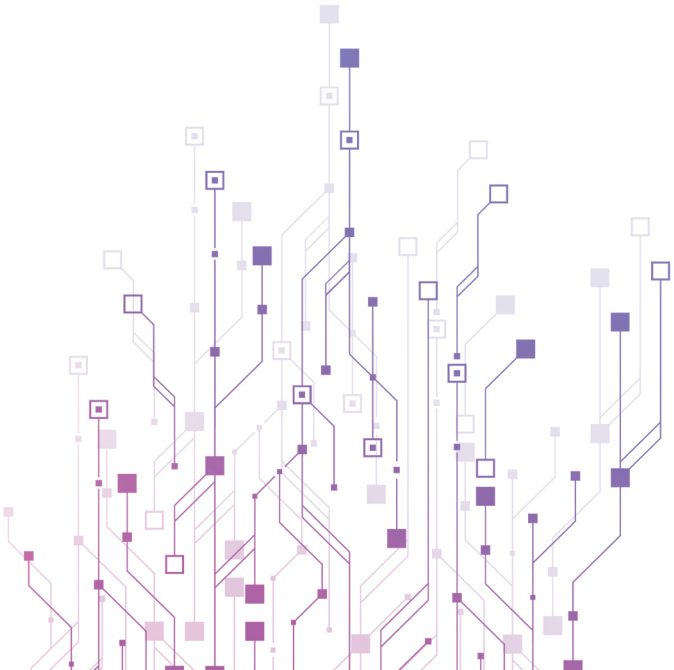
XXIV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF)

Trabajos destacados





Sobre la admisibilidad del preorden basado en el centroide de números difusos

Diego García-Zamora[1][0000−0002−0843−4714], Antonio Francisco Roldán López de Hierro[2][0000−0002−6956−4328], and Humberto Bustince[3][0000−0002−1279−6195]

[1] Department of Mathematics, Universidad de Jaén, Jaén, Spain dgzamora@ujaen.es
[2] Department of Statistics and Operations Research, University of Granada, Granada, Spain aroldan@ugr.es
[3] Statistics, Computer Science and Mathematics Dept., Public University of Navarre, Pamplona, Spain bustince@unavarra.es

Resumen La ordenación de números difusos constituye un pilar fundamental en los procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre. Entre las técnicas de defuzzificación más extendidas se encuentra el método del centroide, el cual asigna un valor crisp representativo a cada número difuso, induciendo así un preorden total. Sin embargo, este método presenta limitaciones teóricas, principalmente la falta de antisimetría, lo que ha impulsado el estudio de los órdenes admisibles como refinamientos del orden parcial de Klir-Yuan. En este trabajo, analizamos la admisibilidad del preorden basado en el centroide. En primer lugar, nos inspiramos en integrales de Riemann y Lebesgue para deducir dos fórmulas generales para calcularlo. En segundo lugar, proponemos un contraejemplo que prueba que el centroide no es, en términos generales, un orden admisible, ni siquiera en el espacio de los números difusos continuos. Finalmente, demostramos formalmente que el centroide induce un preorden admisible en la familia de los números difusos trapezoidales, y extendemos estos hallazgos a los conjuntos difusos intervalares de tipo 2.

Keywords: Números difusos · Centroide · Órdenes admisibles · Números difusos trapezoidales.

1. Introducción

Este artículo resume el estudio de la admisibilidad del centroide en diferentes familias de conjuntos difusos realizado en [1].

El centroide de un número difuso representa su centro de gravedad y se utiliza frecuentemente para convertir información difusa en valores crisp [1]. Un reto natural consiste en determinar si este método respeta el orden parcial natural de Klir-Yuan [2], el cual motivó la definición de los órdenes admisibles [3].

2. Preliminares

Decimos que un preorden para números difusos es *admisible* si es un preorden (relación binaria reflexiva y transitiva) total que refina el orden de Klir-Yuan ($\leq_{KY}$), donde $A \leq_{KY} B$ si se cumple $A_\alpha^- \leq B_\alpha^-$ y $A_\alpha^+ \leq B_\alpha^+$ para todo $\alpha \in]0,1]$.

Definition 1 (Area). *Dado un número difuso* $A \in \mathrm{FN}(\mathbb{R})$*, el* area bajo el mismo *se define mediante:*

$$S(A) = \int_{\mathbb{R}} A(x)dx = \int_{A_0^-}^{A_0^+} A(x)dx.$$

Notemos que si $A \in \mathrm{FN}(\mathbb{R})$ cumple $S(A) = 0$, entonces A es necesariamente un número crisp. En tal caso A se identifica con el número crisp $a \in \mathbb{R}$ que cumple $A(x) = 1 \iff x = a$.

Definition 2 (Centroide). *Dado un número difuso* $A \in \mathrm{FN}(\mathbb{R})$*, su* centroide *se define por:*

$$g(A) = \begin{cases} a, & \text{if } S(A) = 0, \\ \dfrac{\int_{A_0^-}^{A_0^+} xA(x)dx}{\int_{A_0^-}^{A_0^+} A(x)dx}, & \text{if } S(A) \neq 0. \end{cases}$$

El centroide determina el siguiente preorden:

Definition 3 (Centroid preorder). *Dados* $A, B \in \mathrm{FN}(\mathbb{R})$*,* $A \leq_g B$ *cuando* $g(A) \leq g(B)$*.*

3. Resultados de Admisibilidad

3.1. Dos interpretaciones del centroide basadas en las integrales de Riemann y de Lebesgue

La interpretación de Riemann define el centroide $g(A)$ de un número difuso A como el límite de una suma ponderada basada en una partición del soporte $[a, b] = A_0$. Matemáticamente, se expresa como:

$$g(A) = a + (b - a) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{A(x_k^n)}{\sum_{j=1}^{n} A(x_j^n)}$$

donde $x_k^n = a+(b-a)\frac{k}{n}$ para $k = 0, 1, ..., n$ representa los puntos de la partición en el intervalo del soporte. Esta fórmula es una consecuencia directa de la definición de la integral de Riemann aplicada a las funciones de pertenencia acotadas que definen el número difuso. Esta expresión garantiza que el valor del centroide siempre se encuentra contenido dentro del soporte del número difuso, y permite expresar el centroide como el valor esperado del número difuso, proporcionando una base sólida para su uso como representante crisp del conjunto.

A diferencia de la visión de Riemann, la interpretación de Lebesgue utiliza los α-cortes del número difuso para expresar el centroide como el límite de una razón de sumas ponderadas. Matemáticamente, si consideramos una partición

del intervalo de niveles de pertenencia $\alpha \in [0,1]$, el centroide $g(A)$ viene dado por:

$$g(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} g(A_{n,k}) S(A_{n,k})}{\sum_{k=1}^{n-1} S(A_{n,k})}$$

donde:$A_{n,k}$ representa el α-corte del número difuso en el nivel α_k^n, $g(A_{n,k})$ es el punto medio del intervalo que forma dicho α-corte, y $S(A_{n,k})$ es la longitud de ese intervalo específico. Esta formulación basada en la teoría de la medida de Lebesgue permite extraer conclusiones fundamentales. En primer lugar, permite interpretar el centroide no solo como un centro de masa geométrico, sino específicamente como el promedio de los puntos medios de todos sus α-cortes, ponderados por la amplitud de cada uno. Esta visión premite justificar los métodos prácticos de defuzzificación que se centran en el análisis de niveles de corte. Además, esta interpretación facilita la construcción de contraejemplos. Al ver el centroide como un promedio de puntos medios, se hace evidente que variaciones drásticas en la forma de las funciones de pertenencia (aunque respeten el orden de Klir-Yuan) pueden desplazar el "peso"del promedio de forma que se viole la admisibilidad.

3.2. Inadmisibilidad en el Caso General

Mediante una interpretación lebesguiana, el centroide puede verse como un promedio ponderado de los puntos medios de los α-cortes [1]. Utilizando esta propiedad, aportamos un contraejemplo con dos números continuos A y B tales que $A \leq_{KY} B$ pero $g(A) > g(B)$ (específicamente 2/3 frente a $\approx 0{,}624$) [1]. Concretamente, podemos considerar A y B definidos como sigue (ver Fig. 1):

$$A(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

$$B(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x \leq 0{,}2 \\ 0{,}2 & \text{if } 0{,}2 \leq x \leq 0{,}9 \\ 8x - 7 & \text{if } 0{,}9 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

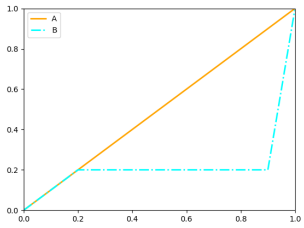


Figura 1. Ejemplo de la no admisibilidad del preorden basado en el centroide

Esto prueba que el centroide no es admisible para la familia general de números difusos continuos.

3.3. Admisibilidad en TFNs e IT2FS

Para un número difuso trapezoidal $T(a, b, c, d)$, el centroide se reduce a la expresión analítica:

$$g(T) = \frac{1}{3}\left(a + b + c + d + \frac{ab - cd}{c + d - a - b}\right)$$

Teorema: El centroide determina un preorden admisible sobre la familia de números difusos trapezoidales. La prueba se basa en demostrar que $g(T)$ es monótona creciente respecto a cada uno de sus parámetros (a, b, c, d) [1]. Este resultado se extiende a conjuntos difusos de tipo 2 de intervalo (IT2FS) con membresías trapezoidales, utilizando órdenes admisibles para intervalos.

4. Conclusiones

El centroide es una herramienta robusta de ordenación para TFNs e IT2FS al ser admisible en estas familias, aunque no sea generalizable a todos los números difusos continuos [1]. Estos hallazgos validan su uso en sistemas de control y toma de decisiones basados en modelos trapezoidales.

Acknowledgments. Los autores expresan su agradecimiento a su universidad. Este trabajo forma parte del proyecto I+D+i C-EXP-153-UGR23, financiado por la Consejería de Universidad, Investigación e Innovación de la Junta de Andalucía y por la Unión Europea a través del Programa FEDER Andalucía 2021-2027, así como por el proyecto de investigación PID2022-136627NB-I00 (MCIN/AEI/10.13039/5011 00011033/FEDER, UE).

Disclosure of Interests. Los autores no tienen ningún conflicto de intereses.

Referencias

1. García-Zamora, D., Hierro, A.F.R.L.d., Bustince, H.: A note on the admissibility of the centroid-based preorder for fuzzy numbers. Computational and Applied Mathematics **45**(4) (Dec 2025). https://doi.org/10.1007/s40314-025-03500-8
2. Klir, G.J., Yuan, B.: Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (1995)
3. Zumelzu, N., Bedregal, B., Mansilla, E., Bustince, H., Díaz, R.: Admissible orders on fuzzy numbers. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **30**(11), 4788–4799 (2022)

A Fuzzy Multimodal Framework for Interpretable Treatment Adherence Modeling from IoT Data

David Díaz-Jiménez[1⋆], José L. López-Ruiz[2], Juan F. Gaitán-Guerrero[2], and Macarena Espinilla[2]

[1] Department of Computer Systems, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Sistemas Informáticos (ETSISI), Universidad Politécnica de Madrid (UPM), Madrid, Spain
david.djimenez@upm.es
[2] Computer Science Department, Universidad de Jaén (UJA), Jaén, Spain
{llopez,jgaitan,mestevez}@ujaen.es

Abstract. Treatment adherence in chronic diseases is inherently multidimensional and difficult to quantify using traditional instruments. This paper presents a framework in which adherence is modelled from heterogeneous Internet of Things (IoT) data by combining human activity recognition, fuzzy data fusion, and behavioural analysis. The approach integrates explicit treatment-related activities with contextual behavioural markers, enabling a continuous and interpretable representation under uncertainty. The resulting model provides clinically meaningful adherence indicators while remaining compatible with modern artificial intelligence (AI) pipelines.

Keywords: Treatment adherence · Fuzzy logic · Internet of Things · Human activity recognition · Chronic disease management · Explainable AI

1 Introduction

Long-term management of chronic diseases such as diabetes depends critically on sustained adherence to therapeutic recommendations. In practice, adherence extends beyond medication intake and involves a set of interrelated routines, including diet, physical activity, sleep, and hygiene. Capturing this complexity remains a challenge, particularly in real-world environments.

Internet of Things (IoT)-based monitoring systems offer an opportunity to observe patient behaviour continuously through wearable and ambient sensors. However, translating raw sensor streams into robust and clinically meaningful indicators is non-trivial due to noise, heterogeneity, and temporal variability.

The framework presented in [1] addresses this problem by modelling adherence as a graded construct derived from multimodal observations. This paper provides a concise and structured overview of that methodology, emphasising its implications for interpretable artificial intelligence (AI) in healthcare.

⋆ Corresponding author

2 Background and Motivation

Self-reported adherence instruments remain widely used due to their simplicity and low cost, but they only provide a partial and often static view of patient behaviour. Their limitations become particularly evident in long-term therapies, where adherence fluctuates over time. According to the World Health Organization, adherence averages around 50% in developed countries [2], reinforcing the need for more reliable monitoring strategies.

In contrast, sensor-based approaches enable continuous observation of daily routines. Early work in smart environments showed that behavioural patterns can be inferred from ambient signals [3, 4], paving the way for digital health systems in which behaviour is treated as a proxy for clinical state rather than as isolated events.

However, these approaches are not without challenges. Sensor data are inherently noisy, heterogeneous, and context-dependent. As a result, many existing solutions struggle with uncertainty and limited interpretability. Fuzzy data fusion has been proposed as a suitable mechanism to address these issues, allowing gradual reasoning over imperfect signals [5]. More recently, large language models have been explored to generate higher-level interpretations of behavioural data [6].

