta_{\delta_{\min}}} + \frac{\gamma_i^{\delta_{\min}+1}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1}} + \dots + \frac{\gamma_i^{\delta_{\max}}}{\theta_{\delta_{\max}}}$$

where

$$\gamma_i^k = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta_i \geq k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\theta_i = \begin{cases} (\text{number of item with cardinality} \geq i) + 1 & \text{if } i \neq \delta_{\min} \\ \text{number of item with cardinality} \geq i & \text{otherwise} \end{cases}$$

The majority operators aggregate in relation to δ_i which generally uses the cardinality of the element i to represent its importance. In the majority processes are considered the formation of discussion or majority groups depending on similarities or distances among the experts' opinions. All values with a minimum separation are considered to be inside the same group. The calculation method for the value δ_i is independent from the definition of the majority operators. In this work the importance value δ_i is calculated using the distance function:

$$dist(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } |a_i - a_j| \leq x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The cardinality of a_i is the sum of all values $dist(a_i, a_j)$ for $j = 1 \dots n$ being n the number of elements to be aggregated.

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n dist(a_i, a_j)$$

The value x models the final size of each group. Socially this grade is measured by the flexibility of the decision maker for grouping and reinforcing his/her opinions.

An example of application is the following: Let us suppose we have the following values to aggregate: [0 0 0.7 0.8 1 1 1]. We want to obtain a fusion opinion which must be representative of the majority concept. In this example we use the value of $x = 1$ in the distance function for the calculation of the cardinalities δ_i .

Using this operator we only consider 4 elements to aggregate $B = [0.7 \ 0.8 \ 0 \ 1]$ with cardinalities [1 1 2 3].

The weighting vector is:

$$W = [0.042 \ 0.042 \ 0.208 \ 0.708]$$

Then

$$MA-OWA = \sum_{i=1}^n w_i \cdot b_i = 0.771$$

The solution obtained is a representative value of the majority concept defined in [8], which is intuitively a value between 0.7 and 0.8. This definition uses a majority semantic which considers *all* the elements of the aggregation. However, it is not able to model majority concepts like *most*, *at least 80%*, etc. It is necessary to introduce the use of linguistic quantifiers in the aggregation process to model these types of semantics.

CONCLUSIONS

In this work, the semantics of the OWA operator to represent the majority concept using quantifiers is considered and studied. The operators analyzed are based on the usual definition of the OWA operator, as well as induced and neat OWA operators. These studies show that the I-OWA operators based on linguistic quantifiers do not capture the semantic of consensus of the majority.

Acknowledgements

Research Supported in part under project TIC 2002-119942-E

References

- [1] Barwise J. and Cooper R., Generalized Quantifiers in Natural Language. *Linguistic and Philosophy* 1981; 4:159-220.
- [2] Delgado M. Verdegay J. L. and Vila M. A. On aggregation operations of linguistic labels, *Internat. J. Intelligent Systems* 1993; 8:351-370.
- [3] Keenan E.L. and Westerstaal D., Generalized quantifiers in Linguistic and Logics, in van Benthem J., ter Meulen A. (eds) *Handbook of logic and language*, Amsterdam: North-Holland 1997; 837-893.

- [4] Nurmi H. and Kacprzyk J. On Fuzzy Tournaments and Their Solution Concepts in Group Decision Making. *European Journal of Operational Research* 1991;223-232.
- [5] Pelaez J.I., Doña J.M., Majority Additive-Ordered Weighting Averaging: A New Neat Ordered Weighting Averaging Operators Based on the Majority Process, *International Journal of Intelligent Systems* 2003; 18:469-481.
- [6] Pelaez J.I., Doña J.M., LAMA: A Linguistic Aggregation of Majority Additive Operator, *International Journal of Intelligent Systems* 2003; 18:809-820.
- [7] Pelaez J.I., Doña J.M., La Red D., Analysis of the Majority Process in Group Decision Making Process. *Proc Ninth Int Conf on Fuzzy Theory and Technology*, North Carolina; USA. 2003. pp 155-159.
- [8] Yager R. Pasi G. Modeling Majority Opinión in Multi-Agent Decisión Making. *Proc Int Conf on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, France; 2002. pp 1251-1257.
- [9] Yager R. Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems* 1993;. 59:125-148.
- [10] Yager, R. R. and Filev, D. P., "Induced ordered weighted averaging operators," *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, 1999; 29:141-150.

Majority Multiplicative Ordered Weighted Geometric Operators

Peláez J.I. Doña J.M. Mesas A.

Department of Languages and Computer Sciences,
University of Malaga, Malaga 29071, Spain.
E-mail: jignacio@lcc.uma.es

Gil A.M.

Department of Financial Economy and Accounting,
University of Granada. Granada 18071, Spain
E-mail: amgil@ugr.es

Abstract

The aggregation of experts' preferences consists in combining the individual preferences into a collective one, where the properties contained in every individual preference are summarized or reflected. This is a necessary and very important task to perform when we want to obtain a final solution of multicriteria decision-making or group decision making problems. In these problems the majority concept plays a main role in the aggregation process. In this paper we present a geometric operator to obtain a feasible majority aggregation value for the decision making problem.

Keywords: OWG, MM-OWG Operators, linguistic quantifiers, group decision making, majority opinion, majority concept .

1 INTRODUCTION

Decision making is a usual task in human activities where a set of experts work in a decision process to obtain a final value which is representative of the group. The first step of this decision process is constituted by the individual evaluations of the experts; each decision maker rates each alternative on the basis of an adopted evaluation scheme [5, 6, 13]. We assume that at the end of this stage each alternative has associated a performance judgment on the linguistic scale or numeric scale [4, 13].

The second step consists in determining for each alternative a consensual value which synthesizes the individual evaluation. This value must be representative of a collective estimation and is obtained by the aggregation of the opinions of the experts [4, 10, 13, 14]. Finally, the process concludes with the selection of the best alternative/s as the most representative value of solution of the problem.

One of the main problems in decision making is how to define operators which considers the majority opinions from the individual opinions. To obtain a value of synthesis of the alternatives which is representative of the opinions of the experts exist diverse approaches in which are realized an aggregation guided by the concept of majority, where majority is defined as a collective evaluation in which the opinions of the most of the experts involved in the decision problem are considered. In these approaches the result is not necessarily of unanimity, but it must be obtained a solution with agreement among a fuzzy majority of the decision makers [7, 12, 14].

In the fuzzy approaches to decision making, the concept of majority is usually modelled by using linguistic quantifiers such as *at least 80%* and *most*. A linguistic quantifier is formally defined as a fuzzy subset of a numeric domain [1, 6, 8, 9]. The semantics of such a fuzzy subset is described by a membership function which describes the compatibility of a given absolute or

percentage quantity to the concept expressed by the linguistic quantifiers.

$$Q_{most}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0.9 \\ 2x - 0.8 & 0.4 < x < 0.9 \\ 0 & x \leq 0.4 \end{cases}$$

Figure 1: Definition of the linguistic quantifier *most*.

In group decision making, linguistic quantifiers are used to indicate a fusion strategy to guide the process of aggregating the experts' opinions. The results of this aggregation process must represent the semantic of the linguistic quantifier. An example of a linguistic expression which employs a linguistic quantifier representing the majority concept is the following: Q experts are satisfied by solution a , where Q denotes a linguistic quantifier (for example *most*) which expresses a majority concept. If we want to produce a solution which satisfies this proposition, the experts' opinions must be aggregate using an operator which captures the semantics of the concept expressed by the quantifier Q .

In this paper the problem of constructing a majority opinion using OWG operators is considered. The paper is structured as follows: in section, 2 the aggregation with OWG operators are introduced. In section 3, the MM-OWG operators for modelling the majority concept are defined; and finally, the conclusions are exposed.

2 OWG OPERATORS

The OWG operator [2, 3] is defined to aggregate ratio-scale judgements. It is based on the OWA operator [15] and on the geometric mean, and therefore, incorporate the advantage of geometric mean to deal with ratio-scale judgements. It is defined as a mapping function

$F: R^n \rightarrow R$ that has associated a weighting vector W with length n .

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$$

Such as $w_i \in [0,1]$ and $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

$$OWG(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n b_i^{w_i}$$

with b_i being the i^{th} largest element of the a_j .

A fundamental aspect of these operators is the reorder step of the arguments. As a result of this, the element to aggregate a_i is not associated with a weight w_i , but a weight w_i will be associated with an ordered position in the aggregation.

The weighting vector W is obtained using the same method that in the OWA operator case. In [14] the use of the fuzzy quantifier is proposed for representing the concept of fuzzy majority. That is to obtain the weights from a functional form of the linguistic quantifiers. In this case the quantifiers is defined as a function $Q: [0,1] \rightarrow [0,1]$ where $Q(0)=0$, $Q(1)=1$ and $Q(x) \geq Q(y)$ for $x > y$. For a given value $x \in [0,1]$, the $Q(x)$ is the degree to which x satisfies the fuzzy concept being represented by the quantifier. Based on function Q , the OWG vector is determined from Q in the following way:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

These weights have the function to increase or decrease the importance of the different components of the aggregation according to the semantics associated with the operator from Q , that is, the quantifier determines the strategy of construction of the weighting vector.

A number of important properties can be associated with the OWG operator [2, 3].

The OWG operators can be used in different areas. Usually is can be used in multi-criteria decision making [2, 3] where we use a ratio scale and we need only to satisfy some portion of the criteria. Following the semantic in the aggregation process of the OWG operators for decision making environment is studied, and it is shows how this type of representation is not valid to represent the majority concept.

3 MAJORITY OPERATOR MM-OWG

Majority operators [10, 11, 12] arise because it is necessary to obtain representative values of the majority elements to aggregate in some aggregation processes without the omission of minority values. The most common aggregation operators [3, 4, 15] over-emphasize the opinion of the minority as the expense of those of the majority creating an aggregation that can be considered imprecise for group decision making problems. The majority multiplicative operators are defined as OWG without the use of linguistic quantifiers.

The MM-OWG operator is defined in [12] as:

$$F^{MM}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i)^{w_i} = \prod_{i=1}^n (b_i)^{f_i(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

where $w_i \in [0,1]$ with $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

b_i is the i^{th} element of $a_1, \dots, a_n$ that is ordered in ascender order by cardinalities.