Taken together, these developments point towards hybrid frameworks that combine data-driven recognition with transparent reasoning. In this context, adherence is better understood as a dynamic and explainable state, rather than a binary outcome.

3 Proposed Methodology

The framework models adherence as the combination of two complementary components: explicit treatment-related activities and behavioural markers. Explicit activities include medication intake, physical activity, nutrition, sleep, and hygiene, each defined through sensor-derived indicators. Behavioural markers capture contextual aspects such as mobility, daily regularity, sleep quality, and sedentary behaviour.

Sensor observations are first transformed into fuzzy membership degrees using linguistic variables. Temporal smoothing is applied to reduce the impact of transient noise, and aggregation operators combine information from multiple sensors. A generic observation $m_i = \{B_j, v_i, t_i\}$ is mapped into a membership degree $\mu_A(v_i) \in [0, 1]$, where A denotes a linguistic concept such as *near*, *active*, or *resting*. The global adherence score is then defined as:

$$S = \frac{\sum_j w_j \cdot \mu_j}{\sum_j w_j}, \tag{1}$$

where μ_j denotes the adherence degree for activity j and w_j its clinical relevance.

In addition, the framework incorporates anomaly detection mechanisms that identify deviations from expected routines. These deviations can be temporal,

frequency-based, or behavioural. This distinction is important because delayed medication, skipped activity, and progressive reduction in mobility have different clinical meanings and should not be collapsed into the same non-adherence label.

4 Temporal Activity Matching

A relevant feature of the framework is its compatibility with activities inferred by machine-learning or deep-learning models. When a recognition model detects an event $a_k = \{label_k, t_k^s, t_k^e\}$, this event can be compared with the therapeutic window in which the activity is expected to occur. The matching is not crisp, but fuzzy:

$$\mu_{A_j}(a_k, W_r) = \frac{|I_k \cap [\sigma_r^s - \varepsilon, \sigma_r^e + \varepsilon]|}{|\sigma_r^e - \sigma_r^s|} \cdot \max\left(0, 1 - \frac{|t_k^s - \sigma_r^s|}{\Delta}\right), \tag{2}$$

where $I_k = [t_k^s, t_k^e]$, $W_r = [\sigma_r^s, \sigma_r^e]$ is the prescribed window, ε is a tolerance margin, and Δ controls the penalty for delayed execution.

This formulation is useful in everyday monitoring because routines are rarely exact. A meal or medication event slightly outside the expected interval should not be treated as equivalent to a completely missed activity. The fuzzy temporal degree provides a more realistic representation of partial adherence.

5 Experimental Insights

The methodology was evaluated through simulated scenarios derived from real sensor deployments. Three representative profiles were considered: high, moderate, and low adherence. Each profile reflects different levels of behavioural stability and routine consistency. The results show that the model produces coherent and interpretable adherence indicators across profiles. High-adherence scenarios exhibit stable patterns, whereas low-adherence cases present significant variability and deviations. Moderate profiles combine partially fulfilled activities with irregular contextual markers.

Each day can be represented as a multidimensional fuzzy adherence vector:

$$\mathbf{S}_D(d) = (\mu_{med}, \mu_{act}, \mu_{nut}, \mu_{sleep}, \mu_{hyg}, \mu_{mob}, \mu_{reg}, \mu_{sleepQ}, \mu_{sed}). \tag{3}$$

This representation makes it possible to inspect which dimensions explain the final score. For instance, a patient may show high medication adherence but low sleep quality and reduced mobility. In a binary model, this situation could be hidden; in the proposed framework, it becomes a partial adherence profile with clinically relevant warning signs.

6 Discussion

A central aspect of the framework is how uncertainty is propagated from raw sensing to high-level indicators. Rather than forcing sensor observations into rigid categories, fuzzy membership functions allow the model to preserve intermediate

evidence. This is particularly valuable in domestic environments, where signals are noisy and routines vary naturally across days.

From an AI perspective, the framework combines data-driven recognition with symbolic reasoning. Activity recognition models can provide candidate events, while the fuzzy layer transforms them into interpretable adherence indicators. This hybrid structure enhances transparency without excluding modern machine-learning pipelines.

The inclusion of behavioural markers further extends the model beyond task-level compliance. Adherence is not only a question of whether the patient performs a prescribed action, but also whether daily life remains organised enough to sustain treatment over time. Progressive changes in sleep regularity, mobility, or sedentarism may therefore act as early signs of deterioration.

The framework also has limitations. The validation scenarios are based on simulated profiles derived from real deployments, so long-term validation in diverse homes and clinical populations is still required. In addition, the weighting scheme should be personalised, since the relevance of each activity depends on the treatment plan, comorbidities, and clinical objectives.

7 Conclusions

This paper summarises a fuzzy multimodal framework for modelling treatment adherence from IoT data, integrating explicit activities, behavioural context, temporal matching, and anomaly detection within a unified and interpretable structure. By representing adherence as a continuous and multidimensional construct, the approach provides a practical alternative to traditional binary assessments and aligns well with modern AI-driven healthcare systems. Future work will address real-world validation, model personalisation, and integration with predictive and generative AI for patient-centred decision support.

References

1. Díaz-Jiménez, D., López-Ruiz, J.L., Gaitán-Guerrero, J.F., Espinilla, M.: Understanding patient adherence through sensor data: An integrated approach to chronic disease management. Applied Sciences 15, 13226 (2025)
2. World Health Organization: Adherence to long-term therapies: Evidence for action. World Health Organization, Geneva (2003)
3. Cook, D.J., Das, S.K.: Smart Environments: Technology, Protocols and Applications. Wiley, Hoboken (2013)
4. Rashidi, P., Cook, D.J.: Mining and monitoring patterns of daily routines for assisted living in real world settings. In: Proceedings of the ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (2011)
5. Fernández-Basso, C., Díaz-Jiménez, D., López-Ruiz, J.L., Espinilla, M.: Fuzzy processing applied to improve multimodal sensor data fusion to discover frequent behavioural patterns for smart healthcare. Information Fusion 123, 103307 (2025)
6. Gaitán-Guerrero, J.F., Martínez-Cruz, C., Espinilla, M., Díaz-Jiménez, D., López, J.L.: A novel fine-tuning and evaluation methodology for large language models on IoT raw data summaries. Computer Methods and Programs in Biomedicine 269, 108878 (2025)

Marco difuso sensible al contexto para el reconocimiento interpretable de actividades humanas bajo incertidumbre*

Juan F. Gaitán-Guerrero[1,**], David Díaz-Jiménez[2], Carmen Martínez-Cruz[3], José L. López-Ruiz[1], Antonio P. Albín-Rodríguez[1], and Macarena Espinilla[1]

[1] Universidad de Jaén, Jaén, España
{jgaitan,llopez,aalbin,mestevez}@ujaen.es
[2] Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España
david.djimenez@upm.es
[3] Universidad de Granada, Granada, España
cmcruz@ugr.es

Resumen Pese al creciente interés por la robustez y la explicabilidad, la mayoría de los sistemas actuales sigue tratando la incertidumbre como una molestia a minimizar en lugar de como una característica estructural a modelar. Este trabajo propone un cambio conceptual: situar la lógica difusa como paradigma central para diseñar sistemas de reconocimiendo de actividades humanas (HAR) interpretables, adaptativos y conscientes de la incertidumbre. El marco teórico integra el razonamiento difuso desde la abstracción de sensores y el modelado del contexto hasta la inferencia de actividades y las explicaciones en lenguaje natural, ilustrándose mediante un caso de uso de monitorización en cuidados de personas mayores. El enfoque propuesto permite establecer sistemas mejor alineados con la complejidad del comportamiento humano y las exigencias de una IA centrada en las personas.

Keywords: Reconocimiento de Actividades · Lógica Difusa · Modelado de la Incertidumbre · IA Explicable · Sistemas Sensibles al Contexto.

1. Introducción y motivación

El HAR se ha convertido en una capacidad fundamental de los sistemas inteligentes desplegados en hogares sensorizados, con aplicaciones en vida asistida por el entorno, asistencia sanitaria remota y automatización personalizada. Sin embargo, la transición de entornos controlados al uso cotidiano expone una limitación persistente y poco abordada: la incertidumbre [1]. Esta se manifiesta de múltiples formas:lecturas ruidosas o incompletas de sensores, variabilidad

* Resumen del trabajo publicado en *Proceedings of the 59th Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS-59)*, 2026, pp. 1960–1969. URI: https://hdl.handle.net/10125/111631.

** Corresponding author: jgaitan@ujaen.es

individual al ejecutar la misma actividad, transiciones difusas entre acciones, o comportamientos coexistentes que se escapan de una categorización nítida y constituye, más que una perturbación ocasional, una condición estructural del HAR en el mundo real.

Los enfoques dominantes manejan mal esta condición. Los modelos guiados por datos, especialmente el aprendizaje profundo, logran resultados notables en conjuntos de referencia, pero dependen de grandes volúmenes de datos etiquetados, generalizan mal y operan como cajas negras difíciles de interpretar [7]. En el extremo opuesto, los sistemas basados en conocimiento ofrecen transparencia, pero carecen de flexibilidad para integrar la diversidad conductual o entradas ruidosas. La lógica difusa proporciona un mecanismo bien establecido, aunque infrautilizado, para representar conceptos vagos o parciales mediante descriptores lingüísticos y grados de pertenencia. Sin embargo, en la literatura sobre HAR su uso se ha limitado a roles auxiliares, tales como ajuste de umbrales, o suavizado de la incertidumbre en lugar de adoptarse como mecanismo fundamental de razonamiento [5]. El trabajo propone situar la lógica difusa como principio estructurador central para sistemas HAR que operan bajo incertidumbre, como un marco modular para la integración sistemática del razonamiento difuso en todas sus etapas.

2. Caracterización de la incertidumbre en HAR

El comportamiento humano es variable, sensible al contexto y rara vez reducible a estados discretos y repetibles, surgiendo la necesidad de distinguir cinco fuentes de datos que interactúan entre sí: (i) *sensoriales*, debido a mediciones imprecisas, pérdida de señal, oclusiones o interferencias; (ii) *contextuales*, por la ambigüedad de las condiciones ambientales o espaciales; (iii) *conductuales*, por las diferencias en cómo los individuos realizan tareas similares; (iv) *temporales*, ya que las transiciones entre actividades rara vez son discretas; y (v) *semánticas*, que refleja la vaguedad de definiciones de actividades como *limpiar* o *descansar*.

De esta forma, una pequeña desviación en la rutina de un usuario combinada con un cambio contextual puede confundir incluso a un sistema bien entrenado. Así, sin razonar bajo incertidumbre, los sistemas HAR se vuelven frágiles y excesivamente dependientes de patrones no flexibles. La incertidumbre debe tratarse, por tanto, como una propiedad de primer orden que ha de modelarse, no como ruido a suprimir. Esta convicción motiva el uso de la lógica difusa como formalismo capaz de representar confianza graduada, categorías lingüísticas y razonamiento basado en reglas [2].

3. Arquitectura del marco propuesto y caso de uso

El marco se organiza en cuatro etapas modulares que contribuyen a la capacidad global del sistema para razonar bajo imprecisión, adaptarse a la variación y ofrecer resultados interpretables.

1) Abstracción y preprocesamiento de sensores. Las lecturas brutas de detectores de movimiento, contactos de puertas, monitores ambientales y dispositivos vestibles se traducen en variables lingüísticas difusas con funciones de pertenencia solapadas: el movimiento como *bajo*, *moderado* o *alto*; la temperatura como *fría*, *confortable* o *cálida*; la proximidad RSSI como *cerca* o *lejos*.

2) Representación del contexto. Las variables ambientales y temporales — ubicación, ventanas de tiempo, condiciones ambientales — se representan asimismo como conjuntos difusos (*principalmente en la cocina*, *cerca del atardecer*). La variabilidad individual se capta mediante *perfiles de usuario difusos* que actúan como modificadores temporales o conductuales.

3) Inferencia difusa de actividad. En el núcleo se sitúa un motor de inferencia que combina descriptores difusos mediante reglas como *SI el movimiento es moderado Y la sala es cocina Y la hora es próxima al mediodía ENTONCES la actividad es cocinar (confianza alta)*. Pueden dispararse varias reglas a la vez, generando hipótesis ponderadas que reflejan grados de confianza en lugar de decisiones binarias. Las hipótesis coexistentes están soportadas explícitamente: una confianza de 0.7 en *cocinar* y 0.4 en *limpiar* puede llevar al sistema a posponer la acción, solicitar confirmación o preparar ambas vías de respuesta. Las reglas pueden inspeccionarse, refinarse y ampliarse, conciliando explicabilidad y mantenimiento a largo plazo [4].

4) Explicación de la decisión y gestión de la salida. La naturaleza basada en reglas de inferencia permite explicaciones fundamentadas en la propia lógica interna del sistema, p. ej. *"Actividad clasificada como cocinar (confianza: 0.76), basada en movimiento moderado en la cocina durante la mañana tardía."* Cuando la confianza es baja o varias actividades son igualmente probables, el sistema puede posponer la automatización, lanzar un aviso o pedir aclaraciones, cerrando el ciclo entre sensado, razonamiento e interacción [6].

Un escenario representativo de vida asistida por el entorno ilustra el marco: una residente de avanzada edad que vive sola en un apartamento equipado con sensores ambientales y un dispositivo vestible. A las 7:45 h, un movimiento bajo en el dormitorio seguido de movimiento moderado en el pasillo y la apertura de una puerta hacia la cocina activa parcialmente la regla de preparación del desayuno (confianza 0.65) y la regla de despertarse (0.45). El módulo de decisión puede esperar más evidencia antes de notificar. La salida es interpretable: *"La residente probablemente está preparando el desayuno (0.65), por movimiento moderado en la cocina a primera hora de la mañana."* Si a las 10:00 h no se detecta actividad en la cocina y el movimiento en el dormitorio sigue siendo bajo, se genera una alerta suave que sugiere revisar el patrón, respetando la variabilidad personal y permitiendo a la vez la intervención temprana [3].

4. Consideraciones prácticas y trabajo futuro

La implementación implica la *creación* de la base de reglas mediante diseño participativo con expertos, cuidadores y usuarios finales, complementada con técnicas semiautomáticas; el *mantenimiento* mediante herramientas de visualización y edición interactiva que permiten actualizaciones incrementales sin reentrenamiento completo; y la *validación* más allá de la precisión, considerando robustez bajo incertidumbre, interpretabilidad y confianza del usuario.

La contribución central consiste en situar la incertidumbre como una propiedad estructural de primer orden y la lógica difusa como su formalismo natural en HAR. Frente a modelos que requieren reentrenamiento cuando cambian los entornos, una base de reglas difusas puede extenderse incrementalmente, algo especialmente valioso en despliegues reales donde las rutinas evolucionan y se incorporan nuevos sensores; al tratar la incertidumbre como un activo representacional e inferencial, el marco da soporte a sistemas HAR más adaptables, transparentes y sensibles al contexto, especialmente adecuados para cuidados de personas mayores, monitorización remota y tecnologías asistenciales. Como trabajo futuro, se plantea la validación longitudinal, el desarrollo de herramientas de diseño participativo, la integración neurodifusa preservando la interpretabilidad y la extensión a escenarios multiusuario.

Acknowledgments. Este resultado ha sido respaldado por el proyecto PID2021-127275OB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "FEDER, una manera de hacer Europa".

Disclosure of Interests. Los autores declaran no tener intereses en conflicto.

Referencias

1. Rodríguez, N.D.: Semantic and Fuzzy Modelling for Human Behaviour Recognition in Smart Spaces, vol. 23. IOS Press (2016)
2. Yager, R.R.: Using fuzzy measures for modeling human perception of uncertainty in AI. Eng. Appl. Artif. Intell. **87**, 103228 (2020)
3. Gayathri, K., Easwarakumar, K., Elias, S.: Fuzzy ontology based activity recognition for assistive health care using smart home. Int. J. Intell. Inf. Technol. **16**(1), 17–31 (2020)
4. Demongivert, C., Bouchard, K., Gaboury, S., et al.: Handling of labeling uncertainty in smart homes using generalizable fuzzy features. In: Proc. Conf. on Information Technology for Social Good, pp. 248–253 (2021)
5. Arrotta, L., Civitarese, G., Bettini, C.: Knowledge infusion for context-aware sensor-based human activity recognition. In: IEEE SMARTCOMP, pp. 1–8 (2022)
6. Dubey, A., Lyons, N., Santra, A., Pandey, A.: XAI-BayesHAR: A novel framework for HAR with integrated uncertainty and Shapley values. In: IEEE ICMLA, pp. 1281–1288 (2022)
7. Lu, Z.: Deep learning-based human activity recognition algorithms: A comparative study. In: IEEE ICIPCA, pp. 1041–1046 (2023)

Companions of MTL logics for reasoning about acceptable and tolerable propositions

Joan Gispert[1], Lluís Godo[2], and Francesc Esteva[2]

[1] Dept. Maths and Computer Science, Univ. de Barcelona, 08007 Barcelona, Spain
Email: jgispert@ub.edu
[2] Artificial Intelligence Research Institute (IIIA - CSIC)
Campus de la Univ. Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Spain.
Email: {esteva,godo}@iiia.csic.es

1 Introduction

Systems of mathematical fuzzy logic are formal systems designed to handle *graded truth*, making them particularly suitable for reasoning with imprecise or vague information. Their defining feature is the interpretation of formulas over a linearly ordered scale of truth values, typically within the real unit interval $[0, 1]$. This framework is especially well-suited for capturing the gradual nature of vagueness. A significant body of work on fuzzy logics has been developed within the framework of mathematical fuzzy logic (MFL) [2, 1].

In MFL, deductive systems have been traditionally defined based on the principle of *full truth-preservation*, where a formula is considered a consequence of a set of premises if, under every algebraic evaluation that assigns the truth value 1 (absolute truth) to all premises, the conclusion also receives the value 1. This generalizes the classical notion of logical consequence.

In this paper we consider yet a different type of companion logics, namely logics that preserve the notion of acceptability. We call a formula φ *acceptable*, for a given evaluation e, when φ is more true than false, that is, when $e(\varphi) > e(\neg\varphi)$. We also consider the dual notion, a formula φ is called *tolerable* when $\neg\varphi$ is not acceptable, i.e. when $e(\neg\neg\varphi) \geq e(\neg\varphi)$. We study the properties of these *acceptability* and *tolerance-preserving* companions and their relationship to their truth-preserving companions, as well as their axiomatisation in some particular cases. Throughout this paper we assume the MTL logics L we deal with are standard complete, that is, they are complete with respect to a family of standard L-algebras.

This short paper is a summary of part of the recently published article [4].

2 Logics of 'acceptance' and 'tolerance'

The most distinctive feature of any system of fuzzy logic is that the notion of truth (and falsity) is a matter of degree. In a sense, in each interpretation e of a logic L, one can consider that every proposition φ is assigned a degree of being true, represented by the value $e(\varphi)$ and a degree of being false, represented by

the value $e(\neg\varphi)$. Nonetheless, notice that the situation may be non-symmetric if the logic L is not involutive, that is, the degree in which $\neg\varphi$ is false, $e(\neg\neg\varphi)$, may be different from (bigger than, in fact) the degree in which φ is true, i.e. $e(\neg\neg\varphi) > e(\varphi)$.

Although the context is somewhat different, we take inspiration from [3] and consider that a proposition can be *accepted* (as if it were true) when it is "more true than false". In other words, we propose to define that a proposition φ is *accepted* by a given interpretation e whenever $e(\varphi) > e(\neg\varphi)$, or conversely, to say that the interpretation e accepts φ. Then, the question we pose ourselves is which is the logic that captures reasoning with accepted propositions.

Definition 1. *Let L be a finitary expansion of MTL which is complete with respect to a class $\mathcal{C}_L$ of standard L-algebras on $[0,1]$. Further let $[\mathbf{0},\mathbf{1}]_* \in \mathcal{C}_L$ be a standard L-algebra and let e be a $[\mathbf{0},\mathbf{1}]_*$-interpretation. We say that e* accepts *φ, written $e \models^{acc} \varphi$, whenever $e(\varphi) > e(\neg\varphi)$. The corresponding notion of consequence relation, denoted $\models^{acc}_L$, is accordingly defined as follows:*

$$\Gamma \models^{acc}_L \varphi \quad \textit{if,} \quad \begin{array}{l}\textit{for any } [\mathbf{0},\mathbf{1}]_* \in \mathcal{C}_L \textit{ and any } [0,1]_*\textit{-evaluation } e,\\ \textit{if } e \models^{acc} \psi \textit{ for any } \psi \in \Gamma\textit{, then } e \models^{acc} \varphi \textit{ as well.}\end{array}$$

The following are some interesting properties of $\models^{acc}_L$ for any L being an extension of MTL:

Lemma 1. *The following properties of $\models^{acc}_L$ hold:*

1. *Consistency: $\models^{acc}_L \top$, $\not\models^{acc}_L \bot$*
2. *Paracompleteness: $\not\models^{acc}_L \varphi \vee \neg\varphi$, unless L has not a negation fixpoint.*
3. *Explosiveness: $\varphi, \neg\varphi \models^{acc}_L \bot$*
4. *Closure under conjunction:*
   (i) $\varphi, \psi \models^{acc}_L \varphi \wedge \psi$
   (ii) $\varphi, \psi \models^{acc}_L \chi$ iff $\varphi \wedge \psi \models^{acc}_L \chi$
5. *If $\models_L \varphi \to \psi$ then $\varphi \models^{acc}_L \psi$.*

Note that the above Item 5 admits an equivalent interesting reading, namely that: the restricted Modus Ponens rule:

$$\frac{\varphi, \quad \vdash_L \varphi \to \psi}{\psi}$$

is sound for $\models^{acc}_L$. Moreover, $\models^{acc}_L$ is interpretable in $\models_L$, indeed the following equivalence holds:

$$\varphi \models^{acc}_L \psi \quad \text{iff} \quad \psi \to \neg\psi \models_L \varphi \to \neg\varphi \tag{1}$$

It is also very natural to consider for a proposition φ a dual notion of being acceptable: we define φ is *tolerated* when $\neg\varphi$ is not acceptable. In other words, in the setting of a core fuzzy logic L, we can say that an L-evaluation

e tolerates φ when $e(\neg\varphi) \leq e(\neg\neg\varphi)$.[1] This leads to the following notion of tolerance-preserving logic.

Definition 2. *$\varphi \models^{tol}_L \psi$ if, for any L-evaluation e, if $e(\neg\neg\varphi) \geq e(\neg\varphi)$ then $e(\neg\neg\psi) \geq e(\neg\psi)$.*

It is very easy to check that $\models^{tol}$ is interpretable in both the acceptance logic $\models^{acc}$ and the logic L itself. Indeed, the following equivalences hold:

(i) $\varphi \models^{tol}_L \psi$ iff $\neg\psi \models^{acc}_L \neg\varphi$
(ii) $\Gamma \models^{tol}_L \psi$ iff $\{\neg\varphi \to \neg\neg\varphi \mid \varphi \in \Gamma\} \models_L \neg\psi \to \neg\neg\psi$

The logic $\models^{tol}_L$ has similar properties as $\models^{acc}_L$, but there is a main difference: while $\models^{acc}_L$ is not paraconsistent (it is explosive), $\models^{tol}_L$ is paraconsistent.

Lemma 2. *The following properties of $\models^{tol}_L$ hold:*

1. *Consistency: $\models^{tol}_L \top$, $\not\models^{tol}_L \bot$*
2. *Excluded middle: $\models^{tol}_L \varphi \vee \neg\varphi$*
3. *Paraconsistency: $\varphi, \neg\varphi \not\models^{tol}_L \bot$, unless L has not a negation fixpoint*
4. *Closure under conjunction:*
   (i) $\varphi, \psi \models^{tol}_L \varphi \wedge \psi$
   (ii) $\varphi, \psi \models^{tol}_L \chi$ iff $\varphi \wedge \psi \models^{tol}_L \chi$
5. *if $\models_L \varphi \to \psi$ then $\varphi \models^{tol}_L \psi$. (i.e. $\models^{\leq}_L \subseteq \models^{tol}_L$)*

It also follows that, if $\neg$ has a fixpoint, then $\models^{tol}_L$ is the paraconsistent (and not paracomplete) version of $\models^{acc}_L$, and vice versa, $\models^{acc}_L$ is the paracomplete (and not paraconsistent) version of $\models^{tol}_L$.

3 Axiomatisation of the acceptance and tolerance logic companions of a Δ-core fuzzy logic

The axiomatization of $\models^{acc}_L$ is rather simple in case the Δ connective is available. Indeed, let L be a Δ-core fuzzy logic such that the Baaz-Monteiro Δ operator is either primitive or definable, for instance MTL_Δ (primitive) or Gödel logic with involution $\mathrm{G}_\sim$ (definable). We further assume that L only has Modus Ponens and necessitation for Δ as inference rules, and that is complete with respect to a corresponding class of standard algebras $\mathcal{C}_L$.

In this logic we introduce the following definable connective:

$$\boxdot\varphi := \Delta(\neg\varphi \to \varphi) \wedge \neg\Delta(\varphi \to \neg\varphi).$$

Note that, for any standard interpretation e, we have (i) $e(\boxdot\varphi) = 1$ iff $e(\neg\varphi) < e(\varphi)$, and (ii) $e(\Delta\varphi) > e(\neg\Delta(\varphi))$ iff $e(\varphi) = 1$. It then follows that the logic $\models^{acc}_L$ is mutually interpretable in $\models_L$ itself; that is, we have:

[1] Notice that this condition is somewhat weaker than the condition of requiring $e(\neg\varphi) \leq e(\varphi)$, that may also be a reasonable alternative in MTL logics that are non IMTL logics.

$$\Gamma \models_L^{acc} \psi \quad \text{iff} \quad \boxdot\Gamma \models_L \boxdot\psi,$$
$$\Gamma \models_L \psi \quad \text{iff} \quad \Delta\Gamma \models_L^{acc} \Delta\psi.$$

where $\odot\Gamma$ is a shorthand for $\{\odot\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$ for $\odot \in \{\boxdot, \Delta\}$.

From an axiomatic point of view, we define the acceptance variant of L, denoted L^{acc}, as follows.

Definition 3. *Axioms and rules of L^{acc} are, besides axioms of L:*

- *Adjunction rule: (Adj)* $\dfrac{\varphi, \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$
- *Restricted Modus Ponens: (r-MP)* $\dfrac{\varphi, \quad \vdash_L \varphi \to \psi}{\psi}$
- *Restricted Δ-necessitation: (r-ΔNec)* $\dfrac{\vdash_L \varphi}{\Delta\varphi}$
- *$\boxdot$-Modus Ponens: ($\boxdot$-MP)* $\dfrac{\varphi, \quad \boxdot\varphi \to \boxdot\psi}{\psi}$

Theorem 1. *Let L be a Δ-core fuzzy logic. Then the system L^{acc} is a sound and complete axiomatization of the finitary $\models_L^{acc}$. That is, for any formulas $\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi$, it holds*

$$\varphi_1, ..., \varphi_n \models_L^{acc} \psi \quad \textit{iff} \quad \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_{L^{acc}} \psi.$$

Finally, the axiomatisation of $\models_L^{tol}$ when L is a Δ-core logic is very similar. Indeed, if we define the operator $\boxdot'$ as $\boxdot'\varphi := \Delta(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$, then the logic L^{tol} resulting from replacing in Definition 3 the rule ($\boxdot$-IR) by the rule

$$(\boxdot'\text{-IR}) \quad \frac{\varphi, \quad \boxdot'(\varphi) \to \boxdot'(\psi)}{\psi},$$

is a sound and complete axiomatisation of $\models_L^{tol}$.