The weights of an MM-OWG operator are calculated:

Let δ_i the importance for the element i with $\delta_i > 0$, then

$$w_i = f_i(b_1, \dots, b_n) = \frac{\gamma_i^{\delta_{\min}}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1} \cdot \theta_{\delta_{\min}}} + \frac{\gamma_i^{\delta_{\min}+1}}{\theta_{\delta_{\max}} \cdot \theta_{\delta_{\max}-1} \cdot \dots \cdot \theta_{\delta_{\min}+1}} + \dots + \frac{\gamma_i^{\delta_{\max}}}{\theta_{\delta_{\max}}}$$

where

$$\gamma_i^k = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta_i \geq k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\theta_i = \begin{cases} (\text{number of item with cardinality} \geq i) + 1 & \text{if } i \neq \delta_{\min} \\ \text{number of item with cardinality} \geq i & \text{otherwise} \end{cases}$$

The majority operators aggregate in function of δ_i , which represents generally the importance of the element i using its cardinality. In the majority processes are considered the formation of discussion or majority groups depending on similarities or distances among the experts' opinions. All values with a minimum of separation are considered inside the same group. The calculation method for the value δ_i is independent from the definition of the majority operators. In this work the importance value δ_i is calculated by using the distance function:

$$\text{dist}(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } |a_i - a_j| \leq x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The cardinality of a_i is the sum of all values $\text{dist}(a_i, a_j)$ for $j = 1 \dots n$ being n the number of elements to aggregate.

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n \text{dist}(a_i, a_j)$$

The value x model the final size of each group. Socially this grade is measured by the flexibility of the decision maker for grouping and reinforcing his/her opinions.

An example of application is the following: Let us suppose to have the following values to aggregate using values of the scale of AHP: [1/9 1/9 2 3 9 9 9]. We want to obtain a fusion opinion which must be representative of the majority concept. In this example we use the value of

$x = 1$ in the distance function for the calculation of the cardinalities δ_i .

Using this operator we only consider 4 elements to aggregate $B = [1/9 \ 2 \ 3 \ 9]$ with cardinalities $[1 \ 1 \ 2 \ 3]$.

The weighting vector is:

$$W = [0.042 \ 0.042 \ 0.208 \ 0.708]$$

Then

$$\text{MM-OWG} = \prod_{i=1}^n b_i^{w_i} = 5.589$$

The solution obtained is a representative value of the majority concept defined in [10], which is intuitively a value between 5 and 7. This definition uses a majority semantic which considers *all* the elements of the aggregation.

CONCLUSIONS

In this paper we present the OWG operator MM-OWG. This operator has included the concept of majority in the definition of the weighting vector. We observe how the results produced this operator is appropriate for aggregation which must represent in the fusion result the majority concept.

This approach is not able to model majority concepts like *most*, *at least 80%*, etc. For this reason, in the future work we will use of linguistic quantifiers in the aggregation process to model these types of semantics.

Acknowledgements

Research Supported in part under project TIC 2002-119942-E

References

- [1] Barwise J. and Cooper R., 1981. Generalized Quantifiers in Natural Language. *Linguistic and Philosophy*, 4:159-220.
- [2] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. 2000. The ordered weighted geometric operator: Properties and application. In: *Proc of 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*, Madrid, pp 985–991.
- [3] Chiclana F., Herrera-Viedma E., Herrera F., Alonso S., 2004. Induced Ordered Weighted Geometric Operators and Their Use in the Aggregation of Multiplicative Preferences Relations. *International Journal of Intelligent Systems*, 19, 233-255.
- [4] Delgado M. Verdegay J. L. and Vila M. A. 1993. On aggregation operations of linguistic labels, *Internat. J. Intelligent Systems* 8. 351-370.
- [5] Fishburn P.C., A comparative analysis of Group Decision Methods, *Behavioral Science*, Vol. 16(6), 538-544, 1971.
- [6] Herrera F., Herrera-Viedma E. 2000. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems* 115, 67-82.
- [7] Herrera F. Herrera-Viedma E and Verdegay J.I. 1996. Direct Approach Processes in Group Decision Making Using Linguistic OWA Operators. *Fuzzy Sets and Systems*. Vol 79. 175-190
- [8] Keenan E.L. and Westerstaal D., Generalized quantifiers in Linguistic and Logics, in van Benthem J., ter Meulen A. (eds) *Handbook of logic and language*, Amsterdam: North-Holland, 837-893, 1997.
- [9] Marimin. Motohide Umano. Itsuo Hatono. Hiroyuki Tamura. 1998. Linguistic Labels for Expressing Fuzzy Preference Relations in Fuzzy Group Decision

Making. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Vol 28. n° 2.

- [10]Pelaez J.I., Doña J.M., Majority Additive-Ordered Weighting Averaging: A New Neat Ordered Weighting Averaging Operators Based on the Majority Process, International Journal of Intelligent Systems, 18, 4 (2003) 469-481.
- [11]Pelaez J.I., Doña J.M., LAMA: A Linguistic Aggregation of Majority Additive Operator, International Journal of Intelligent Systems, 18 (2003) 809-820.
- [12]Pelaez J.I., Doña J.M., La Red D., Analysis of the Majority Process in Group Decision Making Process, 9th International Conference on Fuzzy Theory and Technology, North Carolina. USA. (2003).
- [13]Saaty T, L. 1980. The Analytic Hierarchy Process. Macgraw Hill.
- [14]Yager R. Pasi G. 2002. Modeling Majority Opinión in Multi-Agent Decisión Making. International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. ISBN. 2-9516453-5-X.
- [15]Yager R. 1993. Families of OWA operators. Fuzzy Sets and Systems. 59. 125-148.

Variables lingüísticas simbólicas jerárquicas *

Adolfo R. de Soto

E. de Ingenierías Industrial e Informática
Universidad de León
ddears@unileon.es

Resumen

En este trabajo se define una estructura de orden sobre un conjunto de etiquetas lingüísticas simbólicas y jerárquizadas. Se estudian varias relaciones de órdenes sobre esta estructura y se analiza varias propiedades interesantes de uno de ellos. Este orden permite en particular tener en múltiples casos etiquetas intermedias para dos etiquetas simbólicas. Esa propiedad puede permitir definir operaciones de agregación adecuadas entre etiquetas simbólicas en el conjunto aquí definido.

Palabras Clave: Razonamiento aproximado, Variables lingüísticas, Lógica fuzzy

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de variable lingüística juega un papel esencial en la Lógica Fuzzy tanto en su principal aplicación, los sistemas de decisión basados en reglas fuzzy, como en el intento de modelizar el razonamiento aproximado. El concepto, tal como fue introducido por Lofti A. Zadeh [11] define un conjunto de términos lingüísticos generados por una gramática y cada término obtiene un significado mediante un conjunto fuzzy, bien sea porque está definido previamente para los términos básicos, bien porque se calcula a partir de operadores fuzzy representando conectores lógicos o modificadores lingüísticos.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por REDEMAP-II: REd Temática Nacional de Procesos de Toma de DEcisiones, Modelado y Agregación de Preferencias TIN2004-21700-E, por la CYCIT bajo el proyecto TIN2005-08943-C02-01 y por la Junta de Castilla y León con el proyecto LE051A05

Habitualmente la gramática de generación de términos lingüísticos produce un conjunto numerable de ellos, aunque se puede definir una familia finita de ellos con gramáticas en las que sólo se admita símbolos terminales. Este último es el caso más frecuente en las variables lingüísticas utilizadas en los sistemas de reglas fuzzy, el número de términos lingüísticos es finito y ordenado totalmente. Es evidente que con un conjunto finito de términos lingüísticos perdemos capacidad de precisión pero ganamos en sencillez. Los sistemas de reglas fuzzy cuando quieren alcanzar más precisión cambian de variable lingüística aumentando el número de términos lingüísticos definidos.

Si tomamos el lenguaje humano como referencia, parece claro que una variable lingüística con infinitos términos es más adecuada puesto que, potencialmente al menos, el lenguaje permite la construcción de un conjunto numerable de términos lingüísticos. Si se desea fundamentar el razonamiento aproximado, este, parece, el modelo a seguir. Pero también es cierto que en el lenguaje habitual usamos pocos términos lingüísticos y que, cuando requerimos una mayor precisión, usamos modificadores lingüísticos para intensificar o debilitar el significado de un término, pero el uso de estos modificadores no va más allá de la combinación de uno o dos. De hecho existen estudios psicológicos que limitan la capacidad de clasificación o distinción del ser humano en diversas áreas a un número entre 5 a 9 etiquetas o valores distintos [9]. Por ello el modelo de variable lingüística con un número finito de términos es también admisible y, desde luego, más sencillo.

La facilidad para trabajar con un número finito de etiquetas ha propiciado que algunos sistemas expertos hayan optado por utilizar variables lingüísticas simbólicas finitas para razonar con proposiciones que involucren términos lingüísticos [7]. Las variables lingüísticas simbólicas tienen importancia como modelo de razonamiento, basándose esencialmente en las lógicas multivaluadas. El problema de esta aproximación es que la precisión está limitada al número de etiquetas

disponibles imponiendo una seria restricción a la precisión en el razonamiento.

En el campo de la teoría de la decisión se han dedicado multitud de trabajos a la construcción de modelos de decisión basados en la utilización de variables lingüísticas (ver por ejemplo [4, 6]). Y en ese dominio, el problema de la granularidad de la variable lingüística utilizada ha sido observado desde las primeras aportaciones [2]. Debido a que la granularidad elegida por cualquiera de los agentes involucrados en un problema de decisión no tiene porque ser la misma, han surgido métodos para fusionar información dada en diferentes granularidades [8].

Un modelo alternativo a considerar es el de trabajar con una variable lingüística con todas sus etiquetas simbólicas estructuradas en diferentes niveles, de tal forma que en cada nivel dispongamos de un conjunto finito de términos, pero que cambiando el nivel consigamos aumentar el número de ellos. Esta descripción esboza un modelo jerárquico de etiquetas lingüísticas simbólicas que vamos a intentar describir en este trabajo.

2. Conjunto de etiquetas simbólico jerárquico

Consideremos los conjuntos finitos $E_n = \{e_{mn} : n \in \mathbb{N}, m \in \{0, \dots, n\}\}$ que representarán un conjunto de etiquetas lingüísticas de las habitualmente utilizadas en sistemas fuzzy tales como las parejas de predicados antónimos *joven-viejo* que serán representadas por E_1 , o el conjunto de términos lingüísticos *muy joven-joven-viejo-muy viejo* representadas por E_3 . Sea $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ la unión de todos ellos. El conjunto E recuerda a la construcción habitual del conjunto de los números racionales y es evidente que si definimos la relación de equivalencia

$$e_{mn} \sim e_{m'n'} \iff mn' = m'n \quad (1)$$

podemos construir los números racionales sobre $[0, 1]$ siempre que eliminemos el caso $n = 0$. Sea $E' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} E_n$ y sea $\tilde{E}' = E' / \sim$ el conjunto cociente via la relación equivalencia definida en 1. Se tendrá que $\tilde{E}' = \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ y $\tilde{E}'$ representaría el conjunto de etiquetas racionales. Es de sobra conocido que en este conjunto la relación definida por

$$\tilde{e}_{mn} \leq_1 \tilde{e}_{m'n'} \iff m'n \leq mn'$$

donde $\tilde{e}$ representan clases de equivalencia y $\leq$ es el orden habitual entre los números naturales, es una relación de orden bien definida. Esa relación de orden es total con lo que todas nuestras etiquetas estarían

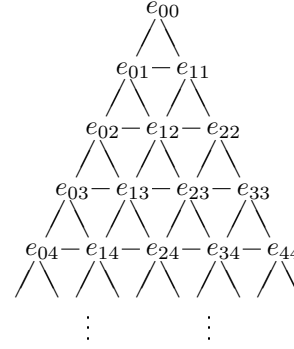


Figura 1: Conjunto de etiquetas lingüísticas simbólicas jerárquicas

ordenadas linealmente. Sin embargo en ese orden se pierde el concepto de nivel al que pertenecen cada una de las etiquetas algo que nos interesa retener.

En la figura 2 aparece una representación reticular del conjunto E siguiendo un modelo que respetaría el orden por niveles y el orden dentro de un nivel que parece el más adecuado. Deseamos realizar la construcción de una estructura reticular sobre E que verifique dos principios importantes: el primero consiste en que dentro de un nivel las etiquetas estén ordenadas linealmente y el segundo que se mantenga una estructura de jerarquía, algo que desaparece cuando se pasa a $\tilde{E}'$. Para lograrlos deberemos distinguir entre etiquetas tales como e_{0n} y $e_{0n'}$ que colapsan todas a 0 en $(\tilde{E})$.

Definición 2.1 Una relación de orden $\leq_n$ se dirá admisible para E si se verifican las dos condiciones siguientes:

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad e_{mn} \leq_n e_{m'n} \text{ cuando } m \leq m'$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad e_{0n} \leq_n e_{0n+1} \text{ y } e_{nn} \leq_n e_{n+1n+1}$

El orden $\leq_1$, orden habitual sobre los números racionales, y que puede definirse para $\tilde{E}$ no es un orden para E puesto que no cumple la propiedad antisimétrica al trabajar con las etiquetas e_{mn} , que corresponden a pares (m, n) , y no con las clases de equivalencia asociadas a esas etiquetas definidas en $\tilde{E}'$ donde sí es una relación de orden. Con ese orden $\tilde{E}'$ es un orden lineal pero podríamos representarlo en términos de etiquetas como aparece en la figura 2. En esa figura las flechas representan la propiedad “es menor que” y sólo se han representado para las etiquetas de un nivel con el siguiente.

3. Ordenes sobre E

El objetivo es, pues, conseguir un orden admisible sobre E .

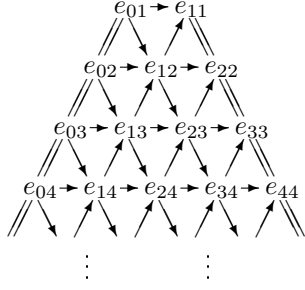


Figura 2: Orden $\leq_1$ sobre $\tilde{E}$

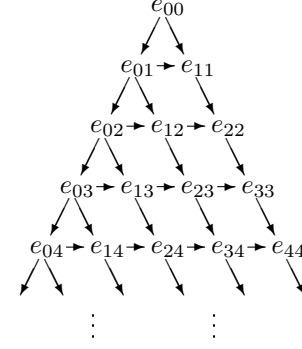


Figura 4: Orden $\leq_3$ sobre E

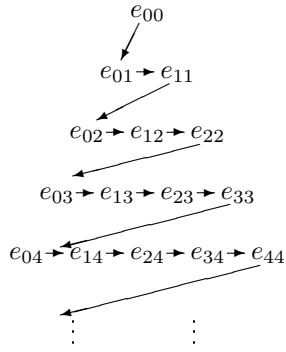


Figura 3: El orden lexicográfico $\leq_2$ sobre E

Definición 3.1 Definimos la relación $\leq_2$ como sigue:

$$e_{mn} \leq_2 e_{m'n'} \iff (n < n') \vee (n = n' \wedge m \leq m') \quad (2)$$

Esa relación es el orden lexicográfico habitual y ordena las etiquetas de E totalmente y tal como se ve en la figura 3 en la que no se han puesto las relaciones de orden entre etiquetas que existen por transitividad.

Como se puede probar directamente, el orden lexicográfico $\leq_2$ es un orden admisible, pero no es el único.

Definición 3.2 Definimos ahora la relación

$$e_{mn} \leq_3 e_{m'n'} \iff (n \leq n' \wedge mn' \leq m'n). \quad (3)$$

Teorema 3.3 $\leq_3$ es un orden para E .

Demostración. El orden es claramente reflexivo y transitivo puesto que la prueba es la misma que se utilizaría para $\leq_1$. Veamos la propiedad antisimétrica. Supongamos dos etiquetas tal que $e_{mn} \leq_3 e_{m'n'}$ y $e_{m'n'} \leq_3 e_{mn}$, se tendrá entonces que $n \leq n'$ y $n' \leq n$ por lo que $n = n'$ y además $mn' = m'n$. Si $n \neq 0$ se deduciría inmediatamente que también $m = m'$ y las etiquetas serían la misma. Para el caso $n = 0$ tendremos que sólo es posible $e_{00} \leq e_{00}$ y $e_{00} \leq e_{00}$ como relación

antisimétrica puesto que por definición $0 \leq m \leq n$ y $0 \leq m' \leq n'$ ■

El siguiente resultado se utilizará con asiduidad posteriormente.

Lema 3.4 Si $e_{mn} \leq_3 e_{m'n'}$ entonces $m \leq m'$

Demostración. Si $n = 0$ entonces $e_{00} \leq e_{m'n'}$ y evidentemente $m = 0 \leq m'$. Si $n \neq 0$ y fuera $m > m'$ tendríamos que $mn > m'n$ y como $n \leq n'$ se tendría $mn' \geq mn > m'n$ en contra de la hipótesis. ■

El orden $\leq_3$ ordena E tal como se ve en la figura 3. En esta figura se han añadido algunas relaciones de orden que son redundantes puesto que se deducen por transitividad de otras pero se ha optado por reforzar la visión de la relación de orden existente entre etiquetas de niveles contiguos. El orden $\leq_3$ es un orden parcial puesto que, por ejemplo, e_{13} no es comparable con e_{14}

Definición 3.5 Sea la siguiente relación $\leq_4$:

$$e_{mn} \leq_4 e_{m'n'} \iff \begin{aligned} &(n \leq n' \wedge mn' \leq m'n) \vee \\ &(n > n' \wedge 0 \neq m \leq m') \end{aligned} \quad (4)$$

Teorema 3.6 $\leq_4$ es una relación de orden.

Demostración. La relación es reflexiva puesto que el orden $\leq_4$ contiene al orden $\leq_3$ y esta última es reflexiva. También es antisimétrica puesto que si se diese $e_{mn} \leq_4 e_{m'n'}$ y $e_{m'n'} \leq_4 e_{mn}$ simultáneamente es evidente que no podría ser $n > n'$ y $n' > n$ a la vez luego se dará uno de los siguientes tres casos:

1. $e_{mn} \leq_3 e_{m'n'}$ y $e_{m'n'} \leq_4 e_{mn}$ y $e_{m'n'} \not\leq_3 e_{mn}$,
2. $e_{mn} \leq_4 e_{m'n'}$ y $e_{mn} \not\leq_3 e_{m'n'}$ y $e_{m'n'} \leq_3 e_{mn}$,
3. $e_{mn} \leq_3 e_{m'n'}$ y $e_{m'n'} \leq_3 e_{mn}$.

El último caso por antisimetría de $\leq_3$ estaría probado. Veamos como ni el caso 1 ni el caso 2 son posibles. Si se

diese el caso 1 se tendría que $e_{mn} \leq_3 e_{m'n'}$ implica que $n \leq n'$ y $mn' \leq m'n$ lo que por el lema 3.4 $m \leq m'$. Además de $e_{m'n'} \leq_4 e_{mn}$ y $e_{m'n'} \not\leq_3 e_{mn}$ se tiene que $n' > n$ y $0 \neq m' \leq m$ luego $m = m'$ y de $mn' \leq m'n$ como $m \neq 0$ tendríamos $n' \leq n$ en contra de la condición $n' > n$. Luego este caso es imposible y lo mismo sucede con el caso 2.

En cuanto a la propiedad transitiva, si

$$e_{mn} \leq_4 e_{m'n'} \text{ y } e_{m'n'} \leq_4 e_{m''n''} \quad (5)$$

y para los dos casos la relación es también $\leq_3$ entonces se tendrá $e_{mn} \leq_3 e_{m''n''}$ y por tanto también será $\leq_4$. Si alguno de las relaciones en (5) es estrictamente $\leq_4$, es decir que no es $\leq_3$. Se podrán dar los tres siguientes casos:

1. $e_{mn} \not\leq_3 e_{m'n'}$ y $e_{m'n'} \not\leq_3 e_{m''n''}$
2. $e_{mn} \not\leq_3 e_{m'n'}$ y $e_{m'n'} \leq_3 e_{m''n''}$
3. $e_{mn} \leq_3 e_{m'n'}$ y $e_{m'n'} \not\leq_3 e_{m''n''}$

Para el caso 1. tendremos $(n > n' \wedge 0 \neq m \leq m') \wedge (n' > n'' \wedge 0 \neq m' \leq m'')$ por lo que $(n > n'' \wedge 0 \neq m \leq m'')$ con lo que $e_{mn} \leq_4 e_{m''n''}$.

En el caso 2. será cierto que $(n > n' \wedge 0 \neq m \leq m') \wedge (n' \leq n'' \wedge m'n'' \leq n'm'')$ y por el lema 3.4 también $m' \leq m''$ y por tanto $0 \neq m \leq m''$. Estudiaremos los siguientes 3 casos en función de la relación entre n'' y n :

$n'' < n$, como $0 \neq m \leq m''$ se tendrá que $e_{mn} \leq_4 e_{m''n''}$.

$n'' = n$, de $0 \neq m \leq m''$ se deduce $mn'' \leq m''n$ por lo que $e_{mn} \leq_3 e_{m''n''}$.