Acknowledgements

Gispert acknowledges partial support by the Spanish project SHORE (PID2022-141529NB-C21) and Esteva and Godo by the Spanish project LINEXSYS (PID2022-139835NB-C21), both funded by MCIU/AEI/10.13039/501100011033.

References

1. P. Cintula, C. Noguera. A general framework for mathematical fuzzy logic. In: P. Cintula, P. Hájek, C. Noguera (eds.) *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic - Volume 1.* Studies in logic, Mathematical Logic and Foundations, vol 37. College Publications, London, pp. 103-207, 2011.
2. P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Vol. 4 of Trends in Logic - Studia Logica Library. Kluwer, 1998.
3. D. Dubois, H. Prade. Numerical representation of acceptance. In: Proceedings of the 11th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'95), Montreal, pp. 149-156, 1995.
4. J. Gispert, L. Godo, F. Esteva. Non-falsity and general threshold-preserving companions of MTL logics. Int. J. Approx. Reason. 196: 109699, 2026.

Estimación fiable de la edad cronológica a partir del procesamiento automático de imágenes panorámicas dentales

A. Vivel-Couso, N. Vila-Blanco, M.J. Carreira, A. Bugarin-Diz, I. Tomás, and J.M. Alonso-Moral

Centro Singular de Investigacion en Tecnoloxías Intelixentes (CiTIUS)
Universidade de Santiago de Compostela
Santiago de Compostela, Spain
{ainhoa.vivel.couso, nicolas.vila, mariajose.carreira,
alberto.bugarin.diz, inmaculada.tomas, josemaria.alonso.moral}@usc.es

Resumen En este trabajo, presentamos un resumen del artículo titulado "Trustworthy Data-driven Chronological Age Estimation from Panoramic Dental Images", de A. Vivel-Couso et al. [4], publicado en la revista *Information Systems Frontiers*. El artículo fue enviado el 21 de julio de 2025 y publicado el 15 de enero de 2026.

Keywords: Inteligencia Artificial Explicable centrada en las Personas · Generación de Texto a partir de Datos · Generación de Texto basada en Reglas · Cuantificación Lingüística basada en Lógica Borrosa

1. Introducción

En este artículo presentamos un resumen de nuestro trabajo titulado *"Trustworthy Data-driven Chronological Age Estimation from Panoramic Dental Images"* [4], publicado en la revista *Information Systems Frontiers*, donde describimos el sistema AgeX, que genera explicaciones textuales sobre la estimación de la edad cronológica de una persona a partir del procesamiento automático de imágenes panorámicas dentales mediante un modelo de aprendizaje neuronal profundo no transparente. La estimación de la edad cronológica es importante en aplicaciones como la identificación forense, los procedimientos legales, el control migratorio y los procesos de adopción, entre otros.

AgeX sigue un enfoque de fiabilidad desde el diseño (*trustworthiness-by-design*), incorporando requisitos clínicos de interpretabilidad, robustez y explicabilidad [1]. En la práctica, es un sistema inteligente que combina componentes opacos e interpretables para proporcionar tanto predicciones precisas como explicaciones comprensibles. Se alinea con los requisitos del Reglamento de IA de la UE (EU AI Act[1]) al mejorar la transparencia mediante explicaciones automáticas en lenguaje natural e informar a los usuarios cuando se utiliza contenido generado por IA. La fiabilidad y la utilidad del enfoque fueron evaluadas por profesionales dentales expertos en un escenario de despliegue realista.

[1] https://artificialintelligenceact.eu

2. Propuesta

AgeX incluye un módulo de Generación de Lenguaje Natural (NLG) para construir explicaciones textuales fiables, siguiendo el "pipeline" clásico basado en reglas [2,3], que consta de tres etapas: (i) planificación del documento, (ii) micro-planificación, y (iii) realización lingüística.

En la etapa de planificación del documento, se definen el contenido narrativo y su estructura según un conjunto de reglas derivadas de informes redactados por expertos, que se toman como ejemplos de referencia, los cuales fueron validados por un especialista en odontología y codificados en plantillas reutilizables.

Durante la etapa de microplanificación, el sistema determina cómo se expresa la información. Un mecanismo basado en reglas distingue entre oraciones estáticas (explicaciones generales sobre el método de estimación considerado e independientes del caso particular bajo estudio) y oraciones dinámicas (contenido específico del paciente derivado de datos clínicos). A continuación, un conjunto de reglas condicionales determina qué información se incluye en la narrativa a generar. Además, se utilizan cuantificadores borrosos [5] (por ejemplo, *ninguno, pocos, algunos, la mayoría, todos...*) para transformar datos dentales numéricos en descripciones lingüísticas comprensibles para las personas.

En la etapa de realización lingüística, el uso de `SimpleNLG-ES` garantiza la correcta generación sintáctica, morfológica y gramatical de las narrativas finales.

El sistema se desarrolló de forma iterativa, con supervisión continua de expertos en odontología en cada etapa. Se aplicó un enfoque de generación de texto a partir de datos (Data-to-Text) basado en reglas en lugar de métodos de NLG neuronales, lo que facilita la supervisión humana, garantiza controlabilidad y fiabilidad desde el diseño. La validación final por expertos del dominio se utilizó como criterio principal de evaluación, en línea con las mejores prácticas para sistemas de NLG basados en reglas.

3. Discusión de Resultados

Se utilizó el módulo de NLG de AgeX para generar informes textuales correspondientes a cuatro casos clínicos de pacientes de entre 5 y 16 años. Cada caso incluía la edad cronológica real y la estimada por el modelo opaco. Siete expertos en odontología evaluaron, en una escala de 1 a 5, los cuatro informes generados por el sistema mediante un cuestionario que incluía 5 afirmaciones a valorar. Los resultados resumidos en la Tabla 1 muestran los distintos niveles de calidad percibida por los expertos en los tres escenarios considerados.

En el primer escenario (E1), únicamente se proporcionó información contextual mínima, junto con la estimación de la edad. Esta configuración obtuvo la puntuación media más baja (3,94). Aunque la terminología (4,57), la comprensibilidad (4,71) y la coherencia con la radiografía panorámica (4,43) fueron valoradas positivamente, los expertos señalaron como principales debilidades la insuficiencia de información (2,54) y la utilidad limitada (3,42). Este escenario también presentó la mayor variabilidad entre los expertos ($\sigma = 0{,}83$), y solo el 3,57 % lo seleccionó como la mejor opción.

Tabla 1. Media ($\bar{x}$) y desviación estándar (σ) de las puntuaciones otorgadas por los expertos en odontología. Se consideran tres escenarios: Escenario 1 (E1), los evaluadores disponen únicamente de la estimación de la edad dental; Escenario 2 (E2), la estimación se acompaña de una breve descripción automática; Escenario 3 (E3), la estimación se acompaña de una descripción automática completa y detallada.

Aspectos a valorar	**E1**	**E2**	**E3**
1. **Terminología**: "La descripción textual utiliza la terminología adecuada para describir la dentición de los pacientes."	4,57	4,54	4,64
2. **Comprensibilidad**: "La descripción es fácil de entender."	4,71	4,69	4,60
3. **Completitud**: "La descripción textual proporcionada contiene información suficiente."	2,54	3,50	4,89
4. **Utilidad**: "La descripción textual proporcionada contiene información útil."	3,42	4,07	4,82
5. **Coherencia**: "La descripción textual es coherente con respecto a la imagen (radiografía panorámica o mapa de calor) que acompaña."	4,43	4,61	4,89
Media ($\bar{x}$)	3,94	4,28	4,77
Desviación estándar (σ)	0,83	0,44	0,12

En el segundo escenario (E2) se añadió una descripción breve junto a la radiografía panorámica, lo que resultó en una mejora de la evaluación media ($\bar{x} = 4{,}28$). Los expertos consideraron que la calidad narrativa (en términos de terminología, comprensibilidad y coherencia) era buena ($\bar{x} > 4$), aunque la completitud de la información seguía siendo limitada (3,5). La variabilidad disminuyó ($\sigma = 0{,}44$), pero ninguno de los evaluadores seleccionó este escenario como el mejor.

En el tercer escenario (E3) se proporcionó a los expertos una explicación detallada junto con el correspondiente mapa de calor asociado a la imagen. Esta configuración obtuvo la evaluación media más alta ($\bar{x} = 4{,}77$). Los evaluadores calificaron de forma consistentemente positiva el sistema, destacando una terminología adecuada (4,64), una alta comprensibilidad (4,60), completitud (4,89) y utilidad (4,82) de la información. Las explicaciones generadas también se consideraron altamente coherentes con las imágenes correspondientes (4,89). Este escenario presentó la menor variabilidad entre los evaluadores ($\sigma = 0{,}12$), lo que indica un fuerte consenso y una menor incertidumbre en comparación con los escenarios anteriores. Además, el 89,29 % de los expertos seleccionó esta configuración como la mejor opción. Estos resultados indican una clara preferencia por las explicaciones completas generadas por el módulo NLG de AgeX, lo que confirma su eficacia como narrativas fiables e informativas de apoyo a la toma de decisiones clínicas.

Adicionalmente, la fiabilidad del sistema AgeX se evaluó considerando las 7 dimensiones de la lista de verificación ALTAI[2]. Las dimensiones con menor puntuación fueron *Agencia humana y supervisión* (3,66) y *Bienestar ambiental y social* (3,75).

[2] https://altai.insight-centre.org

En relación con *Agencia humana y supervisión*, AgeX no realiza toma de decisiones autónoma. El sistema funciona como una herramienta de apoyo para expertos en odontología, quienes mantienen la plena responsabilidad de las decisiones clínicas. Para reforzar este aspecto, se añadió una cláusula de exención de responsabilidad para enfatizar explícitamente la autonomía humana y la supervisión en el uso del sistema.

En cuanto a *Bienestar ambiental y social*, las consideraciones se extienden al impacto más amplio de los sistemas de IA, incluyendo la huella ambiental y la sostenibilidad. Aunque AgeX se basa en un módulo de NLG basado en reglas y en un modelo predictivo ligero, lo que resulta en un impacto ambiental prácticamente despreciable, se requiere mayor atención a la formación de usuarios y al desarrollo de competencias para maximizar el beneficio social a largo plazo.

Agradecimientos

Ainhoa Vivel Couso es una investigadora predoctoral financiada por la Consellería de Educación, Ciencia, Universidades e Formación Profesional de Galicia (ED481A-2024-059). Los autores reconocen el apoyo de la Consellería de Educación, Ciencia, Universidades e Formación Profesional de Galicia (proyectos CiTIUS 2024-2027 ED431G2023/04, GSI 2022-2025 ED431C2022/19, GVA GRC2021/48 and OSRG GPC2020/27) y de la Unión Europea (Fondo Europeo de Desarrollo Regional - FEDER). Este trabajo también está financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España (MCIN/AEI/10.13039/501100011033/) a través de los proyectos XAI4SOC PID2021-123152OB-C21, MAIXAI4Trust PID2024-157680NB-I00, y COLLAGE PID2023-149549NB-I00, así como por el Instituto de Salud Carlos III mediante PI21/00588.

Referencias

1. Lekadir, K., Quaglio, G., Garmendia, A.T., Gallin, C.: Artificial intelligence in healthcare: applications, risks, and ethical and social impacts (2022). https://doi.org/10.2861/568473
2. Reiter, E.: Natural Language Generation. Springer Cham (2024). https://doi.org/10.1007/978-3-031-68582-8
3. Reiter, E., Dale, R.: Building Natural Language Generation Systems. Studies in Natural Language Processing, Cambridge University Press (2000)
4. Vivel-Couso, A., Vila-Blanco, N., Carreira, M.J., Bugarín-Diz, A., Tomás, I., Alonso-Moral, J.M.: Trustworthy data-driven chronological age estimation from panoramic dental images. Information Systems Frontiers (2026). https://doi.org/10.1007/s10796-025-10682-3
5. Zadeh, L.: A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. Computers & Mathematics with Applications **9**(1), 149–184 (1983). https://doi.org/10.1016/0898-1221(83)90013-5

Algebraic structure of OFWA operators*

Roberto G. Aragón, Jesús Medina, and Samuel Molina-Ruiz

Department of Mathematics, University of Cádiz, Spain
{roberto.aragon,jesus.medina,samuel.molina}@uca.es

Abstract. This work presents the results of the paper *"OFWA operators as a computational mechanism to aggregate variables", TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics (2026), in press.*

Keywords:
Information aggregation, ordered functional weighted averaging operator, complete lattice

1 Introduction

Aggregation operators are fundamental tools in a wide variety of disciplines, including fuzzy logic, data analysis, and multi-criteria decision making [1, 8, 9]. Their purpose is to combine several numerical inputs into a single representative value while preserving meaningful information about the original data.

Ordered Weighted Averaging (OWA) operators, introduced by Yager [12,13], have been successfully applied in many contexts due to their ability to model different aggregation attitudes, such as optimism or pessimism. Despite their versatility, an OWA operators always aggregate inputs using the same set of weights, independently of the particular values being aggregated.

In many real-world applications, however, it is desirable for the aggregation mechanism to adapt to the input values themselves. Although a wide range of generalizations of OWA operators have been proposed [5, 10, 11, 14] since their introduction to address this and related issues, Ordered Functional Weighted Averaging (OFWA) operators [2–4, 7] tacke this limitation in a particularly flexible manner by allowing the weights to depend on the inputs. This paper presents the main concepts underlying OFWA operators and discusses their relevance in aggregation tasks, with illustrative examples showcasing the shortcomings of traditional aggregation operators and advantages of this versatile class of operators.

* Partially supported by the project PID2022-137620NB-I00 funded by MICIU/AEI/10.13039/501100011033 and FEDER, UE, Project FEDER-UCA-2024-A2-04 funded by Programa Operativo FEDER Andalucía 2021-2027 and by Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, Junta de Andalucía and DGP_PRED_2024_01455 funded by the Junta de Andalucía/CUII and by FSE+.

2 OWA vs OFWA operators

The theory of aggregation operators has become a very extensive and well-developed area of study. Over the years, a great variety of aggregation operators have been proposed in the literature, each tailored to address a specific application or decision-making task. Among these, one classical aggregation operator that has proven to be particularly influential and widely used is the OWA operator, which was introduced by Yager in [13]. The underlying idea behind OWA operators is based separating the importance of the values from the identity of their sources. Instead of assigning weights to each specific source, as is the case with the weighted mean, the aggregation is performed after ordering the values, so that the weights reflect the relative position of the data within the ordered list rather than their original indices. In this way, the weighting list encodes an aggregation attitude, such as optimism, pessimism, or neutrality, by emphasizing higher, lower, or intermediate values, respectively. This ordered weighting mechanism allows OWA operators to unify a wide range of classical aggregation behaviors, including the maximum, minimum, and arithmetic mean, within a single formal setting.

OWA operators satisfies all of the properties listed above, which makes them especially suitable for information aggregation and decision-making processes. However, it suffers from the same issue as many other operators, mainly that they aggregate all the data in $[0,1]^n$ using a fixed, single criterion. This issue may not be apparent in simple or well-behaved scenarios, but it can greatly influence the outcome of more complex aggregation tasks.

In [7], an aggregation operator was defined piecewise in terms of two OWA operators, each acting on a different region. Motivated by the idea of assigning different weights depending on the values being aggregated, they introduced a new class of operators based on the philosophy of OWA operators that precisely aim at providing aggregation mechanisms that are sensitive to the structure and distribution of the inputs.

Definition 1. *Let $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ be a list of weights $\omega_i \colon [0,1]^n \to [0,1]$ such that $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(a_1, \ldots, a_n) = 1$, for all $(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$. The* n-ary Ordered Functional Weighted Averaging (OFWA) operator *associated with Ω is the mapping $\mathcal{F}_\Omega \colon [0,1]^n \to [0,1]$ defined as*

$$\mathcal{F}_\Omega(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(a_1, \ldots, a_n)\ a_{\rho(i)}$$

for all $(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$, where $\rho \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ is a permutation on the index set satisfying that $a_{\rho(n)} \leq \cdots \leq a_{\rho(1)}$.

Whenever the weights in the definition above are constant, we recover the classical OWA operators, from which it follows that OWA operators form a subclass of OFWA operators. However, the addition of functional weights in the definition of OFWA operators offer a lot of flexibility and allow the user

to take into account more complex or multiple criteria when aggregating the input values. One particularly simple construct consists in defining the weights to be piecewise constant, that is, using a family of OWA operators, each acting on a particular region of $[0,1]^n$. The next toy example will showcase how this construct can be used in the setting of risk detection.

Example 1. Our task now is to aggregate the output of two sensors within an alarm-driven system, that is, the system is designed for risk detection such as a gas leak or overheating. Therefore, we fix a risk threshold $\tau \in (0,1)$ and define the weights $\omega_1, \omega_2 \colon [0,1]^2 \to [0,1]$ as

$$\big(\omega_1, \omega_2\big)(a_1, a_2) = \begin{cases} (w_s, 1-w_s) & \text{if } \max\{a_1, a_2\} < \tau \\ (w_r, 1-w_r) & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $(a_1, a_2) \in [0,1]^2$, with $w_s, w_r \in [0,1]$. The value w_s represents the weight used when the input values are not above the risk threshold, and w_r when they are. Thus, we could define for instance $w_s = 0.35$ and $w_r = 0.8$. In this way, we would obtain that

$$\mathcal{F}_{(\omega_1,\omega_2)}(0.7, 0.4) = 0.7 \cdot 0.35 + 0.4 \cdot 0.65 = 0.505$$
$$\mathcal{F}_{(\omega_1,\omega_2)}(0.9, 0.4) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.8$$

Clearly, the two aggregated outputs differ substantially, even though the inputs are not too different, which suggests that the system has encountered a risk and can now act accordingly.

OFWA operators share many of the interesting properties of OWA operators, mainly the boundary conditions, boundedness, idempotency and symmetry. However, they are not always monotone. In [7], the authors study this property and state sufficient conditions to ensure monotonicity, both for piecewise constant weights and based on a condition on the weights called ratio-increasing. Nonetheless, the ability to define monotone decreasing or even non-monotone OFWA operators broadens the range of potential applications beyond standard multi-criteria decision-making, allowing the user to model scenarios where monotonicity is not a desirable property. Moreover, in [3] the authors discussed the structure of the set of all OFWA operator and proved that it forms a complete lattice together with the pointwise supremum and infimum. This means that we can obtain new OFWA operators by taking the supremum or infimum of any arbitrary family of OFWA operators. Furthermore, these strategies can be used to aggregate different aggregation criteria, modeled by OWA or OFWA operators, proposed by experts according to conservative, associated with the minimum, or aggressive, associated with the maximum, viewpoints. The conservative point of view should be used in scenarios where caution is essential, and the aggressive viewpoint can be used when a more optimistic assessment is appropriate or risk is encouraged.

In the future, we will continue the study into the monotonicity, and other variants such as directional monotonicity [6], of OFWA operators. Moreover,

we will further look into their complete lattice structure and how to aggregate several OFWA operators beyond the conservative and aggressive viewpoints. Furthermore, we will analyze the effect of the weights to the overall operator and introduce a comparative study between OFWA operators and other well-established aggregation operators.

References

1. Roberto G. Aragón, M. Eugenia Cornejo, Jesús Medina, Juan Moreno-García, and Eloísa Ramírez-Poussa. Decision support system for photovoltaic fault detection avoiding meteorological conditions. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 21(03):911–932, 2022.
2. Roberto G. Aragón, Jesús Medina, and Samuel Molina-Ruiz. OFWA operators as a computational mechanism to aggregate variables. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2026. In press.
3. Roberto G. Aragón, Jesús Medina, Samuel Molina-Ruiz, and Ronald R. Yager. On the complete lattice structure of ordered functional weighted averaging operators. *Mathematics*, 13(5), 2025.
4. Radomír Halaš, Radko Mesiar, Jozef Pócs, and Andrea Stupňanová. On representation and some properties of OFWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 508:109333, 2025.
5. Radomír Halaš, Radko Mesiar, Jozef Pócs, Andrea Stupňanová, and LeSheng Jin. A novel generalization of the OWA and IOWA operators based on weighting vectors. *Information Sciences*, 713:122182, 2025.
6. Cédric Marco-Detchart, Humberto Bustince, Javier Fernández, Radko Mesiar, Julio Lafuente, Edurne Barrenechea, and Jesús María Pintor. Ordered directional monotonicity in the construction of edge detectors. *Fuzzy Sets and Systems*, 421:111–132, 2021.
7. Jesús Medina and Ronald R. Yager. OWA operators with functional weights. *Fuzzy Sets and Systems*, 414:38–56, 2021.
8. Ashu Redhu, Reeta Bhardwaj, Kamal Kumar, and Gagandeep Kaur. (p, q)-quasirung orthopair fuzzy Schweizer-Sklar aggregation operators and their application in multi-attribute decision-making. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 71(1):153–182, 2025.
9. Ubaid Ur Rehman and Tahir Mahmood. Ordering blockchain technology for multinational companies based on yager aggregation operators under bipolar fuzzy information. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 70(6):5949–5978, 2024.
10. Vicenç Torra. The weighted OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 12(2):153–166, 1997.
11. Vicenç Torra. Andness directedness for operators of the OWA and WOWA families. *Fuzzy Sets and Systems*, 414:28–37, 2021.
12. Ronald R. Yager. Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59(2):125–148, 1993.
13. Ronald R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):183–190, 1998.
14. Ronald R Yager. Generalized OWA aggregation operators. *Fuzzy optimization and decision making*, 3:93–107, 2004.

Consultas flexibles sobre grafos de conocimiento

José Félix Yagüe[1], Ignacio Huitzil[12], Carlos Bobed[12], and Fernando Bobillo[12]

[1] University of Zaragoza, Zaragoza, Spain
[2] Aragon Institute of Engineering Research (I3A), Zaragoza, Spain
{ihuitzil,cbobed,fbobillo}@unizar.es

Resumen Este artículo corto discute un enfoque basado en lógica difusa para responder consultas flexibles sobre grafos de conocimiento, que incluyen restricciones sobre los valores de las propiedades descritas mediante conjuntos difusos. La principal ventaja es que permite reutilizar grafos RDF y puntos de acceso SPARQL existentes, añadiendo una capa difusa sobre ellos. Además, se permite el uso de tipos de datos difusos descritos mediante Fuzzy OWL 2 para la definición de las funciones de pertenencia difusas. La propuesta se ha implementado en el sistema FUKG y se ha validado en la DBpedia. Este artículo es un resumen de [6].

Keywords: Grafos de conocimiento · Lógica difusa · Consultas flexibles.

1. Introducción

La Inteligencia Artificial requiere con frecuencia combinar técnicas de representación del conocimiento y razonamiento con técnicas de gestión de la incertidumbre. Los grafos de conocimiento permiten capturar datos del mundo real a gran escala, usando nodos para representar entidades de interés y aristas para representar relaciones entre ellas. El caso más habitual asume el lenguaje estándar RDF (Resource Description Framework), basado en triples de la forma $\langle s,p,o\rangle$, que expresan que la entidad sujeto s está relacionada con la entidad objeto o a través del predicado (o propiedad) p. Para consultar grafos de conocimiento, lo más habitual es usar puntos de acceso basados en el lenguaje de consulta estándar SPARQL.

Nuestro objetivo es mejorar los sistemas basados en grafos de conocimiento a través del soporte de imprecisión, mediante lógica difusa. En particular, deseamos puntos de acceso capaces de responder consultas flexibles que incluyan términos imprecisos como, por ejemplo, "rápido" o "ligero" cuando se buscan vehículos.

Una primera aproximación para ello sería proponer un nuevo lenguaje para representar grafos de conocimiento, un nuevo lenguaje para especificar consultas y, por supuesto, un nuevo procedimiento para responder las consultas. En este artículo corto, que es un resumen de un trabajo publicado en junio de 2024 en una revista [6], proponemos un enfoque alternativo que permite reusar los lenguaje estándar RDF y SPARQL, así como los puntos de acceso existentes. Nuestras consultas flexibles se describirán utilizando conjuntos difusos como posibles valores de las propiedades de datos numéricas. Por ejemplo, dada una propiedad "velocidad", se permite como posible valor "alta velocidad". Para responder este tipo de consultas, añadiremos una "capa difusa" por encima de los estándares para manejar los términos flexibles.

2. Resolución de consultas flexibles

Tipo de consultas. Dado un grafo de conocimiento $\mathcal{K}$, las consultas flexibles que nos planteamos resolver se caracterizan por los siguientes parámetros:

- Conjunto de clases C_1,C_2,...,C_N
- Conjunto de propiedades numéricas funcionales P_1,P_2,...,P_n
- Lista de conjuntos difusos D_1,D_2,...,D_n
- Lista de modificadores difusos (*hedges*) H_1,H_2,...,H_n
- Operador para fusionar clases $\diamond$: intersección $\wedge$ (por defecto) o unión $\vee$.
- Operador para fusionar las propiedades $@\colon [0,1]^n \to [0,1]$ (una t-norma, una t-conorma, un operador OWA, etc.).
- Número máximo de resultados k.

Por ejemplo, si queremos consultar a la DBpedia (http://dbpedia.org) acerca de "motocicletas o automóviles con velocidad máxima muy alta y peso en vacío medio", tendríamos dbo:Motorcycle y dbo:Automobile como clases, dbp:maxSpeedKmh y dbp:emptyWeightKg como propiedades, HighmaxSpeedKmh y NeutralemptyWeightKg como conjuntos difusos, muy como modificador difuso, la unión como operador de fusión para las classes y la t-norma del producto para las propiedades.