$n'' > n$, en este caso como $m'n'' \leq m''n'$ y como $n' < n$ y $m'' \neq 0$, se tendrá que $m'n'' \leq m''n$. Además como $m \leq m''$ será cierto que $mn'' \leq m''n''$ con lo que $mn'' \leq m'n'' \leq m''n' \leq m''n$ y por tanto $e_{mn} \leq_3 e_{m''n''}$.

Por último el caso 3. es análogo al 2. Abreviadamente, consideramos de nuevo casos según la relación entre n'' y n :

$n'' < n$, como $0 \neq m \leq m''$ entonces $e_{mn} \leq_4 e_{m''n''}$.

$n'' = n$, como $m \leq m''$ se deduce $mn'' \leq m''n$ por lo que $e_{m'n'} \leq_3 e_{m''n''}$.

$n'' > n$, como $n'' < n'$ entonces $mn'' \leq mn' \leq m'n$ y como $m' < m''$ también será $m'n \leq m''n$ con lo que $mn'' \leq m''n$ y con ello $e_{mn} \leq_3 e_{m''n''}$.

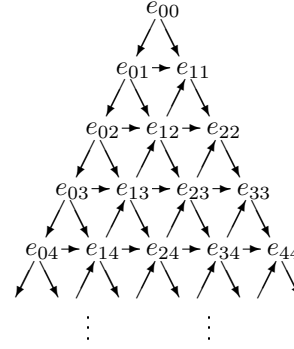


Figura 5: Orden $\leq_4$ sobre E

El orden $\leq_4$ es un orden admisible para E puesto que lo es $\leq_3$. En la figura 3 aparece una representación reticular de este orden en el que se han puesto sólo relaciones entre etiquetas de niveles adyacentes y algunas relaciones de orden redundantes por transitividad entre etiquetas con el objetivo de mostrar el comportamiento entre niveles y poder compararlo con la figura 3 que muestra el orden $\leq_3$.

Resulta que $\leq_4$ es un orden parcial puesto que existen parejas incomparables. Para construir ejemplos de estas parejas $e_{mn}, e_{m'n'}$ basta imponer condiciones sobre los índices. Como se dará que $n \leq n'$ o $n > n'$, podemos considerar $n < n'$, puesto que si $n = n'$ las dos etiquetas estarán siempre ordenadas. Para que no se dé $e_{mn} \leq_3 e_{m'n'}$ se tendrá que verificar que $mn' > m'n$. Si $0 \neq m' \leq m''^1$ se daría que $e_{m'n'} \leq e_{mn}$ por lo que habrá que exigir que $m' > m \neq 0$. Para encontrar etiquetas incomparables tendremos que encontrar cuatro valores $m, n, m'n'$ tales que

1. $0 < m \leq n$ y $0 < m' \leq n'$ con $n, n' \neq 0$,
2. $n < n'$ y $m < m'$,
3. $mn' > m'n$.

Un ejemplo lo tenemos con $e_{4,6}$ y $e_{5,10}$.

Observaciones 1. e_{00} es el elemento mínimo. Además también $e_{01} \leq_3 e_{mn}$ para todo $n \geq 1$, con lo que siempre $e_{00} <_4 e_{01} \leq_4 e_{mn}$ para todo $n \geq 1$.

2. $\leq_4$ no es un orden bien fundado puesto que existen cadenas descendentes infinitas del tipo $e_{mn} > e_{mn+1} > e_{mn+2} > \dots$

3. Las etiquetas de la forma $e_{mn}, e_{m+k, n+k}$ y las de la forma $e_{mn}, e_{km, kn}$ para $k \in (N) - \{0\}$ siempre

¹Si alguno de los n, n', m, m' son cero se tienen las siguientes relaciones: e_{00} es el elemento mínimo, e_{0n} es menor que $e_{0n'}$ si $n' > n$ y mayor en caso contrario. Por último e_{0n} es incomparable con $e_{mn'}$ cuando $n' < n$ y $m \neq 0$.

cumplen $e_{mn} <_3 e_{m+k, n+k}$ puesto que $n < n+k$ y $m(n+k) = mn + km \leq mn + kn = (m+k)n$ y $e_{mn} \leq e_{km, kn}$ ya que $n \leq kn$ y $mkn = nkm$.

4. Si $e_{mm} \leq_4 e_{m'n'}$ y $m \neq 0$ entonces $m' = n' \geq m$ ya que si $m > n'$ y $0 \neq m \leq m'$, como $m' \leq n'$ tendríamos $m \leq m' \leq n' < m$ lo cual es imposible. Así $e_{mm} \leq_4 e_{m'n'}$ implica $e_{mm} \leq_3 e_{m'n'}$ y en ese caso $m \leq n'$ y $mn' \leq mm'$ entonces como $m \neq 0$ se sigue $n' \leq m'$ y como siempre es $m' \leq n'$ tendríamos lo afirmado, es decir que e_{mm} sólo es menor que etiquetas de la forma e_{nn} y eso sucede cuando $n > m$.

El orden $\leq_4$ a pesar de ser un orden parcial cumple una propiedad interesante en cada nivel que más bien se asocia a ordenes totales.

Teorema 3.7 *Para dos etiquetas que estén en el mismo nivel siempre existe una etiqueta intermedia.*

Demostración. Sean $e_{mn}, e_{m'n'}$ con $n \neq 0$ y supongamos $m' > m$. Si $m+1 < m'$ entonces $e_{m+1, n}$ cumple el papel de etiqueta intermedia. Supongamos que $m' = m+1$, en ese caso $e_{m+1, n+1}$ es una etiqueta intermedia ya que $e_{mn} <_3 e_{m+1, n+1}$ porque $n \leq n+1$ y $m(n+1) = mn + m \leq mn + n \leq n(m+1)$ puesto que $m \leq n$ por definición. Además $e_{m+1, n+1} <_4 e_{m+1, n}$ ya que $n+1 > n$ y $0 \neq m+1 = m+1$ ■

Es interesante resaltar que ni el orden $\leq_3$ ni el orden $\leq_2$, ambos admisibles en el sentido de la definición 2.1, cumplen la propiedad anterior. Esta propiedad es, en cierto sentido, una propiedad que indica que el orden $\leq_4$ es “denso” en E para algunos pares, aunque la propiedad de ser denso de un orden sólo se puede aplicarse a un orden total. De hecho no sólo existe una etiqueta intermedia entre $e_{mn}, e_{m+1, n}$, existe otra en el nivel superior si $m \neq 0$; como $n \geq 1$ entonces se cumple que $e_{mn} \leq_4 e_{mn-1}$ puesto que $n > n-1$ y $0 \neq m \leq m$. También tendremos $e_{mn-1} \leq e_{m+1, n}$, ya que $mn \leq (m+1)(n+1) = mn - m + n - 1$ será cierto si $n - m - 1 \geq 0$, es decir si $n \geq m+1$, pero suponemos que $e_{m+1, n}$ está bien definido y por tanto se cumplirá. Así como $n-1 \leq n$ y $mn \leq (m+1)(n-1)$ se tendrá $e_{mn-1} \leq e_{m+1, n}$.

Al no ser un orden total denso deben existir parejas de etiquetas que no tienen etiquetas intermedias.

4. Predecesores y sucesores en $\leq_4$

A continuación vamos a analizar cuando dos etiquetas $e_{mn}, e_{m'n'}$ son sucesoras o predecesoras en E respecto a $\leq_4$.

Proposición 4.1 $e_{mn} <_4 e_{mn-1}$ cuando $n \leq 2$ y $m \neq 0$ y no existe ninguna etiqueta intermedia.

Demostración. Es evidente que $e_{mn} \leq_4 e_{m, n-1}$ puesto que $n > n-1$ y $0 \neq m \leq m$. Supongamos que existiese $e_{m'n'}$ tal que

$$e_{mn} \leq_4 e_{m'n'} \quad (6)$$

$$e_{m'n'} \leq_4 e_{mn-1} \quad (7)$$

tendremos que sólo se puede dar alguno de los siguientes casos:

1. Las dos relaciones (6) y (7) son $\leq_4$ pero no $\leq_3$. Eso implicaría que $n > n'$ y $n' > n-1$, lo que es imposible.
2. La primera es $\leq_4$ y no $\leq_3$ y la segunda es $\leq_3$. Entonces $n > n'$ y $n' \leq n-1$ lo que implica que $n' \leq n-1 < n$. Además $0 \neq m' \leq m$ y por el lema 3.4 $m \leq m'$, luego $m = m'$. Como (7) es $\leq_3$ tendremos que $m'(n-1) \leq mn'$ y así $n-1 \leq n'$ y con ello $n' = n-1$ y $e_{m'n'} = e_{mn-1}$ y no sería etiqueta intermedia.
3. La primera es $\leq_3$ y la segunda no es $\leq_3$. Por darse (6) tendremos $n \leq n'$ y $mn' \leq nm'$ y por darse (7) se dará $n' > n-1$ y $0 \neq m' \leq m'$. Por el lema 3.4 también será $m \leq m'$, luego $m = m'$ y de $mn' \leq nm'$ se deducirá que $n' \leq n$ y así $n' = n$ y $e_{m'n'} = e_{mn}$.
4. Las dos son $\leq_3$. Pero como $n \leq n'$ por (6) y $n' \leq n-1$ por (7), eso implicaría que $n \leq n-1$, lo cual es imposible. ■

Proposición 4.2 *Una pareja de etiquetas $e_{mn}, e_{m+1, n+1}$ tiene etiquetas intermedias si y sólo si existe n' tal que se cumple alguna de las siguientes condiciones, con $0 < m < n$:*

$$\frac{m}{m+1}(n+1) \leq n' < n \quad (8)$$

$$n+1 < n' \leq \frac{m+1}{m}(n) \quad (9)$$

Demostración. Supongamos que existe una etiqueta $e_{m'n'}$ tal que:

$$e_{mn} <_4 e_{m'n'} \quad (10)$$

$$e_{m'n'} <_4 e_{m+1, n+1} \quad (11)$$

Se pueden dar los siguientes casos:

(10) no es $\leq_3$ y (11) no es $\leq_3$ Pero eso es imposible porque obligaría a $n > n' > n+1$.

(10) no es $\leq_3$ y (11) es $\leq_3$ Por ello $n > n' \wedge 0 \neq m \leq m'$ y $n' \leq n+1 \wedge m'(n+1) \leq (m+1)n'$. Además por el lema 3.4 sabemos que $m' \leq m+1$, luego m' cumple $m \leq m' \leq m+1$ y sólo puede

ser $m' = m$ ó $m' = m + 1$. Si $m' = m + 1 \neq 0$, por (11) $n > n' \wedge (m + 1)(n + 1) \leq (m + 1)n'$ tendríamos una contradicción. Así debe ser $m' = m$ y en ese caso juntando las condiciones no impuestas de (10) y (11) se obtiene $\frac{m}{m+1}(n + 1) \leq n' < n$ que es exactamente la condición (8).

(10) es $\leq_3$ y (11) no es $\leq_3$. Las condiciones en este caso son $n \leq n' \wedge mn' \leq m'n$ y $n' > n + 1 \wedge 0 \neq m' \leq m + 1$. De nuevo por el 3.4 tendremos $m \leq m' \leq m + 1$ y m' sólo puede valer m o $m + 1$. El caso $m' = m$ se descarta de forma análoga a como se hizo en el caso anterior y por tanto sólo puede ser $m' = m + 1$ y reescribiendo oportunamente las condiciones restantes se tiene $n + 1 < n' \leq \frac{m+1}{m}(n)$ que es exactamente la condición 9.

(10) es $\leq_3$ y (11) es $\leq_3$ Las condiciones resultan ser $n \leq n' \wedge mn' \leq m'n$ y $n' \leq n + 1 \wedge m'(n + 1) \leq (m + 1)n'$ de lo que resulta aplicando el lema 3.4 que $n \leq n' \leq n + 1$ y $m \leq m' \leq m + 1$ y tenemos cuatro posibilidades para m' y n' . Cuando $n' = n, m' = m$ y $n' = n + 1, m' = m + 1$ tenemos las etiquetas originales y eso no puede ser al ser 10 y 11 relaciones estrictas. Así sólo nos interesan los casos $n' = n, m' = m + 1$ y $n' = n + 1, m' = m$. Para el primero tendremos que $(m + 1)(n + 1) \leq (m + 1)n$ lo que implica $n + 1 \leq n$, algo imposible. y para el segundo $m(n + 1) \leq mn$ de lo que se deduce de nuevo $n + 1 \leq n$.

Para demostrar el recíproco, si existe un n' cumpliendo alguna de las condiciones (8) o (9) basta tomar $m' = m$ para cuando se cumple la primera y $m' = m + 1$ para cuando se cumple la segunda y así obtener una etiqueta intermedia $e_{m'n'}$ que cumpla (10) y (11). ■

Proposición 4.3 Para todo $n \geq 2$ existe un m con $0 < m < n$ tal que existe un n' que verifica la proposición 4.2.

Demostración. Tomando (8) de la proposición 4.2, no existirá n' cumpliéndola cuando $\frac{m}{m+1}(n + 1) > n - 1$ para toda m con $0 < m < n$. Operando resulta que no existirá n' verificando (8) cuando $n < 2m + 1$ para toda m con $0 < m < n$. Haciendo lo mismo con la condición (9), resultará que no existirá n' cumpliendo dicha condición cuando $n < 2m$ para toda m con $0 < m < n$. Pero tomando $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ siempre cumplirá $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq n$ y siendo $0 \leq m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq n$. Las últimas desigualdades son estrictas ambas cuando $n \geq 2$. ■

Lema 4.4 Siempre se cumple $\frac{m}{n+k} < \frac{m}{n} \leq \frac{m+k}{n+k}$ para todo $k \geq 1$ y $1 \leq m \leq n$.

Lema 4.5 $e_{mn} \leq_4 e_{m+l, n+k}$ con $1 \leq l \leq k$ si y sólo si $m \leq \frac{l}{k}n$

Demostración. Como $n < n + k$ cuando $k \geq 1$ entonces si $e_{mn} \leq_4 e_{m+l, n+k}$ sólo puede ser $e_{mn} \leq_3 e_{m+l, n+k}$, pero entonces se cumplirá $m(n+k) \leq n(m+l)$ y operando resulta el enunciado a probar. ■

Damos a continuación algunas proposiciones sencillas sin demostración.

Proposición 4.6 Para la pareja $e_{00} <_4 e_{mn}$ no hay etiquetas intermedias si y sólo si $m = 0$ y $n = 1$.

Proposición 4.7 Para la pareja $e_{01} <_4 e_{mn}$ no hay etiquetas intermedias si y sólo si $m = 0$ y $n = 2$.

Proposición 4.8 Para la pareja $e_{0n} <_4 e_{0n'}$ no hay etiquetas intermedias si y sólo si $n' = n + 1$.

Proposición 4.9 Para la pareja $e_{11} <_4 e_{mn}$ se tiene que $1 \leq m = n$ y no habrá etiquetas intermedias si y sólo si $m = n = 2$.

Teorema 4.10 Sea $n \geq 2$ y $0 < m \leq n$ y $e_{mn} <_4 e_{m'n''}$ entonces no existe una etiqueta intermedia si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones:

1. $n'' = n - 1$ y $m'' = m$,
2. $2 \leq m = n$ y $m'' = n'' = n + 1$,
3. $m = m'' = 0$ y $n'' = n + 1$,
4. existen l, k tales que $m'' = m + l$ y $n'' = n + k$ con $0 < m \leq n$ y $1 \leq l < k$ y $\frac{k}{l}m \leq n < \frac{k+1}{l}m$
5. existen l, k tales que $m'' = m + l$ y $n'' = n + k$ con $0 < m \leq n$ y $1 \leq l < k$ y $\frac{k}{l}m \leq n < \frac{k+1}{l}m + 1$.
6. para todo n' con $n \leq n' \leq n''$ se cumple que para todo m' con $m < m' < m''$ se tiene que $n' < m' \frac{n''}{m''}$ o $n' > m' \frac{n}{m}$.

Demostración. Como $e_{mn} <_4 e_{m'n''}$ sólo puede ser $n \leq n''$ o $n > n''$. Si $n = n''$ por teorema 3.7 sabemos que existirá etiqueta intermedia. Así debe ser $n \neq n''$. Comencemos estudiando el caso $n > n''$.

En ese caso tendremos siempre $0 \neq m \leq m'$ y $n > n''$. El problema podemos reescribirlo como $e_{m, n+k} <_4 e_{m+l, n}$ con $k \geq 1$ y $0 \leq l \leq n - m$ puesto que $m + l \leq n$. Supongamos que existiese una etiqueta intermedia, es decir que se cumpliesen las relaciones:

$$e_{m, n+k} <_4 e_{m'n'} \quad (12)$$

$$e_{m'n'} <_4 e_{m+l, n}. \quad (13)$$

Analicemos los casos posibles.

(12) y (13) no son $<_3$ Entonces $n+k > n'$ y $n' > n$ y $0 \neq m \leq m'$ y $0 \neq m' \leq m+l$, luego existirá etiqueta intermedia si existe n' con $n+k > n' > n$ y existe m' con $0 \neq m \leq m' \leq m+l$. Pero con $k \geq 2$, n' podría valer $n+1$ y tomando $m' = m$ ya tendríamos $e_{m \ n+k} <_4 e_{m \ n+1}$ y $e_{m \ n+1} <_4 e_{m+l \ n}$, con lo que existiría etiqueta intermedia. Por tanto debe darse $1 \leq k < 2$, es decir $k = 1$, y el caso a estudiar es $e_{m \ n+1} <_4 e_{m+l \ n}$. Además si $l = 0$ entonces habrá que estudiar cuando $e_{m \ n+1} <_4 e_{mn}$ pero por el teorema 4.1 sabemos que no hay etiquetas intermedias para ese caso y eso corresponde al caso 1 del enunciado del teorema.

Sea por tanto l tal que $0 < l < n - m$.

(12) y (13) son $<_3$ Pero eso es imposible puesto que obligaría a que $n+1 \leq n' \leq n$.

(12) no es $<_3$ y (13) es $<_3$ En ese caso se tendrá $n' \leq n$ y $0 \neq m \leq m' \leq m+l$ con $m'n \leq n'(m+l) \leq n(m+l)$. Tomemos $n' = n-1$, entonces $m'n \leq (n-1)(m+l) = nm + nl - m - l$, lo que es equivalente a que $m' \leq m + l - \frac{m+l}{n} = (m+l)(1 - \frac{1}{n}) = (m+l)(\frac{n-1}{n})$. Así basta tomar m' cumpliendo lo anterior para tener $e_{m \ n+1} <_4 e_{m' \ n-1}$ y $e_{m' \ n-1} <_4 e_{m+l \ n}$. Como no puede haber etiquetas intermedias no deberá existir un m' así y eso ocurrirá si y sólo si $(m+l)\frac{n-1}{n} < m$ lo que es equivalente a que $m > l(n-1)$. Como $m \leq n$ se tendrá que ó $m \leq n-1 < n$ ó $m = n$. En el primer caso se tendrá $0 < l < \frac{m}{n-1} \leq 1$ y l sólo puede ser 1. En el caso de $m = n$ resultaría $0 < l < \frac{n}{n-1} \leq 2$ y de nuevo $l = 1$.

Consideremos por tanto el caso $e_{m \ n+1} <_4 e_{m+l \ n}$.

(12) es $<_3$ y (13) no es $<_3$ Tendremos $n+1 < n'$ y $mn' \leq (m+1)m'$ y $m \leq m'$ y también $n' > n$ y $0 \neq m' \leq m+1$, por tanto $m \leq m' \leq m+1$ y será $m' = m$ o $m' = m+1$. Si $m' = m$ entonces $mn \leq (n+1)m$ lo que implicaría $n < n' \leq n+1$, algo imposible. Si $m' = m+1$, entonces $mn \leq (n+1)(m+1)$ y así tendremos $n+1 \leq n' \leq \frac{m+1}{m}(n+1)$. Tomando $n' = n+1$ se cumplirá que existe $e_{m+1 \ n+1}$ con $e_{m \ n+1} <_3 e_{m+1 \ n+1}$ y $e_{m+1 \ n+1} <_4 e_{m+l \ n}$. Luego n' no podrá existir, para ello se debería dar $\frac{m+1}{m}(n+1) < n+1$, es decir $\frac{m+1}{m} < 1$ lo que es absurdo, así que n' siempre existirá.

Pasemos a analizar el caso $n < n''$.

Como $e_{mn} <_4 e_{m''n''}$ y $n < n''$ entonces $e_{mn} <_3 e_{m''n''}$ y $mn'' \leq m''n$ lo que implica $m \leq m''$. Si $m = m'' = 0$ ese caso está estudiado en la proposición 4.8 y corresponde al caso 3 del enunciado del teorema. Si $m = m'' \neq 0$, entonces obligaría a que $n'' \leq n$ en contradicción con la hipótesis. Así debe ser $m < m''$.