Un aspecto clave de nuestra propuesta es la representación de los conjuntos difusos y los modificadores difusos usando los tipos de datos (*datatypes*) del lenguaje Fuzzy OWL 2 [2], que propone una sintaxis en XML para codificar las funciones trapezoidal, triangular, Z (o *left-shoulder*) y S (o *right-shoulder*) usando anotaciones (*annotation properties*) del lenguaje estándar para ontologías OWL 2 (que, al estilo de los comentarios de un programa, pueden ser ignorados por ciertas aplicaciones para mantener compatibilidad hacia atrás). Por ejemplo, HighmaxSpeedKmh, definido como una función de pertenencia triangular con parámetros (500,1000,1500), se puede codificar mediante el siguiente conjunto de tres triples RDF (obsérvese que el objeto del tercer triple es una cadena de caracteres multilínea en sintaxis XML):

```
ex:fuzzyLabel      rdf:type      owl:AnnotationProperty .
ex:HighmaxSpeedKmh rdf:type      rdfs:Datatype .
ex:HighmaxSpeedKmh ex:fuzzyLabel """<fuzzyOwl2 fuzzyType=\"datatype\">
     <Datatype type=\"triangular\" a=\"500\" b=\"1000\" c=\"1500\" />
  </fuzzyOwl2>""" .
```

Resolución de consultas. Para responder a estas consultas flexibles, proponemos un procedimiento ([6, Algoritmo 1]) que se ilustra en la Figura 1:

1. Recuperar las instancias de las clases x y sus valores y_i^X para cada propiedad P_i. Esto se resuelve con una consulta SPARQL, donde la primera parte explota los caminos de propiedades rdf:type/rdfs:subClassOf* y, si el operador de fusión es la unión, se combinan subconsultas con UNION. Por ejemplo, se recupera dbr:Fiat_G.91Y, con valor "1110"^^xsd:decimal para la propiedad dbp:maxSpeedKmh.
2. Para cada conjuntos difuso D_i (como ex:HighmaxSpeedKmh), recuperar su función de pertenencia F_i, con consultas SPARQL como por ejemplo:

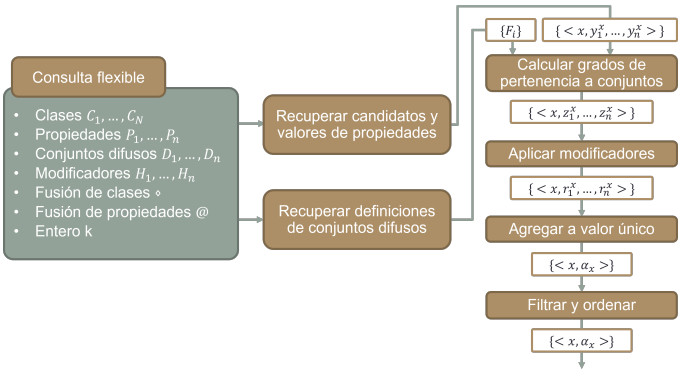


Figura 1. Diagrama de flujo del algoritmo del proceso de respuesta a consultas

```
SELECT ?F_i WHERE {
   ex:HighmaxSpeedKmh  rdf:type       rdfs:Datatype .
   ex:HighmaxSpeedKmh  ex:fuzzyLabel  F_i  . }
```

3. Calcular, para cada individuo x, el grado de pertenencia del valor y_i^x al conjunto difuso F_i: $z_i^x = F_i(y_i^x)$. Por ejemplo, para la velocidad máxima del dbr:Fiat_G.91Y, que era 1110, el grado de pertenencia a ex:HighmaxSpeedKmh es $z_i^x = 0{,}78$.
4. Aplicar los modificador difusos a los valores anteriores: $r_i^x = H_i(z_i^x)$. Si muy$(x) = x^2$, en el ejemplo anterior obtenemos $r_i^x = 0{,}78^2 = 0{,}61$.
5. Agregar todos los r_i^x para cada individuo x: $\alpha_x = @_{i \in \{1,\ldots,n\}}(r_i^x)$. En nuestro ejemplo, tomando el producto para agregar los valores correspondientes a la velocidad máxima (0,61) y al peso (0,55, no detallado aquí), obtenemos $\alpha_x = 0{,}34$.
6. Por último, se forma una lista de valores $\langle x, \alpha_x \rangle$, como $\langle$dbr:Fiat_G.91Y,0,34$\rangle$, se ordenada decrecientemente y se filtra para quedarse con los k mayores valores.

Implementación. FUKG (*FUzzy Knowledge Graphs*) es una aplicación Java que implementa el procedimiento anterior y está disponible en http://webdiis.unizar.es/~fbobillo/fukg. Su interfaz de usuario permite proporcionar la información relevante (punto de acceso del grafo de conocimiento y parámetros de la consulta) de una manera cómoda. Para interactuar con el punto de acceso, usa Apache Jena y Jena Java API. La herramienta incorpora funcionalidad como autocompletado de entidades u ocultamiento de IRIs. Dado que uno de los objetivos es permitir responder consultas flexibles sobre grafos de conocimiento existentes que no incluyen las definiciones de los conjuntos difusos, FUKG permite proporcionarlas a través de un fichero local independiente al grafo.

Validación. FUKG se ha validado a través del consultas a la DBpedia, que tiene un tamaño muy considerable, y a pesar de ello el tiempo de consulta es inferior a un segundo, si bien la inicialización (que requiere recuperar una única vez la lista completa de clases y propiedades) requirió cerca de un minuto.

3. Discusión

Trabajo relacionado. La literatura incluye varias extensiones difusas de los grafos de conocimiento (en particular, de grafos RDF). Principalmente, se definen axiomas difusos: por ejemplo, U. Straccia considera cuádruplas de la forma $\langle s,p,o,\alpha\rangle$, con $\alpha\in(0,1]$, que expresan que el triple RDF $\langle s,p,o\rangle$ es cierto con grado de verdad α [5]. Este tipo de trabajos no permiten reutilizar directamente el lenguaje estándar RDF, ni tampoco prestan atención a los conjuntos difusos descritos mediante funciones de pertenencia. Con respecto a la consulta de grafos RDF difusos, se han propuesto extensiones de los lenguajes de consulta. Por ejemplo, J. Z. Pan et al. propusieron Fuzzy SPARQL [4], que utiliza comentarios para codificar la parte difusa y hace el lenguaje compatible hacia atrás. Sin embargo, Fuzzy SPARQL no permite funciones de pertenencia difusas en las consultas. Por otro lado, en la propuesta de U. Straccia se extiende la noción de consultas conjuntivas al caso difuso, permitiendo la aparición de funciones de pertenencia, aunque no se propone un lenguaje de consulta concreto [5].

Trabajo futuro. Existen varias líneas de trabajo futuro definidas. Por un lado, se pretende extender la propuesta a más tipos de consultas, teniendo algunos resultados para consultas cuantificadas difusas de la forma "Q de X son F" [3]. Por otro lado, se pretende poder gestionar los valores faltantes, puesto que actualmente un único valor desconocido para cierta propiedad descarta completamente al individuo como candidato a ser recuperado. En este sentido, se tienen algunos resultados, donde una métrica inspirada en la entropía permite cuantificar la importancia de las distintas propiedades, lo que se tiene en cuenta para la resolución de consultas [1]. Finalmente, se pretende aplicar la herramienta a casos prácticos concretos para evaluar el desempeño de la herramienta al manejar grandes cantidades de datos.

Agradecimientos. Trabajo financiado por los proyectos de I+D+i PID2024-159530OB-I00 (MCIN/AEI 10.13039/501100011033) y UZ2024-IyA-02 (Universidad de Zaragoza).

Referencias

1. Bobillo, F., Bobed, C., Mena, E., Straccia, U.: A fuzzy logic-based approach to semantic query answering with missing values. In: Proceedings of the 33rd IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2024). pp. 1–8. IEEE (2024)
2. Bobillo, F., Straccia, U.: Fuzzy ontology representation using OWL 2. International Journal of Approximate Reasoning **52**(7), 1073–1094 (2011)
3. Palacín, E., Huitzil, I., Lisi, F.A., Straccia, U., Bobillo, F.: Fuzzy quantification over OWL ontologies and knowledge graphs (2026). https://doi.org/10.48550/arXiv.2606.25778
4. Pan, J.Z., Stamou, G., Stoilos, G., Thomas, E., Taylor, S.: Scalable querying service over fuzzy ontologies. In: Proceedings of WWW 2008. pp. 575–584 (2008)
5. Straccia, U.: A minimal deductive system for general fuzzy RDF. In: Proceedings of the 3rd International Conference on Web Reasoning and Rule Systems (RR 2009). Lecture Notes in Computer Science, vol. 5837, pp. 166–181. Springer (2009)
6. Yagüe, J.F., Huitzil, I., Bobed, C., Bobillo, F.: FUKG: Answering flexible queries over knowledge graphs. The Electronic Library **42**(3), 368–392 (2023). https://doi.org/10.1108/EL-02-2023-0052

Automatic consensus models to balance consensus cost, consistency level and consensus degree with attitudinal trust mechanism

Yaya Liu[1][0000−0001−5407−7984], Yue Wang[1], Rosa M. Rodríguez[2][0000−0002−1736−8915], Zhen Zhang[3][0000−0002−6512−1458], and Luis Martínez[2][0000−0003−4245−8813]

[1] University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai, China
{yayaliu@usst.edu.cn,18548322420@163.com}
[2] University of Jaen, Jaen, Spain
{rmrodrig,martin}@ujaen.es
[3] Dalian University of Technology, Dalian, China
{zhen.zhang@dlut.edu.cn}

Abstract. Consensus Reaching Processes (CRPs) constitute a fundamental mechanism to improve acceptance and reliability in Group Decision Making (GDM). Existing consensus approaches commonly focus on optimizing a single objective, either maximizing consensus degree, preserving consistency, or minimizing consensus cost. However, practical decision environments require balancing these conflicting factors simultaneously. This work published in Information Sciences [3], presents an attitudinal trust-based automatic consensus framework that supports adaptive preference adjustment during the CRPs. The proposal incorporates trust-aware aggregation to regulate the influence among decision makers and automatically determine preference adaptation strategies. Three optimization perspectives are considered according to different decision requirements: consistency-driven, consensus-driven, and cost-driven consensus generation. The proposed framework enables flexible consensus support while preserving decision quality and reducing excessive preference modifications.

Keywords: Group decision making, consensus reaching process, consistency level, consensus cost

1 Introduction

Group Decision Making (GDM) has become a widely adopted paradigm for solving complex problems involving multiple stakeholders and competing interests. Since direct aggregation of individual preferences may generate disagreement and reduce acceptance of collective outcomes, Consensus Reaching Processes (CRPs) are commonly incorporated before final decision selection [2].

Traditional consensus models mainly aim to increase consensus degree. Nevertheless, achieving agreement frequently requires modifying participants' original opinions, generating consensus costs and potentially reducing the internal

consistency of preference structures. Consequently, consensus degree, consistency level, and consensus cost become three interconnected dimensions that jointly determine the quality and acceptability of decision outcomes.

Although previous studies have independently investigated consistency-driven and minimum-cost consensus mechanisms [1, 4], limited attention has been devoted to balancing these objectives simultaneously. To address this limitation, this work proposes an attitudinal trust-based automatic consensus framework capable of adaptively regulating preference adjustments according to trust relationships among decision makers.

2 Proposal

The proposed framework considers a GDM environment in which decision makers express their evaluations through fuzzy preference relations. After preference collection, consensus and consistency indicators are computed to identify participants requiring preference adjustment.

To support adaptive consensus generation, the proposal introduces an Attitudinal Trust Degree (ATD) mechanism to determine the influence of decision makers during preference aggregation. Trust levels are estimated according to preference similarity and controlled through an attitudinal parameter representing different trust behaviours.

Preference adjustment is generated automatically through the following mechanism:

$$\bar{R}^h = (1-\delta)R^h + \delta \sum_{v=1}^{f} w_{\sigma(v)}^{ATD} R^v, \tag{1}$$

where R^h and $\bar{R}^h$ denote the original and adjusted preference relations, $\delta \in [0, 1]$ is the adjustment parameter that quantifies the change from original preference to preferences of other decision makers, and w^{ATD} represents the trust-based aggregation weights.

The framework supports three complementary optimization perspectives (see Fig. 1):

1. Consistency-Driven Consensus Model (SIS-DRI), prioritizes preserving and improving the consistency level of adjusted preference relations while ensuring that consensus reaches acceptable levels and adjustment costs remain controlled. This model is particularly suitable for decision scenarios where maintaining coherent and rational preference structures is more important than achieving maximum agreement.
2. Consensus-Driven Consensus Model (SEN-DRI), aims to maximize the overall group consensus degree while maintaining acceptable preference consistency and preventing excessive preference modifications. This model is appropriate for collaborative environments where stakeholder alignment and collective acceptance are the primary objectives.

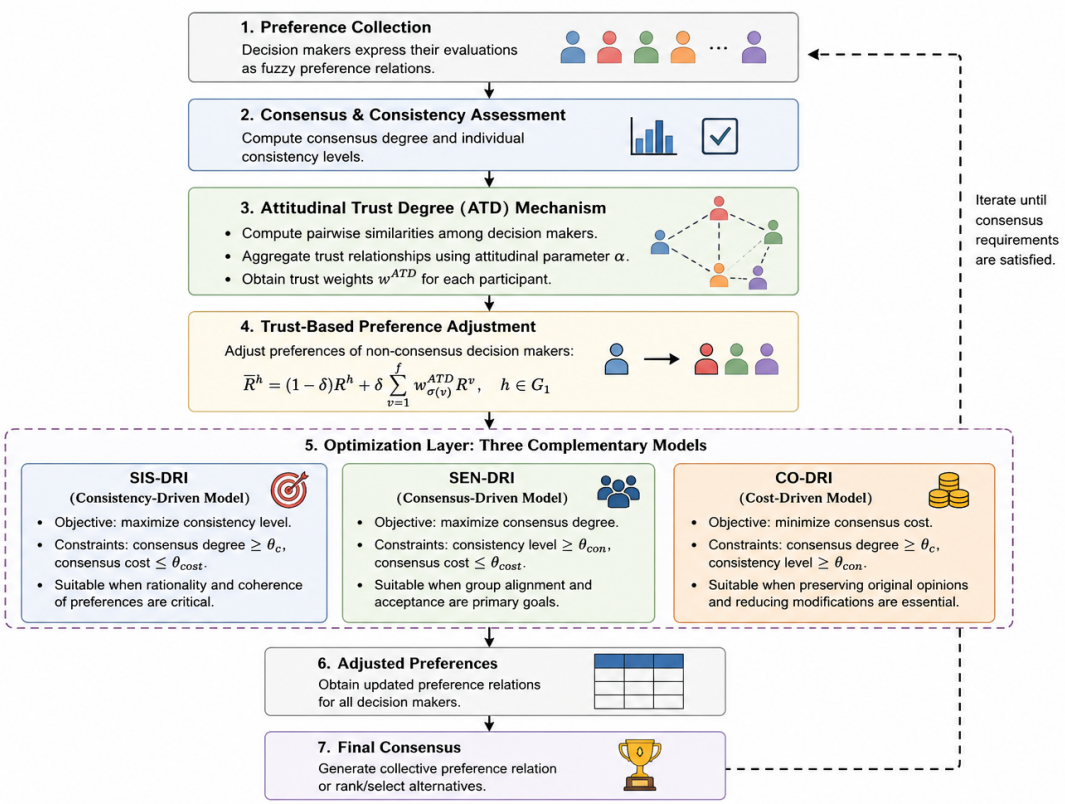


Fig. 1. Attitudinal trust-based automatic consensus framework

3. Cost-Driven Consensus Model (CO-DRI), minimizes the consensus cost associated with preference adjustments while guaranteeing minimum requirements on both consensus and consistency levels. This model is especially useful in situations where preserving decision makers' original opinions and reducing resistance to preference changes are critical.

Through the optimization of adjustment intensity and attitudinal trust parameters, the framework transforms consensus generation into an adaptive mechanism capable of prioritizing reliability, agreement, or adjustment minimization depending on decision requirements.

The resulting architecture supports configurable and automatic consensus generation and can be integrated into decision support systems for collaborative decision-making scenarios.

3 Conclusions

This work presented an attitudinal trust-based automatic consensus framework to balance consensus degree, consistency level, and consensus cost in consensus reaching processes. Unlike conventional consensus approaches focused on isolated objectives, the proposed framework introduces adaptive preference adjustment mechanisms guided by trust relationships and optimization strategies. The proposal enables flexible consensus generation according to different decision priorities and provides a basis for future developments on explainable and human-centric consensus support systems.

Acknowledgments. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades a través del proyecto de generación de conocimiento (PID2024-161073NB-I00).

References

1. Leyva-López, J.C.: A consistency and consensus model for group decision support based on the outranking approach (2024)
2. Li, Z., Zhang, Z.: Threshold-based value-driven method to support consensus reaching in multicriteria group sorting problems: A minimum adjustment perspective. IEEE Transactions on Computational Social Systems **11**(1), 1230–1243 (2024)
3. Liu, Y., Wang, Y., Rosa M., R., Zhang, Zhen, M.L.: Automatic consensus models to balance consensus cost, consistency level and consensus degree with attitudinal trust mechanism. Information Sciences **716**, 122222 (2025)
4. Wu, T., Liu, X., Gong, Z., Zhang, H., Herrera, F.: The minimum cost consensus model considering the implicit trust of opinions similarities in social network group decision-making. International Journal of Intelligent Systems **35**(3), 470–493 (2020)

RIOWA: operadores IOWA restringidos aplicados a imputación de datos faltantes

A. Indurain-Ibero[1,2][0009−0003−8456−5542], B. Bedregal[3][0000−0002−6757−7934], M. Ferrero-Jaurrieta[2][0000−0002−6854−3437], J. Fernández[2][0000−0003−4427−3935], and H. Bustince[2][0000−0002−1279−6195]

[1] Tracasa Instrumental, C. Cabárceno 6, 31621 Sarriguren, España
[2] Universidad Pública de Navarra, 31006 Pamplona, España {alfonso.indurain, mikel.ferrero, fcojavier.fernandez, bustince}@unavarra.es
[3] Fusión de datos Operado, 59072-970 Natal, Brazil bedregal@dimap.ufrn.br

Abstract. El presente documento es un *key work* del trabajo titulado 'RIOWA: Restricted Induced Ordered Weighted Averaging operators, applied to missing data imputation' [1] y que ha sido publicado en la revista *Applied Soft Computing*. En este *key work* presentamos unos nuevos operadores basados en los operadores IOWA, los aplicamos en un problema de imputación de datos faltantes y demostramos la mejora que ofrecen frente a los operadores OWA e IOWA clásicos.

Keywords: Fusión de datos · Operador OWA · Operador IOWA · Imputación de datos

1 Introducción

Los operadores Ordered Weighted Averaging (OWA) y sus extensiones, como los operadores Induced OWA (IOWA), se utilizan ampliamente en la fusión de datos porque permiten asignar diferentes niveles de importancia a cada dato. Esta característica resulta especialmente útil en aplicaciones como la imputación de datos faltantes.

Sin embargo, cuando existen datos duplicados, los operadores clásicos no pueden distinguir si esas repeticiones son reales o consecuencia de problemas de calidad en los datos. Esto puede generar sesgos hacia los valores repetidos y afectar negativamente la representación de la distribución real de los datos.

Para solucionar este problema, en este trabajo se propone una nueva familia de operadores denominada Restricted IOWA (RIOWA), que trabaja únicamente con valores únicos. Además, se estudian sus propiedades fundamentales y se evalúa su aplicación en la imputación de datos faltantes, comparando su rendimiento con los operadores OWA e IOWA tradicionales.

2 Definiciones previas

Dado $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$, $N_n = \{1, \ldots, n\}$ y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$. Un vector $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$ es un vector de pesos si $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y es un vector de subpesos si $\sum_{i=1}^{n} w_i \leq 1$.

Definition 1 ([2]) *Sea* $\mathbf{w} \in [0,1]^n$ *un vector de pesos, el operador Ordered Weighted Averaging (OWA), es la función* $O_{\mathbf{w}} : [0,1]^n \to [0,1]$ *definida para cada* $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ *por:* $O_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)}$, *donde* $(\cdot)$ *es una permutación decreciente de* $\mathbf{x}$.

Definition 2 ([3]) *Sea* $\mathbf{w} \in [0,1]^n$ *un vector de pesos,* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, *y* $\mathbf{a} \in [0,1]^n$. *El operador IOWA asociado a* $\mathbf{w}$ *es una aplicación* $I_{\mathbf{w}} : (\mathbb{R} \times [0,1])^n \to [0,1]$ *tal que:* $I_{\mathbf{w}}(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_{\sigma(i)}$ *donde* σ *es cualquier permutación de* $\{1, ..., n\}$ *tal que* $u_{\sigma(i)} \geq u_{\sigma(j)}$ *cuando* $i < j$.

3 RIOWA: operador OWA restringido inducido

Sea $n \geq 2$. Denotamos $\mathcal{V} = \bigcup_{m=1}^{n} \mathcal{V}_m$, donde $\mathcal{V}_m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in [0,1]^m \mid x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j \in N_m\}$. Un vector inductor para $\mathbf{x}' \in \mathcal{V}_m$ es un vector $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m) \in N_n^m$ tal que $\sum_{i=1}^{m} a_i = n$. Denotamos con $\mathcal{A}_{\mathbf{x}'}$ al conjunto de todos los posibles vectores inductores de $\mathbf{x}' \in \mathcal{V}$.

Para todo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ establecemos lo siguiente:

1. $m = \text{Card}(\{x_1, \ldots, x_n\})$
2. $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ con $x'_1 = x_1$ y para todo $j \in N_m$, $x'_j = x_k$, donde $k = \min\{i \in N_n \mid x_i \neq x'_l$ para todo $l \in N_{j-1}\}$
3. $\tau : N_m \to N_n$ es $\tau(i) = \text{Card}(\{j \in N_n \mid x_j = x'_i\})$, para todo $i \in N_m$
4. $\mathbf{A} = (\tau(1), \ldots, \tau(m))$
5. $\sigma : N_m \to N_m$ es una permutación tal que:
   - $a_{\sigma(i)} \geq a_{\sigma(i+1)}$, ó
   - $a_{\sigma(i)} = a_{\sigma(i+1)}$ y $x'_{\sigma(i)} > x'_{\sigma(i+1)}$

   para todo $i \in N_{m-1}$

Nótese que $\mathbf{x}' \in \mathcal{V}$ y $\sum_{i=1}^{m} \tau(i) = n$ y por tanto: (1) $\mathbf{A} = (1, \ldots, 1)$ si y sólo si $m = n$, por tanto, $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j \in N_n$; y (2) $\mathbf{A} = (n)$ si y sólo si $m = 1$, por tanto, $x_i = x_j$ para todo $i, j \in N_n$.

Example 1. Sea $\mathbf{x} = (0.5, 0.7, 0.5, 0.3, 0.7, 0.1, 0.3, 0.2, 0.3)$ entonces: $n = 9$, $m = \text{Card}(\{0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7\}) = 5$, $\mathbf{x}' = (0.5, 0.7, 0.3, 0.1, 0.2)$, $\mathbf{A} = (\tau(1), \ldots, \tau(m)) = (2, 2, 3, 1, 1)$, $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(m)) = (3, 2, 1, 5, 4)$, y $\mathbf{x}'_\sigma = (0.3, 0.7, 0.5, 0.2, 0.1)$.

Definition 3 *Sea* $\mathbf{w} = (w_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in [0,1]^n}$ *sea una familia de vectores de subpesos tal que* $w_{\mathbf{x}} \in [0,1]^{m_{\mathbf{x}}}$. *Entonces el operador RIOWA (Restricted Induced Ordered Weighted Averaging) basado en* $\mathbf{w}$ *es una aplicación* $R_{\mathbf{w}} : [0,1]^n \to [0,1]$ *tal que para cada* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$: $R_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m_{\mathbf{x}}} w_i x'_{\sigma(i)}$

Como consecuencia de esta definición para el nuevo operador RIOWA, se tiene que todo operador OWA es un operador RIOWA. La demostración está incluida en el trabajo original [1].

4 Aplicación a imputación de datos faltantes

Para comprobar el rendimiento de los nuevos operadores RIOWA, hemos implementado una arquitectura de imputación de datos faltantes introducida en [4]. Esta arquitectura, basada en modelos de *clustering* y funciones de agregación, genera múltiples datos candidatos que posteriormente son agregados utilizando operadores OWA e IOWA.

Utilizando esta misma arquitectura para 6 conjuntos de datos, la hemos modificado para utilizar nuestros operadores RIOWA y hemos comparado su rendimiento frente a los operadores originales.

Dataset	OWA	IOWA	RIOWA
1	0.200 ± 0.003	0.207 ± 0.003	**0.172 ± 0.002**
2	**0.432 ± 0.003**	**0.432 ± 0.003**	0.441 ± 0.004
3	0.284 ± 0.005	0.285 ± 0.005	**0.274 ± 0.006**
4	0.727 ± 0.003	0.729 ± 0.003	**0.724 ± 0.003**
5	0.191 ± 0.004	0.190 ± 0.004	**0.168 ± 0.005**
6	0.245 ± 0.003	0.249 ± 0.003	**0.223 ± 0.004**
Average	0.347 ± 0.188	0.349 ± 0.188	**0.334 ± 0.198**

Table 1. Resultados obtenidos con un 5% de datos faltantes.

Dataset	OWA	IOWA	RIOWA
1	0.364 ± 0.003	0.304 ± 0.009	**0.240 ± 0.003**
2	**0.491 ± 0.002**	0.494 ± 0.002	0.498 ± 0.002
3	0.362 ± 0.003	0.354 ± 0.005	**0.322 ± 0.004**
4	0.749 ± 0.002	0.751 ± 0.003	**0.742 ± 0.003**
5	0.286 ± 0.002	0.255 ± 0.005	**0.210 ± 0.003**
6	0.382 ± 0.002	0.330 ± 0.005	**0.283 ± 0.003**
Media	0.439 ± 0.151	0.415 ± 0.167	**0.382 ± 0.185**

Table 2. Resultados obtenidos con un 20% de datos faltantes.

Como se puede ver en las Tablas 1, 2, los resultados obtenidos por los tres operadores son constantes. En los conjuntos de datos 1, 3, 4, 5 y 6, el operador RIOWA obtiene un error medio inferior al de los otros operadores, mientras que su rendimiento es inferior en el conjunto de datos 2, donde destaca el operador OWA.

Del mismo modo, en la figura 1 se incluye la comparación con varios modelos base de imputación de datos. Como se puede observar, el rendimiento del operador RIOWA utilizado en la arquitectura empleada supera al resto de modelos en la mayoría de los conjuntos de datos.

Finalmente, realizamos un pequeño estudio para comprobar qué modificaciones incluidas en el operador influencian en mayor medida su rendimiento y qué incluimos en la Tabla 3. En esta tabla se puede ver claramente que el rendimiento de los RIOWA depende principalmente de la eliminación de instancias duplicadas en los datos.

Conjunto de datos	RIOWA	RIOWA(manteniendo duplicados)	RIOWA(usando vectores de pesos)
1	0.240 ± 0.002	0.303 ± 0.007	0.240 ± 0.003
2	0.498 ± 0.002	0.494 ± 0.002	0.498 ± 0.002
3	0.324 ± 0.004	0.353 ± 0.005	0.322 ± 0.004
4	0.741 ± 0.003	0.751 ± 0.003	0.742 ± 0.003
5	0.210 ± 0.003	0.255 ± 0.005	0.210 ± 0.003
6	0.283 ± 0.003	0.330 ± 0.005	0.283 ± 0.003

Table 3. Análisis de los RIOWA. Desentrelazado de las contribuciones de la eliminación de datos duplicados y de la relajación de pesos.