Por tanto podemos reescribir el problema tomando $m'' = m+l$ y $n'' = n+k$ con $1 \leq l \leq k$.

Por la observación 3 podemos construir la siguiente cadena de etiquetas:

$$e_{mn} <_4 e_{m+1 \ n+1} <_4 \dots <_4 e_{m+k \ n+k}.$$

Si $l = k > 1$ tendríamos etiquetas intermedias y si $l = k = 1$ es el caso estudiado en la proposición (4.2) y para el que no hay etiquetas intermedias, para $n \geq 2$, sólo en el caso $n = m$ que corresponde al caso 2 del enunciado del teorema. Por tanto vamos a estudiar el caso en el que $1 \leq l < k$.

Todo se reduce a estudiar cuando el par de etiquetas verificando $e_{mn} <_4 e_{m+l \ n+k}$ con $1 \leq l < k$ no tienen etiquetas intermedias. Recordemos que por el lema (4.5), se tendrá que $e_{mn} <_4 e_{m+l \ n+k}$ si y sólo si $m \leq \frac{l}{k}$.

Supongamos que existiese $e_{m'n'}$ tal que

$$e_{mn} <_4 e_{m'n'} \quad (14)$$

$$e_{m'n'} <_4 e_{m+l \ n+k} \quad (15)$$

Consideremos los cuatro casos habituales:

(14) no es $<_3$ y (15) no es $<_3$ Eso obligaría a que $n > n' > n+k$ lo cual es imposible.

(14) es $<_3$ y (15) no es $<_3$ Entonces se darían las condiciones $n \leq n'$ y $mn' \leq nm'$ con $m \leq m'$ y $n' > n+k$ y $0 \neq m'm+l$. Así para que existiese $e_{m'n'}$ tendrían que existir m', n' con

$$0 \neq m \leq m' \leq m+l \quad (16)$$

$$n+k < n' \leq n \frac{m'}{m} \quad (17)$$

Es evidente que si $m' = m$ no podría existir n' cumpliendo la condición (17), así que se debe estudiar ese caso aparte. Si $m' = m$ como $mn' \leq nm'$ nos daría de nuevo $n = n'$ y obtendríamos la etiqueta original. Así si existe $e_{m'n'}$ cumpliendo (14) y (15) debe ser $m \neq m'$. Para que no exista n' verificando (17) deberá darse $n \frac{m'}{m} < n+k+1$ para todo m' con $0 \neq m < m' \leq m+l$ puesto que de caso contrario bastaría tomar $n' = n+k+1$ y m' tal que $n \frac{m'}{m} \geq n+k+1$ y $m < m' \leq m+l$ para que existiera una etiqueta intermedia. Pero $n \frac{m'}{m} < n+k+1$ es equivalente, operando, a $n < \frac{m}{m'-m}(k+1)$ para todo m' con $m < m' \leq m+l$, lo que a su vez es equivalente a exigir que $n < \frac{k+1}{l}m$ puesto que tendremos $m - m' = 0 < m' - m < l$ y así $\frac{k+1}{l}m < \frac{k+1}{l-1}m < \dots < (k+1)m$. Teniendo en cuenta que por el lema (4.5) también será cierto que $\frac{k}{l}m \leq n$ por ser $e_{mn} \leq e_{m+l \ n+k}$, así tendremos que $e_{mn} <_4 e_{m+l \ n+k}$ no tendrá una etiqueta

intermedia en el caso que estamos considerando si y sólo si m, n, k, l cumplen:

1. $0 < m \leq n$
2. $1 \leq l < kk$
3. $\frac{k}{l}m \leq n < \frac{k+1}{l}m$

que corresponde al caso 4 del enunciado del teorema.

(14) no es $<_3$ y (15) es $<_3$ Tenemos en este caso las condiciones de (14) $n > n' \wedge 0 \neq m \leq m'$ y de (15) $n' \leq n + k \wedge m'(n + k) \leq n'(m + l)$. Como esto último implica $m' \leq m + l$ tendríamos las condiciones conjuntas:

$$0 \neq m \leq m' \leq m + l \quad (18)$$

$$\frac{m'}{m+l}(n+k) \leq n' < n < n+k \quad (19)$$

Es evidente que si $m' = m + l$, sustituyendo en (19) nos daría que no existiría n' , así podemos considerar (18) como $0 \neq m \leq m' < m + l$. Para que no exista $e_{m'n'}$ cumpliendo (14) y (15) es necesario y suficiente que

$$\frac{m'}{m+l}(n+k) > n-1 \quad \forall m' : 0 \neq m \leq m' < m+l.$$

Operando, eso es equivalente a

$$n < \frac{m+l+km'}{m+l-m'} \quad \forall m' : 0 \neq m \leq m' < m+l. \quad (20)$$

Pero

$$\frac{m+l+km'}{m+l-m'} \leq \frac{m+l+k(m'+1)}{m+l-m'-1}$$

puesto que $m+l-m' > m+l-m'-1$ y $m+l+km' < m+l+km'+k$.

Así imponer (20) es equivalente a imponer

$$n < \frac{m+l+km}{m+l-m} = \frac{(k+1)m+l}{l}$$

Como se cumple $e_{mn} <_4 e_{m+l, n+k}$, para que no exista ninguna etiqueta intermedia que cumpla (14) y (15) se deberá cumplir

$$\frac{k}{l}m \leq n < \frac{k+1}{l}m + 1$$

con $1 \leq l < k$, lo que corresponde al caso 5 del enunciado del teorema.

(14) es $<_3$ y (15) es $<_3$ Imponer esas relaciones de orden conduce a las condiciones $n \leq n' \leq n+k$, $m \leq m' \leq m+l$ y $mn' \leq m'n \leq m'(n+k) \leq n'(m+l)$. Es fácil deducir que con $m' = m$

tenemos $n' = n$ y que $m' = m + l$ conduce a $n' = n + k$, casos ambos degenerados. Las condiciones pueden reducirse entonces a las condiciones

$$\begin{aligned} n &\leq n' \leq n+k \\ m &< m' < m+l \\ m' \frac{n+k}{m+l} &\leq n' \leq m' \frac{n}{m} \end{aligned}$$

que son otra forma de escribir el caso 6 del enunciado del teorema.

Referencias

- [1] J. Agusti, F. Esteva, P. Garcia, LL. Godo, and C. Sierra. Combining multiple-valued logics in modular expert systems. In *7th Conference On Uncertainty In AI*, pages 1–9, 1991.
- [2] P.P. Bonissone and K.S. Decker. Selecting uncertainty calculi and granularity: an experiment in trading-off precision and complexity. In L.H. Kanal and J.F. Lemmer, editors, *Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 217–247. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [3] N. Cat Ho and W. Wechler. Extended hedge algebras and their application to fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 52:259–281, 1992.
- [4] A.J. Chen and C.L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making-Methods and Applications*. Springer, Berlin, 1992.
- [5] A.R. De Soto and E. Trillas. On antonym and negate in fuzzy logic. *Int. Journal Of Intelligent Systems*, 14:295–303, 1999.
- [6] M. Delgado, J.L. Verdegay, and A. Vila. Linguistic decision making models. *Inter. Journal of Intelligent Systems*, 7:479–492, 1992.
- [7] L. Godo, R. Lopez de Mantaras, and C. Sierra. Milord: The architecture and the management of linguistically expressed uncertainty. *Int. Journal Of Intelligent Systems*, 4:471–501, 1989.
- [8] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and Luis Martinez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114:43–58, 2000.
- [9] G. A. Miller. The magical number seven or minus two: Some limits on our capacity of processing information. *PsychologicaRev*, (63):81–87, 1956.
- [10] L.A. Zadeh. A theory of approximate reasoning. *Machine Intelligence*, 9:149–194, 1979.

- [11] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. part I,II and III. In R.R. Yager, S. Ovchinnikov, R.M. Tong, and H.T. Nguyen, editors, *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L.A. Zadeh*, pages 219–366. John Wiley & Sons, 1987.

ARQUITECTURA DE UN SISTEMA WEB DE EVALUACIÓN DIFUSA CON INFORMACIÓN HETEROGÉNEA APLICADO A LA CALIDAD DOCENTE UNIVERSITARIA

P. J. Sánchez, L. Martínez

Dpto. de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Universidad de Jaén, 23071 - Jaén, España
pedroj,martin@ujaen.es

B. Montes

Dpto. de Psicología
Universidad de Jaén, 23071 - Jaén, España
bmontes@ujaen.es

Resumen

La evaluación de la calidad docente universitaria es un proceso que se ha venido realizando habitualmente en las Universidades Españolas. Sin embargo, la importancia de la misma ha aumentado significativamente en los últimos años y puede que su significación sea aún mayor en un futuro próximo debido a que las Administraciones Públicas están planificando que parte de los presupuestos de Universidades, departamentos, áreas, etc., estén sujetas en parte a dichas evaluaciones. En este proceso se evalúan aptitudes docentes de los profesores de la Universidad así como los servicios proporcionados por ésta. Las evaluaciones actuales utilizan un modelado preciso de la información a pesar de que se evalúan indicadores en su mayoría de naturaleza cualitativa, por lo que el marco de evaluación es poco flexible lo que puede llevar a obtener evaluaciones poco representativas.

En esta contribución se propone una arquitectura para un Sistema Web con tecnología JAVA que automatice todo el proceso de evaluación de la calidad docente universitaria. Este sistema implementa dicho proceso sobre un marco de evaluación flexible que permitirá modelar las evaluaciones sobre los distintos indicadores atendiendo a la naturaleza de los mismos, mediante un contexto con Información Heterogénea (numérica, intervalar y lingüística) y define un modelo de evaluación basado en un proceso de decisión difuso con Información Heterogénea [7, 8, 9].

1. Introducción

La evaluación es un proceso cognitivo complejo que involucra diferentes mecanismos en los que hay que definir los elementos a evaluar, fijar un marco en el que se realizará la evaluación, recopilar la información de los evaluadores que tomen parte en el problema y finalmente calcular un resultado que nos indique la valoración global del elemento, modelo, producto, persona o sistema, que estamos evaluando. En la literatura científica podemos encontrar como el uso de técnicas de análisis de decisiones han facilitado la resolución de problemas de evaluación complejos [2, 4].

En la Teoría de Decisión, antes de tomar una decisión, se realiza un proceso de análisis que permite a los decisores tomar decisiones de una forma consistente, es decir, el análisis de decisión ayuda a las personas a tomar decisiones complejas. Sin embargo el análisis de decisión no es una teoría a idealizar sobre cómo las personas toman sus decisiones de una forma totalmente racional. En realidad, existen trabajos de campo en psicología que muestran que a veces las personas no procesan la información y que otras veces, toman sus decisiones de forma inconsistente o incongruente a pesar del análisis de la decisión. Por tanto, podemos ver que aunque el análisis de decisión no se utilice siempre por los decisores a la hora de tomar sus propias decisiones, sí es responsable de realizar un estudio metódico y analítico que ayuda a analizar las alternativas, indicadores, del elemento bajo estudio que es el objetivo de los procesos de *Evaluación*.

En la Teoría de Decisión hay distintas situaciones de decisión dependiendo del contexto en el que se desarrolle el problema de decisión, ya sea en un ambiente de certidumbre, de riesgo o de incertidumbre. Se puede decir que los métodos clásicos se adecuan fácilmente a problemas desarrollados en ambiente de certidumbre y de riesgo, sin embargo no son adecuados en situaciones de incertidumbre, es decir, en problemas que presentan información vaga e imprecisa. En estas situaciones

Palabras Clave: Evaluación Docente, Toma de Decisión, Información Heterogénea, Sistema Web.

hablamos de problemas de decisión en contexto difuso o de *Toma de Decisiones Difusa* [3].

En esta contribución nos centramos en la evaluación de la calidad docente universitaria en la que se evalúan distintos indicadores con distinta naturaleza (cuantitativa o cualitativa) y sobre los que se puede tener distinto grado de certeza. Sin embargo, nos encontramos que la mayoría de estos modelos de evaluación obligan a los evaluadores a calificar todos los indicadores con una escala numérica y precisa [1, 13]. En [14, 15] hemos visto como el uso de procesos de análisis de decisión en contexto difuso ha producido buenos resultados a la hora de mejorar el modelado del tratamiento de esta información vaga e imprecisa. Estos modelos difusos nos ha permitido abordar problemas de evaluación en los que se ofrece un marco de trabajo flexible en el que los evaluadores pueden utilizar distintos dominios de expresión "*Información Heterogénea*" (numérica, lingüística, intervalar) en la misma encuesta dependiendo de la naturaleza de los indicadores evaluados y del conocimiento del evaluador sobre los mismos. Nuestro objetivo en esta contribución es proponer una arquitectura de un sistema web de evaluación que adopta un marco de evaluación heterogéneo y que utiliza un modelo de decisión difuso para realizar el proceso de evaluación presentado en [12] y que se ha aplicado a la evaluación de la calidad docente universitaria en el desarrollo de un proyecto para la Agencia de Evaluación Andaluza.

Esta contribución se estructura como sigue: en la sección 2 hacemos un breve repaso al modelo de evaluación difuso, en la sección 3 presentaremos la arquitectura del Sistema Web para la Evaluación de la Calidad Docente Universitaria. Para finalizar presentaremos las conclusiones.

2. Modelo de Evaluación Difuso: Marco de Trabajo y Procesos

Antes de presentar la arquitectura del Sistema de Evaluación en un entorno WEB con tecnología JAVA, hacemos una breve revisión del modelo difuso de evaluación que implementará dicho sistema. Para ello definiremos el marco de evaluación en el que se llevará a cabo el proceso evaluativo y revisaremos los procesos del modelo de decisión que se utilizará para obtener los resultados buscados en la evaluación del profesorado. Para un mayor detalle del modelo de decisión consultar [5, 12, 15]

2.1. Marco de Evaluación

El entorno en el que se desenvuelve la evaluación de la calidad del profesorado universitario puede descri-

birse de forma simple como un problema de decisión Multi-Experto ya que, para obtener una evaluación del profesor se utilizan las opiniones de distintos actantes (alumnos, expertos en calidad, etc.) que han participado en la evaluación de los docentes. También podrán incluirse parámetros adicionales fuera de las encuestas de evaluación para medir la calidad del docente.

Por tanto el marco de evaluación que vamos a abordar lo describimos como:

Evaluadores (alumnos, expertos en calidad)

$$E = \{e_1, \dots, e_m\}$$

Indicadores

$$I = \{i_1, \dots, i_n\}$$

Dominios de expresión:

$$D = \{N, I, L\}$$

Dominios de expresión para cada indicador:

$$d = \{d_1, \dots, d_j, \dots, d_n\}, d_j \in D$$

Vectores de Utilidad

$$U_i = \{u_{i1}, \dots, u_{ij}, \dots, u_{in}\}, u_{ij} \in d_j$$

Un grupo de evaluadores, E , formado por los alumnos y opcionalmente por expertos en calidad que evalúan un conjunto de indicadores, I , sobre un elemento a evaluar que en nuestro caso será un docente universitario. La información para la evaluación es organizada mediante vectores de utilidad, U , tales que, cada evaluador, e_i , proporciona su vector de utilidad, U_i . En dichos vectores el evaluador, e_i , proporcionará un valor, $u_{ij} \in d_j$ para cada indicador, i_j .

Los valores de los distintos indicadores pueden estar modelados en distintos dominios: Numérico (N), Intervalar (I) y Lingüístico Difuso (L) [20]. El dominio de expresión de cada indicador se decide después de un estudio realizado según modelos de la psicología para definir escalas de valoraciones [6, 17].

2.2. Procesos del Modelo de Evaluación

Una vez conocido el marco de evaluación haremos una breve revisión de los procesos del modelo difuso de decisión en el que se basa el sistema de evaluación. Una descripción completa del modelo puede ser consultada en [12]. El modelo de decisión consta de las dos fases siguientes [16]:

- Fase de agregación: esta fase tiene como objeto obtener un valor colectivo para cada una de los indicadores evaluados.
- Fase de explotación: busca obtener una evaluación global para el docente evaluado.

Dado que el marco evaluador define un contexto heterogéneo con información numérica, intervalar y lingüística, para manejar esta información las fases del

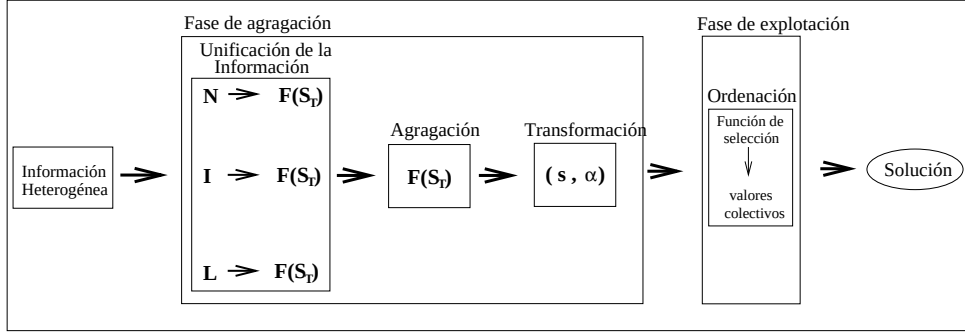


Figura 1: Modelo de Decisión con Información Heterogénea

modelo de decisión se realizarán tal y como se indica en la Figura 1.

2.2.1. Fase de Agregación

Esta fase pretende obtener una valoración global para cada indicador del docente según todos los evaluadores. Para ello se realizarán los siguientes pasos:

1. *Unificar la información.* La información heterogénea se unificará en un conjunto difuso valorado en un dominio lingüístico específico, denominado Conjunto Básico de Términos Lingüísticos (CBTL) y simbolizado por S_T . El CBTL es elegido según las condiciones presentadas en [12]. Para ello, se definen funciones de transformación de información numérica, intervalar y lingüística en conjuntos difusos sobre un CBTL [12].

$$\begin{aligned}\tau : N &\longrightarrow F(S_T) \\ \tau_{IS_T} : I &\longrightarrow F(S_T) \\ \tau_{SS_T} : L &\longrightarrow F(S_T)\end{aligned}$$

2. *Proceso de agregación.* Para cada alternativa, se obtiene un valor colectivo agregando el conjunto difuso valorado en el CBTL que representa la valoración individual que el experto ha asignado a esa alternativa por medio de un operador de agregación [10, 19].

Ejemplo: Consideremos como el CBTL a $S_T = \{N, MP, P, M, A, MA, P\}$ y $F(S_T) = (0, 0, 2, 47, 27, 33, 14)$ como un valor colectivo para un indicador expresado mediante un conjunto difuso valorado en el CBTL. Su transformación a un valor expresado mediante una 2-tupla se obtendría aplicando la función de transformación $\chi : F(S_T) \rightarrow S_T x [-5, 5]$ cuyo resultado sería **(MA, -18)**.

3. *Transformación a 2-tupla.* Sin embargo, este modelado de la información es difícil de entender y

de manejar matemáticamente, por lo que, a continuación transformaremos estos conjuntos difusos en 2-tuplas [11] valoradas en el S_T .

Para mejorar el entendimiento de los valores de evaluación obtenidos y mejorar los procesos matemáticos sobre la información de entrada.

2.2.2. Fase de Explotación

Esta fase tiene como entrada los valores colectivos de cada indicador expresado mediante 2-tuplas lingüísticas. A partir de este vector de utilidad colectivo calcularemos un valor de evaluación utilizando un operador de agregación que pondere de forma adecuada los distintos indicadores que estamos evaluando de forma similar a la utilizada en [18].

En esta fase obtenemos un valor global de calidad, expresado mediante una 2-tupla, del docente a partir de los datos iniciales con los que partíamos. Este es el objetivo principal de esta aplicación, pero a partir de la información que hemos utilizado para obtener este valor global podemos desarrollar nuevos módulos que realicen recomendaciones o realicen informes automáticos sobre el docente.

3. Arquitectura del Sistema Web para la Evaluación de la Calidad Docente Universitaria

Una vez que hemos descrito el modelo teórico que vamos a utilizar para realizar la evaluación del profesorado pasamos a presentar la arquitectura del sistema Cliente Servidor basado en la WEB con tecnología JAVA que realice de forma automática el proceso de evaluación descrito anteriormente.