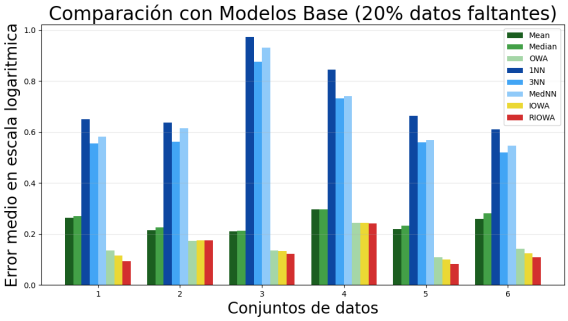


Fig. 1. Comparación frente a otros modelos de imputación de datos faltantes con un 20% de datos faltantes

5 Lineas de Trabajo Futuro

Como continuación de este trabajo, tenemos pensado seguir desarrollando estos operadores, extendiendo su formulación al dominio intervalar y estudiar la posibilidad de prescindir del vector inductor y por tanto, formular los Restricted OWA.

Acknowledgments

Este estudio esta financiado en parte por la Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código 001, N° Proceso 88887.917043 /2023-00, por el proyecto PID2022-136627NB-I00 apoyado por MCIN/AEI/10.13039 /501100011033/FEDER, UE, y por Tracasa Instrumental y el Departamento de Interior, Servicios SCiviles y Justicia del Gobierno de Navarra. Financiación para la publicación en Acceso Abierto dada por la Universidad Pública de Navarra.

References

1. A. Indurain-Ibero, B. Bedregal, M. Ferrero-Jaurrieta, J. Fernandez, H. Bustince, RI-OWA: Restricted induced ordered weighted averaging operators, applied to missing data imputation, Applied Soft Computing, 197 (2026) 115188.
2. R. R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking, IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics 18 (1) (1988) 183–190.
3. R. R. Yager, D. P. Filev, Induced ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics) 29 (2) (1999) 141–150.
4. P. Keerin, N. Iam-On, J. J. Liu, T. Boongoen, Q. Shen, Summarising multiple clustering-centric estimates with owa operators for improved knn imputation on microarray data, Fuzzy Sets and Systems 473 (2023) 108718.

Modus Tollens en el contexto de las uninormas discretas

Isabel Aguiló[1 [0000−0002−4434−3203]], Pilar Fuster-Parra[1 [0000−0003−2929−1625]], and Juan Vicente Riera[1 [0000−0002−0878−8301]]

Soft Computing, Image Processing and Aggregation Research Group (SCOPIA), Artificial Intelligence Research, Institute of the Balearic Islands (IAIB), Health Research Institute of the Balearic Islands (IdISBa), Mathematics and Computer Science Department, University of the Balearic Islands, Spain
{isabel.aguilo,pilar.fuster,jvicente.riera}@uib.es

Resumen Este trabajo es un resumen del trabajo publicado en 2026 en la revista Axioms en el año 2026 titulado *Modus Tollens in the Setting of Discrete Uninorms* para su presentación en la Multiconferencia CAEPIA 26 (ESTYLF 2026) KeyWorks.

Keywords: Modus Tollens · Uninormas discretas · Implicación difusa discreta · RU-implicaciones discretas · Negación en una cadena finita.

1. Motivación

La lógica difusa, desde su introducción por Zadeh en 1965 [1], se ha convertido en una herramienta fundamental para modelar el razonamiento impreciso. Un enfoque central es la adaptación de las reglas clásicas de inferencia al contexto difuso [2]. Entre ellas, la regla del *Modus Tollens* (que en lógica clásica establece que de $A \to B$ y $\neg B$ se puede inferir $\neg A$) ha suscitado una atención considerable. Su análogo difuso se estudia generalmente en términos de una desigualdad funcional que involucra distintos operadores. Esta desigualdad, conocida como la condición de Modus Tollens difuso, se expresa para todo $x, y \in [0, 1]$ como:

$$T(N(y), I(x, y)) \leq N(x),$$

donde T es una norma triangular, I es una función de implicación difusa y N es un operador de negación difusa [3].

Esta formulación recoge el espíritu del Modus Tollens en lógica difusa, con grados de verdad que reflejan la naturaleza gradual de la inferencia [4]. Los investigadores han propuesto generalizar las t-normas y t-conormas mediante la noción de *uninormas*, estudiando esta desigualdad funcional para distintas familias de esta clase de operadores [5].

Sin embargo, muchas aplicaciones del mundo real requieren representaciones discretas. En campos como la teoría de la decisión, los sistemas basados en conocimiento y el razonamiento cualitativo, la información suele darse en escalas

ordinales en lugar de valores numéricos precisos, modeladas habitualmente por cadenas finitas del tipo $L_n = \{0, 1, \cdots, n\}$.

De forma análoga al caso continuo, en este entorno discreto se han estudiado los distintos operadores clásicos (t-normas, t-conormas, uninormas, funciones de negación, funciones de implicación, etc.) y ciertas reglas de inferencia, dando lugar a resultados análogos o adaptaciones apropiadas al entorno discreto [6,7,8]. Siguiendo este enfoque, en este artículo investigamos el U-Modus Tollens utilizando uninormas conjuntivas discretas (en lugar de t-normas discretas), negaciones discretas y funciones de implicación discretas:

$$U(N(y), I(x, y)) \leq N(x), \text{para todo } \ x, y \in L_n$$

En este artículo publicado en [9], se estudia esta regla de inferencia para funciones de implicación residuales derivadas de las dos principales familias de uninormas discretas ($\mathcal{U}_{\text{mín}}$, idempotentes ($\mathcal{U}_{ide}$)). Además, se investiga qué propiedades deben satisfacer estos operadores y se proporcionan algunas caracterizaciones del U-Modus Tollens en este contexto.

2. Preliminares y resultados esenciales

Recordemos algunos conceptos básicos.

Definición 1. *[7] Una* uninorma discreta*, o simplemente una uninorma en L_n, es una aplicación $U : L_n^2 \to L_n$ que cumple las siguientes propiedades: asociatividad, conmutatividad y monotonía no decreciente respecto a cada argumento. Además, existe un elemento $e \in L_n$, denominado* elemento neutro*, tal que $U(e, x) = x$ para todo $x \in L_n$.*

Esta clase de operadores extienden tanto las t-normas discretas como las t-conormas discretas y suelen denotarse como $U \equiv \langle T_U, e, S_U \rangle$. Además, para cualquier uninorma U definida en L_n, se cumple que $U(0, n) \in \{0, n\}$. Más concretamente, si $U(n, 0) = 0$, la operación U se denomina *uninorma conjuntiva discreta*, mientras que si $U(n, 0) = n$, se denomina *uninorma disyuntiva discreta.*

En este trabajo se investiga el U-Modus Tollens para la familia de uninormas discretas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ y la familia de uninormas discretas idempotentes $\mathcal{U}_{ide}$(aquellas que satisfacen $U(x, x) = x$ para todo $x \in L_n$) [10].

Definición 2. *[11] Una aplicación $I : L_n \times L_n \to L_n$ se denomina implicación difusa discreta, o simplemente implicación discreta, si satisface las siguientes condiciones:*

(I1) $I(x, z) \geq I(y, z)$ si $x \leq y$, para todo $z \in L_n$.
(I2) $I(x, y) \leq I(x, z)$ si $y \leq z$, para todo $x \in L_n$.
(I3) $I(0, 0) = I(n, n) = n$, e $I(n, 0) = 0$.

Definición 3. *Una negación en una cadena finita L_n es una función $N : L_n \to L_n$ que es decreciente y satisface las condiciones de contorno $N(0) = n$ y $N(n) = 0$. Dicha negación se denomina* negación fuerte *cuando es involutiva, es decir, cuando $N(N(x)) = x$ para todo $x \in L_n$.*

Un primer resultado que nos permite conocer qué tipo de uninormas debemos considerar para estudiar esta regla de inferencia es el siguiente: El siguiente resultado muestra una condición necesaria para que una uninorma discreta U satisfaga la regla de U-*Modus Tollens* en el marco discreto.

Proposición 1. *Sea I una implicación discreta y N una negación definidas sobre la cadena finita L_n tales que el par (I, N) satisface el U-Modus Tollens. Entonces, la uninorma discreta U debe ser conjuntiva.*

A continuación se describe la estructura esencial de aquellas uninormas discretas en $\mathcal{U}_{\text{mín}}$ para las cuales se verifica el U-Modus Tollens, bajo las hipótesis de que N es estrictamente decreciente en $(0, e)$ y que I satisface el principio de neutralidad (NP), $I(n, y) = n$ para todo $y \in L_n$.

Teorema 1. *Sea I una función de implicación discreta que satisface (NP), y sea $U = \langle T_U, e, S_U\rangle_{\text{mín}}$ una uninorma discreta de la clase $\mathcal{U}_{\text{mín}}$, con elemento neutro $e \in L_n \setminus \{0, n\}$. Supongamos además que N es una negación en L_n estrictamente decreciente en el intervalo $(0, e)$. Entonces, el par (I, N) satisface la propiedad de U-Modus Tollens si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $U(N(y), I(e, y)) = 0$ *para todo* $y \in L_n$.
(ii) $N(x) = 0$ *para todo* $x \geq e$, *y* $N(x) < e$ *siempre que* $x > 0$.
(iii) $I(x, y) < e$ *para todo* $y < x < e$.
(iv) Las funciones I' y N' satisfacen la propiedad de Modus Tollens respecto a T_U para todo $y < x \leq e$, donde la implicación modificada $I' : [0, e] \times [0, e] \to [0, e]$ y la negación ajustada $N' : [0, e] \to [0, e]$ vienen dadas por:

$$I'(x, y) = \begin{cases} e & si\ x \leq y, \\ I(x, y) & si\ y < x, \end{cases} \tag{1}$$

$$N'(x) = \begin{cases} N(x) & si\ x > 0, \\ e & si\ x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Con el fin de caracterizar las soluciones en este contexto de RU-implicaciones inducidas por uninormas discretas de la familia de $U_{\text{mín}}$, se consideraron tres casos distintos teniendo en cuenta la relación entre los elementos neutros e y e_0. En este documento, abordamos el caso en el que $e = e_0$.

Teorema 2. *Sea I_{U_0} la RU-implicación asociada a la uninorma discreta $U_0 \equiv \langle T_{U_0}, e_0, S_{U_0}\rangle_{\text{mín}}$, sea N una negación en una cadena finita, y sea $U \equiv \langle T_U, e, S_U\rangle$ una uninorma conjuntiva discreta con $e = e_0$ como elemento neutro. Entonces, que el par (I_{U_0}, N) satisfaga la propiedad de U-Modus Tollens es equivalente al cumplimiento de la siguiente condición:*

(i) $U(N(y), y) = 0$ *y* $U(N(y), n) = N(y)$ *para todo* $y \leq e - 1$.
(ii) $N(x) < e$ *para todo* $x > 0$, *y* $N(x) = 0$ *para todo* $x \geq e$.

(iii) La implicación residual $I_{T_{U_0}}$, junto con la negación modificada N' definida en la Ecuación (2)*, satisface la propiedad de Modus Tollens con respecto a la t-norma T_U, para todo $y < x$.*

Para *RU*-implicaciones generadas por uninormas idempotentes, se han obtenido tres resultados principales, de los que se enunciará uno de ellos en este trabajo.

Teorema 3. *Sea $U_0 \equiv \langle g, e_0 \rangle_{ide}$ una uninorma idempotente discreta con elemento neutro $e_0 \in L_n$ tal que $\bar{g}$ es una negación en L_n. Sea N una negación que tiene e_0 como punto fijo, y sea U una uninorma discreta cuyo elemento neutro coincide con $e = e_0$. Entonces, que el par (I_{U_0}, N) satisfaga la propiedad de U-Modus Tollens es equivalente al cumplimiento de las siguientes condiciones:*

(i) $\bar{g}(x) \leq N(x)$ *para todo* $x \in L_n$.
(ii) $U(N(x), g(x)) = N(x)$ *para todo* $x \leq e_0$.
(iii) $U(N(x), x) = N(x)$ *para todo* $x \geq e_0$.
(iv) $U(N(y), y) \leq N(x)$ *siempre que* $y \leq g(x) \leq e_0 \leq x$.

3. Agradecimientos

Los autores quieren agradecer el apoyo del *Programa de Foment de la Recerca i la Innovació de la Universitat de les Illes Balears 2024-2026.*

Referencias

1. Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. Information and Control 8(3), 338–353 (1965)
2. Trillas, E., Mas, M., Monserrat, M., Torrens, J.: On the representation of fuzzy rules. Int. J. Approx. Reason. 48(2), 583–597 (2008)
3. Trillas, E., Alsina, C., Pradera, A.: On MPT-implication functions for fuzzy logic. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 98, 259–271 (2004)
4. Hájek, P.: Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998)
5. Aguiló, I., Riera, J.V., Suñer, J., Torrens, J.: Modus Tollens with respect to uninorms: U-Modus Tollens. Int. J. Approx. Reason. 127, 54–69 (2020)
6. De Baets, B., Fodor, J., Ruiz-Aguilera, D., Torrens, J.: Idempotent uninorms on finite ordinal scales. Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowl.-Based Syst. 17(1), 1–14 (2009)
7. Mas, M., Mayor, G., Torrens, J.: t-Operators and uninorms on finite totally ordered sets. Int. J. Intell. Syst. 14(9), 909–922 (1999)
8. Munar, M., Couceiro, M., Massanet, S., Ruiz-Aguilera, D.: A survey on the enumeration of classes of logical connectives and aggregation functions defined on a finite chain, with new results. Fuzzy Sets Syst. 490, 109023 (2024)
9. Aguiló, I., Fuster-Parra, P., Riera, J.V.: Modus Tollens in the Setting of Discrete Uninorms. Axioms 15(1), 77 (2026)
10. De Baets, B., Fodor, J., Ruiz-Aguilera, D., Torrens, J.: Idempotent uninorms on finite ordinal scales. Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowl.-Based Syst. 17(1), 1–14 (2009)
11. Mas, M., Monserrat, M., Torrens, J.: S-implications and R-implications on a finite chain. Kybernetika 40(1), 3–20 (2004)