En la Figura 3 se presenta la arquitectura Cliente Servidor que se ha diseñado para el Sistema de Evaluación Docente. En el Sistema sólo se tienen previstos los siguientes usuarios:

PREGUNTAS			
Borrar	Pregunta	Tipo	Dominio
☐	1.- El profesor informa del programa de la asignatura cuando comienza a impartirla	Enumerado	sí/no
☐	2.- Informa de los objetivos del programa de la asignatura	Lingüístico	Muy bien...Muy regular
☐	3.- El programa contiene información bibliográfica útil para el desarrollo de la asignatura	Lingüístico	Mucha...Escasa
☐	4.- Cuando falta a clase da las razones de su ausencia	Enumerado	sí/no
☐	5.- En general, hace interesante las clases	Lingüístico	Mucha...Escasa
☐	6.- Motiva a los alumnos para que se interesen por la asignatura	Lingüístico	Mucha...Escasa
☐	7.- Utiliza recursos didácticos (transparencias, pizarra, medios audiovisuales, informá	Lingüístico	Muy bien...Muy regular

Valoración de servicios e infraestructuras

Borrar	Pregunta	Tipo	Dominio
☐	8.- Valora las condiciones de espacio, material, equipamiento, etc. en que se desarra	Lingüístico	Muy bueno...Muy Malo

Terminado

Figura 2: Ejemplo de diseño de una encuesta

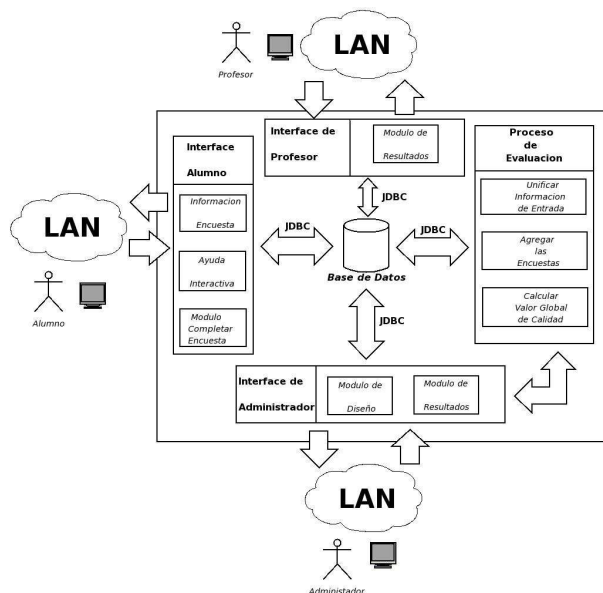


Figura 3: Arquitectura Cliente Servidor del Sistema Web

- **El Administrador:** Se encargará de la gestión de la base de datos, creación de las encuestas y cálculo de los resultados.
- **El Alumno:** Sólo le estará permitido rellenar aquellas encuestas que el administrador ya haya publicado dentro del Sistema.
- **El Experto en Calidad:** Tiene el mismo papel que el alumno en el sistema. En la Figura 3 tiene las mismas capacidades que el actor alumno.
- **El Profesor:** Podrá revisar los resultados de las encuestas que tengan relación con él una vez que

el administrador haya computado los resultados en la base de datos.

Los distintos usuarios del Sistema sólo necesitarán un cliente Web para poder acceder a los módulos que tienen a su disposición. Ahora pasaremos a describir brevemente cada uno de ellos:

- **Base de Datos:** Es donde se almacenará toda la información del Sistema. Los distintos módulos accederán a la misma por medio de conexiones JDBC que es una tecnología JAVA para el proceso de intercambio de información con las bases de datos.
- **Proceso de Evaluación:** Es el módulo principal que realizará el proceso de evaluación docente. En la Figura 1 se puede ver el proceso de forma gráfica.
- **Módulo de Diseño:** Sólo estará disponible para el administrador del Sistema. Con este módulo se diseñan las encuestas que serán almacenadas en la base de datos. En el proceso de diseño de la encuesta el administrador asignará el dominio de la información para cada pregunta y qué conjunto de alumnos y/o expertos en calidad podrán tener acceso a dicha encuesta y el conjunto de profesores que serán evaluados con la encuesta. En la Figura 2 se muestra un ejemplo del aspecto de una encuesta una vez que ha sido diseñada por el administrador.
- **Módulo de Resultados:** Una vez que el administrador decide que los alumnos y/o expertos en calidad han completado su tiempo para rellenar las encuestas, este módulo cierra el proceso de obtención de información de la encuesta y llama al

ENCUESTA			
Preguntas	Respuesta	NS-NC	Rango
1.- El profesor informa del programa de la asignatura cuando comienza a impartirla	si	☐	
2.- Informa de los objetivos del programa de la asignatura	Muy Bien	☐	
3.- El programa contiene información bibliográfica útil para el desarrollo de la asignatura	Mucha	☐	
4.- Cuando falta a clase da las razones de su ausencia	si	☐	
5.- En general, hace interesante las clases	Mucha	☐	
6.- Motiva a los alumnos para que se interesen por la asignatura	Mucha	☐	
7.- Utiliza recursos didácticos (transparencias, pizarra, medios audiovisuales, informáticos, etc.) que ayudan a comprender los contenidos	Muy Bien	☐	
Valoración de servicios e infraestructuras			
Preguntas	Respuesta	NS-NC	Rango
8.- Valora las condiciones de espacio, material, equipamiento, etc. en que se desarrolla la asignatura	Muy Bueno	☐	
9.- Valora el grado de satisfacción con el servicio de secretaría de la Escuela/Facultad	Muy Bueno	☐	
10.- Valora tu grado de satisfacción con el servicio de cafetería/comedor	Muy Bueno	☐	

Terminado

Figura 4: Encuesta para la ser rellenada por un alumno

módulo **Proceso de Evaluación** para calcular todos los datos relativos a la evaluación de la calidad para esa encuesta. Desde ese momento los datos estarán disponibles para los profesores que fueron evaluados con esa encuesta. También este módulo le permite al administrador revisar todos los resultados de las distintas evaluaciones de la calidad que se encuentren almacenados en la base de datos.

Para el profesor, éste módulo sólo presentará los resultados de la evaluación de la calidad de aquellas encuestas que estén almacenadas en la base de datos y que estén referidas a él.

- **Módulo Completar Encuesta:** Con él los alumnos y/o los expertos en calidad podrán contestar a las encuestas que el administrador del Sistema haya definido que son de su interés. El módulo les presentará todas las encuestas que tienen a su disposición y que no han contestado. Podrán seleccionar una de ellas y contestarla. Una vez contestada la encuesta será almacenada en la base de datos y no volverá a estar disponible. Este proceso puede repetirse hasta que no tenga más encuestas que contestar. En la Figura 4 se muestra un ejemplo de cómo se muestra una encuesta para que un alumno y/o experto en calidad pueda contestarla.

Un aspecto que hay que tener muy en cuenta en el proceso de evaluación de la calidad docente es mantener el anonimato de los evaluadores, es decir, no se podrá almacenar ningún tipo de información que permita identificar al evaluador que

rellenó una encuesta. Una vez que el evaluador rellena una encuesta sólo se almacena en la base de datos las contestaciones para ese tipo de encuesta y que el evaluador ya la ha rellenado, para que no se le vuelva a presentar y rellene dos veces una misma encuesta. De esta forma se garantiza el anonimato ya que sólo se sabe que un evaluador en concreto ha rellenado una encuesta pero no que encuesta en concreto.

- **Información Encuesta:** Este módulo le permitirá a los alumnos y/o expertos en calidad obtener toda la información que necesiten para completar la encuesta que estén contestando en un momento dado.

4. Conclusiones

En esta contribución se ha propuesto una arquitectura para un sistema Web, del cual actualmente tenemos un prototipo, basado en tecnología JAVA para realizar el proceso de evaluación de la calidad docente en las Universidades Andaluzas de forma automática como parte de un proyecto de investigación financiado por La Agencia Andaluza de Evaluación (AGAE). Este sistema utilizará un modelo de evaluación capaz de manejar información heterogénea y la procesará siguiendo un modelo difuso de decisión para contextos heterogéneos. En la presentación se mostrará un ejemplo de este primer prototipo.

5. Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos de investigación MTM2005-08982-CO4-03, TIN2004-21700-E y UJA23(UCUA).

Referencias

- [1] P. Bharati and A. Chaudhury. An empirical investigation of decision-making satisfaction in web-based decision support systems. *Decision Support Systems*, (37):187–197, 2004.
- [2] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, P. Perny, and A. Tsoukia's. *Evaluation and Decision Models: A critical perspective*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [3] Carlsson C. and Fuller R. *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*, volume 82 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Studies in Fuzziness and Soft Computing Series, 2001.
- [4] G.B. Devedzic and E. Pap. Multicriteria-multistages linguistic evaluation and ranking of machine tools. *Fuzzy Sets and Systems*, 102:451–461, 1999.
- [5] C. García, L. Martínez, B. Montes, and P.J. Sánchez. An automatical system for evaluating educational skills. *IADAT Journal of Advanced Technology on Education*, 1:52–54, 2003.
- [6] M. Harrower. *Psychodiagnostic Testing: An Empirical Approach*. Springfield Ed. C.C. Thomas, 1965.
- [7] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic terms sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1):43–58, 2000.
- [8] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martinez, F. Mata, and P.J. Sanchez. *A Multi-Granular Linguistic Decision Model for Evaluating the Quality of Network Services*. Intelligent Sensory Evaluation: Methodologies and Applications. Springer, Ruan Da, Zeng Xianyi (Eds.), 2004.
- [9] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, and P.J. Sánchez. A linguistic decision process for evaluating the installation of an ERP system. In *9th International Conference on Fuzzy Theory and Technology*, pages 164–167, Cary (North Carolina) USA, 2003.
- [10] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 79:175–190, 1996.
- [11] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.
- [12] F. Herrera, L. Martínez, and P.J. Sánchez. Managing non-homogeneous information in group decision making. *European Journal of Operational Research*, 166(1):115–132, 2005.
- [13] S. Kurnia and P. Schubert. An assessment of australian web sites in the grocery sector. pages 229–236. IADIS International Conference e-Commerce 2004.
- [14] L. Martínez, J. Liu, J.B. Yang, and F. Herrera. A multi-granular hierarchical linguistic model for design evaluation based on safety and cost analysis. *International Journal of Intelligent Systems*, 20(12):1161–1194, 2005.
- [15] L. Martínez, P.J. Sánchez, C. García, B. Montes, F. Mata, and L.G. Pérez. *Un Sistema de Evaluación Basado en Técnicas de Difusión Difusas*. UCUA, Sevilla, 2005.
- [16] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:199–206, 1997.
- [17] L. Ruiz-Maya. *Metodología estadística para el análisis de datos cualitativos*. CIS, Madrid, 1990.
- [18] P.J. Sánchez, L.G. Pérez, F. Mata, and A.G. López-Herrera. A multi-granular linguistic model to evaluate the suitability of installing an ERP system. *Mathware*, XII(2-3):217–233, 2005.
- [19] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.
- [20] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, 8,8,9:199–249,301–357,43–80, 1975.